



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**OPTIMIZACIÓN NO SUAVE A TRAVÉS DE MÉTODOS DE
TIPO NEWTON**

**OPTIMIZACIÓN NO SUAVE A TRAVÉS DE MÉTODOS
BFGS Y L-BFGS**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO
MATEMÁTICO**

LEONARDO AGUSTÍN LOAYZA ROMERO

leonardo.loayza@epn.edu.ec

DIRECTOR: SERGIO GONZALEZ ANDRADE

sergio.gonzalez@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2024

CERTIFICACIONES

Yo, LEONARDO AGUSTÍN LOAYZA ROMERO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Leonardo Agustín Loayza Romero

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Leonardo Agustín Loayza Romero, bajo mi supervisión.

Sergio Gonzalez Andrade
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Leonardo Agustín Loayza Romero

Sergio Gonzalez Andrade

RESUMEN

En el presente trabajo se aborda el estudio de problemas de optimización continua no suave y sin restricciones a través de la reformulación de los problemas mediante la envoltura Forward - Backward (FBE), función que provee una interpretación para el Forward - Backward Splitting (FBS) como un método del gradiente.

Con ello se construye un algoritmo tipo FBS, que recoja las propiedades fuertes de convexidad y complejidad de este tipo de métodos, junto con la descomposición de una función no suave a partir de la envoltura Forward - Backward. De igual manera, se busca mejorar la convergencia del método mediante la inclusión de preconditionamientos por el método BFGS.

Finalmente, se realiza la implementación del algoritmo en el lenguaje MATLAB y se propone el problema de Bingham como ejemplo para evaluar el funcionamiento del código.

Palabras clave: FBS, forward-backward, BFGS, Optimización no suave, MATLAB, Problema de Bingham.

ABSTRACT

This paper is concerned about the study of unconstrained and non-smooth optimization problems through the formulation of this problem by the Forward - Backward Envelope (FBE), function that provides an interpretation for the Forward-Backward Splitting (FBS) as a gradient method.

Subsequently, an FBS - type algorithm is constructed, which recognizes the strong properties of convexity and complexity of this type of methods, along the decomposition of a non-smooth function by the Forward - Backward Envelope. We look for a superlinear convergence of the method by preconditioning the gradient with BFGS.

Finally, we implement the algorithm in MATLAB language and a Bingham Problem is used as an example to evaluate the code.

Keywords: FBS, forward-backward, BFGS, Non-smooth optimization, MATLAB, Bingham Problem.

DEDICATORIA

A Cristina, a mi familia y al Coco.

AGRADECIMIENTO

Agradezco muy especialmente a mi novia, amiga y compañera Cristina, por su amor, apoyo y compañía.

Agradezco a mis padres Ángel y Saida, a mis hermanos Estefanía y Nicolás.

Agradezco al Dr. Sergio Gonzalez, por su guía y ayuda brindada.

Finalmente, agradezco a todos mis amigos durante la carrera, aquel que me ayudaba con un deber o aquel que simplemente me persuadía a no hacerlo.

Gracias Totales.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado	1
1.1. Objetivo general	1
1.2. Objetivos específicos	1
1.3. Alcance	2
1.4. Marco teórico	2
1.4.1. Conceptos preliminares	2
1.4.2. Problemas de minimización de funciones no suaves	3
1.4.3. Conceptos básicos Envoltura de Moreau y el Forward - Backward Splitting	6
1.4.4. Forward-Backward Splitting	7
1.4.5. Envoltura Forward-Backward	8
1.4.6. Diferenciabilidad de la envoltura Forward - Backward	11
1.4.7. Segundo Orden de Diferenciabilidad	12
2. Metodología	16
2.1. Interpretaciones de la envoltura Forward-Backward	16
2.2. Métodos de búsqueda lineal Forward - Backward	17
2.2.1. Convergencia del método en el caso convexo	21
2.2.2. Precondicionamiento por BFGS	24
2.3. Problema de Bingham	30

2.3.1. Discretización del Problema de Bingham	31
2.3.2. Demostración de supuestos necesarios para el Forward- Backward	33
3. Resultados numéricos	35
3.1. Implementación	35
3.2. Resolución del Problema de Bingham	36
3.2.1. Malla de nivel 2	38
3.2.2. Malla de nivel 3	41
3.3. Conclusiones	44
3.4. Recomendaciones	44
A. Códigos de MATLAB	45
Bibliografía	55

Índice de figuras

3.1. Malla 2: Fluído de Bingham con $g = 0,2$ y la solución por MINFBE	39
3.2. Malla 2: Fluído de Bingham con $g = 1$ y la solución por MINFBE	40
3.3. Malla 2: Fluído de Bingham con $g = 1,2$ y la solución por MINFBE	40
3.4. Malla 3: Fluído de Bingham con $g = 0,2$ y la solución por MINFBE	42
3.5. Malla 3: Fluído de Bingham con $g = 1$ y la solución por MINFBE	42
3.6. Malla 3: Fluído de Bingham con $g = 1,2$ y la solución por MINFBE	43

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

1.1. Objetivo general

El objetivo central de este trabajo es estudiar problemas de optimización no suave que parecen en campos como identificación de sistemas, procesamiento de señales e imágenes, aprendizaje automático y estadística, y su solución a través de algoritmos de tipo quasi Newton forward-backward.

1.2. Objetivos específicos

1. Estudiar los métodos forward-backward desarrollados para problemas que se pueden escribir como la suma de una función diferenciable y otra no suave, propia y convexa.
2. Estudiar el preconditionamiento de los métodos forward-backward a través de la estrategia BFGS.
3. Implementar los algoritmos preconditionados y resolver un problema específico, con una experimentación numérica robusta.

1.3. Alcance

El alcance de este trabajo es generar un código en el lenguaje computacional MATLAB para la implementación eficiente de un algoritmo de quasi-Newton forward-backward, para la resolución de un problema de optimización no suave específico. Para esto, debemos estudiar y comprender en detalle la formulación de la envoltura Forward-Backward para problemas de optimización no suave, que se pueden descomponer como la suma de una función suave, y otra no suave, propia y convexa presentado en [5]. Posteriormente requerimos analizar en detalle el algoritmo de tipo Forward-Backward Splitting basando nuestro estudio en [5]. En particular, verificaremos las propiedades de convergencia que se obtiene con un preconditionamiento tipo BFGS.

1.4. Marco teórico

1.4.1. Conceptos preliminares

A lo largo de este trabajo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interno sobre \mathbb{R}^n y $\|\cdot\|$ es la norma inducida. Al conjunto de funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R}^n con gradientes L-Lipschitz continuos es denotado por $C_L^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos a los reales extendidos $\bar{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Al conjunto de funciones propias, cerradas convexas desde \mathbb{R}^n con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ es denotado por $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que la función $\Phi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ es localmente Lipschitz continua en el punto $\bar{u} \in \mathbb{R}^q$ si existe $l > 0$ tal que

$$\|\Phi(u) - \Phi(\bar{u})\| \leq l \|u - \bar{u}\|$$

para cada $u \in \mathbb{R}^q$ en una vecindad de \bar{u} .

1.4.2. Problemas de minimización de funciones no suaves

La finalidad de este trabajo es la de resolver un problema de optimización no suave sin restricciones tal y como lo realiza Stella (2016) [5], el problema se ve de la siguiente forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) \quad (1.1)$$

Este problema de optimización se lo trabajará a partir de su descomposición, de la forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) \equiv f(x) + g(x) \quad (1.2)$$

Donde f es una función diferenciable, posiblemente no convexa. Mientras que g es una función propia, cerrada, convexa y posiblemente no diferenciable.

Definición 1 (Subdiferenciales). Dada una función h en \mathbb{R}^n , el subdiferencial $\partial h(x)$ de h en x está dado por:

$$\partial h(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x^k)_{k \in \mathbb{N}}, (v^k \in \hat{\partial} h(x^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ s.t. } x^k \rightarrow x, v^k \rightarrow v \right\}$$

donde,

$$\hat{\partial} h(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid h(z) \geq h(x) + \langle v, z - x \rangle + o(\|z - x\|), \forall z \in \mathbb{R}^n \}.$$

Esto incluye al gradiente ordinario en el caso de funciones continuamente diferenciables mientras que para $g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a:

$$\partial g(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid g(y) \geq g(x) + \langle v, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n \}$$

Definición 2 (Conjunto de puntos críticos). Denotamos al conjunto de puntos críticos asociado a (1.2) como:

$$\text{zer} \partial \varphi = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in \partial \varphi(x) \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\nabla f(x) \in \partial g(x) \}$$

De este modo una condición necesaria para que x sea un mínimo local

para el problema 1.2 es que $x \in \text{zer}\partial\varphi$. Si φ es convexa (por ejemplo cuando f es convexa) esta condición es también suficiente, y x es un mínimo global.

Definición 3 (Operador Proximal). Dado $g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, su operador proximal está dado por:

$$\text{prox}_{\gamma g}(x) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(u) + \frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2 \right\}.$$

Para f del problema 1.2 se necesita de una función diferenciable, posiblemente no convexa. Repasemos estas definiciones tomadas de [2]. Así mismo se presentan resultados de epi-diferenciabilidad que se usan durante este trabajo, dichas definiciones se toman de [6].

Definición 4 (Diferenciabilidad). Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dirá diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, siendo Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , existe una transformación lineal T que cumpla:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \theta(h),$$

donde $\theta(h)$ cumple que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Es decir, se cumple que existe una aplicación lineal tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Una función es continuamente diferenciable si sus derivadas parciales son continuas.

Definición 5. Una función f es epi-diferenciable en x si las funciones de cociente de diferencias de primer orden

$$\varphi_{x,t}(\xi) = [f(x + t\xi) - f(x)]/t,$$

para $t > 0$, tienen la propiedad que la función límite

$$f'_x := \text{epi-}\lim_{t \downarrow 0} \varphi_{x,t},$$

existe y $f'_x(0) > -\infty$. Entonces los valores $f'_x(\xi)$ son llamados epi-derivadas (direccionales) de primer orden de f sobre x . Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un epi-gradiente de f sobre x si

$$f'_x(\xi) \geq \xi \cdot v \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 6. Una función f es dos veces epi-diferenciable en x relativo a un vector v si es (una vez) epi-diferenciable en x en el sentido de la definición anterior y las funciones de cociente de diferencias de segundo orden

$$\varphi_{x,v,t}(\xi) = [f(x + t\xi) - f(x) - t\xi \cdot v] / \frac{1}{2}t^2,$$

tienen la propiedad que la función límite

$$f''_{x,v} := \text{epi-}\lim_{t \downarrow 0} \varphi_{x,v,t},$$

existe y $f''_{x,v}(0) > -\infty$. Entonces los valores $f''_{x,v}(\xi)$ son llamados epi-derivadas (direccionales) de segundo orden de f sobre x relativo a v . Una matriz simétrica $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada una epi-hessiana de f sobre x relativo a v si

$$f''_{x,v}(\xi) \geq \xi H \xi \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 7 (Convexidad). Una función se dice convexa si para cualquier par (x, x') en el intervalo I , y cualquier $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x').$$

Por otro lado para g se tienen funciones propias, cerradas, convexas y posiblemente no diferenciables. Las definiciones se toman de [7].

Definición 8 (Funciones Propias). En el Análisis Matemático, una función convexa en los reales extendidos se dice propia si su dominio es no vacío y nunca toma valores en $-\infty$ y que no es idénticamente igual a ∞ .

Definición 9 (Funciones Cerradas). Una función es cerrada si la imagen de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado.

Este tipo de problemas se resuelven mediante el método de Forward-Backward Splitting (FBS) o métodos del gradiente proximal.

Finalmente presentamos la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz (KL) útil para los resultados de convergencia.

Definición 10. [Propiedad KL] Una función propia semi-continua y acotada por debajo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tiene la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz (KL) en $x_* \in \text{dom}\partial\varphi$ si existe $\eta \in (0, +\infty]$, una vecindad U de x_* y una función concava continua $\Psi : [0, \eta] \rightarrow [0, +\infty)$ tal que:

(I) $\Psi(0) = 0$,

(II) Ψ es C^1 en $(0, \eta)$,

(III) $\Psi'(s) > 0$ para todo $s \in (0, \eta)$,

(IV) para todo $x \in U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_*) < \varphi(x) \leq \varphi(x_*) + \eta\}$,

$$\Psi'(\varphi(x) - \varphi(x_*)) \text{dist}(0, \partial\varphi(x)) \geq 1$$

Decimos que φ tiene la propiedad KL en $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si tiene la propiedad KL en todo punto $x \in S$.

1.4.3. Conceptos básicos Envoltura de Moreau y el Forward - Backward Splitting

A partir de la Envoltura Forward-Backward (FBE) se define una función real continuamente diferenciable que reemplaza el problema original.

Esta envoltura (FBE) se presenta como un sustituto a la envoltura de Moreau, con lo cual el problema admite usar métodos ya conocidos para problemas sin restricciones para funciones diferenciables.

Definición 11. [Envoltura de Moreau] La envoltura de Moreau de una función propia, semicontinua y convexa $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ está definida por:

$$g^\gamma(x) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(u) + \frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2 \right\}.$$

La función envoltura g^γ es convexa, continuamente diferenciable, con gradiente:

$$\nabla g^\gamma(x) = \gamma^{-1}(x - \text{prox}_{\gamma g}(x)) \tag{1.3}$$

El cuál es γ^{-1} -Lipschitz continua [5].

Para una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, notaremos como $DF(x)$ y $JF(x)$ a su semiderivada y a su Jacobiano en x , respectivamente, cuando estas existan.

