ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS NO LINEALES DE TIPO AMBROSETTI-PRODI

TÉCNICAS DE SUB Y SUPERSOLUCIONES Y EL GRADO TOPOLÓGICO PARA ENCONTRAR SOLUCIONES A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES PERIÓDICOS DE TIPO AMBROSETTI-PRODI

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

HENRY ISRAEL TOCAGÓN FONTE

henry.tocagon@epn.edu.ec

DIRECTOR: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PH.D.

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, HENRY ISRAEL TOCAGÓN FONTE, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Henry Tocagón

HENRY ISRAEL TOCAGÓN FONTE

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por HENRY ISRAEL TOCAGÓN FONTE, bajo mi supervisión.

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE Ph.D.

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como los productos resultantes del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

HENRY ISRAEL TOCAGÓN FONTE

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE Ph.D.

RESUMEN

Dada una ecuación diferencial ordinaria de tipo Ambrosetti-Prodi donde una de sus componentes es periódica, intentamos buscar las soluciones o posibles soluciones para la ecuación diferencial. Para ello nos centraremos en estudiar dos técnicas distintas, la primera es conocida como sub y super soluciones y la segunda es el grado topológico, las cuales son utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales. Finalmente adaptaremos estas técnicas para encontrar respuestas a nuestro problema planteado.

Palabras clave: Problemas de tipo Ambrosetti-Prodi, sub y super soluciones, grado topológico, grado de Coincidencia.

ABSTRACT

Given an ordinary differential equation of the Ambrosetti-Prodi type, where one of its components is periodic, we are going to find the solutions or possible solutions for the differential equation. To achieve that, we will focus on studying two different techniques, the first is known as upper and lower solutions and the second is the topological degree, the appropriate ones are used to solve differential equations. Finally we will adapt these techniques to find answers to our problem.

Keywords: upper and lower solutions, topological degree, Ambrosetti-Prodi problems, Coincidence degree.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

Este proyecto está enfocado en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes periódicas, de tipo Ambrosetti-Prodi.

Algunos autores han desarrollado estos tipos de problemas como lo podemos ver en [4],[9] y [8]. Tomando estas ideas desarrolladas se logrará encontrar las soluciones para:

$$u'' + f(u)u' + g(u) + h(t) = s + \beta u, \tag{1.1}$$

donde $s \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, h es una función continua, T periódica; y g es una función que satisface las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi.

Para llevar a cabo este fin (encontrar las posibles soluciones de (1.1)) se usará técnicas de sub y super soluciones, y el grado de Coincidencia de Mawhin. En ([10],[5]) se encuentran las aplicaciones de las técnicas de sub y super soluciones y del grado de Coincidencia, mas adelante presentaremos el estudio de dichas técnicas.

1.1. Objetivo general

Estudiar las técnicas de sub y supersoluciones, y el grado topológico para encontrar las soluciones a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes periódicos de tipo Ambrosetti-Prodi.

1.2. Objetivos específicos

1. Analizar y entender el problema del tipo Ambrosetti-Prodi en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
2. Realizar un estudio de las técnicas de sub y súper soluciones y el grado topológico.
3. Aplicar las técnicas estudiadas al problema del tipo Ambrosetti- Prodi dado en (1.1) para encontrar posibles soluciones.

1.3. Alcance

A través de este proyecto, se encontrarán las posibles soluciones para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes periódicos, y de tipo Ambrosetti-Prodi, usando las técnicas de sub y super soluciones y el grado topológico.

1.4. Marco teórico

En ese capítulo se mostrarán las nociones, teoremas, y técnicas que se utilizarán a lo largo de este proyecto, con el fin de entrar en el contexto con la problemática planteada, y tener la visión de cómo se proyectan los resultados que se quieren obtener. Dentro de las técnicas que vamos a estudiar se encuentran las sub y súper soluciones y el grado topológico .

1.4.1. Nociones preliminares

Las notaciones utilizadas a lo largo de este trabajo se tomaron como base en [7].

Notaremos por $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ al conjunto $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$, y a este conjuntos se le conoce como un Intervalo. Por tanto el intervalo $[0,T]$ donde $T \in \mathbb{R}$, es el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq T\}$.

Si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y derivable en todo punto de (a,b). Denotamos por u' a la derivada de u. Por tanto u'' será la segunda derivada de u.

A continuación se da a conocer algunos espacios de funciones los cuales serán utilizadas en el trayecto de este trabajo.

- $C([a,b])$ denota al conjunto de todas las funciones continuas $u : [a,b] \to \mathbb{R}$.
- $C^1([a,b])$ denota al conjunto de las funciones derivables $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, y además u' es continua.
- $C^2([a,b])$ denota al conjunto de las funciones dos veces derivables $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, y además u'' es continua.
- $C^k([a,b])$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ denota al conjunto de las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son k veces derivables, y su k-ésima derivada es continua.
- C_T es el conjunto de todas las funciones continuas real valuadas, y T periódicas.
- $C_T^1 := C^1([0,T]) \cap C_T$.

  Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado entonces
- $C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ define el conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que son continuas.
- $C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ es el conjunto de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que son k veces diferenciable y su k-ésima derivada es continua.

  Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces,
- $L^p([a,b])$ denota al conjunto de todas las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Lebesgue medibles, tales que

$$\int_a^b |u|^p dt < \infty.$$

1.4.2. Técnicas de sub y super soluciones

El método de sub y super soluciones se ocupa principalmente para determinar la existencia de soluciones en los problemas de valores en la frontera. Tomemos el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} u'' + F(t,u,u') = s \\ u(0) = u(T) \\ u'(0) = u'(T) \end{cases} \tag{1.2}$$

Donde s es un parámetro real, F es una función continua y de periodo T en la primera variable.

La siguiente definición y proposición con su respectiva demostración las podemos encontrar en [10].

Definición 1.4.2.1. *(Definition 3.1, [10]) Se dice que las funciones $\alpha, \beta \in C_T^2$ son sub y super soluciones de (1.2) respectivamente, si para todo $t \in [0,T]$ se verifica:*

$$\alpha''(t) + F(t,\alpha(t),\alpha'(t)) \geq s,$$
$$\beta''(t) + F(t,\beta(t),\beta'(t)) \leq s.$$

Observación 1.4.2.1. *Decimos que $\alpha, \beta \in C_T^2$ son sub y super soluciones estrictas respectivamente si las desigualdades anteriores son estrictas.*

Proposición 1.4.2.1. *(Proposition 3.1,[10]) Sean $\alpha, \beta \in C_T^2$ sub y super soluciones de (1.2) con $\alpha(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0,T]$. Entonces el problema (1.2) tiene al menos una solución u que satisface $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0,T]$.*

Demostración. ver ([10], página 6). □

1.4.3. Grado topológico de Brouwer

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, consideremos una función $f \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ y $b \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. Además $J_f(x)$ es el determinante de $f'(x)$, donde $f'(x)$ denota la matriz Jacobiana de f.

