



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS QUE SE AUTOORGANIZAN CRÍTICAMENTE: SIMULACIONES Y ANÁLISIS SIMULACIÓN Y ESTUDIO DE VARIANTES DE LA PILA DE ARENA BIDIMENSIONAL ABELIANA.

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO**

DENNIS JOAO CATOTA ROBLES

dennis.catota@epn.edu.ec

DIRECTOR: RAMON XULVI BRUNET

ramon.xulvi@epn.edu.ec

AGOSTO 2023

CERTIFICACIONES

Yo, DENNIS JOAO CATOTA ROBLES, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Dennis Joao Catota Robles

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Dennis Joao Catota Robles, bajo mi supervisión.

Ramon Xulvi Brunet
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Dennis Joao Catota Robles

Ramon Xulvi Brunet

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a mi tutor, el Dr. Ramon Xulvi Brunet, por su guía, consejo y apoyo durante cada etapa de este trabajo. A mis compañeros y amigos por brindarme su apoyo y aliento. A mi familia, quienes siempre han confiado en mí y han estado presentes. Finalmente, un especial agradecimiento a mi madre, quien me ha brindado su apoyo y cariño. Cada paso que he dado en la realización de este trabajo lleva la huella de tu dedicación y sacrificio. Este logro también es tuyo, y te estoy eternamente agradecido.

RESUMEN

El estudio de sistemas que presentan criticalidad autoorganizada ha ido ganando popularidad en los últimos 50 años debido a la gran cantidad de sistemas que se ha encontrado exhiben este comportamiento (sismos, incendios forestales, crisis económicas, etc), siendo el modelo de pila de arena abeliana uno de los modelos más paradigmáticos de este tipo de sistemas.

En el presente trabajo estudiamos el modelo de pila de arena abeliana cuando se varía la distribución de la caída de granos y la posición de los sumideros. Se observa que las avalanchas siguen una ley exponencial y los tiempos interevento una ley de potencias, independientemente de las diferentes distribuciones de sumideros y lanzamiento de granos consideradas. Se confirma, por tanto, que los cambios en las distribuciones de sumideros y lanzamiento de granos no cambia las características esenciales del modelo.

Palabras clave: modelo de pila de arena abeliano, sistemas que se autoorganizan críticamente, mecanismos subyacentes, sumideros, ley exponencial, ley de potencia, avalanchas.

ABSTRACT

The study of systems exhibiting self-organized criticality has gained popularity in the last 50 years due to the large number of systems that have been found to display this behavior (earthquakes, forest fires, economic crises, etc.), with the abelian sandpile model being one of the most paradigmatic examples of such systems.

In this work, we investigate the abelian sandpile model while varying the distribution of grain falls and the position of sinks. It is observed that avalanches follow an exponential law and interevent times follow a power law, regardless of the different distributions of sinks and grain release considered. It is thus confirmed that changes in the distributions of sinks and grain release do not alter the essential characteristics of the model.

Keywords: abelian sandpile model, self-organized criticality systems, underlying mechanisms, sinks, exponential law, power law, avalanches.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado	1
1.1. Marco teórico	1
1.2. Objetivo general	6
1.3. Objetivos específicos	6
1.4. Alcance	7
2. Metodología	8
2.1. Modelo de pila de arena abeliana	8
2.2. Nuestro modelo	10
2.3. Descripción del código de simulación	11
2.4. Tratamiento de datos	14
3. Resultados, conclusiones y recomendaciones	18
3.1. Resultados	18
3.2. Conclusiones y recomendaciones	24
A. Anexos	25
Bibliografía	31

Índice de figuras

1.1. Metáfora de la pila de arena para ejemplificar un sistema SOC. Dibujado por Elaine K. D'Attner Wiesenfeld. Reimpreso por Wiesenfeld (1989) [1]	4
2.1. Ilustración de la producción de una avalancha en una malla 3x3 para un sistema de pila de arena abeliana bidimensional. [2]	9
2.2. Ilustración de la producción de una avalancha en una malla 4x4 para un sistema de pila de arena abeliana bidimensional con valor crítico $h_c = 4$. Las celdas del borde inferior representadas por s son sumideros. El tamaño de avalancha es igual al número de granos movidos y en este caso es 7.	11
2.3. Serie temporal de tamaño de avalancha cuando la distribución con la que se añaden los granos es uniforme y todas las celdas de un lado de la malla son sumideros.	15
2.4. Media móvil para la serie temporal de tamaño de avalancha cuando la distribución con la que se añaden los granos es uniforme y todas las celdas de un lado de la malla son sumideros.	16
2.5. Histograma de frecuencia del tiempo interevento para un valor de tamaño de avalancha de 945966.	17

3.1. Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando las celdas de un lado de la malla son sumideros. a) distribución de caída de granos uniforme; b) distribución de caída de granos gaussiana.	19
3.2. Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando los sumideros se distribuyen uniformemente. c) distribución de caída de granos uniforme; d) distribución de caída de granos gaussiana.	19
3.3. Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando los sumideros distribuyen gaussianamente. e) distribución de caída de granos uniforme; f) distribución de caída de granos gaussiana.	20
3.4. Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando las celdas del lado de la malla son sumideros. a) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 947472; b) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 1050270.	21
3.5. Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando los sumideros se distribuyen uniformemente sobre la malla. c) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 26; d) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 29.	22
3.6. Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando los sumideros se distribuyen de manera gaussiana al rededor de la celda central de la malla. e) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 1258; f) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 60.	23

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

1.1. Marco teórico

Criticalidad Autoorganizada

En los últimos 50 años, el estudio de sistemas fuera del equilibrio ha contribuido a un mayor reconocimiento del concepto de *sistema complejo*. En términos generales, un sistema complejo es aquel en el cual sus elementos interactúan de manera no lineal y su comportamiento no puede reducirse únicamente al estudio individual de dichos elementos. Más bien, implica examinar las interacciones y relaciones entre las partes que lo componen, de tal manera que el conjunto resultante sea más que la simple suma de sus partes. [2].

En los años 80s se desarrolla una nueva teoría para explicar cómo los sistemas complejos con múltiples grados de libertad, que se encuentran en la naturaleza, tienen la capacidad de generar relaciones de ley de potencias mediante la aplicación de simples reglas de interacción entre los vecinos más cercanos. El término **vecino cercano** depende del sistema que se estudie, de manera que puede tomar diferentes interpretaciones como: celdas adyacentes en el modelo de pila de area abeliana, regiones geográficas adyacentes en las que la actividad sísmica puede influir entre sí en sismos [3] o árboles cercanos que influyen en la propagación del

fuego en incendios forestales [4]. En 1987 Per Bak, Chao Tag y Kurt Wiesenfeld introducen el concepto de **criticalidad autoorganizada** (SOC, por sus siglas en inglés Self Organized Criticality) [5]. Este concepto posee dos términos clave. La palabra **criticalidad** se refiere a la existencia de un estado cerca de un punto crítico o umbral donde la longitud de correlación y la susceptibilidad del sistema se vuelven infinitas, lo que significa que las interacciones entre los elementos del sistema se vuelven altamente interconectadas y sensibles a pequeñas perturbaciones, lo que puede producir cascadas de eventos, reacciones en cadena (conocidas como "avalanchas") que lanzan al sistema a un estado nuevo [6]. La palabra **autoorganizada** se refiere a la estructuración, patrones y organización a larga escala que aparecen de forma espontánea en el sistema. Sin embargo, hay que tener cuidado con la palabra "espontánea". En el modelo de Ising la magnetización aparece como una macro característica de la interacción de los espines a nivel micro. No obstante, no se refiere como autoorganizada, aunque en esencia lo sea. De manera que el término autoorganizada es relativo al desconocimiento de parámetros de control artificiales que describan al sistema[6].

Existen muchos sistemas con un gran número de elementos, los cuales interactúan de manera compleja, generalmente llamados *sistemas disipativos* (sistemas físicos que constantemente intercambian energía y materia con su entorno y, en el proceso, disipan o pierden energía en forma de calor u otros tipos de desorden). En la tierra algunos ejemplos son: terremotos, incendios forestales, caída en el mercado de valores, avalanchas de nieve, entre otros. Pero ¿qué tienen en común todos estos fenómenos naturales? Según el libro *Self Organized Criticality Systems* [7], tienen las siguientes características en común:

1. Independencia estadística: Los eventos (dependiendo del sistema de estudio pueden ser: lanzamiento de granos, producción de sismos, entre otros) en un sistema crítico autoorganizado son independientes y no están conectados en el espacio o en el tiempo.
2. Crecimiento coherente no lineal: el tiempo en que se tarda el sistema en llegar a su estado crítico autoorganizado después de alcanzar un umbral crítico presenta una fase de crecimiento no lineal.

3. Comportamiento que sigue una ley de potencia: el tamaño o la distribución de frecuencias de aparición es libre de escala (no tiene escala) y se puede caracterizar mediante una función de ley de potencia o exponencial.

