

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE PROPAGACIÓN
REPRESENTADOS COMO SISTEMAS MULTIAGENTES
ESTUDIAR Y APLICAR UN ALGORITMO DE CONTROL EN
PROCESOS DE PROPAGACIÓN EN REDES SOCIALES**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN
ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN**

HAROLD ALEXIS GUERRÓN FLORES

harold.guerron@epn.edu.ec

DIRECTOR: JACKELINE ABAD TORRES

jackeline.abad@epn.edu.ec

DMQ, Abril 2024

CERTIFICACIONES

Yo, HAROLD ALEXIS GUERRÓN FLORES declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Harold Alexis Guerrón Flores

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por HAROLD ALEXIS GUERRÓN FLORES, bajo mi supervisión.

Jackeline Abad Torres

Certificamos que revisamos el presente trabajo de integración curricular.

**NOMBRE DEL REVISOR
REVISOR 1 DEL TRABAJO DE
UNTEGRAACIÓN CURRICULAR**

**NOMBRE DEL REVISOR
REVISOR 2 DEL TRABAJO DE
INTEGRACIÓN CURRICULAR**

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Yo, Harold Alexis Guerrón Flores, a través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

HAROLD ALEXIS GUERRÓN FLORES

Prof. JACKELINE ABAD TORRES, Ph.D.

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a mi familia, amigos y todas las personas que me han ayudado en mi formación académica a lo largo del tiempo transcurrido en mi estancia en la Escuela Politécnica Nacional.

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a mi familia por su amor incondicional desde el inicio, a mi madre y su ternura, a mi padre y su sacrificio, a mi hermano y sus consejos que me han permitido culminar una etapa muy importante en mi vida.

A todos mis amigos y compañeros con los que he compartido diferentes momentos personales y académicos, que dentro de sus posibilidades me han enseñado, acompañado y estado conmigo y han hecho que este camino sea más placentero.

Una vez más, gracias a todos por acompañarme y ser parte de este proceso.

INDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTO	IV
INDICE DE CONTENIDO.....	V
RESUMEN	VIII
ABSTRACT.....	IX
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivo General.....	1
1.2 Objetivos Específicos.....	1
1.3 Alcance	2
1.4 Marco Teórico	2
1.4.1 Propagación en Redes Sociales.....	2
1.4.2 Sistemas Multi-agentes	3
1.4.3 Modelo del Sistema de Propagación de Ideas en Redes Sociales	3
1.4.4 Control Distribuido.....	9
1.4.5 Estabilidad del Sistema	10
1.4.6 Índices de Desempeño.....	10
2. METODOLOGÍA.....	12
2.1 Representación en Sistema Multi-agente.....	12
2.1.1 Representación en el Modelo Lineal.....	12
2.2 Algoritmos de Control	15
2.2.1 Acción de Control P	16
2.2.2 Acción de Control PI.....	17
2.2.3 Acción de Control PID	19

2.3	Representación en Variables de Estado	21
2.3.1	Representación en variables de estado para una Acción de Control P 21	
2.3.2	Representación en variables de estado para Acción de Control PI	21
2.3.3.	Representación en variables de estado para una Acción de Control PID 23	
3.	RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	26
3.1	Resultados	26
3.1.1	Sistema en Lazo Abierto para una red formada por 4 agentes	26
3.1.2	Sistema en Lazo Cerrado para una red formada por 4 agentes	28
3.1.3	Sistema en Lazo Abierto para una red formada por 16 agentes	38
3.1.4	Sistema en Lazo Cerrado para una red formada por 16 agentes	40
3.1.5	Análisis de Estabilidad del Sistema	54
3.2	Conclusiones	57
3.3	Recomendaciones	58
4.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
5.	ANEXOS	61
5.1	Representación en variables de estado para una red conformada por 4 gentes61	
5.2	Representación en Variables de Estado	62
5.2.1	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control P para una red formada por 4 Agentes	62
5.2.2	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PI para una red formada por 4 Agentes	62
5.2.3	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PID para una red formada por 4 Agentes	64
5.3	Representación en variables de estado para una red conformada por 16 agentes.....	67

5.4	Representación en Variables de Estado	69
5.4.1	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control P para una red formada por 16 agentes.....	69
5.4.2	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PI para una red formada por 16 agentes.....	71
5.4.3	Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PID para una red formada por 16 agentes.....	76

RESUMEN

El presente trabajo está dirigido a la aplicación de sistemas multi-agentes para el análisis y simulación de procesos de propagación en redes sociales. El modelo de propagación de rumores está asociado con la actualización de la tasa de aceptación de una idea por parte de los usuarios que integran una red, basándose en la opinión de sus vecinos y la propia, mediante el uso de teoría de grafos para representar al sistema en variables de estado. En este contexto, se proponen algoritmos de control distribuido capaces de influir en la propagación de rumores dentro de una red social, con el objetivo de que el sistema alcance una tasa de aceptación deseada y se observe su comportamiento ante perturbaciones. Se evalúa la acción de control mediante los índices de desempeño que indican la eficiencia de esta. Además, se validan las acciones de control diseñadas para garantizar la estabilidad del sistema, a través de los valores propios. La implementación del sistema se llevará a cabo utilizando un entorno virtual en Matlab, lo que permitirá visualizar el comportamiento del sistema en lazo abierto y posteriormente en lazo cerrado con el algoritmo de control respectivo. Finalmente, los resultados muestran que la implementación del algoritmo de control tiene impacto significativo en la propagación de información en redes sociales, lo que sugiere su utilidad en aplicaciones prácticas como la gestión de crisis, la promoción de campañas de marketing y la prevención de la propagación de desinformación.

PALABRAS CLAVE: Sistemas Multi-agentes, propagación, grafo, distribuido, Simulink.

ABSTRACT

The present work is aimed at the application of multi-agent systems for the analysis and simulation of propagation processes in social networks. The rumor propagation model is associated with the updating of the acceptance rate of an idea by the users that make up a network, based on the opinion of their neighbors and their own, through the use of graph theory to represent the system in state variables. In this context, distributed control algorithms are proposed capable of influencing the spread of rumors within a social network, with the aim of achieving a desired acceptance rate and observing its behavior under disturbances. The control action is evaluated through performance indices indicating the efficiency of it. Furthermore, control actions designed to ensure system stability are validated through eigenvalues. The implementation of the system will be carried out using a virtual environment in Matlab, which will allow visualizing the behavior of the system in open loop and subsequently in closed loop with the respective control algorithm. Finally, the results show that the implementation of the control algorithm has a significant impact on the spread of information in social networks, suggesting its usefulness in practical applications such as crisis management, marketing campaign promotion, and prevention of misinformation propagation.

KEYWORDS: Multi-agent systems, propagation, graph, distributed, Simulink.

1. INTRODUCCIÓN

A las redes sociales se las puede definir como un medio de comunicación, información y entretenimiento, donde: se puede construir un perfil ya sea este público o privado en el cual se puede conectar con familiares, amigos o personas que se encuentren en otra parte del mundo, y se deben cumplir políticas para una sana convivencia con los demás usuarios [1]. Hoy en día el uso de redes sociales se ha intensificado y en gran medida consecuencia de la pandemia provocada por el COVID-19. En el Ecuador, las redes sociales se usan como un medio de información a través de los denominados medios de comunicación independientes, debido a la desconfianza hacia los medios tradicionales y masivos de comunicación.

Dentro de internet, en especial en las redes sociales, existe una gran cantidad de información a ser compartida, sin embargo, esta no se encuentra totalmente regulada. Por lo que, al no poder verificar la fuente de donde se obtuvo se la define como un rumor [2]. La difusión de rumores forma parte del diario vivir del ser humano, pues este puede influir la toma de decisiones de los usuarios. Estos rumores se inventan para usarse con fines políticos, económicos y sociales. Los investigadores han desarrollado modelos matemáticos que representen la dinámica y factores que intervienen en su propagación [3].

Este trabajo de integración curricular consiste en el análisis del funcionamiento de procesos de propagación de rumores en redes sociales, las cuáles se encuentran representadas a través de sistemas multiagentes. Además, se pretende aplicar una acción de control adecuada para el sistema mencionado anteriormente, dicho controlador será implementado dentro de un software de simulación. Finalmente, se validarán los resultados del modelo lineal y no lineal de la propagación de rumores en redes sociales mediante un sistema multiagentes con y sin controlador.

1.1 Objetivo General

Aplicar un algoritmo de control en procesos de propagación de rumores en redes sociales.

1.2 Objetivos Específicos

- Realizar una revisión bibliográfica acerca de procesos de propagación de rumores en redes sociales. Además, realizar una revisión bibliográfica para la implementación del sistema dentro de un software de simulación.
- Escoger un modelo matemático que represente la propagación de rumores en redes sociales para varias poblaciones.

- Definir un modelo en espacio de estados para la propagación de rumores en redes sociales representados por sistemas multiagentes y a su vez determinar la interacción que tienen los diferentes agentes entre las poblaciones previamente definidas.
- Simular un modelo en espacio de estados para la propagación de rumores en redes sociales representados por sistemas multiagentes.
- Aplicar un algoritmo de control dentro de un software de simulación, para la propagación de rumores en redes sociales, tanto como para el modelo lineal como el modelo no lineal.

1.3 Alcance

- Se realizará una revisión bibliográfica acerca de procesos de propagación de redes sociales, así como sus características, variables que lo conforman, etc.
- Se realizará una revisión bibliográfica acerca de sistemas multiagentes y teoría de grafos, así como sus características, de esta manera, se definirá la propagación de rumores en redes sociales a través de un sistema multiagentes.
- Se definirán el número de poblaciones con las que se trabajará el sistema de propagación de rumores en redes sociales representado en sistemas multiagentes.
- Se determinará los parámetros que conforman la población e interacción entre al menos 5 poblaciones.
- Se definirá un modelo lineal para la propagación de rumores en redes sociales representados por sistemas multiagentes.
- Se implementará un modelo lineal para la propagación de rumores en redes sociales a través de un sistema multiagentes con el número de poblaciones previamente definido, en un software de simulación sin controlador.
- Se implementará un algoritmo para controlar la propagación de rumores en redes sociales en un software de simulación.
- Se validará el algoritmo de control previamente diseñado con los diferentes índices de desempeño tales como ISE e ISCO.

1.4 Marco Teórico

1.4.1 Propagación en Redes Sociales

La propagación hace referencia al proceso de extender o reproducir ondas, enfermedades, información, fuego, entre otros, a través de un medio, ya sea físico o digital. Las redes

sociales, al ser un medio digital en el que se propaga información, noticias e ideas personales o públicas, tienen efectos positivos o negativos según el contexto en el que se lo realice [4]. La propagación de ideas u opiniones en una red social ocurre cuando un usuario difunde o comparte información, llegando así a un grupo de usuarios que, a su vez, la compartirán con más usuarios en la red [5].

Por lo tanto, los procesos de propagación en redes sociales pueden describirse como la difusión de contenido informativo o de entretenimiento, ya sea de forma natural o previamente organizado. La manera en cómo se propague dependerá de la aceptación, la interacción y contenido de la información; así como de la influencia de los usuarios. Es decir, la popularidad de los usuarios en la red influirá en el alcance que pueda tener la información [6].

1.4.2 Sistemas Multi-agentes

Un sistema multi-agente está conformado por un grupo de agentes autónomos que interactúan y conviven bajo un mismo entorno, percibidos a través de sensores y en el que actúan controladores. Estos sistemas surgen como una manera alternativa a los sistemas centralizados, debido a que representan a un sistema de manera natural. Este tipo de sistema es mayormente utilizado para modelar procesos que intervienen múltiples agentes como sistemas de transporte, grupos de robots, gestión de recursos, minería de datos, etc. En un sistema multi-agente, ciertos comportamientos se encuentran predefinidos para adaptarse a cambios en el ambiente en el que se encuentran. Los agentes al ser autónomos realizan la acción necesaria, provocando que el sistema cambie a un nuevo estado. Estos agentes interactúan constantemente con su entorno, lo que les permite adaptarse a diferentes escenarios y actuar ante diferentes cambios eficientemente. Existen diversas maneras de modelar un sistema multi-agente como teoría de juegos, inteligencia artificial, algoritmos de aprendizaje por refuerzo y programación orientada a agentes [7].

En procesos de propagación de ideas en redes sociales, los sistemas multi-agentes están formados por agentes que generan una idea propia o la adoptan de otro agente. Estas ideas se comparten y se difunden con los demás agentes de la red, de esta manera una idea se propaga y modifica colectivamente a medida que interactúa con los demás agentes que conforman la red.

1.4.3 Modelo del Sistema de Propagación de Ideas en Redes Sociales

Previamente se ha hablado como las ideas se propagan en una red social; sin embargo, es muy complicado modelar una idea, debido a que esta idea puede ser representada a través de palabras que contengan información comprobable, puntos de vista personales,

imágenes, etc. Por lo que, matemáticamente y en el presente trabajo se va a referir a la tasa de aceptación de una idea u opinión, mejor dicho, que tan aceptable es para un usuario una idea que ha sido compartida dentro de una red. En la mayoría de los casos, no se puede ignorar o compartir la tasa de aceptación de la idea de cualquier otro agente, sino que se necesita tener en cuenta las tasas de aceptación de su entorno hasta formar su propia tasa.

Para el siguiente modelo, se considera a los usuarios de una red social como agentes, para lo cual se lo identificará como agente i ($i = 1, 2, \dots, N$). Durante el proceso de propagación la tasa de aceptación de la idea se lo identificará como $x_i(k)$, que representa la tasa de aceptación del agente i a través del tiempo $k \in \mathbb{N}$, es decir, k es un elemento del conjunto de números naturales. Los valores que puede tomar el estado x_i se encuentra comprendido en el intervalo de $-1 \leq x_i(k) \leq 1$. Se necesita de al menos 2 agentes para que se dé lugar a la propagación, por tal motivo, para un grupo de N agentes se representará de manera vectorial siendo $\vec{x}(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$. La relación entre un agente i y un agente j se denomina arista a_{ij} , donde que para todo i, j se debe cumplir con $a_{ij} \geq 0$ [8]. Considerando esta información, la propagación de la tasa de opinión se la puede describir como:

$$x_i(k + 1) = a_{i1}x_1(k) + a_{i2}x_2(k) + \dots + a_{in}x_n(k) \quad (1.1)$$

La ecuación 1.1 indica como el agente i ajusta su tasa de aceptación en el tiempo $k + 1$ teniendo en cuenta un promedio ponderado con la relación a_{ij} . Es importante tener en cuenta que las aristas cambian con el tiempo o con la tasa, por lo que, $a_{ij} = a_{ij}(k, \vec{x}(k))$, convirtiéndola en una función dependiente del tiempo k y/o de su aceptación $\vec{x}(k)$. Todas estas aristas pueden ser agrupados de forma matricial $A(k, \vec{x}(k))$, obteniendo una matriz estocástica, esto quiere decir que es una matriz no negativa y además la suma de los valores de cada fila es igual a 1 [8]. De tal manera, que al usar notación matricial la forma general del modelo es la siguiente:

$$\vec{x}(k + 1) = A(k, \vec{x}(k))\vec{x}(k) \quad (1.2)$$

1.4.3.1 Modelo No Lineal

El siguiente modelo representa la confianza limitada que existe entre los agentes, es decir, un agente i solo tendrá en cuenta aquellos agentes j cuyas tasas de aceptación son diferentes a las delimitadas por ε_i , por lo que este conjunto de agentes esta dado por:

$$I_l(i, x) = \{1 \leq j \leq n \mid |x_i - x_j| \leq \varepsilon_i\} \quad (1.3)$$

Se asume que el agente i asigna una arista igual a todos los agentes $j \in I(i, x)$. Por lo tanto, se tiene que $a_{ij}(x) = 0$ para $j \notin I_l(i, x)$ y $a_{ij}(x) = |I_l(i, x)|^{-1}$ para $j \in I_l(i, x)$ [8]. Finalmente, se tiene:

$$x_i(k + 1) = |I_l(i, x(k))|^{-1} \sum_{j \in I_l(i, x(k))} x_j(k) \quad (1.4)$$

La ecuación 1.4 describe como el agente i se relaciona con el agente j a través de la ecuación 1.3, es decir $I_l(i, x(k))$ está en función de la cardinalidad del conjunto de agentes con aquellos agentes que se relaciona cumpliendo la condición ε_i a lo largo del tiempo k , es decir, $I_l(i, x(k))$ se encuentra en función tanto del tiempo y de la tasa de aceptación, con lo cual el modelo puede ser representado por la ecuación 1.2.

1.4.3.2 Teoría de Grafos

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas que estudia la relación entre elementos de un mismo conjunto, los cuales suelen representar diferentes situaciones del mundo real. Para el presente caso de estudio es importante familiarizarse con algunos conceptos que permitirán representar la propagación de ideas en redes sociales en sistemas multi-agentes [9].

Un grafo se define como un par ordenado $G = (V, E)$, donde, V denominado vértice es un conjunto finito no vacío formado por vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y E es un conjunto formado por pares ordenados $E = \{(v_1, v_2), \dots, (v_n, v_m)\}$ denominados aristas, que conectan elementos distintos de V .

Los grafos se clasifican en grafos no dirigidos y dirigidos, indicando la relación existente entre vértices. Un grafo no dirigido representado en la Figura 1.1.a, indica que no es relevante el grado de vértice que existe entre los vértices. Por otro lado, un grafo dirigido, representado en la Figura 1.1.b, indica un sentido de relación entre uno o más vértices [9]. Es importante mencionar que dentro de grafos dirigidos existen dos tipos: unidireccional o bidireccional [9].

En un grafo G , el grado de un vértice v_i se define como el número de aristas de que inciden en dicho vértice. El grado de salida indica el número de aristas que parten del vértice y el grado de entrada indica el número de aristas que inciden sobre el vértice. En el caso de que G sea un grafo no dirigido, la incidencia de aristas no tiene dirección, por lo que el grado de salida es igual al grado de entrada, los cuales se encuentran representados como $\delta^-(v)$ y $\delta^+(v)$ respectivamente. Sin embargo, en este trabajo G es un grafo dirigido, por lo

que se utiliza el grado de entrada. A continuación, se presentan las ecuaciones que representan el grado de entrada y salida respectivamente:

$$\delta^+(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

$$\delta^-(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$$
(1.5)

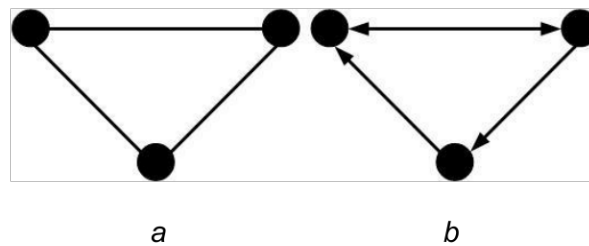


Figura 1.1. Grafo: a) no dirigido b) dirigido.

1.4.3.2.1 Matriz de Adyacencia

La matriz de adyacencia se define como una matriz $A_{d_{n \times n}}$, donde la entrada es en la i –ésima fila y la j –ésima columna como a_{ij} [10]. De manera general se la representa como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \rightarrow i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$
(1.6)

1.4.3.2.2 Matriz Laplaciana

La matriz Laplaciana para un grafo dirigido está definida como $L_{n \times n} = l_{ij}$, donde l_{ij} toma un valor según el caso descrito en la ecuación 1.7.

$$l_{ij} = \begin{cases} \delta^+(v_i) & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{otro caso} \end{cases}$$
(1.7)

Una manera alternativa de obtener la matriz Laplaciana es a través de la siguiente expresión: $L = D - A_d$, donde $D = \text{diag}(\vec{d})$ es una matriz diagonal con \vec{d} como vector que contiene al grado de entrada de cada vértice y A_d es la matriz de adyacencia de G [9].

A continuación, un ejemplo que sintetiza lo revisado anteriormente, el grafo dirigido que se muestra en la Figura 1.2.

$$G_1 = (V, E)$$

$$V = \{A, B, C\}$$

$$E = \{(A, B), (B, C), (C, A)\}$$

El grafo está conformado por tres vértices y tres aristas que los conectan formando tres pares ordenados como se puede ver en las ecuaciones anteriores.

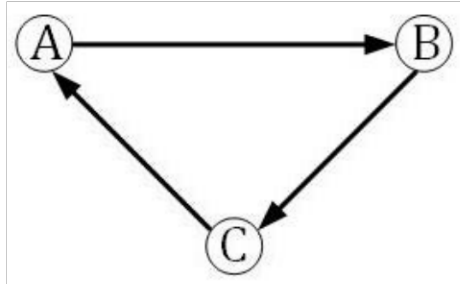


Figura 1.2. Ejemplo de grafo con tres vértices.

La matriz de Adyacencia A_d del grafo G_1 es la siguiente:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector grado \vec{d} que contiene cada uno de los grados de vértice es el siguiente:

$$\vec{d} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Por otro lado, y a partir del vector \vec{d} se forma la matriz diagonal D:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con la matriz de Adyacencia y la matriz D, se puede determinar la matriz Laplaciana del grafo G_1 .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.3.3 Modelo Lineal

El siguiente modelo [10], describe como la interacción entre un agente i con el/los agentes j :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \epsilon \sum_{(i,j) \in E} [x_j(k) - x_i(k)] \quad (1.8)$$

En donde $\epsilon \in [0, 1/\max(\vec{d})]$ y $\max(\vec{d})$ es el valor máximo del vector \vec{d} . El factor de aprendizaje ϵ ayuda a controlar la influencia relativa de las opiniones de aquellos agentes con alto grado y mantener la actualización de la tasa de aceptación de la idea estable. La

ecuación 1.8 es posible representarla de manera matricial [10]. De tal manera se tiene lo siguiente:

$$\vec{x}(k + 1) = (I - \epsilon L)\vec{x}(k) \quad (1.9)$$

En la ecuación 1.9, la matriz I es una matriz de identidad de dimensión $n \times n$, donde n es el número de agentes que forman la red. La matriz L es la matriz Laplaciana que describe la interacción de los agentes en la red [10].

1.4.3.4 Descripción del Modelo en Variables de Estado

Una vez identificado el modelo que describe la propagación en redes sociales, es importante esclarecer que representa cada uno de los elementos que lo conforman, para ello se utiliza el siguiente modelo en variables de estado:

$$\vec{x}(k + 1) = A\vec{x}(k) + B\vec{u}(k) \quad (1.10)$$

Donde:

- $A = I - \epsilon L$ conocida como la matriz de estados. Esta matriz representa la interacción entre los diferentes agentes en la red mediante el uso de la matriz Laplaciana, la cual describe la estructura topológica de la red.
- B es la matriz de entrada e indica como la entrada $\vec{u}(k)$ afecta a los estados del sistema en el siguiente paso de tiempo.
- $x(k)$ representa la tasa de aceptación de la idea comprendido en un intervalo entre $-1 \leq \vec{x}(k) \leq 1$.
 - $x(k) = -1$ indica una tasa de aceptación negativa, lo que implica un rechazo total hacia la idea. En ese caso el/los agentes están en contra de la idea difundida.
 - $x(k) = 1$ indica una tasa de aceptación es positiva, lo que implica una aceptación total de la idea. En ese caso el/los agentes están a favor de la idea difundida.
 - $x(k) = 0$ indica una tasa de aceptación neutra, implica que la idea ni es aceptada ni es rechazada. En ese caso el/los agentes tienen opiniones divididas sobre idea difundida.
- $\vec{u}(k)$ representa la eficiencia de la fuente de información, es decir, cuántas fuentes confiables respaldan la información utilizada para la transmisión en la red. Esta variable influye directamente en la propagación de la idea, ya que una mayor eficiencia incrementa la tasa de aceptación por parte de los agentes.

1.4.4 Control Distribuido

Existen diferentes maneras de aplicar un algoritmo de control. Entre ellas, se encuentra el control centralizado, donde las operaciones de control están dirigidas desde una estación central, la cual recibe la información, la procesa y emite las diferentes acciones de control a ser ejecutadas como se puede observar en la Figura 1.3. La estación de control central, marcada con rojo, recepta la información proveniente de los puntos marcados con azul. Sin embargo, en sistemas multi-agentes no es recomendable aplicar este tipo de arquitectura, debido a que una red puede ser pequeña o muy extensa. Por lo tanto, una arquitectura centralizada necesita más recursos para lograr cubrir las necesidades de todos los agentes y esto puede ocasionar fallos en el sistema [11].

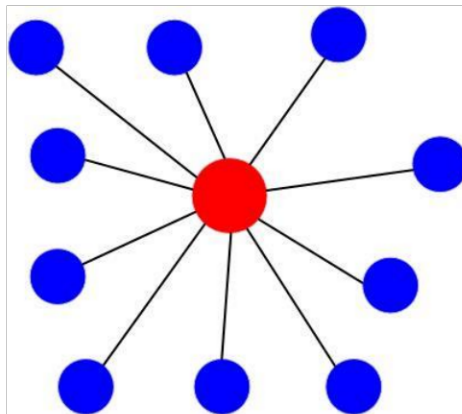


Figura 1.3. Arquitectura de control centralizado.

Por otro lado, el control distribuido en sistemas multi-agentes permite la gestión y coordinación de los diferentes agentes que conforman la red para llegar a un objetivo específico dentro de un entorno compartido. Al no usar una estación central, si un agente falla o existen cambios en el entorno los demás agentes pueden seguir funcionando de manera independiente o con los agentes que tiene relación directa, dependiendo de cómo se hayan distribuido las diferentes estaciones de control, como se puede ver en la Figura 1.4. Las estaciones de control distribuidas, marcadas con rojo, receptan información proveniente de los puntos marcados con azul del área de control respectiva. Este tipo de control permite una buena escalabilidad, pues al agregar más agentes este es capaz de adaptarse sin la necesidad de reducir el rendimiento del sistema [11].