Notamos por $\mathcal{R}$ a la clase de todas las tripletas (f,Ω,b) donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $f\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)\cap C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ y $b\notin f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f en Ω, es decir, $f'(x)$ es invertible para cada punto $x\in\Omega$ que satisface $f(x)=b$.

Como podemos ver en [1] la definición del grado de Brouwer se da a través de varios pasos.

- **Paso 1: Definición del grado de Brouwer en $\mathcal{R}$** (step 1,[1], pág. 34) Supongamos que $(f,\Omega,b)\in\mathcal{R}$. Notemos que el conjunto $\{u\in\Omega : f(u)=b\}$ es finito pues b es un valor regular de f y Ω es acotado. En este caso se define

$$deg(f,\Omega,b)=\sum_{f(x)=b} sign(J_f(x)).$$

- **Paso 2: Extensión a funciones continuas.**(Step 2,[1],pág. 35) Para extender la definición del grado de Brouwer a valores singulares b de f usaremos el lema de Sard.

  Lema 1.4.3.1 (Lema de Sard). *(Sard lemma, [1]) Sea $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Consideremos el conjunto de todos los puntos singulares de f como $\mathcal{G}(f)$, es decir, $\mathcal{G}(f)=\{x\in\Omega : J_f(x)=0\}$ entonces $f(\mathcal{G}(f))$ tiene medida de Lebesgue cero.*

  Como consecuencia directa, la clase de funciones $f\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ para el cual b es una valor regular es denso en el espacio $C(\Omega,\mathbb{R}^N)$ y por tanto el grado definido para $\mathcal{R}$ se extiende de manera única a una función continua en la clase de las tripletas (f,Ω,b) con $f\in C(\Omega,\mathbb{R}^N)$, Ω subconjunto de $\mathbb{R}^N$ abierto y acotado y $b\notin f(\partial\Omega)$.

Las principales propiedades del grado de Brouwer cuyas demostraciones las podemos encontrar a detalle en ([1], pág. 35,36) son las siguientes:

P1) **Normalización.** $deg(I,\Omega,b)=1$, con $b\in\Omega$, donde I es la función identidad.

P2) **Aditividad.** Si Ω_1,Ω_2 son conjuntos abiertos y acotados disjuntos de

Ω y además $b \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Entonces

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega_1, b) + deg(f, \Omega_2, b)$$

P3) **Homotopía.** Sea $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ una homotopía. Si $b \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$ y satisface que $b(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ para cada $t \in [0,1]$, entonces $degH((t, \cdot), \Omega, b)$ es constante. En particular $degH((1, \cdot), \Omega, b) = degH((0, \cdot), \Omega, b)$.

P4) **Solución.** Si $deg(f, \Omega, b) \neq 0$ entonces $b \in f(\partial\Omega)$, es decir, existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.

P5) **Excisión.** Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto tal que $b \notin f(K)$. Entonces

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega \setminus K, b).$$

P6) **Dependencia en los valores de la frontera.** $deg(f, \Omega, b)$ depende solamente de los valores de f en la frontera, es decir, si $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tales que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, entonces

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b).$$

P7) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ con $N \geq n$ entonces

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^n}, \Omega \cap \mathbb{R}^n, b).$$

P8) **Continuidad con respecto a b.** El grado es constante para b en cada componente conexa de $\mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$.

P9) **Continuidad con respecto a f.** Existe una vecindad V de f en $C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b) \quad \forall g \in V.$$

1.4.4. Grado topológico de Leray Schauder

El grado de Brouwer ha sido extendido a espacios de dimensión infinita por Leray y Schauder para perturbaciones compactas de la identidad.

Sea X un espacio de Banach, y sea Ω un subconjunto abierto de X. Considere además un operador compacto $T \in C(\overline{\Omega}, X)$ y sea $\phi = I - T$ donde I denota la identidad en X. Sea $b \in \Omega$ tal que $b \notin \phi(\partial\Omega)$. El grado topológico de Leray Schauder como nos indica en [1] es definido en cualquier tripleta (ϕ, Ω, b) con las propiedades anteriores. A la clase de las tripletas formado por (ϕ, Ω, b) las denotaremos por $\mathcal{D}$.

Como T es un operador compacto, existe una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores continuos con rango de dimensión finita tal que $T_n \to T$ uniformemente.

Lema 1.4.4.1 (Lemma 4.2.2 [1]). *Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ es tal que $S_n \to T$ uniformemente, entonces*

$$deg((I - S_n)|_{\Omega\cap\mathbb{R}^n}, \Omega \cap \mathbb{R}^n, b) = deg((I - T_n)|_{\Omega\cap\mathbb{R}^n}, \Omega \cap \mathbb{R}^n, b), \quad \forall n \gg 1.$$

Definición 1.4.4.1 (Definition 4.2.3 [1]). *Si $(\phi, \Omega, b) \in \mathcal{D}$ entonces definimos el grado de Leray Schauder (LS) por*

$$deg_{LS}(\phi, \Omega, b) = deg((I - T_n)|_{\Omega\cap\mathbb{R}^n}, \Omega \cap \mathbb{R}^n, b)$$

.

Todas las propiedades del grado de Brouwer se cumplen para el grado de Leray Schauder. Como aplicación directa tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.4.4.2 (Theorem 4.2.6 [1]). *(**teorema del punto fijo de Schauder**) Sean X un espacio de Banach y B una bola cerrada en X, $T : B \to B$ un operador compacto, entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración. ver ([1], página 38). □

1.4.5. Grado de Coincidencia de Mawhin

Antes de definir el grado de Coincidencia vamos a introducir la siguiente definición.

Definición 1.4.5.1 (Operador de Fredholm). *(Definición 1.2.1, [3]) Sean X, Z dos espacios de Banach, y $L : Dom(L) \subset X \to Z$ un operador lineal tal* *que $Dom(L)$ es un subespacio vectorial de X. Se dice que L es un operador de Fredholm si verifica las siguientes condiciones:*

i) Im (L) es cerrado en Z.

ii) Ker (L) y coker (L) son de dimensión finita.

Observación 1.4.5.1. *Si se verifican (i) y (ii) en la definición anterior y si además se cumple que $dim($ ker (L)$) = dim$ (coker (L)) entonces diremos que L es un operador de Fredhom de índice cero.*

Si L es un operador de Fredholm de índice cero, del análisis funcional sabemos que existen proyectores continuos $P : X \to X$ y $Q : Z \to Z$ tales que

$$\begin{aligned} Im(P) &= ker(L) \\ Im(L) &= ker(Q) \end{aligned} \tag{1.3}$$

y además

$$\begin{aligned} X &= ker(L) \oplus ker(P) \\ Z &= Im(L) \oplus Im(Q). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Antes de introducir la siguiente definición vamos a considerar

$$L_p : Dom(L) \cap ker(P) \to Im(L),$$

como el operador L restringido al $Dom(L) \cap ker(P)$, es decir $L_p = L|_{Dom(L) \cap ker(P)}$. Como nos muestra ([3], pág.6) se cumple que L_p es un isomorfismo. Ahora denotemos por

$$K_p : Im(L) \to Dom(L) \cap ker(L).$$

a la función inversa de L_p, es decir $K_p = L_p^{-1}$.

