

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSICIÓN DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS CON
DINÁMICAS PROBABILISTAS A ECUACIONES
DIFERENCIALES PARCIALES

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

WILLIAM SANTIAGO BOCONZACA ORTEGA

william.boconzaca@epn.edu.ec

DIRECTORA: ADRIANA UQUILLAS ANDRADE

adriana.uquillas@epn.edu.ec

CODIRECTOR: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA

miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, JULIO, 2024

DECLARACIÓN

Yo, WILLIAM SANTIAGO BOCONZACA ORTEGA declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

WILLIAM SANTIAGO BOCONZACA ORTEGA

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por William Santiago Boconzaca Ortega, bajo mi supervisión.

ADRIANA UQUILLAS ANDRADE
DIRECTORA

MIGUEL YANGARI SOSA
CODIRECTOR

DEDICATORIA

En memoria de Charlotte...

Agradecimientos

Agradezco, a Adriana Uquillas, Miguel Yangari, mi madre, María Boconzaca.

Índice general

1. Introducción	1
2. Cálculo fraccionario	5
2.1. La fórmula de Grünwald	6
2.2. La derivada de Caputo	15
2.2.1. Comparación de las dos formas	22
3. Semigrupos infinitamente divisibles	25
3.1. Distribuciones infinitamente divisibles	25
3.2. Funciones características estables	28
3.3. Semigrupos	39
3.3.1. Algunas generalidades acerca de espacios de Banach	39
3.3.2. El generador de un semigrupo	41
3.3.3. Operadores diferenciales en semigrupos infinitamente divisibles	45
4. Distribuciones límite estables	53
4.1. Aproximación de Poisson	54
4.2. Aproximación de Poisson desplazada	59
4.3. Distribuciones límite estables	63
4.3.1. Arreglos triangulares	63
4.3.2. Límites estables unilaterales	68
4.3.3. Límites estables bilaterales	72
4.3.4. Procesos estables de Lévy	76
5. Modelos de difusión	80
5.1. El modelo de difusión tradicional	81
5.2. El modelo de difusión anómala	92
5.3. Un modelo de difusión anómala más general	102

6. Simulaciones	106
6.1. Aproximando el proceso de Lévy	106
6.2. Solución numérica de la ecuación de difusión anómala	113
7. Conclusiones	123

Índice de figuras

6.1. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.5$	109
6.2. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.1$	109
6.3. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.7$	110
6.4. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.7$	111
6.5. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.7$	112
6.6. Caminata aleatoria con ley de potencias, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.7$	112
6.7. Simulación numérica de la solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p = q$	120
6.8. Simulación numérica de la solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p > q$	121
6.9. Simulación numérica de la solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p < q$	121

Resumen

En el presente trabajo de investigación, empezaremos por realizar un breve estudio de un procedimiento intuitivo, donde el Teorema del Límite Central (TLC) afirma que el movimiento Browniano eventualmente emerge como el límite hidrodinámico de cualquier caminata aleatoria con saltos de varianza finita. Una herramienta que se utilizará en este procedimiento es la transformada de Fourier y nos permitirá apreciar un resultado conocido, el cual es que las funciones de densidad del movimiento Browniano resuelven la ecuación tradicional de reacción-difusión. En este sentido, estamos interesados en conocer el tipo de proceso estocástico que eventualmente emergerá de una caminata aleatoria con saltos que siguen una distribución de Pareto o ley de potencias. Aquí nos encontraremos con un problema, los saltos de una caminata aleatoria con saltos de Pareto tienen varianza infinita, lo cual en este caso nos impide utilizar el TLC. Sin embargo, mediante una expansión adecuada de series de Taylor es posible utilizar la metodología hecha para el movimiento Browniano, para mostrar que este tipo de caminatas aleatorias eventualmente se comportan como un proceso estable y sus funciones de densidad resuelven un tipo particular de modelo conocido como ecuación de reacción-difusión anómala o simplemente ecuación de difusión anómala.

El modelo de difusión anómalo involucra una derivada temporal estándar y una derivada espacial fraccionaria, por lo que será necesario estudiar algunas propiedades básicas del cálculo fraccionario para justificar que las funciones de densidad de un proceso estable resuelven las ecuaciones del modelo de difusión anómalo.

Si bien es cierto, la metodología que se sigue para una caminata aleatoria con saltos de varianza finita o con saltos de Pareto arrojan evidencia que conecta la teoría de las ecuaciones diferenciales con la teoría de procesos estocásticos, es necesario formalizar esto mediante la teoría adecuada. En este sentido, se estudiarán los resultados adecuados de la teoría de distribuciones estables y semigrupos, lo cual nos permitirá conectar, de una manera elegante y formal el cálculo fraccionario y los procesos estocásticos involucrados en este trabajo.

Abstract

In this research project, we will begin by conducting a brief study of an intuitive procedure, where the Central Limit Theorem (CLT) states that the Brownian motion eventually emerges like the hydrodynamic limit of any random walk with jumps of finite variance. A tool that will be used in this procedure is the Fourier transform and it will allow us to appreciate a known result, which is that the density functions of the Brownian motion solve the traditional reaction-diffusion equation. In this sense, we are interested in knowing the kind of stochastic process that will eventually emerge from a random walk with jumps that follow a Pareto distribution or power law. Here we will find a problem, the jumps of a random walk with Pareto jumps have infinite variance, which in this case prevents us from using the TLC. However, by means of a suitable Taylor series expansion, it is possible to use the methodology made for the Brownian motion to show that this type of random walks eventually behaves like a stable process and its density functions resolve a particular type of model known as anomalous reaction-diffusion equation or simply anomalous diffusion equation.

The anomalous diffusion model involves a temporal derivative and a fractional spatial derivative, so it will be necessary to study some basic properties of fractional calculus to justify that the density functions of a stable process solve the equations of the anomalous diffusion model.

Although it is true, the methodology that is followed for a random walk with finite variance jumps or Pareto jumps provide evidence that connects the theory of differential equations with the theory of stochastic processes, it is necessary to formalize this through the appropriate theory. In this sense, the adequate results of the theory of stable distributions and semigroups will be studied, which will allow us to connect in an elegant and formal way the fractional calculus and the stochastic processes involved in this work.

Capítulo 1

Introducción

Para modelar un fenómeno físico, siempre es necesario realizar supuestos que nos faciliten el manejo de la matemática involucrada en el modelo. Sin embargo, simplificar demasiado estos supuestos no es factible, pues el modelo que se realice no explicaría de manera precisa el fenómeno estudiado, por lo que este modelo no sería aplicable en una situación real. En teoría de probabilidades, un supuesto muy común es la independencia de variables aleatorias, pero tal suposición no siempre se cumple en un problema real. Por ejemplo, en Ross, Sheldon M. [9] se considera una variable aleatoria X_n que describe el precio de una acción al final del n -ésimo día de negociación. Suponer que el precio al final del día $n + 1$ es independiente de los precios en los días $n, n - 1, \dots, 1, 0$ resulta ilógico, pero sería razonable suponer que el precio al final del día $n + 1$ depende de los precios al final de los días anteriores solamente a través del precio al final del día n , es decir, la probabilidad de X_{n+1} condicionado a su pasado X_n, X_{n-1}, \dots, X_0 depende únicamente del precio al final del día n . Esta característica descrita es conocida como la propiedad de Markov. La propiedad de Markov es muy importante dentro de la teoría de los procesos estocásticos y define un conjunto de procesos estocásticos conocidos como procesos de Markov. Por otro lado, esta propiedad proporciona una de las primeras nociones o definiciones de dependencia de variables aleatorias. Existen distintos tipos de dependencia, las cuales distinguen a un proceso estocástico de otro.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables aleatorias toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados [7].

Si $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, diremos que $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico a tiempo dis-

creto y en el caso que el conjunto parametral sea igual a $[0, +\infty)$, diremos que $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico a tiempo continuo. Por otro lado, cabe mencionar que el espacio de estados S también puede tomar valores discretos o continuos.

En este trabajo, nos interesa estudiar un fenómeno muy común en la naturaleza conocido como difusión, esto se lo haría mediante un proceso estocástico a tiempo discreto y con conjunto de estados discreto. Este proceso es conocido como caminata aleatoria. En este sentido, la idea es pasar de un proceso estocástico discreto a un proceso estocástico con conjunto parametral y conjunto de estados continuo.

La difusión es un mecanismo que transporta materia o, más precisamente, partículas de materia de un lugar a otro dentro de un espacio determinado. Las características de dicho mecanismo están determinadas por las propiedades físicas (por ejemplo, la estructura geométrica, la densidad o la temperatura) del medio de transporte o espacio dentro del cual se lleva a cabo este fenómeno [3].

El proceso mediante el cual una sustancia o partículas de la misma se propagan es un proceso estocástico. Esto se aprecia de forma clara en el ejemplo paradigmático de este fenómeno: el movimiento Browniano. Dicho proceso consiste en el movimiento irregular e impredecible de partículas que se encuentran suspendidas en un fluido. Este fenómeno fue observado mediante un microscopio por el botánico y biólogo Robert Brown en 1827. Señaló que las partículas (granos de polen y partículas inorgánicas) se movían a través de un fluido de manera irregular, pero fue incapaz de explicar los mecanismos que ocasionaban este movimiento. Más adelante, en el año 1905, Albert Einstein explicó estos mecanismos en un artículo muy importante titulado: *On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat*. Einstein explicó este fenómeno mediante la hipótesis atómica de la materia y las caminatas aleatorias, lo cual le permitió encontrar una relación entre el fenómeno observado por Brown y la ecuación del calor. Uno de los resultados más importantes de este artículo fue que el desplazamiento cuadrático medio recorrido por una partícula en la superficie de un fluido crece de forma lineal en el tiempo. Este resultado es una de las principales características de la difusión tradicional, que fundamentalmente es una consecuencia del Teorema del Límite Central [3].

Por otro lado, desde la segunda década del siglo XX se han encontrado fenómenos difusivos donde el desplazamiento cuadrático medio recorrido por partículas suspendidas sobre un fluido es proporcional a una potencia del tiempo t^α , donde el valor del exponente α divide a este tipo de procesos en dos clases: *superdifusión* cuando $\alpha > 1$ y *subdifusión* cuando $\alpha < 1$. En ambos casos, este fenómeno es conocido como difusión anómala.

Existen diferentes métodos de estudiar y modelar los procesos difusivos; el más común, utiliza caminatas aleatorias. Una caminata aleatoria S_n es un proceso estocástico discreto definido a partir de la suma de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (conocidas como saltos), es decir,

$$S_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n.$$

La caminata aleatoria S_n nos proporciona la localización de una partícula luego de haber dado n saltos aleatorios.

Los fenómenos difusivos anómalos aparecen cuando las distribuciones que definen los saltos de la caminata aleatoria decaen como una ley de potencias, es decir, $p_\eta(x) \sim |x|^{-(\alpha+1)}$ para $|x| > x_0 > 0$. En el caso que $1 < \alpha < 2$, este tipo de distribuciones se consideran como libres de escala o de cola ancha (cola pesada), ya que esto garantiza que el segundo momento de los saltos diverja. El nombre de distribuciones libres de escala se debe a la divergencia del segundo momento, ya que esto implica que los saltos carecen de un tamaño característico, y por lo tanto, la magnitud de estos puede tomar valores de cualquier tamaño con una probabilidad no despreciable [3].

En la teoría de probabilidades algo que siempre nos interesa conocer es la función de distribución de una variable aleatoria, ya que esta nos brindará valiosa información de la variable aleatoria; por ejemplo, la función de distribución de la caminata aleatoria S_n nos proporciona la probabilidad de hallar una partícula en el estado $x \in S$ luego de haber dado n saltos. Ahora, si reescalamos adecuadamente el espacio parametral y el espacio de estados, y si pasamos al límite respecto a n estamos interesados en determinar si este límite existe y en caso de existir, conocer su función de distribución, es decir, hallar una función $p(x, t)$ que nos proporcione información de este límite continuo; por ejemplo, la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto x luego de t unidades de tiempo. Al analizar la existencia de este límite continuo, estamos estudiando el límite hidrodinámico de la caminata aleatoria, lo cual consiste en encontrar un operador diferencial evolutivo que obedezca la ley de probabilidad de este límite [1]. Los mecanismos difusivos tradicionales tienen límites hidrodinámicos de la forma $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta p + R(p)$, donde R es una función de p . Por ejemplo, en Seppäläinen [9], se determina la solución débil del problema de Hamilton-Jacobi a través del límite hidrodinámico de un proceso de exclusión.