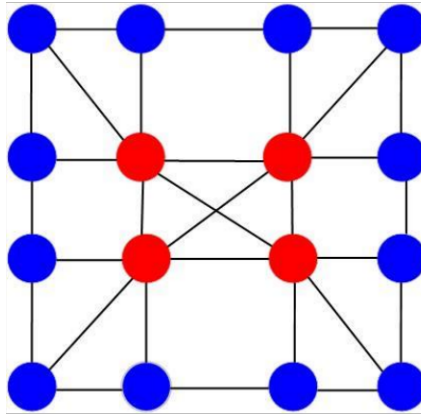


Figura 1.4. Arquitectura de control distribuido.

1.4.5 Estabilidad del Sistema

La estabilidad es la capacidad de un sistema de mantener una salida limitada a lo largo del tiempo. Es decir, cuando el sistema presenta perturbaciones o cambios de referencia en la entrada, debe ser capaz de llegar o mantenerse en un estado de equilibrio. Por otro lado, un sistema inestable provocará que los estados crezcan sin límite o se saturan ante cualquier perturbación, por más pequeña que sea. En el diseño de algoritmos de control, la estabilidad es un requisito fundamental para que los sistemas realicen operaciones o procesen señales adecuadamente [12].

En sistemas multi-agentes, una de las técnicas que permite verificar la estabilidad es analizar los valores propios de la matriz de estados. Una vez que se han añadido los diferentes algoritmos de control, el sistema cambia, debido a que modifican el estado de la variable de salida para corregir el error entre esta y la referencia. Para determinar los valores propios se hace uso de la ecuación 1.11, donde la matriz A_{AC} es la matriz de estados cuando se ha añadido la acción de control.

$$\det(A_{AC} - \lambda I) = 0 \quad (1.11)$$

Una vez obtenido los valores propios, si el módulo de cada uno de ellos tiene un valor menor o igual a uno, indicará que se encuentra dentro del círculo unitario, garantizando la estabilidad del sistema [13]. De esta manera, existe un funcionamiento apropiado entre los agentes y su respectiva acción de control, así como su capacidad para mantenerse en un estado deseado ante perturbaciones.

1.4.6 Índices de Desempeño

Los índices de desempeño o funcionamiento constituyen indicadores cuantitativos que evalúan la eficiencia de un controlador respecto a varios controladores, además de comprobar si se cumplen con los objetivos de control. De esta manera, se seleccionará el controlador más adecuado y eficiente para asegurar el funcionamiento óptimo del sistema.

Para lograrlo, la acción de control debe minimizar el error, responder rápidamente ante cambios de referencia y garantizar la estabilidad frente a perturbaciones, entre otros aspectos.

1.4.6.1 Índices de Desempeño ISE

El índice Integral de Error Cuadrático (en inglés Integral Square Error o por sus siglas ISE) sirve para analizar el funcionamiento del controlador a la hora de minimizar el error a lo largo del tiempo y de esta manera analizar el rendimiento un controlador [12].

El índice de desempeño ISE para cada agente, está definido por la ecuación:

$$ISE_i = \sum_{k=0}^N e_i(k)^2 \quad (1.12)$$

Donde $e_i(k)$ es el error de cada agente del sistema en el instante de tiempo k .

1.4.6.2 Índices de Desempeño ISCO

El índice Integral de Salida de Control Cuadrática (en inglés Integral Square Control Signal o por sus siglas ISCO) sirve para analizar el funcionamiento del controlador a la hora de suministrar energía por parte de la señal de control y de esta manera analizar el rendimiento un controlador [12].

El índice de desempeño ISCO para cada agente, está definida por la ecuación:

$$ISCO_i = \sum_{k=0}^N u_i(k)^2 \quad (1.13)$$

Donde $u_i(k)$ es la señal de control de cada agente del sistema en el instante de tiempo k .

2. METODOLOGÍA

En el presente capítulo, se emplea el marco teórico expuesto en el Capítulo 1. Se detalla el modelo del proceso de propagación de rumores en una red social, el cual es representado como un sistema multi-agentes a través de variables de estado, para poder observar de mejor manera la interacción entre agentes en una red. El enfoque principal de este capítulo es la representación en variables de estado que reflejan la tasa de aceptación de rumores de cada agente. Además, se describe el diseño de algoritmos de control, los cuales se distribuirán en la red, que ayudarán al sistema a llegar a tasas de aceptación deseadas. Finalmente, se representa al sistema con la respectiva acción de control en variables de estado, para el posterior análisis de estabilidad.

2.1 Representación en Sistema Multi-agente

Para la representación en sistemas multi-agentes, se debe conocer como está conformada la red e identificar cuantos agentes intervienen en ella y a su vez que tipo de grafo es como se indica la sección 1.4.3.2. Para el desarrollo de este capítulo se toma como ejemplo una red formada por 4 usuarios los cuales se encuentran comunicados como se muestra en la Figura 2.1.

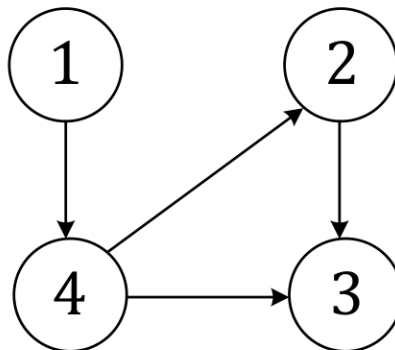


Figura 2.1. Red conformada por 4 agentes.

2.1.1 Representación en el Modelo Lineal

Para representar a la red de la Figura 2.1. de forma lineal se hace uso de la ecuación 1.8. En esta ecuación es importante seleccionar previamente el valor de ϵ . Para obtener este valor, primero se debe obtener el grado de entrada de un vértice $\delta(v)$ descrito en la ecuación 1.5. Se determina el grado de entrada de cada uno de los agentes y se expresa de manera vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{d} = [0, 1, 2, 1]$$

Una vez determinado los grados de vértice se selecciona el valor máximo de \vec{d} para determinar el rango en el que se debe encontrar el valor de ϵ . Para este caso $\max(\vec{d}) = 2$. Por lo que el rango de $\epsilon = [0, 1/2]$ y para facilitar los cálculos $\epsilon = 0.25$. Una vez determinado el valor de ϵ , es posible representar la interacción entre los agentes haciendo uso de la ecuación 1.8.

El agente 1 queda representado de la siguiente manera:

$$x_1(k + 1) = x_1(k)$$

El agente 2 queda representado de la siguiente manera:

$$x_2(k + 1) = 0.75x_2(k) + 0.25x_4(k)$$

El agente 3 queda representado de la siguiente manera:

$$x_3(k + 1) = 0.25x_2(k) + 0.5x_3(k) + 0.25x_4(k)$$

El agente 4 queda representado de la siguiente manera:

$$x_4(k + 1) = 0.25x_1(k) + 0.75x_4(k)$$

Como se puede evidenciar en la Figura 2.1, el agente 1 no se encuentra influenciado por otro agente de modo que su estado quedará determinado únicamente por sí mismo. Por otro lado, el agente 2 no tiene una relación directa con el agente 1 por lo que este no se encuentra presente su respectiva ecuación, realizando el mismo análisis se puede observar con que agentes se encuentran conectados los agentes 3 y 4.

A partir de las ecuaciones obtenidas se puede representar en variables de estado de la siguiente forma:

$$\vec{x}(k + 1) = A\vec{x}(k) \tag{2.1}$$

En donde, $\vec{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)]^T$ es un vector de estados que representa la tasa de aceptación de la idea de los agentes. Por otro lado, la matriz A es la matriz de transición de estados, que indica la comunicación que existe entre ellos. Usando la notación de la ecuación 2.1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \\ x_3(k + 1) \\ x_4(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Al tratarse de 4 agentes resulta sencillo determinar las ecuaciones de cada uno de estos; sin embargo, si la red es bastante extensa, se recomienda hacer uso de la ecuación 1.9 que facilitará la obtención del sistema de manera directa en variables de estado.

Primero, se deberá obtener la matriz de adyacencia haciendo uso de la ecuación 1.6, obteniendo lo siguiente:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz Laplaciana se puede hacer uso de la ecuación 1.7 o a partir de la matriz de adyacencia y la matriz D . De tal manera, la matriz D es la siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se calculará la matriz Laplaciana como $L = D - A_d$ y se obtendrá lo siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, con la matriz Laplaciana se puede obtener el sistema representado en variables de estado haciendo uso de la ecuación 1.9 y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Como se puede evidenciar las ecuaciones 2.2 y 2.3 son las mismas y una manera de verificar que lo obtenido es correcto es verificar que la matriz de transición de estados o la matriz A sea una matriz estocástica, es decir que al sumar cada uno de los elementos de cada fila su valor debe ser igual a 1.

Si bien en la Figura 2.1 se observa la conexión entre los agentes, no ofrece mucha información. A continuación, y a partir de las ecuaciones obtenidas en 2.3, se tiene la siguiente figura que detalla de manera completa la conexión entre cada agente con su respectiva arista.

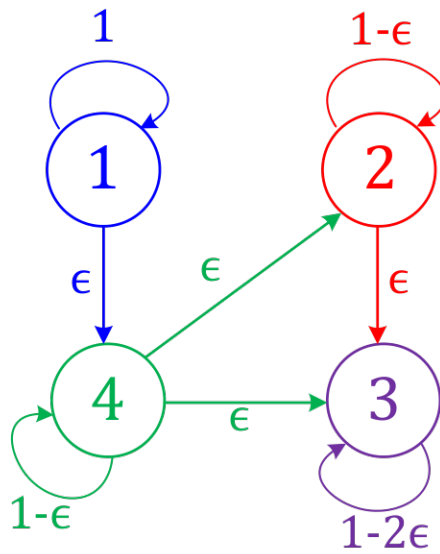


Figura 2.2 Representación de las ecuaciones de estado en grafo de la red de 4 agentes.

2.2 Algoritmos de Control

En el capítulo 1, se revisaron algunas ventajas asociadas a la implementación de un control distribuido con el propósito de que el sistema alcance un objetivo en común, en el presente caso de estudio es lograr una tasa de aceptación deseada. El control distribuido ubica estratégicamente las estaciones de control, permitiendo un control más preciso y al mismo tiempo garantiza la estabilidad del sistema. A diferencia del control centralizado, que emplea una única acción de control para todo el sistema y requiere más energía para cumplir con los valores deseados y la eficiencia del sistema disminuirá a medida que la red crezca. Además, si control central falla la estabilidad del sistema se verá comprometida.

Con la finalidad de lograr un comportamiento coordinado y completo en sistemas multi-agentes, se propone el uso de agentes líderes y seguidores. El líder es aquel agente que proporciona información a los seguidores. Por lo tanto, al aplicar la acción de control para el líder, la referencia que este utiliza es la tasa de aceptación deseada, mientras que los seguidores utilizan la tasa de aceptación deseada, que puede ser la tasa de aceptación del agente líder o de aquellos agentes a los que se encuentran conectados. Para llevar a cabo la aplicación de un control distribuido y cumplir con los valores deseados se aplica, se utiliza una acción de control P (Proporcional), control PI (Proporcional-Integral) y un control PID (Proporcional-Integral-Derivativo).

A continuación, en la Figura 2.3 se presenta un esquema general que representa la acción de control para un agente líder, mientras que en la Figura 2.4 se presenta un esquema general que representa la acción de control para un agente seguidor.

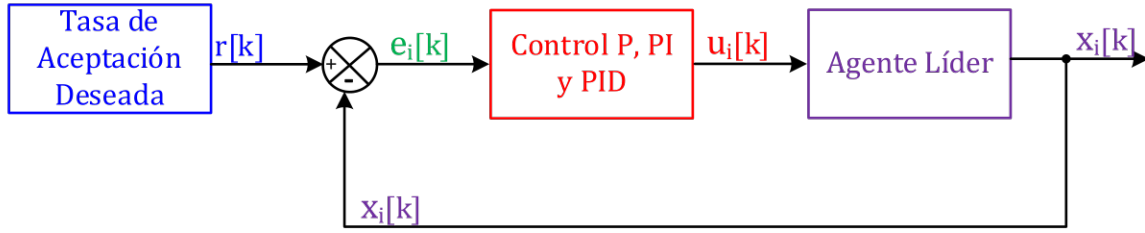


Figura 2.3. Representación en diagrama de bloques para el control de un agente líder.

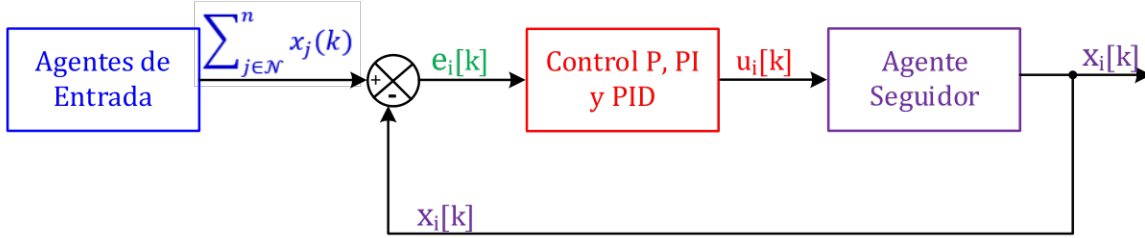


Figura 2.4. Representación en diagrama de bloques para el control de un agente seguidor.

Es importante mencionar que \mathcal{N} es el conjunto de agentes j adyacentes al agente i .

2.2.1 Acción de Control P

El controlador proporcional (P) ajusta la salida proporcionalmente al error, con la finalidad de reducir dicho error y viene representado por la siguiente ecuación:

$$u(k) = k_p e(k)$$

Para un agente líder se tiene:

$$u_i(k) = k_{p_i} e_i(k)$$

Donde $e_i(k) = r(k) - x_i(k)$, $r(k)$ es la tasa de aceptación que se desea que llegue el sistema.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$u_i(k) = k_{p_i} (r(k) - x_{p_i}(k)) \quad (2.4)$$

Para un agente seguidor se tiene:

$$u_i(k) = k_{p_i} e_i(k)$$

Para el/los agentes seguidores el error es descrito como $e_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k) - x_i(k)]$, donde $x_j(k)$ es la tasa de aceptación del agente líder o los agentes de entrada.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$u_i(k) = k_{P_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k) - x_i(k)] \right) \quad (2.5)$$

La representación en diagrama de bloques del control proporcional de un agente líder se muestra en la Figura 2.5 y para la de un agente seguidor se muestra en la Figura 2.6

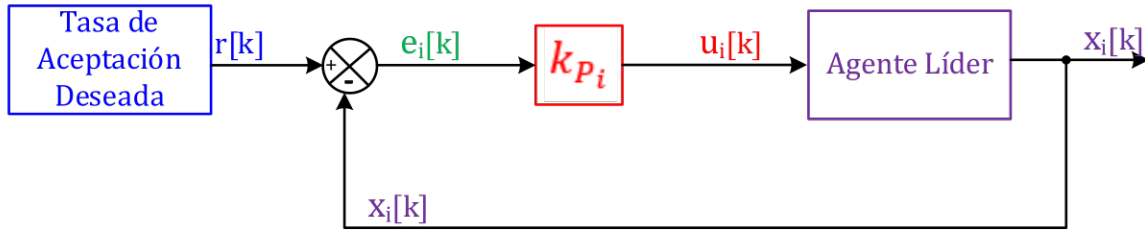


Figura 2.5. Representación en diagrama de bloques de la acción de control P para el agente líder.

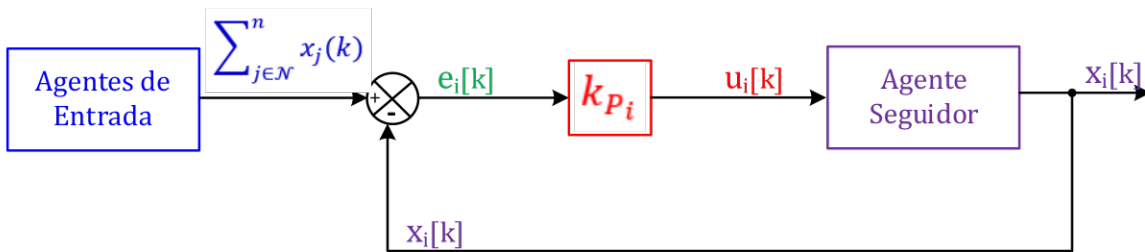


Figura 2.6. Representación en diagrama de bloques de la acción de control P para el agente seguidor.

2.2.2 Acción de Control PI

El controlador proporcional-integral (PI), además de ajustar proporcionalmente al error actual, la parte integral permite reducir el error acumulado eliminando el error en estado estable y viene representado por la siguiente ecuación:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) - q_1 e(k-1)$$

$$q_0 = k_p \left[1 + \frac{T_m}{2\tau_I} \right]$$

$$q_1 = k_p \left[1 - \frac{T_m}{2\tau_I} \right]$$

Donde:

- k_p es la constante proporcional del controlador.
- T_m es el periodo de muestreo, en este trabajo toma el valor de 1.
- τ_I es la constante de tiempo integral del controlador.

Para un agente líder se tiene:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + q_{0_i}e_i(k) - q_{1_i}e_i(k - 1)$$

Donde $e_i(k) = r(k) - x_i(k)$, $r(k)$ es la tasa de aceptación que se desea que llegue el sistema.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + q_{0_i}(r(k) - x_i(k)) - q_{1_i}(r(k - 1) - x_i(k - 1)) \quad (2.6)$$

La representación en diagrama de bloques del control proporcional-integral de un agente líder se muestra en la Figura 2.7.

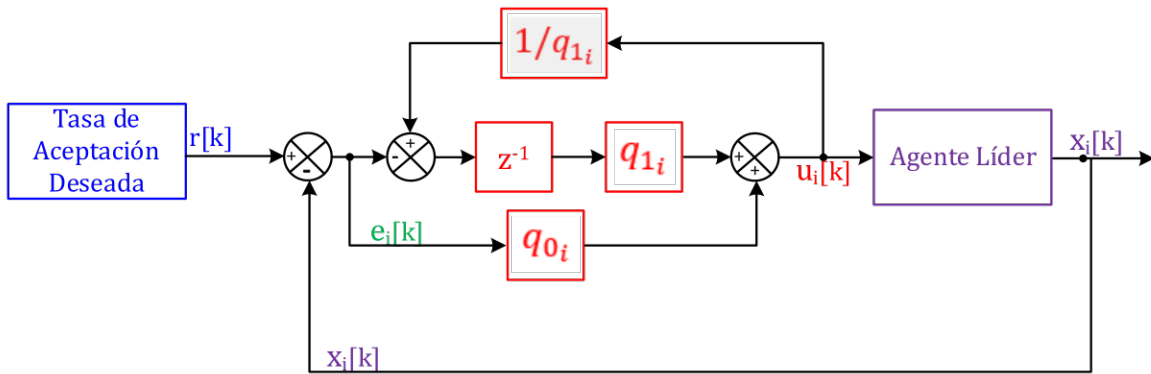


Figura 2.7. Representación en diagrama de bloques de la acción de control PI para el agente líder.

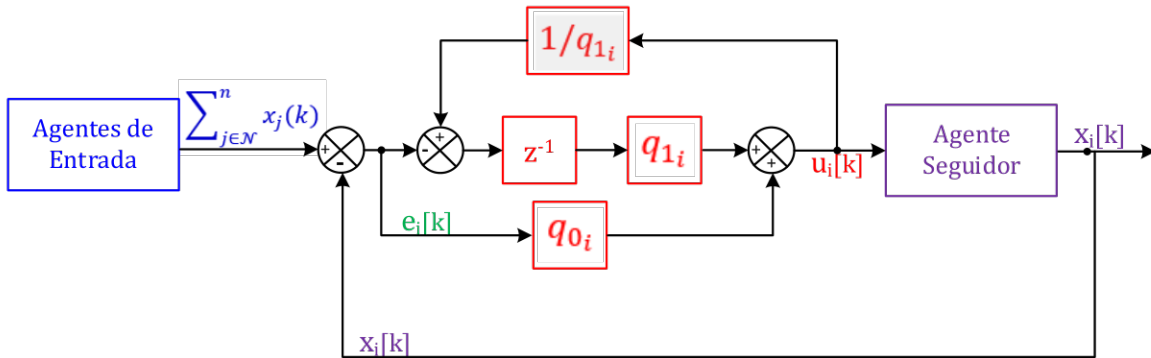


Figura 2.8. Representación en diagrama de bloques de la acción de control PI para el agente seguidor.

Para un agente seguidor se tiene:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + q_{0_i}e_i(k) - q_{1_i}e_i(k - 1)$$

Para el/los agentes seguidores el error será descrito como $e_i(k) = \sum_{j \in N} [x_j(k) - x_i(k)]$, donde $x_j(k)$ será la tasa de aceptación del agente líder o los agentes de entrada.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
u_i(k) = & u_i(k-1) + q_{0_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}}^n [x_j(k) - x_i(k)] \right) \\
& - q_{1_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}}^n [x_j(k-1) - x_i(k-1)] \right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

La representación en diagrama de bloques del control proporcional-integral de un agente seguidor se muestra en la Figura 2.8.

2.2.3 Acción de Control PID

El controlador proporcional-integral-derivativo (PI), además de ajustar proporcionalmente al error actual, la parte integral permite reducir el error acumulado eliminando el error en estado estable y la parte derivativa se anticipa al error reaccionado de mejor manera en estado transitorio y viene representado por la siguiente ecuación:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) - q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$q_0 = k_p \left[1 + \frac{T_m}{2\tau_I} + \frac{\tau_D}{T_m} \right]$$

$$q_1 = k_p \left[1 - \frac{T_m}{2\tau_I} + \frac{2\tau_D}{T_m} \right]$$

$$q_2 = \frac{k_p \tau_D}{T_m}$$

Donde:

- k_p es la constante proporcional del controlador.
- T_m es el periodo de muestreo, en este trabajo toma el valor de 1.
- τ_I es la constante de tiempo integral del controlador.
- τ_D es la constante de tiempo derivativa del controlador.

Para un agente líder se tiene:

$$u_i(k) = u_i(k-1) + q_{0_i} e_i(k) - q_{1_i} e_i(k-1) + q_{2_i} e_i(k-2)$$

Donde $e_i(k) = r(k) - x_i(k)$, $r(k)$ es la tasa de aceptación que se desea que llegue el sistema.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
u_i(k) = & u_i(k-1) + q_{0_i} (r(k) - x_i(k)) - q_{1_i} (r(k-1) - x_i(k-1)) \\
& + q_{2_i} (r(k-2) - x_i(k-2))
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para un agente seguidor se tiene:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + q_{0_i}e_i(k) - q_{1_i}e_i(k - 1) + q_{2_i}e_i(k - 2) \quad (2.9)$$

Para el/los agentes seguidores el error es descrito como $e_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k) - x_i(k)]$, donde $x_j(k)$ será la tasa de aceptación del agente líder o los agentes de entrada.

De tal manera, su acción de control viene representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} u_i(k) = & u_i(k - 1) + q_{0_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k) - x_i(k)] \right) \\ & - q_{1_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k - 1) - x_i(k - 1)] \right) \\ & + q_{2_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} [x_j(k - 2) - x_i(k - 2)] \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La representación en diagrama de bloques del control proporcional de un agente líder se muestra en la Figura 2.9 y para la de un agente seguidor se muestra en la Figura 2.10.

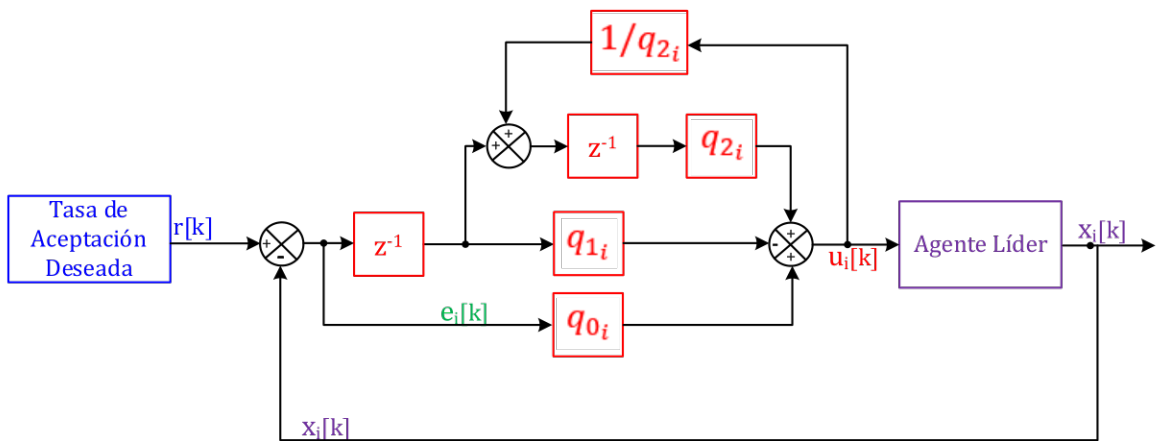


Figura 2.9. Representación en diagrama de bloques de la acción de control PID para el agente líder.