Definición 1.4.5.2 (Definición 1.2.2 [3]). ***(Inversa generalizada de L)**. Considerando todas las notaciones antes mencionadas; se define la inversa generalizada de L como el operador*

$$K_{P,Q} : Z \to Dom(L) \cap ker(L)$$

tal que

$$K_{P,Q} := K_p(I - Q).$$

Ahora bien, consideremos $coker(L) = Z/Im(L)$ como el espacio cociente de Z bajo la relación de equivalencia

$$z \sim y \Leftrightarrow z - y \in Im(L).$$

De este modo $coker(L) = \{z + Im(L) : z \in Z\}$. Por otro lado denotaremos

$$\begin{array}{rcl} \Pi : Z & \longrightarrow & coker(L) \\ z & \longmapsto & z + Im(L) \end{array}$$

la sobreyección canónica y se verifica que

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z \in Im(L) \Leftrightarrow \Pi(z) = 0.$$

En adelante vamos a considerar $L : Dom(L) \subset X \to Z$ un operador de Fredholm de índice cero y $N : \overline{\Omega} \to Z$ un operador no necesariamente lineal donde $\Omega \subset X$ un subconjunto abierto y acotado.

El principal objetivo del estudio del grado de Coincidencia es analizar las condiciones para que la ecuación

$$Lx = Nx, \tag{1.5}$$

tenga al menos una solución en $Dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Definición 1.4.5.3 (Definición 1.2.3 [3]). *(**Operador L-compacto**) Sea $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado. Se dice que $N : \bar{\Omega} \to Z$ es un operador $L-$ compacto si se verifican las siguientes condiciones*

i) Si el operador $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ es compacto en $\overline{\Omega}$.

ii) $\Pi N : \overline{\Omega} \to coker(L)$ es continuo y además $\Pi N(\overline{\Omega})$ es acotado.

Ahora vamos a considerar Φ a la clase de todos los isomorfismos del $coker(L)$ en el $ker(L)$ y con esto tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4.5.4 (Definición 1.2.4 [3]). *Decimos que Λ y Λ' son homotópicas en Φ si y sólo si existe*

$$\bar{\Lambda} : [0,1] \times coker(L) \to ker(L)$$

tal que

$$\bar{\Lambda}(0,\cdot) = \Lambda' \quad y \quad \bar{\Lambda}(1,\cdot) = \Lambda.$$

De igual manera si tenemos la orientación del $ker(L)$ se dice que

$$\Lambda : coker(L) \to ker(L)$$

es un isomorfismo que preserva la orientación si y sólo si, fijando $V_1 = \{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $V_2 = \{w_i\}_{1\leq i\leq n}$ que son las orientaciones para el $coker(L)$ y el $ker(L)$ respectivamente, entonces $\Lambda(V_1)$ y V_2 define la misma orientación para el $ker(L)$.

Con todas las definiciones mencionadas podemos ver que el conjunto de las soluciones de (1.5) es igual al conjuntos de los puntos fijos del operador

$$M : \overline{\Omega} \to X,$$

definido por

$$M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N, \tag{1.6}$$

en efecto podemos ver el resultado en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.5.1 (Proposition III.2,[5]). *$x \in Dom(L) \cap \overline{\Omega}$ es solución de (1.5) si y sólo si*

$$(I - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})Nx.$$

Demostración. ver ([5], página 13). □

Observación 1.4.5.2. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, necesitamos que M dado en (1.6) sea compacto para que el conjunto de soluciones de (1.5) no sea vacío.*

En el siguiente resultado podemos ver que en efecto M es un operador compacto, cuya demostración lo podemos ver en [3].

Proposición 1.4.5.2. *(Proposición 1.2.1,[3]) Sean X, Z dos espacios de Banach, $L : Dom(L) \to Z$ un operador de Fredholm de índice cero y sea $N : \overline{\Omega} \to X$ un operador $L-$ compacto con $\Omega \subset X$ conjunto abierto y acotado, entonces M definido en* (1.6) *es compacto en $\overline{\Omega}$.*

Con los resultados mencionados podemos obtener las siguientes equivalencias

$$Lx = Nx \Leftrightarrow Mx = x \Leftrightarrow (I - M)x = 0,$$

por lo tanto, si se cumple la condición

$$Lx \neq Nx \quad \textit{para todo} \quad x \in Dom(L) \cap \partial\Omega, \tag{1.7}$$

entonces el grado de Leray-Schauder esta definido para el operador M.

Proposición 1.4.5.3. *([3], pág.9) Sean L y N como en la proposición* (1.4.5.2) *y si además se verifica* (1.7) *entonces el grado de Leray-Schauder $d_{LS}(M, \Omega, 0)$ depende solamente de L, N, Ω y de la clase de homotopía elegida $\Lambda \in \Phi$.*

La demostración la podemos encontrar en ([5], página 17).

Con estos resultados previos vamos a definir el grado de Coincidencia, la cual es la herramienta que vamos a utilizar para desarrollar el objetivo de este trabajo.

Definición 1.4.5.5 (Definición 1.2.5,[3]). *Sea L un operador de Fredholm de índice cero y N un operador L-compacto. El grado de Coincidencia del par (L,N) está dada por*

$$d((L, N), \Omega) := d_{LS}(I - M, \Omega, 0),$$

donde M es como en (1.6).

A continuación vamos a estudiar algunas propiedades del grado de Coincidencia.

Si L, N y Ω satisfacen las hipótesis de la proposición (1.4.5.2) entonces el grado de Coincidencia cumple las siguientes propiedades (Teorema 1.2.3,[3])

1. **Normalización.** Si $0 \in \Omega$ entonces $d[(L, N), \Omega] = 1$.

2. **Aditividad.** Sean Ω_0, Ω_2 subconjuntos abiertos y disjuntos tales que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ entonces

$$d[(L, N), \Omega] = d[(L, N), \Omega_0] + d[(L, N), \Omega_1].$$

3. **Invariancia del grado bajo Homotopía.** Si $\hat{N} : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to Z$ es un operador L-compacto en $[0, 1] \times \overline{\Omega}$ tal que si para cada $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que

$$0 \notin [L - \hat{N}(\lambda, \cdot)](Dom(L) \cap \partial\Omega),$$

entonces $d[(L, \hat{N}(\lambda, \cdot)), \Omega]$ es independiente de $\lambda \in [0, 1]$.