La investigación de Einstein relacionó el límite continuo de una caminata aleatoria con saltos de varianza finita con la ecuación de difusión tradicional, lo cual puede

verse como un resultado directo del Teorema del Límite Central (TLC). En el caso de procesos difusivos anómalos, al encontrarnos con funciones de probabilidad libres de escala, una de las hipótesis del Teorema del Límite Central no se cumple. Entonces, en el caso de existir el límite continuo de una caminata con saltos de cola pesada ¿es posible hallar una ecuación evolutiva que obedezca la probabilidad de encontrar a una partícula en un punto x luego de t unidades de tiempo?

La respuesta a la última interrogante se encuentra en una rama de la matemática conocida como cálculo fraccionario, cuyo origen se remonta a finales del siglo XVII. Sin embargo, sus aplicaciones son relativamente recientes. El cálculo fraccionario estudia las propiedades de derivadas e integrales de orden arbitrario, y la generalización de los teoremas fundamentales del cálculo integro-diferencial. En este sentido, la ecuación que obedece la probabilidad de encontrar a una partícula (proveniente del límite hidrodinámico de una caminata aleatoria con saltos de cola pesada) en un punto x luego de t unidades de tiempo involucra derivadas de orden fraccionario y es conocida como ecuación de difusión anómala.

Capítulo 2

Cálculo fraccionario

En los cursos universitarios, estudiamos el cálculo diferencial e integral a nivel conceptual y operativo, así como su importancia en la ciencia e ingeniería. Durante el estudio del cálculo diferencial definimos la derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como el siguiente límite

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Además, para órdenes de derivación superiores, podemos definir la n -ésima derivada en términos de diferencias finitas como

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n},$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - f(x-h) \\ \Delta^2 f(x) &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \\ \Delta^3 f(x) &= f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h) \\ &\vdots \\ \Delta^n f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x-kh). \end{aligned}$$

Usando el operador de retardos $B^k f(x) = f(x-kh)$ (comunmente empleado en el análisis de series de tiempo), podemos escribir

$$\Delta f(x) = (I - B) f(x),$$

donde $If(x) = f(x)$ es el operador identidad. Entonces tenemos

$$\Delta^n f(x) = (I - B)^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} (-1)^k B^k f(x). \quad (2.1)$$

En (2.1) podemos observar que n es un entero positivo. Sin embargo, ¿qué pasaría si por ejemplo $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$?

El objetivo de este capítulo es responder a esta interrogante, además de estudiar las propiedades y nociones básicas de las derivadas de orden arbitrario α , propiedades que nos serán útiles para conectar la teoría de las ecuaciones diferenciales con los procesos estocásticos.

2.1. La fórmula de Grünwald

Uno de los resultados más conocidos de la transformada de Fourier consiste en que dada una función f integrable tal que sus primeras n derivadas existen y son integrables, entonces la transformada de Fourier de la n -ésima derivada puede ser calculada en términos de la transformada de Fourier de f , como se muestra a continuación:

$$\mathcal{F} \left[f^{(n)} \right] (\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi).$$

Motivados por este resultado, si consideramos un número positivo α arbitrario, empezaremos definiendo a la derivada fraccionaria de orden α como la función $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ cuya transformada de Fourier es igual a $(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$. Sin embargo, esta definición no es muy útil, ya que no permite desarrollar propiedades importantes. Por ello, al igual que en el caso de las derivadas tradicionales, queremos desarrollar una definición equivalente en términos de cocientes de diferencias finitas.

Para alcanzar nuestro objetivo, utilizaremos el operador de diferencias fraccionario, comúnmente usado en el análisis de series temporales, el cual está dado, para $\alpha > 0$, por

$$\Delta^\alpha f(x) = (I - B)^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k B^k f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x - kh),$$

donde

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Gracias al Lema 2.1.1, podemos garantizar la convergencia de esta serie al menos si f es acotada.

Podemos notar la similitud entre el operador (2.1) y el operador de diferencias fraccionario. Entonces, definimos la derivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ como

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha f(x)}{h^\alpha}, \quad (2.2)$$

siempre que el límite exista. La forma de la derivada fraccionaria (2.2) es conocida como la forma de diferencias finitas de *Grünwald-Letnikov*.

Antes de continuar, hagamos una breve pausa para darle sentido al término binomial $\binom{\alpha}{k}$. Para ello, recordemos que la función gamma está definida para $\alpha > 0$, como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \quad (2.3)$$

La función gamma se puede ver como la generalización del factorial, por lo que nos permitirá darle sentido al término binomial $\binom{\alpha}{k}$. Integrando por partes con $u = x^\alpha$ y $dv = e^{-x}$ se puede ver que

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\ &= 0 + \alpha \Gamma(\alpha) \\ &= \alpha \Gamma(\alpha), \end{aligned}$$

para $\alpha > 0$. Ahora, usamos la relación $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ para dar sentido a la función gamma para valores negativos. En este sentido, definimos la función gamma para valores negativos no enteros x como:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Esta definición permite ver que de manera recursiva, para $x < 0$ no entero, su función gamma está dada por:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(q)}{(q-1) \cdot (q-2) \cdots (q-n)},$$

donde $q \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ son dos números tal que $x = q - n$. Utilizando esto, vemos que para $\alpha > 0$ no entero, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{k!(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}{k!(\alpha-k)(\alpha-k-1)\Gamma(\alpha-k-1)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)}{k!(\alpha-k)(\alpha-k-1)(\alpha-k-2)\Gamma(\alpha-k-2)} \\
&\vdots \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{\Gamma(k+1)} \\
\implies \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{\Gamma(k+1)}, \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Lema 2.1.1. Para $\alpha > 0$ no entero, definimos $\omega_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\omega_k| < +\infty$$

Demostración. La serie binomial

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \tag{2.5}$$

converge absolutamente para cualquier $|z| \leq 1$ y $\alpha > 0$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k = (1+(-1))^\alpha = 0. \tag{2.6}$$

Por otro lado, usando (2.4) se tiene que

$$\omega_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-1-\alpha)}{\Gamma(k+1)}. \tag{2.7}$$

Notemos que el término $(-1)^k$ de la anterior expresión se omite, pues es multiplicado por cada uno de los k términos de la expansión del coeficiente binomial. En consecuencia, de la expresión (2.7) notar que eventualmente $k > \alpha + 1$ y por ende

todos los ω_k tienen el mismo signo para cualquier $k > \alpha + 1$. Este hecho junto a (2.6) implican que $\sum_{k=0}^{+\infty} |\omega_k| < +\infty$. En efecto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\omega_k| = \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{k > \alpha+1} |\omega_k|.$$

De esta última expresión surgen dos casos:

Caso 1. Si ω_k son positivos para $k > \alpha + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\omega_k| &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{k > \alpha+1} |\omega_k| \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{k > \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k - \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + 0 - \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| - \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k < +\infty \end{aligned}$$

Caso 2. Si ω_k son negativos para $k > \alpha + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\omega_k| &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{k > \alpha+1} |\omega_k| \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| - \sum_{k > \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| - \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k + \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| - 0 + \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k \\ &= \sum_{0 \leq k < \alpha+1} |\omega_k| + \sum_{0 \leq k < \alpha+1} \omega_k < +\infty \end{aligned}$$

Notemos que en ambos casos $\alpha + 1 \neq k$, pues consideramos que α no es entero. \square

Lema 2.1.2. *Sea f una función absolutamente integrable tal que sus derivadas hasta un orden n son absolutamente integrables. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\left| \hat{f}(\xi) \right| \leq \frac{C}{1 + |\xi|^n} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Demostración.

Caso 1: Si $\xi = 0$,

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx := C_0 \end{aligned}$$

Caso 2: Si $|\xi| < 1$, notar que

$$\begin{aligned} |\xi|^n + 1 &< 2 \\ 1 &< \frac{2}{1 + |\xi|^n}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\xi) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\xi x}| |f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = C_0 \\ &\leq \frac{2C_0}{1 + |\xi|^n} = \frac{C}{1 + |\xi|^n} \end{aligned}$$

Caso 3: Si $|\xi| \geq 1$. Por hipótesis f y sus derivadas hasta cierto orden n son absolutamente integrables. Entonces se tiene que $\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$, por lo que

$$\left| \hat{f}(\xi) \right| = |\xi|^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f^{(n)}(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq |\xi|^{-n} \int_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| dx \\ &= \frac{C_1}{|\xi|^n} \end{aligned}$$

En este caso notar que

$$\begin{aligned} |\xi|^n &\geq 1 \\ 2|\xi|^n &\geq |\xi|^n + 1 \\ \frac{2C_1}{|\xi|^n + 1} &\geq \frac{C_1}{|\xi|^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^n + 1}.$$

□

Proposición 2.1.3. *Sea f una función absolutamente integrable tal que sus derivadas existen hasta un orden entero $n > \alpha + 1$ y son absolutamente integrables, para $\alpha > 0$ no entero. Entonces, su derivada fraccionaria*

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) d\xi$$

existe y su transformada de Fourier es igual a $(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Demostración. El Lema 2.1.2 muestra que para $n > \alpha + 1$, la función $(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ es absolutamente integrable. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^\alpha}{1 + |\xi|^n} d\xi < +\infty \quad \text{siempre que } n > \alpha + 1. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi < +\infty.$$

De este último resultado, el Teorema 5.1.2 (Teorema de inversión para la transformada de Fourier) implica que existe una función integrable con transformada de

Fourier $(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$, y nosotros definimos a $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ como esta función, la cual gracias a este último Teorema es absolutamente integrable y además,

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) d\xi.$$

□

El resultado que veremos a continuación nos permitirá ver que la definición para la derivada fraccionaria dada en (2.2) coincide con la definición de la derivada fraccionaria que dimos al inicio de esta sección en términos de la transformada de Fourier.

Proposición 2.1.4. *Sea $\alpha > 0$ y f una función acotada y absolutamente integrable tal que sus derivadas hasta un orden $n > \alpha + 1$ existen y son absolutamente integrables. Entonces, su derivada fraccionaria de Grünwald*

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha f(x)}{h^\alpha}$$

existe. Además, su transformada de Fourier es $(i\xi)^\alpha \hat{f}(x)$.

Demostración. Notar que como f es acotada, entonces la serie

$$\Delta^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x - kh)$$

converge uniformemente en \mathbb{R} . En efecto, notar que como f es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x - kh) \right| \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \binom{\alpha}{k} (-1)^k \right|.$$

Dado que la serie a la derecha de la desigualdad es convergente gracias al Lema 2.1.1, el criterio de Weierstrass implica que

$$\Delta^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x - kh)$$

converge uniformemente.

Realizando el cambio de variable $y = x - a$, para a fijo, se muestra que la función

$$f_a(x) = f(x - a) \quad (2.8)$$

tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x - a) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y+a)} f(y) dy \\ &= e^{-i\xi a} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(y) dy \\ &= e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Entonces $\Delta^\alpha f$ tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Delta^\alpha f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x - kh) dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x - kh) dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k e^{-i\xi kh} \hat{f}(\xi) \\ &= (1 - e^{-i\xi h})^\alpha \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

La segunda igualdad en el cálculo de $\mathcal{F}[\Delta^\alpha f]$ se tiene gracias a la integrabilidad de cada término para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ y la convergencia uniforme de la serie $\Delta^\alpha f(x)$.

Si $\xi \neq 0$, entonces $\frac{\Delta^\alpha f}{h^\alpha}$ tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} h^{-\alpha} (1 - e^{-i\xi h})^\alpha \hat{f}(\xi) &= h^{-\alpha} (i\xi h)^\alpha \left(\frac{1 - e^{-i\xi h}}{i\xi h} \right)^\alpha \hat{f}(\xi) \\ &= (i\xi)^\alpha \left(\frac{1 - [1 - i\xi h + \frac{1}{2!}(-i\xi h)^2 + \dots]}{i\xi h} \right)^\alpha \hat{f}(\xi) \\ &= (i\xi)^\alpha \left(\frac{i\xi h - \frac{1}{2!}(-i\xi h)^2 - \dots}{i\xi h} \right)^\alpha \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

$$= (i\xi)^\alpha \left(1 - \frac{1}{2!}(i\xi h) + \dots\right)^\alpha \hat{f}(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Notar que la última convergencia se tiene gracias a la continuidad de la función potencia.