Ahora para hablar de convergencia lineal y superlineal de los algoritmos propuestos se usa la siguiente definición.

Definición 12 (Convergencia). Decimos que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x :

- Q -linealmente con factor $\omega \in [0, 1)$ si $\|x^{k+1} - x_*\| \leq \omega \|x^k - x_*\| \quad \forall k \geq 0$;
- Q -superlinealmente si $\frac{\|x^{k+1} - x_*\|}{\|x^k - x_*\|} \rightarrow 0$

El ratio de convergencia es R -lineal (respectivamente, R -superlineal) si $\|x^k - x_*\| \leq a_k \quad \forall k \geq 0$ y una secuencia $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $a_k \rightarrow 0$ con ratio Q -lineal.

1.4.4. Forward-Backward Splitting

Es necesario que el problema propuesto cumpla una serie de supuestos necesarios para que el algoritmo funcione correctamente, los supuestos propuestos en [5] se comparten a continuación junto con una serie de resultados que verifican que el método converge a una solución.

Supuesto 1. $\varphi = f + g$ con $f \in C_L^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ para algún $L_f > 0$ y $g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Si f satisface (1) entonces:

$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L_f}{2} \|y - x\|^2 \quad (1.4)$$

Dado un punto inicial x^0 y $\gamma > 0$, el método Forward-Backward Splitting (FBS) o también conocido como método del gradiente proximal, busca soluciones al problema 1.2, a partir de la siguientes iteraciones:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma g}(x^k - \gamma \nabla f(x^k)) \quad (1.5)$$

Si $\gamma \in (0, \frac{2}{L_f})$ y φ es acotado inferiormente, es fácil decir que todo punto de acumulación x es un punto estacionario para φ , pues satisface la condición de optimalidad $x \in \text{zer} \partial \varphi$ [5].

Supuesto 2. El conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \leq \varphi(x^0)\}$, el cual notaremos por $\{\varphi \leq \varphi(x^0)\}$, está acotado. En particular, existe $R > 0$ tal que $\|x - z\| \leq R$, para todo $x \in \{\varphi \leq \varphi(x^0)\}$ y $z \in \operatorname{argmin} \varphi$.

La existencia del radio uniforme R se debe a lo acotado del $\operatorname{argmin} \varphi$, que resulta del supuesto que $\{\varphi \leq \varphi(x^0)\}$ es acotado.

Se usa términos para simplificar la notación de ciertas funciones necesarias para el forward-backward:

$$T_\gamma(x) = \operatorname{prox}_{\gamma g}(x - \gamma \nabla f(x)), \quad (1.6)$$

$$R_\gamma(x) = \gamma^{-1}(x - T_\gamma(x)).$$

Así la iteración de 1.5 puede ser escrita como $x^{k+1} = T_\gamma(x^k) = x^k - \gamma R_\gamma(x^k)$. El conjunto $\operatorname{zer} \partial \varphi$ también puede ser caracterizado por el conjunto de puntos de T_γ como sigue:

$$x = T_\gamma(x) \iff x \in \operatorname{zer} \partial \varphi \quad (1.7)$$

Notemos que $T_\gamma(x)$ puede ser alternativamente expresado como la solución del siguiente subproblema lineal:

$$T_\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \ell_\varphi(u, x) + \frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2 \right\}, \quad (1.8)$$

$$\ell_\varphi(u, x) = f(x) + \langle \nabla f(x), u - x \rangle + g(u) \quad (1.9)$$

Procedemos ahora a reformular el problema inicial 1.2 como la minimización de un función continuamente diferenciable sin restricciones. Para T_γ usamos la notación en 1.8.

1.4.5. Envoltura Forward-Backward

La definición de la siguiente función conocida como la envoltura Forward-Backward es la base de nuestro algoritmo, esta permite reformular el problema 1.2 como la minimización de una función sin restricciones, continua y diferenciable. A partir de este se demuestran las condiciones de optimalidad y se ejecutan los algoritmos. Stella [5] lo define de la siguiente forma:

Definición 13 (Envoltura Forward-Backward (FBE)). Sea f , g y φ como en el supuesto 1, y sea $\gamma > 0$. La envoltura forward-backward (FBE) de φ con parámetro γ es:

$$\varphi_\gamma(x) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \ell_\varphi(u, x) + \frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2 \right\}, \quad (1.10)$$

con ℓ_γ dado en 1.9.

Usando la ecuación 1.8 y 1.9, es fácil verificar que 1.10 puede ser expresado como:

$$\varphi_\gamma(x) = f(x) + g(T_\gamma(x)) - \gamma \langle \nabla f(x), R_\gamma(x) \rangle + \frac{\gamma}{2} \|R_\gamma(x)\|^2 \quad (1.11)$$

o, por la definición de la envoltura de Moreau:

$$\varphi_\gamma(x) = f(x) - \frac{\gamma}{2} \|\nabla f(x)\|^2 + g^\gamma(x - \gamma \nabla f(x)). \quad (1.12)$$

Proposición 1. Supongamos se satisface el supuesto 1. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

(I) $\varphi_\gamma(x) \leq \varphi(x) - \frac{\gamma}{2} \|R_\gamma(x)\|^2$, para todo $\gamma > 0$;

(II) $\varphi(T_\gamma(x)) \leq \varphi_\gamma(x) - \frac{\gamma}{2} (1 - \gamma L_f) \|R_\gamma(x)\|^2$, para todo $\gamma > 0$;

(III) $\varphi(T_\gamma(x)) \leq \varphi_\gamma(x)$, para todo $\gamma \in (0, \frac{1}{L_f}]$.

Demostración. El punto (i), por la condición de optimalidad, se tiene:

$$R_\gamma(x) - \nabla f(x) \in \partial g(T_\gamma(x))$$

es decir, $R_\gamma(x) - \nabla f(x)$ es un subgradiente de g en $T_\gamma(x)$. De las inecuaciones de subgradientes se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(T_\gamma(x)) + \langle R_\gamma(x) - \nabla f(x), x - T_\gamma(x) \rangle \\ &= g(T_\gamma(x)) - \gamma \langle \nabla f(x), R_\gamma(x) \rangle + \gamma \|R_\gamma(x)\|^2. \end{aligned}$$

Sumando $f(x)$ a ambos lados se tiene el resultado.

Para (ii), se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma(x) &= f(x) + \gamma \langle \nabla f(x), R_\gamma(x) \rangle + g(T_\gamma(x)) + \frac{\gamma}{2} \|R_\gamma(x)\|^2 \\ &\geq f(T_\gamma(x)) + g(T_\gamma(x)) - \frac{L_f}{2} \|T_\gamma(x) - x\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|R_\gamma(x)\|^2,\end{aligned}$$

donde la inecuación se sigue por 1.4. Luego (iii) se sigue trivialmente. ■

Proposición 2. *Supongamos se satisface el supuesto 1. Entonces,*

(I) $\varphi(z) = \varphi_\gamma(z)$, para todo $\gamma > 0$ y $z \in \text{zer}\partial\varphi$;

(II) $\inf \varphi = \inf \varphi_\gamma$ y $\text{argmin} \varphi \subseteq \text{argmin} \varphi_\gamma$, para $\gamma \in (0, \frac{1}{L_f}]$.

(III) $\text{argmin} \varphi = \text{argmin} \varphi_\gamma$, para todo $\gamma \in (0, \frac{1}{L_f})$.

Demostración. El punto (i), se cumple por el resultado en 1.7, y los resultados (i) y (ii) de la proposición anterior. Supongamos ahora que $\gamma \in (0, 1/L_f]$. En particular, (i) se tiene para todo $x_* \in \text{argmin} \varphi$, entonces

$$\varphi_\gamma(x_*) = \varphi(x_*) \leq \varphi(T_\gamma(x_*)) \leq \varphi_\gamma(x_*) \quad \text{para todo } x_* \in \mathbb{R}^n,$$

donde la primera inecuación se sigue de la optimalidad de x_* para φ , y la segunda de la proposición 1(iii). Entonces, todo $x_* \in \text{argmin} \varphi$ es también un mínimo de φ_γ , y $\min \varphi = \min \varphi_\gamma$, provisto de que lo primero se logra. Resta mostrar el caso en que $\text{argmin} \varphi = \emptyset$. Por la proposición 1(i) se tiene que $\inf \varphi_\gamma \leq \inf \varphi$. Si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_\gamma(x) \leq \inf \varphi$, entonces la proposición 1(ii) implica que $\varphi(T_\gamma(x)) \leq \inf \varphi$, contradiciendo que $\text{argmin} \varphi = \emptyset$. Entonces $\inf \varphi_\gamma = \inf \varphi$, demostrando el punto (ii) Supongamos ahora que $\gamma \in (0, 1/L_f)$, y sea $x_* \in \text{argmin} \varphi_\gamma$. De la proposición 1(i) y 1(ii), se tiene que

$$\varphi_\gamma(T_\gamma(x_*)) \leq \varphi(T_\gamma(x_*)) \leq \varphi_\gamma(x_*) - \frac{1 - \gamma L_f}{2} \|x_* - T_\gamma(x_*)\|^2$$

Lo que implica que $x_* = T_\gamma(x_*)$. Como x_* minimiza φ_γ y $\frac{1 - \gamma L_f}{2} > 0$, entonces, se tiene la siguiente cadena de inecuaciones

$$\varphi_\gamma(x_*) = \varphi_\gamma(T_\gamma(x_*)) \leq \varphi(x_*) \leq \varphi_\gamma(x_*).$$

Como $\varphi_\gamma \leq \varphi$ y x_* minimiza φ_γ , se sigue que $x_* \in \operatorname{argmin} \varphi$. Entonces los conjuntos minimizadores de φ y φ_γ coinciden, probándose así el punto (iii). ■

El siguiente resultado implica que si φ es convexo, es decir si f lo es, y $\gamma \in (0, 1/L_f)$, entonces φ_γ el cuál es posiblemente no convexo, está acotado superior e inferiormente por funciones convexas.

Proposición 3. *Supongamos se satisface el supuesto 1. Entonces,*

$$(I) \quad \varphi_\gamma \leq \varphi^{\frac{\gamma}{1+\gamma L_f}}, \text{ para todo } \gamma > 0;$$

$$(II) \quad \varphi^{\frac{\gamma}{1+\gamma L_f}} \leq \varphi_\gamma, \text{ para todo } \gamma \in (0, \frac{1}{L_f});$$

$$(III) \quad \varphi_\gamma \leq \varphi^\gamma, \text{ si } f \text{ es convexo.}$$

Donde por ejemplo, $\varphi^{\frac{\gamma}{1+\gamma L_f}}$ representa la envoltura de Moreau de φ con parámetro de suavización $\frac{\gamma}{1+\gamma L_f}$.

Demostración. El resultado en 1.4 implica las siguientes cotas correspondientes a la linealización parcial:

$$-\frac{L_f}{2} \|u - x\|^2 \leq \varphi(u) - \ell_\varphi(u, x) \leq \frac{L_f}{2} \|u - x\|^2.$$

Ello junto a la definición del FBE 1.10, permite probar (i) y (ii). Si f es convexo, la cota inferior puede ser reforzada a $0 \leq \varphi(u) - \ell_\varphi(u, x)$. Sumando $\frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2$ a ambos lados y minimizando respecto a u se cumple (iii). ■

1.4.6. Diferenciabilidad de la envoltura Forward - Backward

Ahora es necesario desarrollar la diferenciabilidad de φ_γ , la cuál es fundamental para resolver y analizar los algoritmos para resolver 1.2. Es necesario realizar los siguientes supuestos.

Supuesto 3. *La función f es dos veces continuamente diferenciable sobre \mathbb{R}^n*

A partir del supuesto 3 la función:

$$Q_\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{dada por} \quad Q_\gamma(x) = I - \gamma \nabla^2 f(x) \quad (1.13)$$

está bien definida, es continua y simétrica.

Teorema 1 (Diferenciabilidad de φ_γ). *Supongamos que se satisfacen los supuestos 1 y 3. Entonces, φ_γ es continuamente diferenciable con:*

$$\nabla \varphi_\gamma(x) = Q_\gamma(x) R_\gamma(x)$$

Si $\gamma \in (0, \frac{1}{L_f})$ entonces el conjunto de puntos estacionarios de φ_γ equivale a $\text{zer} \partial \varphi$.

Demostración. Consideremos la forma de escribir φ_γ de la expresión 1.12. El gradiente de g^γ está dado por 1.3 y como $f \in C^2$ se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_\gamma(x) &= \nabla f(x) - \gamma \nabla^2 f(x) \nabla f(x) + \gamma^{-1} (I - \gamma \nabla^2 f(x)) (x - \gamma \nabla f(x) - T_\gamma(x)) \\ &= (I - \gamma \nabla^2 f(x)) (\nabla f(x) \nabla f(x) + \gamma^{-1} (x - T_\gamma(x))) \end{aligned}$$

Esto prueba teorema 1. Si $\gamma \in (0, 1/L_f)$ entonces $Q_\gamma(x)$ es no singular para todo x , y entonces $\nabla \varphi_\gamma(x) = 0$ si y solo si $R_\gamma(x) = 0$, lo que significa que x es un punto crítico de φ por 1.7. ■

Corolario 1. *Supongamos se satisfacen los supuestos 1 y 3. Si φ es convexa (es decir, si f lo es), entonces $\text{argmin} \varphi = \text{zer} \nabla \varphi_\gamma$ para todo $\gamma \in (0, \frac{1}{L_f})$.*

1.4.7. Segundo Orden de Diferenciabilidad

El FBE no es dos veces continuamente diferenciable en todo punto. Por ejemplo, si g es de valores reales entonces $g^\gamma \in C^2$ si y solo si $g \in C^2$. Sin embargo, las propiedades de segundo orden se necesitan solo para los puntos críticos de φ .