4. **Existencia de solución.** Si el grado de Coincidencia $d[(L, N), \Omega] \neq 0$ entonces existe $x \in Dom(L) \cap \Omega$ tal que $Lx = Nx$.

5. **Excisión.** Si $\Omega_0 \subset \Omega$ es un conjunto abierto tal que $(L - N)^{-1}(0) \subset \Omega_0$ entonces

$$d[(L, N), \Omega] = d[(L, N), \Omega_0].$$

6. (Corollary III.3,[5]) $d[(L, N), \Omega]$ depende solo de L, Ω y de la restricción de N sobre $\partial\Omega$.

Estas propiedades mencionadas son las que mas utilizaremos en la práctica.

1.4.6. Aplicaciones del grado de Coincidencia

En esta sección veremos la utilidad del grado de Coincidencia para encontrar la multiplicidad de soluciones para la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$u'' + F(t, u, u') = s, \tag{1.8}$$

donde $s \in \mathbb{R}$, F es una función continua y T periódica en la variable t. Como caso particular podemos ver resultados aplicados a la ecuación diferencial de Liénard

$$u'' + f(u)u' + g(t,u) = s, \tag{1.9}$$

donde $s \in \mathbb{R}$, g es continua, T periódica en la variable t, y además cumple con la siguiente hipótesis

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(t,x) = +\infty \quad \textit{uniformemente en } t. \tag{1.10}$$

En los trabajos realizados en [4] y [9] podemos encontrar resultados de existencia y multiplicidad utilizando el grado de Coincidencia para las ecuaciones (1.8) y (1.9). En efecto si tomamos $X = C_T^2$ y $Z = C_T$, elejimos

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto L(u) = -u''. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N : C_T^1 &\longrightarrow C_T \\ u &\longmapsto N(u) = F(\cdot, u, u') - s, \end{aligned}$$

podemos seguir las ideas desarrolladas en [5] y demostrar que L es un operador de Fredholm de índice cero y N un operador L-compacto. En consecuencia se tiene el siguiente teorema para (1.8).

Teorema 1.4.6.1 (Theorem 2,[4]). *Consideremos la ecuación (1.8) y supongamos que F es continua y T periódica en la variable t y satisface las siguientes condiciones:*

H1) Existen $R_1 > 0$ y s_1 tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $u \leq -R_1$ se verifica que

$$F(t,u,0) > s_1 > F(t,0,0).$$

H2) F satisface la condición de Berstein Nagumo, es decir para cada $R \in \mathbb{R}^+$ existe una función continua $h_R : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [a_R, +\infty)$ con $a_R > 0$ tal que, para $|x| \leq R$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple

$$|F(t,x,y)| \leq h_R(|y|)$$

con

$$\int_0^{+\infty} \frac{s}{h_R(s)} ds = +\infty.$$

H3) $F(\cdot,\cdot,0)$ *es acotado inferiormente por* σ*, es decir*

$$F(t,u,0) \geq \sigma \quad \forall t,u \in \mathbb{R}.$$

H4) *Existe un número* $M = M(s_1)$ *tal que, para* $s \leq s_1$ *cualquier solución* T *periódica de* (1.8) *satisface*

$$u(t) < M(s_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces existe un número s_0 *tal que*

- *para* $s < s_0$*, la ecuación* (1.8) *no tiene solución* T *periódica;*
- *para* $s = s_0$*, la ecuación* (1.8) *tiene al menos una solución* T *periódica;*
- *para* $s \in (s_0, s_1]$*, la ecuación* (1.8) *tiene al menos dos soluciones* T *periódicas.*

Demostración. ver ([4], página 176). □

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado para la ecuación (1.9).

Teorema 1.4.6.2 (Theorem 3,[4]). *Considere la ecuación* (1.9)*, donde* f*,* g *son funciones continuas,* g *es* T *periódica en* T *y satisface la siguiente hipótesis*

H5) *Existen números* s_1 *y* $R_1 > 0$ *tales que, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y para todo* $u \in \mathbb{R}$ *tal que* $|u| \geq R_1$*,*

$$g(t,u) > s_1 > g(t,0).$$

Entonces existe $s_0 < s_1$ *tal que:*

- *para* $s < s_0$*, la ecuación* (1.9) *no tiene solución* T *periódica;*
- *para* $s = s_0$*, la ecuación* (1.9) *tiene al menos una solución* T *periódica;*

- *para* $s \in (s_0, s_1]$, *la ecuación* (1.9) *tiene al menos dos soluciones* T *periódicas.*

Demostración. ver ([4], página 178). □

Finalmente de este último teorema se obtiene el siguiente corolario que aborda el problema (1.9), asumiendo que g verifica (1.10).

Corolario 1.4.6.2.1 (Corollary 1,[4])**.** *Considere la ecuación* (1.9)*, donde* f, g *son funciones continuas,* g *es* T *periódica en la varible* t *y satisface* (1.10)*. Entonces existe un número* s_0 *tal que:*

- *para* $s < s_0$, *la ecuación* (1.9) *no tiene solución* T *periódica;*

- *para* $s = s_0$, *la ecuación* (1.9) *tiene al menos una solución* T *periódica;*

- *para* $s > s_0$, *la ecuación* (1.9) *tiene al menos dos soluciones* T *periódicas.*

Capítulo 2

Metodología

A lo largo de este capítulo vamos a describir los pasos que vamos a seguir para encontrar las soluciones al problema del tipo Ambrosetti-Prodi dado en (1.1). Para ello utilizaremos los teoremas propuestos y demostrados en [4]. En primer lugar encontraremos los valores propios asociados al problema de coeficientes periódicos

$$- u'' + \beta u = \lambda u, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \tag{2.1}$$

para este fin usaremos las técnicas utilizadas en [6]. Luego localizamos el primer valor propio del problema anterior y proponemos el problema de tipo Ambrosetti-Prodi.

Para analizar la existencia de las soluciones para el problema (1.1) vamos a seguir el esquema del teorema dado en ([4],Theorem 1) y para la multiplicidad de las soluciones usaremos el grado topológico, para ello definiremos un operador de Fredholm de índice cero L y un operador N tal que sea L- compacto dentro de un dominio adecuado y con ello aplicaremos el grado de Coincidencia.

2.1. Análisis de existencia de soluciones usando sub y super soluciones

Consideremos el problema (1.1), donde g satisface las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi, es decir, g es continua y verifica

$$\limsup_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} < \lambda_0 < \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}, \tag{2.2}$$

donde λ_0 es el primer valor propio asociado al problema (2.1). Para ver la existencia de las soluciones, vamos a realizar ajustes a la ecuación (1.1) para que este problema se pueda abordar como el problema (1.8), es decir, si en la ecuación (1.1) tomamos

$$F(t, u, u') = f(u)u' + g(u) + h(t),$$

entonces tenemos el siguiente problema periódico

$$u'' - \beta u + F(t, u, u') = s, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \tag{2.3}$$

Para este nuevo problema vamos a suponer que la función F verifican las hipótesis H1 y H2 y luego vamos a exhibir una sub y super solución para (2.3) de modo que verifiquen las hipótesis de la proposición (1.4.2.1).

