ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE PUNTOS CRÍTICOS
PROBLEMAS SEMILINEALES ELÍPTICOS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DANIEL ENRIQUE ULLOA MENDOZA

daniel.ulloa@epn.edu.ec

DIRECTOR: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE, PH.D.

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, AGOSTO 2023

CERTIFICACIONES

Yo, DANIEL ENRIQUE ULLOA MENDOZA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

DANIEL ENRIQUE ULLOA MENDOZA

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por DANIEL ENRIQUE ULLOA MENDOZA, bajo mi supervisión.

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE, PH.D.
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el producto resultante del mismo, es público y estará a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

DANIEL ENRIQUE ULLOA MENDOZA

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE, PH.D.

RESUMEN

En el siguiente trabajo se estudia la teoría de puntos críticos para dar la existencia de al menos una solución débil no nula para un problema semilineal elíptico supercuadrático ,luego de estudiar la teoria de puntos críticos se ha optado por usar el teorema del Paso de la Montaña para hallar la solución débil que buscamos, primero se definirán ciertas propiedades que serán útiles para la resolución del problema, después probaremos las hipótesis que se necesitan tener para que se cumpla el-Teorema del Paso de la Montaña, para probar dichas hipótesis debemos analizar el funcional asociado a nuestro problema, una vez que tengamos todas la hipótesis podremos concluir que nuestro problema tiene al menos una solución débil no nula.

Palabras clave: teoría de puntos críticos , supercuadrático, teorema del Paso de la Montaña.

ABSTRACT

In the following work, the theory of critical points is studied to establish the existence of at least one weak solution for a superquadratic semilinear elliptic problem. After examining the theory of critical points, we have chosen to use the Mountain Pass Theorem to find the desired weak solution. First, certain properties will be defined that will be useful for solving the problem. Then, we will test the hypotheses required for the mountain pass theorem to hold. To prove these hypotheses, we must analyze the functional associated with our problem. Once we have all the hypotheses satisfied, we can conclude that our problem has at least one weak solution.

Keywords: Theory of Critical Points, superquadratic, Mountain Pass Theorem.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado **1**

1.1. Objetivo general 1

1.2. Objetivos específicos 1

1.3. Alcance 2

1.4. Marco teórico 2

1.4.1. Notaciones 2

1.4.2. Cálculo diferencial para funcionales reales 4

1.4.3. Espacio L^p 5

1.4.4. Espacio de Sobolev H^1, H_0^1 5

1.4.5. Ejemplo de funcionales diferenciables 7

1.4.6. Puntos críticos 11

2. Metodología **13**

3. Resultados, conclusiones y recomendaciones **15**

3.1. Resultados 15

3.1.1. Hipótesis sobre f 15

3.1.2. Solución débil 17

3.1.3. Existencia de una solución débil no nula para el problema (1.1) 17

3.2. Conclusiones y recomendaciones 27
3.2.1. Conclusiones 27
3.2.2. Recomendaciones 27

Bibliografía **28**

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

Este componente se enfocará en la existencia de al menos una solución débil para un problema semilineal elíptico supercuadrático, se usará la teoria de puntos críticos, para usar esta teoria debemos analizar el funcional asociado a nuestro problema con la finalidad de hallar un punto critico, específicamente se utilizará el **Teorema** 1.4.4 más conocido como el Teorema del Paso de la Montaña.

1.1. Objetivo general

Estudiar la teoría de puntos críticos, para analizar la existencia de al menos una solución débil para un problema semilineal elíptico supercuadrático.

1.2. Objetivos específicos

1. Estudiar la información recopilada para encontrar un método en la teoría de puntos críticos que resuelva nuestro problema.

2. Encontrar una solución débil no nula del problema.

1.3. Alcance

Después de realizar un estudio de la información recopilada, en particular de los trabajos [2], [3], [4], [5], [6], [7], se establecerán conceptos básicos de introducción previos que ayuden al desarrollo de nuestro problema (1.1) que viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda f(x,u), & x \in B \\ u = 0, & x \in \partial B \end{cases} \tag{1.1}$$

donde B es la bola abierta de centro 0 radio 1, subconjunto de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, $\lambda > 0$ y la función $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ tiene las siguientes hipótesis,

H_1) $f \in C(B \times \mathbb{R})$ y es supercuadrática es decir,

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{\sigma} \quad a,b > 0\ ,\ 2 < \sigma + 1 < 2^*$$

H_2) $q, A \in L^{\infty}(B)$.

H_3) $q(x), A(x) \geq 0$.

Luego usaremos uno de los resultados pertenecientes a la teoría de puntos críticos específicamente el teorema del Paso de la Montaña, **Teorema**, 1.4.4, para mostrar la existencia de al menos una solución débil no nula. Finalmente, se realizará un análisis del problema (1.1) con la ayuda de los resultados obtenidos con anterioridad.

1.4. Marco teórico

A continuación se presentan las notaciones que se usan a lo largo del desarrollo del trabajo de integración.

1.4.1. Notaciones

- $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales.
- $\mathbb{N}$, conjunto de los números naturales.

- B, bola abierta de centro cero y radio 1 en $\mathbb{R}^N$
- ∂B, frontera de B.
- 2^*, exponente crítico de Sobolev para $p = 2$, viene dado por $\frac{2N}{N-2}$ y está definido para $N \geq 3$.
- U, conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$.
- H, espacio de Hilbert.
- E, espacio de Banach.
- E^*, dual topológico de E.
- $I^{'}$, derivada de Fréchet del funcional I.
- $I_G^{'}$, derivada de Gâteaux del funcional I.
- $\hookrightarrow$, inmersión o inyección entre espacios de Banach.
- c.t.p, casi todo punto.
- $C_0(U)$, subespacio de $C^1(U)$ con funciones a soporte compacto en U.
- $C^k(U)$, para $k = 1, 2, ...$ es el espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en U.
- $C^\infty(U)$, espacio de funciones infinitamente diferencibles en U.
- $C_0^\infty(U) = C^\infty(U) \bigcap C_0(U)$.
- $L^p(U)$, espacio de funciones p integrables en U.
- H^1, H_0^1, espacios de Sobolev.
- $|\cdot|$, norma euclidiana en $\mathbb{R}^N$.
- $\|\cdot\|_p$, norma del espacio $L^p(U)$.
- $\|\cdot\|_{H^1(U)}$, norma en el espacio $H^1(U)$.
- Sea X un espacio de Banach cualquiera, se denota a $\|\cdot\|_X$, como la norma asociada a X.