Supuesto 4. *La función g es dos veces epi-diferenciable en $x \in \text{zer} \partial \varphi$ para $-\nabla f(x)$, con epi-derivada de segundo orden cuadrática generalizada. Que es:*

$$d^2 g(x) | -\nabla f(x) [d] = \langle d, Md \rangle + \delta_S(d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subespacio lineal, y $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, semidefinida positiva, y tal que $\text{Im}(M) \subseteq S$ y $\text{Ker}(M) \supseteq S^\perp$

En ciertos casos, será necesario asumir la siguiente propiedad más fuerte.

Supuesto 5. La función g satisface el supuesto 4 en $x \in \text{zer}\partial\varphi$ y es estrictamente dos veces epi-diferenciable en x para $-\nabla f(x)$.

Las propiedades de M en el supuesto 4 no generan pérdida de generalidad. De hecho, siendo Π_S la proyección ortogonal en S (Π_S es simétrica), si $M \succeq 0$ se satisface, entonces también lo hace $M' = \Pi_S[\frac{1}{2}(M + M^T)]\Pi_S$, el cuál tiene las propiedades requeridas.

Lema 1. Suponga que el supuesto 1 y 3 se satisfacen, y que g satisface el supuesto 4 (supuesto 5) en el punto $x \in \text{zer}\partial\varphi$. Entonces, $\text{prox}_{\gamma g}$ es (estrictamente) diferenciable en $x - \gamma\nabla f(x)$, y R_γ es (estrictamente) diferenciable en x con Jacobiano:

$$JR_\gamma(x) = \gamma^{-1}(I - P_\gamma(x)Q_\gamma(x))$$

Donde Q_γ es como en 1.13 y

$$P_\gamma(x) = J\text{prox}_{\gamma g}(x - \gamma\nabla f(x)) = \Pi_S[I + \gamma M]^{-1}\Pi_S$$

Incluso, $Q_\gamma(x)$ y $P_\gamma(x)$ son simétricos, $P_\gamma(x) \succeq 0$. $\|P_\gamma(x)\| \leq 1$, y si $\gamma \in (0, 1/L_f)$ entonces $Q_\gamma(x) \succ 0$.

Demostración. Sabemos que $\text{prox}_{\gamma g}$ es estrictamente diferenciable en $x - \gamma\nabla f(x)$ si y solo si g satisface el supuesto 4 (5) en x para $-\nabla f(x)$. Como $f \in C^2$ por supuestos, entonces ∇f es estrictamente diferenciable. La fórmula 1.6 sigue la proposición de que la composición de funciones estrictamente diferenciables en x es estrictamente diferenciable en x . La matriz $Q_\gamma(x)$ es simétrica pues $f \in C^2$ y definida positiva si $\gamma < 1/L_f$. Así siendo $d^2g = d^2g(x | -\nabla f(x))[\cdot]$ y Π_S la matriz proyección idempotente y simétrica de S ,

$$\begin{aligned}
P_\gamma(x)d &= \text{prox}_{(\gamma/2)d^2g}(d) \\
&= \text{argmin}_{d' \in S} \left\{ \frac{1}{2} \langle d', Md' \rangle + \frac{1}{2\gamma} \|d' - d\|^2 \right\} \\
&= \Pi_S \text{argmin}_{d' \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \langle \Pi_S d', M \Pi_S d' \rangle + \frac{1}{2\gamma} \|\Pi_S d' - d\|^2 \right\} \\
&= \Pi_S (\Pi_S [I + \gamma M] \Pi_S)^\dagger \Pi_S d \\
&= \Pi_S [I + \gamma M]^{-1} \Pi_S d
\end{aligned}$$

donde \dagger indica la pseudo-inversa. $P_\gamma \succ 0$ es simétrica y $\|P_\gamma(x)\| \leq 1$. ■

Teorema 2. Suponga que el supuesto 1 y 3 se satisfacen, y que g satisface el supuesto 4 (supuesto 5) en el punto $x \in \text{zer}\partial\varphi$. Entonces, φ_γ es dos veces diferenciable en x , con Hessiana simétrica dada por,

$$\nabla^2 \varphi_\gamma(x) = \gamma^{-1} Q_\gamma(x) (I - P_\gamma(x) Q_\gamma(x)).$$

Donde Q_γ y P_γ son como en el lema 1. Si además $\nabla^2 f$ es estrictamente continua en x y g satisface el supuesto 5 en x , entonces φ_γ es estrictamente dos veces diferenciable en x .

Demostración. Del teorema 1 tenemos que $\nabla \varphi_\gamma(x) = Q_\gamma(x) R_\gamma(x)$. Como Q es estrictamente continuo y R es estrictamente diferenciable, el producto de estas funciones es estrictamente diferenciable con

$$J\nabla \varphi_\gamma(x) = Q_\gamma(x) J R_\gamma(x)$$

Luego por el lema anterior se tiene el resultado:

$$J\nabla \varphi_\gamma(x) = \nabla^2 \varphi_\gamma(x) = \gamma^{-1} Q_\gamma(x) (I - P_\gamma(x) Q_\gamma(x)).$$

■

Teorema 3. Suponga que el supuesto 1 y 3 se satisfacen, y que g satisface el supuesto 4 (supuesto 5) en el punto $x \in \text{zer}\partial\varphi$. Entonces, para todo $\gamma \in (0, 1/L_f)$ los siguientes puntos son equivalentes:

(a) x es un fuerte mínimo local para φ ;

(b) Para todo $d \in S$, $\langle d, (\nabla^2 f(x) + M)d \rangle > 0$;

(c) $JR_\gamma(x)$ es similar a una matriz simétrica y definida positiva;

(d) $\nabla^2 \varphi_\gamma(x) \succ 0$;

(e) x es un fuerte mínimo local para φ_γ .

Demostración. Se sigue del teorema 2 que la Hessiana $\nabla^2 \varphi_\gamma(x)$ existe y es simétrica. Así mismo se sabe que para todo $d \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d^2 \varphi(x|0)[d] &= \langle d, \nabla^2 f(x)d \rangle + d^2 g(x | -\nabla f(x))[d] \\ &= \langle d, \nabla^2 f(x)d \rangle + \langle d, Md \rangle + \delta_S(d) \end{aligned}$$

(a) \Leftrightarrow (b): se sigue de la expresión anterior. (c) \Leftrightarrow (d): Sea $Q = Q_\gamma(x)$, vemos del lema 1 y del teorema 1 que $JR_\gamma(x)$ es similar a la matriz simétrica $Q^{-1/2} \nabla^2 \varphi_\gamma(x) Q^{-1/2}$ la cuál es definida positiva si y solo si $\nabla^2 \varphi_\gamma(x)$ lo es. (b) \Leftrightarrow (c): Del punto anterior sabemos que $JR_\gamma(x)$ tiene todos sus eigenvalores reales, y que puede ser fácilmente vista como similar a $\gamma^{-1}(I - QP)$, donde $P = P_\gamma(x)$. Se tiene que $\lambda_{\min}(I - QP) > 0$ si y solo si $Q^{-1} \succ P$. Para todo $d \in S$, usando el lema 1:

$$\begin{aligned} \langle d, (Q^{-1} - P)d \rangle &= \langle d, Q^{-1}d \rangle - \langle d, \Pi_S [I + \gamma M]^{-1} \Pi_S d \rangle \\ &= \langle d, Q^{-1}d \rangle - \langle \Pi_S d, [I + \gamma M]^{-1} \Pi_S d \rangle \\ &= \langle d, Q^{-1}d \rangle - \langle d, [I + \gamma M]^{-1} d \rangle. \end{aligned}$$

El último valor es positivo si y solo si $I + \gamma M \succ Q$ en S . Por definición de Q , se tiene entonces que se cumple si y solo si $\nabla^2 + M \succ 0$ en S , lo que corresponde a (b). (d) \Leftrightarrow (e): Es trivial pues $\nabla^2 \varphi_\gamma(x)$ existe. ■

Capítulo 2

Metodología

2.1. Interpretaciones de la envoltura Forward-Backward

Una interesante observación es que el FBE provee de una conexión entre los métodos del gradiente y el FBS, tal y como lo hace la envoltura de Moreau [11](#) para el algoritmo de punto proximal. Para ver esto, consideremos el problema:

$$\text{mín } g(x), \tag{2.1}$$

donde $g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, conjunto de funciones propias, cerradas convexas desde \mathbb{R}^n con valores en $\bar{\mathbb{R}}$. El algoritmo del punto proximal para resolver [2.1](#) es:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma g}(x^k).$$

Es bien conocido que el algoritmo del punto proximal puede ser interpretado como un método del gradiente para minimizar la envoltura de Moreau de g . De hecho gracias a [11](#), la iteración anterior puede ser expresada como:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma \nabla g^\gamma(x^k) \tag{2.2}$$

Esta idea provee una conexión entre la optimización diferenciable y no diferenciable, y lidera el descubrimiento de una variedad de algoritmos para el problema [2.1](#), como los métodos semisuaves de Newton, los mé-

todos quasi-Newton, etc.

Sin embargo, cuando se trabaja con problemas compuestos, aún cuando $prox_{\gamma f}$ y $prox_{\gamma g}$ son baratas de calcular, calcular el operador proximal de $\varphi = f + g$ es usualmente más difícil de encontrar que la resolución del problema en sí. Por otro lado, los métodos Forward - Backward splitting toman ventaja de la estructura del problema operando separado los dos sumandos.

La envoltura Forward - Backward provee una interpretación para el FBS como un método del gradiente, tal y como la envoltura de Moreau lo hace para el algoritmo del punto proximal. Específicamente, cuando f es C^2 , FBS puede ser interpretado como el siguiente método del gradiente para el FBE:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma(I - \gamma \nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla \varphi_\gamma(x^k).$$

Además, las siguientes propiedades son válidas para la envoltura de Moreau

$$g^\gamma \leq g, \quad \inf g^\gamma = \inf g, \quad \operatorname{argmin} g^\gamma = \operatorname{argmin} g.$$

Así la relación entre la envoltura de Moreau y la envoltura forward-backward son evidentes.

2.2. Métodos de búsqueda lineal Forward - Backward

Consideramos métodos de búsqueda lineal aplicados al problema de minimizar φ_γ , es decir resolver 1.2. Los requerimientos para estos métodos son a menudo restrictivos, incluido la convexidad o incluso la convexidad fuerte de la función objetivo, propiedades que desafortunadamente el FBE no satisface de manera general. En oposición a esto, FBS posee propiedades fuertes de convergencia y complejidad. Se muestra ahora que es posible explotar la estructura de la estructura compuesta del problema 1.2 e idear métodos de búsqueda lineal con las mismas propiedades de convergencia global y respuestas similares al FBS.

Algoritmo 1. MINFBE

Input: $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_0 > 0$, $\sigma \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1)$, $k \leftarrow 0$

- 1: if** $R_{\gamma_k}(x^k) = 0$ **then**
- 2: parar**
- 3: else**
- 4: seleccionar** d^k **tal que** $\langle d^k, \nabla \varphi_{\gamma_k}(x^k) \rangle \leq 0$
- 5: seleccionar** $\tau_k \geq 0$ **y establecer** $w^k \leftarrow x^k + \tau_k d^k$ **tal que** $\varphi_{\gamma_k}(w^k) \leq \varphi_{\gamma_k}(x^k)$
- 6: if** $f(T_{\gamma_k}(w^k)) > f(x^k) - \gamma_k \langle \nabla f(x^k), R_{\gamma_k}(x^k) \rangle + \frac{1-\beta\gamma_k}{2} \|R_{\gamma_k}(x^k)\|$ **then**
- 7: $\gamma_k \leftarrow \sigma\gamma_k$, **ir al paso 1****
- 8: else**
- 9: $x^{k+1} \leftarrow T_{\gamma_k}(w^k)$**
- 10: $\gamma_{k+1} \leftarrow \gamma_k$**
- 11: $k \leftarrow k + 1$, **ir al paso 1****
- 12: end if**
- 13: end if**

Como nos indica [5], el algoritmo 1, al cuál llamamos MINFBE, entrelaza pasos de descenso sobre el FBE, con pasos forward-backward. En particular, los pasos 4 y 5 proveen una rápida convergencia asintótica cuando las direcciones d^k son apropiadamente seleccionadas, mientras que el paso 9 asegura convergencia global: esto es de vital importancia, puesto que estas propiedades normalmente no se encuentran en métodos de búsqueda lineal estandar para minimizar funciones generales no convexas. Además, en el caso convexo se permite mostrar los resultados del ratio de convergencia global, los cuáles no son típicos para métodos de búsqueda lineal como las direcciones quasi-Newton. Anticipamos algunas de las propiedades favorables que MINFBE comparte con FBS:

- Sumabilidad al cuadrado de los residuos de funciones acotadas inferiormente φ .
- El ratio sublineal global del objetivo para φ convexa con conjuntos de nivel acotados.
- Convergencia global cuando φ tiene conjuntos de nivel acotados y satisface Kurdyka-Lojasiewicz (KL) en sus puntos críticos.

Más aún, a diferencia de métodos de búsqueda lineal ordinarios aplicados a φ_k , veremos en la proposición 4 que el MINFBE es un método de

descenso para ambos φ_γ y φ . Notemos que, a pesar del hecho de que el algoritmo opera sobre φ_γ , todas las propiedades requieren de supuestos o proveen resultados sobre φ , es decir en el problema original.