Finalmente para abordar la existencia de soluciónes para el problema de tipo Ambrosetti-Prodi vamos a realizar los siguientes pasos:

1. Consideramos la ecuación (1.1) y denotemos $G(u, t) = g(u) + h(t)$ de modo que en (2.3) se cumpla que

$$F(t, u, u') = f(u)u' + G(u, t).$$

2. Supondremos que la función G dado en el item anterior verifica (1.10) es decir

$$\lim_{|x|\to+\infty} G(x, t) = +\infty \textit{ uniformemente en } t,$$

3. Probaremos que la condición de tipo Ambrosetti-Prodi propuesto en

(2.2) implica la condición anterior.

2.2. Análisis de multiplicidad de soluciones

En esta sección vamos a estudiar la multiplicidad de las soluciones para el problema de tipo Ambrosetti-Prodi dado en (1.1), para ello haremos uso de la teoría del grado de Coincidencia visto en el capítulo anterior. En primer lugar vamos a analizar si es factible aplicar el grado de Coincidencia para ello realizamos los siguientes pasos que podemos ver en [3] , [5], y [9].

C1. Identificamos dos espacios de Banach X, Z y tomamos $L : Dom(L) \subset X \longrightarrow Z$ y $N : X \longrightarrow Z$ de tal forma que resolver el problema (1.1) sea equivalente a resolver

$$Lx = Nx.$$

C2. Demostraremos que para los conjuntos elegidos en el item anterior, L es un operador de Fredholm de índice cero.

C3. Tomamos proyectores continuos P y Q que verifiquen (1.3) y (1.4) y con ello determinamos un isomorfismo $J : Im(Q) \longrightarrow ker(L)$ y la inversa generalizada de L (*es decir* $K_{P,Q}$).

C4. Buscamos un conjunto $\Omega \subset X$ abierto y acotado de modo que $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ sea un operador L-compacto.

Una vez realizado $C1 - C4$ podemos aplicar las propiedades del grado de Coincidencia, para ello vamos a tomar $F(t, u, u') = f(u)u' + g(u) + h(t) - \beta u$ en la ecuación (1.1). Luego vamos a suponer que F satisface $H1 - H4$ en el teorema (1.4.6.1) de modo que podamos usar el resultado del teorema mencionado.

Por otro lado para poder utilizar las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi, en (1.1) vamos a tomar $G(u, t) = g(u) + h(t) - \beta u$ y probaremos que si G verifica la condición de tipo Ambroseti-Prodi dado en (2.2) entonces también G cumple con la hipótesis $H5$ del teorema (1.4.6.2).

Observación 2.2.0.1. *si* $G(u, t) = g(u) + h(t) - \beta u$ *verifica la hipótesis* $H5$ *entonces* $F = F(t, u, u') = f(u)u' + G(u, t)$ *verifica las hipótesis* $H1 - H4$*.*

Demostración. ver ([4], Theorem 3, página 178) $\square$

Observación 2.2.0.2. *En algunos casos para poder probar C4 utilizaremos el teorema de Arzelà- Ascoli, que lo mencionaremos a continuación*

Teorema 2.2.0.1 (Theorem 4.25(Ascoli-Arzelà),[2])**.** *Sea K un espacio métrico compacto y sea M un subconjunto acotado de $C(K)$, donde $C(K)$ es el espacio de las funciones continuas definidas en K. Supongamos que M es uniformemente equicontinuo es decir*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in M.$$

Entonces la clausura de M en $C(K)$ es compacto.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

En esta sección vamos a mostrar los resultados mencionados en el capítulo anterior y en particular mostrar las soluciones para el problema de tipo Ambrosetti-Prodi.

Como primer paso abordaremos el problema de valores propios dado en (2.1). Para ello tomemos $\alpha = \lambda - \beta$ en la ecuación (2.1), y tenemos el siguiente problema de coeficientes periódicos

$$-u'' = \alpha u, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

Tenemos los siguientes casos:

- Caso 1. $\alpha = 0$

  Reemplazando el valor de α en la ecuación anterior tenemos

  $$-u'' = 0 \Rightarrow u = ct + b.$$

  Luego utilizando las condiciones de periodicidad se tiene que

  $$u = b.$$

- caso 2. $\alpha > 0$

Así, formamos la ecuación característica y hallamos las raíces

$$\begin{aligned} s^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow s^2 &= -\alpha \\ \Leftrightarrow s &= \sqrt{-\alpha}, \end{aligned}$$

por tanto las raíces son $s_1 = \sqrt{\alpha}i$, $s_2 = -\sqrt{\alpha}i$ y en consecuencia la solución del problema (2.1) viene dado por

$$u(t) = C_1 \cos\sqrt{\alpha}t + C_2 \sin\sqrt{\alpha}t$$

Por otro lado, usando las condiciones de borde se sigue que

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 \\ u(T) &= C_1 \cos\sqrt{\alpha}T + C_2 \sin\sqrt{\alpha}T \\ u'(0) &= \sqrt{\alpha}C_2 \\ u'(T) &= -\sqrt{\alpha}C_1 \sin(\sqrt{\alpha}T) + \sqrt{\alpha}C_2 \cos(\sqrt{\alpha}T). \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores formamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-\cos(\sqrt{\alpha}T))C_1 - \sin(\sqrt{\alpha}T)C_2 = 0 \\ (1-\cos(\sqrt{\alpha}T))C_2 + \sin(\sqrt{\alpha}T)C_1 = 0. \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que, no queremos soluciones triviales, por tanto se debe verificar:

$$\begin{vmatrix} 1-\cos(\sqrt{\alpha}T) & -\sin(\sqrt{\alpha}T) \\ \sin(\sqrt{\alpha}T) & 1-\cos(\sqrt{\alpha}T) \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} (1-\cos(\sqrt{\alpha}T))^2 + \sin^2(\sqrt{\alpha}T) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\cos(\sqrt{\alpha}T) + \cos^2(\sqrt{\alpha}T) \\ &\quad + \sin^2(\sqrt{\alpha}T) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\cos(\sqrt{\alpha}T) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\sqrt{\alpha}T) = 1, \end{aligned}$$

de la última desigualdad podemos deducir

$$\alpha_k = \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 \quad \textit{con} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

finalmente hallamos los valores propios del problema original, es decir, como $\alpha_k = \lambda_k - \beta$, entonces $\lambda_k = \alpha_k + \beta$. y por tanto,

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 + \beta \quad \textit{con} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