Si $\xi = 0$, inmediatamente vemos que

$$\begin{aligned} h^{-\alpha} (1 - e^{-i\xi h})^\alpha \hat{f}(\xi) &= \left(\frac{1 - 1 + i\xi h - \frac{1}{2!}(-i\xi h)^2 - \dots}{h} \right)^\alpha \hat{f}(\xi) \\ &= 0 = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Entonces, la transformada de Fourier de $\frac{\Delta^\alpha f}{h^\alpha}$ converge puntualmente a la transformada de Fourier de $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$. Por lo tanto, gracias a que f y sus derivadas hasta cierto orden n son absolutamente integrables, se tiene que el límite respecto a h puede ingresar en la transformada de Fourier de $\frac{\Delta^\alpha f}{h^\alpha}$, lo cual implica que:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha f(x)}{h^\alpha}.$$

□

Observación 2.1.5. Como veremos en capítulos posteriores, para explicar cierto tipo de fenómenos difusivos, es muy útil introducir la definición de derivada fraccionaria negativa. La derivada fraccionaria negativa de orden α se define como la función $\frac{d^\alpha f}{d(-x)^\alpha}$, cuya transformada de Fourier es $(-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$. Esta derivada fraccionaria está estrechamente relacionada con los saltos negativos o hacia la izquierda de una partícula en un fenómeno difusivo. Además, al igual que definimos $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ en términos de diferencias finitas de Grünwald-Letnikov, la derivada fraccionaria negativa se puede definir como el siguiente límite

$$\frac{d^\alpha f}{d(-x)^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x + kh). \quad (2.9)$$

Observación 2.1.6. Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 2.1.4 y un procedimiento exactamente igual a su demostración, pero definiendo f_a en (2.8) como

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f_a(x) = f(x + a), \end{aligned}$$

se muestra que el límite (2.9) existe y tiene transformada de Fourier $(-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

2.2. La derivada de Caputo

En esta sección, utilizando (2.2), se desarrollarán formas alternativas para la derivada fraccionaria que definimos en la Sección 2.1.

Antes de continuar empezaremos estableciendo la notación $f(x) \sim g(x)$ para referirnos a que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

En la definición de la derivada de Grünwald tomamos $h = \Delta x$ para ver que

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha f(x)}{\Delta x^\alpha}, \quad (2.10)$$

donde

$$\Delta^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k f(x - k\Delta x).$$

La aproximación de Stirling

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1$$

nos conduce a

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (k-1-\alpha)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{-\alpha(k-1-\alpha) \cdots (2-\alpha)(1-\alpha)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{-\alpha \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-\alpha)} \\ &\sim \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(k-\alpha-1)}(k-\alpha-1)^{k-\alpha-1} e^{-(k-\alpha-1)}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} \\ &= \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sqrt{\frac{k-\alpha-1}{k}} \left(\frac{k-\alpha-1}{k}\right)^{k-\alpha-1} k^{-\alpha-1} e^{\alpha+1} \end{aligned}$$

para $k \rightarrow +\infty$. Además, notar que $\sqrt{\frac{k-\alpha-1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ y

$$\left(\frac{k-\alpha-1}{k}\right)^{k-\alpha-1} = \left(\frac{k-\alpha-1}{k}\right)^k \left(\frac{k-\alpha-1}{k}\right)^{-\alpha-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right)^{-\alpha-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{-\alpha+1} \cdot 1 \\
&= e^{-\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\omega_k \sim \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} k^{-\alpha-1}, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Ya que $\omega_0 = 1$, podemos escribir

$$\frac{\Delta^\alpha f(x)}{\Delta x^\alpha} = \frac{1}{\Delta x^\alpha} \left[f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k f(x - k\Delta x) \right].$$

Consideremos el caso $0 < \alpha < 1$. Entonces como $\omega_k = \frac{-\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-\alpha)}$, se tiene que $\omega_k < 0$ para todo $k \geq 1$. Además, recordemos que $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k = 0$, lo que implica que $\sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k = -1$.

Definimos $b_k = -\omega_k$ para $k \geq 1$, así

$$b_k \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} k^{-\alpha-1}, \quad k \rightarrow +\infty \quad y \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = 1.$$

A continuación, utilizaremos la expresión " \approx " para indicar que dos términos se aproximan, para ver que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^\alpha f(x)}{\Delta x^\alpha} &= (\Delta x)^{-\alpha} \left[f(x) \sum_{k=1}^{+\infty} b_k - \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - k\Delta x) b_k \right] \\
&= (\Delta x)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} [f(x) - f(x - k\Delta x)] b_k \\
&\approx (\Delta x)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} [f(x) - f(x - k\Delta x)] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (k\Delta x)^{-\alpha-1} \Delta x \\
&\approx \int_0^{+\infty} [f(x) - f(x-y)] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy,
\end{aligned}$$

lo cual motiva la *forma de generador* de la derivada fraccionaria:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \int_0^{+\infty} [f(x) - f(x-y)] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy. \quad (2.12)$$

Integrando por partes con $u = f(x) - f(x - y)$ y $dv = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}y^{-1-\alpha}$ notemos que (2.12) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} [f(x) - f(x-y)]y^{-\alpha} \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} f'(x-y)y^{-\alpha} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} f'(x-y)y^{-\alpha} dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notar que el término en la frontera de (2.13) se anula para f continuamente diferenciable y acotada. En efecto, para f acotada, se tiene que si $y \rightarrow +\infty$. Entonces $y^{-\alpha} \rightarrow 0$ y en consecuencia

$$[f(x) - f(x-y)]y^{-\alpha} \rightarrow 0.$$

Por otro lado, para $x \rightarrow 0$, se tiene que $f(x-y) = f(x) - yf'(y) + O(y^2)$, lo que nos conduce a que

$$[f(x) - f(x-y)]y^{-\alpha} = y^{1-\alpha}f'(y) + \frac{O(y^2)}{y^2}y^{2-\alpha}.$$

De este modo, cuando $y \rightarrow 0$, se tiene que $[f(x) - f(x-y)]y^{-\alpha} \rightarrow 0$.

La expresión obtenida en (2.13) se conoce como la derivada de *Caputo* y es válida cuando $0 < \alpha < 1$.

En el caso que $1 < \alpha < 2$, la derivada de Caputo se define a partir de la siguiente forma de generador

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty [f(x-y) - f(x) + yf'(x)]y^{-1-\alpha} dy. \quad (2.14)$$

Integrando por partes (2.14) vemos que

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} f(x-y)y^{1-\alpha} dy. \quad (2.15)$$

Por otro lado, la derivada de Riemann-Liouville se define como

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} f(x-y)y^{-\alpha} dy \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.16)$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{+\infty} f(x-y)y^{1-\alpha} dy \quad 1 < \alpha < 2. \quad (2.17)$$

Notemos que si se pudiera extraer el término de la derivada fuera de la integral en la forma de Caputo, esta coincidiría con la derivada de Riemann-Liouville. Sin embargo, recordemos que las derivadas son límites de funciones, por lo que para extraer las derivadas de (2.13) y (2.15) fuera de la integral, necesitaríamos que la función que se está derivando cumpla con ciertos requisitos que nos permitan utilizar el Teorema de Convergencia Dominada, por lo que estas dos formas de derivada no siempre serán iguales. Para ilustrar este hecho, a continuación veremos algunos ejemplos de estas dos derivadas, mostrando casos en los que coinciden y uno en donde son diferentes.

Ejemplo 2.2.1. Sea $f(x) = e^{\lambda x}$ para $\lambda > 0$. Entonces, $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$.

Usando la forma de Caputo para $0 < \alpha < 1$ y el cambio de variable $u = \lambda y$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [e^{\lambda x}] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda e^{\lambda(x-y)} y^{-\alpha} dy \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} y^{-\alpha} dy \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{-\alpha} du \\ &= \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(1-\alpha)-1} du \\ &= \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \Gamma(1-\alpha) \\ &= \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Usando la forma de Riemann-Liouville obtenemos:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha [e^{\lambda x}] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-y)} y^{-\alpha} dy \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} y^{-\alpha} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^{(1-\alpha)-1}}{\lambda^{-\alpha+1}} dy \\
&= \lambda^{\alpha-1} \frac{d}{dx} [e^{\lambda x}] \\
&= \lambda^{\alpha-1} \lambda e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}.
\end{aligned}$$

En este caso, podemos observar que la derivada de Caputo y la derivada de Riemann-Liouville coinciden.

Por otro lado, si calculamos la n -ésima derivada de $f(x) = e^\lambda$ observaremos que la forma de esta es análoga a la forma de las derivadas fraccionarias, presentándose el orden de la derivada como la potencia de la constante λ :

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Ahora, mediante el cambio de variable $u = x - y$ en (2.13) y (2.15) obtenemos expresiones alternativas para la derivada de Caputo

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x f'(u)(x-u)^{-\alpha} du \quad (2.18)$$

y la derivada de Riemann-Liouville

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(u)(x-u)^{-\alpha} du, \quad (2.19)$$

para $0 < \alpha < 1$.

De manera general, la derivada de Caputo se define como

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{\alpha+1-n}} du & \text{si } n-1 < \alpha < n \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ \frac{d^n f(x)}{dx^n} & \text{si } \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notar que en los casos $n = 1$ o $n = 2$, obtenemos la forma de las derivadas de Caputo que vimos antes. Por otro lado, la derivada de Riemann-Liouville se puede escribir de forma general como

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x \frac{f(u)}{(x-u)^{\alpha+1-n}} du \text{ para } n-1 < \alpha < n.$$

Ejemplo 2.2.2. Para $p > 0$, definimos

$$f(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$f'(x) = \begin{cases} px^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Recordemos que el coeficiente generalizado que aparece en función de densidad Beta está dada por

$$\int_0^x y^{a-1}(x-y)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1}$$

para $a > 0$ y $b > 0$. Entoces, la derivada de Caputo es:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [x^p] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x pu^{p-1}(x-u)^{(1-\alpha)-1} du \\ &= \frac{p}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p+(1-\alpha)-1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^p] &= px^{p-1} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-1)} x^{p-1}, \end{aligned}$$

lo cual nos permite visualizar que la derivada de Caputo coincidiría con la derivada clásica cuando el orden de α es un entero.

Usando la fórmula de Riemann-Liouville obtenemos:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha [x^p] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x y^p (x-y)^{-\alpha} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x y^{(p+1)-1} (x-y)^{(1-\alpha)-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(p+2-\alpha)} x^{p-\alpha+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p-\alpha},$$

lo cual coincide con la derivada de Caputo.

Hemos visto algunos ejemplos en los que la derivada de Riemann-Liouville coincide con la derivada de Caputo. Sin embargo, como ya se mencionó antes, esto no siempre es cierto como veremos a continuación.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que esta función no es continuamente diferenciable, pues existe una discontinuidad en $x = 0$. Son embargo, para todo $x \neq 0$ se tiene que $f'(x) = 0$, lo cual implica que la derivada de Caputo es igual a 0 en $x \neq 0$, pero la derivada de Riemann-Liouville es:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x 1(x-y)^{-\alpha} dy \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[- \int_x^0 u^{-\alpha} du \right], & u = x-y, \quad du = -dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{u^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_0^x \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \\ &= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0 \end{aligned}$$

El hecho de que estas derivadas no coincidan se debe al hecho que la función considerada no es continuamente diferenciable.