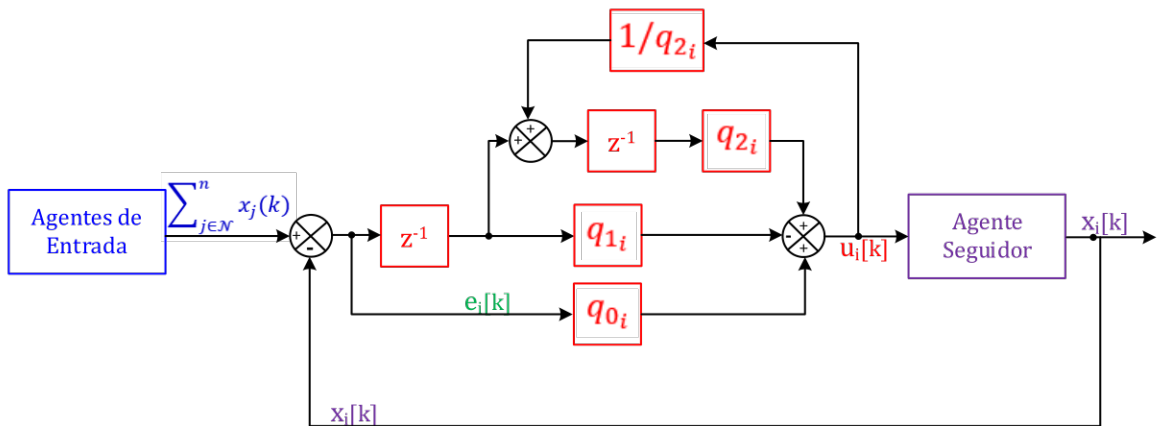


Figura 2.10. Representación en diagrama de bloques de la acción de control PID para el agente seguidor.

2.3 Representación en Variables de Estado

2.3.1 Representación en variables de estado para una Acción de Control P

Al aplicar un algoritmo de control proporcional (P), no existe cambio alguno en los estados, ya que ajusta proporcionalmente al error actual. En este caso, solo está influenciado por la ganancia proporcional. De tal manera que para un agente líder la acción de control es:

$$x_i(k+1) = (1 - m\epsilon - k_{p_i})x_i(k) + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) + k_{p_i}r(k) \quad (2.11)$$

Para un agente seguidor:

$$x_i(k+1) = (1 - m\epsilon - mk_{p_i})x_i(k) + (\epsilon + k_{p_i}) \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) \quad (2.12)$$

Una vez determinada las ecuaciones se procede a representar de manera matricial:

$$\vec{x}(k+1) = A_{AP}\vec{x}(k)$$

Donde A_{AP} es la nueva matriz cuando se ha aplicado una acción de control P y está formado algebraicamente de la siguiente manera: $A_{AP} = A_{n \times n} - M1_{n \times n} - M2_{n \times n}$

La matriz $A_{n \times n}$ es la matriz de transición de estados.

La matriz $M1_{n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{1ij} = \begin{cases} k_{p_i} \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -k_{p_i} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $M2_{n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{2ij} = \begin{cases} k_{p_i} & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

2.3.2 Representación en variables de estado para Acción de Control PI

Al aplicar un algoritmo de control proporcional-integral (PI), la parte integral del algoritmo de control provoca un retardo, por lo que, este retenedor aumentará un estado. Por lo tanto, la acción de control PI es:

$$u_i(k) = q_{0_i}e_i(k) - q_{1_i}x_{i+n}(k)$$

$$x_{i+n}(k+1) = x_{i+n}(k) + \left(\frac{q_{0_i}}{q_{1_i}} - 1 \right) e_i(k)$$

$$c_i = \frac{q_{0_i}}{q_{1_i}} - 1$$

Para un agente líder la representación en variables de estado es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= (1 - m\epsilon - q_{0_i})x_i(k) + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) + q_{1_i}x_{i+n}(k) + q_{0_i}r(k) \\ x_{i+n}(k+1) &= -c_i x_i(k) + x_{i+n}(k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para un agente seguidor la representación en variables de estado es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= (1 - m\epsilon - mq_{0_i})x_i(k) + (\epsilon + q_{0_i}) \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) + q_{1_i}x_{i+n}(k) \\ x_{i+n}(k+1) &= -mc_i x_i(k) + c_i \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) + x_{i+n}(k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde A_{API} es la nueva matriz cuando se ha aplicado una acción de control PI y está formada por 4 submatrices distribuidas de la siguiente manera:

$$A_{API} = \begin{bmatrix} J_{1_{n \times n}} & J_{2_{n \times n}} \\ -J_{3_{n \times n}} & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

La matriz $J_{1_{n \times n}}$ está formado de la siguiente manera: $J_{1_{n \times n}} = A_{n \times n} - M_{1_{n \times n}} - M_{2_{n \times n}}$. La matriz $A_{n \times n}$ es la matriz de transición de estados.

La matriz $M_{1_{n \times n}}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{1_{ij}} = \begin{cases} q_{0_i} \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -q_{0_i} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $M_{2_{n \times n}}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{2_{ij}} = \begin{cases} q_{0_i} & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $J_{2_{n \times n}}$ es una matriz diagonal formada por las constantes q_{1_i}

$$J_{2_{n \times n}} = \text{diag}[q_{1_1}, q_{1_2}, \dots, q_{1_i}]$$

La matriz $J_{3_{n \times n}}$ está formado de la siguiente manera: $J_{3_{n \times n}} = F_{1_{n \times n}} + F_{2_{n \times n}}$.

La matriz $F_{1_{n \times n}}$ está definida de la siguiente manera:

$$f_{1_{ij}} = \begin{cases} c_i \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -c_i & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $F_{2_{n \times n}}$ está definida de la siguiente manera:

$$f_{2_{ij}} = \begin{cases} c_i & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $I_{n \times n}$ es una matriz identidad.

2.3.3. Representación en variables de estado para una Acción de Control PID

Al aplicar un algoritmo de control proporcional-integral-derivativo (PID), la parte integral y derivativa indican retardo, por lo que, estos retenedores aumentarían un estado cada uno. Por lo tanto, la acción de control PID es:

$$\begin{aligned}
 u_i(k) &= q_{0_i}e_i(k) - q_{1_i}x_{i+n}(k) + q_{2_i}x_{i+2n}(k) \\
 x_{i+n}(k+1) &= e_i(k) \\
 x_{i+2n}(k+1) &= \frac{q_{0_i}}{q_{2_i}}e_i(k) - \frac{q_{1_i}}{q_{2_i}}x_{i+n}(k) + x_{i+2n}(k) \\
 a_i &= \frac{q_{0_i}}{q_{2_i}} \\
 b_i &= \frac{q_{1_i}}{q_{2_i}}
 \end{aligned}$$

Para un agente líder la representación en variables de estado es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_i(k+1) &= (1 - m\epsilon - q_{0_i})x_i(k) + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) - q_{1_i}x_{i+n}(k) \\
 &\quad + q_{2_i}x_{i+2n}(k) + q_{0_i}r(k) \\
 x_{i+n}(k+1) &= -x_i(k) + r(k) \\
 x_{i+2n}(k+1) &= -a_i x_i(k) - b_i x_{i+n}(k) + x_{i+2n}(k) + a_i r(k)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para un agente seguidor la representación en variables de estado es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_i(k+1) &= (1 - m\epsilon - mq_{0_i})x_i(k) + (\epsilon + q_{0_i}) \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) - q_{1_i}x_{i+n}(k) \\
 &\quad + q_{2_i}x_{i+2n}(k) \\
 x_{i+n}(k+1) &= -mx_i(k) + \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) \\
 x_{i+2n}(k+1) &= -ma_i x_i(k) + a_i \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j(k) - b_i x_{i+n}(k) + x_{i+2n}(k)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Donde A_{APID} es la nueva matriz cuando se ha aplicado una acción de control PID y está formada por 9 submatrices distribuidas de la siguiente manera:

$$A_{APID} = \begin{bmatrix} J_{1n \times n} & -J_{2n \times n} & J_{3n \times n} \\ -J_{4n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -J_{5n \times n} & -J_{6n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

La matriz $J_{1n \times n}$ está formado de la siguiente manera: $J_{1n \times n} = A_{n \times n} - M_{1n \times n} - M_{2n \times n}$. La matriz $A_{n \times n}$ es la matriz de transición de estados.

La matriz $M_{1n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{1ij} = \begin{cases} q_{0i} \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -q_{0i} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $M_{2n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$m_{2ij} = \begin{cases} q_{0i} & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $J_{2n \times n}$ es una matriz diagonal formada por las constantes q_{1i}

$$J_{2n \times n} = \text{diag}[q_{1_1}, q_{1_2}, \dots, q_{1_i}]$$

La matriz $J_{3n \times n}$ es una matriz diagonal formada por las constantes q_{2i}

$$J_{3n \times n} = \text{diag}[q_{2_1}, q_{2_2}, \dots, q_{2_i}]$$

La matriz $J_{4n \times n}$ está formado de la siguiente manera: $J_{4n \times n} = F_{1n \times n} + F_{2n \times n}$.

La matriz $F_{1n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$f_{1ij} = \begin{cases} \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $F_{2n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$f_{2ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $J_{5n \times n}$ está formado de la siguiente manera: $J_{5n \times n} = H_{1n \times n} + H_{2n \times n}$. La matriz $A_{n \times n}$ es la matriz de transición de estados.

La matriz $H_{1n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$h_{1ij} = \begin{cases} a_i \delta(v_i) & \text{si } i = j \\ -a_i & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $H_{2n \times n}$ está definida de la siguiente manera:

$$h_{2ij} = \begin{cases} a_i & \text{si } j \rightarrow i \forall i \text{ que sea líder} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La matriz $J_{6_{n \times n}}$ es una matriz diagonal formada por las constantes b_i

$$J_{6_{n \times n}} = \text{diag}[b_1, b_2, \dots, b_i]$$

La matriz $I_{n \times n}$ es una matriz identidad.

La matriz $0_{n \times n}$ es una matriz de ceros.

3. RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos al aplicar los diferentes algoritmos de control propuestos al modelo de propagación de rumores en redes sociales. Además, se analiza el comportamiento del sistema cuando se aplica una tasa de aceptación teórica deseada y cuando se presenta una perturbación en el sistema. El análisis de resultados se llevará a cabo mediante la comparación de gráficas, como la respuesta, las diferentes acciones de control aplicadas y el error de los distintos agentes que conforman la red. También, se evalúa y compara la eficiencia de los controladores a través de los índices de desempeño ISE e ISCO de manera individual y global, para así seleccionar el control más adecuado. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas durante el desarrollo del Trabajo de Integración Curricular. De esta manera, se pretende que el trabajo realizado sirva como una referencia y punto de partida para futuros trabajos, fomentando la investigación en el campo de sistemas multi-agentes.

La discusión de resultados se llevará a cabo a partir de 2 sistemas multi-agentes, una red formada por 4 agentes y una red formada por 16 agentes. Cada uno de los sistemas se ha simulado tanto en lazo abierto como en lazo cerrado para poder analizar el comportamiento antes y después de aplicar las diferentes acciones de control propuestas. También, se realizará una comparación entre las respuestas, acciones de control y errores, así como, de los índices de desempeño para tener un criterio analítico que ayudará a elegir el controlador más adecuado según las necesidades requeridas.

3.1 Resultados

3.1.1 Sistema en Lazo Abierto para una red formada por 4 agentes

Para el desarrollo de esta sección se usa una red formada por 4 usuarios los cuales se encuentran comunicados como se muestra en la Figura 3.1.

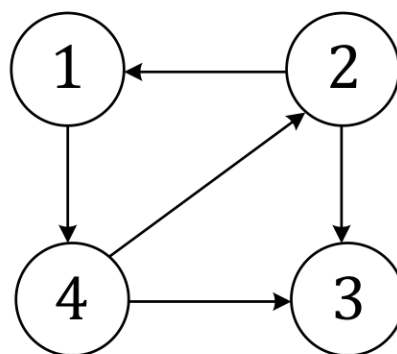


Figura 3.1. Red conformada por 4 agentes.

En primer lugar, es importante conocer al sistema con el cuál se va a trabajar en lazo abierto, es decir, sin la presencia de la acción de control.

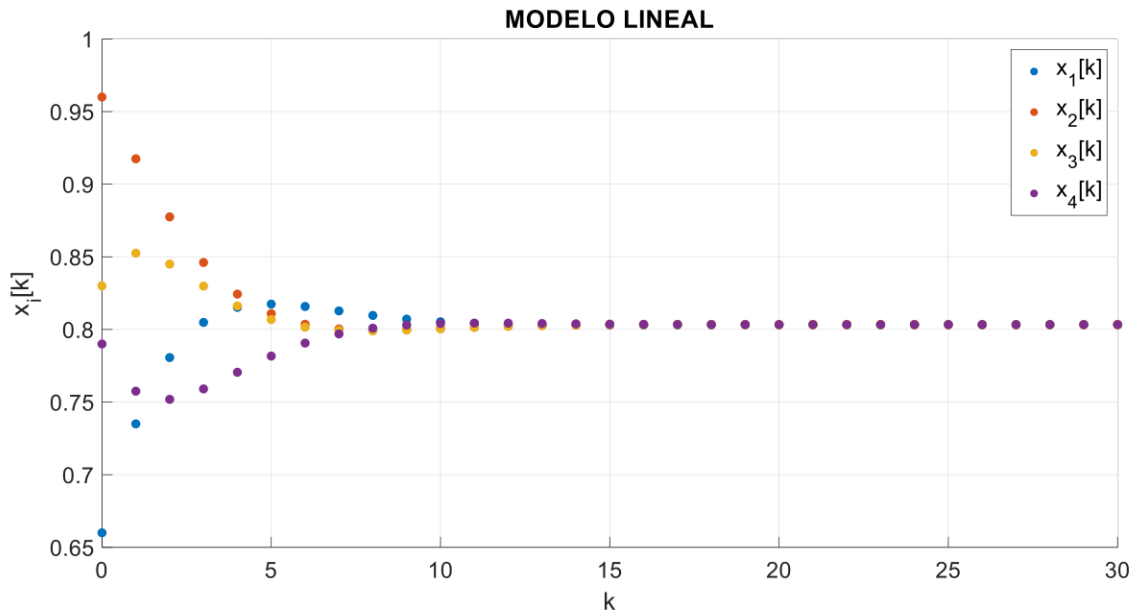


Figura 3.2. Respuesta del sistema únicamente con sus condiciones iniciales.

Para observar la dinámica del sistema, en el instante $k = 0$ los valores de $\vec{x}(k)$ son: $\vec{x}(0) = [0.66, 0.96, 0.83, 0.79]$. En la Figura 3.2, se observa que en la red, como todos los agentes se encuentran interconectados, el sistema converge a un determinado valor de consenso. Este valor es un promedio de las condiciones iniciales, donde $\bar{x}(0) = 0.505$. Los otros agentes varían de acuerdo con la interacción descrita por el modelo.

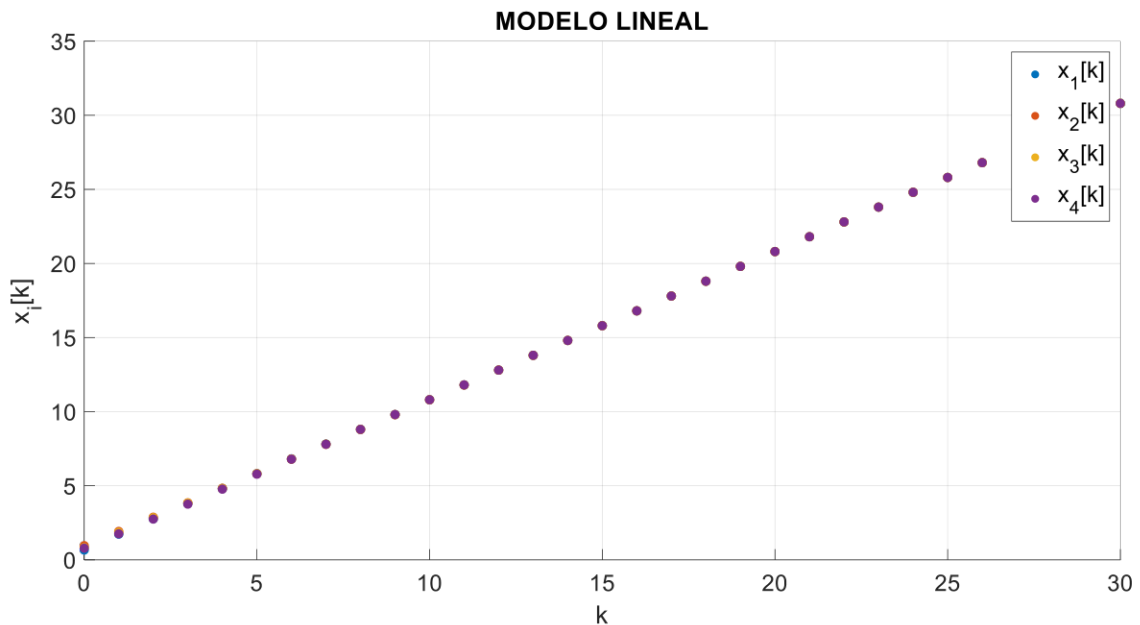


Figura 3.3. Respuesta del sistema ante una entrada paso.

En la Figura 3.3, se observa que la respuesta del sistema en lazo cerrado no converge en una tasa de aceptación deseada, debido a que no hay una acción de control presente. Esto se debe a la dinámica del sistema, pues la matriz de estados es una matriz estocástica y una característica de estas matrices es que el módulo de un valor propio es igual a 1. En la tabla 3.1, uno de los módulos de los valores propios tiene el valor de 1, encontrándose en el límite del círculo unitario, lo que obliga al sistema a estar al límite de la estabilidad.

Tabla 3.1. Módulo de los valores propios del sistema en Lazo Abierto.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.5
λ_2	0.6614
λ_3	0.6614
λ_4	1

3.1.2 Sistema en Lazo Cerrado para una red formada por 4 agentes

Una vez analizado el comportamiento del sistema se aplica el algoritmo de control. Es importante mencionar el papel que desempeña cada agente.

Tabla 3.2. Tipo de Agente de la Red.

Tipo de Agente	Agente
Líder	Agente 2
Seguidor	Agente 1
	Agente 3
	Agente 4

En primer lugar, se aplica la acción de control P, con las siguientes constantes proporcionales:

Tabla 3.3. Valores de las constantes k_p para la acción de control P.

Agente	Constante k_p
Agente 1	0.2199
Agente 2	0.2599
Agente 3	0.0999
Agente 4	0.2199

A continuación, se aplica la acción de control PI, con las siguientes constantes proporcionales e integrales:

Tabla 3.4. Valores de las constantes q_0 y q_1 para la acción de control PI.

Agente	Constante q_0	Constante q_1
Agente 1	0.2199989	0.21999
Agente 2	0.2999989	0.29999
Agente 3	0.0999989	0.09999
Agente 4	0.2199989	0.21999

Finalmente, se aplica la acción de control PID, con las siguientes constantes proporcionales, integrales y diferencial:

Tabla 3.5. Valores de las constantes q_0 , q_1 y q_2 para la acción de control PID.

Agente	Constante q_0	Constante q_1	Constante q_2
Agente 1	0.2199989	0.21999	0.0001
Agente 2	0.5599989	0.55999	0.0001
Agente 3	0.1099989	0.10999	0.0001
Agente 4	0.2199989	0.21999	0.0001

Es importante mencionar que, para las pruebas realizadas, se evaluará con una entrada tipo escalón que representa la tasa de aceptación deseada. De esta manera, se puede observar cómo responde el sistema ante un cambio súbito en la referencia. Además, ayuda a determinar si la acción de control alcanza el valor de referencia deseado y el tiempo que se demora en hacerlo. Finalmente, permitirá analizar la estabilidad del sistema, ya que, para una entrada acotada, se tiene una salida acotada.

En la Figura 3.4, se observa la respuesta del sistema cuando se aplica una tasa de aceptación positiva y también se compara con las diferentes acciones de control previamente diseñadas. El agente 2 independientemente de que acción de control se aplique tiene una buena respuesta, al ser un agente líder su respuesta es bastante similar a la referencia deseada. Por otro lado, un agente seguidor, replica la respuesta del agente líder. Es decir, inicialmente, no siguen al agente líder que en ese instante de tiempo es la condición inicial. Posterior a eso, como el líder ya se estableció en la referencia deseada

los demás agentes lo seguirán y eventualmente también llegarán como se observa en la Figuras de los agentes seguidores.

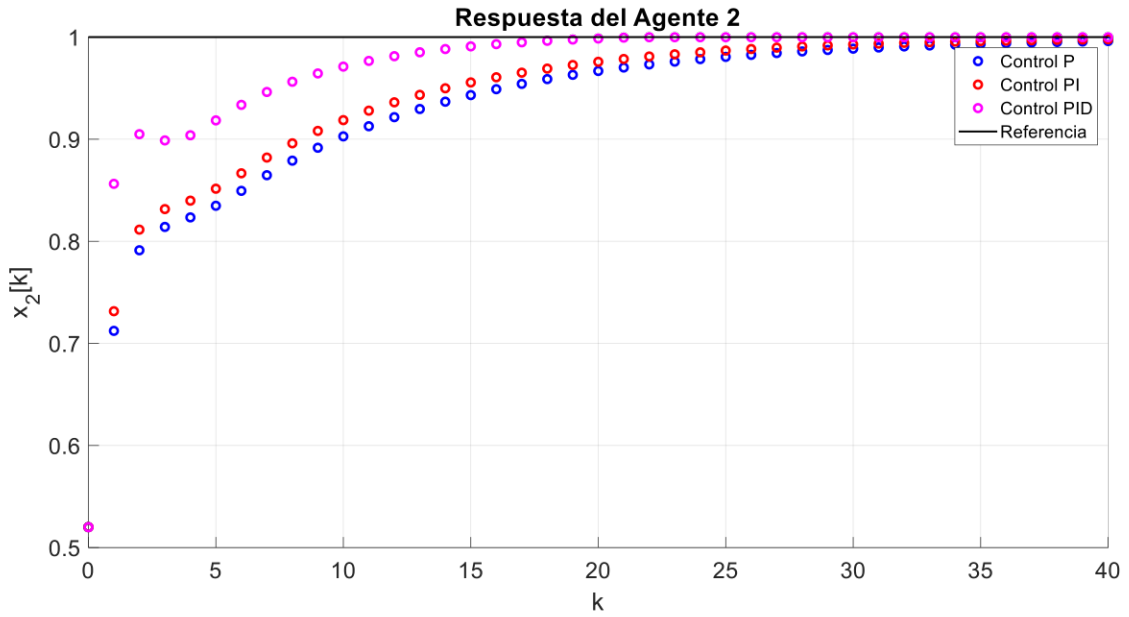


Figura 3.4. Respuesta del agente líder 2 con una acción de control P, PI y PID.

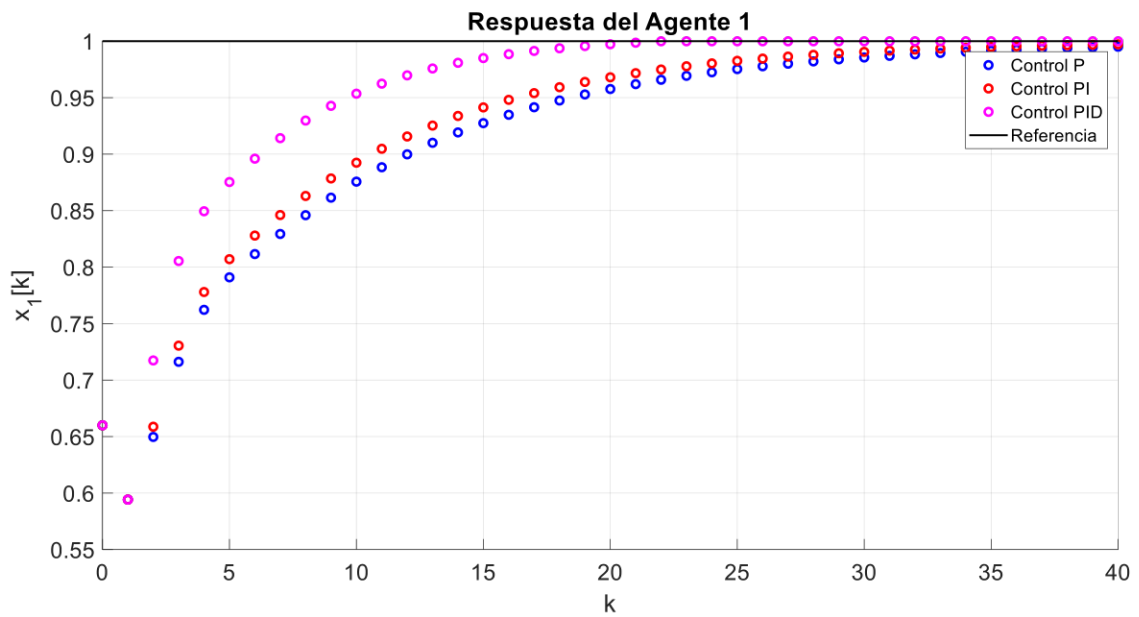


Figura 3.5. Respuesta del agente seguidor 1 con una acción de control P, PI y PID.