En las siguientes subsecciones se presentan definiciones, lemas, proposiciones, observaciones y teoremas que serán de utilidad para lograr el objetivo general.

1.4.2. Cálculo diferencial para funcionales reales

Definición 1.4.1 (Fréchet diferenciable[3], p.11). *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U un subconjunto abierto de E y el funcional $I : U \to \mathbb{R}$, decimos que I es Fréchet diferenciable o diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in E^*$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Por otro lado si I es diferenciable en $u \in U$ entonces $A \in E^*$ es único, además se suele escribir $I^{'}(u) = A$ de esta manera al funcional $I^{'}(u)$ se le conoce como diferencial de Fréchet de I en u.

Definición 1.4.2 (Derivada de Fréchet [3], p.12). *Sea $U \subseteq E$ un abierto si el funcional I es diferenciable para todo $u \in U$ entonces diremos que I es diferenciable en U, además se puede definir el siguiente operador*

$$\begin{array}{rccc} I^{'}: & U & \longrightarrow & E^* \\ & u & \mapsto & I^{'}(u) \end{array}$$

a $I^{'}$ se le conoce como la derivada de Fréchet de I, si $I^{'}$ es continuo tenemos que $I \in C^1(U)$.

Definición 1.4.3 (Gâteaux diferenciable[3] , p.14). *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq E$ un abierto y el funcional $I : U \to \mathbb{R}$, decimos que I es Gâteaux diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in E^*$ tal que para todo $v \in E$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av.$$

Por otro lado si I es Gâteaux diferenciable en $u \in U$ entonces $A \in E^*$ es único, además se suele escribir $I^{'}_G(u) = A$ de esta manera al funcional $I^{'}_G(u)$ se le conoce como diferencial de Gâteaux de I en u.

Observación 1.4.1 ([3] , p.14). *Por la definición de Fréchet diferenciable, se tiene que si I es diferenciable en $u \in U$ entonces I es Gâteaux diferenciable, además $I^{'}(u) = I^{'}_G(u)$, pero el recíproco es falso.*

Proposición 1.4.1 ([3] , p.14). *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq E$ un abierto y el funcional $I : U \to \mathbb{R}$ Si I es Gâteaux diferencible en $u \in U$ y $I^{'}_G$ es continuo en $u \in U$ entonces se tiene que $I^{'}(u) = I^{'}_G(u)$.*

1.4.3. Espacio L^p

Definición 1.4.4 ([4], p.92). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto cualquiera, dotado de la medida de Lebesgue se defiene al espacio $L^p(U)$ de la siguiente manera,*

- *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ definimos,*

$$L^p(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} : f \ es\ medible\ y \ \int\limits_U |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

con

$$\|f\|_{L^p(U)} = \|f\|_p = \left(\int\limits_U |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Sea $p = \infty$ definimos,*

$$L^\infty(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} : f \ \ es \ \ medible \ \ y \ \ \exists C > 0 \ \ tal\ que \ \ |f(x)| < C \ \ c.t.p \ \ en \ \ U \}.$$

con

$$\|f\|_{L^\infty(U)} = \|f\|_\infty = \inf \{ C : |f(x)| < C \ \ c.t.p \ \ en \ \ U \}.$$

Observación 1.4.2. *Nótese que la norma en $f \in L^\infty(U)$ es la del supremo esencial.*

Observación 1.4.3 ([4], p.92). *Si $f \in L^\infty(U)$ entonces tenemos que*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \ c.t.p\ en\ U.$$

Para analizar mas detalladamente estos espacios se recomienda ver el Capítulo 4 de ([4]).

1.4.4. Espacio de Sobolev H^1, H_0^1

A continuación se define el espacio de Sobolev con el cual se trabajará más adelante.

Definición 1.4.5 ([3],p.6). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$, un conjunto abierto cualquiera el* *espacio $H^1(U)$ está definido de la siguiente manera*

$$H^1(U) = \left\{ u \in L^2(U) : \exists g_1, ..., g_N \in L^2(U) \ : \ \int\limits_U u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int\limits_U g_i \varphi \right\}$$

$\forall \varphi \in C_0^1(U), \ \forall i = 1, ..., N$, *donde* $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$*, es la la derivada en el sentido de las distribuciones, de manera equivalente se tiene lo siguiente,*

$$H^1(U) = \left\{ u \in L^2(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U) \ \ i = 1, ..., N \right\}$$

Nótese que $H^1(U)$ es un espacio de Hilbert el cual tiene asociado el siguiente producto escalar

$$(u \mid v) = \int\limits_U \nabla u \nabla v dx + \int\limits_U uv dx,$$

por otro lado definimos la norma en $H^1(U)$ de la siguiente manera

$$\|u\|_{H^1(U)=} = \sqrt{(u \mid u)} = \left(\int\limits_U |\nabla u|^2 dx + \int\limits_U u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observación 1.4.4 ([3],p.6)**.** *$H_0^1(U)$ es la clausura de $C_0^\infty(U)$ en $H^1(U)$, es decir las funciones que estan en $H_0^1(U)$ son las que se hacen cero en ∂U siempre que ∂U se a regular y la cardinalidad de U sea finita.*

Observación 1.4.5. *Las propiedades que se dan a conocer en el siguiente trabajo para $H^1(U)$ también se verifican para el espacio de Sobolev $H_0^1(U)$.*

A continuación se da algunas propiedades del espacio $H_0^1(U)$

Teorema 1.4.1 (Teorema de inmersión [3],p.7-8)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$, entonces*

$$H_0^1(U) \hookrightarrow L^q(U) \ \ \forall q \in [1, 2^*].$$

La inmersión es compacta sí $q \in [1, 2^*)$.
De manera equivalente, decimos que $H_0^1(U) \hookrightarrow L^q(U)$, si existe una cons-

tante C que no depende de u tal que

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{H_0^1(U)} \quad \forall u \in H_0^1(U).$$

Teorema 1.4.2 (Desigualdad de Poincaré, [3],p.10). *Sea $U \in \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe $C > 0$ que solo depende de U, tal que*

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(U).$$

Observación 1.4.6 ([3],p.10). *Sea $U \in \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado, utilizando la desigualdad de Poincaré se puede probar que,*

$$\|u\|_{H_0^1(U)} = \left(\int_U |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(U),$$

es una norma equivalente a la norma en $H_0^1(U)$.