Matemáticamente el comportamiento *ley de potencia* se refiere a una relación donde una variable es proporcional a otra elevada a una potencia negativa. Esto indica que hay una distribución desigual de eventos o fenómenos en el sistema estudiado, en otras palabras, hay algunos eventos o elementos que son mucho más frecuentes que otros, lo que crea una distribución de cola larga, es decir, hay una gran cantidad de eventos con un impacto significativo, pero poco frecuentes. [8]

$$N(s) \propto s^{-\tau} \quad (1.1)$$

Entonces, una cantidad N puede expresarse como una potencia de otra cantidad s . Por ejemplo, en el caso de terremotos podemos notar $N(s)$ como el número de terremotos con un tamaño s . Equivalentemente s puede ser el tamaño de una avalancha y $N(s)$ el número de avalanchas con dicho tamaño. Si tomamos el logaritmo a ambos lados de la ecuación 1 obtenemos:

$$\log N(s) \propto -\tau \log s \quad (1.2)$$

De esta manera, si se grafica $\log N(s)$ versus $\log s$ obtenemos una línea recta donde la pendiente es el exponente τ . Se puede notar la invariancia de la escala por la línea recta que es igual en cualquier lado. En otras palabras, a cualquier escala la pendiente es la misma por lo que no existe una escala en particular con características distintas.

Modelo de la pila de arena

Imaginemos que tenemos un tablero, sobre el cual se añaden granos de arena uno por uno y de forma aleatoria. Al principio, los granos simplemente se asientan sobre el tablero sin formar ningún patrón o figura y la pila es casi plana. Al seguir añadiendo granos de arena lentamente estos se agruparán en patrones similares a conos concidos como pilas (véase figura 1.1). A medida que más granos se sumen a la formación de

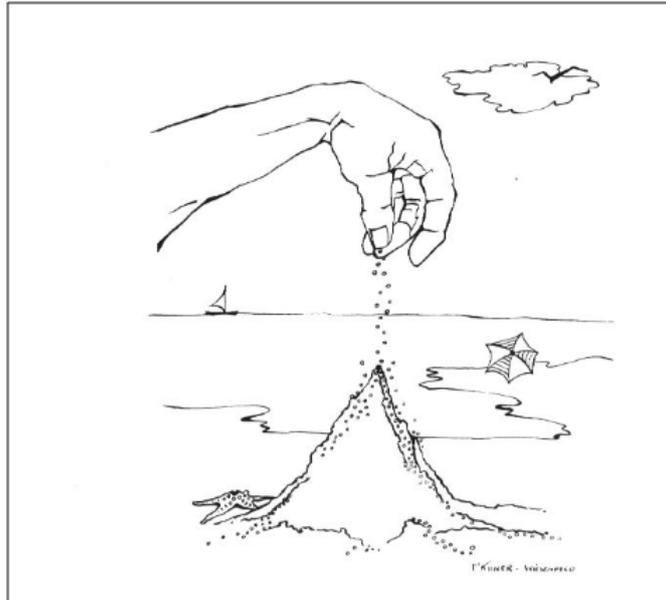


Figura 1.1: Metáfora de la pila de arena para ejemplificar un sistema SOC. Dibujado por Elaine K. D'Attner Wiesenfeld. Reimpreso por Wiesenfeld (1989) [1]

la pila la pendiente de la misma aumentará de valor. Las avalanchas se producirán cuando la pendiente de la pila alcance un valor límite y esta dependerá de la “fricción” entre los granos. Además, gracias a la fricción la pila no colapsará por completo o se aplastará totalmente. Al inicio, las avalanchas producidas serán pequeñas y de forma localizadas; lo que se esperaría de un sistema en equilibrio (el tamaño de la perturbación es proporcional al estímulo interno). Sin embargo, al continuar agregando granos de arena lentamente, el tamaño de la pila aumentará pero no crecerá infinitamente. Las avalanchas se encargarán de reducir el tamaño de la pila de tal manera que la pendiente local de la pila se reduzca solo un poco por debajo del valor límite debido al reordenamiento de la configuración interna de la pila y de vez en cuando algunos granos de arena saldrán del tablero. Por lo tanto, aunque se produzcan avalanchas la pila de arena se encuentra en un estado altamente susceptible a cambios, es decir, se mantiene en un **estado de no-equilibrio estable**. [9].

Si la pendiente de la pila es muy pequeña, la adición de granos hará que aumente y por el contrario, si la pendiente de la pila es muy empinada, las avalanchas harán que disminuya. De manera que, la pila se “autoorganiza” a un estado de equilibrio inestable alrededor del valor lí-

mite de la pendiente. El tamaño finito de la pila de arena establece un límite para el tamaño de avalancha, llamado tamaño de avalancha de corte [10].

El tamaño de las avalancha de corte se vuelve considerablemente más variable y amplio a medida que la pila crece en tamaño, de modo que el añadir un grano puede producir una avalancha de cualquier tamaño. Existirán muchas avalanchas pequeñas, unas pocas de tamaño medio y muy pocas de tamaño grande, todas estas obedecen el comportamiento de ley de potencias abarcando muchos ordenes de magnitud. De esta manera, las avalanchas ya no son localizadas ni pequeñas (como en el caso de un sistema en equilibrio). Entonces, se dice que la pila es "crítica". El tamaño de avalancha es de cierta manera una forma de medir la respuesta del sistema a una perturbación externa.[9]

El modelo matemático/computacional utilizado para estudiar la pila de arena se llama **modelo de pila de arena abeliana**. Sin embargo, este modelo no trata de replicar el comportamiento real de una pila de arena sino más bien estudiar las propiedades o características de la dinámica del sistema. El modelo de la pila de arena abeliana de forma general consiste de una malla cuadrícula sobre la cual se añaden granos de arena uno por uno. Cada celda de la malla puede contener un valor h de granos de arena. Cuando este valor supera un valor crítico h_c se produce la dinámica (arbitrariamente impuesta) de derrumbamiento, es decir, un número determinados de granos de arena de la celda que excede el valor crítico se distribuye a sus celdas vecinas (celdas en las cuales se distribuyen los granos de la celda que excede el valor crítico). Además, los bordes de la malla actúan como sumideros, en otras palabras, los granos de arena que llegan al borde de la malla desaparecen (o de manera análoga se puede interpretar como un sistema con condiciones de frontera abierta). El modelo de la pila de arena abeliana es la base con la cual se pueden construir diferentes modelos al realizar pequeñas variaciones del mismo, como por ejemplo: cambiar la distribución con la que se añaden los granos de arena, cambiar la ubicación de los sumideros, cambiar la forma de la malla, cambiar la definición de vecinos cercanos, entre otros. Dada la importancia del modelo, en el capítulo 2 se hará una explicación detallada del mismo.

Hoy en día, aún no se tiene una teoría general para sistemas SOC que describa cuantitativamente la frecuencia de ocurrencia de eventos como la ley de potencia. Además, se espera encontrar variables que permitan distinguir entre diferentes sistemas SOC e identificar cuando un sistema disipativo que sigue una ley de potencia no es un sistema SOC (como la turbulencia magnetohidrodinámica).

1.2. Objetivo general

Simular y estudiar el modelo de pila de arena bidimensional abeliana bajo distintas distribuciones de sumideros y distintas distribuciones de lanzamientos de granos de arena.

1.3. Objetivos específicos

1. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden de forma aleatoria y que todas las celdas de un borde de la malla son sumideros.
2. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden de forma aleatoria y que los sumideros se distribuyen uniformemente sobre la malla.
3. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden de forma aleatoria y que los sumideros se distribuyen siguiendo una distribución gaussiana centrada en la malla.
4. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden siguiendo una distribución gaussiana centrada en la malla y que todas las celdas de un borde de la malla son sumideros.
5. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden siguiendo una

distribución gaussiana centrada en la malla y que los sumideros se distribuyen uniformemente.

6. Estudiar el comportamiento de la pila de arena bidimensional abeliana considerando que los granos de arena se añaden siguiendo una distribución gaussiana centrada en la malla y que los sumideros se distribuyen siguiendo una distribución gaussiana centrada en la malla.