Observación 2.2.4. En el Ejemplo 2.2.3, nótese que $f(x) = f(x-y)$ a no ser que $y > x > 0$. Entonces la forma de generador de la derivada fraccionaria es

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} [f(x) - f(x-y)] y^{-\alpha-1} dy \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{+\infty} [f(x) - f(x-y)] y^{-\alpha-1} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x [f(x) - f(x-y)] y^{-\alpha-1} dy \\
= & \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{+\infty} [1-0] y^{-\alpha-1} dy + 0 \\
= & - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{y^{-\alpha}}{\alpha} \Big|_x^{+\infty} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

2.2.1. Comparación de las dos formas

Para comparar la derivada de Caputo y la derivada de Riemann-Liouville, vamos a determinar la forma de sus transformadas de Laplace mediante una función definida en $[0, +\infty)$. Para ello, recordemos que la transformada de Laplace de una función f se define como

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.20)$$

Si $0 < \alpha < 1$, nótese que

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \right] (s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^{\infty} f'(x-y) y^{-\alpha} dy dx.$$

Por otro lado, notemos que f está definida sobre $[0, +\infty)$, por lo que $f(x-y)$ estará definida sobre $x \geq y$. Entonces, si suponemos que $e^{-sx} f'(x-y) y^{-\alpha}$ es integrable como una función de dos variables (x, y) , podemos cambiar el orden de integración para ver que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \right] (s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} y^{-\alpha} \int_y^{\infty} e^{-sx} f'(x-y) dx dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sy} y^{-\alpha} \int_y^{\infty} e^{-s(x-y)} f'(x-y) dx dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sy} y^{-\alpha} \int_y^{\infty} e^{-sz} f'(z) dz dy, \quad z = x - y \\
&= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) s^{1-\alpha}} \mathcal{L}[f'](s) \\
&= s^{\alpha-1} (s \mathcal{L}[f](s) - f(0)) \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1} f(0).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $y^{-\alpha} e^{-sx} f(x-y)$ es integrable como una función de dos variables (x, y) , se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D_x^\alpha f](s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(x-y) y^{-\alpha} dy dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{d}{dx} \int_0^x f(x-y) y^{-\alpha} dy dx \\
&= \frac{s}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(x-y) y^{-\alpha} dy dx \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x f(x-y) y^{-\alpha} dy \Big|_{x=0} \\
&= \frac{s}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(x-y) y^{-\alpha} dy dx - 0 \\
&= \frac{s}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty y^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-sx} f(x-y) dx dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sy} y^{-\alpha} \int_y^\infty e^{-sz} f(z) dz dy, \quad z = x - y \\
&= s \cdot s^{\alpha-1} \mathcal{L}[f](s) \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s).
\end{aligned}$$

De las dos expresiones obtenidas podemos ver la siguiente relación

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \right] (s) = \mathcal{L}[D_x^\alpha f](s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (2.21)$$

La linealidad de la transformada de Laplace nos lleva a

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = D_x^\alpha f(x) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0). \quad (2.22)$$

Algunos autores usan la relación (2.22) como la definición de la derivada de Caputo, ya que esta existe para una amplia clase de funciones [9]. Existen muchas formas para la derivada fraccionaria que matemáticamente están bien definidas y fundamentadas. Sin embargo, de esta gran gama de derivadas, las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo son las más utilizadas; esto se debe a la carencia de una interpretación física de la derivadas fraccionarias. No obstante, los científicos han estado examinando cómo aplicar estas derivadas para representar fenómenos físicos y han encontrado que la derivada de Caputo puede ser utilizada para modelar la propagación de partículas o materiales que se encuentran lejos del equilibrio termodinámico.

Una de las ventajas de utilizar la derivada de Caputo es que los modelos de ecuaciones diferenciales que se basan en esta adoptan una forma similar a la de los modelos de difusión clásicos. Además, hablando en términos computacionales, la derivada de Caputo tiende a ser más fácil de calcular numéricamente con un costo computacional bajo, todo esto sin la necesidad de encontrar una expresión matemática explícita para la solución de las ecuaciones diferenciales que contienen a la derivada de Caputo.

Capítulo 3

Semigrupos infinitamente divisibles

La teoría de semigrupos permite tratar de una manera elegante a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) como una EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria). En este sentido, en este capítulo nos interesa estudiar la forma del generador infinitesimal y su relación con las ecuaciones diferenciales para una clase de semigrupos conocidos como semigrupos infinitamente divisibles, definidos a partir de variables aleatorias infinitamente divisibles, las cuales abarcan a las variables aleatorias estables, siendo estas últimas las de nuestro interés.

Las distribuciones α -estables de Lévy o simplemente llamadas estables son una familia de distribuciones de probabilidad. Generalmente este tipo de distribuciones están caracterizadas por cuatro parámetros, de los cuales su parámetro de estabilidad α es el más significativo [4]. Las distribuciones estables satisfacen que $\alpha \leq 2$, tratándose de la distribución normal cuando $\alpha = 2$ y de la distribución de Cauchy cuando $\alpha = 1$.

3.1. Distribuciones infinitamente divisibles

Empezaremos estableciendo la siguiente notación: Dada una variable aleatoria X , definimos su función de distribución acumulada $F_X(x) = P(X \leq x)$, su función de densidad de probabilidad $f_X(x) = F'_X(x) = P(X = x)$ y su medida de probabilidad asociada $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$. Escribiremos $X \sim F_X$ para indicar que la variable aleatoria X sigue una distribución F_X . Además, dada una segunda variable aleatoria Y , escribiremos $X \simeq Y$ si X e Y tienen la misma función de

distribución.

Definición 3.1.1. Decimos que la variable aleatoria $X \sim F_x$ es infinitamente divisible si existen X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) tal que $X \simeq X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Notar que si $X_n \sim F_n$,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\xi) &= E[e^{i\xi X}] \\ &= E[e^{i\xi(X_1+X_2+\dots+X_n)}] \\ &= \prod_{k=1}^n E[e^{i\xi X_k}] \\ &= \hat{\mu}_n(\xi)^n,\end{aligned}$$

donde $\hat{\mu}$ y $\hat{\mu}_n$ denotan la función característica de X y X_n , respectivamente. La función característica está estrechamente relacionada con la transformada de Fourier por un obvio cambio de signo como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} -e^{-i\xi y} f(-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(-y) dy \\ &= \hat{f}(-\xi).\end{aligned}$$

Notar que en el segundo paso se realizó el cambio de variable $y = -x$.

Definición 3.1.2. Decimos que una medida de Borel σ -finita $\phi(dx)$ en $\{x : x \neq 0\}$ es una medida de Lévy si $\phi\{x : |x| > R\} < +\infty$ y

$$\int_{\{0 < |x| \leq R\}} x^2 \phi(dx) < +\infty \quad \forall R > 0 \quad (3.1)$$

Ejemplo 3.1.3. Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$, entonces $\hat{\mu}(\xi) = e^{i\xi m_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2}$. Si tomamos $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{m_1}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ v.a.i.i.d, entonces X_k tiene función característica $\hat{\mu}_n(\xi) = e^{i\xi \frac{m_1}{n} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{n} \xi^2}$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Claramente

$$\hat{\mu}(\xi) = \hat{\mu}_n(\xi)^n.$$

Así, cualquier variable aleatoria normal es infinitamente divisible.

Ejemplo 3.1.4. Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces su función de densidad se escribe como $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ y

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\xi) &= \int e^{i\xi x} \mu(dx) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\xi k} P(X = k) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\xi k} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \exp\{\lambda e^{i\xi}\} \\ &= \exp\{\lambda(e^{i\xi} - 1)\}. \end{aligned}$$

Si tomamos $\hat{\mu}_n(\xi) = \exp\{\frac{\lambda}{n}(e^{i\xi} - 1)\}$, podemos ver que, la suma de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n que son v.ai.i.d con distribución de $\text{Poisson}(\frac{\lambda}{n})$, tiene la misma distribución que X .

Ejemplo 3.1.5. Sea N una variable aleatoria de $\text{Poisson}(\lambda)$ independiente de W_1, W_2, \dots, W_N v.a.i.i.d con medida de probabilidad $\omega(dx)$. Se define la variable aleatoria de Poisson compuesta S_N , como la suma $S_N = W_1 + W_2 + \dots + W_N$. Entonces

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{S_N}(\xi) &= E[\exp\{i\xi(W_1 + W_2 + \dots + W_N)\}] \\ &= E[E[\exp\{i\xi(W_1 + W_2 + \dots + W_N)\} | N = n]] \\ &= E[E[\exp\{i\xi(W_1 + W_2 + \dots + W_n)\} | N = n]] \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{N=n} E[\exp\{i\xi W_k\}]\right] \\ &= E[\hat{\omega}(\xi)^N] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{\omega}(\xi)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \hat{\omega}(\xi)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda \hat{\omega}(\xi)} = e^{\lambda(\hat{\omega}(\xi)-1)}.$$

Si definimos $\hat{\mu}_n(\xi) = e^{\frac{\lambda}{n}(\hat{\omega}(\xi)-1)}$ y X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con función característica $\hat{\mu}_n$, entonces S_N es infinitamente divisible. Notar que debido a que cada X_k tienen función característica $\hat{\mu}(\xi) = e^{\frac{\lambda}{n}(\hat{\omega}(\xi)-1)}$, cada X_k es una variable de Poisson compuesta con parámetro $\frac{\lambda}{n}$.

Ahora, nótese que la función característica de una variable aleatoria de Poisson compuesto se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{S_N}(\xi) &= e^{\lambda(\hat{\omega}(\xi)-1)} \\ &= \exp\left\{\lambda \left[\int e^{i\xi x} \omega(dx) - 1 \right]\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \left[\int (e^{i\xi x} - 1) \omega(dx) \right]\right\} \\ &= \exp\left\{\left[\int (e^{i\xi x} - 1) \phi(dx) \right]\right\}, \end{aligned}$$

donde $\phi(dx) = \lambda\omega(dx)$ es una medida de Lévy, también llamada intensidad de salto. En este sentido, la variable aleatoria S_N es la acumulación de un número de saltos aleatorios.

La expresión que obtuvimos para la función característica $\hat{\mu}_{S_N}$ es conocida como representación de Lévy, la cual nos da una caracterización para las leyes infinitamente divisibles. Esta forma se refleja claramente en los ejemplos para la distribución normal y de Poisson compuesto que hemos visto.

3.2. Funciones características estables

Una variable aleatoria X se dice que es α -estable de Lévy (o simplemente estable), si dadas dos copias independientes X_1 y X_2 de X (es decir, X_1 y X_2 son instancias de variables aleatorias independientes que tienen la misma distribución que X), existen $a, b, c > 0$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$aX_1 + bX_2 \simeq cX + d.$$

Aunque este tipo de distribuciones carece de una expresión matemática explícita, salvo ciertos casos como la distribución normal y la de Cauchy, el Teorema de

representación de Lévy nos da una forma de caracterizarlas mediante su función característica o su transformada de Fourier. La representación de Lévy además de caracterizar a las variables aleatorias estables, también sirve como herramienta para conectar la teoría de semigrupos infinitamente divisibles con las ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.2.1. *(Representación de Lévy) Una variable aleatoria Y es infinitamente divisible si y sólo si su función característica $\hat{\mu}(\xi) = E[e^{i\xi Y}] = e^{\psi(\xi)}$, donde*

$$\psi(\xi) = i\xi a + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} \left(e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1+y^2} \right) \phi(dy), \quad (3.2)$$

para algún $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ y ϕ una medida de Lévy. Esta representación $[a, b, \phi]$ es única.

Demostración. La demostración es un caso particular del [Teorema 3.1.11], H. Scheffler, M. Meerschaert, Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice, July 2001. \square

Supongamos que $\{Y_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias con función de distribución acumulada F_n y medida de probabilidad μ_n para cada entero positivo n . Decimos que $Y_n \xrightarrow{d} Y$ (convergencia en distribución, a veces llamada convergencia en ley o convergencia débil), si $F_n(x) \rightarrow F_Y(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x^+) = F(x^-)$. El teorema de continuidad de Lévy muestra que este concepto es equivalente a $\hat{\mu}_n(\xi) \rightarrow \hat{\mu}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

El siguiente resultado muestra que cualquier distribución infinitamente divisible es esencialmente una variable aleatoria de Poisson compuesta.