- caso 3. $\alpha < 0$

  Realizamos el mismo procedimiento que en el caso anterior pero teniendo en cuenta que la solución viene dada por

  $$u(t) = C_1 e^{\sqrt{-\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha}t}.$$

  Nuevamente utilizando las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} (1 - e^{\sqrt{-\alpha}T})C_1 + (1 - e^{-\sqrt{-\alpha}T})C_2 & = & 0 \\ (1 - e^{\sqrt{-\alpha}T})C_1 - (1 - e^{-\sqrt{-\alpha}T})C_2 & = & 0. \end{array} \right.$$

  Para que el sistema tenga soluciones no triviales se debe cumplir

  $$\left| \begin{array}{cc} (1 - e^{\sqrt{-\alpha}T}) & (1 - e^{-\sqrt{-\alpha}T}) \\ (1 - e^{\sqrt{-\alpha}T}) & (1 - e^{-\sqrt{-\alpha}T}) \end{array} \right| = 0,$$

  lo cual implica

  $$\begin{aligned} e^{\sqrt{-\alpha}T} = 1 &\Leftrightarrow T\sqrt{-\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0. \end{aligned}$$

  pero $\alpha < 0$, en consecuencia no existen soluciones no triviales para este caso.

De esta manera podemos decir que el primer valor propio asociado al problema (2.1) es $\lambda_0 = \beta$. Por consiguiente de (2.2) tenemos

$$\limsup_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} < \beta < \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \tag{3.1}$$

3.1.1. Teorema de existencia de soluciones para el problema tipo Ambrosetti-Prodi

Como ya se menciónо en el capítulo anterior para esta sección vamos realizar ajustes a la ecuación (1.1) de tal forma que se pueda trabajar como en el problema (1.8). En efecto tomando $F(t,u,u') = f(u)u' + g(u) + h(t)$ en la ecuación (1.1) se sigue

$$u'' - \beta u + F(t,u,u') = s, \tag{3.2}$$

como las funciones f, g y h son continuas entonces también lo es la función F. Notemos además

$$\begin{aligned} F(t+T,u,u') &= f(u)u' + g(u) + h(t+T) \\ &= f(u)u' + g(u) + h(t) \\ &= F(t,u,u'), \end{aligned}$$

por consiguiente F es T periódica en la variable t. Siguiendo la metodología propuesta vamos a suponer que la función F en (3.2) satisface las hipótesis (H1) y (H2) del teorema (1.4.6.1) y obtenemos un resultado en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1.1. *Considere la ecuación (3.2) con F continua, T periódica en la variable t, y suponga que F verifica la hipótesis H1 y H2 entonces existe s_0 tal que*

- *para $s < s_0$, la ecuación (3.2) no tiene solución T periódica.*
- *para $s \in (s_0, s_1]$, la ecuación (3.2) tiene al menos una solución T periódica.*

La demostración la realizaremos análogo al del teorema (1.4.6.1).

Demostración. En primer lugar consideremos $\hat{s} = \max\{F(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$ y probemos que la ecuación (3.2) tiene al menos una solución T periódica cuando $s = \hat{s}$. Para ello usaremos las técnicas de sub y super soluciones, es decir utilizaremos la proposición (1.4.2.1) y por lo tanto basta con extraer una sub y super solución u_1, u_2 respectivamente tales que $u_1(t) < u_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} 0'' - \beta \cdot 0 + F(t,0,0') &= F(t,0,0) \\ &\leq \max\{F(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \hat{s}. \end{aligned}$$

Así, $0'' - \beta \cdot 0 + F(t,0,0') \leq \hat{s}$, por lo tanto 0 es súper solución para (3.2).

Por otro lado de (H1) sabemos que existe $R_1 > 0$ y s_1 tal que para todo $u \leq -R_1$ se verifica:

$$F(t,u,0) > s_1 > F(t,0,0) \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La desigualdad anterior se cumple en particular cuando $u = -R_1$ y $F(t,0,0) = \hat{s}$, es decir

$$F(t,-R_1,0) > s_1 > \hat{s}.$$

Ahora bien, del hecho que $\beta \geq 0$ y $R_1 > 0$ entonces el producto $\beta R_1 \geq 0$, que junto con la desigualdad anterior se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} -R_1(t)'' - \beta(-R_1(t)) + F(t,-R_1,-R_1') &= 0 + \beta R_1 + F(t,-R_1,0) \\ &> F(t,-R_1,0) \\ &> s_1 \\ &> \hat{s}, \end{aligned}$$

de esta manera $-R_1$ es una sub solución de (3.2). Adicionalmente vemos que $-R_1 < 0$, y en consecuencia aplicando la proposición (1.4.2.1) concluimos que existe u solución T periódica de (3.2) cuando $s = \hat{s}$.

Continuando con la demostración vamos probar que si para $s = \bar{s} < s_1$ la ecuación (3.2) tiene una solución T periódica denotada por x, que por lo hecho hasta ahora sabemos que existe, entonces necesariamente tiene al menos una solución de periodo T para $s \in [\bar{s}, s_1]$.

Como x es una solución T periódica para $s = \bar{s} < s_1$ se tiene que

$$x'' - \beta x + F(t, x, x') = \bar{s} < s_1,$$

en consecuencia, si $s \in [\bar{s}, s_1]$ entonces

$$x'' - \beta x + F(t, x, x') \leq s,$$

es decir x es super solución de (3.2) para $s \in [\bar{s}, s_1]$. Por otro lado si tomamos $R_2 > 0$ de modo que $R_2 > R_1$ y verifica $R_2 > \|x\|_\infty$, entonces (H1) se cumple en particular para $u = -R_2 < -R_1$, y se tiene

$$\begin{aligned} R_2'' - \beta(-R_2) + F(t, -R_2, -R_2') &= \beta(R_2) + F(t, -R_2, 0) \\ &> F(t, -R_2, 0) \\ &> s_1 \\ &> \bar{s}. \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $\beta(R_2) + F(t, -R_2, 0) > s$ para $s \in [\bar{s}, s_1]$, así $-R_2$ es sub solución de (3.2) cuando $s \in [\bar{s}, s_1]$. Además como $R_2 > \|x\|_\infty$ se sigue $-R_2 < x(t)$. Nuevamente utilizando la proposición (1.4.2.1) se concluye que existe u solución de (3.2) para $s \in [\bar{s}, s_1]$.