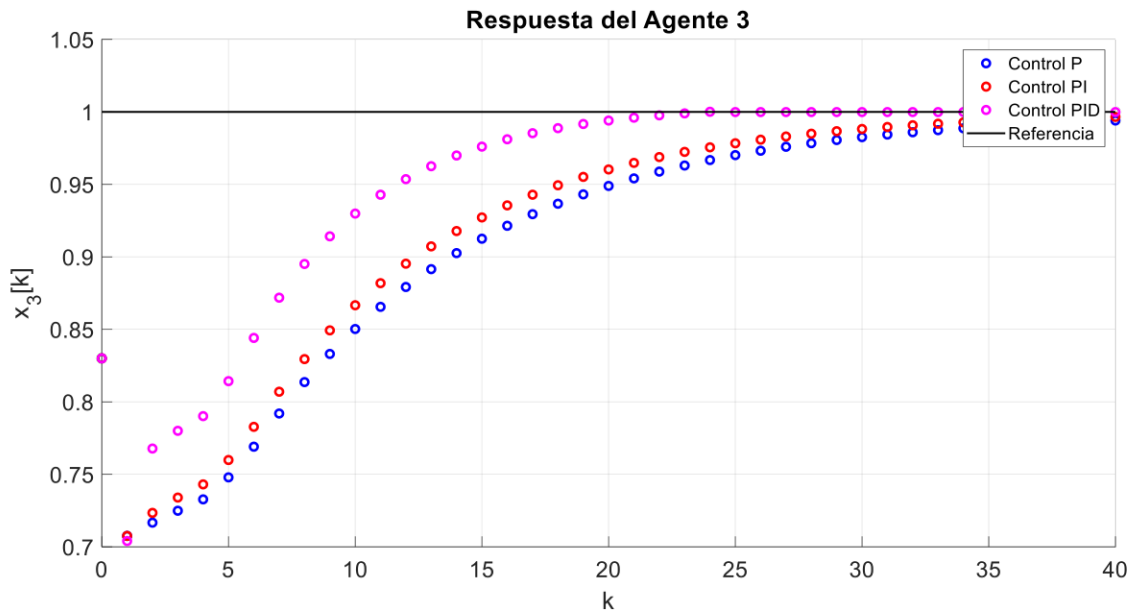


Figura 3.6. Respuesta del agente seguidor 3 con una acción de control P, PI y PID.

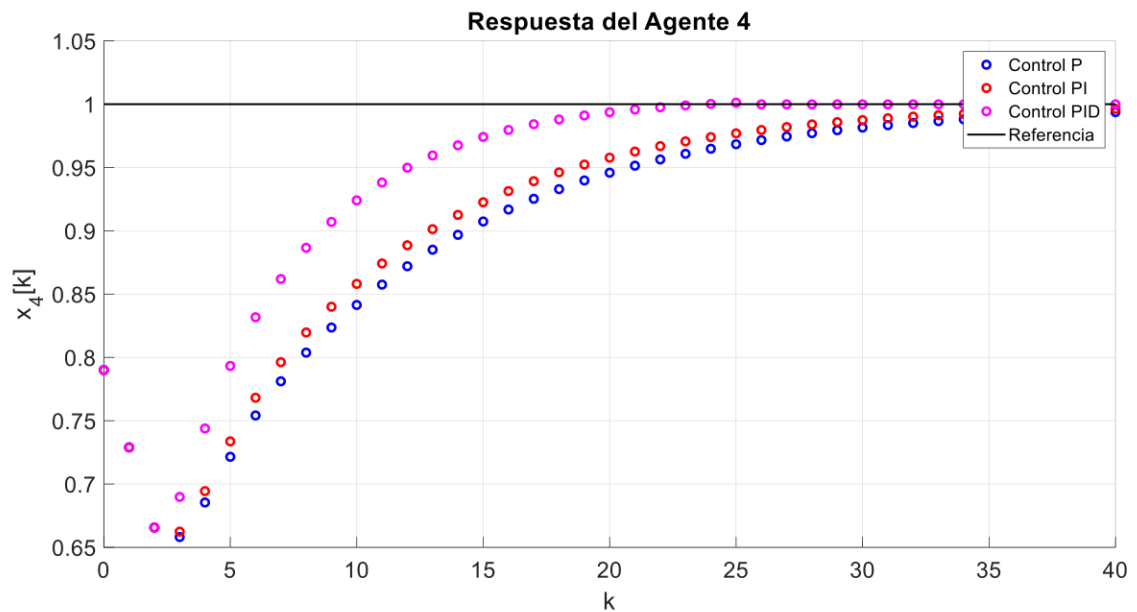


Figura 3.7. Respuesta del agente seguidor 4 con una acción de control P, PI y PID.

En la Figura 3.8, se puede observar las diferentes acciones de control del agente líder, quien ajusta la salida de mejor manera, es más rápida y precisa cuando se aplica el cambio de referencia, por otro lado, la reacción de las acciones de control de los agentes seguidores es un poco tardía como se puede ver en la Figura 3.9. Debido a que, en primera instancia actúan sobre la condición inicial propia, posterior a eso la acción de control de actúa sobre la información proporcionada por el agente líder. El líder al tener acceso a la

información en el instante k la acción de control lleva al agente al valor deseado, eventualmente las acciones de control de los agentes seguidores también lo harán.

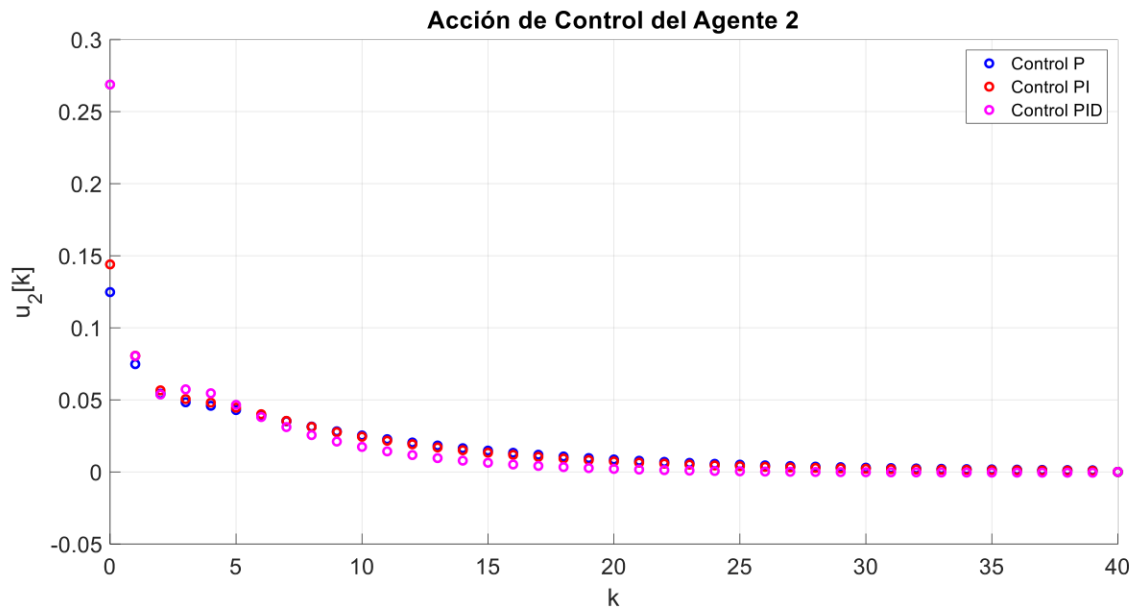


Figura 3.8. Acciones de control del agente líder 2.

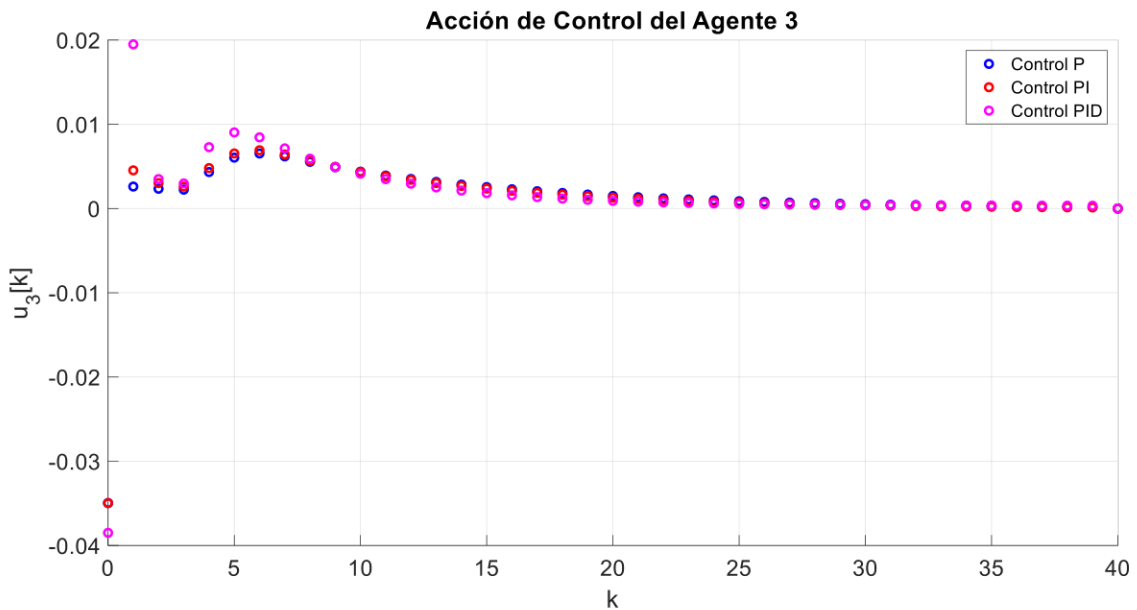


Figura 3.9. Acciones de control del agente seguidor 3.

En la figura 3.10, como en los resultados anteriores y como se mencionó el agente 2 al ser un agente líder su error es respecto a la tasa de aceptación deseada. Por otro lado, el error de los agentes seguidores es acumulativo, debido a que poseen error propio y el error que proviene de los agentes con los que interactúa como se puede ver en la Figura 3.11, en el caso del agente 4 recibirá error proveniente del agente 1, el agente 2 recibe error del agente

4. En el error del agente 3 esto es más evidente, ya que este depende de sí mismo y a su vez de los agentes 2 y 4.

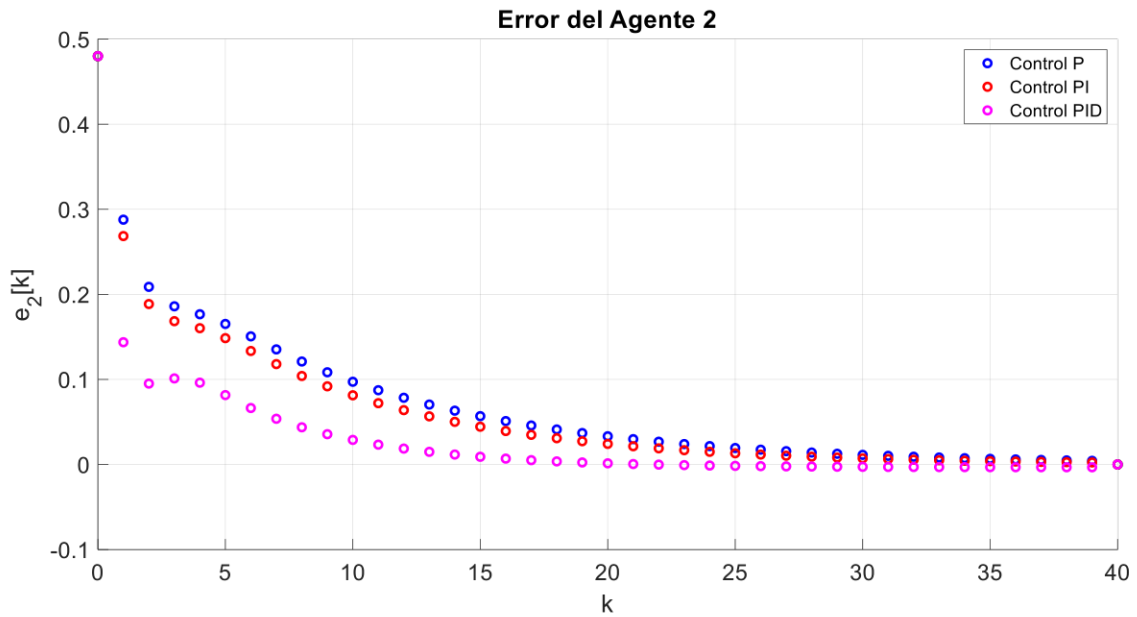


Figura 3.10. Error del agente líder 2 con una acción de control P, PI y PID.

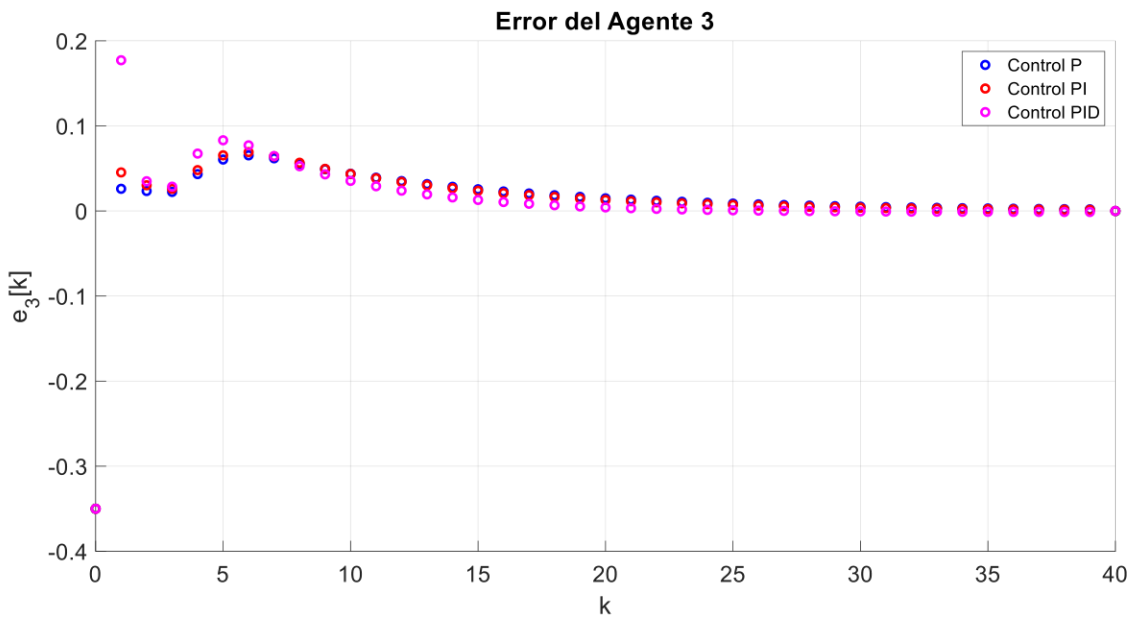


Figura 3.11. Error del agente líder 2 con una acción de control P, PI y PID.

Hasta ahora, solo se ha revisado y evidenciado la aplicación de un control distribuido y cooperativo, mediante el uso de agente líder-seguidor, así como la comparación de los resultados de la respuesta, la acción de control y del error del agente líder y de un agente seguidor. Sin embargo, no se han comparado las diferentes acciones de control propuestas. Para ello, se hace uso de los índices de desempeño ISE e ISCO. Al observar

el índice ISE en la Figura 3.12, se puede notar que la acción de control que mejor disminuye el error es la acción de control PID al ser una acción de control más completa. Por otro lado, al observar su respuesta en la Figura 3.5, la acción de control PI tiene un mejor control en estado estacionario. Esta última con la finalidad de reducir el error y el error acumulativo más rápido, requiere de mayor energía especialmente en su respuesta transitoria. Por ello también se ha aplicado una acción de control PID que permite realizar un control más completo. Al añadirse la componente derivativa anticipa el comportamiento futuro del sistema y mejorar la respuesta transitoria de hecho lo consigue al no ser demasiado agresivo como un control PI y es más rápido que un control P.

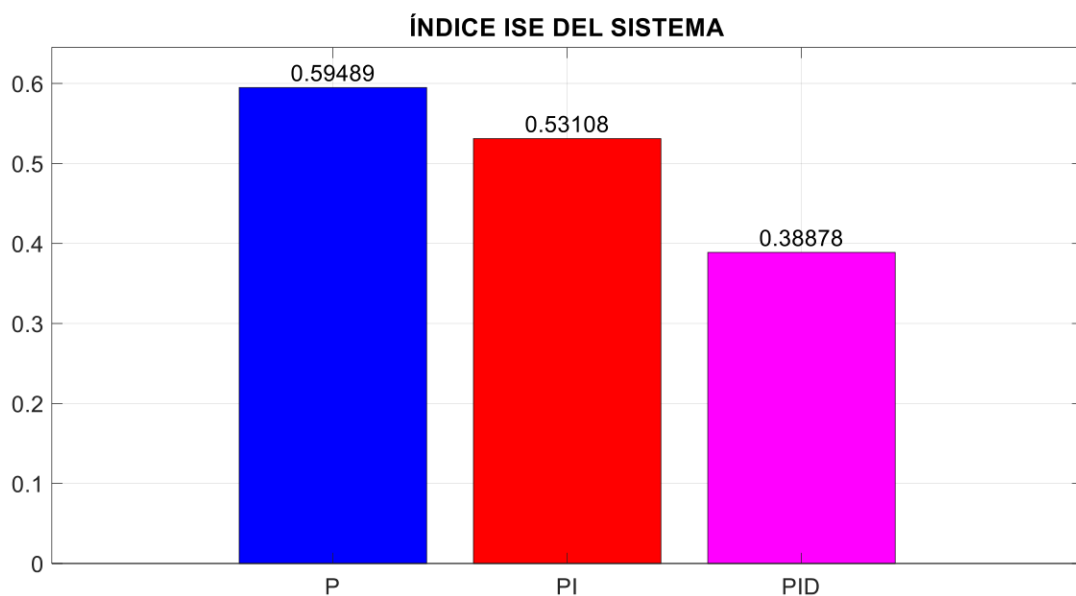


Figura 3.12. Índice de desempeño ISE del sistema para cada acción de control.

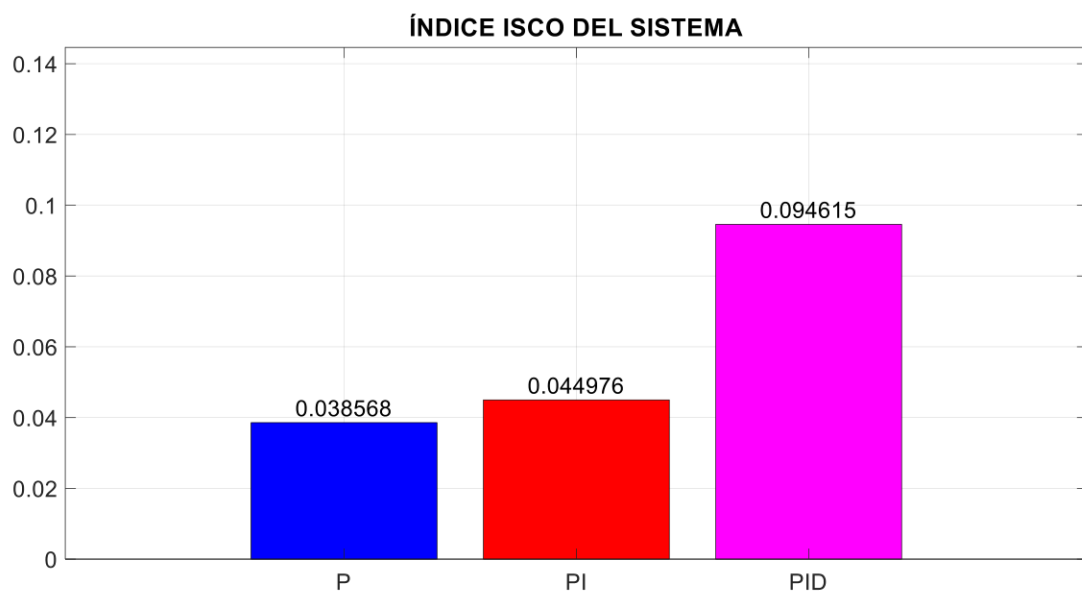


Figura 3.13. Índice de desempeño ISCO del sistema para cada acción de control.

Los resultados obtenidos no difieren mucho de los individuales de cada agente esto tal vez puede ser que la red con la que se trabaja es una red pequeña conformada por 4 agentes. De todas maneras, los índices de desempeño globales ISE e ISCO sirven para elegir que acción de control es más adecuada dependiendo de las necesidades requeridas.

Durante el proceso de propagación de rumores en redes sociales, pueden presentarse perturbaciones que influirán en la tasa de aceptación de cada agente. Esta perturbación debe ser lo suficientemente rápida y fácil de entender para influir en el sistema. Dentro de lo que son las redes sociales, los memes también cumplen estas funciones. Por lo que, ahora se presenta al sistema con una perturbación representada como un impulso. Esta perturbación debe contener cierta cantidad de información; por lo tanto, un 10% es suficiente para perturbar al agente. Finalmente, se observará cómo reaccionan las diferentes acciones de control reaccionan ante ella. Como el meme aparece aleatoriamente en la red social, este puede involucrarse con cualquier agente por lo que la perturbación se presentará en el agente 4.

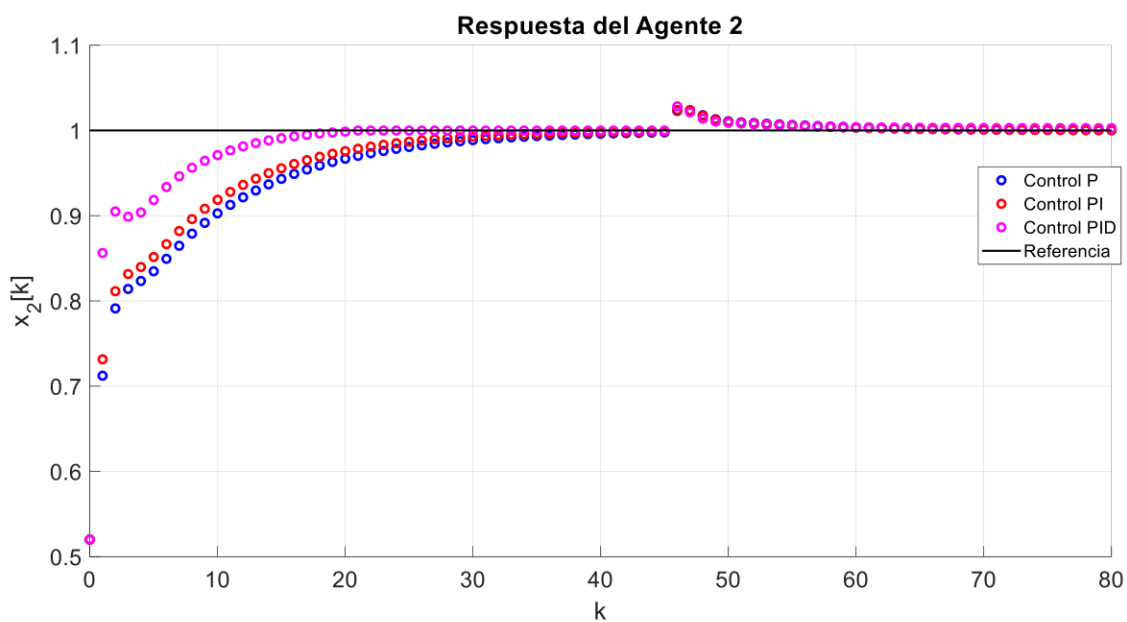


Figura 3.14. Comparación de la respuesta para el agente líder 2, ante una perturbación con una acción de control P, PI y PID.

En la Figura 3.15 se observa la reacción del sistema ante una perturbación y de igual manera a lo ocurrido cuando se aplicaba cambios de referencia. El agente 2, al depender del agente 4 su respuesta contra la perturbación es más lenta, pues no tiene la información directa de la perturbación. Por otro lado, el agente 4 al ser el perturbado, la acción de control es inmediata. Pese a ello, las acciones de control responden de manera eficaz ante la perturbación.

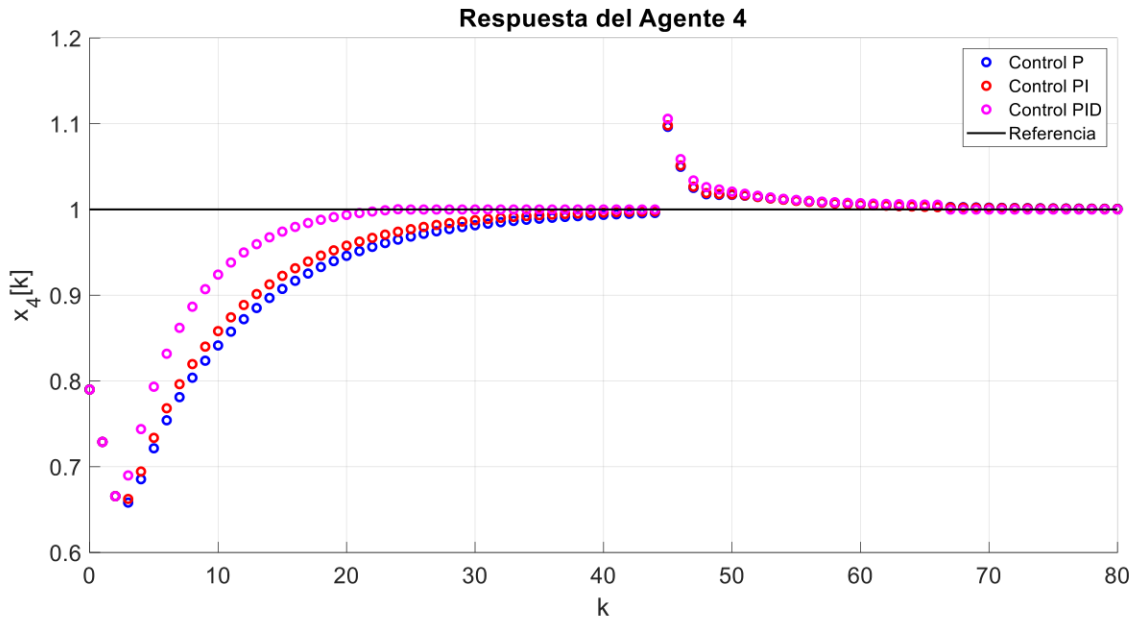


Figura 3.15. Comparación de la repuesta para el agente seguidor 3, ante una perturbación con una acción de control P, PI y PID.