Proposición 3.2.2. *Toda distribución infinitamente divisible es el límite de distribuciones de Poisson compuestas.*

Demostración. Sea Y una variable aleatoria con función de distribución F infinitamente divisible y medida de probabilidad μ . Gracias al teorema de representación de Lévy, existe una única tripleta de Lévy $[a, b, \phi]$ tal que $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)}$, donde

$$\psi(\xi) = i\xi a + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} \left(e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1+y^2} \right) \phi(dy).$$

Para cada entero positivo n , definimos las funciones características

$$\hat{\mu}_n(\xi) := e^{\frac{\psi(\xi)}{n}}.$$

Entonces, podemos observar que $\hat{\mu}(\xi) = [\hat{\mu}_n(\xi)]^n$. La forma de esta función característica implica que existen X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d con medida de probabilidad μ_n tal que $Y \simeq X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Sea $N \sim \text{Poisson}(n)$ y definimos $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. De este modo, Y_n es una variable aleatoria de proceso de Poisson compuesta. En consecuencia, Y_n tiene función característica

$$\hat{\nu}_n(\xi) = e^{n(\hat{\mu}_n(\xi)-1)}.$$

Sea $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario. Entonces, podemos ver que la expresión $\hat{\mu}_n(\xi) - 1$ puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n(\xi) - 1 &= \left(1 + \frac{1}{n}\psi(\xi) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n}\psi(\xi) \right)^2 + \dots \right) - 1 \\ &= \frac{1}{n}\psi(\xi) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Así, $n(\hat{\mu}_n(\xi) - 1) = \psi(\xi) + O(n^{-1})$. En consecuencia,

$$\hat{\nu}_n(\xi) = e^{\psi(\xi) + O(n^{-1})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\psi(\xi)} = \hat{\mu}(\xi).$$

Entonces, el teorema de continuidad de Lévy implica que Y es el límite débil de una variable aleatoria de Poisson compuesta. □

Ejemplo 3.2.3. Si $Y \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$, vimos que su función característica es

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{i\xi m_1 - \frac{1}{2}\xi^2 \sigma^2}.$$

Entonces Y tiene representación de Lévy $[m_1, \sigma^2, 0]$

Ejemplo 3.2.4. Si Y es una variable aleatoria de Poisson compuesta con parámetro λ . Notemos que su función característica es $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)}$, donde

$$\psi(\xi) = \lambda \int (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy).$$

Además, podemos ver que

$$\psi(\xi) = i\xi\lambda \int \frac{y}{1+y^2} \omega(dy) + \frac{1}{2}\xi^2 * 0 + \int \left(e^{i\xi y} - 1 - i\xi \frac{y}{1+y^2} \right) \lambda \omega(dy)$$

$$= \lambda(\hat{\omega}(\xi) - 1).$$

Entonces Y tiene representación de Lévy $[a, b, \phi]$, donde $a = \lambda \int \frac{y}{1+y^2} \omega(dy)$ y $b = 0$.

Teorema 3.2.5. *Sea $Y \sim \mu$ una variable aleatoria infinitamente divisible con función característica*

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)},$$

donde $\psi(\xi)$ está dado por (3.1). Entonces, $\hat{\mu}(\xi)$ puede ser escrita como $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi_0(\xi)}$, donde

$$\psi_0(\xi) = \psi(\xi) = i\xi a_0 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}(y)) \phi(dy) \quad (3.3)$$

para cualquier $R > 0$ y un único a_0 que depende de a y R . Aún más:

a. Si

$$\int_{0 < |y| \leq R} |y| \phi(dy) < +\infty,$$

podemos escribir $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi_1(\xi)}$, donde

$$\psi_1(\xi) = \psi(\xi) = i\xi a_1 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy), \quad (3.4)$$

para un único a_1 que depende de a_0 .

b. Si

$$\int_{|y| > R} |y| \phi(dy) < +\infty,$$

podemos escribir $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi_2(\xi)}$, donde

$$\psi_2(\xi) = \psi(\xi) = i\xi a_2 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \phi(dy), \quad (3.5)$$

para un único a_2 que depende de a_0 .

Demostración. Por el teorema de representación de Lévy,

$$\psi(\xi) = i\xi a + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} \left(e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1+y^2} \right) \phi(dy).$$

Para cualquier $R > 0$, definimos la integral

$$\delta_0 = \int_{y \neq 0} \left(\frac{y}{1+y^2} - yI_{\{|y| \leq R\}}(y) \right) \phi(dy).$$

La integral δ_0 existe. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que $\varepsilon < R$. Entonces, se tiene que

$$\delta_0 = \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} -\frac{y^3}{1+y^2} \phi(dy) + \int_{\varepsilon < |y| \leq R} -\frac{y^3}{1+y^2} \phi(dy) + \int_{R < |y|} \frac{y}{1+y^2} \phi(dy).$$

Notar que si $|y| < \varepsilon$, entonces $\frac{y^3}{1+y^2} = O(y^3)$. Esto implica que existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\delta_0| &\leq M \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} |y|^3 \phi(dy) + \int_{\varepsilon < |y| \leq R} \frac{|y|^3}{1+y^2} \phi(dy) + \int_{R < |y|} \frac{|y|}{1+y^2} \phi(dy) \\ &\leq M \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} |y|^3 \phi(dy) + R^2 \int_{\varepsilon < |y| \leq R} \frac{|y|}{1+y^2} \phi(dy) + \int_{R < |y|} \frac{|y|}{1+y^2} \phi(dy) \\ &\leq M \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} |y|^3 \phi(dy) + \max\{1, R^2\} \int_{\varepsilon < |y|} \frac{|y|}{1+y^2} \phi(dy). \end{aligned}$$

Como tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos tomar $\varepsilon < 1$, lo que implica que $|y|^3 \leq y^2$. Además, dado que la función $\frac{y}{1+y^2}$ es acotada, existe $C > 0$ que depende de M y R tal que

$$\begin{aligned} |\delta_0| &\leq C \left\{ \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} y^2 \phi(dy) + \int_{\varepsilon < |y|} \phi(dy) \right\} \\ &= C \left\{ \int_{0 < |y| \leq \varepsilon} y^2 \phi(dy) + \phi\{y : |y| > \varepsilon\} \right\}. \end{aligned}$$

Como ϕ es una medida de Lévy, los términos a la derecha de la última desigualdad son finitos y por ende, δ_0 existe.

Definimos $a_0 = a - \delta_0$ para ver que $\psi(\xi) = \psi_0(\xi)$.

Ahora, si

$$\int_{0 < |y| \leq R} |y| \phi(dy) < +\infty,$$

la integral $\int_{0 < |y| \leq R} y \phi(dy)$ existe. En consecuencia, para $a_1 = a_0 - \int_{0 < |y| \leq R} y \phi(dy)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \psi_0(\xi) &= i\xi a_0 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) - i\xi \int_{y \neq 0} y I_{|y| \leq R}(y) \phi(dy) \\
 &= i\xi a_0 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) - i\xi \int_{\{0 < |y| \leq R\}} y \phi(dy) \\
 &= i\xi a_1 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) = \psi_1(\xi)
 \end{aligned}$$

Finalmente, si

$$\int_{|y| > R} |y| \phi(dy) < +\infty,$$

la integral $\int_{|y| > R} y \phi(dy)$ existe. Entonces, definimos $a_2 = a_0 + \int_{|y| > R} y \phi(dy)$ y vemos que

$$\begin{aligned}
 \psi_0(\xi) &= i\xi a_0 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}(y) - i\xi y I_{\{|y| > R\}}(y)) \phi(dy) \\
 &\quad + \int_{y \neq 0} i\xi y I_{\{|y| > R\}}(y) \phi(dy) \\
 &= i\xi a_2 + \frac{1}{2}\xi^2 b + \int_{y \neq 0} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \phi(dy).
 \end{aligned}$$

La unicidad se sigue del teorema de representación de Lévy. \square

Ejemplo 3.2.6. Sea F una ley estable unilateral con representación de Lévy $[a, 0, \phi]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y

$$\phi(dy) = \begin{cases} C\alpha y^{-\alpha-1} dy & \text{para } y > 0 \\ 0 & \text{para } y < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

para $0 < \alpha < 2$. Notar que ϕ es una medida de Lévy, pues

$$\phi\{y : |y| > R\} = \int_R^{+\infty} \phi(dy) = \int_R^{+\infty} C\alpha y^{-\alpha-1} dy = CR^{-\alpha} < +\infty$$

y

$$\int_{0 < |y| \leq R} y^2 \phi(dy) = \int_0^R C\alpha y^{1-\alpha} dy = \frac{C\alpha}{2-\alpha} R^{2-\alpha} < +\infty.$$

Supongamos que $0 < \alpha < 1$ y notemos que

$$\int_{0 < |y| \leq R} |y| \phi(dy) = \int_0^R C \alpha y^{-\alpha} dy = \frac{C \alpha}{1 - \alpha} R^{1-\alpha} < +\infty.$$

Entonces, por el Teorema 3.1.5 podemos escribir

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi_1(\xi)} = \exp \left\{ i \xi a_1 + \int_0^{+\infty} (e^{i \xi y} - 1) C \alpha y^{-1-\alpha} dy \right\}. \quad (3.7)$$

Nuestro objetivo ahora es evaluar la integral $\int_0^{+\infty} (e^{i \xi y} - 1) C \alpha y^{-1-\alpha} dy$. Para ello, demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.7. *Para $0 < \alpha < 1$, la función característica (3.7) con $a_1 = 0$ está dada por*

$$\hat{\mu}(\xi) = E [e^{i \xi Y}] = e^{-C \Gamma(1-\alpha)(-i \xi)^\alpha}. \quad (3.8)$$

Demostración. La idea es aproximar la integral

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} (e^{i \xi y} - 1) \alpha y^{-\alpha-1} dy$$

por la integral

$$\begin{aligned} I_s(\alpha) &= \int_0^{+\infty} (e^{(i \xi - s)y} - 1) \alpha y^{-\alpha-1} dy \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-s y} \cos(\xi y) - 1) \alpha y^{-\alpha-1} dy + i \int_0^{+\infty} (e^{-s y} \sen(\xi y)) \alpha y^{-\alpha-1} dy, \end{aligned}$$

para $s > 0$. Gracias a la desigualdad triangular, notar que $|e^{(i \xi - s)y} - 1| \leq 2$, pues $s, y > 0$. Entonces el integrando de I_s está acotado por $C_1 y^{-\alpha-1}$ para todo $y > 0$, donde $C_1 = 2\alpha$. Para establecer una cota integrable cercana a 0, notar que para $0 < y < 1$, el teorema del valor medio implica que existe $y_0 \in [0, y]$ tal que

$$|e^{-s y} \sen(\xi y)| \leq |\sen(\xi y)| \leq |\cos(\xi y_0)| y = C_2 y. \quad (3.9)$$

Análogamente, para $e^{-s y} \cos(\xi y) - 1$, existe $y_0 \in [0, y]$ tal que

$$|e^{-s y} \cos(\xi y) - 1| \leq |s \cdot \cos(\xi y_0) + \xi \sen(\xi y_0)| y.$$

Puesto que eventualmente $s \rightarrow 0$, podemos tomar $s > 0$ tal que $s < 1$. En consecuencia, existe $C_3 = 1 + |\xi|$ tal que

$$|e^{-sy} \cos(\xi y) - 1| \leq C_3 y. \quad (3.10)$$

De esta manera, definimos

$$g(y) = \begin{cases} C_4 y^{-\alpha} & \text{si } 0 < y < 1 \\ C_1 y^{-\alpha-1} & \text{si } y \geq 1, \end{cases}$$

donde $C_4 = \max\{C_2, C_3\}$. Así, el integrando de I_s está acotado por g . Notar que g es integrable, pues

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(y) dy &= C_4 \int_0^1 y^{-\alpha} + C_1 \int_1^{+\infty} y^{-\alpha-1} dy \\ &= C_4 \frac{1}{1-\alpha} + C_1 \frac{1}{\alpha} < +\infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, integrando I_s por partes con $u = e^{(i\xi-1)y} - 1$, vemos que

$$I_s(\alpha) = - \left(e^{(i\xi-s)y} - 1 \right) y^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{+\infty} + (i\xi - s) \int_0^{+\infty} e^{(i\xi-s)y} y^{-\alpha} dy.$$

Para continuar, veamos que $- \left(e^{(i\xi-s)y} - 1 \right) y^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{+\infty} = 0$.

Notar que

$$\left| - \left(e^{(i\xi-s)y} - 1 \right) y^{-\alpha} \right| = \left| - \left(e^{(i\xi-s)y} - 1 \right) \right| y^{-\alpha} \leq 2y^{-\alpha} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0. \quad (3.11)$$

Por otro lado, utilizando (3.8) y (3.9) para $0 < y < 1$ se tiene que

$$\left| - \left(e^{(i\xi-s)y} - 1 \right) y^{-\alpha} \right| \leq C y^{1-\alpha} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0. \quad (3.12)$$

Entonces,

$$I_s(\alpha) = (i\xi - s) \int_0^{+\infty} e^{(i\xi-s)y} y^{-\alpha} dy.$$

Recordemos que la función característica de una función de densidad gamma está dada por

$$\int_0^{+\infty} e^{i\xi y} \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} dy = \left(1 - \frac{i\xi}{b} \right)^{-a},$$

para $a, b > 0$. Como $-1 < -\alpha < 0$, podemos fijar $a - 1 = -\alpha$ y $b = s$ para ver que

$$I_s(\alpha) = (i\xi - s) \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{s^{1-\alpha}} \left(1 - \frac{i\xi}{s}\right)^{\alpha-1} = -\Gamma(1 - \alpha)(s - i\xi)^\alpha.$$

Ya que el integrando de $I_s(\alpha)$ converge al integrando de $I(\alpha)$ cuando $s \rightarrow 0$, el Teorema de Convergencia Dominada implica que $I_s(\alpha) \xrightarrow{s \rightarrow 0} I(\alpha)$. La unicidad del límite implica que $I(\alpha) = -\Gamma(1 - \alpha)(-i\xi)^\alpha$. Por lo tanto, se tiene (3.7). \square

La Proposición 3.2.7 implica que la transformada de Fourier de esta ley estable es $E[e^{-i\xi Y}] = \hat{\mu}(-\xi) = e^{-C\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha}$.