Finalmente, si tomamos

$$s_0 = \text{ínf}\{s \in \mathbb{R} : (3.2) \textit{ tiene al menos una solución T periódica}\}$$

de los resultados obtenidos tenemos que $s_0 \leq \hat{s} < s_1$, por tanto para cualquier $s \in (s_0, s_1]$ la ecuación (3.2) tiene al menos una solución T periódica. $\square$

Por último para abordar el problema de tipo Ambrosetti-Prodi, en primer lugar vamos a denotar por $G(u, t) = g(u) + h(t)$ en (1.1), de esta forma el problema se puede escribir como

$$u'' - \beta u + f(u)u' + G(u, t) = s, \tag{3.3}$$

notemos que G es una función continua y además

$$\begin{aligned} G(u, t+T) &= g(u) + h(t+T) \\ &= g(u) + h(t) \\ &= G(u,t), \end{aligned}$$

es decir G es T periódica en la variable t. Supongamos que G satisface la hipótesis (1.10) por tanto se tiene que, para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x| \geq \delta$ entonces $G(t,x) \geq \tilde{x}$. Si tomamos en particular $x_0 > \max\{g(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que para $|x| \geq \delta_1$ se cumple

$$G(t,x) > x_0 > G(t,0).$$

Luego, si en (3.3) tomamos $F(t,u,u') = f(u)u' + G(t,u)$ y consideramos $s_1 = x_0$, $R_1 = \delta_1$ entonces para $u \leq -\delta$ se verifica

$$F(t,u,0) = G(t,u) > s_1 > G(t,0) = F(t,0,0).$$

Es decir si G verifica (1.10) entonces F verifica (H1).

Ahora bien, utilizando la condición de tipo Ambrosetti-Prodi propuesta en (3.1) y utilizando la función G podemos ver lo siguiente

$$\begin{aligned} \limsup_{x\to-\infty} \frac{G(x,t)}{x} &= \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{g(x)+h(t)}{x}\right) \\ &\leq \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) + \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{h(t)}{x}\right) \\ &< \beta \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \liminf_{x\to+\infty} \frac{G(x,t)}{x} &= \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)+h(t)}{x}\right) \\ &\geq \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) + \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{h(t)}{x}\right) \\ &> \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{x\to-\infty} \frac{G(x,t)}{x} < \beta < \liminf_{x\to+\infty} \frac{G(x,t)}{x}.$$

Con este último resultado y utilizando (Remark 2, [4]) se concluye que la condición de tipo Ambrosetti-Prodi dado en (3.1) implica la hipótesis (H1) y se obtiene el resultado. Dicho en otras palabras, si en el problema (1.1) g verifica la condición de tipo Ambrosetti-Prodi entonces existe s_0 tal que

- para $s < s_0$, la ecuación (3.2) no tiene solución T periódica.
- para $s \in (s_0, s_1]$, la ecuación (3.2) tiene al menos una solución T periódica.

3.1.2. Multiplicidad de soluciones para el problema tipo Ambrosetti-Prodi

Para esta sección vamos a utilizar las propiedades del grado de Coincidencia. En primer lugar en la ecuación (1.1) tomemos

$$F(t, u, u') = f(u)u' + g(u) + h(t) - \beta u, \tag{3.4}$$

luego siguiendo con mas detalle el problema periódico desarrollado en (pág 38, [5]) elegimos los siguientes espacios y operadores

$$\begin{aligned}
X &= C_T^1 := \{x \in C^1[0,T] : x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)\} \\
Z &= C[0,T] \\
Dom(L) &= C_T^2 \\
L : Dom(L) &\longrightarrow Z \\
u &\longmapsto -u'' \\
N : X &\longrightarrow Z \\
u &\longmapsto F(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - s
\end{aligned}$$

por tanto, resolver el porblema (1.1) es equivalente a resolver el problema

$$Lu = Nu. \tag{3.5}$$

Probemos ahora que L es un operador de Fredholm de índice cero, es decir debemos probar que L verifica las condiciones i y ii de la definición (1.4.5.1). Siguiendo la demostración análogamente a la desarrollada en (

pág 41, [5]) se obtiene el resultado, en efecto hallemos primero el $ker(L)$.

$$\begin{aligned} ker(L) &= \{u \in Dom(L) : Lu = 0\} \\ &= \{u \in C_T^2 : u'' = 0\} \end{aligned}$$

si resolvemos el problema $u'' = 0$ vemos que la solución viene dada por

$$u(t) = at + b,$$

luego utilizando las condiciones de borde $u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$, se sigue que $u(t) = b$, por lo tanto

$$ker(L) = \{x \in C_T^2 : u(t) = b \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Im(L) &= \{y \in C[0,T] : \exists u \in C_T^2 \textit{ tal que } y = Lu\} \\ &= \{y \in C[0,T] : \exists u \in C_T^2 \textit{ tal que } y = -u''\}. \end{aligned}$$

Resolviendo el problema $y = -u''$ se tiene que

$$u(t) = at + b + \int_0^t \int_0^s y(\tau) d\tau.$$

Nuevamente utilizando las condiciones de borde $u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$ vamos a encontrar los valores de a y b. En primer lugar utilizamos $u(0) = u(T)$, así

$$u(0) = b \quad y \quad u(T) = a \cdot T + b + \int_0^T \int_0^s y(\tau) d\tau$$

y por tanto

$$a = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s y(\tau) d\tau.$$

Por otro lado $u'(t) = a + \int_0^t y(\tau) d\tau$, luego

$$u'(0) = a \quad y \quad u'(T) = a + \int_0^T y(\tau) d\tau$$

que junto con la condición $u'(0) = u'(T)$ se sigue que

$$\int_0^T y(\tau)d\tau = 0.$$

Finalmente

$$Im(L) = \{y \in C[0,T] : \int_0^T y(s)ds = 0\}.$$

Con estos resultados previos hemos probado que L es un operador de Fredholm. Ahora bien, como $ker(L)$ y $Im(L)$ son sub espacios vectoriales cerrados existen proyectores $P : X \to X$ y $Q : Z \to Z$ que nuevamente lo tomaremos como en ([5], pág. 41), es decir

$$\begin{array}{rcl} P : C_T^1 & \longrightarrow & C_T^1 \\ u & \longmapsto & P(u) = u(0). \\ Q : C[0,T] & \longrightarrow & C[0,T] \\ y & \longmapsto & Q(y) = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)ds \end{array}$$

de modo que *codim* $Im(L) =$ *dim* $Im(Q) =$ *dim* $Ker(L) = 1$, en consecuencia L es un operador de Fredholm de índice cero. Luego para estos dos proyectores tomamos el operador

$$\begin{array}{rcl} K_P : Im(L) & \longrightarrow & Ker(P) \cap Dom(L) \\ y & \mapsto & K_P(y) = \int_0^T \varphi(s,t)y(s)ds \end{array}$$

con

$$\varphi(s,t) = \begin{cases} -\frac{s}{T}(T-t) & \textit{si} \quad 0 \le s \le t \\ -\frac{t}{T}(T-t) & \textit{si} \quad t \le s \le T. \end{cases}$$

Así, como nos índica en (pág 42,[5]) se puede utilizar el teorema (2.2.0.1) y probar que

$$K_{P,Q}N(\overline{\Omega}) = K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$$

es compacto para cualquier Ω acotado. En adición $QN(\overline{\Omega})$ es acotado y con esto tenemos que N es un operador L- compacto.