Independientemente de la acción de control utilizada, al igual que sucedía con los cambios de referencia, el error de la perturbación se acumula. En este caso el agente 3 depende de los agentes 2 y 4.

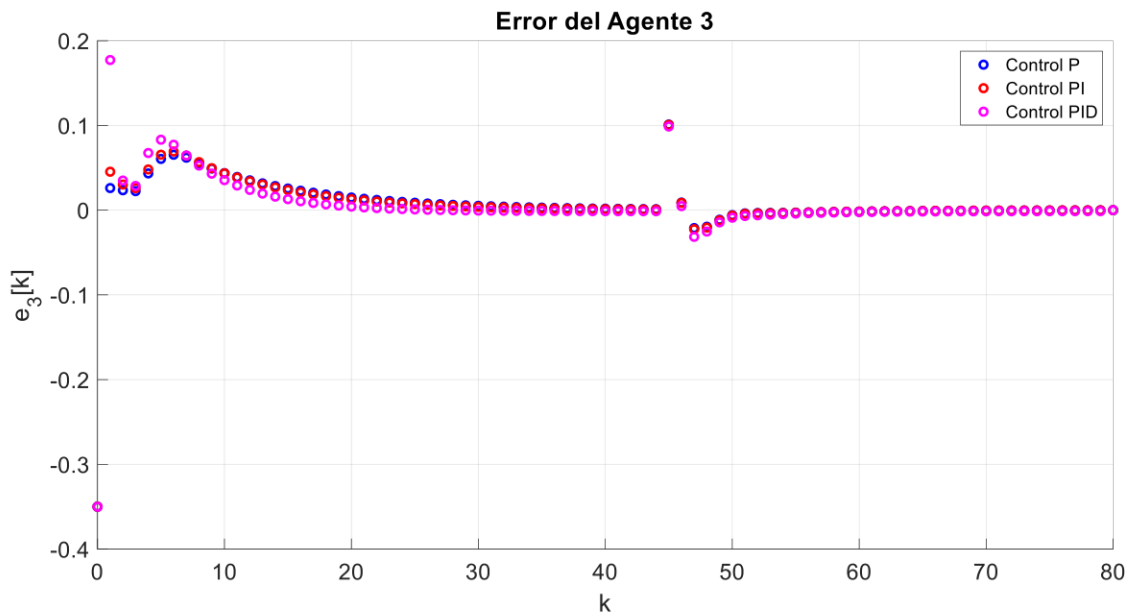


Figura 3.16. Comparación del error para el agente seguidor 3, ante una perturbación con una acción de control P, PI y PID.

Al observar los índices de desempeño, los resultados son bastantes similares a los obtenidos cuando solo se aplicaba un cambio de referencia. Por lo que, al observa el índice de desempeño ISE la acción de control PID, resulta más eficiente ante perturbaciones, gracias a su componente derivativa. En cuanto al índice ISCO, se observa que la acción de control PI requiere de más energía, debido a que al no poder predecir el comportamiento futuro del sistema el control no es tan eficaz.

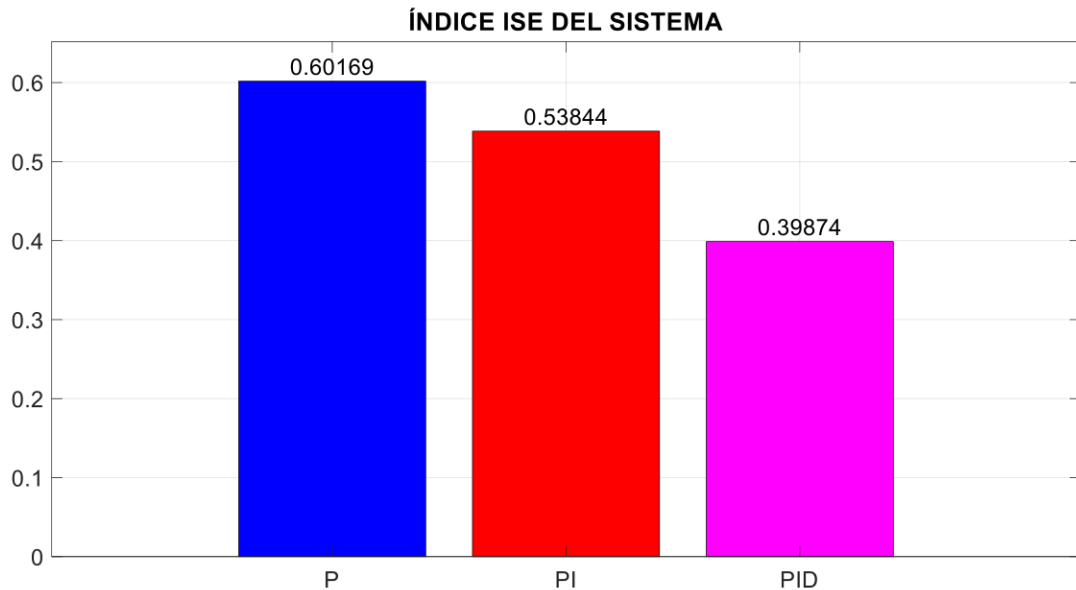


Figura 3.17. Índice de desempeño ISE global para cada acción de control.

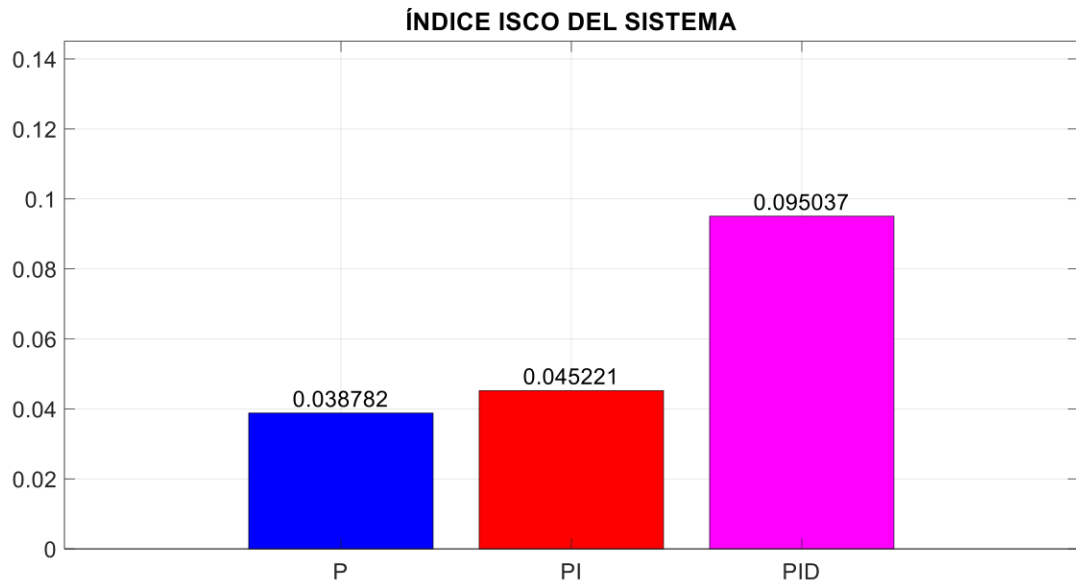


Figura 3.18. Índice de desempeño ISCO global para cada acción de control.

3.1.3 Sistema en Lazo Abierto para una red formada por 16 agentes

Para el desarrollo de esta sección se usa una red formada por 16 usuarios los cuales se encuentran comunicados como se muestra en la figura 3.19.

Anteriormente se trabajó con una red pequeña, por lo que sus resultados pueden verse limitados a tal motivo. A continuación, se presentarán resultados cuando se tiene más agentes formando una red grande. En primer lugar, y como se trabajó anteriormente es importante conocer al sistema en lazo abierto. Para poder observar la dinámica del sistema se presenta al sistema únicamente con sus condiciones iniciales. Para ver la dinámica del sistema, en el instante $k = 0$, los valores de $\vec{x}(k)$ son: $\vec{x}(0) = [0.36 \ 0.75 \ 0.41 \ 0.19 \ 0.22 \ 0.78 \ 0.33 \ 0.77 \ 0.31 \ 0.52 \ 0.58 \ 0.64 \ 0.39 \ 0.98 \ 0.66 \ 0.19]$. En la figura 3.20, se observa que en la red, como todos los agentes se encuentran interconectados, el sistema converge a un determinado valor de consenso. Este valor es un promedio de las condiciones iniciales en donde $\bar{x}(0) = 0.5050$

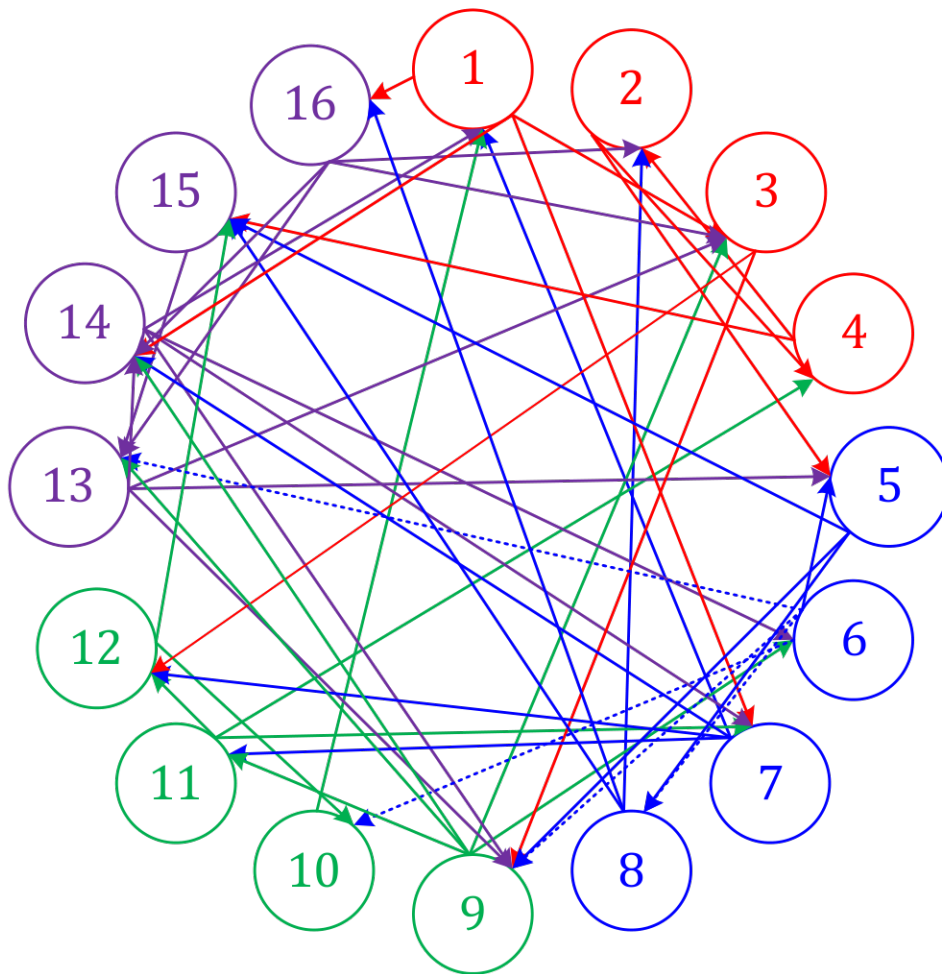


Figura 3.19. Red conformada por 16 agentes.

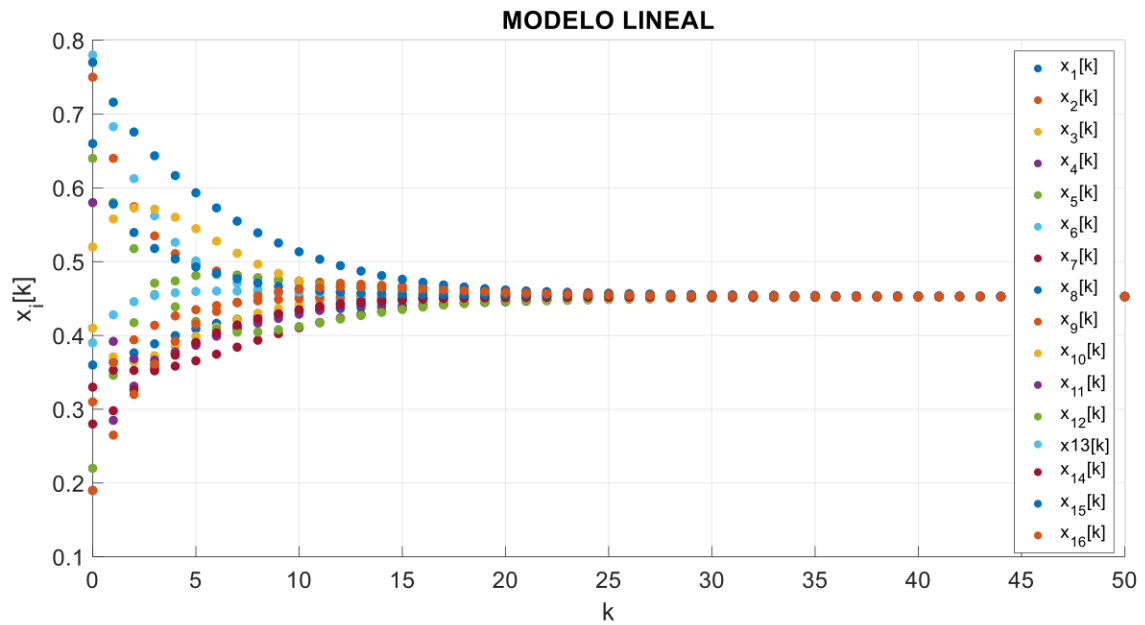


Figura 3.20. Respuesta del sistema únicamente con sus condiciones iniciales.

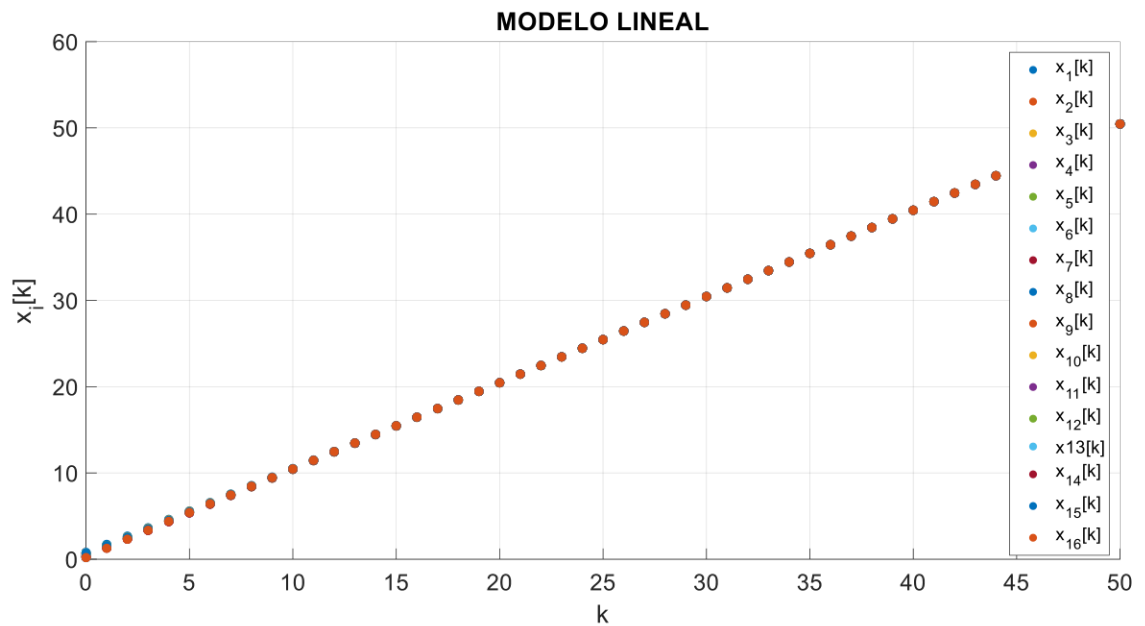


Figura 3.21. Respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario.

En la Figura 3.21, se observa la respuesta del sistema en lazo abierto, en primer lugar, al no encontrarse ninguna acción de control el sistema no converge en ningún valor en específico y crece hacia el infinito. Esto se debe a la dinámica del sistema, pues la matriz de estados es una matriz estocástica y una característica de estas matrices es que el módulo de un valor propio es igual a 1. En la tabla 3.6, uno de los módulos de los valores propios tiene el valor de 1, encontrándose en el límite del círculo unitario, lo que obliga al sistema a estar al límite de la estabilidad.

Tabla 3.6. Módulo de los valores propios del sistema en Lazo Abierto.

Valor Propio	Módulo del valor propio	Valor Propio	Módulo del valor propio
λ_1	0.3630	λ_9	0.8
λ_2	1	λ_{10}	0.6264
λ_3	0.5294	λ_{11}	0.6264
λ_4	0.5294	λ_{12}	0.7548
λ_5	0.5261	λ_{13}	0.7548
λ_6	0.8896	λ_{14}	0.6829
λ_7	0.8358	λ_{15}	0.6829
λ_8	0.8	λ_{16}	0.7096

3.1.4 Sistema en Lazo Cerrado para una red formada por 16 agentes

Así como en la red anterior, es necesario especificar el papel que desempeña cada agente.

Tabla 3.7. Tipo de Agente de la Red.

Tipo de Agente	Agente
Líder	Agente 6
	Agente 7
	Agente 9
Seguidor	Agente 1
	Agente 2
	Agente 3
	Agente 4
	Agente 5
	Agente 8
	Agente 10
	Agente 11
	Agente 12
	Agente 13
Agente 14	
Agente 15	
Agente 16	

En primer lugar, se aplica la acción de control P, con las siguientes constantes proporcionales:

Tabla 3.8. Valores de las constantes k_p para la acción de control P.

Agente	Constante k_p
Agente 1	0.3099
Agente 2	0.3775
Agente 3	0.3099
Agente 4	0.8899
Agente 5	0.3499
Agente 6	0.9999
Agente 7	0.9299
Agente 8	0.9999
Agente 9	0.1199
Agente 10	0.8999
Agente 11	0.3775
Agente 12	0.1299
Agente 13	0.1575
Agente 14	0.1199
Agente 15	0.1099
Agente 16	0.1099

A continuación, se aplica la acción de control PI, con las siguientes constantes proporcionales e integrales:

Tabla 3.9. Valores de las constantes q_0 y q_1 para la acción de control PI.

Agente	Constante q_0	Constante q_1
Agente 1	0.3099	0.3089
Agente 2	0.3775	0.3765
Agente 3	0.2999	0.2989
Agente 4	0.7999	0.7989
Agente 5	0.3499	0.3489
Agente 6	0.8999	0.8989
Agente 7	0.9299	0.9289

Agente 8	0.9999	0.9989
Agente 9	0.4999	0.4989
Agente 10	0.9999	0.9989
Agente 11	0.1099	0.1089
Agente 12	0.2299	0.2289
Agente 13	0.3575	0.3565
Agente 14	0.1099	0.1089
Agente 15	0.1099	0.1089
Agente 16	0.2575	0.2565

Finalmente, se aplica la acción de control PID, con las siguientes constantes proporcionales, integrales y diferencial:

Tabla 3.10. Valores de las constantes k_p , τ_i y τ_d para la acción de control PID.

Agente	Constante q_0	Constante q_1	Constante q_2
Agente 1	0.12999989	0.129999	0.0001
Agente 2	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 3	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 4	0.20999989	0.209999	0.0001
Agente 5	0.18999989	0.189999	0.0001
Agente 6	0.45999989	0.459999	0.0001
Agente 7	0.45999989	0.459999	0.0001
Agente 8	0.20999989	0.20999989	0.0001
Agente 9	0.45999989	0.459999	0.0001
Agente 10	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 11	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 12	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 13	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 14	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 15	0.0999989	0.09999	0.0001
Agente 16	0.2399989	0.2399989	0.0001

La siguiente red se encuentra completamente interconectada; no hay ningún agente sin conexión. Es decir, cada agente depende de al menos 2 agentes para modificar su estado.

Debido a la extensión de la red, se ha considerado añadir 3 agentes líderes. Esto permitirá una distribución efectiva de los algoritmos de control y fomentará la cooperación entre los diferentes agentes para lograr un control óptimo y se evite la centralización de las acciones de control.

En la Figura 3.22, se observa la respuesta del sistema cuando se aplica una tasa de aceptación teórica positiva. Al momento de aplicar una acción de control P, pese a que este reacciona únicamente al error actual su control no es lento como se esperaría; de hecho, su tiempo de establecimiento es rápido. Sin embargo, al observar su parte transitoria presenta mayor dispersión entre los agentes y la referencia deseada. Para lo cual si se pretende mejorar la respuesta transitoria es necesario la aplicación de un control PI o PID. De la manera similar a lo obtenido en la red de 4 agentes, los agentes seguidores actúan una vez haya actuado el agente líder y hasta que suceda ese intercambio de información entre los agentes seguidores el error será mayor.

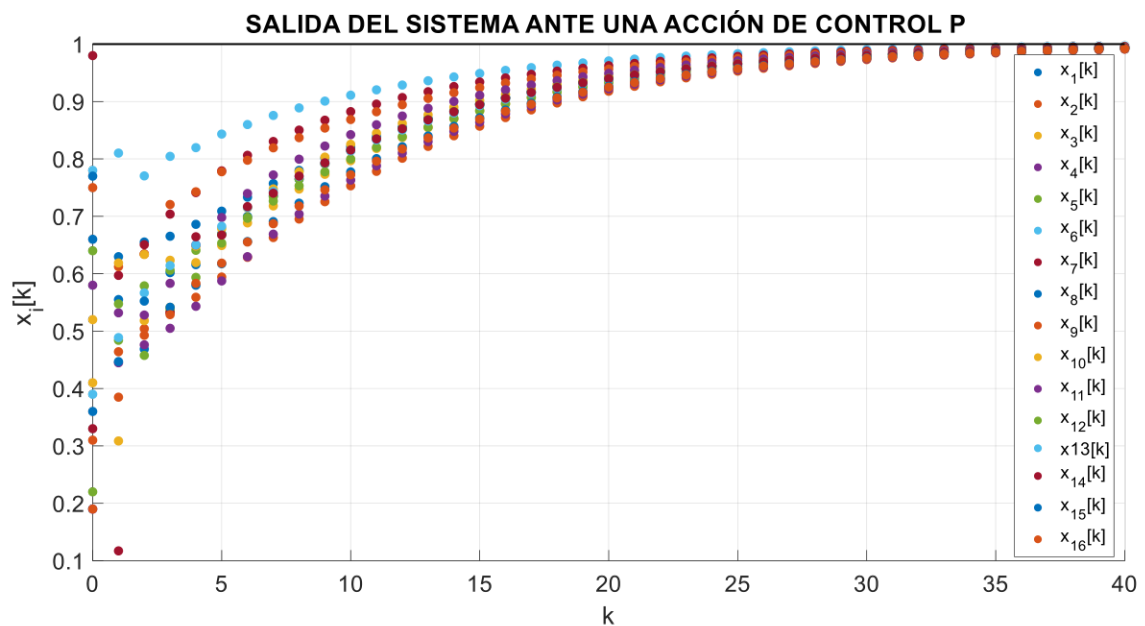


Figura 3.22. Respuesta del sistema con una acción de control P.

Debido a que la acción de control P no es controla adecuadamente la respuesta transitoria, es necesario aplicar una acción de control PI.

En la Figura 3.23, al implementar la acción de control PI, se observa una mejora en el tiempo de respuesta del sistema, especialmente en su respuesta transitoria. Esto se debe a que, además de reducir los sobre picos debido a la acción de control P, la dispersión entre los estados de los agentes respecto a la tasa de aceptación deseada también disminuyó. Ya que la acción de control PI garantiza la reducción del error acumulativo. No

obstante, a pesar de que los resultados obtenidos son positivos es posible optimizar aún más la respuesta transitoria del sistema mediante la implementación de una acción de control PID.

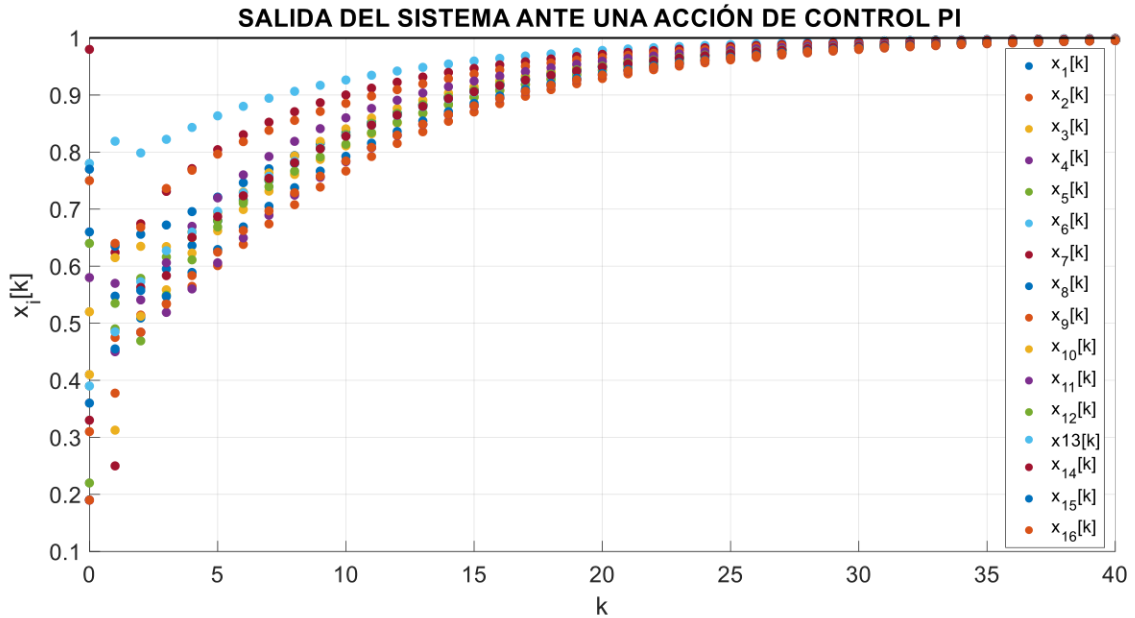


Figura 3.23. Respuesta del sistema con una acción de control PI.