1.4. Alcance

Por limitaciones computacionales el tamaño de la malla es de 50x50. Este tamaño debería ser suficiente para poder observar las características de la dinámica del sistema. El número de sumideros es 50 y el tiempo total a simular será de 1.2×10^6 iteraciones, de modo que se obtendrán al menos un millón de datos tras el transiente en la parte estacionaria del sistema. El estudio de los diferentes sistemas se centrará en analizar estadísticamente la distribución del tamaño de avalanchas y la distribución de tiempos inter-eventos.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Modelo de pila de arena abeliana

En el modelo de pila de arena abeliana la criticalidad no se especifica en términos de la pendiente de la pila de arena sino mediante un valor crítico h_c que establece un umbral, el cual al ser superado, produce la dinámica de “derrumbamiento”. Supongamos que tenemos una malla cuadrada de tamaño $N \times N$ (N es el tamaño del lado de la malla), la cual hace las veces del tablero en el modelo clásico, en donde cada celda puede contener un valor entero h de granos de arena. Los granos son añadidos uno a uno de forma aleatoria en una posición (i, j) (de manera que h aumenta en una unidad) de la malla: $h(i, j) = h(i, j) + 1$. Una columna de arena puede volverse inestable al alcanzar el valor límite (valor crítico) h_c . Al sobrepasar el valor límite se produce un derrumbamiento, el cual reduce el tamaño de la columna de arena al mover $2d$ granos de arena de la celda (i, j) mediante la siguiente expresión: $h(i, j) = h(i, j) - 2d$, donde d es la dimensión espacial de la malla. Los granos de arena movidos de la posición (i, j) se distribuyen a las celdas vecinas. Si el modelo es bidimensional ($d = 2$) se elige como celdas vecinas a la celdas de: arriba, abajo, izquierda y derecha de la celda (i, j) , es decir, $h(i + 1, j)$, $h(i - 1, j)$, $h(i, j - 1)$ y $h(i, j + 1)$ respectivamente. Esta dinámica de derrumbamiento, puede producir vecinos inestables, los cuales pueden producir nuevos derrumbamientos y con ello nuevos vecinos inestables. De esta manera,

se produce una cascada de derrumbamientos que se propaga hasta que el sistema se estabilice (no haya derrumbamientos). En la figura 2.1 se muestra un caso particular de una avalancha para una malla 3x3 con condiciones de frontera abiertas (los granos pueden salir por los bordes de la malla) y un valor crítico $h_c = 4$. Cuando la avalancha se detiene, se agrega un nuevo grano de arena. Finalmente, el sistema presenta condiciones de frontera abiertas, de modo que el flujo de entrada de granos se balancea con el flujo de salida de los granos por los bordes de la malla. Es importante recalcar que el balance no es perfecto sino aproximado, fluctuando alrededor de cierto valor. Este efecto de disipación es esencial ya que al aumentar el tamaño de la malla el tiempo que tarda el sistema en llegar al estado de no equilibrio estable aumenta.[1]

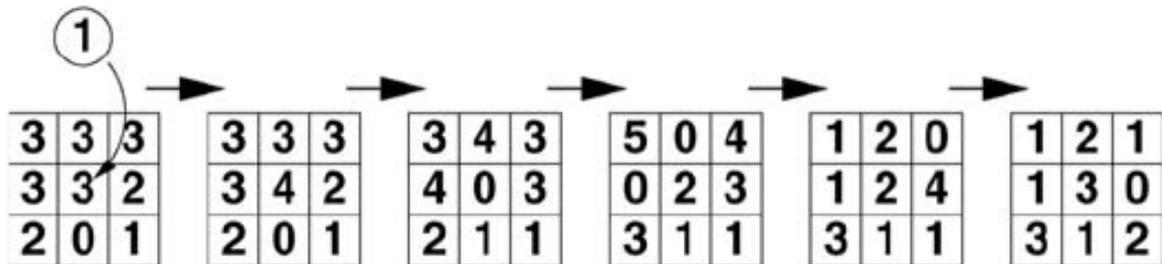


Figura 2.1: Ilustración de la producción de una avalancha en una malla 3x3 para un sistema de pila de arena abeliana bidimensional. [2]

La ventaja del modelo abeliano es que el estado final del sistema no depende de la secuencia de granos añadidos para alcanzar la configuración estable (matemáticamente el término abeliano se utiliza para referirse a la existencia de “conmutatividad”). Supongamos que estamos en un estado estable E y se añaden dos granos de arena, uno en la posición (i, j) y después otro en la posición (k, l) llegando al estado estable E' . Se puede probar que el estado E' sería exactamente el mismo si primero se hubiera añadido un grano en la posición (k, l) y después en la posición (i, j) . De esta manera, el estado estable final se vuelve independiente del orden en el que se añadieron los granos. En este sentido se dice que el modelo es abeliano. [9]

Es importante recalcar que el modelo de pila de arena abeliana no tiene como objetivo el estudio real del comportamiento de una pila de arena sino más bien es estudiar las características subyacentes que se obtienen

de los resultados de la simulación de este modelo. Es más, experimentalmente no se tiene evidencia de que la pila de arena presente criticalidad debido a los efectos de inercia y dilatación, excepto para pequeñas avalanchas [2].

Existen muchas variantes del modelo “pila de arena bidimensional abeliana”. Algunas variantes que consideran distintos valores de altura crítica [11], otras variantes impiden que la arena caiga en ciertas celdas adyacentes (dependiendo de la definición de celdas vecinas que considere la variante) [12], otras usan una malla triangular en vez de cuadrada [13], otras seleccionan celdas aleatoriamente para añadir los granos de arena (distribución uniforme vs, por ejemplo, distribución normal) [14], etc.

2.2. Nuestro modelo

Nuestro modelo es una variante del modelo pila de arena abeliana. Se define el tamaño de la malla $N=50$ y un valor crítico $h_c = 4$. Los granos de arena se añaden uno a uno siguiendo una distribución determinada (uniforme o gaussiana dependiendo de la simulación). Cada celda de la malla tiene asignado una posición (i, j) y un valor h , que representa el número de granos de arena en dicha celda. Cuando el valor h alcanza el valor crítico, la celda se vuelve “*inestable*” (el añadir un grano o más producirá un “derrumbamiento”). La dinámica de derrumbamiento es la siguiente: la celda reduce su valor en: $h(i, j) = h(i, j) - (l + 2)$, donde l es el número de granos que exceden el valor h_c y los granos que se salen $(l + 2)$ de la celda (i, j) se distribuyen de forma aleatoria a las celdas vecinas, pudiendo caer varios granos en la misma celda vecina. En nuestro modelo se define como celda vecina a toda celda que se encuentre en contacto con la celda (i, j) , ya sea compartiendo un lado o vértice. Además, se ha considerado condiciones de frontera cerradas, es decir, derrumbamientos que se produzcan en el borde de la malla no podrán “lanzar” granos fuera de la misma. Para balancear el flujo de entrada y salida de granos en el sistema se añaden 50 sumideros bajo distintas distribuciones (uniforme, gaussiana o todo un lado de la malla). En el modelo de pila de arena abeliana las condiciones abiertas del sistema hacen las veces de sumideros. En la figura 2.2 se presenta un ejemplo particular de avalanchas bajo las

condiciones presentadas anteriormente.

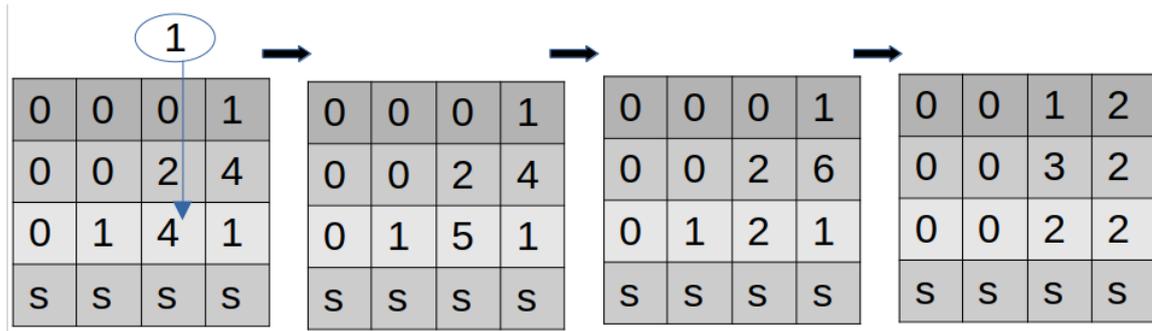


Figura 2.2: Ilustración de la producción de una avalancha en una malla 4x4 para un sistema de pila de arena abeliana bidimensional con valor crítico $h_c = 4$. Las celdas del borde inferior representadas por **s** son sumideros. El tamaño de avalancha es igual al número de granos movidos y en este caso es 7.

En la figura 2.2, en la primera malla, se observa que dos celdas (2,4) y (3,3) (empezando la enumeración por la parte superior izquierda) se encuentran en el valor crítico $h_c = 4$, por lo que cuando se añade un “grano” en la posición indicada se produce la dinámica de derrumbamiento. En la segunda malla podemos ver la adición del grano de arena en la posición seleccionada, por la dinámica del sistema el número de granos a moverse serán 3 ($l + 2$, con $l = 1$). En la tercera malla se observa que, de forma aleatoria, se han añadido 2 granos en la celda (2,4) incrementando su valor a 6 y un grano se ha movido a una celda sumidero por lo que el grano desaparece. Además, el valor de la celda (3,3) se reduce a 2. En la cuarta malla el número de granos movidos es 4 (con $l=2$) en las posiciones (1,3), (1,4), (2,3) y (3,4). Notese que en este caso todos los granos movidos están dentro de la malla, es decir, no se permite que un grano se mueva fuera de la misma. El tamaño de avalancha en esta iteración se determina por el número de granos movidos, en este caso son 3 del primer derrumbamiento y 4 del segundo derrumbamiento, dando un total de 7.