1.4.5. Ejemplo de funcionales diferenciables

A continuación se presentará dos ejemplos de funcionales diferenciables que serán de mucha ayuda para probar que el funcional asociado a nuestro problema es de clase C^1. Primero, se dan a conocer resultados que serán de ayuda para la resolución de uno de los ejemplos.

Teorema 1.4.3 (Convergencia dominada, [3],p.9). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un conjunto abierto y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(U)$ tal que*

1. *$u_k(x) \to u(x)$ c.t.p cuando $k \to \infty$;*
2. *existe $v \in L^1(U)$ tal que, $\forall k \in \mathbb{N}$ se tiene que, $|u_k(x)| \leq v(x)$ c.t.p en U.*

Entonces $u \in L^1(U)$ y $u_k \to u$ en $L^1(U)$ es decir $\int_U |u_k - u| dx \to 0$

Ejemplo 1.4.1. *Dado el funcional*

$$\begin{array}{rccl} J: & H^1(U) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & J(u) = a(u,u) \end{array}$$

con

$$\begin{array}{rcll} a: & H^1(U)\times H^1(U) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & a(u,v) = \int\limits_U \nabla u \nabla v dx + \int\limits_U q(x)uvdx \end{array}$$

Donde, $q \in L^\infty(U)$ *y* $q(x) \geq 0$, *entonces tenemos que* J *es de clase* C^1, *convexo y débilmente semicontinuo inferiormente.*

Demostración. (Ver,[6], p.31-32) □

Para mostrar el resultado anterior se usa lo siguiente,

Lema 1.4.1. *Sea* $U \in \mathbb{R}^N$ *un conjunto abierto y acotado además sean* $q \in L^\infty(U)$ *y* J *el funcional definido anteriormente entonces se tiene que,*

1. $J(u) \geq 0$ *para todo* $u \in H^1(U)$ *es decir a es positiva.*
2. J *es homogéneo de grado 2.*
3. $J(u) = J(|u|)$ *para todo* $u \in H^1(U)$

Demostración. Ver ([6],Lema 2.1.,p.30-32). □

Ejemplo 1.4.2 (Ejemplo 1.3.20 [3] , p.18)**.** *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ *un conjunto abierto y acotado. Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y asumamos que existen* $a, b > 0$ *tal que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}, \tag{1.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. *Defino*

$$F(t) = \int\limits_0^t f(s)ds,$$

y consideremos el funcional $K : H^1(U) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$K(u) = \int\limits_U F(u(x))dx,$$

entonces K *es diferenciable en* $H^1(U)$ *y*

$$K^{'}(u)v = \int\limits_U f(u(x))v(x)dx \ \ \forall u, v \in H^1(U).$$

El funcional K *puede tambien ser considerado en* $H_0^1(U)$, *sin ninguna suposición de regularidad en* ∂U, *y el mismo resultado se mantiene.*

Demostración. La demostración es tomada de ([3] , p.18). Para verificar esto, utilizamos un procedimiento común en este tipo de preguntas: primero demostramos que K es diferenciable en el sentido de Gâteaux, y luego mostramos que K'_G es continuo finalmente usamos la **Proposición** 1.4.1.
A partir de la suposición de crecimiento (1.2), se deriva fácilmente que $K(u)$ está bien definida a través de las desigualdades de Sobolev. Ahora verificamos que K es diferenciable en el sentido de Gâteaux. Tenemos que demostrar que para $u, v \in H^1(U)$ arbitrarios pero fijos se tiene que,

$$\lim_{t\to 0} \int_U \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx = \int_U f(u)v dx$$

Notemos que para casi todo punto $x \in U$ se tiene que,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x)$$

Por el teorema del valor medio existe un número real θ tal que $|\theta| \leq |t|$ y

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)) + \theta v(x) v(x)| \\ &\leq \left(a + b|u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}\right)|v(x)| \\ &\leq C\left(|v(x)| + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}\right).\end{aligned}$$

Como la funcion $v + |u|^{2^*-1}|v| + |v|^{2^*} \in L^1(U)$ por la convergencia dominada tenemos que,

$$\lim_{t\to 0} \int_U \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx = \int_U f(u)v dx$$

Dado que el lado derecho, como función de v, es un funcional lineal continuo en $H^1(U)$, este es diferencial de Gâteaux de K.
Finalmente mostremos que la función $K'_G : H^1(U) \to [H^1(U)]^*$ es continua para ellos consideramos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in H^1(U)$ tal que $u_k \to u$ en $H^1(U)$. A partir de aquí se considera una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a la cual la denotaremos igual que a la sucesión, para esta subsucesión podemos suponer lo siguiente

- $u_k \to u$ en $L^{2^*}(U)$ cuando $k \to \infty$.