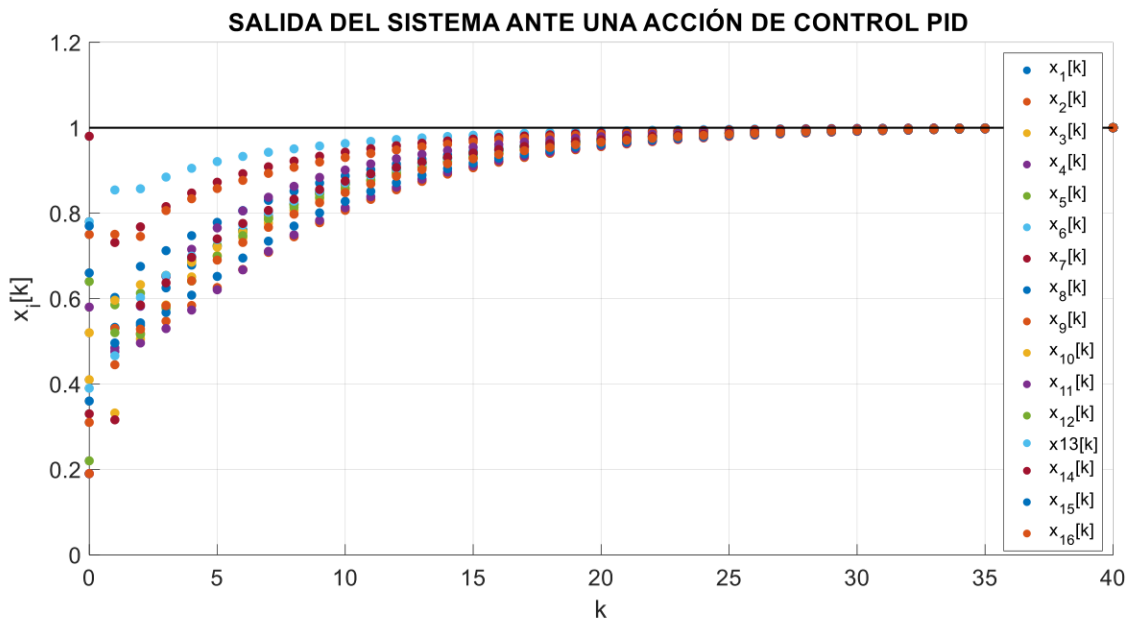


Figura 3.24. Respuesta del sistema con una acción de control PID.

En la Figura 3.24, al implementar la acción de control PID el resultado obtenido no es el esperado, a pesar de que se emplea una acción de control más completa. Sin embargo, con la finalidad de mejorar a la acción de control PI, la solución puede generar un problema. Debido a que la entrada es una función escalón, se puede producir el efecto conocido como

‘la patada’. La presencia de la componente derivativa de la acción de control provoca una respuesta impulsiva en la referencia en lugar de la salida. Esto conlleva a la presencia de sobre picos en la respuesta transitoria del sistema lo que a su vez aumenta el tiempo de estabilización del sistema. En consecuencia, es necesario revisar y ajustar la implementación del control PID para optimizar su desempeño.

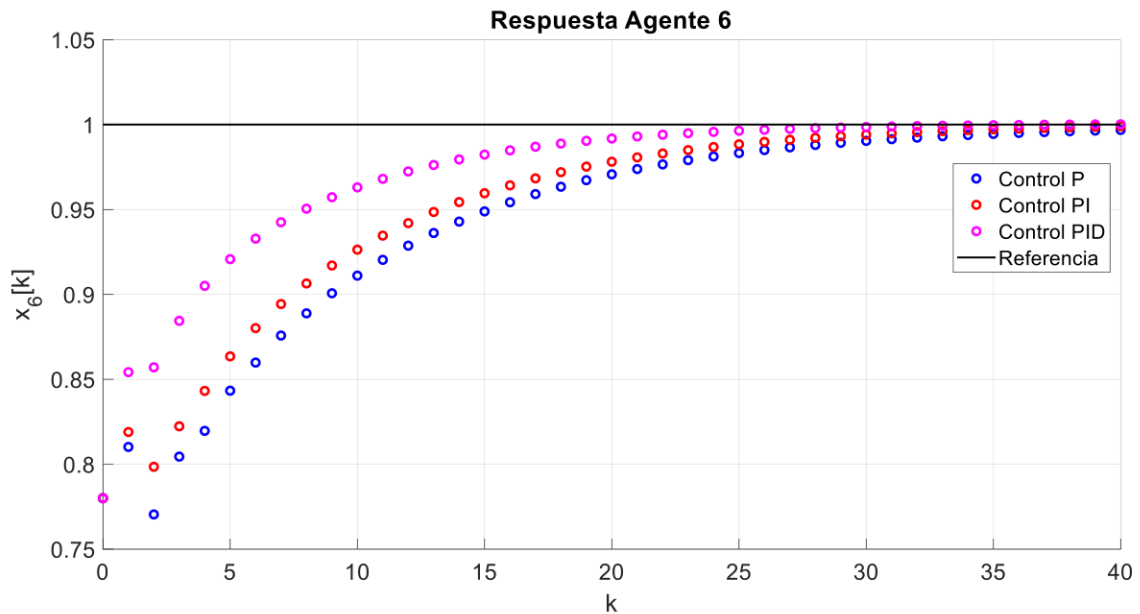


Figura 3.25. Respuesta del agente líder 6 con una acción de control P, PI y PID.

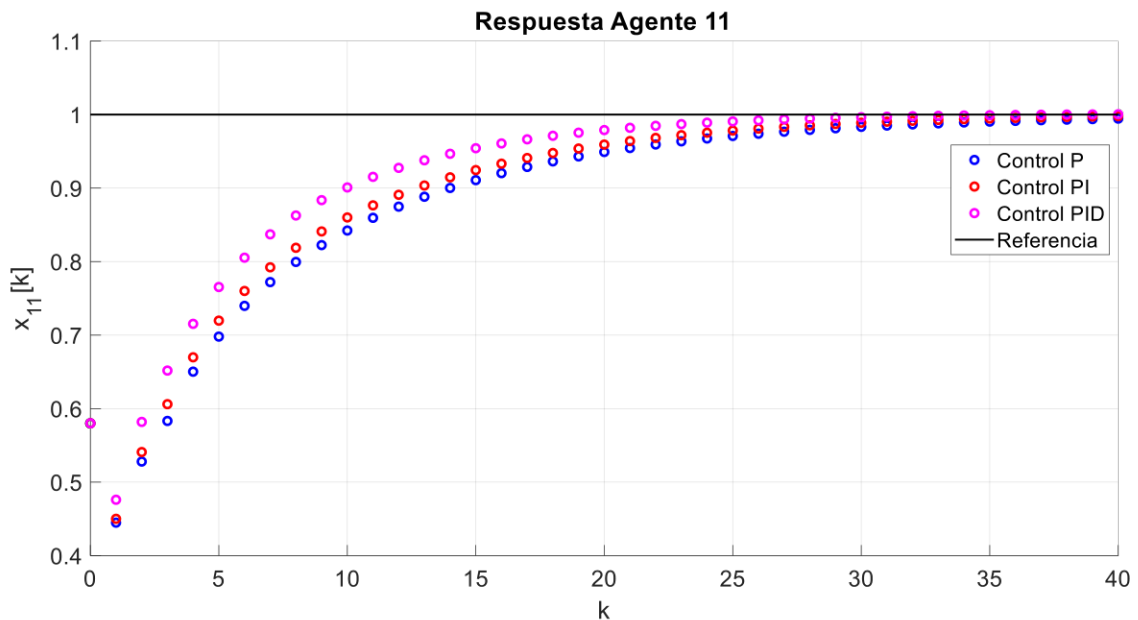


Figura 3.26. Respuesta del agente seguidor 11 con una acción de control P, PI y PID.

En la Figura 3.25 y en la Figura 3.26, se observa la respuesta del sistema de un agente líder y de un agente seguidor cuando se aplica una tasa de aceptación positiva. El agente

líder independientemente de que acción de control se aplique tiene una buena respuesta y es bastante similar a la referencia deseada. Por otro lado, el agente seguidore, replica la respuesta del agente líder.

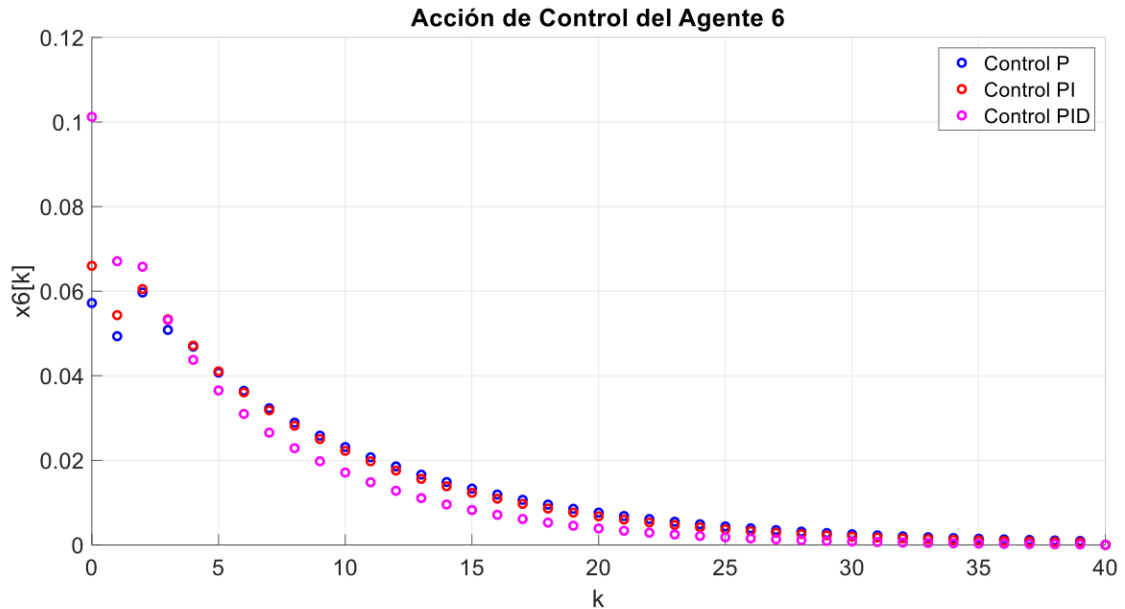


Figura 3.27. Acción de control P, PI y PID del agente líder 6.

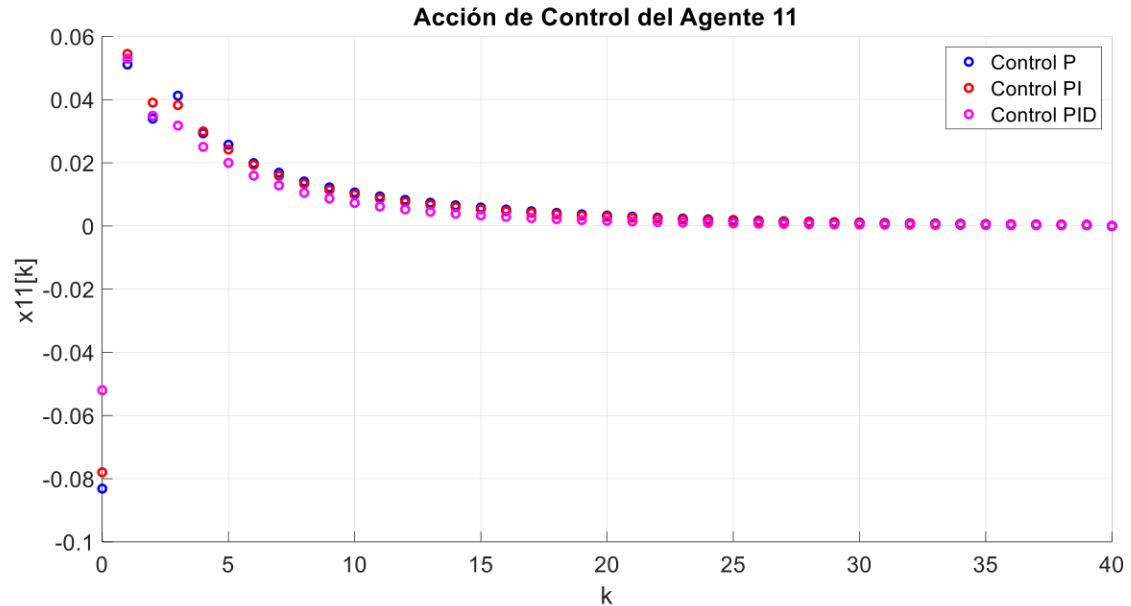


Figura 3.28. Acción de control P, PI y PID del agente seguidor 11.

En la Figura 3.27, se puede observar las diferentes acciones de control de un agente líder, quien ajusta la salida de mejor manera, es más rápida y precisa cuando se aplica el cambio de referencia, por otro lado, la reacción de la acción de control del agente seguidor es un poco tardía como se puede ver en la Figura 3.28. Debido a que, en primera instancia actúan

sobre la condición inicial propia, posterior a eso la acción de control de actúa sobre la información proporcionada por el agente líder. El líder al tener acceso a la información en el instante k la acción de control lleva al agente al valor deseado, eventualmente las acciones de control de los agentes seguidores también lo harán.

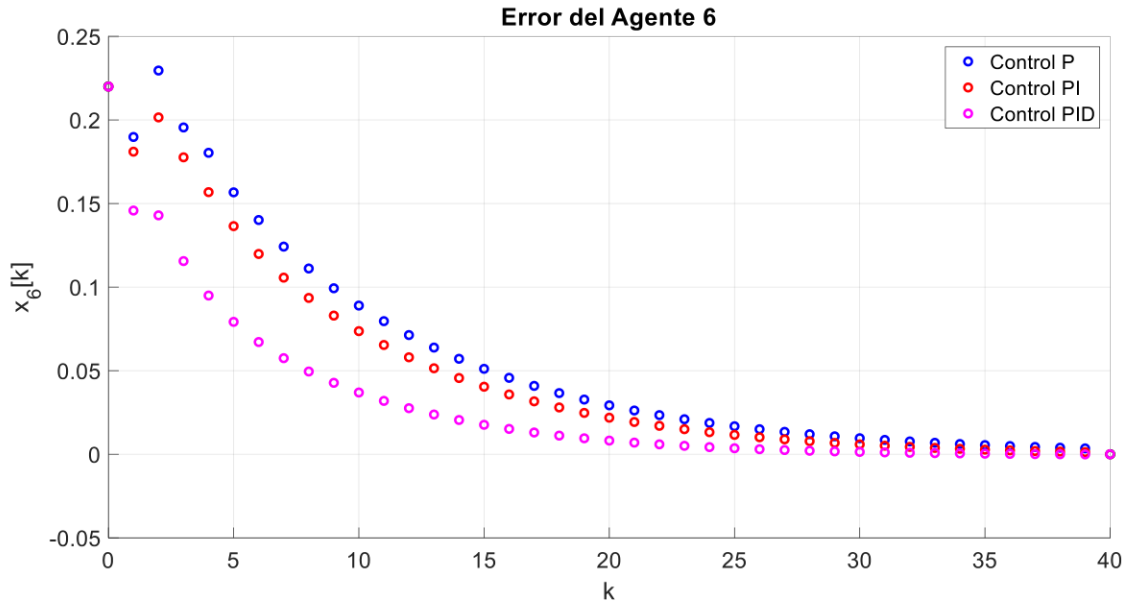


Figura 3.29. Error del agente líder 6 con una acción de control P, PI y PID.

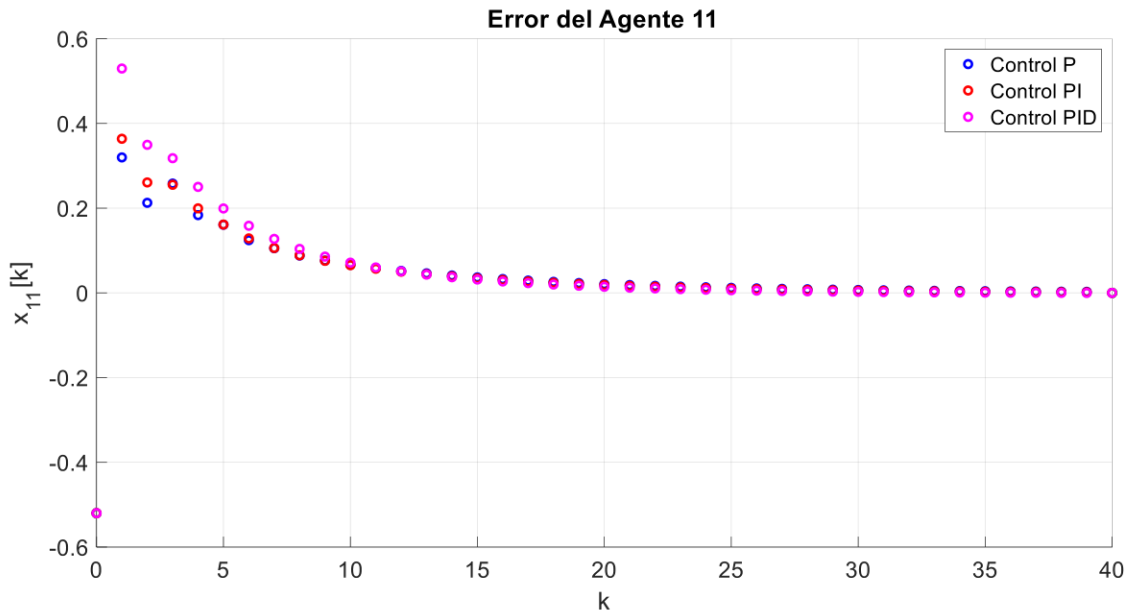


Figura 3.30. Error del agente seguidor 11 con una acción de control P, PI y PID.

En la figura 3.29, como en los resultados anteriores y como se mencionó el agente 6 al ser un agente líder su error es respecto a la tasa de aceptación deseada. Por otro lado, el error del agente seguidor en la Figura 3.30 es acumulativo, debido a que poseen error propio y el error que proviene de los agentes con los que interactúa.

Sin embargo, independientemente de los resultados obtenidos y para poder seleccionar la acción de control adecuada, es necesario hacer uso de los índices de desempeño ISE e ISCO.

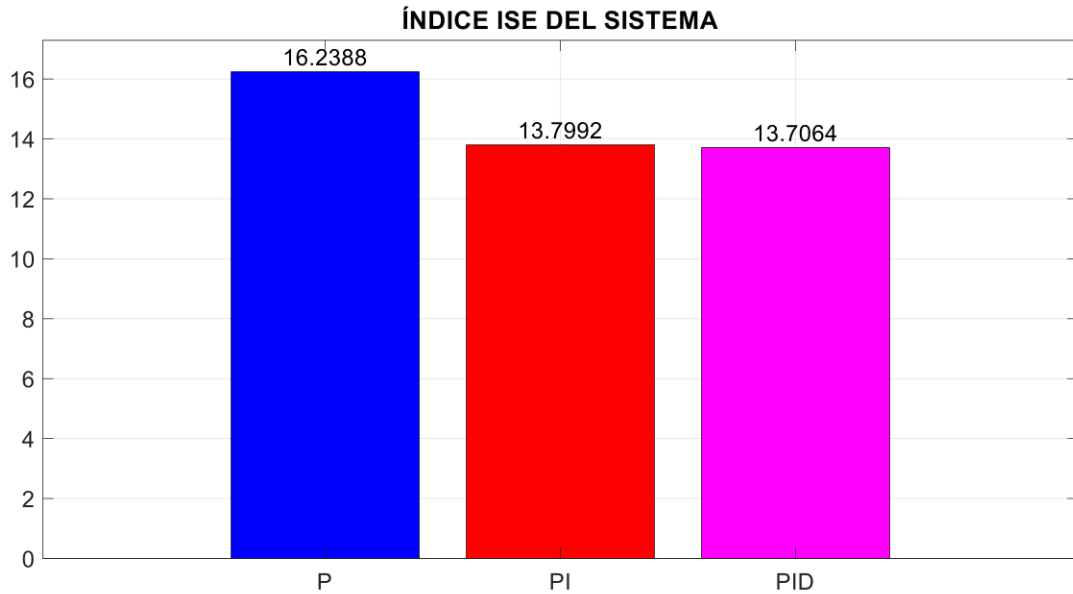


Figura 3.31 Índice de desempeño ISE del sistema.

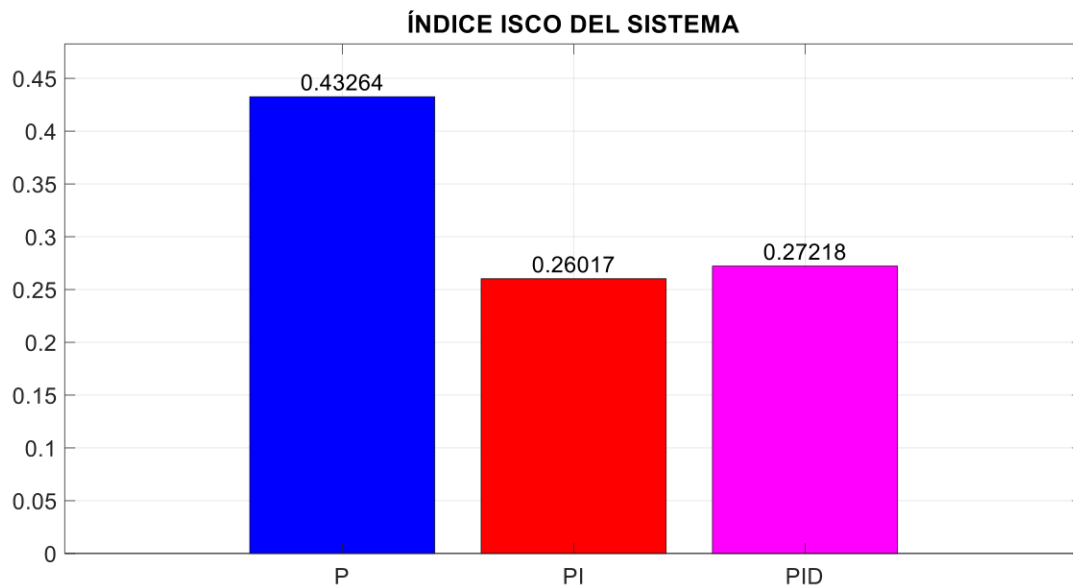


Figura 3.32. Índice de desempeño ISCO del sistema.

En la Figura 3.31, al analizar el índice ISE del sistema, se observa que la acción de control PID es la que mejor minimiza el error. Pese a que su parte transitoria presenta más sobre picos, esto quiere decir que, a pesar de tener una respuesta más lenta, es más precisa en comparación con el control PI, que también tiene un buen desempeño. Sin embargo, la acción de control PID, con la finalidad de reducir el error y anticiparse a este más rápido,

no requiere de mucha energía. Este se evidencia en la Figura 3.32 mediante el índice ISCO. A pesar de que un controlador destaca más que otro, según el índice de desempeño, es importante observar el comportamiento de la acción de control en otros escenarios y no basar la respuesta en estos índices.

Durante el proceso de propagación de rumores en redes sociales, pueden presentarse perturbaciones que influirán en la tasa de aceptación de cada agente. Esta perturbación debe ser lo suficientemente rápida y fácil de entender para influir en el sistema. Dentro de lo que son las redes sociales, los memes también cumplen estas funciones. Por lo que, ahora se presenta al sistema con una perturbación representada como un impulso. Esta perturbación debe contener cierta cantidad de información; por lo tanto, un 10% es suficiente para perturbar al agente. Finalmente, se observará cómo reaccionan las diferentes acciones de control ante ella. Como el meme aparece aleatoriamente en la red social, este puede involucrarse con cualquier agente por lo que la perturbación se presentará en los agentes 2, 4 y 11.

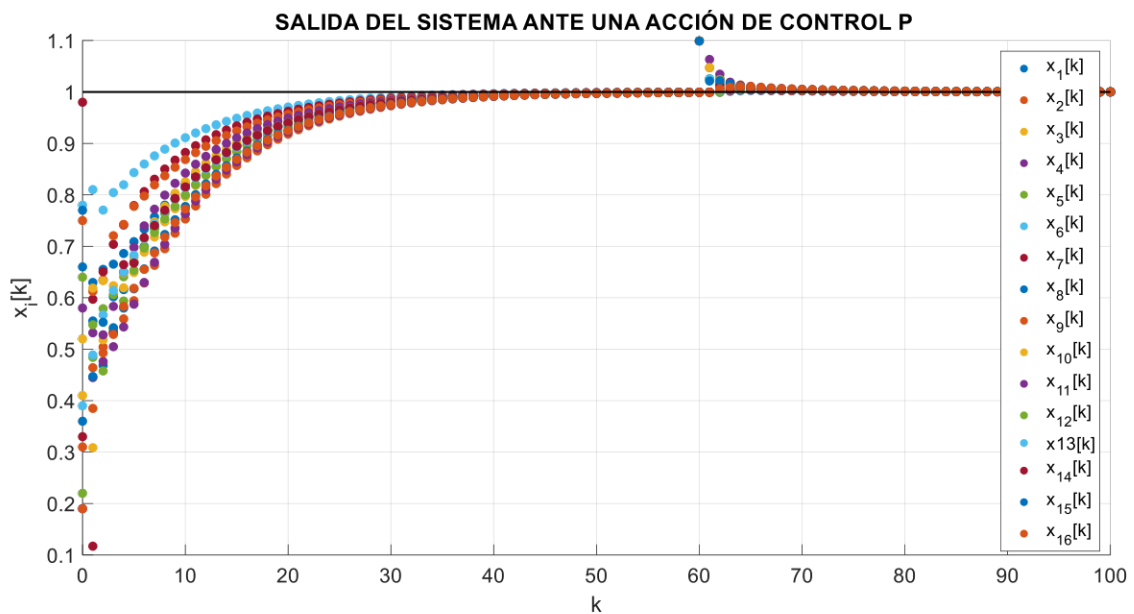


Figura 3.33. Respuesta del sistema con una acción de control P.

