PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS

ANEXO 2 – DETALLES DE LA PROPUESTA

TIPOS DE INVESTIGACIÓN

Investigación básica: X   Investigación aplicada:

DEPARTAMENTO(S) Y/O INSTITUTO(S):
1. **Departamento de Matemática**

LÍNEA(S) DE INVESTIGACIÓN (verificable en el SAEW):
1. **Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales**

DISCIPLINA CIENTÍFICA (Marque X, solamente una opción)	
Ciencias Naturales y Exactas;	X
Ingeniería y Tecnologías;	
Ciencias Médicas;	
Ciencias Agrícolas;	
Ciencias Sociales;	
Humanidades.	

OBJETIVO SOCIOECONÓMICO (Marque X, solamente una opción)	
Exploración y explotación del medio terrestre;	
Ambiente;	
Exploración y Explotación del espacio;	
Transporte, telecomunicaciones y otras infraestructuras;	
Energía;	
Producción y tecnología industrial;	
Salud;	
Agricultura;	
Educación;	X
Cultura, ocio, religión y medios de comunicación;	
Sistemas políticos y sociales, estructuras y procesos;	
Defensa;	
Avance general del conocimiento: I+D financiada con los Fondos Generales de Universidades (FGU);	
Avance general del conocimiento: I+D financiados con otras fuentes.	

1	Proyecto de Investigación
	Título: Problemas en ecuaciones diferenciales parciales que involucran operadores locales y no locales.
	Resumen del proyecto: En este proyecto de investigación trabajaremos en algunas ecuaciones dispersivas y disipativas no lineales de la mecánica de fluidos. Las interrogantes a tratar en este proyecto de investigación son: la estabilidad local y asintótica, el comportamiento asintótico en variable espacial y la regularidad de las soluciones.
	Palabras clave: Ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, problemas de evolución de tipo dispersivo y disipativo, ecuación KdV, ecuación del calor, operador Laplaciano fraccionario.

2	**Objetivos, relevancia, productos y resultados esperados de esta propuesta de Investigación**

2.1 Objetivos

2.1.1 Objetivo General

• El objetivo general de este proyecto de investigación es el de la existencia, el comportamiento asintótico y la estabilidad de las soluciones de ciertas ecuaciones dispersivas y disipativas.

2.1.2 Objetivos Específicos

a. Estudio de la formulación de *Duhamel* de las ecuaciones.
b. Estudio de las propiedades de regularidad y decrecimiento del *semi-grupo* asociado a la formulación de Duhamel.
c. Existencia Local en tiempo y unicidad de soluciones *mild* en espacios funcionales adaptados al estudio del decrecimiento.
d. Existencia Global en tiempo de las soluciones *mild*.
e. Regularidad en variable espacial de las soluciones *mild*.

2.2 Detalle de los resultados esperados (con relación a los objetivos)

a. Encontrar el decrecimiento maximal del *semi-grupo* asociado a la formulación de Duhamel.
b. Dar condiciones de decrecimiento sobre el dato inicial para que la solución *mild* asociada preserve el mismo decrecimiento en variable espacial.
c. Establecer estimaciones de tipo *Gronwall* para mostrar la existencia global de soluciones *mild.*
d. Demostrar que el decrecimiento de la solución *mild*, obtenido en el punto b., es maximal.
e. A parir de las inclusiones *Sobolev Besov*, mostrar que la solución es suficientemente regular en variable espacial.

3	**Relevancia de la propuesta de investigación y su relación con la(s) líneas de investigación**

Este proyecto de investigación es de relevancia en el área de ecuaciones en derivadas parciales por dos razones principales. Por un lado, las ecuaciones que se estudian describen modelos físicos de actualidad relacionados a la mecánica de fluidos y a la conducción térmica sobre un sólido.

Por otro lado, se pone en evidencia que el Análisis Armónico moderno resulta ser una muy útil herramienta para el estudio de estas ecuaciones y las técnicas que serán implementadas pueden ser aplicadas sin ningún problema a una gran gama de problemas de tipo dispersivo y disipativo.