- $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p en U cuando $k \to \infty$.
- Existe $w \in L^{2^*}(U)$ tal que $|u_k(x)| \leq w(x)$ c.t.p en U y para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando la desigualdad de Hölder tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\left|\left(K_G^{'}(u_k) - K_G^{'}(u)\right) v\right| &\leq \int\limits_U |f(u_k) - f(u)||v|dx \\
&\leq \left(\int\limits_U |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int\limits_U |v|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}
\end{aligned}$$

Luego, $\lim_{k\to\infty}|f(u_k) - f(u)| = 0$ c.t.p en U y

$$\begin{aligned}
|f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq C\left(1 + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq \left(1 + |w|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq \left(1 + |w|^{2^*} + |u|^{2^*}\right) \in L^1(U)
\end{aligned}$$

Entonces por la convergencia dominada,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_U |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = 0,$$

De modo que,

$$\begin{aligned}
\|K_G^{'}(u_k) - K_G^{'}(u)\| &= \sup\left\{\left|\left(K_G^{'}(u_k) - K_G^{'}(u)\right) v\right| : \ v \in H^1(U) \ , \ \|v\|_{H^1(U)} = 1\right\} \\
&\leq C\left(\int\limits_U |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \to 0.
\end{aligned}$$

Cuando $k \to \infty$, nótese que la norma en el lado izquierdo es la norma en el espacio $[H^1(U)]^*$. Recordemos que estamos trabajando con una subsucesión de la sucesión original $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, lo que realmente hemos demostrado es que para cada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_k \to u$ existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $K_G^{'}(u_{k_j}) \to K_G^{'}(u)$ en $[H^1(U)]^*$, de esta manera utilizando la **Proposición** 1.4.1 tenemos que K es diferenciable en $H^1(U)$ y

$$K^{'}(u)v = \int\limits_U f(u(x))v(x)dx \quad \forall u, v \in H^1(U)$$

□

1.4.6. Puntos críticos

Definición 1.4.6 (Punto crítico[1], p.7)**.** *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y el funcional* $I : E \to \mathbb{R}$ *tal que* $I \in C^1(E)$*, decimos que* $u \in E$ *es un punto crítico si,*

$$I^{'}(u) = 0.$$

De manera equivalente

$$I^{'}(u)(v) = 0 \ \forall v \in E.$$

Definición 1.4.7 (Condición de Palais-Smale [5], p.28)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert e* $I \in C^1(H)$ *se dice que* I *satisface la condición de Palais-Smale, si cualquier sucesión* $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *en H para la cual* $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y* $\lim_{n\to\infty} I^{'}(u_n) = 0$ *en* $H^{'}$*, admite una subsucesión convergente.*

Teorema 1.4.4 (Teorema del Paso de la Montaña [5],p.35)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $I \in C^1(H)$ *un funcional que satisface la condición de Palais-Smale,* ***Definición*** *1.4.7.*
Supongamos que $I(0) = 0$*,*

I_1) *existen constantes positivas* ρ *y* α *tales que* $\forall u \in H$ *con* $\|u\| = \rho$ *se tiene que*

$$I(u) > \alpha,$$

I_2) *existe un elemento* $e \in H$ *tal que*

$$\|e\| > \rho \ y \ I(e) \leq 0,$$

entonces I *posee un valor crítico* $c \geq \alpha$*. Además c puede ser caracterizado como*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I(g(t))$$

donde, $\Gamma = \{g \in C([0, 1]) : g(0) = 0, g(1) = e\}$

A continuación se presenta un resultado que nos ayudará a probar que el problema (1.1) cumple con la condición de Palais-Smale.

Proposición 1.4.2 ([7], Apéndice B,Proposición B.35)**.** *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, además sea* f *una función tal que* $f \in C(B \times \mathbb{R})$ *y es supercuadrática e* I *un funcional definido como en (3.3), si* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $H_0^1(U)$ *tal que* $I'(u_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *entonces* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Ver ([7], Apéndice B,Proposición B.35) □

Capítulo 2

Metodología

A continuación se describirá el método usado para resolver el problema (1.1)

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda f(x,u), & x \in B \\ u = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

donde, B es la bola abierta de centro 0 radio 1, subconjunto de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, $\lambda > 0$, y la función $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ tiene las siguientes hipótesis,

H_1) $f \in C(B \times \mathbb{R})$ y es supercuadrática es decir,

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{\sigma} \quad a, b > 0\ ,\ 2 < \sigma + 1 < 2^*$$

H_2) $q, A \in L^{\infty}(B)$.

H_3) $q(x), A(x) \geq 0$.

Se inicia mostrando que la función f que estamos tomando cumple H_1 es decir que $f \in C(B \times \mathbb{R})$ y tiene un crecimiento supercuadrático, luego describimos que es un punto crítico asociado al funcional de nuestro problema (1.1) al cual llamaremos I, esta descripción se realizá através de la formulación variacional, de esta manera se verá a que llamamos solución débil asociada al problema (1.1) .

Para probar la existencia de al menos una solución débil no nula del problema (1.1), usaremos el Teorema del Paso de la Montaña, para usar dicho teorema debemos ver que se verifiquen ciertas hipótesis, la primera es que el funcional asociado $I \in C^1(H_0^1(B))$, para probar esta hipótesis se hará uso de los dos ejemplos que se describen en una de las subsecciones.

La segunda hipótesis que se debe cumplir es la condición de Palais-Smale, **Definición** 1.4.7 para probar dicho resultado se hará uso de la **Proposición** 1.4.2 y las ideas que se usan en ([7],p.17).

Finalmente se probará que nuestro problema (1.1) tiene una geometría del tipo Paso de la Montaña es decir que verifica los dos literales del Teorema del Paso de la Montaña, **Teorema** 1.4.4.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Recordemos que nuestro problema viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda f(x,u), & x \in B \\ u = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

donde, B es la bola abierta de centro 0 radio 1, subconjunto de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, $\lambda > 0$, y la función $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ tiene las siguientes hipótesis,

H_1) $f \in C(B \times \mathbb{R})$ y es supercuadrática

H_2) $q, A \in L^\infty(B)$.

H_3) $q(x), A(x) \geq 0$..

3.1.1. Hipótesis sobre f

Se mostrará que tomando f en particular como en el problema (1.1), verifica la hipótesis H_1. Primero se mostrará que $f \in C(B \times \mathbb{R})$ y luego se mostrará que es supercuadrática.