El parámetro γ que define la FBE se ajusta en el paso 6, para cumplir así la inecuación de la proposición 1, empezando desde un valor inicial γ_0 y decreciendo cuando sea necesario. El siguiente resultado muestra que γ_0 decrece solo un número finito de veces a lo largo de las iteraciones, y que por lo tanto, γ_k es positivo y eventualmente constante. En el resto del trabajo denotamos γ_∞ como el valor asintótico de γ_k .

Lema 2. *Sea $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la secuencia de parámetros de paso calculados por MINFBE, y sea $\gamma_\infty = \min_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$\gamma_k \geq \gamma_\infty \geq \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\} > 0.$$

Demostración. Sea $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la secuencia de parámetros de paso calculados por MINFBE. Para llegar a una contradicción, suponemos que k_0 es el elemento de \mathbb{N} más pequeño tal que

$$\gamma_{k_0} < \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\}.$$

Claramente, $k_0 \geq 1$. Aun más $\sigma^{-1}\gamma_{k_0}$ debe satisfacer la condición en el paso 6: para algún $w \in \mathbb{R}^n$ (correspondiente a $w^k = x^k + \tau_k d^k$ seleccionada antes regresando al paso 1 después de que la condición en el paso 6 se haya cumplido (la cuál puede diferir del valor final de w^k después del paso 6)).

$$\varphi(T_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w)) > \varphi_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w) - \frac{\beta\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}{2} \|R_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w)\|^2$$

Pero de la proposición 1(ii) también se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(T_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w)) &\leq \varphi_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w) - \frac{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}{2} (1 - \sigma^{-1}\gamma_{k_0} L_f) \|R_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w)\|^2 \\ &\leq \varphi_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w) - \frac{\beta\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}{2} \|R_{\sigma^{-1}\gamma_{k_0}}(w)\|^2 \end{aligned}$$

donde la última inecuación se sigue de que $\sigma^{-1}\gamma_{k_0} < (1 - \beta)/L_f$. Esto conlleva a una contradicción, por lo tanto $\gamma_k \geq \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\}$ como se quería. Que γ_k es asintóticamente constante pues la secuencia $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente. ■

Como γ_k es eventualmente constante, es útil trabajar con la siguiente versión del algoritmo 1 con menor coste computacional.

Algoritmo 2. MINFBE con constante γ

Input: $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in [0, 1)$, $\gamma \in (0, (1 - \beta)/L_f]$, $k \leftarrow 0$

1: if $R_\gamma(x^k) = 0$ **then**

2: parar

3: else seleccionar d^k **tal que** $\langle d^k, \nabla \varphi_\gamma(x^k) \rangle \leq 0$

4: seleccionar $\tau_k \geq 0$ **y establecer** $w^k \leftarrow x^k + \tau_k d^k$ **tal que** $\varphi_\gamma(w^k) \leq \varphi_\gamma(x^k)$

5: $x^{k+1} \leftarrow T_\gamma(w^k)$

6: $k \leftarrow k + 1$, **ir al paso 1**

7: end if

Notamos por $w(x^0)$ al conjunto de puntos de acumulación de la secuencia $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ producido por el MINFBE, empezando desde $x^0 \in \mathbb{R}^n$. El siguiente resultado establece que MINFBE es un método de descenso para el FBE φ_γ y para la función original φ , tal y como ocurre con FBS, la secuencia de residuos de punto fijo es sumable cuadrática si la función es acotada por debajo.

Proposición 4. [Convergencia subsecuencial] *Supongamos que el Supuesto 1 se satisface. Entonces, los siguientes ocurren para las secuencias generadas por MINFBE:*

- $\varphi(x^{k+1}) \leq \varphi(x) - \frac{\beta\gamma k}{2} \|R_{\gamma k}(w^k)\|^2 - \frac{\gamma k}{2} \|R_{\gamma k}(x^k)\|^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$;
- tanto $(\|R_{\gamma k}(x^k)\|)_{k \in \mathbb{N}}$ es sumable cuadrático, o $\varphi(x^k) \rightarrow \inf \varphi = -\infty$, en cuyo caso $w(x^0) = \emptyset$;
- $w(x^0) \subset \text{zer}\partial\varphi$, es decir, todo punto de acumulación de $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es crítico;
- si $\beta > 0$, entonces tanto $(\|R_{\gamma k}(x^k)\|)_{k \in \mathbb{N}}$ es sumable cuadrático y todo punto de acumulación de $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$, o $\varphi_\gamma(w^k) \rightarrow \inf \varphi = -\infty$, en cuyo caso $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es el siguiente resultado correspondiente a la convergencia de los residuales de punto fijo.

Teorema 4. *Supongamos que el supuesto 1 se satisface, y consideremos las secuencias generadas por MINFBE, Entonces*

$$\min_{i=0\dots k} \|R_{\gamma_i}(x^i)\|^2 \leq \frac{2}{(k+1)} \frac{\varphi(x^0) - \inf \varphi}{\min\{\gamma_0, \sigma(1-\beta)/L_f\}},$$

Si $\beta > 0$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\min_{i=0\dots k} \|R_{\gamma_i}(w^i)\|^2 \leq \frac{2}{(k+1)} \frac{\varphi(x^0) - \inf \varphi}{\min\{\gamma_0, \sigma(1-\beta)/L_f\}}.$$

Demostración. Si $\inf \varphi = -\infty$ entonces no es necesario probar nada. Sin embargo, como la secuencia $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente, se tiene:

$$\frac{(k+1)\gamma_k}{2} \left(\min_{i=0\dots k} \|R_{\gamma_i}(x^i)\|^2 + \beta \|R_{\gamma_i}(w^i)\|^2 \right) \leq \varphi(x^0) - \inf \varphi.$$

Por el lema 2 se tiene el resultado. ■

Analizamos ahora las propiedades de convergencia del MINFBE. Consideremos el caso en el que f es convexo. En [5] se discute también un caso general bajo el supuesto de que φ tiene la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz: en este caso $(d^k)_{k \in \mathbb{N}}$ debe estar uniformemente acotada respecto a $(R_{\gamma_k}(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ con el fin de asegurar la convergencia, condición que no es necesaria en el caso convexo. Cuando las direcciones son seleccionadas, digamos, acorde al esquema quasi-Newton $d^k = -B_k^{-1} \nabla \varphi_{\gamma}(x^k)$ delimitado por $(B_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ será necesario en favor de la convergencia global que la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz se cumple para φ . Sin embargo, esta última es una suposición más suave respecto a métodos de búsqueda lineal no convexa usuales, donde $(B_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ es requerido para tener condiciones de acotamiento o que $(d^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sea orientado por el gradiente.

Durante este trabajo se centra el estudio únicamente en el caso convexo.

2.2.1. Convergencia del método en el caso convexo

Probamos ahora que cuando f es convexo, MINFBE converge al valor objetivo óptimo con el mismo ratio sublineal que FBS. Se requiere convexidad para f y g , y no para φ_{γ} , la cuál puede no ser convexo incluso si

φ lo es.

Teorema 5 (Convergencia sublineal global). *Supongamos que el supuesto 1 y 2 se satisfacen, y que f es convexo. Entonces, por las secuencias generadas por MINFBE, tanto para $\varphi(x^0) - \inf \varphi \geq R^2/\gamma_0$ y*

$$\varphi(x^1) - \inf \varphi \geq \frac{R^2}{2\gamma_0}, \quad (2.3)$$

o para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\varphi(x^k) - \inf \varphi \geq \frac{2R^2}{k \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\}}. \quad (2.4)$$

Demostración. Por la proposición 3(iii) sabemos que $\varphi_\gamma \leq \varphi^\gamma$ para cualquier $\gamma > 0$. Combinando esto con la proposición 4, se tiene que

$$\varphi(x^{k+1}) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \varphi(x) + \frac{1}{2\gamma_k} \|x - x^k\|^2 \right\}, \quad (2.5)$$

y en particular, para $x_* \in \operatorname{argmin} \varphi$, que

$$\begin{aligned} \varphi(x^{k+1}) &\leq \min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \varphi(\alpha x_* + (1 - \alpha)x^k) + \frac{1}{2\gamma_k} \|x - x^k\|^2 \right\} \\ &\leq \min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \varphi(x^k) - \alpha(\varphi(x^k) - \inf \varphi) + \frac{R^2}{2\gamma_k} \alpha^2 \right\}. \end{aligned}$$

La última inecuación se sigue por la convexidad de φ . Si $\varphi(x^0) - \inf \varphi \geq R^2/\gamma_0$, entonces la solución óptima del problema para $k = 0$ es $\alpha = 1$, y obtenemos 2.3. De otro modo, la solución óptima es

$$\alpha = \frac{\gamma_k(\varphi(x^k) - \inf \varphi)}{R^2} \leq \frac{\gamma_k(\varphi(x^0) - \inf \varphi)}{R^2} \leq 1$$

y se obtiene

$$\varphi(x^{k+1}) \leq \varphi(x^k) - \frac{\gamma_k(\varphi(x^k) - \inf \varphi)^2}{2R^2}.$$

Sea $\lambda_k = \frac{1}{\varphi(x^k) - \inf \varphi}$ la inecuación anterior se expresa como

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}} \leq \frac{1}{\lambda_k} - \frac{\gamma_k}{2R^2\lambda_{k+1}^2}.$$

Multiplicando ambos lados por $\lambda_k \lambda_{k+1}$ se tiene que

$$\lambda_{k+1} \geq \lambda_k + \frac{\gamma_k}{R^2} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq \lambda_k + \frac{\gamma_k}{R^2},$$

donde la última inecuación sigue el hecho de que $(\varphi(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Por el lema 2 tenemos que:

$$\lambda_k \geq \lambda_0 + \frac{k \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\}}{2R^2} \geq \frac{k \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\}}{2R^2}$$

Así se obtiene 2.4. ■

Teorema 6. [Convergencia lineal local] Supongamos que el supuesto 1 se satisface. Supongamos más allá de que f es convexa y que x_* es un fuerte mínimo (global) de φ , es decir, que existe una vecindad N de x_* y $c > 0$ tal que

$$\varphi(x) - \varphi(x_*) \geq \frac{c}{2} \|x - x_*\|^2, \quad \forall x \in N. \quad (2.6)$$

Luego está $k_0 \geq 0$, tal que las subsecuencias $(\varphi(x^k))_{k \geq k_0}$ y $(\varphi_{\gamma_k}(w^k))_{k \geq k_0}$ producidas por MINFBE convergen Q -linealmente a $\varphi(x_*)$ con factor ω , donde

$$\omega \leq \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{c}{4} \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\} \right\} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

y $(x^k)_{k \geq k_0}$ converge R -linealmente a x_* . Aun más, si x_* es un fuerte (global) mínimo para φ_{γ_∞} , con γ_∞ como en el Lemma 2, entonces también $(\varphi(w^k))_{k \geq k_0}$ converge R -linealmente a x_* .

Demostración. Si suponemos 2.6, entonces φ tiene conjuntos de nivel acotados y $\text{zer}\partial\varphi = \{x_*\}$. En particular, $\omega(x^0) \neq \emptyset$, y la proposición 3(iii) asegura que $x^k \rightarrow x_*$. Entonces, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^k \in N$ para todo $k \geq k_0$. Inecuación 2.5 se cumple, y en particular para $k \geq k_0$ se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi(x^{k+1}) &\leq \min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \varphi(\alpha x_* + (1 - \alpha)x^k) + \frac{\alpha^2}{2\gamma_k} \|x_* - x^k\|^2 \right\} \\ &\leq \min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \varphi(x^k) + \alpha \left(\frac{\alpha}{c\gamma_k} - 1 \right) (\varphi(x^k) - \inf \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

donde la segunda inecuación se sigue por la convexidad de φ y 2.6. El mínimo de la última expresión se alcanza para $\alpha = \min\{1, \frac{c}{2}\gamma_k\}$, donde

$\gamma_k < 2c^{-1}$ se tiene la cota:

$$\varphi(x^{k+1}) - \inf \varphi \leq \left(1 - \frac{c}{4}\gamma_k\right)(\varphi(x^k) - \inf \varphi).$$

Por otro lado si $\gamma_k \geq 2c^{-1}$ se tiene la cota

$$\varphi(x^{k+1}) - \inf \varphi \leq (c\gamma_k)^{-1}(\varphi(x^k) - \inf \varphi) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x^k) - \inf \varphi).$$

Entonces $\varphi(x^{k+1}) - \inf \varphi \leq w(\varphi(x^k) - \inf \varphi)$, donde

$$\begin{aligned} w &\leq \sup_k \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{c}{4}\gamma_k \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{c}{4} \min\{\gamma_0, \sigma(1 - \beta)/L_f\} \right\} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right). \end{aligned}$$

La última inecuación se sigue por el Lema 2. Esto demuestra el resultado tanto en $(\varphi(x^k))_{k \geq k_0}$, como en $(\varphi_{\gamma_k}(w^k))_{k \geq k_0}$. De la cota en 2.6, se obtiene que $x^k \rightarrow x_*$ R-linealmente. Si la misma cota de error se establece para φ_{γ_∞} entonces también se tiene que $w^k \rightarrow x_*$ R-linealmente. ■

Corolario 2 (Convergencia lineal global). *Supongamos que el supuesto 1 se satisface, que f es convexa y que φ es fuertemente convexa (por ejemplo, f es fuertemente convexa). Entonces, las secuencias $(\varphi(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ y $(\varphi(w^k))_{k \in \mathbb{N}}$ generado por MINFBE converge Q-linealmente a φ_* mientras que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge R-linealmente a x_* .*

2.2.2. Precondicionamiento por BFGS

Ahora, es necesario prestar atención a la elección de la dirección d^k en el MINFBE. Aplicando métodos quasi-Newton clásicos al problema de minimización φ_γ , empezando por un x^0 dado.

$$\begin{aligned} d^k &= -B_k^{-1} \nabla \varphi_\gamma(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k + \tau_k d^k, \end{aligned}$$

donde B_k es no singular y escogida para aproximar la Hessiana de φ_γ en x^k , y el paso $\tau_k > 0$ es seleccionado con un procedimiento de búsqueda lineal que fuerce una condición suficiente de decrecimiento, durante los experimentos realizados en este trabajo se usa la búsqueda lineal

de Armijo. Sin embargo, las propiedades de convergencia de los métodos quasi-Newton son un tanto restrictivas. El algoritmo BFGS garantiza converger, en el sentido que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \varphi_\gamma(x^k)\|.$$

Cuando la función es convexa. Además, existen ejemplos de funciones no convexas para los cuales los métodos quasi-Newton no necesitan converger a puntos críticos.