4	Productos esperados (marcar con una "X" al menos uno de los productos señalados)

Tipo de Producto:	**Marcar con una "X"**
a. Disertación a la Comunidad Politécnica (obligatorio);	X
b. Presentación de un artículo en formato de la Revista Politécnica (obligatorio);	X
c. Proyecto de titulación;	X
d. Aplicación tecnológica construida o implementada;	
e. Patente presentada;	
f. Perfil de proyecto de mayor impacto científico, técnico, pedagógico o de innovación;	
d. Publicaciones científicas indexada en SCIMAGO-SCOPUS/WoS/SCIELO/Latindex Catálogo o un artículo en congreso indexado en SCOPUS;	X

5	Descripción, metodología y diseño del proyecto

5.1 Descripción del proyecto y metodología

El estudio de las ecuaciones parabólicas dispersivas y disipativas es un tema de investigación de gran relevancia y actualidad en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales. Este proyecto de investigación abarca dos objetivos principales:

5.1.1 Primera parte: Ecuaciones con operadores locales dispersivas.

En esta parte de nuestro proyecto, nos interesamos en el problema de Cauchy para ciertas ecuaciones dispersivas no lineales. Este tipo de ecuaciones intervienen naturalmente en numerosos fenómenos físicos concernientes a la propagación de ondas en la superficie de un fluido en un medio dispersivo.

Un modelo muy conocido de este tipo de problemas es la ecuación KdV desarrollo por D.J Korteweg y Hendrik de Vries, que tenía por objeto la explicación de un fenómeno de hidrodinámica observado por el ingeniero Scott Russell 60 años antes. La ecuación propuesta es la siguiente

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0,$$

Esta ecuación se puede derivar como un modelo asintótico a partir de las ecuaciones de Euler para fluidos en superficie libre de profundidad despreciable (*shallow water regime*). Existen muchas variantes de esta ecuación que permiten describir otro tipo de fenómenos físicos. Una de ellas es el tema principal de la primera parte de esta investigación. Concretamente, trabajaremos en el estudio del problema de Cauchy para una ecuación de tipo KdV, con una perturbación no local definida a través de la transformación de Hilbert.

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}(u) + \eta(\mathcal{H}\partial_x u + \mathcal{H}\partial_x^3 u) = 0, & t \in [0,T], \quad x \in R, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mathcal{H}$ es la transformación de Hilbert y $\mathcal{L}(u)$ es un término de difusión, que será definido por las siguientes expresiones:

- Primero, vamos a considerar $\mathcal{L}(u) = u\partial_x u + \partial_x^3 u$. En este caso (1) es una perturbación no local de la ecuación KdV.
- Después, vamos a considerar $\mathcal{L}(u) = u\partial_x u + \partial_x^2 \mathcal{H}(u)$. En este caso, la ecuación (1) es una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM).

Resultados de buen colocamiento local y global para ambas ecuaciones fueron extensivamente estudiados en el marco de espacios de Sobolev [1–3].

Concerniente al comportamiento asintótico en variable espacial, cabe destacar algunos resultados obtenidos por B. Alvarez-Samaniego [1] para el primer caso. Alvarez-Samaniego mostró que si el dato inicial u_0 verifica $u_0 \in H^2(R) \cap L^2(1 + |\cdot|^2, dx)$ entonces la solución del problema (1), asociada a este dato inicial pertenece al espacio funcional $C([0,\infty[; H^2(R) \cap L^2(1 + |\cdot|^2, dx))$. Mientras que para el segundo caso, tenemos similares resultados obtenidos por Fonseca *et. al.* en [3].

Nuestro primer objetivo es mejorar estos resultados al relacionarlos con el decaimiento puntual de la solución en variable espacial. En particular, nosotros queremos resolver el siguiente problema: si el dato inicial verifica $|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^2}$ entonces la solución única global en tiempo $u(t,x)$ admite el mismo decaimiento puntual en variable espacial del dato inicial. Por último, analizaremos la optimalidad de dicho decaimiento en variable espacial de la solución de (1).