Mostremos que $f \in C(B \times \mathbb{R})$, nótese que

$$\begin{array}{rccc} f: & B \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t. \end{array}$$

Demostración. Puesto que $A \in L^{\infty}(B)$ y $A(x) \geq 0$ para todo $x \in B$, tenemos que

$$A(x) \leq \|A\|_{\infty} \ \forall x \in B.$$

Por lo tanto $A \in L^{\infty}(B)$, es una función acotada en la bola abierta B, luego notemos que la funcion $|t|^{\frac{3}{2}}$ es continua para todo $t \in \mathbb{R}$ pues es una función de potencia y las funciones de potencia son continuas en su dominio, por otro lado la función t es continua en todo su dominio.
Recordemos que una función acotada multiplicada por una función continua es una función continua, puesto que $A \in L^{\infty}(B)$ es acotada y $|t|^{\frac{3}{2}}t$ es continua pues es la multiplicacion de funciones continuas, es continua de esta manera tenemos que $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ es continua en $B \times \mathbb{R}$ por lo tanto $f \in C(B \times \mathbb{R})$. $\square$

Ahora mostremos que $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ es supercuadrática es decir mostraremos que existen constantes $a, b \geq 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{\sigma} \ 2 < \sigma + 1 < 2^*.$$

Demostración. Para $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left|A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t\right| &\leq |A(x)||t|^{\frac{3}{2}}|t| \\ &\leq \|A\|_{\infty}|t|^{\frac{5}{2}} \\ &\leq \|A\|_{\infty}|t|^{2^*-1}, \end{aligned}$$

la última desigualdad es cierta puesto que para $N = 3$ o $N = 4$, la expresión $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$ toma valores mayores a $\frac{5}{2}$, por lo tanto basta considerar $a = 0$ y $b = \|A\|_{\infty}$, para que se verifique,

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{\sigma} \ 2 < \sigma + 1 < 2^*$$

$\square$

3.1.2. Solución débil

Suponiendo que existe $u \in C^2(\overline{B})$ tal que verifica (1.1), tenemos que para todo $v \in C_0^\infty(B)$, multiplicando v por (1.1) se tiene lo siguiente,

$$(-\Delta u)v + q(x)uv = \lambda A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uv. \tag{3.1}$$

Ahora integramos (3.1),

$$\int_B (-\Delta u)vdx + \int_B q(x)uvdx = \int_B \lambda A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uvdx, \tag{3.2}$$

ahora usando la fórmula de Green en (3.2), se sigue que

$$\int_B \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \int_B q(x)uvdx = \int_B \lambda A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uvdx,$$

como $v \in C_0^\infty(B)$, tenemos que $v(x) = 0$, para todo $x \in \partial B$, en consecuencia,

$$\int_B \nabla u \nabla v dx + \int_B q(x)uvdx = \int_B \lambda A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uvdx.$$

Así decimos que u es solución débil de (1.1) , si $u \in H_0^1(B)$ y verifica,

$$\int_B \nabla u \nabla v dx + \int_B q(x)uvdx = \int_B \lambda A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uvdx \quad \forall v \in H_0^1(B).$$

Recordemos que el objetivo es analizar la existencia de al menos una solución débil no nula de (1.1), que precisamente son los puntos críticos del funcional asociado a dicho problema, acontinuación se define el funcional.

3.1.3. Existencia de una solución débil no nula para el problema (1.1)

Para probar la existencia, de al menos una solución débil no nula se hará uso del Teorema del Paso de la Montaña, **Teorema** 1.4.4, para ello primero veremos cual es el funcional asociado al problema y mostraremos que dicho funcional es $C^1(H_0^1(B))$. Analizaremos los puntos críticos del siguiente funcional,

$$I(u) = \frac{1}{2}\int\limits_B |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_B q(x)u^2 dx - \frac{2}{7}\lambda \int\limits_B A(x)|u|^{\frac{5}{2}} u dx. \tag{3.3}$$

Antes de mostrar que $I \in C^1(H_0^1(B))$, primero veamos si el funcional I esta bien definido, es decir que $I(u) < +\infty$ para ello basta probar que cada integral en I es finita.

Demostración. Por la **Observación** 1.4.6 tenemos que

$$\frac{1}{2}\int\limits_B |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 < +\infty \tag{3.4}$$

Ahora analicemos el segundo término de I,

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_U q(x)u^2 dx \right| &\le \int\limits_U |q(x)||u^2| dx \\ &\le \|q\|_\infty \int\limits_U |u|^2 dx, \end{aligned}$$

Puesto que $u \in H_0^1(B)$, por definición de espacio de Sobolev $u \in L^2(U)$ es decir que $\int\limits_U |u|^2 dx < +\infty$ por tanto tenemos que

$$\int\limits_U q(x)u^2 dx < +\infty, \tag{3.5}$$

Por último mostremos que el tercer sumando es finito para ellos basta mostrar que

$$\int\limits_B A(x)|u|^{\frac{5}{2}} u dx < +\infty$$

utilizando el Teorema de Inmersión, **Teorema** 1.4.1 se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \int\limits_B A(x)|u|^{\frac{5}{2}} u &\le \int\limits_B |A(x)|u|^{\frac{5}{2}} u| \\ &\le \|A\|_\infty \int\limits_B |u|^{\frac{7}{2}} dx \\ &< +\infty. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por (3.4), (3.5), (3.6), tenemos que I está bien definido. $\square$

Observación 3.1.1. *Nótese que por el Teorema de Inmersión,* ***Teorema*** *1.4.1, para $N \geq 5$, $\int\limits_B A(x)|u|^{\frac{5}{2}}udx$ no esta bien definida pues $|u|^{\frac{7}{2}} \notin L^1(B)$.*

Ahora veremos que $I \in C^1(H_0^1(B))$.
Nótese que las dos primeras integrales son parte del funcional J definido en el **Ejemplo** 1.4.1 de esta manera utilizando la **Proposición** 1.4.1 tenemos que $J \in C^1(H_0^1(B))$, restaría probar que el tercer sumando en (3.3) es $C^1(H_0^1(B))$.
Para probar que el tercer sumando es $C^1(H_0^1(B))$ haremos uso de **Ejemplo** 1.4.2, notemos que $f(x,u) = A(x)|u|^{\frac{3}{2}}u$, es una función continua en $B \times \mathbb{R}$ y además f cumple H_2 es decir cumple la propiedad de ser super-cuadratica,así usando el **Ejemplo** 1.4.2 se tiene que el tercer sumando en (3.3) es $C^1(H_0^1(B))$. Puesto que I es la suma de funciones que estan en $C^1(H_0^1(B))$ entonces se tiene que $I \in C^1(H_0^1(B))$
Utilizando el **Ejemplo** 1.4.2 podemos calcular I' y este viene dado por,

$$I'(u)(v) = \int\limits_B \nabla u \nabla v dx + \int\limits_B q(x)uvdx - \lambda \int\limits_B A(x)|u|^{\frac{3}{2}}uvdx. \tag{3.7}$$

Ahora verificaremos que se cumple la condición de Palais-Smale, **Definición** 1.4.7 , para ello primero probaremos la siguiente propiedad que se describe acontinuación.