Ahora bien, para poder dar un teorema de multiplicidad al problema de tipo Ambrosetti-Prodi, debemos encontrar un $\Omega \subset C_T^1$ adecuado, de forma que podamos aplicar las propiedades del grado de Coincidencia.

Para ello vamos a tomar

$$G(t,u) = h(t) + g(u) - \beta u \tag{3.6}$$

en la ecuación (1.1) de modo que el problema a resolver es

$$u'' + f(u)u' + G(t,u) = s. \tag{3.7}$$

Notemos que G es continua y T periódica en la variable t pues h lo es. De este modo la ecuación (3.7) es una ecuación diferencial de Liénard y podemos resolverlo como en el problema (1.9). Por tanto vamos a suponer que G tomado como en (3.6) verifica la hipótesis (H5) del teorema (1.4.6.2).

Finalmente para utilizar las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi (ver (3.1)) primero vamos a probar que G también verifica las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi, es decir

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to-\infty} \frac{G(x,t)}{x} &= \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{g(x)+h(t)-\beta x}{x}\right) \\
&\leq \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) + \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{h(t)}{x}\right) + \limsup_{x\to-\infty} \left(\frac{-\beta x}{x}\right) \\
&< \beta - \beta. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to+\infty} \frac{G(x,t)}{x} &= \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)+h(t)-\beta x}{x}\right) \\
&\geq \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) + \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{h(t)}{x}\right) + \liminf_{x\to+\infty} \left(\frac{-\beta x}{x}\right) \\
&> \beta - \beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{x\to-\infty} \frac{G(x,t)}{x} < 0 < \liminf_{x\to+\infty} \frac{G(x,t)}{x} \ \textit{uniformemente en } t \tag{3.8}$$

Así, G verifica las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi. Nuevamente podemos utilizar (Remark 2, [4]), es decir dado que G cumple con (3.8) entonces también verifica

$$\lim_{|x|\to+\infty} G(x,t) = +\infty \textit{ uniformemente en } t. \tag{3.9}$$

Por último nos falta probar que si G cumple con la condición anterior entonces verifica (H5). En efecto, si G verifica (3.9) entonces se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x| \geq \delta$ entonces $G(t,x) \geq \tilde{x}$. Si tomamos en particular $s_1 > \text{máx}\{g(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ entonces existe $R_1 > 0$ tal que para $|x| \geq R_1$ se cumple

$$G(t,x) > s_1 > G(t,0).$$

De esta manera podemos ver que si en la ecuación (1.1) ,g verifica las condiciones de tipo Ambrosetti prodi entonces gracias al teorema (1.4.6.2) podemos concluir que existe $s_0 < s_1$ tal que:

- para $s < s_0$, la ecuación (1.9) no tiene solución T periódica;
- para $s = s_0$, la ecuación (1.9) tiene al menos una solución T periódica;
- para $s \in (s_0, s_1]$, la ecuación (1.9) tiene al menos dos soluciones T periódicas.

Observación 3.1.2.1. *La aplicación del grado de Coincidencia esta implícito en la demostración del teorema* (1.4.6.2) *donde se toma*

$$\Omega = \{u \in C_T^1 : -R_1 < u(t) < x(t), t \in \mathbb{R} \quad y \quad \|u'\|_\infty < \rho\}, \tag{3.10}$$

y la expresión $\|u'\|_\infty < \rho$ viene dado por el siguiente lema.

Lema 3.1.2.1 (Lema 1,[4]). *Sea u una solución T periódica de* (1.1) *que verifica $\|u\|_\infty \leq M_1$ y satisface las condiciones de Bernstein-Nagumo, entonces existe M_2 tal que*

$$\|u'\| \leq M_2.$$

Demostración. podemos ver en ([4], pág.1) donde se utiliza las condiciones de Bernstein Nagumo. □

3.2. Conclusiones

- Gracias a la hipótesis (3.9) logramos cumplir con el objetivo general planteado, es decir para el problema tipo Ambrosetti-Prodi propuesto en (1.1) para los valores $\beta \geq 0$ se logró resolver el problema tanto de existencia como de multiplicidad.

- Para analizar la multiplicidad de las soluciones (al menos dos) trabajamos tomando la función F de manera distinta al caso donde se encuentra la existencia de al menos una solución.

- Las condiciones de Bernstein-Nagumo fueron indispensables para trabajar con el espacio de funciones Ω definido en (3.10), de modo que se pueda aplicar el grado de Coincidencia y así encontrar la multiplicidad de soluciones.

3.3. Recomendaciones

- En este trabajo abordamos el problema (1.1) cuando $\beta \geq 0$. Nos preguntamos si será posible abordar el mismo problema ((1.1)) cuando $\beta < 0$.

- Para el análisis de la existencia de soluciones tomamos $F = f(u)u' + g(u) + h(t)$ en la ecuación (1.1). Tomando esta misma función F recomendamos analizar la multiplicidad usando el grado de Coincidencia.

- También se recomienda realizar el mismo estudio utilizando métodos variacionales y ver si se pueden obtener los mismos resultados.

Referencias bibliográficas

[1] Antonio Ambrosseti and David Arcoya. *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems.* Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science & Business Media, 2011.

[3] Alberto Fernando Déboli. *Métodos topológicos para algunas ecuaciones diferenciales funcionales resonantes no lineales.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, (tesis doctoral) 2014.

[4] Christian Fabry, Jean Mawhin, and Marius Nkashama. A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations. *Bull. Lond. Math. Soc*, 18(2):173–180, 1986.

[5] Robert Gaines and Jean Mawhin. *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations.* Lecture Notes in Math.568 Springer, Berlín, 1977.

[6] Donald Kreider, Robert Kuller, Donald Ostberg, and Fred Perkins. *An Introduction To LINEAR ANALYSIS.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Don Mills, Ont, 1966.

[7] Paúl Real. *Teoremas clásicos de minimax, aplicaciones en problemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con peso y condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas.* Facultad de Cien-

cias. Escuela Politécnica Nacional, (trabajo de integración curricular) 2022.

[8] Elisa Sovrano and Fabio Zanolin. The Ambrosetti–Prodi periodic problem: Different routes to complex dynamics. *Dynam. Systems Appl*, 26:589–625, 2017.

[9] Elisa Sovrano and Fabio Zanolin. Ambrosetti–Prodi periodic problem under local coercivity conditions. *Adv. Nonlinear Stud*, 18(1):169–182, 2018.

[10] Xingchen Yu and Shiping Lu. A singular periodic Ambrosetti-Prodi problem of rayleigh equations without coercivity conditions. *Commun. Contemp. Math*, (24) 2022. no.5, Paper No. 2150012, 16 pp.