Metodología y diseño de la primera parte del proyecto

Para lograr estos propósitos, utilizaremos un enfoque diferente al de los resultados previos de decaimiento sobre la ecuación (1): estos trabajos de investigación están intrínsicamente relacionados con la naturaleza de los espacios de Sobolev $H^s(R) \cap L^2(1 + |\cdot|^2, dx)$, donde la transformación de Fourier juega un rol importante. Esto es razonable debido a que el núcleo asociado a la parte lineal del problema (1), en el cuál se fundamentan todos estos resultados, esta definido explícitamente en variable frecuencial.

Nuestra metodología es técnicamente diferente y consiste en hacer estimaciones de decaimiento en variable espacial del núcleo asociado a la parte lineal de (1), a pesar que este núcleo no este explícitamente definido en variable espacial.

Finalmente, vale la pena señalar que este enfoque permite estudiar la ecuación en otros espacios funcionales que, hasta donde sabemos, no se han considerado antes. Motivados por algunos resultados actuales y métodos empleados en ecuaciones de mecánica de fluidos, planeamos seguir el esquema de trabajo que se describe a continuación:

1. Existencia global en tiempo de soluciones en espacios funcionales que describen el decaimiento en variable espacial

La idea básica es estudiar en primer lugar el decaimiento en variable espacial del núcleo asociado a la parte lineal de la ecuación (1). Con esta información a la mano, podríamos encontrar un espacio funcional adecuado en el que podamos construir una solución con las mismas propiedades de decaimiento que el núcleo.

2. Perfil asintótico y decaimiento óptima de las soluciones.

Construiremos el perfil de la solución del problema (1) para la variable espacial suficientemente grande. Esperamos mostrar que el comportamiento de la solución en la variable espacial es en realidad el comportamiento similar al núcleo de la ecuación.

El siguiente paso es probar que aunque el dato inicial $u_0(x)$ sea una función regular de decaimiento arbitrariamente rápido en variable espacial, la solución que surge de este dato tiene el mismo decaimiento en variable espacial que el núcleo de la ecuación (1). Por lo tanto, los resultados esperados serán óptimos.

5.1.2 Segunda parte: Ecuaciones parabólicas disipativas.

Básicamente, en esta última parte de nuestra investigación, trabajaremos en el estudio del siguiente problema de Cauchy, dado por

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (-\Delta)^{\alpha/2} u(t,x) = f(t,x), & t \in [0,T], \quad x \in R^n, \quad 0 < \alpha < 2, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

donde $(-\Delta)^{\alpha/2}$ $(0 < \alpha < 2)$ es el operador Laplaciano fraccionario, mientras que $u_0\colon R^n \to R$, $f\colon [0,T] \times R^n \to R$ son los datos de nuestro problema. El problema (2) es conocida como la ecuación del calor fraccionario [5,6].

Los trabajos conocidos para la ecuación del calor, sugieren realizar un estudio matemático riguroso de (2) en busca de resultados similares, o a su vez mostrar las limitaciones que se presentan debido a que en esencia ambos operadores, Laplaciano clásico y Laplaciano fraccionario, son diferentes y las técnicas de estudio (locales) que se utilizan en el caso clásico ya no son válidas para el caso fraccionario. De esta manera, el objetivo principal de esta parte de nuestro proyecto es estudiar el problema de Cauchy (2) haciendo uso de herramientas clásicas del Análisis Armónico [7].

Metodología y Diseño del Proyecto

Como ya se mencionó, el modo en que estudiaremos el problema (2) seguirá ideas similares al estudio de la ecuación del calor clásica [8] y por tanto se dará una equivalencia entre la ecuación (2) y la formulación integral:

$$u(t,x) = \left(P_s(t,\cdot) * u_0\right)(x) + \int_0^t \left(P_s(t-\tau,\cdot) * f(\tau,\cdot)\right)(x)\,d\tau. \tag{3}$$

donde $P_s(t,x)$ es la solución fundamental al problema (2).