Para superar esto, consideramos direcciones quasi-Newton en la estructuración del MINFBE. Los métodos resultantes poseen las mismas propiedades ya mencionadas en las dos anteriores secciones y convergencia superlineal asintótica bajo los supuestos usuales. Asumiremos, la diferenciabilidad (estricta) de $\nabla \varphi_\gamma$ y la no singularidad de $\nabla^2 \varphi_\gamma$ en el punto crítico. Las propiedades para f y g que garantizan estos requerimientos fueron discutidos en el Teorema 2 y 3: Si $\gamma = \gamma_\infty$ como en el Lema, entonces diferenciabilidad (estricta) de $\nabla \varphi_\gamma$ en $x_* \in \text{zer} \partial \varphi$ y la propiedad de definida positiva de $\nabla^2 \varphi_\gamma(x_*)$ se aseguran con el supuesto 4 (supuesto 5), x_* es un fuerte mínimo local para φ , y $\gamma < 1/L_f$.

El siguiente resultado da para el esquema algorítmico propuesto el análogo de la condición de Dennis-Moré. En los siguientes teoremas se verá como se alcanza la convergencia superlineal sin la necesidad de asegurar decrecimiento suficiente en el objetivo, o inclusive no es necesario considerar dirección de descenso profundo, sino simplemente basta las condiciones en los pasos 4 y 5. Estos contrastes con la requerimientos usuales de los métodos de búsqueda lineal clásicos, donde en cambio un descenso suficiente debe ser forzado en función de que las secuencias de iteraciones convergan. En MINFBE, de hecho, ese descenso es garantizado por la última actualización reflejada en el paso 9.

Teorema 7. *Supongamos que el supuesto 1 se satisface, y sea $\gamma > 0$. Supongamos que $\nabla \varphi_\gamma$ es estrictamente diferenciable en x_* y que $\nabla^2 \varphi_\gamma(x_*)$ es no singular. Sea $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sea una secuencia de matrices no singulares $\mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que para algún $x^0 \in \mathbb{R}^n$ las secuencias $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ generadas por*

$$w^k = x^k - B_k^{-1} \nabla \varphi_\gamma(x^k) \quad \text{y} \quad x^{k+1} = T_\gamma(w^k)$$

converge a x_* . Si $x^k, w^k \notin \text{zer}\partial\varphi$ para todo $k \geq 0$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(B_k - \nabla^2\varphi_\gamma(x_*))(w^k - x^k)\|}{\|w^k - x^k\|} = 0 \quad (2.7)$$

Entonces $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen \mathcal{Q} -superlinealmente a x_* .

Demostración. Como $w^k = x^k - B_k^{-1}\nabla\varphi_\gamma(x^k)$, tomando $k \rightarrow \infty$ y usando 2.7, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \frac{(B_k - \nabla^2\varphi_\gamma(x_*))(w^k - x^k)}{\|w^k - x^k\|} &= - \frac{\nabla\varphi_\gamma(x_k) + \nabla^2\varphi_\gamma(x_*)(w^k - x^k)}{\|w^k - x^k\|} \\ &= - \frac{\nabla\varphi_\gamma(x_k) - \nabla\varphi_\gamma(w_k) + \nabla^2\varphi_\gamma(x_*)(w^k - x^k)}{\|w^k - x^k\|} \\ &\quad - \frac{\nabla\varphi_\gamma(w_k)}{\|w^k - x^k\|}. \end{aligned}$$

Por diferenciabilidad estricta de $\nabla\varphi_\gamma$ en x_* se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\nabla\varphi_\gamma(w_k)\|}{\|w^k - x^k\|} = 0. \quad (2.8)$$

Por la no singularidad de $\nabla^2\varphi_\gamma(x_*)$ y como $w^k \rightarrow x_*$, existe $\alpha > 0$ tal que $\|\nabla\varphi_\gamma(x_k)\| \geq \alpha\|x^k - x_*\|$ para k suficientemente grande. Entonces se tiene que:

$$\frac{\|\nabla\varphi_\gamma(w_k)\|}{\|w^k - x^k\|} \geq \frac{\alpha\|w^k - x_*\|}{\|w^k - x^k\|} \geq \frac{\alpha\|w^k - x_*\|}{\|w^k - x_*\| + \|x^k - x_*\|}.$$

Usando 2.8 se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|w^k - x_*\|}{\|w^k - x_*\| + \|x^k - x_*\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|w^k - x_*\|/\|x^k - x_*\|}{\|w^k - x_*\|/\|x^k - x_*\| + 1} = 0,$$

de lo que obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|w^k - x_*\|}{\|x^k - x_*\|} = 0. \quad (2.9)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_*\| &= \|T_\gamma(w^k) - T_\gamma(x_*)\| \\ &= \|\text{prox}_{\gamma g}(w^k - \gamma\nabla f(w^k)) - \text{prox}_{\gamma g}(x_* - \gamma\nabla f(x_*))\| \\ &\leq \|(w^k - \gamma\nabla f(w^k) + x_* - \gamma\nabla f(x_*))\| \\ &\leq (1 + \gamma L_f)\|w^k - x_*\|. \end{aligned}$$

Aquí, la primera ineacuación se sigue de la propiedad no expansiva del proximal y la segunda de la Lipschitz continuidad de ∇F . Usando la última ineacuación y 2.9 se tiene que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge \mathcal{Q} -superlinealmente a x_* . ■

Para obtener convergencia superlineal de MINFBE cuando las direcciones quasi-Newton son usadas y la condición 2.7 en la secuencia $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se cumple, se debe verificar que eventualmente $\varphi_\gamma(x^k + d^k) \leq \varphi_\gamma(x^k)$, entonces el paso $\tau_k = 1$ es aceptado en el paso 5 y las iteraciones se reducen a aquellas descritas en el teorema 7.

Teorema 8. *Supongamos que el supuesto 1 se satisface, y que en MINFBE la dirección d^k se define como:*

$$d^k = -B_k^{-1} \nabla \varphi_{\gamma_k}(x^k),$$

para una secuencia de matrices no singulares $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfacen 7, con $\tau_k = 1$ siendo probado primero en el paso 5. Sea $\gamma = \gamma_\infty$ como en el Lema 2, y supongamos además que las secuencias $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen a un punto crítico x_* en el cuál $\nabla \varphi_\gamma$ es continuamente semi-diferenciable con $\nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) \succ 0$. Entonces $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen \mathcal{Q} -superlinealmente a x_* .

Demostración. Como $\nabla \varphi_\gamma$ es estrictamente diferenciable y continuamente semidiferenciable en x_* y como por el lema 2 $\gamma_k = \gamma_\infty > 0$. Entonces se asume que k es suficientemente largo para este propósito, notamos γ por γ_k por simplicidad. Notamos $g^k = \nabla \varphi_\gamma(x^k)$. En el algoritmo 2 se cumple que

$$w^k - x^k = \tau_k d^k = -\tau_k B_k^{-1} g^k,$$

y por 2.8 y la ineacuación de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{\|(B_k - \nabla^2 \varphi_\gamma(x_*))(w^k - x^k)\|}{\|w^k - x^k\|} &= \frac{\|g^k + \nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) d^k\|}{\|d^k\|} \\ &\geq \left| \frac{\langle d^k, g^k + \nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) d^k \rangle}{\|d^k\|^2} \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$-\langle g^k, d^k \rangle = \langle g^k, \nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) d^k \rangle + o(\|d^k\|^2). \quad (2.10)$$

Como $\nabla^2\varphi_\gamma(x_*)$ es definida positiva, entonces existe $\eta > 0$ tal que para un k suficientemente grande

$$-\langle g^k, d^k \rangle \geq \eta \|d^k\|^2. \quad (2.11)$$

Como $D\nabla\varphi_\gamma$ es continua en x_* y $x^k \rightarrow x_*$, se tiene

$$\|D\nabla\varphi_\gamma(x^k)[d^k] - \nabla^2\varphi_\gamma(x_*)d^k\| = o(\|d^k\|). \quad (2.12)$$

Luego, como $x^k \rightarrow x_*$, para k suficientemente grande $\nabla\varphi_\gamma$ es semidiferenciable en x^k y se puede extender φ_γ alrededor de x^k , para obtener:

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(x^k + d^k) - \varphi_\gamma(x^k) &= \langle g^k, d^k \rangle + \frac{1}{2} \langle d^k, D\nabla\varphi_\gamma(x^k)[d^k] \rangle + o(\|d^k\|^2) \\ &= \langle g^k, d^k \rangle + \frac{1}{2} \langle d^k, \nabla^2\varphi_\gamma(x_*)d^k \rangle + o(\|d^k\|^2) \\ &= \langle g^k, d^k \rangle + o(\|d^k\|^2), \end{aligned}$$

donde la segunda inecuación es gracias a 2.12, la última inecuación por 2.10. Entonces usando 2.11 para k suficientemente largo

$$\varphi_\gamma(x^k + d^k) - \varphi_\gamma(x^k) \leq -\frac{\eta}{2} \|d^k\|^2 < 0,$$

es decir, $\tau_k = 1$ satisface la condición de decrecimiento. Como consecuencia, MINFBE eventualmente se reduce a las iteraciones del teorema 7, y se prueba lo requerido. ■

La secuencia $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ puede ser computada usando actualizaciones BFGS, empezando por $B_0 \succ 0$, usar vectores:

$$s^k = w^k - x^k, \quad y^k = \varphi_\gamma(w^k) - \varphi_\gamma(x^k) \quad (2.13)$$

para calcular

$$B_{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} B_k + \frac{y^k(y^k)^T}{\langle y^k, s^k \rangle} - \frac{B_k s^k (B_k s^k)^T}{\langle s^k, B_k s^k \rangle} & \text{si } \langle s^k, y^k \rangle > 0 \\ B_k & \text{caso contrario.} \end{array} \right\}$$

Notemos que de este modo $B_k \succ 0$, para todo $k \geq 0$, y $d^k = -B^{-1}\nabla\varphi_\gamma(x^k)$

es siempre una dirección de descenso para φ_γ . No se necesita una inversión de matriz para calcular d^k en la práctica, puesto que esto es posible ejecutar actualizaciones inversas a 2.9 producidas directamente de la secuencia $(B_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$.

Dados los resultados de convergencia de MINFBE, vistos en la sección 2.2.1 probamos la convergencia superlineal para la actualización 2.9 bajo el siguiente supuesto.

Supuesto 6. *Cualquiera de los siguientes se cumple:*

- φ es convexa y tiene un fuerte mínimo local x_* ;
- φ tiene la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz en $\omega(x^0)$ con $\Psi(s) = \sigma s^{1-\theta}$, donde $\sigma > 0$ y $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, y en MINFBE el paso τ_k es acotado y hay $c > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|d^k\| \leq c \|\nabla \varphi_{\gamma_k}(x^k)\|$.

Teorema 9. *Supongamos que los supuestos 1 y 6 se cumplen, y que en MINFBE las direcciones d^k se definen como:*

$$d^k = -B_k^{-1} \nabla \varphi_{\gamma_k}(x^k), \quad \text{con } B_k \text{ como en 2.9}$$

y con $\tau_k = 1$ probado en el paso 5. Sea $\gamma = \gamma_\infty$ como en el lema 2 y supongamos además que la secuencia $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen a un punto crítico x_* en el cuál $\nabla \varphi_\gamma$ es semidiferenciable con $\nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) \succ 0$. Entonces $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen \mathcal{Q} -superlinealmente a x_* .

Demostración. Supongamos el supuesto 6 literal i se cumple. Como $x_* \in \text{zer} \partial \varphi$ y $\nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) \succ 0$, entonces se cumple que x_* es un fuerte minimizador local de φ_γ , en vista de las propiedades que cumple φ vistas en la proposición 1.i y 1.ii. Teorema 6 asegura que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge linealmente a x_* . Si por otro lado se cumple el supuesto 6 literal ii, entonces invocamos el teorema de convergencia con KL (como $\|\nabla \varphi_{\gamma_k}(x^k)\| \leq (1 + \gamma_0 L_f) \|R_{\gamma_k}(x^k)\|$) decimos que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(w^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge linealmente a un punto crítico, digamos a x_* . En ambos casos para un k suficientemente largo:

$$\frac{\|y^k - \nabla^2 \varphi_\gamma(x_*) s^k\|}{\|s^k\|} \leq L \max\{\|w^k - x_*\|, \|x^k - x_*\|\}$$

Como la convergencia es lineal, el lado derecho de la inecuación anterior es sumable. Se ve eventualmente que $\langle s^k, y^k \rangle > 0$, luego se cumple 2.8, y el resultado se sigue por lo demostrado en el Teorema 8. ■

2.3. Problema de Bingham

Un fluido de Bingham o también llamado un fluido visco-plástico es aquél que se caracteriza por poseer "una zona de flujo viscoso, una zona rígida y una frontera libre que las separa". Este tipo de fluidos necesitan de un esfuerzo significativo para que este pueda fluir. La salsa de tomate, el petróleo o la pasta dental son identificados como fluidos de Bingham [8].