2.3. Descripción del código de simulación

El programa utilizado para la simulación del sistema se escribió en Fortran95. Existen variaciones pequeñas del código acordes a los dife-

rentes objetivos específicos de este trabajo (las variaciones se explican al final del código). La estructura de programa es la siguiente:

Primero, se definen los parámetros: el tamaño de la malla $N=50+2$ (el +2 se utiliza para facilitar el establecimiento de las condiciones de frontera en el borde de la malla), el tiempo de simulación (número de iteraciones temporales) $T_{MAX}=1200000$ y el valor crítico $h_c = 4$.

Después se añaden los granos siguiendo alguna distribución y se verifica si la celda en la cual se añade el grano es un sumidero. En caso de serlo, el grano desaparece de la malla y se agrega otro grano

El programa inicia abriendo un bucle para las iteraciones temporales, el cual inicia en $t=1$ y termina en T_{MAX} . A continuación, se llama dos números aleatorios con distribución uniforme o gaussiana (con media 25 y desviación estandar 5), dependiendo la simulación. Con estos números se escoge la posición de la celda en la cual se aumenta el tamaño en una unidad. Después se verifica si la celda escogida cae en la posición de un sumidero. En el caso de estar en un sumidero, el valor de la celda se vuelve 0 y se realiza un incremento temporal; en caso de no estar en un sumidero, el programa continua como se especifica a continuación:

Cada vez que se añade un grano se verifica si alguna celda de la malla excede el valor crítico $h_c = 4$. Para ello se inicializa un bucle que verifica si alguna celda tiene un número de granos mayor al valor crítico y del cual se sale si no existe movimientos de "granos de arena" en la malla (no hay celdas con valor mayor al crítico). Dentro de este bucle se inicializa dos contadores: uno define el tamaño del vector que almacena la posición de las celdas que tengan un valor mayor al valor crítico y el otro contador suma todos los granos movidos en cada celda. En caso de que una celda tenga un valor mayor al crítico, se aumenta el contador en una unidad y se guarda la posición de la celda en un vector doble; en el caso negativo no sucede nada. Después, si existieron celdas con valor mayor al crítico, se realiza el siguiente procedimiento:

Para cada celda que excede el valor crítico se calcula el número de granos que se mueven a los vecinos cercanos y se produce la dinámica de derrumbamiento de acuerdo a las condiciones especificadas anteriormente. Para ello, se inicializa un bucle que termina cuando se hayan

seleccionado todos los valores del vector que almacena las posiciones de las celdas con valor mayor al crítico. Se empieza seleccionando de forma aleatoria una posición del vector para producir la dinámica de derrumbamiento. Se ha elegido aleatoriamente la posición de la celda porque simula mejor la aleatoriedad de la posición del derrumbamiento de un grano de arena en la pila. Posteriormente se reemplaza la posición seleccionada por la última posición del vector de manera que este valor no pueda ser seleccionado nuevamente. Con la posición (i, j) seleccionada anteriormente se obtiene el número de granos l añadidos en la iteración anterior. Entonces se procede a realizar la dinámica del sistema: se elige una celda vecina al azar y se añade un grano, mientras se resta una unidad en la celda (i, j) . Este procedimiento se repite hasta que el número de granos movidos a celdas vecinas sea igual a $l+2$ y se guarda el el valor de granos movidos.

Una vez que se ha producido la dinámica de derrumbamiento en todas las celdas identificadas con un valor mayor al crítico se procede a hacer una nueva verificación en toda la malla buscando nuevas celdas que hayan excedido el valor crítico producto de los derrumbamientos pasados. En el caso de que haya nuevas celdas que excedan el valor crítico, sus posiciones se guardan nuevamente en un vector y se repite el procedimiento explicado anteriormente; si no hay nuevas celdas que exceden el valor crítico quiere decir que no hay movimientos de granos, por lo tanto se sale del bucle que verifica esta condición y se incrementa una la iteración temporal en una unidad. Finalmente, este procedimiento se repite hasta alcanzar el tiempo total de simulación. Además, se guardan en un archivo los valores del tiempo y el número de granos movidos en esa iteración temporal.

Es necesario aclarar que para celdas que se encuentran en el borde de la malla o en las esquinas existe un número diferente de vecinos accesibles, 5 y 3 respectivamente. En estos casos se añadieron condiciones especiales para verificar que los granos solo se puedan mover a las celdas accesibles en cada caso.

Como subrutinas se usan dos en general: una rutina que crea números aleatorios con distribución gaussiana con media 25 y desviación estándar 5 mediante el método de Box-Muller [15]; y la otra rutina ge-

nera un número aleatorio con distribución uniforme entre 1 y 8 (8 es el número máximo de celdas vecinas que puede tener una celda). Por otro lado, para las variaciones de la simulación se añadió subrutinas para especificar la distribución de sumideros en la malla.

Existen en total 6 variaciones de las simulaciones: primero, si se añaden granos a la malla con distribución uniforme, entonces la distribución de sumideros puede tener 3 variaciones: distribución gaussiana, distribución uniforme y que todas las celdas de un lado de la malla sean sumideros; el segundo caso es cuando se añaden granos a la malla con una distribución uniforme en la cual los sumideros pueden adoptar también las 3 distribuciones mencionadas anteriormente. De esta manera el número total de variaciones es 6.

Cuando los sumideros tienen una distribución uniforme y gaussiana se ha generado una lista de números con esta distribución y se añade su posición una a una con un if para especificar su posición.

2.4. Tratamiento de datos

Del programa descrito anteriormente se obtiene una serie temporal para el tamaño de avalancha. En la figura 2.3 se presenta la serie temporal obtenida cuando la distribución con la que se añaden los granos es uniforme y todas las celdas de un lado de la malla son sumideros.

Con el objetivo de visualizar en donde termina el transiente y establecer una referencia del valor medio de tamaño de avalancha se utiliza la media móvil. En este caso se utiliza un rango de 100 valores para calcular la media. En la figura 2.4 se muestra la media móvil de la serie temporal de tamaño de avalancha para el caso particular anterior.

La pendiente empinada al inicio de la gráfica, hasta antes de oscilar alrededor de un valor medio de tamaño de avalancha, muestra el tiempo que dura el transiente. Mientrás que las oscilaciones indican que el sistema se encuentra en el estado de no-equilibrio estable.

Para calcular el valor de la media se utilizó el último millón de datos (datos que están en la parte "estacionaria"). Este valor nos sirve como referencia para establecer un rango para los valores interevento. A conti-

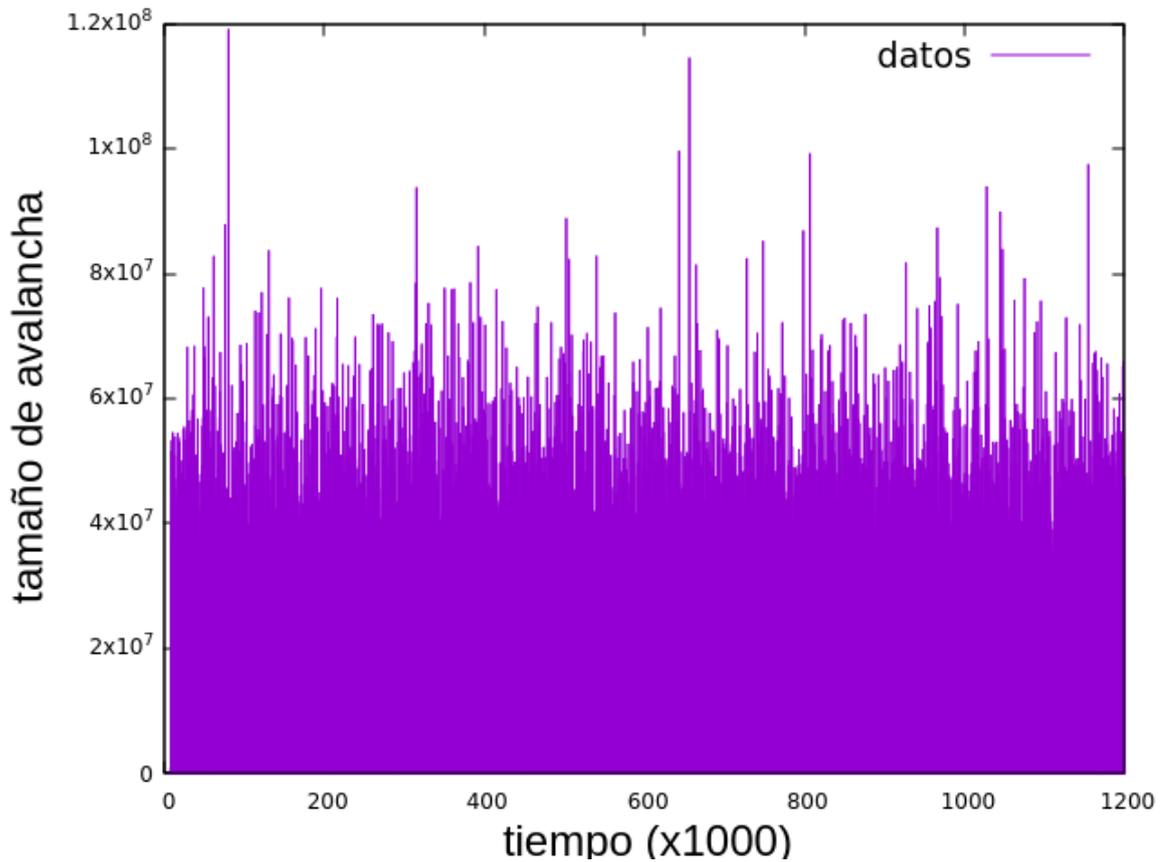


Figura 2.3: Serie temporal de tamaño de avalancha cuando la distribución con la que se añaden los granos es uniforme y todas las celdas de un lado de la malla son sumideros.