Proposición 3.1.1 ([2],p.363). *Dado $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ entonces existe $k > 0$ tal que para $|t| \geq k$, se tiene que*

$$F(x,t) \leq \mu f(x,t)t \quad con \quad \mu \in (0, \frac{1}{2}]$$

Demostración. Notemos que $F(x,t) = \frac{2}{7}A(x)|t|^{\frac{5}{2}}t$ y $f(x,t) = A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t$, de esta manera lo que queremos es hallar $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{2}{7}A(x)|t|^{\frac{5}{2}}t &\leq (\mu A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t)t \\ &= \mu A(x)|t|^{\frac{3}{2}}t^2 \end{aligned}$$

De la última desigualdad basta tomar $\mu = \frac{2}{7} \in (0, \frac{1}{2}]$, notemos que esto sucede para cualquier $k > 0$ pues no tenemos ninguna restricción para

t. $\square$

Continuando con la demostración de la condición de Palais-Smale, **Definición** 1.4.7,

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(B)$ cualquiera.Tenemos que probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, para ello utilizamos la **Proposición** 1.4.2, que nos dice que basta probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(B)$ es acotada.
Puesto que $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada por definición ([8],p.24), existe una constante $R > 0$ tal que ,

$$|I(u_n)| < R, \forall n \in \mathbb{N},$$

y en particular tenemos lo siguiente,

$$I(u_n) < R, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

en (3.8) usando la definición del funcional I de (3.3) tenemos que,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(B)} - \frac{2}{7}\lambda \int\limits_B A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}} u_n dx < R, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Además, puesto que, $\lim_{n\to\infty} I^{'}(u_n) = 0$ en $(H_0^1(B))'$ se tiene en particular lo siguiente,

$$\lim_{n\to\infty} I^{'}(u_n)(u_n) = 0 \ , \ en \ \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

De la definición de límite ([8],p.22) en particular tomando $\epsilon_n = \|u_n\|_{H_0^1(B)} > 0$, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $\forall n > N$ se tiene que,

$$|I^{'}(u_n)(u_n)| < \|u_n\|_{H_0^1(B)}, \forall n > N$$

y en particular se tiene,

$$I^{'}(u_n)(u_n) < \|u_n\|_{H_0^1(B)}, \forall n > N \tag{3.10}$$

De (3.10) y de la definición del funcional $I^{'}$ en (3.7) tenemos que,

$$I^{'}(u_n)(u_n) = \|u_n\|^2_{H_0^1(B)} - \lambda \int\limits_B A(x)|u_n|^{\frac{3}{2}} u_n u_n dx < \|u_n\|_{H_0^1(B)}, \forall n > N \tag{3.11}$$

Ahora combinaremos (3.9) y (3.11) siguiendo la ideas en ([7],p.11) ,

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{2}{7}I^{'}(u_n)(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1_0(B)} - \frac{2}{7}\lambda\int\limits_B A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx - \frac{2}{7}\|u_n\|^2_{H^1_0(B)} \\
&+ \frac{2}{7}\lambda\int\limits_B A(x)|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n dx \\
&= \frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1_0(B)} \\
&+ \frac{2}{7}\lambda\left[\int\limits_B A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n u_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx\right], \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Por otro lado, notemos que usando (3.8) y (3.10) en (3.12), tenemos lo siguiente,

$$
I(u_n) - \frac{2}{7}I^{'}(u_n)(u_n) \leq R - \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1_0(B)}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}
$$

Usando la desigualdad triangular en (3.13) tenemos que ,

$$
I(u_n) - \frac{2}{7}I^{'}(u_n)(u_n) \leq R + \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1_0(B)}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.14}
$$

De (3.12) y (3.14) se tiene,

$$
R + \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1_0(B)} \geq \frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1_0(B)} + \frac{2}{7}\lambda\left[\int\limits_B A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n u_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx\right], \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.15}
$$

Recordemos que, el objetivo en la demostración es probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $H^1_0(B)$ es acotada , para ello vamos analizar la integral que está en el lado derecho de (3.15) el cual es,

$$
\int\limits_B A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n u_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx \tag{3.16}
$$

Notemos que por la **Proposición** 3.1.1 y ([7],p.11) existe $k > 0$ tal que

(3.16), puede expresarse de la siguiente manera, para cualquier $k > 0$,

$$\int_B A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx = \int_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx$$
$$+ \int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx, \tag{3.17}$$

en (3.17), analizaremos los dos términos de la derecha de la igualdad, procedemos primero analizar el segundo término, el cual viene dado por,

$$\int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx, \tag{3.18}$$

En (3.18) utilizando la **Proposición** 3.1.1 vemos que,

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx \geq \\
&\geq \int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n + \frac{2}{7}|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n)dx \\
&\geq \frac{9}{7}\int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n^2dx \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Notemos que la última desigualdad de (3.19) es no negativa pues tenemos una integral de funciones no negativas, de esta manera tenemos que,

$$\int_{\{x\in B:|u_n(x)|\geq k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx \geq 0. \tag{3.20}$$

Ahora, analizaremos la primera integral de la derecha de (3.17), que viene dada por,

$$\int_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_nu_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx. \tag{3.21}$$