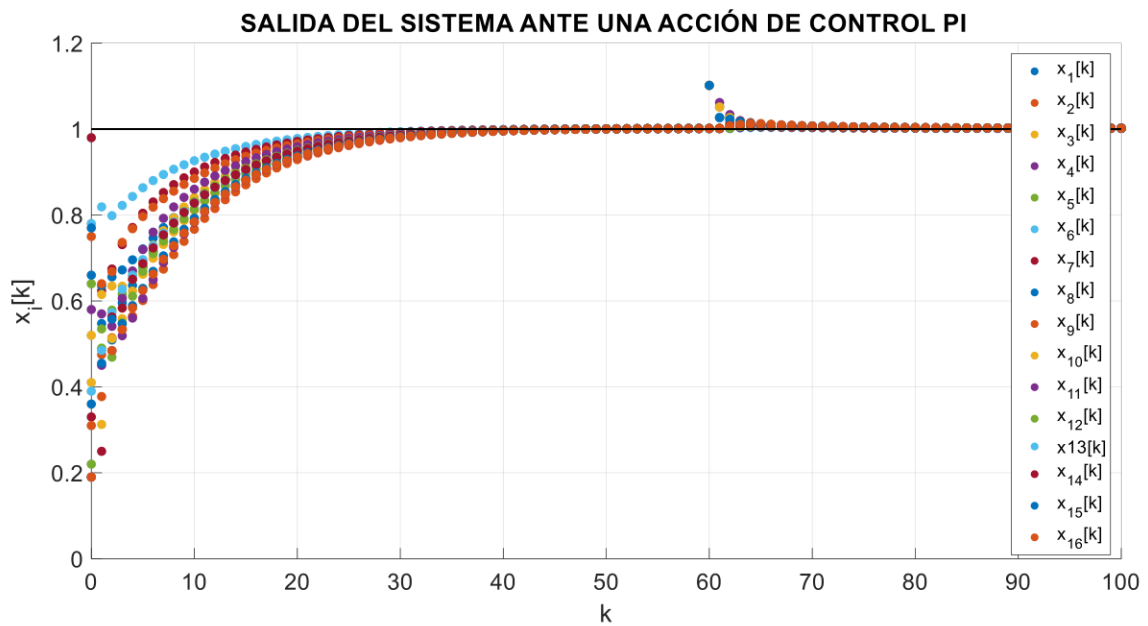


Figura 3.34. Respuesta del sistema con una acción de control PI.

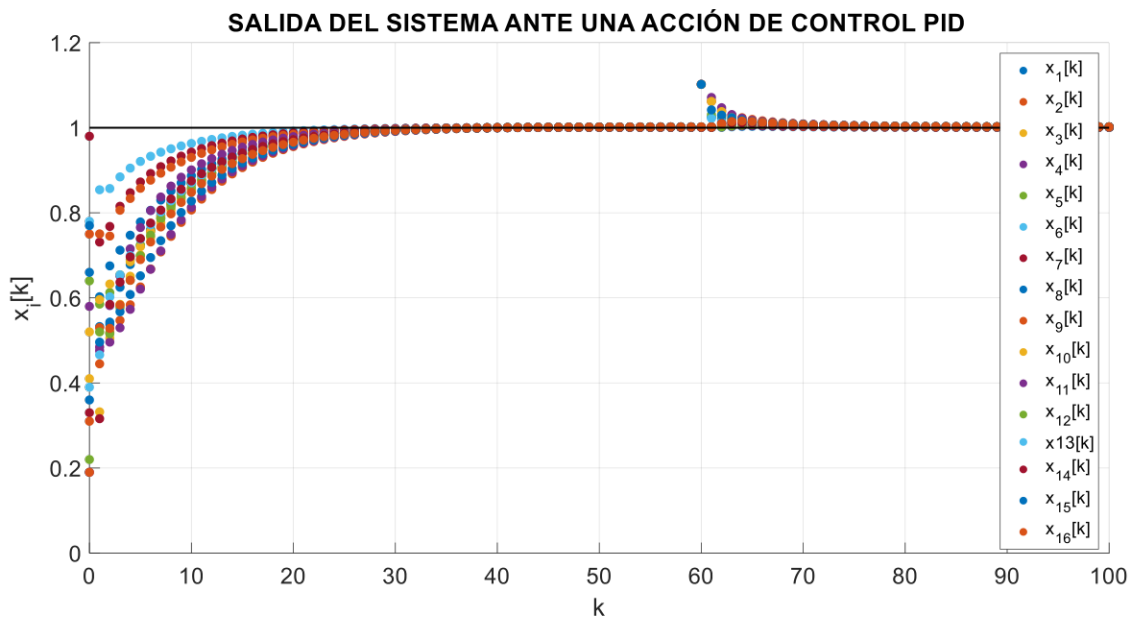


Figura 3.35. Respuesta del sistema con una acción de control PID.

Una vez obtenido los resultados, independientemente de que acción de control se aplique, estas responden adecuadamente ante una perturbación. Además, se obtienen los resultados esperados, es posible notar la jerarquía de las acciones de control, donde la acción de control PID es la que mejor disminuye el error y ante una perturbación. Esto se debe a que su componente derivativa ayuda a anticipar y contrarrestar cambios rápidos en la señal del error. Por otro lado, las acciones de control P y PI son un poco más lenta, sin embargo, demuestran ser efectivas ante la perturbación. Finalmente, es importante tener

en cuenta la naturaleza del sistema, pues en esta red cada agente depende del estado de otros agentes. Esto influye significativamente en la eficiencia de las acciones de control.

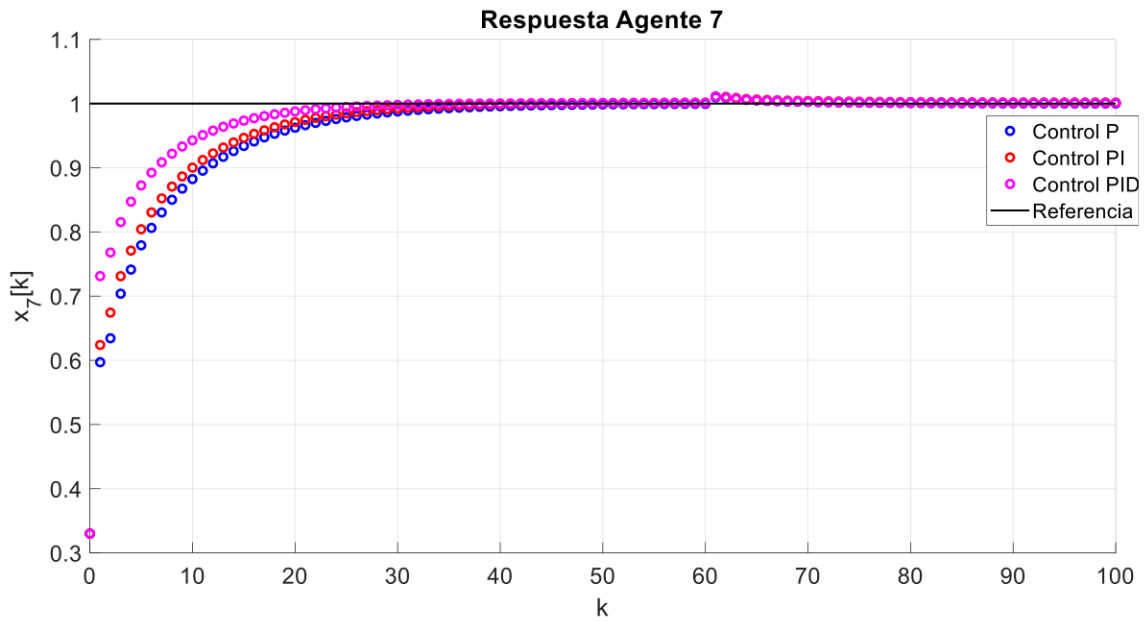


Figura 3.36. Respuesta del agente líder 7 con una acción de control P, PI y PID.

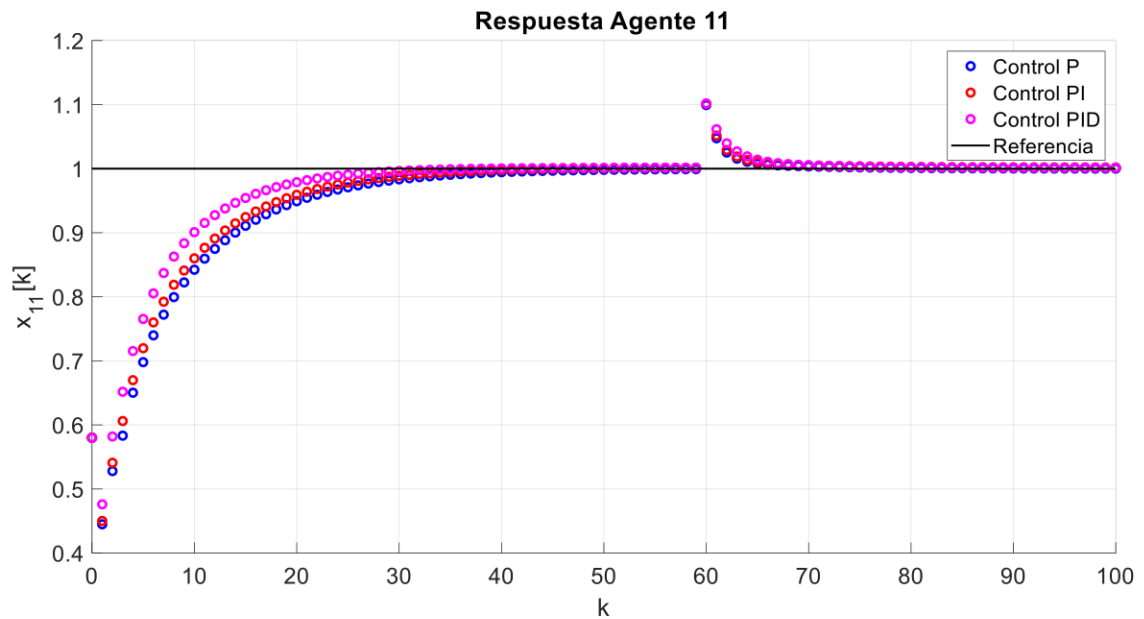


Figura 3.37. Respuesta del agente seguidor 11 con una acción de control P, PI y PID.

En la Figura 3.36, se observa la respuesta del sistema de un agente líder ante una perturbación y debido a la conexión del sistema, la perturbación que recibe es más pequeña que la original, que es la perturbación que recibe el agente seguidor 11. En la cual su respuesta necesita de mayor control para controlar la perturbación. Finalmente, independientemente de que acción de control se trate, tienen una buena reacción.

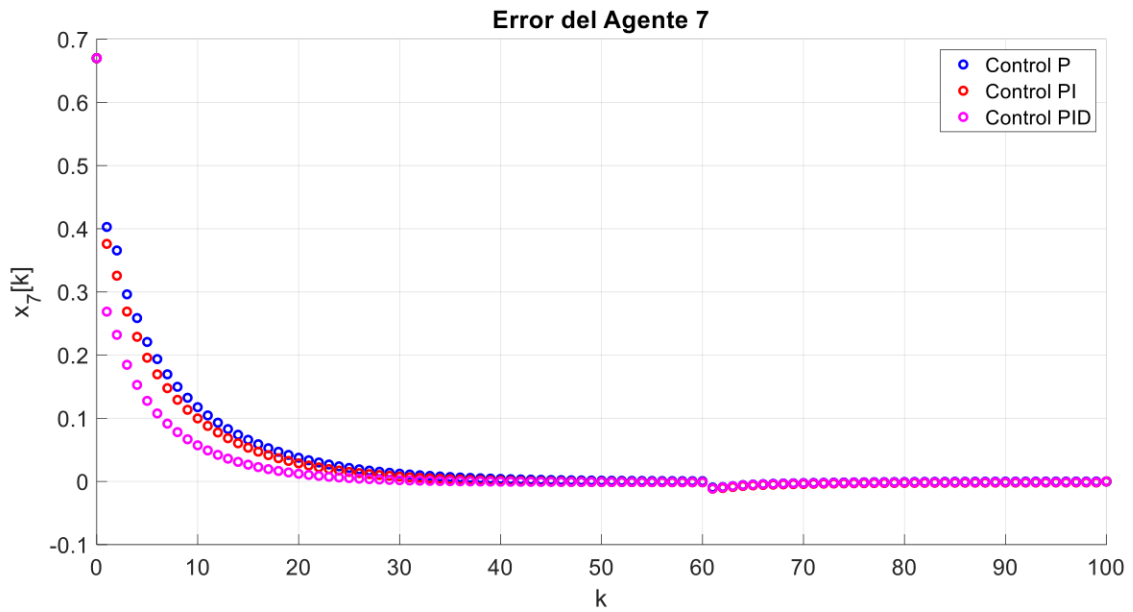


Figura 3.38. Error del agente líder 7 con una acción de control P, PI y PID.

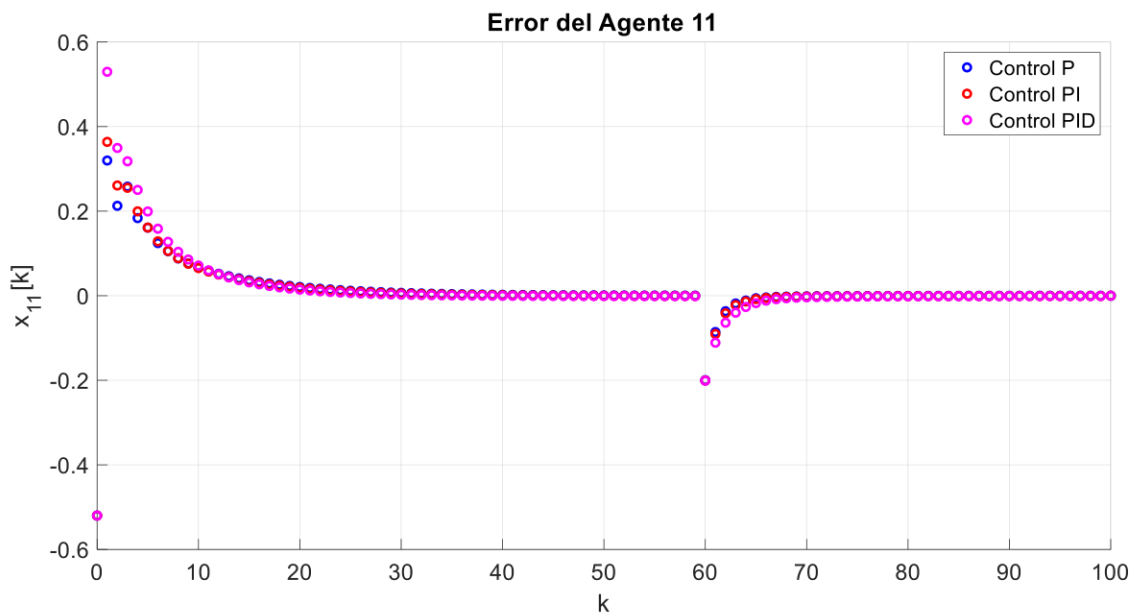


Figura 3.39. Error del agente seguidor 11 con una acción de control P, PI y PID.

En la Figura 3.39, se observa al agente seguidor 11, este recibe la perturbación directamente lo cual hace que su error sea mucho mayor, sin embargo, las acciones de control responden adecuadamente. Por otro lado, en la Figura 3.38 el agente líder 7 presenta una mínima perturbación consecuentemente su error en el tiempo perturbado es menor. Debido a que, no acarrea errores de otros agentes, solo el suyo respecto a la referencia.

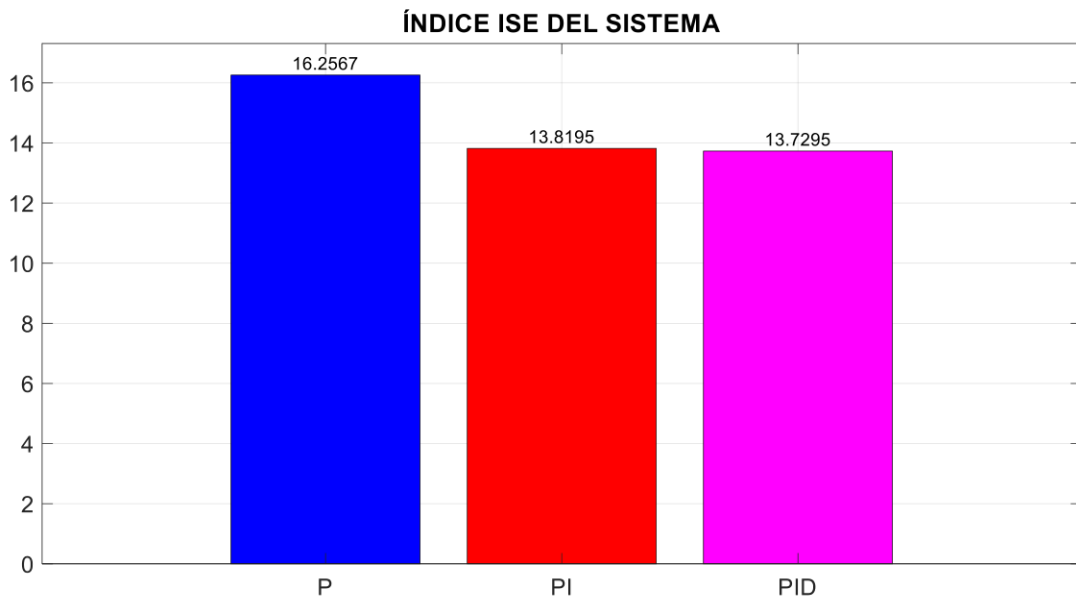


Figura 3.40. Índice de desempeño ISE del sistema.

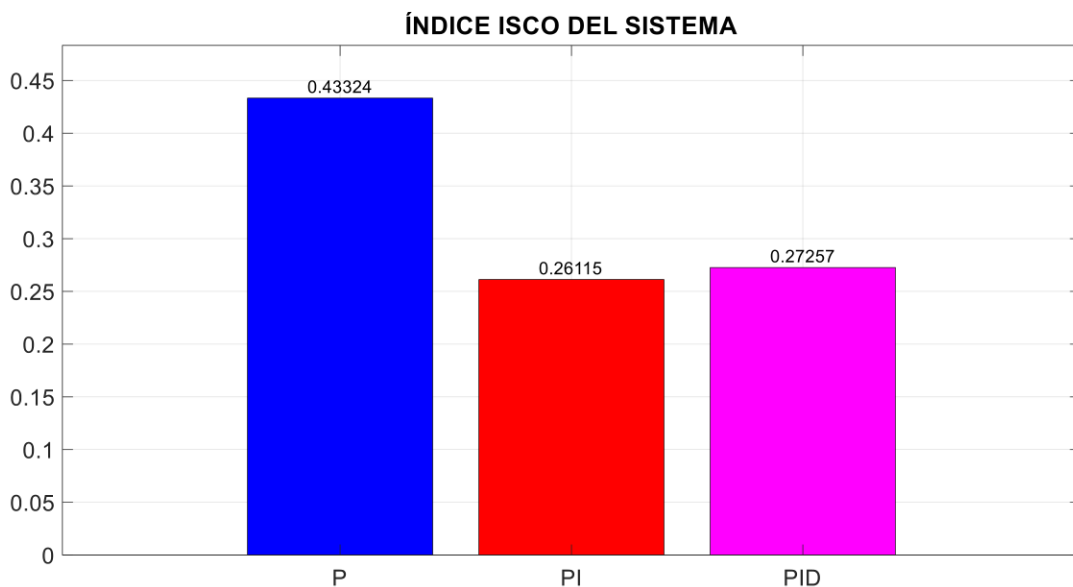


Figura 3.41. Índice de desempeño ISCO del sistema.

Después de analizar los resultados, es importante tener un criterio para seleccionar la acción de control más apropiada. Para este ejemplo, resulta más efectiva la acción de control PID, ya que su componente derivativa responde perfectamente ante cambios repentinos en el sistema como se observa en la figura 3.40, el índice ISE de la acción de control PID es la que mejor disminuye el error, respecto a las otras acciones de control. Dado a que su control es capaz de mantener un buen rendimiento ante perturbaciones, la energía requerida es mínima, lo que lo hace un control robusto y eficiente.

3.1.5 Análisis de Estabilidad del Sistema

Una vez diseñado el algoritmo de control, es necesario e importante analizar la estabilidad de este. De esta manera, se garantiza que la salida del sistema es acotada si se tiene una entrada acotada. Para ello se debe determinar los módulos de los valores propios para cada una de las acciones de control diseñadas haciendo uso de la ecuación 1.11, descrito en el capítulo 1. El módulo de cada uno de los valores propios debe tener un valor menor o igual a uno, indicando que se encuentra dentro del círculo unitario, garantizando la estabilidad del sistema.

3.1.5.1 Análisis de Estabilidad en Lazo Cerrado para una red de 4 gentes

Tabla 3.11. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control P.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.3002
λ_2	0.463509
λ_3	0.463509
λ_4	0.897982

Tabla 3.12. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control PI.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.4528
λ_2	0.4528
λ_3	0.300276
λ_4	0.885964
λ_5	0.999746
λ_6	0.99997
λ_7	0.999981
λ_8	0.999981

Tabla 3.13. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control PID.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio	Valor Propio	Módulo del Valor Propio
--------------	-------------------------	--------------	-------------------------

λ_1	0.824948	λ_7	0.999981
λ_2	0.362836	λ_8	0.999981
λ_3	0.362836	λ_9	$3.663219e^{-16}$
λ_4	0.280027	λ_{10}	$3.017813e^{-16}$
λ_5	0.999984	λ_{11}	$2.456581e^{-16}$
λ_6	0.999975	λ_{12}	$2.456581e^{-16}$

Independientemente de que acción de control se aplique los módulos de los valores propios obtenidos se encuentran dentro del círculo unitario, lo que garantiza una estabilidad en estado estacionario. También, se observan módulos cercanos 1. Esto se le atribuye a la componente integral de cada agente, pues ese valor es bastante cercano a la componente proporcional. Indica que en la matriz de transición de estados añadidas las acciones de control, estas ganancias interactúan y se relacionan modificando el estado de la tasa de aceptación de cada agente y como la componente integral ayuda a reducir el error en estado estable indica que está cerca del límite de estabilidad.

3.1.5.2 Análisis de Estabilidad en Lazo Cerrado para una red de 16 agentes

Tabla 3.14. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control P.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio	Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.88619	λ_9	0.439543
λ_2	0.820774	λ_{10}	0.491317
λ_3	0.348697	λ_{11}	0.491317
λ_4	0.261296	λ_{12}	0.342116
λ_5	0.212802	λ_{13}	0.342116
λ_6	0.636943	λ_{14}	0.005012
λ_7	0.233711	λ_{15}	0.244206
λ_8	0.233711	λ_{16}	0.154113

Tabla 3.15. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control PI.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio	Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.274993	λ_{17}	0.995569

λ_2	0.235957	λ_{18}	0.998888
λ_3	0.235957	λ_{19}	0.999398
λ_4	0.111851	λ_{20}	0.999749
λ_5	0.034543	λ_{21}	0.999545
λ_6	0.09554	λ_{22}	0.999623
λ_7	0.192081	λ_{23}	0.999599
λ_8	0.41590	λ_{24}	0.999599
λ_9	0.41590	λ_{25}	0.999599
λ_{10}	0.513177	λ_{26}	0.999599
λ_{11}	0.513177	λ_{27}	0.999599
λ_{12}	0.314708	λ_{28}	0.999599
λ_{13}	0.314708	λ_{29}	0.999599
λ_{14}	0.555131	λ_{30}	0.999599
λ_{15}	0.685126	λ_{31}	0.999599
λ_{16}	0.889156	λ_{32}	0.999599

Tabla 3.16. Módulo de los valores propios del sistema con una Acción de Control PID.