nuación, en la figura 2.5, se presenta un histograma de la frecuencia del tiempo interevento para un valor de tamaño de avalancha de 945966, es decir, cada cuánto tiempo el tamaño de avalancha supera el valor establecido.

Para la creación del histograma se eligió que el número de intervalos n sea 100. El valor de n se seleccionó sin ningún criterio matemático en específico, simplemente entre distintos valores de n en el rango de 100 a 1000 se escogió el mejor valor de n para visualizar los datos y que mantenga la tendencia. Por otro lado, para escoger el ancho del intervalo a se utilizó la siguiente expresión: $a = (max - min)/n$, donde max y min es el valor máximo y mínimo del tiempo interevento. Finalmente, para tener un representante de clase se utilizó la siguiente expresión: $hist(x, a) = a * floor(x/a) + a/2, 0$.

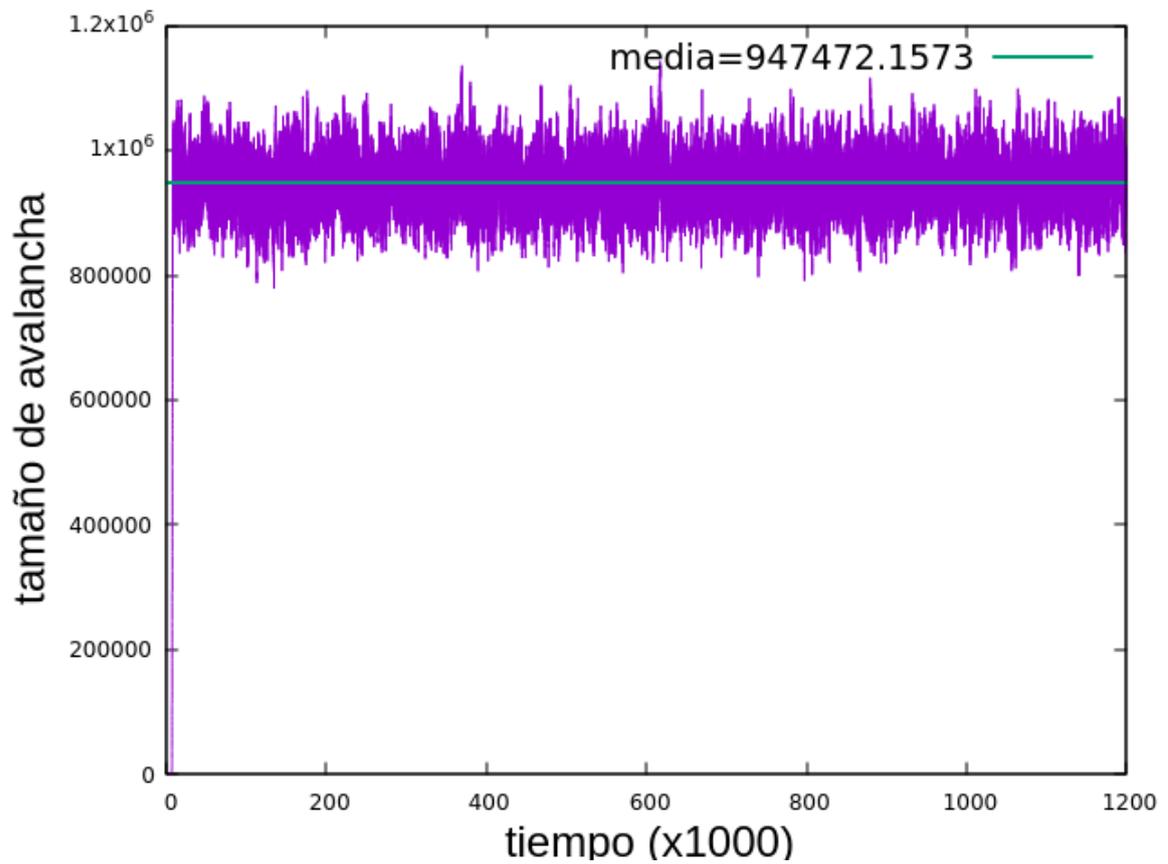


Figura 2.4: Media móvil para la serie temporal de tamaño de avalancha cuando la distribución con la que se añaden los granos es uniforme y todas las celdas de un lado de la malla son sumideros.

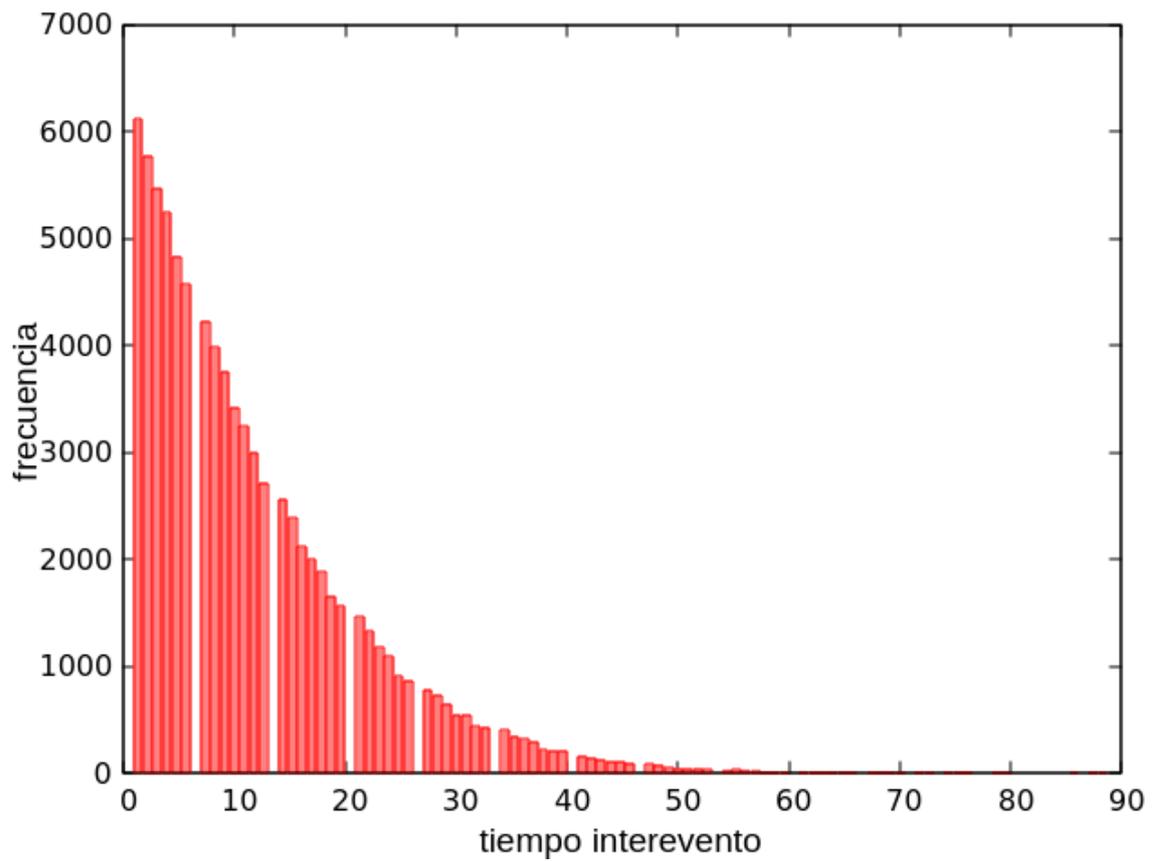


Figura 2.5: Histograma de frecuencia del tiempo interevento para un valor de tamaño de avalancha de 945966.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Con base en los datos obtenidos de las simulaciones se utilizaron una gráfica semi-log para visualizar la distribución de tamaño de avalancha. Además, se utilizó una función exponencial $f(x) = a * \exp(-b * x)$ para ajustar los datos. Dado que el modelo simulado es netamente matemático, los valores de los parámetros a y b no tienen un sentido físico (en este modelo) con el cual asociarlo. Sin embargo, estas mismas leyes de distribución aparecen en muchos sistemas como se mencionó en el capítulo 1. De manera que lo más importante a analizar es que la distribución de los datos puedan ser ajustados con leyes o distribuciones que comúnmente aparecen en los sistemas SOC y relacionar las variaciones de cada simulación con las constantes.