Observación 3.2.8. Dada cualquier ley infinitamente divisible μ con función característica $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)}$, podemos definir un proceso de Lévy $\{Z_t\}_t$ como una familia de variables aleatorias Z_t con función característica $E[e^{i\xi Z_t}] = e^{t\psi(\xi)}$ para $t \geq 0$. En este sentido, un proceso de Lévy es un proceso infinitamente divisible, tal que

- $Z_0 = 0$.
- $Z_{t+s} - Z_t \simeq Z_s \quad \forall s, t > 0$ (incrementos estacionarios).
- Z_t es independiente de $Z_{t+s} - Z_t \quad \forall s, t > 0$ (incrementos independientes).

En la Observación 3.2.8 notar que para cada t , $Z_t \simeq [at, bt, \phi t]$, pues

$$t\psi(\xi) = i\xi at + \frac{1}{2}\xi^2 bt + \int_{x \neq 0} \left(e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1 + y^2} \right) t\phi(dy).$$

Si tomamos μ como en la Proposición 3.2.7, el proceso de Lévy estable Z_t tiene transformada de Fourier $\hat{p}(\xi, t) = e^{-Dt(i\xi)^\alpha}$, donde $D = C\Gamma(1 - \alpha) > 0$. Esta transformada de Fourier resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = -D(i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t),$$

la cual se invierte en la ecuación de difusión fraccionaria

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -D \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha}$$

Ejemplo 3.2.9. Para motivar el siguiente resultado, supongamos que una variable aleatoria Y sigue una ley estable unilateral μ con $1 < \alpha < 2$ y tripleta de Lévy $[a, 0, \phi]$. Para cada $R > 0$ notar que

$$\int_{|y| > R} |y| \phi(dy) = \int_R^{+\infty} C\alpha y^{-\alpha} dy = \frac{C\alpha}{\alpha - 1} R^{1-\alpha}$$

es finito. Entonces, por el Teorema 3.2.5, podemos escribir

$$E[e^{i\xi Y}] = \exp\{i\xi a_2 + \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) C \alpha y^{-\alpha-1} dy\}. \quad (3.13)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar una expresión para la integral en (3.13), lo cual se hará en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.10. *Para $1 < \alpha < 2$, la función característica estable (3.13) con $a_2 = 0$ puede ser escrita de la forma*

$$\hat{\mu}(\xi) = \exp\left\{C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha\right\}$$

Demostración. Aproximaremos la integral

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \alpha y^{-\alpha-1} dy$$

con la integral

$$J_s(\alpha) = \int_0^{+\infty} (e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi-s)y) \alpha y^{-\alpha-1} dy,$$

para $s > 0$. Notar que cuando s tiende a 0, el integrando de J_s converge al integrando de J . Además, si integramos por partes con $u = e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi-s)y$ para ver que J_s puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} J_s(\alpha) &= - \left[e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi-s)y \right] y^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{+\infty} \\ &\quad + (i\xi-s) \int_0^{+\infty} \left[e^{(i\xi-s)y} - 1 \right] y^{-\alpha} dy \\ &= \frac{i\xi-s}{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \left[e^{(i\xi-s)y} - 1 \right] (\alpha-1) y^{-(\alpha-1)-1} dy \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha - 1 < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} J_s(\alpha) &= \frac{i\xi-s}{\alpha-1} I_s(\alpha-1) \\ &= -\frac{i\xi-s}{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha+1) (s-i\xi)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (s-i\xi)^\alpha. \end{aligned}$$

Notar que $-[e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi - s)y] y^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{+\infty} = 0$, pues

$$\begin{aligned} \left| [e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi - s)y] y^{-\alpha} \right| &\leq |e^{(i\xi-s)y} - 1| y^{-\alpha} + |(i\xi - s)| y^{1-\alpha} \\ &\leq 2y^{-\alpha} + |(i\xi - s)| y^{1-\alpha} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, el mismo razonamiento utilizado para obtener la desigualdad (1.19) implica que para $0 < y < 1$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left| [e^{(i\xi-s)y} - 1 - (i\xi - s)y] y^{-\alpha} \right| \leq C_1 y^{2-\alpha} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

En consecuencia, el Teorema de Convergencia Dominada y la unicidad del límite implican que

$$J_s(\alpha) \xrightarrow{s \rightarrow 0} J(\alpha) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha$$

□

Si tomamos μ tal que $a_2 = 0$, la Proposición 3.2.10 implica que el proceso estable de Lévy $\{Z_t\}_t$ tiene transformada de Fourier

$$\hat{p}(\xi, t) = E[e^{-i\xi Z_t}] = e^{Dt(i\xi)^\alpha},$$

donde $D = C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}$. La transformada de Fourier $\hat{p}(\xi, t)$ resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = D(i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t),$$

la cual se invierte en la ecuación de difusión fraccionaria

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha}.$$

Algo curioso que podemos observar es que cuando $0 < \alpha < 1$, al lado derecho de la ecuación de difusión aparece un signo negativo, cosa que no pasa cuando $1 < \alpha < 2$. Este tipo de ecuaciones diferenciales son conocidas como ecuaciones de difusión anómalas, y modelan la propagación de sistemas de partículas que se hallan lejos del equilibrio termodinámico. La difusión anómala generalmente aparece cuando las funciones de densidad de partículas sobre un fluido se puede aproximar como una ley de potencias, es decir, $f(x) \sim x^{-\alpha-1}$.

3.3. Semigrupos

En esta sección, la representación de Lévy es una herramienta fundamental que permite conectar la teoría de distribuciones estables, la teoría de semigrupos y el cálculo fraccionario. Naturalmente, la teoría de semigrupos nos conducirá a la forma de generador de la derivada fraccionaria.

3.3.1. Algunas generalidades acerca de espacios de Banach

Una norma en un espacio vectorial X es una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfice las siguientes propiedades,

- a. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$
- b. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- c. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Notar que la tercera propiedad es equivalente a $\|x\| > 0 \iff x \neq 0$.

La norma $\|\cdot\|$ induce la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$

Definición 3.3.1. Se dice que un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si X es un espacio completo con la métrica inducida por su norma $\|\cdot\|$.

Ejemplo 3.3.2. Para cualquier espacio métrico S , el espacio $\mathcal{C}_b(S)$ de funciones continuas y acotadas en S es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$. La completitud del espacio $\mathcal{C}_b(S)$ se sigue del hecho de que es el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Si el espacio S es compacto, entonces $\mathcal{C}_b(S) = \mathcal{C}(S)$.

El espacio dual X^* de un espacio de Banach X es por definición el espacio de todos los funcionales lineales y continuos de X en \mathbb{R} (o en \mathbb{C} , si se trabaja con escalares complejos).

Dado $v^* \in X^*$, al evaluarlo en $x \in X$, el valor resultante es un número real, el cual suele ser denotado como $v^*(x)$ o $\langle v^*, x \rangle$. El espacio dual X^* es un espacio de Banach con la norma

$$\|v^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle v^*, x \rangle|,$$

de donde se deduce la siguiente desigualdad

$$|\langle v^*, x \rangle| \leq \|v^*\|_{X^*} \|x\|_X.$$

Un hecho fundamental es que X^* tiene buenas propiedades como para separar los puntos de X , es decir, si $x, y \in X$ y $\langle v^*, x \rangle = \langle v^*, y \rangle \forall v^* \in X^*$, entonces necesariamente $x = y$.

Un operador lineal de X en X es una aplicación A cuyo dominio

$$\text{Dom}(A) = \{x \in X : \exists y = Ax \in X\}$$

y rango

$$\text{Rank}(A) = \{Ax : x \in \text{Dom}(A)\}$$

son subespacios vectoriales de X .

El grafo $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) : x \in \text{Dom}(A)\}$ es un subespacio vectorial del espacio $X \times X$. El espacio producto $X \times X$ es un espacio de Banach con la norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

El operador A es un operador lineal cerrado si $\mathcal{G}(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times X$ o equivalentemente si $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$, entonces $x \in \text{Dom}(A)$ y $Ax = g$.

El operador cerrado A es un operador acotado si $\text{Dom}(A) = X$ y si su norma $\|A\|$ es finita. Esto es equivalente a que A sea un operador continuo. Si $\|A\| \leq 1$ se dice que A es una contracción.

En espacios de dimensión infinita es natural considerar operadores no acotados que estén definidos solamente en un subespacio. Por ejemplo, en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ el operador derivada $Df = f'$ es un operador lineal no acotado cuyo dominio es el subespacio de funciones con derivada continua y acotada.

Un ejemplo de operador lineal acotado en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ es el siguiente

$$Af(x, t) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) f(y) dy$$

donde $p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ es la probabilidad de transición del movimiento Browniano. La linealidad del operador A se sigue inmediatamente de la linealidad de la integral y gracias a que para todo x se tiene que $\int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) dy = 1$, el operador A es lineal y acotado en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Aún más, A es una contracción.

3.3.2. El generador de un semigrupo

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T(t) : X \rightarrow X$ un operador lineal y acotado para cada $t \geq 0$. Se dice que la familia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un *semigrupo* si

- $T(0) = I$, donde $I : X \rightarrow X$ es el operador identidad.
- $T(s+t) = T(s)T(t) \forall s, t \geq 0$, donde $T(s)T(t)$ se refiere a la composición de operadores.

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo si $\|T(t)f - f\| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \forall f \in X$.

En el caso en que cada $T(t)$ sea una contracción, se dice que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo contráctil.

Lema 3.3.3. *Suponga que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo \mathcal{C}_0 contráctil en X . Entonces, para todo $f \in X$, la función $T(\cdot)f : [0, +\infty) \rightarrow X$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $f \in X$. Para cada $t, h \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)f - T(t)f\| &= \|T(t)T(h)f - T(t)f\| \\ &= \|T(t)[T(h)f - f]\| \\ &\leq \|T(h)f - f\| \end{aligned}$$

y para cada $0 \leq h \leq t$

$$\begin{aligned} \|T(t-h)f - T(t)f\| &= \|T(t-h)f - T(t-h)T(h)f\| \\ &= \|T(t-h)[f - T(h)f]\| \\ &\leq \|f - T(h)f\| \end{aligned}$$

Notar que en ambas desigualdades, el término a la derecha se anula cuando $h \rightarrow 0$ y en consecuencia, obtenemos una cota uniforme respecto a t . Esto implica que $T(\cdot)f$ es uniformemente continua. □

Definición 3.3.4. El generador (también llamado generador infinitesimal) de un semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un operador L definido como

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \tag{3.14}$$

con dominio $Dom(L) = \{f \in X : \text{el límite } Lf \text{ existe}\}$. La convergencia (3.14) es en el sentido de la norma del espacio X .

Teorema 3.3.5. *Sea $\{T(t)\}_t$ un semigrupo C_0 contráctil en X con generador L . Entonces*

a. Para todo $f \in X$ y $t > 0$, $\int_0^t T(s)f ds \in Dom(L)$ y

$$T(t)f - f = L \int_0^t T(s)f ds \quad (3.15)$$

b. Para todo $f \in Dom(L)$ y $t \geq 0$, $T(t)f \in Dom(L)$ y

$$\frac{d}{dt}T(t)f = LT(t)f = T(t)Lf \quad (3.16)$$

c. Para todo $f \in Dom(L)$ y $t \geq 0$

$$T(t)f - f = \int_0^t LT(s)f ds = \int_0^t T(s)Lf ds \quad (3.17)$$

Demostración.

a) Sea $f \in X$.