El estudio del movimiento de este tipo fluidos No-Newtonianos es ampliamente utilizado en la optimización continua. En este caso, mediante el método Forward-Backward se busca modelar su comportamiento, para su estudio se recurrirá a una versión discretizada del problema conocido.

El problema en su forma más general es el siguiente:

Dado el funcional no suave $J_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ el problema de optimización está dado por:

$$\min_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n} J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 du + g \int_{\Omega} |\nabla u| du - \int_{\Omega} f u du \quad (2.14)$$

Donde g representa la constante de límite elástico y f representa la diferencia de presión que se mantendrá constante para los experimentos numéricos de este proyecto. Para aplicar el método Forward-Backward estudiado es necesario descomponer la función, como la suma de una función diferenciable y una función propia, convexa y posiblemente no diferenciable. Para el problema de Bingham se define entonces:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 du - \int_{\Omega} f u du \quad (2.15)$$

Donde F es una función diferenciable y convexa. Y también se define:

$$G(u) = g \int_{\Omega} |\nabla u| du \quad (2.16)$$

Como la función propia, cerrada, convexa y posiblemente no diferenciable. En las siguientes secciones se demuestra que el problema con esta descomposición si cumple los supuestos requeridos para la implementación del método Forward-Backward.

2.3.1. Discretización del Problema de Bingham

En la presente sección se procede a discretizar las funciones $F(u)$ y $G(u)$, para ello se hace uso del método de elementos finitos, basándonos en la sección 4.1 de [3].

Para la discretización de $F(u)$ introducimos el conocido resultado de [4], para la creación de la Matriz A de Stifness, determinada a partir de las coordenadas de los vertices del elemento triangular, construida mediante las funciones de MATLAB *stima3.m* y *stima4.m*.

Luego, sea T^h una triangulación regular. Sea Ω^h una aproximación poligonal de Ω , dado por: $\Omega^h = \cup_{\tau \in T^h} \bar{\tau}$. Definimos el siguiente espacio de dimensión finita asociado a la triangulación T^h .

$$W_0^h := \{v \in C(\Omega^h) : \nu|_{\tau} \in \mathbb{P}_1, \quad \forall \tau \in T^h \quad \text{y} \quad \nu = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega^h\},$$

donde \mathbb{P}_1 es el espacio de polinomios con grado menor o igual a 1. Notamos las funciones base de W_0^h por φ_j , $j=1, \dots, n$ y asumimos que la cardinalidad de T^h es m . Además, usamos la notación \vec{u} para los coeficientes de las funciones aproximadas u^h .

Usamos la siguiente versión discreta del gradiente:

$$\nabla^h := \begin{pmatrix} \partial_1^h \\ \partial_2^h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times n},$$

donde $\partial_1^h := \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}|_{\tau_k}$ y $\partial_2^h := \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}|_{\tau_k}$, para $i=1, \dots, n$ y $\tau_k \in T^h$. Notamos que $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}|_{\tau_k}$ y $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}|_{\tau_k}$ son los valores constantes de $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}$ en cada triángulo τ_k respectivamente. Consecuentemente, $\nabla^h \vec{u}$ es la aproximación

de $\nabla u^h(x)$.

Ahora introducimos la función $\xi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por,

$$\xi(w)_k = |(w_k, w_{k+m})|^T, \quad , k = 1, \dots, m.$$

Así calculamos $|\nabla u^h(x)|$ por $\xi(\nabla^h \vec{u})$. Notamos que $\xi(\nabla^h \vec{u})_k$ representa el valor de $|\nabla u^h(x)|$ en cada triángulo $\tau_k \in T^h$.

Para la aproximación del segundo término de 2.15, se sigue lo siguiente:

$$\int_{\Omega} f^h \varphi_j dx \approx \sum_{\tau \in T^h} Q_{\tau}(f \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n$$

donde la regla de cuadratura Q_{τ} está dada por

$$Q_{\tau}(v) = \frac{1}{3} \text{meas}(\tau) \sum_{i=1}^3 v(a_i), \quad i = 1, \dots, 3 \quad \text{los vértices de } \tau \in T^h.$$

La función $F(u)$ queda de la siguiente forma:

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle$$

Donde A es un función simétrica; y dado el producto escalar usual entonces se tiene que:

$$F(u) = \frac{1}{2} u^T A u - f^T u. \tag{2.17}$$

Luego, $G(u)$ discretizado resulta de la forma:

$$G(u) = g \sum_{k=1}^m |\tau_k| \xi(\nabla^h \vec{u})_k. \tag{2.18}$$

Donde $|\tau_k|$ representa la medida de cada triángulo.

De este modo el problema de Bingham discretizado a minimizar es el siguiente:

$$\min_{u \in \Omega} J(u) = \frac{1}{2} u^T A u + \sum_{k=1}^m |\tau_k| \xi(\nabla^h \vec{u})_k - f^T u \tag{2.19}$$

2.3.2. Demostración de supuestos necesarios para el Forward-Backward

Una vez definido el problema de optimización a resolver 2.14 y dada la descomposición $J(u) = F(u) + G(u)$ como en 2.15 y 2.16, y su respectiva discretización como en 2.17 y 2.18 procedemos a demostrar que se cumplen los supuestos requeridos para el uso del método Forward-Backward.

Demostración. Supuesto 1:

$F(u)$ es una función continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n , con gradiente

$$\nabla F(u) = Au - f$$

El gradiente es L-Lipschitz continuo. La función es convexa.

Por otro lado, $G(u)$ es una función propia, su dominio \mathbb{R}^n es no vacío y al ser expresada como una suma de normas se asegura que no toma valores en $-\infty$. Del mismo modo, dada su composición por una norma, la función es convexa pues toda norma lo es también. La función $G(u)$ no es diferenciable en todo punto.

Finalmente, como la suma de funciones convexas es convexa entonces $J(u) = F(u) + G(u)$ lo es [2].

■

Demostración. Supuesto 2:

$J(u)$ por lo demostrado en el supuesto anterior, se asegura su convexidad. Citamos entonces el resultado de [2], que nos dice que todo conjunto de nivel de una función convexa es acotado.

■

Demostración. Supuesto 3:

$F(u)$ es una función dos veces continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n , donde

$$\nabla^2 F(u) = A$$

■ Asumimos que se cumplen los supuestos 4 y 5 que nos habla acerca de resultados de epidiferenciabilidad de la función $G(u)$.

Demostración. Supuesto 6:

Se cumple el primer literal pues $J(u)$ es convexa, y dado Ω seleccionado

para la resolución del problema $J(u)$ tiene un fuerte mínimo local [1]. ■

En este caso para el problema escogido como la función objetivo es convexa entonces se tienen todas las propiedades de convergencia expresadas en la sección 2.2.1, con lo que se tiene convergencia Q-lineal. Luego bajo el preconditionamiento por BFGS se logra obtener una convergencia Q-superlineal. En el siguiente capítulo durante los resultados numéricos se tratará la diferencia computacional entre estos dos métodos.

Capítulo 3

Resultados numéricos

3.1. Implementación

Se procede a utilizar el lenguaje de Programación MATLAB para la implementación de los algoritmos. Durante este trabajo por simplicidad se decide implementar únicamente el Algoritmo 2, para el cuál el parámetro γ se mantiene constante durante todo el proceso. Se trabaja con dos versiones para este código, el primero en el que la dirección de descenso se establece como $-\nabla\varphi_{\gamma_k}(x_k)$ para cada iteración, y una segunda versión en la que se preconditiona el gradiente mediante la técnica BFGS. Para el cálculo del paso se hace uso de la técnica de búsqueda lineal de Armijo.

Es importante recalcar el papel que cumple la función *fminunc* del entorno de MATLAB en la ejecución del algoritmo, pues esta fue la seleccionada para la construcción del proximal que define la función T_γ

$$T_\gamma(x) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \ell_\varphi(u, x) + \frac{1}{2\gamma} \|u - x\|^2 \right\}.$$

La función *fminunc* encuentra el mínimo de un problema sin restricciones dado por:

$$\min_x f(x),$$

donde $f(x)$ devuelve un escalar. La función requiere como parámetros un objeto del tipo *fun* y un punto inicial x_0 . La función se inicializa con las

siguientes opciones:

```
1 options = optimoptions('fminunc','Algorithm','quasi-newton'  
    , 'HessianApproximation','lbfgs','Display','iter-detailed'  
    ');
```

Es decir, se aplica un método quasi-Newton con preconditionamiento L-BFGS para aproximar la Hessiana.

A continuación en los resultados numéricos observamos que el desempeño de nuestro algoritmo depende en gran medida de la búsqueda para el proximal creado a partir de esta función. Es por ello que en las tablas resultado se presentan las iteraciones que ésta realiza.

En el capítulo de Anexos se presentan todos los códigos aquí utilizados.

3.2. Resolución del Problema de Bingham

Nos basamos en el código presentado en [3] para la construcción del problema de Bingham, ello mediante la discretización mostrada en la sección 2.3.1.

En primer lugar, para este experimento se selecciona a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como el círculo unitario. Luego, es necesario fijar las coordenadas, el tamaño y la configuración de la triangulación. Así mismo se fija la constante g de límite elástico, durante este experimento se analiza que sucede con nuestro algoritmo para distintos valores de g , y la constante f que representa la diferencia de presión, la cuál toma un valor de 1 según como se determina en la sección 2.3.1. Del mismo modo es posible elegir el tamaño de la malla en 4 distintos niveles según su fineza $\{1, 2, 3, 4\}$. Para cada malla se tienen dos matrices C y E , que representan las coordenadas de los puntos, y la configuración de los triángulos respectivamente. Por ejemplo en C , se tienen las duplas (x_i, y_i) , que representan las coordenadas en los ejes x y y del primer punto. En E por otro lado se tienen las tripletas del tipo (l, k, n) , que representa los puntos con los que se configura el triángulo. De este modo, el número de filas de E son el total de triángulos de cada malla. A mayor nivel de fineza mayor es el número de triángulos con

los que se construye la malla.

Se obtiene entonces un problema del tipo 2.19, con

$$F(u) = \frac{1}{2}u^T Au - f^T u,$$

cuyo gradiente es:

$$\nabla F(u) = Au - f,$$

y su Hessiana:

$$\nabla^2 F(u) = A.$$

Por otro lado la función no suave es:

$$G(u) = g \sum_{k=1}^m |\tau_k| \xi(\nabla^h \vec{u})_k.$$

Procedemos entonces a la construcción del Forward-Bacward Envelope. Para ello se definen las siguientes funciones:

$$T_\gamma(u) = \text{prox}_{\gamma g}(u - \gamma(Au - f)),$$

$$R_\gamma(u) = \gamma^{-1}(u - T_\gamma(u)).$$

Con lo que usando la caracterización en 1.11, definimos el Forward-Bacward Envelope:

$$\varphi_\gamma(u) = u^T Au - f^T u + g(T_\gamma(u)) - \gamma \langle Au - f, R_\gamma(u) \rangle + \frac{\gamma}{2} \|R_\gamma(u)\|^2.$$

Luego para hallar su gradiente definimos

$$Q_\gamma(u) = I - \gamma A,$$

con lo que el gradiente resulta en

$$\nabla\varphi_\gamma(u) = (I - \gamma A)R_\gamma(u).$$

Una vez definidas estas funciones se procede a la ejecución del Algoritmo 2 de minimización para el FBE, para lo cual se inicializa el algoritmo con el siguiente parámetro $\beta = 0$. Se toma como punto inicial a la solución del problema $\Delta u_0^h = f^h$.

Tomando como referencia los parámetros necesarios para la ejecución del algoritmo 2, resta establecer el parámetro de suavización del algoritmo γ . Notamos que según las indicaciones del algoritmo, el intervalo de selección de γ es $(0, (1 - \beta)/L_f]$. Como $\beta = 0$, el intervalo sería $(0, 1/L_f]$ donde L_f representa la constante de Lipschitz continuidad del gradiente de f .

De este modo los parámetros de suavización se seleccionan en este intervalo tomando aquél que mejor solución otorgue a nuestro problema de Bingham.

Asimismo, notamos que el parámetro de suavización γ depende de la fineza de la malla, para obtener los resultados esperados se tiene que a mayor fineza más alto es el valor de γ necesario.

Durante este trabajo se resolverán las mallas de nivel 2 y 3 de fineza, la primera con un total de 128 triángulos y la segunda con un total de 512 triángulos, para problemas con diferentes valores para la constante elástica g .

El tiempo de ejecución de los algoritmos se los calcula mediante las funciones *tic* y *toc* del entorno de MATLAB.

3.2.1. Malla de nivel 2

El parámetro de suavización γ constante tomado para este nivel de malla fue $\gamma = 0,8$. El tamaño de la malla es $h \approx 0,0047$.