Es importante señalar que al contrario del núcleo del calor $h(t,x)$, la solución fundamental $P_s(t,x)$ no se podrá escribir de manera explícita en variable espacial, pero sí en variable de Fourier.

Una vez establecidos resultados de existencia y unicidad de la solución u en los espacios de Sobolev [9], se esperará abordar el problema de la regularidad maximal de esta solución de la siguiente forma: como $f \in L^2\left([0,T], \dot{H}^{s_1}(R^n)\right)$, nosotros estudiaremos la siguiente estimación:

$$\left\| \int_0^t \left(P_s(t-\tau,\cdot) * f(\tau,\cdot)\right)(x)\,d\tau \right\|_{L^2([0,T],\dot{H}^{s_1+s}(R^n))} \approx \|f\|_{L^2([0,T],\dot{H}^{s_1+s}(R^n))}, \tag{4}$$

donde se podrá observar que a partir de la regularidad inicial de f en $\dot{H}^{s_1}(R^n)$, el término de la parte izquierda de (4) tiene una ganancia maximal de regularidad en $\dot{H}^{s_1+s}(R^n)$, lo cual implicará la regularidad de la solución.

Planeamos seguir el siguiente plan de trabajo descrito a continuación:

1. Herramientas de base y estudio del operador Laplaciano fraccionario.

Aquí se estudiarán a profundidad las herramientas teóricas necesarias para tratar el problema (2). Paulatinamente, nos dedicaremos a comprender de mejor manera cada uno de los componentes que aparecen en el problema (2) y para ello es necesario estudiar al operador Laplaciano fraccionario, sus propiedades y caracterizaciones, en variable de Fourier, como operador de convolución y como operador de integral singular [10].

2. Existencia, unicidad y regularidad maximal de la solución del problema (2)

Empezaremos definiendo y estudiando las soluciones de tipo *mild* para el problema (2). Después, realizaremos algunas estimaciones que proporcionarán información valiosa sobre la regularidad e integrabilidad de los datos del problema.

En cuanto al estudio de la Regularidad maximal haremos uso de la caracterización de los espacios de Sobolev a través de la transformación de Fourier y del hecho que la solución fundamental de (2) también tiene una formulación explicita en variable de Fourier para llegar al resultado esperado.

Referencias

[1] B. Alvarez Samaniego. (2002). *On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation.* (PhD thesis). Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA), Río de Janeiro, Brasil.

[2] A. Esfahani. (2018). *Well-posedness result for the Ostrovsky, Stepanyams and Tsimring equation at the critical regularity.* Nonlinear Analysis: Real World Applications, volumen (44), 347-364, doi: 10.1016/j.nonrwa.2018.05.011.

[3] G. Fonseca, R. Pastran & G. Rodríguez-Blanco. (2018).*The IVP for a nonlocal perturbation of the Benjamin-Ono equation in classical and weighted Sobolev spaces.* Recuperado de arXiv:1807.10674 (Junio, 2019).

[4] G. Fonseca, F. Linares & G. Ponce. (2015). *On persistence problems in fractional weighted spaces.* Proceedings of the AMS, volumen (143), 5353-5367, doi: 10.1090/proc/12665.

[5] H. Bahouri , J. Chemin & Danchin R. (2011). *Fourier analysis and nonlinear partial diferential equations, A series in comprehensive studies in mathematics.* (primera edición). Berlín, Alemania: Springer.

[6] K. Xu. (2018). *The Fractional Laplacian for the Fractional PDEs, Stanford University.* Recuperado de http://stanford.edu/kailaix/files/Fractional_Laplacian_for_fractional_PDEs.pdf (Mayo, 2019).

[7] L. Grafakos. (2008). *Classical Fourier Analysis.* (segunda edición). Columbia, USA: Springer.

[8] P. Lamarié. (2002). *Recent develoments in the Navier-Stokes problem.* (primera edición). París, Francia: CRC Press.