Notemos que todo operador lineal y acotado es automáticamente un operador cerrado. Entonces, gracias al Teorema de Hille podemos introducir el operador en la integral:

$$\begin{aligned} X \ni \frac{T(h) - I}{h} \left[\int_0^t T(s)f ds \right] &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h) - T(0))T(s)f ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h+s) - T(s))f ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(m)f dm - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)f ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f ds \\ &= \frac{\int_h^{t+h} T(s)f ds - \int_0^t T(s)f ds}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_t^{t+h} T(s)f ds + \int_h^t T(s)f ds - \int_0^t T(s)f ds}{h} \\
&= \frac{\int_t^{t+h} T(s)f ds - \int_t^h T(s)f ds - \int_0^t T(s)f ds}{h} \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)f ds
\end{aligned}$$

Ahora, gracias al Teorema de diferenciación de Lebesgue para funciones valuadas hacemos tender $h \rightarrow 0$, para ver que:

$$\begin{aligned}
L \int_0^t T(s)f ds &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f ds - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)f ds \\
&= T(t)f - T(0)f \\
&= T(t)f - f
\end{aligned}$$

b) Sean $t \geq 0$, $h > 0$ y $f \in \text{Dom}(L)$. Entonces

$$\frac{T(t+h)f - T(t)f}{h} = T(t) \left[\frac{T(h)f - f}{h} \right].$$

Como $T(t)$ es un operador lineal y acotado para cada $t \geq 0$, se tiene que

$$\frac{d}{dt} T(t)f = T(t) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)f - f}{h} \right] = T(t)Lf.$$

Además, ya que $T(t)f \in X$

$$\frac{T(t+h)f - T(t)f}{h} = \frac{T(h)T(t)f - T(t)f}{h}.$$

Entonces, se tiene que

$$\frac{d}{dt} T(t)f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)T(t)f - T(t)f}{h} = LT(t)f, \quad (3.18)$$

como el límite (3.18) existe para $T(t)f$, se tiene que $T(t)f \in \text{Dom}(L)$.

Por otro lado, sean $h > 0$ y $t \geq h$. Entonces,

$$\frac{T(t-h)f - T(t)f}{-h} - T(t)Lf = T(t-h) \left[\frac{f - T(h)f}{-h} \right] - T(t)Lf$$

$$\begin{aligned}
&= T(t-h) \left[\frac{T(h)f - h}{h} \right] - T(t)Lf + T(t-h)Lf \\
&\quad - T(t-h)Lf \\
&= T(t-h) \left[\frac{T(h)f - f}{h} - Lf \right] + T(t-h)Lf - T(t)Lf.
\end{aligned}$$

Tomando la norma en la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t-h)f - T(t)f}{-h} - T(t)Lf \right\| &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)f - f}{h} - Lf \right\| \\
&\quad + \|T(t-h)Lf - T(t-h+h)Lf\| \\
&\leq \left\| \frac{T(h)f - f}{h} - Lf \right\| + \|L(f) - T(h)Lf\|
\end{aligned}$$

Haciendo $h \searrow 0$ se tiene que

$$\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{T(t-h)f - T(t)f}{-h} - T(t)Lf \right\| = 0.$$

Esto muestra la segunda igualdad de (3.16).

c) Dado que $T(t)f$ es diferenciable respecto a t , entonces es continua en t . En consecuencia, el Teorema fundamental del cálculo para funciones valuadas en un espacio de Banach implica que

$$\int_0^t LT(s)f ds = \int_0^t T(s)Lf ds = \int_0^t \frac{d}{dt} T(s)f ds = T(t)f - f.$$

□

Corolario 3.3.6. Si L es el generador de un semigrupo \mathcal{C}_0 contráctil en X , entonces $\text{Dom}(L)$ es denso en X .

Demostración. Sea $f \in X$ y $t_n = \frac{1}{n} > 0$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f}{t_n} \in X$. Por el Teorema 3.3.5 parte a), se tiene que la sucesión

$$\left\{ \int_0^{t_n} T(s) \frac{f}{t_n} ds \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)f ds \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

pertenece a $\text{Dom}(L)$. Ya que el semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo, gracias al Teorema de diferenciación de Lebesgue para funciones valuadas se tiene que

$$\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)f ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(0)f = f.$$

En consecuencia, $\text{Dom}(L)$ es denso en X .

□

3.3.3. Operadores diferenciales en semigrupos infinitamente divisibles

Antes de empezar con esta sección, utilizaremos la notación $\{T_t\}_t$ o $\{T(t)\}_t$ para referirnos a un semigrupo.

Sea $\{T_t\}_t$ un semigrupo \mathcal{C}_0 contráctil en un espacio de Banach X . Para $f \in X$ arbitrario, pero fijo, definimos $q(t) = T_t f$. Como $T_0 f = f$, el inciso b) del Teorema 3.3.5 implica que esta función resuelve el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} &= Lq \\ q(0) &= f \end{cases} \quad (3.19)$$

para todo $f \in \text{Dom}(L)$.

Si consideramos $X = C_0(\mathbb{R})$ (el espacio de funciones continuas que se anulan en el infinito) o $L^p(\mathbb{R})$ (el espacio de funciones medibles tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx$ existe), entonces para $f \in X$, la función $q(x, t) = T_t f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) &= Lq(x, t) \\ q(x, 0) &= f(x). \end{cases} \quad (3.20)$$

En el caso que $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, entonces (3.20) es la ecuación de difusión tradicional y (3.19) representa esta EDP como una EDO en un espacio adecuado de funciones.

Dado un proceso de Lévy $\{Z_t\}_{t \geq 0}$, definimos una familia de operadores lineales

$$T_t f(x) = E[f(x - Z_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)p(y, t)dy, \quad (3.21)$$

para $t \geq 0$ y funciones f adecuadas (por ejemplo, $f \in C_0(\mathbb{R})$). La función $p(\cdot, t)$ corresponde a la función de densidad de cada variable aleatoria Z_t .

La familia de operadores $\{T_t\}$ es lineal gracias a la linealidad de la integral. Además, notar que para todo $f \in C_0(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)p(x - y, t)dy \right| \\ &\leq \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} p(x - y, t)dx \end{aligned}$$

$$= \|f\|_\infty.$$

En consecuencia, $\|T_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ para todo $t \geq 0$.

Por otro lado, $T_0 f(x) = E[f(x - Z_0)] = E[f(x - 0)] = E[f(x)] = f(x)$ y

$$\begin{aligned} T_{t+s} f(x) &= E[f(x - Z_{t+s})] \\ &= E[E[f(x - \{(Z_{t+s} - Z_t) + Z_t\}) \mid Z_t]] \\ &= \int E[f(x - \{Z_s + y\})] p(y, t) dy \\ &= \int E[f(x - y - Z_s)] p(y, t) dy \\ &= \int T_s f(x - y) p(y, t) dy \\ &= E[T_s f(x - Z_t)] = T_t T_s f(x) \end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe a que $\{Z_t\}$ es un proceso de Lévy y una de sus propiedades es que tiene incrementos estacionarios ($Z_{t+s} - Z_t \simeq Z_s$) e independientes ($Z_{t+s} - Z_t$ es independiente de Z_t).

En consecuencia, la familia de operadores (3.21) define un semigrupo \mathcal{C}_0 contráctil en el espacio de funciones $C_0(\mathbb{R})$.

El siguiente resultado da una forma explícita del generador en términos de la representación de Lévy.

Teorema 3.3.7. *Sea $\{Z_t\}_t$ un proceso de Lévy tal que $E[e^{i\xi Z_1}] = e^{\psi(\xi)}$, donde $\psi(\xi)$ está dado por (3.2). Entonces (3.21) define un semigrupo \mathcal{C}_0 contráctil en $C_0(\mathbb{R})$ con generador*

$$L f(x) = -a f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} \left(f(x - y) - f(x) + y \frac{f'(x)}{1 + y^2} \right) \phi(dy) \quad (3.22)$$

El dominio $Dom(L)$ contiene todas las funciones f tal que $f, f', f'' \in C_0(\mathbb{R})$.

Si tenemos que $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\psi(-\xi) \hat{f}(\xi)$ es la transformada de Fourier de $L f$.

Demostración. Notar que $T_t f(x) = (f * p(\cdot, t))(x)$. Entonces, como $f \in C_0(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x [Lf] (\xi) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_x [f * p(\cdot, t)] (\xi) - \mathcal{F}_x [f] (\xi)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi) \hat{p}(\xi, t) - \hat{f}(\xi)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi) e^{t\psi(-\xi)} - \hat{f}(\xi)}{t} \\
&= \hat{f}(\xi) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + t\psi(-\xi) + \frac{1}{2}t^2\psi^2(-\xi)) - 1}{t} \\
&= \psi(-\xi) \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Usando (3.2) vemos que

$$\psi(-\xi) \hat{f}(\xi) = -a(i\xi) \hat{f}(\xi) + \frac{1}{2}(i\xi)^2 b \hat{f}(\xi) + \int_{y \neq 0} \left(e^{-i\xi y} - 1 + \frac{i\xi y}{1 + y^2} \right) \hat{f}(\xi) \phi(dy).$$

Realizamos el cambio de variable $u = x - y$ para ver que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x - y) dx = e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi).$$

Entonces, invertimos la transformada de Fourier $\psi(-\xi) \hat{f}(\xi)$ para obtener (3.22). La condición de que $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ es necesaria para que la transformada de Fourier de Lf exista.

Además, de la forma (3.22) vemos que es necesario que el dominio de L esté conformado por las funciones $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tal que $f' \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ y $f'' \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. □

El término $\psi(-\xi)$ es conocido como *símbolo de Fourier* del generador L . A continuación, mediante ejemplos conocidos, se ilustrará la mecánica de un semigrupo en los procesos estocásticos.

Ejemplo 3.3.8. Si $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 2Dt)$ para cada $t > 0$, entonces gracias a la representación de Lévy de una distribución normal vemos que

$$\hat{\mu}_t(\xi) = e^{-tD\xi^2} = e^{tD(i\xi)^2} = e^{t\psi(\xi)}.$$

En este ejemplo el símbolo de Fourier es $\psi(-\xi) = D(i\xi)^2$. Si invertimos la expresión

$$\psi(-\xi) \hat{f}(\xi) = D(i\xi)^2 \hat{f}(\xi),$$

el Teorema 3.3.7 implica que el generador asociado a este semigrupo es

$$Lf(x) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x).$$

Además, (3.20) implica que la ecuación diferencial asociada a este semigrupo es el problema de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t)$$

con condición inicial $q(x, 0) = f(x)$, donde $q(x, t) = T_t f(x)$ es la solución a este problema y está dada por

$$q(x, t) = E [f(x - Z_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) p(y, t) dy,$$

donde

$$p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

es la función de densidad de Z_t .

Si la localización inicial de la partícula es una variable aleatoria X independiente de Z_t con función de densidad de probabilidad f , la localización de la partícula al tiempo t es

$$X + Z_t.$$

Como X es independiente de cada Z_t , entonces su función de densidad está dada por la convolución $f * p(\cdot, t)$. Gracias a esto, el movimiento Browniano con localización inicial aleatoria X tiene función de densidad

$$X + Z_t \sim \int_{\mathbb{R}} f(x - y) p(y, t) dy = T_t f(x).$$

En este sentido, es natural que $q(x, t)$ sea la solución al problema de Cauchy, ya que la función de densidad $T_t f(x)$ nos proporciona la concentración de partículas descritas por el proceso $X + Z_t$, el cual está asociado a un fenómeno difusivo con localización inicial aleatoria.

Ejemplo 3.3.9. Si $Z_t = tv$ para alguna constante de velocidad $v \neq 0$. Vemos que el semigrupo asociado a este proceso es

$$T_t f(x) = E [f(x - vt)] = f(x - vt)$$

y entonces su generador está dado por

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{t} \cdot \frac{v}{v} = -vf'(x).$$

En este caso

$$\hat{\mu}_t(\xi) = E[e^{i\xi vt}] = e^{t(i\xi v)},$$

de donde $\psi(\xi) = i\xi v$ y $\psi(-\xi)\hat{f}(\xi) = -i\xi v\hat{f}(\xi)$. Si invertimos esta última expresión, el Teorema 3.3.7 nos garantiza que la forma del generador infinitesimal asociado a este semigrupo está dada por $Lf = -v\frac{\partial}{\partial x}f$. Además, (3.20) implica que $q(x, t) = f(x - vt)$ resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x, t) = -v\frac{\partial}{\partial x}q(x, t)$$

con condición inicial $q(x, 0) = f(x)$. El signo negativo en la última ecuación diferencial puede ser explicado por la primera ley de Fick, la cual asegura que el flujo va desde una región de alta concentración a las regiones de baja concentración, con una magnitud que es proporcional al gradiente de concentración (derivada espacial). Esto nos indica que si la concentración incrementa en una dirección x , entonces el flujo de partículas está en dirección opuesta de x .