En (3.21) notemos que si abrimos la integral, la primer integral es no negativa pues es la integral de funciones no negativas, asi basta analizar que ocurre con la segunda integral que viene dada por,

$$-\int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx. \tag{3.22}$$

Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx &\leq \left|\int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx\right| \\
&\leq \int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} |A(x)||u_n|^{\frac{5}{2}}|u_n| dx \\
&\leq \int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} |A(x)||u_n|^{\frac{7}{2}} dx \\
&\leq \|A\|_\infty \int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} |u_n|^{\frac{7}{2}} dx \\
&\leq C\|A\|_\infty \|u_n\|^{\frac{7}{2}}_{H_0^1(B)}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

En (3.23) notemos que la última desigualdad sucede por el Teorema de Inmersión, **Teorema** 1.4.1, además $C\|A\|_\infty\|u_n\|^{\frac{7}{2}}_{H_0^1(B)}$ es finita $\forall n \in \mathbb{N}$, de esta manera $\forall n \in \mathbb{N}$ existe una constante C_n tal que ,

$$\int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx \leq C_n, \tag{3.24}$$

ahora usando (3.24) en (3.22) tenemos lo siguinete,

$$-\int\limits_{\{x\in B:|u_n(x)|<k\}} A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}}u_n dx \geq -C_n, \tag{3.25}$$

ahora usando (3.20) y (3.25) en la descomposición que se utilizó en (3.17) tenemos que,

$$\int\limits_B A(x)(|u_n|^{\frac{3}{2}}u_n u_n - |u_n|^{\frac{5}{2}}u_n)dx \geq -C_n. \tag{3.26}$$

Finalmente utilizando (3.26) en (3.15) ,se tiene lo siguiente,

$$R + \frac{2}{7}\|u_{\hat{n}}\|_{H_0^1(B)} \geq \frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H_0^1(B)} - \frac{2}{7}\lambda C_n \tag{3.27}$$

De (3.27) concluimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $H_0^1(B)$ es acotada.
En efecto, supongamos por el contrario que no es acotada es decir que

$$\|u_n\|_{H_0^1(B)} \to +\infty. \tag{3.28}$$

reescribimos (3.27), de la siguiente forma,

$$\frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H_0^1(B)} - \frac{2}{7}\lambda C_n - \frac{2}{7}\|u_{\hat{n}}\|_{H_0^1(B)} \leq R, \tag{3.29}$$

tomando la consideración de (3.28) en (3.29) tenemos una contradicción pues el crecimiento cuadrático es más rápido que el lineal, por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $H_0^1(B)$.
Por último, vamos a probar que el problema tiene una geometría del Paso de la Montaña es decir que se cumplen los dos literales del **Teorema** 1.4.4, se tiene directamente que $I(0) = 0$.
Mostremos el primer literal del **Teorema** 1.4.4, es decir mostremos que existen constantes positivas ρ y α tales que $\forall u \in E$ con $\|u\| = \rho$ se tiene que

$$I(u) > \alpha$$

Demostración. Notemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \int_B A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}} u_n dx &\leq \left| \int_B A(x)|u_n|^{\frac{5}{2}} |u_n| dx \right| \\ &\leq \int_B |A(x)||u_n|^{\frac{7}{2}} dx \\ &\leq \|A\|_\infty \int_B |u_n|^{\frac{7}{2}} dx \\ &\leq C\|A\|_\infty \|u\|^{\frac{7}{2}}_{H_0^1(B)}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

nótese que la última desigualdad de (3.30) se da por el Teorema de Inmersión, **Teorema** 1.4.1. Ahora sea $u \in H_0^1(B)$ cualquiera, usando (3.30), y la definición del funcional I tenemos que,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(B)} - \frac{2}{7}\lambda C\|A\|_\infty \|u\|^{\frac{7}{2}}_{H_0^1(B)} \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(B)} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{7}\lambda C\|A\|_\infty \|u\|^{\frac{3}{2}}_{H_0^1(B)} \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Para que $I(u) > 0$ debe cumplirse en (3.31), lo siguiente,

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{7}\lambda C\|A\|_\infty \|u\|_{H_0^1(B)}^{\frac{3}{2}} > 0, \tag{3.32}$$

despejando $\|u\|_{H_0^1(B)}$ en (3.32), se tiene que ,

$$\|u\|_{H_0^1(B)} < \left(\frac{7}{4\lambda C\|A\|_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3.33}$$

Así para que se verifique que $I(u) > 0$ debe cumplirse (3.33), de esta manera basta considerar $0 < \rho < \left(\frac{7}{4\lambda C\|A\|_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}$ y $\alpha := \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}\lambda C\|A\|_\infty \rho^{\frac{7}{2}}$, puesto que $u \in H_0^1(B)$ fue tomado arbitrariamente hemos probado que existen constantes positivas ρ y α tales que $\forall u \in H_0^1(U)$ con $\|u\|_{H_0^1(U)} = \rho$ se tiene que

$$I(u) > \alpha.$$

□

Ahora, probaremos que se cumple el literal 2 del Teorema del Paso de la Montaña, **Teorema** 1.4.4 es decir mostremos que existe un elemento $e \in H_0^1(B)$, tal que

$$\|e\|_{H_0^1(B)} > \rho \ y \ I(e) \leq 0$$

Demostración. Consideremos φ_1 la primera función propia de $-\Delta + q(x)$, asi usando esta función en nuestro problema tenemos lo siguiente,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 + q(x)\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, & x \in B \\ \varphi_1 = 0, & x \in \partial B \end{cases} \tag{3.34}$$

donde φ_1 en B es tal que $\varphi_1(x) > 0$ y $\varphi_1(x) = 0$ en $x \in \partial B$ y λ_1 es el primer valor propio asociado a φ_1, además $\int\limits_B \varphi_1^2 dx = 1$.De esta manera si multiplicamos a la primera ecuación de (3.34) por φ_1, obtenemos lo siguiente,

$$(-\Delta\varphi_1)\varphi_1 + q(x)\varphi_1^2 = \lambda\varphi_1^2 \tag{3.35}$$

luego integramos (3.35),

$$\int\limits_B (-\Delta\varphi_1)\varphi_1 dx + \int\limits_B q(x)\varphi_1^2 dx = \int\limits_B \lambda_1\varphi_1^2 dx. \tag{3.36}$$