[9] P. Lamarié. (2016). *The Navier-Stokes problem in the 21st Century.* (segunda edición). París, Francia: CRC Press.

[10] C. Bucur. & E. Valdinoci. (2016) *Nonlocal Diffusion and Applications: Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana.* (primera edición). Suiza: Springer. thesis, University of Texas at Austin, 2005.

6	Infraestructura, equipos y fondos adicionales

6.1 Infraestructura y equipos

Al ser un proyecto teórico de matemática, la infraestructura necesaria serán las oficinas de los docentes en el Departamento de Matemáticas, equipadas con computadores de escritorio.

6.2 Breve justificación del equipo requerido

No requerimos equipo adicional.

6.3 Fondos Adicionales

No contamos con fondos adicionales.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS

ANEXO 3 - CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES DEL PROYECTO

Título del Proyecto Problemas en ecuaciones diferenciales parciales que involucran operadores locales y no locales.

N°	Actividad	Año 1																																													
		Mes 1				Mes 2				Mes 3				Mes 4				Mes 5				Mes 6				Mes 7				Mes 8				Mes 9				Mes 10				Mes 11				Mes 12			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Recopilación de la información.	X	X	X	X	X	X	X	X																																								
2	Estudio de la existencia local y global de las soluciones de los problemas propuestos.									X	X	X	X	X	X	X	X																																
3	Regularidad de la solución en espacios de Sobolev.																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X																				
4	Estudio del decaimiento de la solución en variable espacial.																													X	X	X	X	X	X	X	X												
5	Escritura de los resultados obtenidos.																																					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS

ANEXO 4 - DECLARACIÓN

TIPOS DE INVESTIGACIÓN

Investigación básica: X	Investigación aplicada:

TÍTULO DEL PROYECTO

Problemas en ecuaciones diferenciales parciales que involucran operadores locales y no locales.

DECLARACIÓN DEL DIRECTOR DEL PROYECTO

El equipo de investigadores, representado por el Director del Proyecto declara lo siguiente:

- Que el presente proyecto es una creación original de mi autoría y del equipo de investigadores, y por tanto asumimos la completa responsabilidad legal en caso de que un tercero alegue la titularidad de los derechos intelectuales del proyecto, exonerando a la EPN de cualquier acción legal que se derive por esta causa.
- Que el presente proyecto no ha sido presentado en ninguna convocatoria de otra institución pública o privada. El incumplimiento será causal para que el proyecto no sea tomado en consideración.
- Que todos los bienes adquiridos en proyecto permanecerán bajo la custodia y responsabilidad del director de proyecto durante la ejecución del mismo.
- Que si el proyecto genera algún producto o procedimiento susceptible de obtener derechos de propiedad intelectual, de los cuales se deriven beneficios, aceptamos que éstos serán compartidos entre los investigadores y la institución o las instituciones participantes en el proyecto, conforme a lo establecido en el COESC.
- Que el equipo de investigadores y/o instituciones participantes se comprometen a mantener la confidencialidad de la información si ésta podría ser susceptible de protección por patentes, y solicitar la valoración de propiedad intelectual respectiva previa a cualquier publicación o difusión.
- Que para el caso de derechos de autor otorgamos una licencia de uso exclusivo con fines académicos para la o las instituciones participantes en el proyecto.

Firma del Director del Proyecto
Nombre: Manuel Fernando Cortez Estrella
C.I.: 171681589-7

DECLARACIÓN DEL JEFE DE DEPARTAMENTO

Esta propuesta ha sido aprobada y avalada por el Consejo del Departamento de Matemática, en sesión del día 11 de junio del 2019 mediante resolución No. CDM-2019-065

Las instalaciones, incluyendo personal, edificios, equipo y recursos financieros están a disposición del proponente y sus colaboradores de acuerdo con las especificaciones que se encuentran en esta propuesta.

Firma del Jefe del Departamento
Nombre: Diego Recalde.
C.I.: 1712025335

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA JEFATURA