Con estas condiciones se ejecutan nuestros algoritmos de MINFBE, tanto en su versión más simple como con el preconditionamiento por BFGS. Los resultados se presentan en la tabla 3.1, para los distintos

valores de g :

g	Algoritmo	Tiempo de ejecución (s)	Error $\ R_\gamma(x)\ $	Iteraciones $fminunc$
0,2	MINFBE	21,216078	0	35
	MINFBE BFGS	23,266766	0	35
1	MINFBE	20,404718	0	23
	MINFBE BFGS	20,097626	0	23
1,2	MINFBE	35,302109	0	62
	MINFBE BFGS	35,201130	0	62

Cuadro 3.1: Resultados para el Problema de Bingham para la malla de nivel 2

A continuación se muestran las representaciones del fluido y los resultados obtenidos con nuestro algoritmo:

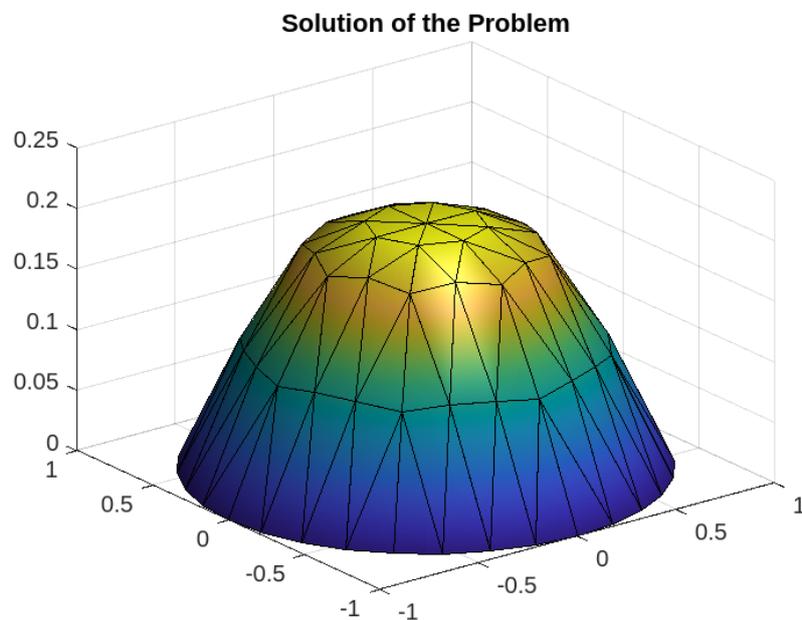


Figura 3.1: Malla 2: Fluido de Bingham con $g = 0,2$ y la solución por MINFBE

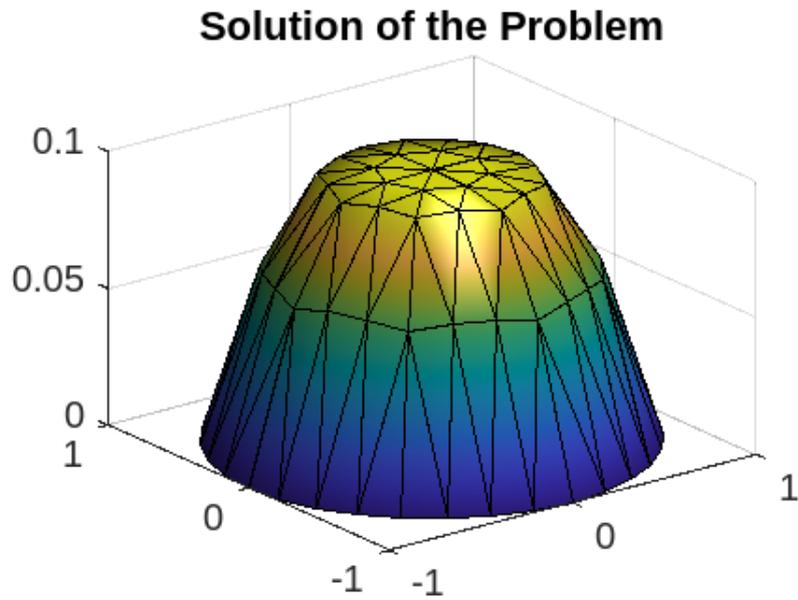


Figura 3.2: Malla 2: Fluido de Bingham con $g = 1$ y la solución por MINFBE

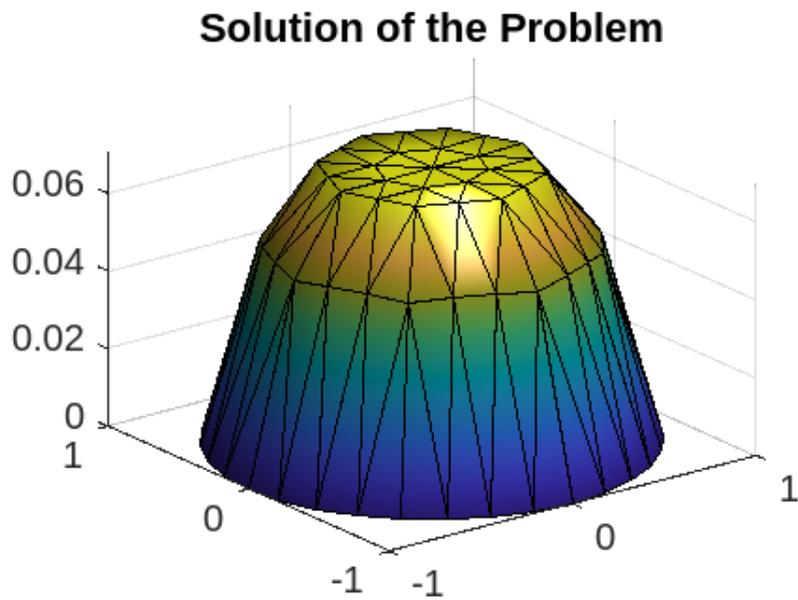


Figura 3.3: Malla 2: Fluido de Bingham con $g = 1,2$ y la solución por MINFBE

En cada una de las anteriores gráficas se observa la función de velocidad resultante. Se observa por ejemplo en el gráfico 3.2 y 3.3 que se ilustran las propiedades mecánicas esperadas del fluido, es decir, dado que el esfuerzo transmitido por una capa del fluido disminuye en el centro,

este se comporta como sólido en ese sector. Ello explica también el hecho del aplanamiento de la velocidad en el centro del tubo.

Por otro lado, en la tabla 3.1, se observa que el comportamiento del algoritmo es similar tanto en su versión sin preconditionamiento como con el preconditionamiento por BFGS. De igual forma, se encuentra el punto exacto que para el algoritmo tal que $R_\gamma(x) = 0$ con un esfuerzo computacional bajo. Las iteraciones de la función $fminunc$ decrecen para $g = 1$ y aumentan considerablemente para $g = 1,2$. Finalmente, a medida que se aumenta la constante de límite elástico aumenta el tiempo de ejecución de los algoritmos.

3.2.2. Malla de nivel 3

El parámetro de suavización γ constante tomado para este nivel de malla $\gamma = 1,1$. El tamaño de la malla es $h \approx 0,0029$.

Con estas condiciones se ejecutan nuestros algoritmos de MINFBE, tanto en su versión más simple como con el preconditionamiento por BFGS. Los resultados se presentan en la tabla a continuación para los distintos valores de g :

g	Algoritmo	Tiempo de ejecución (s)	Error $\ R_\gamma(x)\ $	Iteraciones $fminunc$
0,2	MINFBE	381,172787	0	50
	MINFBE BFGS	388,088721	0	50
1	MINFBE	637,534665	0	141
	MINFBE BFGS	535,051054	0	141
1,2	MINFBE	659,590068	0	175
	MINFBE BFGS	684,924017	0	175

Cuadro 3.2: Resultados para el Problema de Bingham para la malla de nivel 3

A continuación se muestran las representaciones del fluido y los resultados obtenidos con nuestro algoritmo:

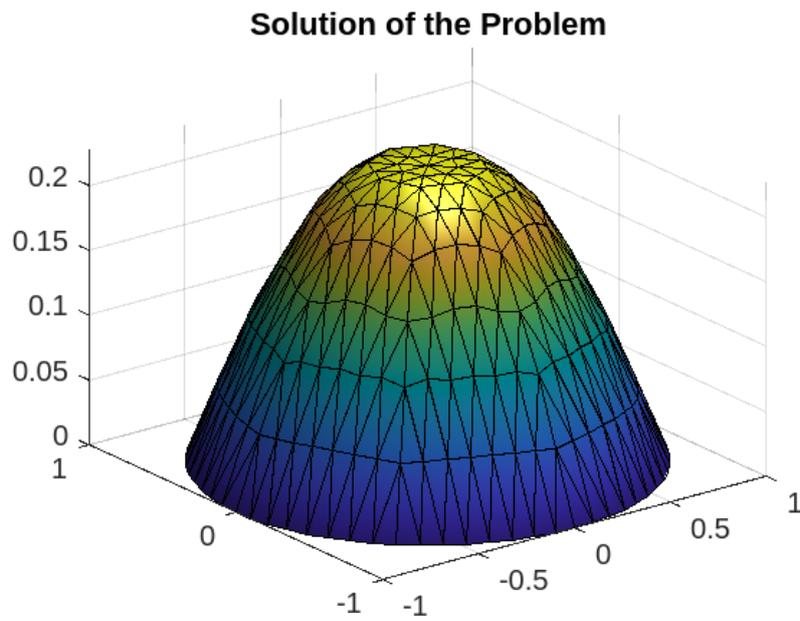


Figura 3.4: Malla 3: Fluido de Bingham con $g = 0,2$ y la solución por MINFBE

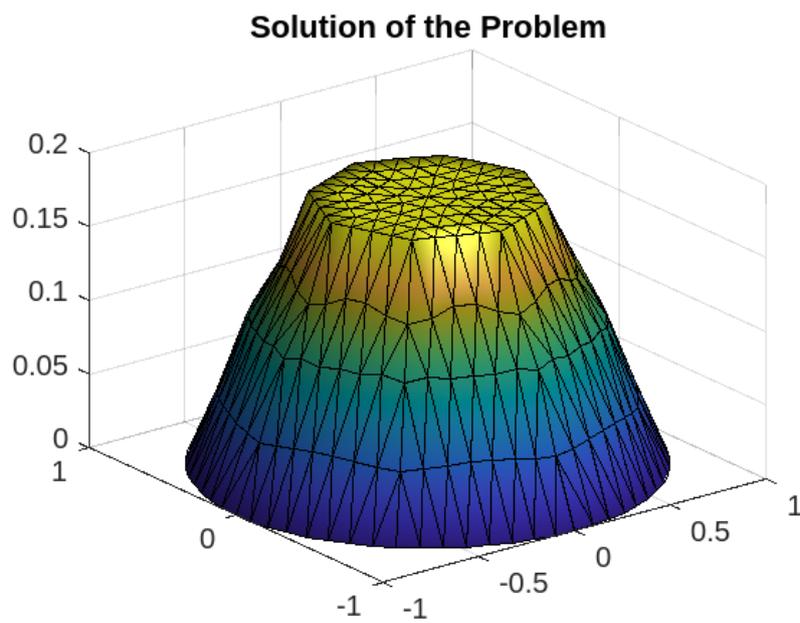


Figura 3.5: Malla 3: Fluido de Bingham con $g = 1$ y la solución por MINFBE

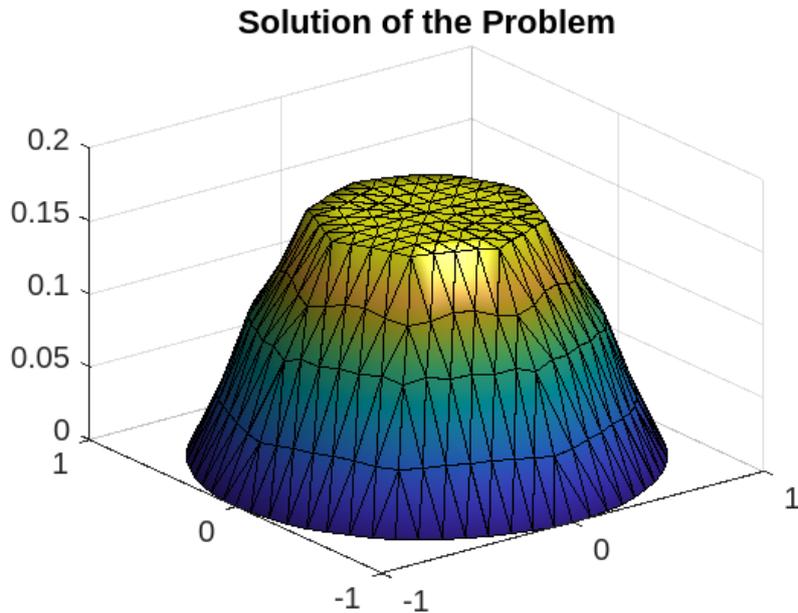


Figura 3.6: Malla 3: Fluido de Bingham con $g = 1,2$ y la solución por MINFBE

En las anteriores gráficas se observa la función de velocidad resultante. Se muestran las propiedades mecánicas esperadas del fluido, cuyo esfuerzo transmitido disminuye en el centro, es decir el material se comporta como sólido en ese sector. Ello explica también el hecho del aplanamiento de la velocidad en el centro del tubo, fenómeno que se ve claramente en las figuras 3.5 y 3.6.

Por otro lado, en la tabla 3.2, se observa que el comportamiento del algoritmo es similar tanto en su versión sin preconditionamiento como con el preconditionamiento por BFGS, al igual que en la Malla de nivel 2. Se encuentra el punto exacto que para el algoritmo pues se cumple que $R_\gamma(x) = 0$, sin embargo, se genera un alto esfuerzo computacional que aumenta a medida que sube la constante de límite elástico. Las iteraciones de la función *fminunc* aumentan a medida que la constante de límite elástico lo hace. Cuando $g = 1$, el preconditionamiento por BFGS mejora el tiempo de ejecución respecto al que no tiene preconditionamiento.