Ahora usando la fórmula de Green en (3.36) se sigue que,

$$\int_B |\nabla \varphi_1|^2 dx + \int_B q(x)\varphi_1^2 dx = \int_B \lambda_1 \varphi_1^2 dx. \tag{3.37}$$

Ahora notemos lo siguiente, para todo $t > 0$ usando la definición de I se sigue que,

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_B |\nabla t\varphi_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_B q(x)t\varphi_1^2 dx - \frac{2}{7}\lambda \int_B A(x)|t\varphi_1|^{\frac{5}{2}} t\varphi_1 dx \\ &= \frac{1}{2}t^2 \int_B |\nabla \varphi_1|^2 dx + \frac{1}{2}t^2 \int_B q(x)\varphi_1^2 dx - \frac{2}{7}\lambda t^{\frac{7}{2}} \int_B A(x)|\varphi_1|^{\frac{5}{2}}\varphi_1 dx \\ &= \frac{1}{2}t^2 \left[\int_B |\nabla \varphi_1|^2 dx + \int_B q(x)\varphi_1^2 dx\right] - \frac{2}{7}\lambda t^{\frac{7}{2}} \int_B A(x)|\varphi_1|^{\frac{5}{2}}\varphi_1 dx \end{aligned} \tag{3.38}$$

ahora ulizando (3.37) en (3.38) tenemos lo siguiente,

$$I(t\varphi_1) = \frac{1}{2}t^2\lambda_1 \int_B \varphi_1^2 dx - \frac{2}{7}\lambda t^{\frac{7}{2}} \int_B A(x)|\varphi_1|^{\frac{5}{2}}\varphi_1 dx, \tag{3.39}$$

recordemos que $\int_B \varphi_1^2 dx = 1$, usando esto en (3.39), se sigue,

$$I(t\varphi_1) = \frac{1}{2}t^2\lambda_1 - \frac{2}{7}\lambda t^{\frac{7}{2}} \int_B A(x)|\varphi_1|^{\frac{5}{2}}\varphi_1 dx \tag{3.40}$$

ahora bien, lo que buscamos es que $I(t\varphi_1) < 0$, notemos que en (3.40) puesto que $t^{\frac{7}{2}}$ crece más rápido que t^2 tenemos que para cada $\lambda > 0$ existe t_λ suficientemente grande tal que $I(t_\lambda)\varphi_1 < 0$, de esta manera basta considerar $e := (t_\lambda + \rho)\varphi_1$ con esta elección de e se verifica que $\|e\|_{H_0^1(B)} > \rho$ y $I(e) > \alpha$ en efecto pues,

$$\|e\|^2_{H_0^1(B)} = \|(t_\lambda + \rho)\varphi_1\|^2_{H_0^1(B)} = |t_\lambda + \rho|^2 \|\varphi_1\|^2_{H_0^1(B)} \tag{3.41}$$

en (3.41) usando la definicion de la norma de $H_0^1(B)$, (3.37) y el hecho de que $\int_B \varphi_1^2 dx = 1$, se tiene que $\|e\|_{H_0^1(B)} = \lambda_1(t_\lambda + \rho) > \rho$ y además $I(e) > \alpha$. $\square$

Recapitulando hasta el momento se ha probado que $I \in C^1(H_0^1(B))$, también que se verifica la condición de Palais-Smale es decir la **Defini-**

ción 1.4.7 , además que nuestro problema (1.1) tiene una geometría del Paso de la Montaña es decir que se verifican los dos literales del **Teorema** 1.4.4 de esta manera vemos que se cumplen todas las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña, **Teorema** 1.4.4 por lo tanto se concluye que nuestro problema 1.1 tiene al menos una solucion debil no nula. □

3.2. Conclusiones y recomendaciones

3.2.1. Conclusiones

- Mediante el Teorema del Paso de la Montaña podemos concluir que existe al menos una solución débil no nula para el problema semilineal elíptico supercuadrático (1.1), es decir se ha encontado un método en la teoria de puntos críticos que resuelve nuestro problema.

3.2.2. Recomendaciones

- No abordar el problema bajo supuestos de que el funcional asociado al problema (1.1) es coercivo, pues esta propiedad no se tiene para el funcional I. Supongamos que I si es coercivo, asi para toda sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(B)$ tenemos que $I(u_n) \to +\infty$ cuando $\|u_n\|_{H_0^1(B)} \to +\infty$,utilizando la definición del funcional I y el Teorema de Inmersión se tiene que $I(u_n) < +\infty$ cuando $\|u_n\|_{H_0^1(B)} \to +\infty$, lo cual es una contradicción por tanto, I no es coercivo.

- En la teoría de puntos críticos existen otros métodos por los cuales se puede abordar el problema (1.1), se recomienda usar por el ejemplo el Teorema del Punto Silla planteado en ([5], p.38) debido a que este teorema al igual que el teorema del Paso de la Montaña involucra la condición de Palais-Smale.

- Si cambiamos la hipótesis de que $f \in C(B \times \mathbb{R})$ por $f \in C^1(B \times \mathbb{R})$ se podría abordar el problema (1.1),utilizando el Capítulo 3 de ([5]) que está relacionado con la teoría de puntos críticos, bajo este supuesto.

Referencias bibliográficas

[1] Antonio Ambrosetti. *Critical points and nonlinear variational problems.* Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 49, 1992.

[2] Antonio Ambrosetti and Paul Rabinowitz. *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications.* Journal of functional analysis 14, 349-381, 1973.

[3] Marino Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners.* Springer, 2011.

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science & Business Media, 2011.

[5] Jorge Cossio. *Introduccion a la teoia de puntos criticos con aplicaciones a problemas elipticos semilineales.* Universidad Nacional de Colombia, 2000.

[6] Shirley Quisingo. *Existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales.* Escuela Politécnica Nacional, 2022.

[7] Paul Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1988.

[8] Germán Rojas. *Lecturas de Análisis Funcional.* Escuela Politécnica Nacional, 2018.