En la figura 3.1 se puede observar las funciones de distribución cuando las celdas del lado inferior de la malla son sumideros y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.1 (a)) o gaussiana (figura 3.1 (b)).

Para la función exponencial el valor del parámetro a solamente define el valor de corte en el eje y, es decir, carece de significado. Por otro lado, el valor del parámetro b determina cómo cambia la frecuencia de avalanchas a medida que cambia la magnitud. Una pendiente más pronunciada (mayor valor de "b") indica que la frecuencia de avalanchas disminuye más

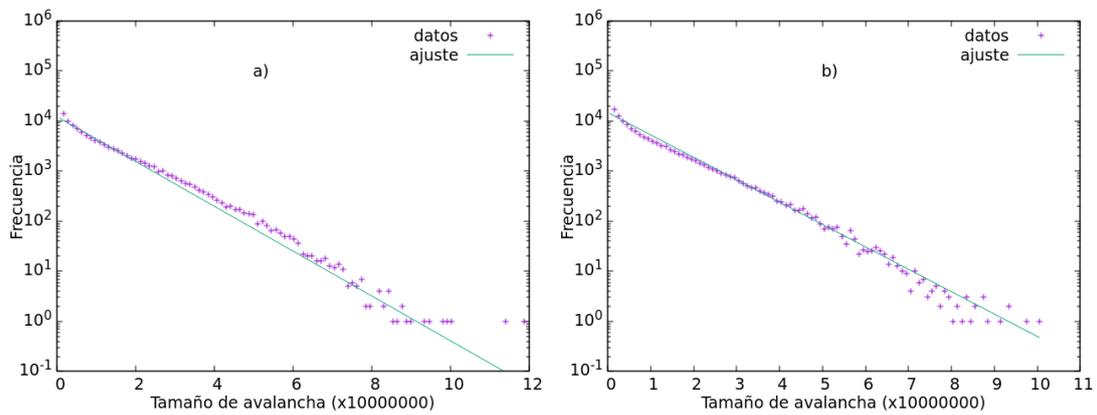


Figura 3.1: Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando las celdas de un lado de la malla son sumideros. a) distribución de caída de granos uniforme; b) distribución de caída de granos gaussiana.

rápidamente a medida que aumenta la magnitud. Por otro lado, una pendiente menos pronunciada (menor valor de "b") indica que la frecuencia disminuye más lentamente con el aumento de la magnitud.

El valor de b es $1,03 \cdot 10^{-7}$ y $1,18 \cdot 10^{-7}$ para a) y b) respectivamente. Lo que significa que no importa la distribución usada (uniforme o gaussiana) para añadir granos, mientras las celdas de un lado de la malla sean sumideros, el cambio de la frecuencia vs el tamaño es similar.

En la figura 3.2 se observa las funciones de distribución cuando los sumideros se distribuyen uniformemente y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.2 (c)) o gaussiana (figura 3.2 (d)).

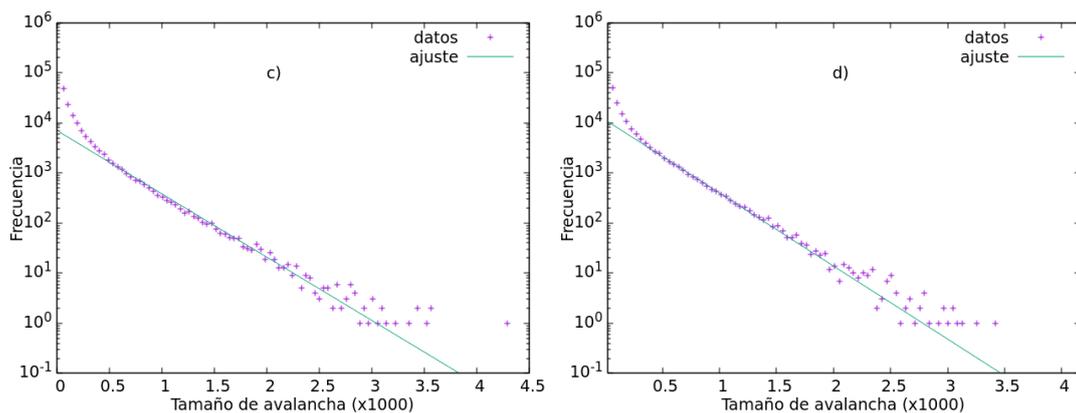


Figura 3.2: Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando los sumideros se distribuyen uniformemente. c) distribución de caída de granos uniforme; d) distribución de caída de granos gaussiana.

Los valores de b son $6,2 \cdot 10^{-3}$ y $4,04 \cdot 10^{-3}$ para c) y d) respectivamente. De

la misma manera que en la figura anterior, los valores de b son similares, por lo que el cambio de frecuencia vs tamaño es parecido en ambos casos. Dado que los sumideros se encuentran distribuidos uniformemente por toda la malla no se pueden agrupar muchas celdas con valor crítico por lo que las avalanchas tendrán menor tamaño, haciendo que el valor de b sea menor en comparación con los casos de la figura 3.1.

En la figura 3.3 se observa las funciones de distribución cuando los sumideros se distribuyen de manera gaussiana alrededor de la celda central de la malla y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.3 (e)) o gaussiana (figura 3.3 (f)).

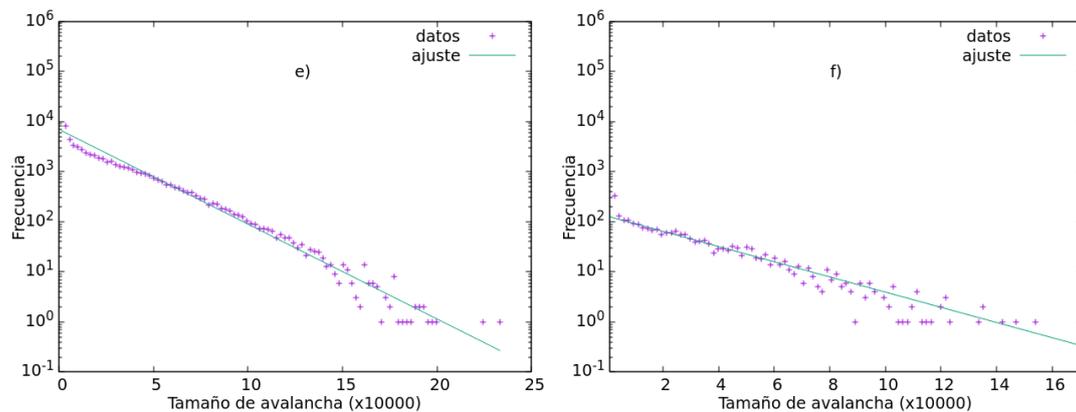


Figura 3.3: Histograma de frecuencia del tamaño de avalancha cuando los sumideros distribuyen gaussianamente. e) distribución de caída de granos uniforme; f) distribución de caída de granos gaussiana.

Los valores de b son $3,59 * 10^{-5}$ y $3,49 * 10^{-5}$ para e) y f) respectivamente. En los casos de la figura 3.3 e) y f) los sumideros están repartidos siguiendo una distribución normal lo que implica que existirán agrupaciones mayores de celdas con valor crítico alrededor de los bordes de la malla, por lo tanto el tamaño de avalanchas será mayor que en el caso c) y d) pero menores al caso a) y b).

En general, cuando los sumideros se encuentran repartidos por toda la malla, el tamaño de las avalanchas disminuyen, mientras que cuando los sumideros se centran en una determinada región (un lado de la malla) el tamaño de avalancha es mayor. Como se comentó antes, esto se debe a que existe un mayor número de celdas juntas que pueden estar en el valor crítico o cerca del mismo. Las cuales ayudan a la propagación de las avalanchas, lo que implica un tamaño de avalancha mayor. Cabe

recalcar que los sumideros ayudan a balancear el flujo de entrada de los granos. Si vemos este balance no como de materia sino como de energía podemos asociar más fácilmente a un sistema físico. De esta forma podríamos sugerir que dependiendo la ubicación o cómo se disipe la energía en determinado sistema las avalanchas serán de mayor o menor tamaño.

Por otro lado, se estudió la distribución de tamaños de avalanchas para valores que superaran a la media del tamaño de avalancha (calculado como se especifica en el capítulo 2). Para ello se utilizó una ley de potencia modificada ($f(x) = a/(b - x)^c$) que normalmente es utilizada en el estudio de la ocurrencia de réplicas después de un sismo principal. Además, se utilizaron el último millón de datos para asegurar estar en la zona estacionaria.