3.3. Conclusiones

El estudio de problemas de optimización no suave y la dificultad de usar los métodos usuales, motiva a la comunidad científica a la búsqueda de alternativas que permitan su resolución. Es por ello que basándose en la envoltura de Moreau, el método Forward-Backward junto con su nueva versión de la envoltura provee una interpretación para el Forward-Backward Splitting como un método del gradiente; basado en la descomposición de una función no suave en su parte diferenciable y no diferenciable.

Se establece así una nueva función φ_γ que depende de un parámetro de suavización γ para la cuál se puede aplicar métodos de búsqueda lineal Forward-Backward, ayudándonos de Armijo para conocer el paso y del gradiente negativo para la dirección de descenso, obteniéndose una convergencia \mathcal{Q} -lineal, mejorable con un preconditionamiento BGFS a una convergencia \mathcal{Q} -superlineal.

El algoritmo se prueba para un clásico problema de Bingham discretizado mediante la técnica de elementos finitos, código implementado en el ambiente de MATLAB. Se construye su envoltura Forward-Backward y se aplica el algoritmo, el cuál se comporta bien, pero cuya dificultad de convergencia aumenta según la fineza de la malla. Es necesario fijar un parámetro γ adecuado para obtener los mejores resultados esperados.

3.4. Recomendaciones

Se recomienda trabajar con un algoritmo que actualice el valor del parámetro de suavización γ en cada iteración, mediante métodos de búsqueda lineal. Además se propone probar el comportamiento del algoritmo para un problema no convexo para el cuál se necesite incluir otras propiedades de convergencia, como la propiedad Kurdyka-Lojasiewicz (KL).

Finalmente, se recomienda implementar un algoritmo propio para la construcción de T_γ definido por el operador proximal o utilizar una función del entorno de MATLAB diferente a *fminunc* que mejore el desempeño y el tiempo de ejecución respecto a lo mostrado durante este trabajo.

Capítulo A

Códigos de MATLAB

Presentamos el código en ambiente MATLAB correspondiente a la instauración del Problema de Bingham, descrito en [3]

```
1 if id==1
2     load meshC1
3 elseif id==2
4     load meshC2
5 elseif id==3
6     load meshC3
7 elseif id==4
8     load meshC4
9 end
10 %load meshcircular
11 A = sparse(size(C,1),size(C,1));
12 f = sparse(size(C,1),1);
13 %f0 = sparse(size(C,1),1);
14 %
15 % Laplaciano
16 %
17 for j=1:size(E,1)
18     A(E(j,:),E(j,:))=A(E(j,:),E(j,:))+stima3(C(E(j,:),:));
19 end
20 %
```

```

21 % Gradiente
22 %Dh1
23 for j=1:size(E,1)
24     D1(j,E(j,:))=Dh1(C(E(j,:),:));
25 end
26 %D2h
27 for j=1:size(E,1)
28     D2(j,E(j,:))=Dh2(C(E(j,:),:));
29 end
30
31 r=det([1,1,1; C(E(1,:),:)]');
32 for j = 1:size(E,1)
33     f(E(j,:)) = f(E(j,:))+r*funcion(inline('1','x','y'),sum(C
34         (E(j,:),:))/3)/6;
35 end
36 %for j = 1:size(E,1)
37     %f(E(j,:)) = f(E(j,:))+r*funcionp('f2',sum(C(E(j,:),:))/3,
38         p)/6;
39 %end
40 %
41 % Dirichlet conditions
42 %
43 A(unique(F),:)=sparse(length(A(unique(F),unique(F))),size(C
44     ,1));
45 A(unique(F),unique(F))=speye(length(A(unique(F),unique(F))
46     ));
47
48 f(unique(F))=sparse(length(f(unique(F))),1);
49 %f0(unique(F))=sparse(length(f0(unique(F))),1);
50
51 [a5 a6]=size(D1(:,unique(F)));
52 D1(:,unique(F))=sparse(a5,a6);
53 [a7 a8]=size(D2(:,unique(F)));
54 D2(:,unique(F))=sparse(a7,a8);
55 %

```

```

53 % gradiente
54 %
55 Gx=D1;
56 Gy=D2;
57 G=[D1;D2];
58 %
59 % funcion para inicializar u0=Lap\f0
60 %
61 u0=A\f;

```

Ahora presentamos la creación de las funciones necesarias para la definición del Forward-Backward Envelope, fueron realizadas en distintos scripts. Función F:

```

1 function Fu=func_f(u,A,f)
2 % u : solucion
3 % f : lado derecho
4 Ju1=(u'*A)*u;
5 %
6 % int_\Omega fu dx ==> int. aprox. con trapecio
7 %
8 Ju3=f'*u;
9 %
10 % funcional J(u)=1/p int_\Omega |nabla u|^ dx - int_\Omega
    fu dx
11 %
12 Fu=(1/2)*Ju1-Ju3;

```

Función G

```

1 function Gu=func_g(u,G,r,g)
2 % u : solucion
3 % G : gradiente
4 % g : constante limite elastico
5 % g/nabla u|^2
6 Gu=G*u;
7 nGu=xi(Gu);
8 %

```

```

9  %  $\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \Rightarrow \text{int. aprox. con pto.}$ 
    medio
10 %
11 Ju2=integrall(nGu,r);
12 %
13 Gu=g*Ju2;

```

Gradiente de F

```

1
2 function Fgrad=fgrad(u,C,E,F,G,f)
3 %
4 % u : solucion
5 % w : direccion
6 % G : gradiente
7 % E : triangulacion
8 %
9 Gu=G*u;
10 %
11 % matriz asociada al operador  $|\nabla u|^{(n-1)}(\nabla u, \nabla v)$ 
    v)
12 %
13 Mu=matulap(C,E,F,Gu,2);
14 %
15 %  $\int_{\Omega} |\nabla u|^{(n-1)}(\nabla u, \nabla v) dx$ 
16 %
17 Juv1=Mu*u;
18 %  $\int_{\Omega} fw dx$ 
19 %
20 Juv3=f;
21 %
22 %
23 Fgrad=Juv1-Juv3;

```

Hessiana de F

```

1
2 function Fgrad2=fgrad2(u,C,E,F,G)

```

```

3 %
4 % u : solucion
5 % w : direccion
6 % G : gradiente
7 % E : triangulacion
8 %
9 Gu=G*u;
10 %
11 % matriz asociada al operador |nabla u|^(n-1) (nabla u, nabla
    v)
12 %
13 Mu=matulap(C, E, F, Gu, 2);
14 %
15 % int_ \Omega |nabla u|^(n-1) (nabla u, nabla v) dx
16 %
17 Juv1=Mu;
18 Fgrad2=Juv1;

```

A continuación se muestra el algoritmo de minimización de FBE, cuya dirección de descenso es menos el gradiente. Usando la búsqueda lineal de Armijo.

```

1 tic
2
3 % Parametro de suavizacion
4 gamma = 1.1;
5
6 %Constante de limite elastico
7 g=1;
8
9 % Definir las funciones y sus gradiente
10 funcF = @(x) func_f(x, A, f);
11 grad_f = @(x) fgrad(x, C, E, F, G, f);
12 n=length(u0);
13 funcQ = @(x) eye(n) - gamma * fgrad2(x, C, E, F, G);
14 funcG = @(u) func_g(u, G, r, g);
15

```

```

16 % Punto original
17 x = u0;
18
19 % Definir la funcion regularizada con Moreau para construir
    el proximal de
20 % \ell_\phi := f + \nabla f^T(u-x) + g(u)
21 minimization_function = @(u) funcF(x) + grad_f(x)'*(u-x) +
    funcG(u) + (1/(2*gamma))*norm(u-x)^2;
22
23 options = optimoptions('fminunc','Algorithm','quasi-newton'
    , 'HessianApproximation','lbfgs','Display','iter-detailed
    ');
24
25 % Usar fminunc para minimizar y hallar el proximal que
    define T_\gamma
26 Tg = fminunc(minimization_function, x, options);
27 % Calcular R_\gamma
28 Rg = (1/gamma)*(x-Tg);
29 %Calcular Grad\phi_\gamma
30 Gradphig = funcQ(x)*Rg;
31
32 k=0;
33 tol=0.000001;
34
35 while norm(Rg)>tol
36     Gradphig = funcQ(x)*Rg;
37     dk=-Gradphig;
38     countarm=0;
39
40     gradf=Gradphig;
41     gradcost=gradf'*dk;
42
43     beta=1; armijo=1e5;
44     iter=0;
45     while armijo > 1e-4*beta*gradcost
46         iter=iter+1;

```

```

47     beta=1/(2^(countarm));
48     xinc=x+beta*dk;
49     cost1=funcF(x)+funcG(Tg)-gamma*grad_f(x)'*Rg+0.5*
        gamma*norm(Rg,2)^2;
50     cost2=funcF(xinc)+funcG(Tg)-gamma*grad_f(xinc)'*Rg
        +0.5*gamma*norm(Rg,2)^2;
51     armijo=cost2-cost1;
52     countarm=countarm+1;
53     end
54     arm=beta;
55     wk=x+arm*dk;
56     loop = 1;
57     exitflag = 10; % initialize the exitflag with a
        nonsense value
58     while exitflag ~= 1 && loop < 5
59         [Tg,~,exitflag,output] = fminunc(
            minimization_function, wk, options);
60         wk = Tg;
61         loop = loop + 1;
62     end
63     Rg = (1/gamma)*(wk-Tg);
64     xk=Tg;
65     k=k+1;
66     x=xk;
67 end
68 toc

```

Algoritmo de minimización de FBE, con preconditionamiento por BFGS para el gradiente. Usando la búsqueda lineal de Armijo.

```

1 tic
2 % Parametro de suavizacion
3 gamma = 1.1;
4
5 %Constante de limite elastico
6 g=1;
7

```

```

8  % Definir las funciones y sus gradiente
9  funcF = @(x) func_f(x,A,f);
10 grad_f = @(x) fgrad(x,C,E,F,G,f);
11 n=length(u0);
12 funcQ = @(x) eye(n)-gamma*fgrad2(x,C,E,F,G);
13 funcG = @(u) func_g(u,G,r,g);
14
15 % Punto original
16 x = u0;
17
18 % Definir la funcion regularizada con Moreau para construir
    el proximal de
19 % \ell_\phi := f + \nabla f^T(u-x) + g(u)
20 minimization_function = @(u) funcF(x)+grad_f(x)*(u-x)+
    funcG(u)+(1/(2*gamma))*norm(u-x)^2;
21
22 options = optimoptions('fminunc','Algorithm','quasi-newton'
    , 'HessianApproximation','lbfgs','Display','iter-detailed
    ');
23
24 % Usar fminunc para minimizar y hallar el proximal que
    define T_\gamma
25 Tg = fminunc(minimization_function, x, options);
26 % Calcular R_\gamma
27 Rg = (1/gamma)*(x-Tg);
28 %Calcular Grad\phi_\gamma
29 Gradphig = funcQ(x)*Rg;
30
31 k=0;
32 tol=0.000001;
33
34 Bf=eye(n,n);
35
36 while norm(Rg)>tol
37     Gradphig = funcQ(x)*Rg;
38     gf=Gradphig;

```

```

39 p=-Bf\gf;
40 countarm=0;
41
42 gradf=Gradphig;
43 gradcost=gradf'*p;
44
45 beta=1; armijo=1e5;
46 iter=0;
47     while armijo > 1e-4*beta*gradcost
48         iter=iter+1;
49         beta=1/(2^(countarm));
50         xinc=x+beta*p;
51         cost1=funcF(x)+funcG(Tg)-gamma*grad_f(x) '*Rg+0.5*
           gamma*norm(Rg,2)^2;
52         cost2=funcF(xinc)+funcG(Tg)-gamma*grad_f(xinc) '*Rg
           +0.5*gamma*norm(Rg,2)^2;
53         armijo=cost2-cost1;
54         countarm=countarm+1;
55     end
56 arm=beta;
57 dk=arm*p;
58 wk=x+dk;
59 loop = 1;
60 exitflag = 10; % initialize the exitflag with a
           nonsense value
61 while exitflag ~= 1 && loop < 5
62     [Tg,~,exitflag,output] = fminunc(
           minimization_function, wk, options);
63     wk = Tg;
64     loop = loop + 1;
65 end
66 Rg = (1/gamma)*(wk-Tg);
67 gf1=funcQ(wk)*Rg;
68 xk=Tg;
69 y=gf1-gf;
70 Bf=Bf+(1/(y'*dk))*(y*y')-(1/(dk'*Bf*dk))*(Bf*(dk*dk')*

```

```
        Bf);  
71     k=k+1;  
72     x=xk;  
73 end  
74  
75 toc
```

Referencias bibliográficas

- [1] A. Beck. *Introduction to Nonlinear Optimization*. Technion-Israel Institute of Technology, 2014.
- [2] S. Boyd. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] S. González-Andrade. A preconditioned descent algorithm for variational inequalities of the second kind involving the p-laplacian operator. *Comput Optim Appl*, 51:199–221, 2015.
- [4] S. Funken J. Albery, C. Carstensen. Remarks around 50 lines of matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 20:117–137, 1999.
- [5] P. Patrinos L. Stella, A. Themelis. Forward–backward quasi-newton methods for nonsmooth optimization problems. *Comput Optim Appl*, 67:443–487, 2016.
- [6] T. Rockafellar. First- and second-order epi-differentiability in nonlinear programming. *American Mathematical Society*, 307, 1988.
- [7] T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1997.
- [8] G. Torres. *Métodos numéricos para el Problema de Bingham*. PhD thesis, Universidad Nacional de Córdoba, 2002.