Valor Propio	Módulo del Valor Propio	Valor Propio	Módulo del Valor Propio
λ_1	0.863476	λ_{25}	0.999955
λ_2	0.169188	λ_{26}	0.999955
λ_3	0.692719	λ_{27}	0.999955
λ_4	0.330221	λ_{28}	0.999955
λ_5	0.330221	λ_{29}	0.999955
λ_6	0.543774	λ_{30}	0.999955
λ_7	0.475123	λ_{31}	0.999955
λ_8	0.475123	λ_{32}	0.999955
λ_9	0.414989	λ_{33}	$1.597012e^{-14}$
λ_{10}	0.414989	λ_{34}	$1.597012e^{-14}$
λ_{11}	0.300946	λ_{35}	$3.143204e^{-15}$
λ_{12}	0.300946	λ_{36}	$3.143204e^{-15}$
λ_{13}	0.131854	λ_{37}	$2.474267e^{-15}$

λ_{14}	0.131854	λ_{38}	$2.384306e^{-15}$
λ_{15}	0.060726	λ_{39}	$1.037537e^{-15}$
λ_{16}	0.005078	λ_{40}	$1.037537e^{-15}$
λ_{17}	0.999449	λ_{41}	$8.986527e^{-16}$
λ_{18}	0.999709	λ_{42}	$8.986527e^{-16}$
λ_{19}	0.999993	λ_{43}	$6.396118e^{-16}$
λ_{20}	0.999996	λ_{44}	$4.984396e^{-16}$
λ_{21}	0.999996	λ_{45}	$4.984396e^{-16}$
λ_{22}	0.999997	λ_{46}	$2.7274116e^{-16}$
λ_{23}	0.999997	λ_{47}	$2.353158e^{-16}$
λ_{24}	0.999997	λ_{48}	$2.353158e^{-16}$

Independientemente de que acción de control se aplique los módulos de los valores propios obtenidos cumplen los criterios de estabilidad. Además, de comprobar analíticamente mediante el análisis de los valores propios en los resultados gráficos se comprobó la estabilidad del sistema con cada acción de control, en donde la salida del sistema era acotada para una entrada escalón unitario.

3.2 Conclusiones

La propagación de rumores en las redes sociales se produce gracias a la interacción que existe entre los usuarios de una red al compartir información con sus amigos o seguidores. La dinámica de esta propagación se puede representar mediante ecuaciones en diferencia; sin embargo, cuando se trata de una red grande, la influencia de teoría de grafos resulta muy útil. De esta manera, es posible representar de manera lineal la propagación de rumores, donde los usuarios se los ha definido como vértices y la relación directa entre ellos se denomina arista. La matriz de adyacencia indica si existe relación entre un agente y otro; mientras tanto, la matriz laplaciana indica con cuántos y cuáles agentes se relaciona. Finalmente, la representación en sistemas multi-agentes mediante variables de estado permite comprender como la influencia de un agente influye sobre otro agente para lograr un objetivo en común.

El control aplicado al sistema permite alcanzar tasas de aceptación deseadas, evitando así la desinformación y, a su vez, reduciendo la propagación de rumores negativos que puedan provocar una histeria colectiva y replicarse de inmediato en la vida real. Por ello, las acciones de control seleccionadas y diseñadas han sido evaluadas ante una entrada tipo escalón. De esta manera, se observa un control adecuado por parte de las acciones de

control P, PI y PID ante cambios súbitos en la entrada, replicándola de manera adecuada. También se han añadido perturbaciones para visualizar la reacción de las acciones de control, lo cual garantiza una respuesta rápida, un control óptimo y la estabilidad del sistema. Finalmente, los índices de desempeño evalúan la eficiencia de cada una de las acciones de control diseñadas. No obstante es importante conocer las necesidades específicas de control para el criterio de selección adecuado, ya que diferentes escenarios pueden requerir acciones de control diferentes

El control distribuido aplicado a las diferentes acciones de control diseñadas se ha realizado mediante uso de agentes líderes, los cuales siguen a la referencia deseada, y los seguidores, que a su vez siguen al líder o los agentes de entrada. Esto fomenta la coordinación y cooperación para alcanzar objetivos comunes, como llegar a una tasa de aceptación positiva. Al asignar un rol específico, se permite la autonomía de cada agente, lo que contribuye a la estabilidad, robustez y adaptabilidad del sistema ante cambios súbitos de respuesta y perturbaciones.

3.3 Recomendaciones

Es importante analizar la interacción entre los agentes, es decir, con cuantos y cuales se comunica, para que de esta manera a la hora de diseñar una acción de control se escoja correctamente los agentes que tendrán la función de líder y aquellos que serán seguidores.

Es importante que en una red todos los agentes se encuentren intercomunicados, ya que resulta complicado que un solo agente inicie con todo el proceso y esto puede generar inconvenientes a la hora de implementar una acción de control.

Antes de elegir que agentes son líderes y seguidores para la elaboración de las acciones de control, se debe conocer la red y como se encuentra comunicada. De esta manera, se asignará adecuadamente el agente líder y agente seguidor. Además, se puede conocer de manera sencilla la relación de los agentes a través de la matriz Laplaciana, ya que, además de obtener el modelo lineal se obtendrá la matriz de comunicación entre agentes.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. Luna, "Redes sociales," *Revista Mexicana de Sociología*, vol. 66, pp. 59–75, 2004. doi: 10.2307/3541443
- [2] J. Acosta-Quiroz and S. Iglesias-Osores, "COVID-19: Desinformación en redes sociales," *Revista del Cuerpo Médico del HNAAA*, vol. 13, no. 2, pp. 218–219, Aug. 2020, doi: 10.35434/rcmhnaaa.2020.132.678
- [3] R. Ghazzali, S. Ben Rhila, M. Rachik, y A. El Alami Laaroussi, "A Discrete Mathematical Modeling and Optimal Control of the Rumor Propagation in Online Social Network," *Hindawi Journals*, vol. 2020, pp. 1-12, May 2020. [Online]. Available: <https://www.hindawi.com/journals/ddns/2020/4386476/>
- [4] M. Vicario, A. Bessi, F. Zollo, F. Petroni, A. Scala, G. Caldarelli, H. Stanley, and W. Quattrociocchi, "The spreading of misinformation online," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 113, no. 3, pp. 554–559, Jan. 2016, doi: <https://doi.org/10.1073/pnas.1517441113>
- [5] Benjamin DoeRr, Mahmoud Fouz, and Tobias Friedrich "Why rumors spread so quickly in social networks | Communications of the ACM," *Communications of the ACM*, 2023. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/2184319.2184338?casa_token=5oMxl-sDSvQAAAAA:fOM5pVBNBB7GeMx7whX-mEwxdp-Vs3o_bRhpEVoDv_nsPvGkwb-q4p3JFgUBg2Aq1BKn4zgoNjkThI
- [6] A. Guille, H. Hacid, C. Favre, and D. A. Zighed, "Information diffusion in online social networks," *ACM SIGMOD Record*, vol. 42, no. 2, pp. 17–28, Jun. 2013, doi: <https://doi.org/10.1145/2503792.2503797>
- [7] Lucian Buşoniu, R. Babuška, and Bart De Schutter, "Multi-agent Reinforcement Learning: An Overview," Springer eBooks, pp. 183–221, Jan. 2010, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-14435-6_7
- [8] R. Hegselmann and U. Krause, "Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation," *Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS)*, vol. 5, no. 3, 2002. [Online]. Available: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
- [9] A. Caicedo, G. Graciela y R. Méndez, "Introducción a Teoría de Grafos", 1era ed. Armenia-Colombia: ELIZCOM, 2010

- [10] J. Zhao, Q. Liu, L. Wang, and X. Wang, "How effectively can the initial opinions influence the opinion formation in social networks with stubborn agents?," in The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC), Qingdao-China, 2015, pp. 291-295, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ccdc.2015.7161706>
- [11] Cando Cruz Patricio E., "Aplicación de un algoritmo de resiliencia para la identificación de agentes no cooperativos y la reestructuración de formaciones en sistemas multi-agente heterogéneos," Quito, 2020.
- [12] O. Camacho, A. Rosales y F. Rivas, "Control de Procesos", 1ra ed. Quito-Ecuador: EPN Editorial, 2020.
- [13] K. Ogata, "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", 2da ed. Naucalpan de Juárez, Edo. De México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1996.
- [14] U. Metropolitana, M. Rodríguez-Mariano, A. Reynoso-Meza, and G. Páramo-Calderón, "Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de cholette mediante técnicas de decisión multi-criterio", Revista Mexicana de Ingeniería Química, vol. 14, no. 1, pp. 167–204, 2015, Accessed: Sep. 27, 2023. [Online]. Available: <https://www.redalyc.org/pdf/620/62037106014.pdf>

5. ANEXOS

ANEXO I

5.1 Representación en variables de estado para una red conformada por 4 gentes

Primero se deberá obtener la matriz de adyacencia:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz Laplaciana, primero se deberá determinar la matriz $D = \text{diag}(\vec{d})$ en donde los términos de \vec{d} se los obtiene mediante la ecuación 1.5.

$$\vec{d} = [1, 1, 2, 1]$$

Una vez obtenido el grado de entrada de cada agente se determina la matriz D, siendo la siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se calculará la matriz Laplaciana como $L = D - A_d$ y se obtendrá lo siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de obtener la matriz estados, primero se debe determinar el valor de ϵ . Para este caso $\max(\vec{d}) = 2$. Por lo que el rango de $\epsilon = [0, 0.5]$ y para facilitar los cálculos $\epsilon = 0.25$. Una vez determinado el valor de ϵ , es posible representar la interacción entre los agentes haciendo uso de la ecuación 1.16.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

ANEXO II

5.2 Representación en Variables de Estado

5.2.1 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control P para una red formada por 4 Agentes

Primero se obtiene la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - 2\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 1 - \epsilon \end{bmatrix}$$

A continuación, se obtiene la matriz J_1

$$J_1 = \begin{bmatrix} k_{P_1} & -k_{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{P_2} & 0 & -k_{P_2} \\ 0 & -k_{P_3} & -2k_{P_3} & k_{P_3} \\ -k_{P_4} & 0 & 0 & k_{P_4} \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene la matriz J_2

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{P_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la matriz $A_{AP} = A - J_1 - J_2$ y la matriz B_{AP} :

$$A_{AP} = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - k_{P_1} & \epsilon + k_{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon - k_{P_2} & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon + k_{P_3} & 1 - 2\epsilon - 2k_{P_3} & \epsilon + k_{P_3} \\ \epsilon + k_{P_4} & 0 & 0 & 1 - \epsilon - k_{P_4} \end{bmatrix}$$

$$B_{AP} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{P_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{AP}\vec{x}(k) + B_{AP}r(k)$$

5.2.2 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PI para una red formada por 4 Agentes

Obtención de la matriz M_1

$$M_1 = \begin{bmatrix} q_{0_1} & -q_{0_1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{0_2} & 0 & -q_{0_2} \\ 0 & -q_{0_3} & -2q_{0_3} & q_{0_3} \\ -q_{0_4} & 0 & 0 & q_{0_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz M_2

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{0_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_1 = A - M_1 - M_2$:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - q_{0_1} & \epsilon + q_{0_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon - q_{0_2} & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon + q_{0_3} & 1 - 2\epsilon - 2q_{0_3} & \epsilon + q_{0_3} \\ \epsilon + q_{0_4} & 0 & 0 & 1 - \epsilon - q_{0_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_2

$$J_2 = \begin{bmatrix} q_{1_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{1_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{1_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{1_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz F_1

$$F_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & -c_3 & 2c_3 & -c_3 \\ -c_4 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz F_2

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_3 = F_1 + F_2$:

$$J_3 = \begin{bmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -2c_3 & c_3 \\ c_4 & 0 & 0 & -c_4 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{API} \vec{x}(k) + B_{API} r(k)$$

Donde:

$$A_{API} = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - q_{0_1} & \epsilon + q_{0_1} & 0 & 0 & q_{1_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon - q_{0_2} & 0 & \epsilon & 0 & q_{1_2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon + q_{0_3} & 1 - 2\epsilon - 2q_{0_3} & \epsilon + q_{0_3} & 0 & 0 & q_{1_3} & 0 \\ \epsilon + q_{0_4} & 0 & 0 & 1 - \epsilon - q_{0_4} & 0 & 0 & 0 & q_{1_4} \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -2c_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & -c_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{API} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{0_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2.3 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PID para una red formada por 4 Agentes

Entonces se obtiene $J_1 = A - M_1 - M_2$:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - q_{0_1} & \epsilon + q_{0_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon - q_{0_2} & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon + q_{0_3} & 1 - 2\epsilon - 2q_{0_3} & \epsilon + q_{0_3} \\ \epsilon + q_{0_4} & 0 & 0 & 1 - \epsilon - q_{0_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_2

$$J_2 = \begin{bmatrix} q_{1_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{1_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{1_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{1_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_3

$$J_3 = \begin{bmatrix} q_{2_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{2_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{2_4} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz F_1

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz F_2

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_4 = F_1 + F_2$:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz H_1

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & -a_2 \\ 0 & -a_3 & 2a_3 & -a_3 \\ -a_4 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz H_2

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_5 = H_1 + H_2$:

$$J_5 = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & -2a_3 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & -a_4 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_6

$$J_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{API} \vec{x}(k) + B_{API} r(k)$$

Donde:

$$A_{API} = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - q_{0_1} & \epsilon + q_{0_1} & 0 & 0 & q_{1_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon - q_{0_2} & 0 & \epsilon & 0 & q_{1_2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon + q_{0_3} & 1 - 2\epsilon - 2kp_3 & \epsilon + q_{0_3} & 0 & 0 & q_{1_3} & 0 \\ \epsilon + q_{0_4} & 0 & 0 & 1 - \epsilon - q_{0_4} & 0 & 0 & 0 & q_{1_4} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -2a_3 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{2_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{2_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{2_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{API} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{0_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANEXO V

5.3 Representación en variables de estado para una red conformada por 16 agentes

Primero se deberá obtener la matriz de adyacencia:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz Laplaciana, primero se deberá determinar la matriz $D = \text{diag}(\vec{d})$ en donde los términos de \vec{d} se los obtiene mediante la ecuación 1.5.

$$\vec{d} = [3, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 2]$$

Una vez obtenido el grado de entrada de cada agente se determina la matriz D, siendo la siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A continuación, se calculará la matriz Laplaciana como $L = D - A_d$ y se obtendrá lo siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Antes de obtener la matriz estados, primero se debe determinar el valor de ϵ . Para este caso $\max(\vec{d}) = 5$. Por lo que el rango de $\epsilon = [0, 0.2]$ y para facilitar los cálculos $\epsilon = 0.1$. Una vez determinado el valor de ϵ , es posible representar la interacción entre los agentes haciendo uso de la ecuación 1.16.

$$\vec{x}(k+1) = A\vec{x}(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ANEXO II

5.4 Representación en Variables de Estado

5.4.1 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control P para una red formada por 16 agentes

Primero se obtiene la matriz J_1

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3k_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_1} & 0 & 0 & -k_{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & 3k_{P_2} & 0 & -k_{P_2} & 0 & 0 & 0 & -k_{P_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{P_3} & 0 & 4k_{P_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{P_4} & 0 & 2k_{P_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_4} & 0 \\ 0 & -k_{P_5} & 0 & 0 & 3k_{P_5} & -k_{P_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_{P_6} & 0 & 0 & -k_{P_6} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{P_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3k_{P_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_8} & -k_{P_8} & 0 & 2k_{P_8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{P_9} & 0 & -k_{P_9} & -k_{P_9} & 0 & 0 & 5k_{P_9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{10}} & 0 & 0 & 0 & 2k_{P_{10}} & 0 & -k_{P_{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{11}} & 0 & -k_{P_{11}} & 0 & 2k_{P_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{P_{12}} & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{12}} & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{12}} & 3k_{P_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{13}} & 0 & 0 & -k_{P_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{P_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{14}} & 0 & -k_{P_{14}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{P_{15}} & -k_{P_{15}} & 0 & 0 & -k_{P_{15}} & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{15}} \\ -k_{P_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{P_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{P_2} \\ -k_{P_3} & 0 & 0 & -k_{P_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{P_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{P_6} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{P_7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{P_9} & -k_{P_9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4k_{P_{13}} & 0 & -k_{P_{13}} & -k_{P_{13}} \\ -k_{P_{14}} & 5k_{P_{14}} & 0 & -k_{P_{14}} \\ 0 & 0 & 4k_{P_{15}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_{P_{16}} \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene la matriz J_2

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{P_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{P_6} & 0 \\ k_{P_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{P_7} & 0 & 0 & 0 & k_{P_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{P_9} & 0 & k_{P_9} & k_{P_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{P_9} & k_{P_9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la matriz $A_{AP} = A - J_1 - J_2$ y la matriz B_{AP} :

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 - 3k_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_1} & 0 \\ 0 & 0.7 - 3k_{P_2} & 0 & 0.1 + k_{P_2} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_2} \\ 0.1 + k_{P_3} & 0 & 0.6 - 4k_{P_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 + k_{P_4} & 0 & 0.8 - 2k_{P_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 + k_{P_5} & 0 & 0 & 0.7 - 3k_{P_5} & 0.1 + k_{P_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 - 2k_{P_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 - 3k_{P_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_8} & 0.1 + k_{P_8} & 0 & 0.8 - 2k_{P_8} \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{13}} & 0 & 0 \\ 0.1 + k_{P_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{15}} & 0.1 + k_{P_{15}} & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{15}} \\ 0.1 + k_{P_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_{16}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0.1+k_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_2} \\
0.1+k_{P_3} & 0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_3} & 0 & 0 & 0.1+k_{P_3} \\
0 & 0 & 0.1+k_{P_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_5} & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5-5k_{P_9} & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0.85-2k_{P_{10}} & 0 & 0.1+k_{P_{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1+k_{P_{11}} & 0 & 0.8-2k_{P_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1+k_{P_{12}} & 0.7-3k_{P_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1+k_{P_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0.6-4k_{P_{13}} & 0 & 0.1+k_{P_{13}} & 0.1+k_{P_{13}} \\
0.1+k_{P_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_{14}} & 0.5-5k_{P_{14}} & 0 & 0.1+k_{P_{14}} \\
0 & 0 & 0 & 0.1+k_{P_{15}} & 0 & 0 & 0.6-4k_{P_{15}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8-2k_{P_{16}}
\end{array}$$

$$B_{APID} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{p_6} \ k_{p_7} \ 0 \ k_{p_9} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{AP}\vec{x}(k) + B_{AP}r(k)$$

5.4.2 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PI para una red formada por 16 agentes

Obtención de la matriz M_1

$$M_1 = \begin{array}{cccccccccccc}
3q_{0_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_1} & 0 & 0 & -q_{0_1} & 0 & 0 \\
0 & 3q_{0_2} & 0 & -q_{0_2} & 0 & 0 & 0 & -q_{0_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{0_3} & 0 & 4q_{0_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -q_{0_4} & 0 & 2q_{0_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_4} & 0 \\
0 & -q_{0_5} & 0 & 0 & 3q_{0_5} & -k_{P_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q_{0_6} & 0 & 0 & -q_{0_6} & 0 & 0 & 0 \\
-q_{0_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3q_{0_7} & 0 & 0 & 0 & -q_{0_7} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_8} & -q_{0_8} & 0 & 2q_{0_8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -q_{0_9} & 0 & -q_{0_9} & -q_{0_9} & 0 & 0 & 5q_{0_9} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{10}} & 0 & 0 & 0 & 2q_{0_{10}} & 0 & -q_{0_{10}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{11}} & 0 & -q_{0_{11}} & 0 & 2q_{0_{11}} & 0 \\
0 & 0 & -q_{0_{12}} & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{12}} & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{12}} & 3q_{0_{12}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{13}} & 0 & 0 & -q_{0_{13}} & 0 & 0 & 0 \\
-k_{P_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{14}} & 0 & -q_{0_{14}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -q_{0_{15}} & -q_{0_{15}} & 0 & 0 & -q_{0_{15}} & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{15}} \\
-q_{0_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{0_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & -k_{P_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -q_{0_2} \\
-q_{0_3} & 0 & 0 & -q_{0_3} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{0_5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -q_{0_6} & 0 & 0 \\
0 & -q_{0_7} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{0_9} & -q_{0_9} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
4q_{0_{13}} & 0 & -q_{0_{13}} & -q_{0_{13}} \\
-q_{0_{14}} & 5q_{0_{14}} & 0 & -q_{0_{14}} \\
0 & 0 & 4q_{0_{15}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2q_{0_{16}}
\end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz M_2

$$M_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{0_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{0_6} & 0 & 0 \\
q_{0_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{0_7} & 0 & 0 & q_{0_7} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & q_{0_9} & 0 & q_{0_9} & q_{0_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{0_9} & q_{0_9} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_1 = A - M_1 - M_2$:

$$J_1 =$$

$$\begin{bmatrix}
0.7 - 3q_{0_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_1} & 0 \\
0 & 0.7 - 3q_{0_2} & 0 & 0.1 + q_{0_2} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_2} \\
0.1 + q_{0_3} & 0 & 0.6 - 4q_{0_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 + q_{0_4} & 0 & 0.8 - 2q_{0_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 + q_{0_5} & 0 & 0 & 0.7 - 3q_{0_5} & 0.1 + q_{0_5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 - 2q_{0_6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 - 3q_{0_7} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_8} & 0.1 + q_{0_8} & 0 & 0.8 - 2k_{P_8} \\
0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{10}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{11}} & 0 \\
0 & 0 & 0.1 + q_{0_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{12}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{13}} & 0 & 0 \\
0.1 + q_{0_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{14}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{15}} & 0.1 + q_{0_{15}} & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{15}} \\
0.1 + q_{0_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{16}}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0.1 + q_{0_1} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_2} \\
0.1 + q_{0_3} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_3} & 0 & 0 & 0.1 + k_{P_3} \\
0 & 0 & 0.1 + q_{0_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_5} & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5 - 5q_{0_9} & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0.8 - 2q_{0_{10}} & 0 & 0.1 + q_{0_{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 + q_{0_{11}} & 0 & 0.8 - 2q_{0_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 + q_{0_{12}} & 0.7 - 3q_{0_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 + q_{0_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0.6 - 4q_{0_{13}} & 0 & 0.1 + q_{0_{13}} & 0.1 + q_{0_{13}} \\
0.1 + q_{0_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{14}} & 0.5 - 5q_{0_{14}} & 0 & 0.1 + q_{0_{14}} \\
0 & 0 & 0 & 0.1 + q_{0_{15}} & 0 & 0 & 0.6 - 4q_{0_{15}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 - 2q_{0_{16}}
\end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_2

$$J_2 =$$

$$\begin{bmatrix}
 q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & q_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{110} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{112} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{113} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{114} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{115} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{116}
 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz F_1

$$F_1 =
 \begin{bmatrix}
 -3c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\
 0 & -3c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_3 & 0 & -4c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & c_4 & 0 & -2c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\
 0 & c_5 & 0 & 0 & -3c_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\
 c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3c_7 & 0 & 0 & 0 & c_7 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_8 & 0 & -2c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_9 & 0 & c_9 & c_9 & 0 & 0 & -5c_9 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & 0 & 0 & 0 & -2c_{10} & 0 & c_{10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & c_{11} & 0 & -2c_{11} & 0 \\
 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & -3c_{12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & 0 & c_{14} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{15} & 0 & 0 & c_{15} & 0 & 0 & 0 & c_{15} \\
 c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
-3c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\
0 & -3c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_3 & 0 & -4c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_4 & 0 & -2c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\
0 & c_5 & 0 & 0 & -3c_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_8 & 0 & -2c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5c_9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & 0 & 0 & 0 & -2c_{10} & 0 & c_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & c_{11} & 0 & -2c_{11} & 0 \\
0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & -3c_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\
c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & 0 & c_{14} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{15} & 0 & 0 & c_{15} & 0 & 0 & 0 & c_{15} \\
c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & c_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_2 \\
c_3 & 0 & 0 & c_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
c_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-4c_{13} & 0 & c_{13} & c_{13} \\
c_{14} & -5c_{14} & 0 & c_{14} \\
0 & 0 & -4c_{15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2c_{16}
\end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{API}\vec{x}(k) + B_{API}r(k)$$

Donde:

$$A_{API} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ -J_3 & I \end{bmatrix}$$

$$B_{API} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_{0_6} \ q_{0_7} \ 0 \ q_{0_9} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ c_6 \ c_7 \ 0 \ c_9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

5.4.3 Representación en Variables de Estado para una Acción de Control PID para una red formada por 16 agentes

La matriz J_1 y J_2 son idénticas a las matrices de la sección anterior, pero con la diferencia de que estas matrices deben estar evaluadas respecto al controlador PID

$$\begin{bmatrix}
 -3a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\
 0 & -3a_2 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_3 & 0 & -4a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_4 & 0 & -2a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\
 0 & a_5 & 0 & 0 & -3a_5 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_6 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\
 a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_7 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_8 & 0 & -2a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_9 & 0 & a_9 & a_9 & 0 & 0 & -5a_9 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & -2a_{10} & 0 & a_{10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & a_{11} & 0 & -2a_{11} & 0 \\
 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -3a_{12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{15} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\
 a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & a_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_2 \\
 a_3 & 0 & 0 & a_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_6 & 0 & 0 \\
 0 & a_7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_9 & c_9 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -4a_{13} & 0 & a_{13} & a_{13} \\
 a_{14} & -5a_{14} & 0 & a_{14} \\
 0 & 0 & -4a_{15} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2a_{16}
 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz H_2

$$H_2 = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \\
 a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_9 & 0 & a_9 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_9 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene $J_5 = H_1 + H_2$:

$$J_5 = \begin{bmatrix} -3a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -3a_2 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & -4a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & -2a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & -3a_5 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_8 & 0 & -2a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5a_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & -2a_{10} & 0 & a_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & a_{11} & 0 & -2a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -3a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{15} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4a_{13} & 0 & a_{13} & a_{13} \\ a_{14} & -5a_{14} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & -4a_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_{16} \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz J_6

$$J_6 =$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{16} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se representa en variables de estado:

$$\vec{x}(k+1) = A_{API} \vec{x}(k) + B_{API} r(k)$$

Donde:

$$A_{API} = \begin{bmatrix} J_1 & -J_2 & J_3 \\ -J_4 & 0_{16 \times 16} & 0_{16 \times 16} \\ -J_5 & -J_6 & I_{16 \times 16} \end{bmatrix}$$

$$B_{API} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{0_6} & q_{0_7} & 0 & q_{0_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_7 & 0 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$