De esta manera, a se relaciona con el total de avalanchas producidas; b con un valor de tiempo interevento para el cual la frecuencia de avalanchas se a reducido considerablemente su valor (de cierto modo se puede interpretar como un tiempo de relajación) y c se relaciona con la rapidez de disminución de la frecuencia de avalanchas con el tiempo.

En la figura 3.4 se grafica la frecuencia de los tiempos interevento para tamaños de avalanchas mayor al tamaño medio cuando las celdas de un lado de la malla son sumideros y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.4 (a)) o gaussiana (figura 3.4 (b)).

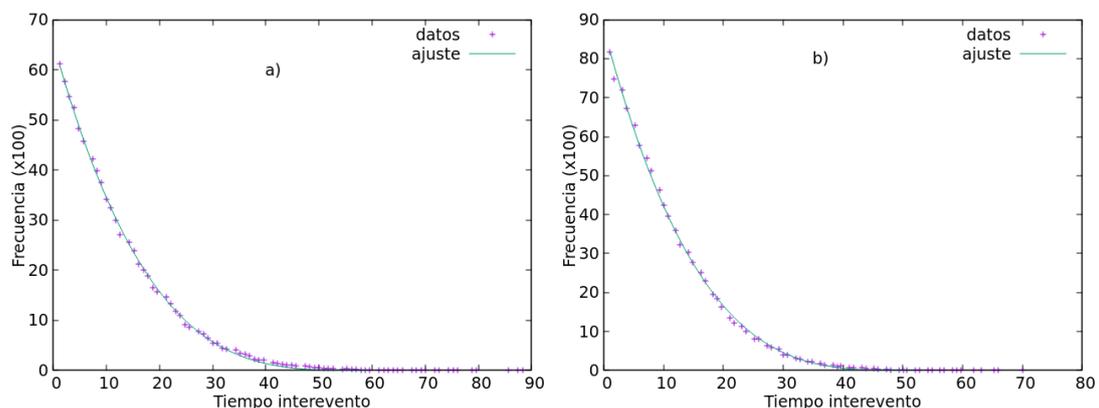


Figura 3.4: Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando las celdas del lado de la malla son sumideros. a) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 947472; b) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 1050270.

Los valores de las constantes b y c son 59.97, -3.51 y 52.06, -3.44 para a) y b) respectivamente. De manera que para el caso a) existiran mayor número de avalanchas para un tiempo interevento de 52 unidades que para el caso b). Sin embargo, la tasa de decrecimiento es mayor cuando se añaden los granos uniformemente que cuando se añaden con distribución gaussiana.

En la figura 3.5 se grafica la frecuencia de los tiempos interevento para tamaños de avalanchas mayor al tamaño medio cuando los sumideros se distribuyen uniformemente por toda la malla y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.5 (c)) o gaussiana (figura 3.5 (d)).

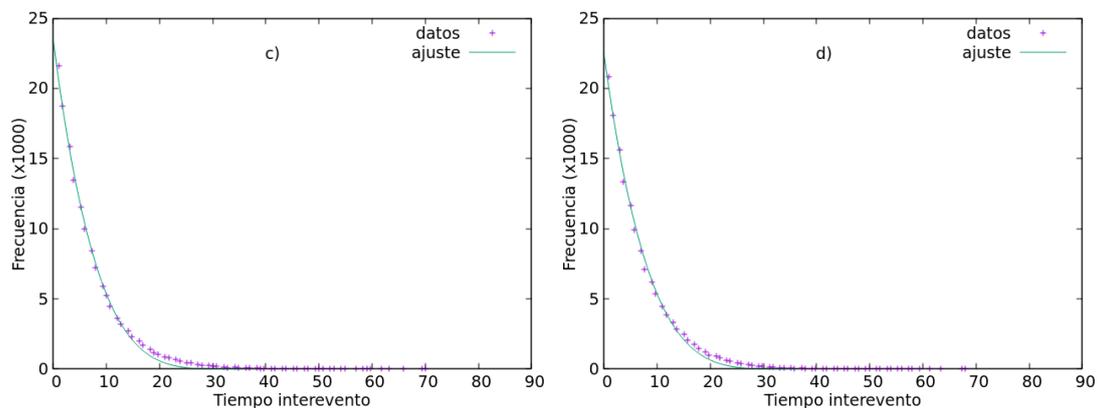


Figura 3.5: Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando los sumideros se distribuyen uniformemente sobre la malla. c) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 26; d) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 29.

Los valores de las constantes b y c son 35.7148 , -4.50004 y 36.644 , -4.50022 para c) y d) respectivamente. Claramente, los valores de los tiempos intereventos para los cuales las frecuencias disminuyen considerablemente son menores que en los casos a) y b). Por el contrario la rapidez de decrecimiento de las frecuencias con el tiempo son mayores, indicando para el caso c) y d) una disminución más rápida en la frecuencia de avalanchas a medida que pasa el tiempo.

Por último, en la figura 3.6 se grafica la frecuencia de los tiempos interevento para tamaños de avalanchas mayor al tamaño medio cuando los sumideros se distribuyen de manera gaussiana alrededor de la celda central de la malla y la distribución de caída de granos es uniforme (figura 3.6 (e)) o gaussiana (figura 3.6 (f)).

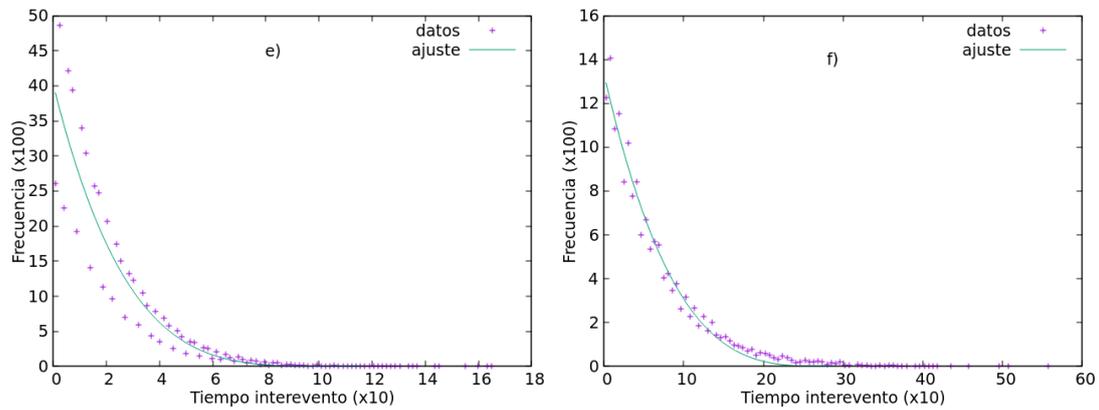


Figura 3.6: Histograma de frecuencia de los tiempos intereventos cuando los sumideros se distribuyen de manera gaussiana al rededor de la celda central de la malla. e) distribución de caída de granos uniforme, tamaño medio de las avalanchas: 1258; f) distribución de caída de granos gaussiana, tamaño medio de las avalanchas: 60.

Los valores de las constantes b y c son 116.032, -4.39291 y 292.159, -3.50151 para e) y f) respectivamente. Lo primero a recalcar es que el tiempo interevento en el cual la frecuencia de avalanchas disminuye considerablemente su valor es un orden de magnitud mayor a los anteriores cuatro casos. El razonamiento para explicar este resultado es similar al del por qué el tamaño de avalancha es menor para estas mismas configuraciones. Dada la distribución gaussiana de sumideros en la malla y la distribución con la que se añaden los granos, el sistema tardará más en alcanzar agrupaciones de celdas con valores cercanos al crítico para producir avalanchas que superen al tamaño medio. Por otro lado, la rapidez de disminución de la frecuencia con el tiempo es comparable con las de los casos a), b), c) y d).

De manera general, es evidente que las distribuciones presentadas en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 siguen la distribución $f(x) = a/(b-x)^c$ más conocida como Ley de Omori-Utsu en sismos. Por lo tanto, el estudio y relación de las variaciones empleadas en las simulaciones pueden ofrecer una ayuda a la comprensión de diferentes sistemas SOC presentes en la naturaleza.

Por último, todos los gráficos presentados no tienen barras de error. Debido a la limitación de tiempo y al tiempo relativamente largo de simulación no se pudo repetir las simulaciones para poder obtener las mencionadas barras de error.

3.2. Conclusiones y recomendaciones

En resumen, se propuso un modelo de arena bidimensional abeliana con dos distribuciones de caída de granos (gaussiana y uniforme) y tres distribuciones de sumideros (gaussiana, uniforme y todas las celdas de un lado de la malla). Como resultado las avalanchas siguen una ley exponencial y los tiempos interevento una ley de potencias. Y esto es así independientemente de si las distribuciones de sumideros y lanzamiento cambian. Por tanto, se confirma que los cambios en las distribuciones de sumideros y lanzamiento de granos no cambia las características esenciales del modelo. Además, el tamaño medio de avalanchas depende de la distribución de sumideros, siendo el valor más alto del orden de 10^6 (el borde de la malla son sumideros) superando aproximadamente en 3 ordenes de magnitud a las distribuciones gaussiana y uniforme.

En la función de ajuste exponencial para la frecuencia de tamaño de avalancha, el valor de b tiene el mismo orden de magnitud para diferentes distribuciones de caída de granos manteniendo la misma distribución de sumideros. Por lo tanto, b no depende de la distribución de caída de granos.

El tiempo interevento para el cual la frecuencia de avalancha se ha reducido considerablemente es mayor en un orden de magnitud (10^3) para la distribución gaussiana de sumideros en comparación de las otras dos distribuciones.

En conclusión, se pudo determinar los factores que influyen en los cambios de frecuencia de los tamaños de avalancha y la rapidez de disminución de las frecuencias de avalanchas con el tiempo con las variaciones del modelo de pila de arena arena abeliana propuestas en este trabajo.

Para finalizar, se recomienda para un futuro análisis estudiar cómo la variación del tamaño de la malla puede influir en el sistema bajo las mismas condiciones de sumideros y caída de granos.

Capítulo A

Anexos

Código de simulación para el modelo de pila de arena abeliana, donde las celdas en el lado inferior de la malla funcionan como sumideros y los granos de arena se añaden siguiendo una distribución gaussiana.

```
program sandpile
  implicit none
  integer, parameter:: N=50+2 !tamaño de la cuadrícula
  integer, parameter:: T_MAX=1200000 !Número máximo de iteraciones
  integer, parameter:: x=4 !numero critico

  integer :: vector(N*N,2) !doble vector, guarda las posiciones de las celdas con num de granos mayor a 5
  integer :: i,j,t,t_av,t_ev,l,contador1, contador2,contador3,p,a,b !índices de la cuadrícula, tiempo,tamaño avalancha,tiempo de evento
  integer :: pile(N,N) !Altura de la pila
  integer :: ran1,ran2,aux1,aux2,aux3=0,aux4=0,rand1,k,cont4
  real :: pi=3.14159,t1,rn,time1,time2,timet

  call cpu_time(time1)

  open(unit=80,action="write",file="t_av_50_c_gauss_s_lado.dat",status=-
```

```
eplace")
```

```
    pile=0 !inicializamos la pila con altura cero
contador3=0
!Bucle de tiempo
do t=1, T_MAX
t1=t*1.0
write (80,*) t, aux3
if(modulo(t1,1000.0)==0) write (*,*) t
aux1=0
aux2=0
t_av=
t_ev=0
call aleatorio(ran1)
call aleatorio(ran2)
pile(ran1,ran2)=pile(ran1,ran2)+1
contador2=0
if(ran1==(N-1)) then
!if(ran2>13 .and. ran2<39)
pile(ran1,ran2)=0 !ver si aumento el contador para contar los granos mo-
vidos
end if
```

```
    do !hagase mientras contador1/=0
!aux1=contador1
contador1=0
cont4=0
do a=2, N-1
do b=2, N-1
if(pile(a,b)>x) then
cont4=cont4+1
vector(cont4,1)=a
vector(cont4,2)=b
end if
end do
```

end do

if(cont4 .ne. 0) then

do !termina el bucle cuando cont4 sea igual a 0

call random_number(rn)

i=vector(int(rn*cont4)+1,1)

j=vector(int(rn*cont4)+1,2)

vector(int(rn*cont4)+1,1)=vector(cont4,1)

vector(int(rn*cont4)+1,2)=vector(cont4,2)

l=pile(i,j)-4 !obtiene el numero de granos que se han añadido en la iteracion anterior

p=0

do

call aleatorio3(rand1)

if(rand1==1 .and. (i-1) .ne.1 .and. (j-1) .ne. 1) then

pile(i,j)=pile(i,j)-1

pile(i-1,j-1) = pile(i-1,j-1) + 1

p=p+1

end if

if(rand1==2 .and. (i-1) .ne. 1)then

pile(i,j)=pile(i,j)-1

pile(i-1,j) = pile(i-1,j) + 1

p=p+1

end if

if(rand1==3 .and. (i-1) .ne.1 .and. (j+1) .ne. N)then

pile(i,j)=pile(i,j)-1

pile(i-1,j+1) = pile(i-1,j+1) + 1

p=p+1

end if

if(rand1==4 .and. (j-1) .ne. 1)then

pile(i,j)=pile(i,j)-1

pile(i,j-1) = pile(i,j-1) + 1

```

p=p+1
end if
if(rand1==5 .and. (j+1) .ne. N)then
pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i,j+1) = pile(i,j+1) + 1
p=p+1
end if
if(rand1==6 .and. (i+1) .ne. N .and. (j-1) .ne. 1)then
if(i+1==(N-1)) then

    pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j-1)=0
p=p+1

else
pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j-1) = pile(i+1,j-1) + 1
p=p+1
end if
end if
if(rand1==7 .and. (i+1) .ne. N)then
if(i+1==(N-1)) then

    pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j)=0
p=p+1

else
pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j) = pile(i+1,j) + 1
p=p+1
end if
end if
if(rand1==8 .and. (i+1) .ne. N .and. (j+1) .ne. N)then
if(i+1==(N-1)) then

```

```
    pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j+1)=0
p=p+1
```

```
    else
pile(i,j)=pile(i,j)-1
pile(i+1,j+1) = pile(i+1,j+1) + 1
p=p+1
end if
end if
```

```
    if (p>=(l+2)) exit
enddo
```

cont4=cont4-1 !se reduce un valor cada que mueve los granos de una celda con granos mayor 4

contador1=contador1+p !contador que suma todos los granos movidos en cada celda

```
    if(cont4==0) exit
end do
end if
```

contador2=contador2+contador1 !cuenta el total de granos movidos en una iteracion
aux3=contador2

```
    if(contador1 .eq. 0) exit !si contador1 == a 0 ->no se han movido granos
end do
```

```
end do
```

```
call cpu_time(time2)
timet=time2-time1
write(*,*) timet
```

contains

```
subroutine aleatorio(rand) !numero aleatorio con dis gaussiana
real:: u,v,s
integer :: r
integer, intent(inout)::rand
```

```
!generación de dos variables aleatorios uniformes en el intervalo (0,1)
call random_number(u)
call random_number(v)
```

```
!aplicamos el método de Box-Muller para obtener aleatorios con distri-
bución gaussiana con desviación estándar 1
s=5*sqrt(-2.0*log(1-u))
r=nint(26+s*sin(2.0*pi*v))
rand=r
```

end subroutine

```
subroutine aleatorio3(random3) !numero aleatorio de 1 a 8
real:: u
integer, intent(inout)::random3
call random_number(u)
random3=nint(u*8)
```

end subroutine

end program

Referencias bibliográficas

- [1] T. C. B. P. Wiesenfeld, K., *A Physicist's Sandbox*. Springer, 1989.
- [2] B. Drossel, *Critical phenomena in natural sciences: Chaos, fractals, selforganization, and disorder: Concepts and tools*. Springer, 2008.
- [3] . L. J. S. Carlson, J. M., "Mechanical model of an earthquake fault," *Physical Review A*, 40 (11), 6470–6484., 1989.
- [4] D. Turcotte and B. Malamud, "Landslides, forest fires, and earthquakes: Ex- amples of self-organized critical behavior.," *Physical Review A*. 340, 580–589, 2004.
- [5] T. C. W. K. Bak, P, *Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise*. 1987.
- [6] P. Bak, *How nature works: The science of self-organized criticality*. Springer Science Business Media, 1987.
- [7] M. Aschwanden, *Self-Organized Criticaly Systems*. Open Academic Press Publishing, 2013.
- [8] W. Y. I. . K. G. P. Koonin, E. V., *Power Laws, Scale-Free Networks, and Genome Biology*. Springer, 2006.
- [9] . M. N. R. Christensen, K., *Complexity and Criticality*. Imperial College Press, 2005.
- [10] M. Aschwanden, *Self-Organized Criticality in Astrophysics. The Statistics of Nonlinear Processes in the Universe*. Springer-Praxis, 2011.

- [11] M. S. S., "Two-state model of self-organized criticality," *J. Phys. A: Math. Gen.* 24 L363, 1991.
- [12] D. Dhar, "The abelian sandpile and related models," *Physics Reports*, 301(4-6), 29-78., 1999.
- [13] . L. M. Ivashkevych, O. A., "Power-law statistics of the abelian sandpile model on a triangular lattice," *Physical Review E*, 79(6), 061107., 2009.
- [14] S. H. V. A. . Z. S. Chessa, A., "Universality in sandpiles," *Physical Review E*, 59, 1998.
- [15] R. Sheldon, *Simulación*. Prentice H, 1999.