Si consideramos un movimiento Browniano con tendencia $vt + Z_t \sim \mathcal{N}(vt, \sigma^2 t)$, donde $Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ es un movimiento Browniano estándar; el Teorema de representación de Lévy muestra que

$$t\psi(\xi) = i\xi vt + \frac{1}{2}(i\xi)^2\sigma^2 t,$$

de donde el símbolo de Fourier es $\psi(-\xi)\hat{f}(\xi) = i\xi v\hat{f}(\xi) + \frac{1}{2}(i\xi)^2\sigma^2\hat{f}(\xi)$. Gracias a la linealidad de la transformada de Fourier, invertimos $\psi(-\xi)\hat{f}(\xi)$ para ver que

$$Lf = -v\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f.$$

En consecuencia, el generador infinitesimal asociado al movimiento Browniano con tendencia es la ecuación de reacción-difusión

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x, t) = Lq(x, t) = -v\frac{\partial}{\partial x}q(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x, t)$$

con condición inicial $q(x, 0) = f(x)$. Notar que,

$$q(x, t) = T_t f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - vt - y)p(y, t)dy,$$

donde $p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}$ es la función de densidad de probabilidad de Z_t .

Realizando el cambio de variable $u = vt + y$ vemos que

$$\begin{aligned} q(x, t) &= T_t f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u) p(u - vt, t) du \\ q(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) p(y - vt, t) dy \\ q(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) P(y, t) dy. \end{aligned}$$

La función $P(y, t) = p(y - vt, t)$ es la función de densidad de $vt + Z_t$. En efecto,

$$\begin{aligned} P(y, t) &= p(y - vt, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-vt)^2}{2\sigma^2 t}}. \end{aligned}$$

El Teorema 3.3.7 da una forma explícita del generador de un semigrupo infinitamente divisible. Entonces, ahora nos concierne utilizar este resultado para conectar esta teoría con la forma de generador de la derivada fraccionaria. Con el fin de aplicar el Teorema 3.3.7 a semigrupos estables es conveniente desarrollar formas alternativas para el generador infinitesimal.

Teorema 3.3.10. *Sea Z_t un proceso de Lévy tal que $E[e^{i\xi Z_1}] = e^{\psi(\xi)}$, donde $\psi(\xi)$ está dado por (3.2). Entonces, bajo las condiciones del Teorema 3.3.7 podemos escribir el generador (3.22) de la forma*

$$Lf(x) = -a_0 f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x - y) - f(x) + y f'(x) I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \quad (3.23)$$

para cualquier $R > 0$ y un único a_0 dependiente de a y R . Aún más:

a. Si $\int_{0 < |y| \leq R} |y| \phi(dy) < +\infty$, podemos escribir

$$Lf(x) = -a_1 f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x - y) - f(x)) \phi(dy) \quad (3.24)$$

para un único a_1 dependiente de a_0 .

b. Si $\int_{|y|>R} |y|\phi(dy) < +\infty$, podemos escribir

$$Lf(x) = -a_2 f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x-y) - f(x) + y f'(x)) \phi(dy) \quad (3.25)$$

para un único a_2 dependiente de a_0 .

Demostración. La demostración es similar a la demostración del Teorema 3.2.5. Recordemos que para cualquier $R > 0$, la integral

$$\delta_0 = \int \left(\frac{y}{1+y^2} - y I_{\{|y| \leq R\}} \right) \phi(dy)$$

existe. Entonces, definimos $a_0 = a - \delta_0$ para ver que

$$\begin{aligned} Lf(x) &= -a f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x-y) - f(x) + y f'(x) I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \\ &\quad - \delta_0 f'(x) \\ &= -a_0 f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x-y) - f(x) + y f'(x) I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy). \end{aligned}$$

Si $\int_{0 < |y| \leq R} |y|\phi(dy) < +\infty$, la integral $\delta_1 = \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy)$ existe. Entonces, definimos $a_1 = a_0 - \delta_1$ para ver que

$$\begin{aligned} Lf(x) &= -a_0 f'(x) + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x-y) - f(x) + y f'(x) I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \\ &= - \left(a_0 - \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy) \right) f'(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} b f''(x) + \int_{y \neq 0} (f(x-y) - f(x)) \phi(dy). \end{aligned}$$

Finalmente, nótese que

$$\int_{y \neq 0} (y f'(x) I_{\{|y| \leq R\}} + y f'(x) I_{\{|y| > R\}}) \phi(dy) = \int_{y \neq 0} y f'(x) \phi(dy).$$

Además, como $\delta_2 = \int_{|y|>R} |y|\phi(dy) < +\infty$, definimos $a_2 = a_0 + \delta_2$ para obtener (3.25). \square

Ejemplo 3.3.11. Sea Z_t un proceso de Lévy estable con índice $0 < \alpha < 1$, tal que Z_1 tiene función característica unilateral

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi_1(\xi)} = \exp \left\{ i\xi a_1 + \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) C\alpha y^{-\alpha-1} dy \right\}$$

Si $a_1 = 0$ vemos que

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{-C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha}.$$

Entonces el símbolo de Fourier para el semigrupo unilateral asociado es

$$\psi(-\xi) = -C\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha.$$

Además, de (3.24) se sigue que el generador infinitesimal asociado al proceso de Lévy $\{Z_t\}$ es

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} (f(x-y) - f(x)) C\alpha y^{-\alpha-1} dy.$$

Si tomamos $C = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$, naturalmente surge la forma de generador de la derivada fraccionaria (2.12) para $0 < \alpha < 1$. En este caso, vemos que $Lf = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f$. Para invertir $\mathcal{F}[Lf](\xi) = \psi(-\xi)\hat{f}(\xi) = -(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$, es necesario que el dominio del generador L esté conformado por las funciones $f \in L^1(0, +\infty)$ tal que f' y f'' existan y sean integrables en $(0, +\infty)$.

Ejemplo 3.3.12. Sea $\{Z_t\}$ un proceso de Lévy estable con índice $1 < \alpha < 2$ tal que Z_1 tiene función característica unilateral (3.12) con $a_2 = 0$. Entonces, la Proposición 3.2.10 implica que

$$\hat{\mu}(\xi) = \exp \left\{ C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha \right\}.$$

Entonces, el símbolo de Fourier del semigrupo asociado es $\psi(-\xi) = C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha$. Además, (3.24) implica que

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} (f(x-y) - f(x) + yf'(x)) C\alpha y^{-\alpha-1} dy.$$

Si tomamos $C = \frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)}$, naturalmente emerge la forma de generador de la derivada de Caputo para el caso $1 < \alpha < 2$. Así, $Lf = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f$, para $f \in C_0(\mathbb{R})$ tal que $f', f'' \in C_0(\mathbb{R})$.

Capítulo 4

Distribuciones límite estables

El Teorema del Límite Central (TLC) describe el comportamiento asintótico de la suma de variables aleatorias independientes con función de densidad f_X en común. Cabe mencionar que el TLC no depende de la elección de la función de densidad, pero sí de que esta posea una varianza finita. En este sentido, la distribución normal actúa como un agujero negro en estadística [4]. Entonces, decimos que aquellas funciones de densidad con varianza finita pertenecen al dominio de atracción Gaussiano. Por otro lado, si consideramos un conjunto más amplio de funciones de densidad, en nuestro caso funciones de densidad que siguen una ley de potencias, es decir, $f_X(x) \sim x^{-(\alpha+1)}$, con $0 < \alpha < 2$, es posible demostrar que su segundo momento diverge y, en consecuencia, el TLC no es de mucha ayuda en este caso. Entonces, ¿es posible hallar una distribución límite que describa el comportamiento asintótico de la suma de variables aleatorias, donde cada sumando sigue una ley de potencias?

La respuesta a la última interrogante es sí. A largo plazo, la suma de variables aleatorias que siguen una ley de potencias se comporta como una variable aleatoria estable, que como habíamos discutido con anterioridad, carecen de una expresión matemática que represente su función de densidad, pero afortunadamente el Teorema de representación de Lévy nos da una expresión que las caracteriza a través de su función característica.

4.1. Aproximación de Poisson

Para motivar la demostración de una versión extendida del Teorema del Límite Central (TLC) por un método conocido como arreglos triangulares, en esta sección veremos cómo las leyes estables emergen como el límite débil (límite en distribución) de una variable aleatoria de Poisson compuesta con saltos de Pareto.

Sea Y una variable aleatoria estable unilateral con función característica

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)},$$

donde

$$\psi(\xi) = \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) C\alpha y^{-\alpha-1} dy = -C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha$$

con $0 < \alpha < 1$. Para cada natural $n > 0$, definimos Y_n como la variable aleatoria con función característica $E[e^{i\xi Y_n}] = e^{\psi_n(\xi)}$, donde

$$\psi_n(\xi) = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) C\alpha y^{-\alpha-1} dy. \quad (4.1)$$

Definimos

$$\lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} C\alpha y^{-\alpha-1} dy = -Cy^{-\alpha} \Big|_{\frac{1}{n}}^{+\infty} = Cn^\alpha > 0$$

para ver que

$$\begin{aligned} \psi_n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1) \alpha C y^{-\alpha-1} I_{\{y > \frac{1}{n}\}} dy \\ &= \lambda_n \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1) \omega_n(dy), \end{aligned}$$

donde $\omega_n(dy) = \lambda_n^{-1} C\alpha y^{-\alpha-1} I_{\{y > \frac{1}{n}\}} dy$ es una medida de probabilidad. Notar que este es un caso especial de una distribución de Pareto.

Sea $\{W_j\}_j$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con medida de probabilidad ω_n . Así,

$$P(W_j > x) = \int_x^{+\infty} n^{-\alpha} \alpha y^{-\alpha-1} dy = -n^{-\alpha} y^{-\alpha} \Big|_x^{+\infty} = Ax^{-\alpha} \quad \forall x > A^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{n}.$$

Escribimos

$$\psi_n(\xi) = \lambda_n \left[\int e^{i\xi y} \omega_n(dy) - \int \omega_n(dy) \right] = \lambda_n [\hat{\omega}_n(\xi) - 1] \quad (4.2)$$

para ver que Y_n es una variable aleatoria de Poisson compuesto. En efecto, notar que al igual que en el ejemplo 1.3.4, $Y_n \simeq W_1 + W_2 + \dots + W_N$, donde W_1, W_2, \dots, W_N son variables aleatorias de Pareto con $P(W_k > x) = Ax^{-\alpha}$ y N una variable aleatoria de Poisson independiente de cada W_k y con media $\lambda_n = Cn^\alpha$. Además, notar que de (4.1) se tiene que

$$\psi_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Gracias a la continuidad de la función exponencial, vemos que

$$\hat{\mu}_n(\xi) = e^{\psi_n(\xi)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\psi(\xi)} = \hat{\mu}(\xi).$$

En consecuencia, el teorema de continuidad de Lévy implica que $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

De estos cálculos sencillos podemos ver que una ley estable es esencialmente una ley de Poisson compuesta con saltos que siguen una distribución de Pareto. Podemos observar que el número medio de saltos $\lambda_n = Cn^\alpha$ crece indefinidamente a medida que n tiende a infinito, mientras su tamaño mínimo de salto $\frac{1}{n}$ tiende a 0. Esto evidencia que la intensidad de salto $\phi_n(dy) = \lambda_n \omega_n(dy)$ ciertamente incrementa sin límite a la medida de Lévy ϕ de la ley estable. En otras palabras, esto quiere decir que una variable aleatoria que sigue una distribución estable de Lévy es la acumulación de un número infinito de saltos con ley de potencias (o distribución de Pareto). Entonces, para cada $n > 0$, una variable aleatoria de Lévy combina un número finito de saltos de tamaño mayor a $\frac{1}{n}$ con un número infinito de saltos de tamaño menor a $\frac{1}{n}$.

Para $0 < \alpha < 2$ consideremos una distribución de Pareto bilateral μ con representación de Lévy $[a, 0, \phi]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y

$$\phi(dy) = \begin{cases} pC\alpha y^{-\alpha-1} dy & \text{si } y > 0 \\ qC\alpha |y|^{-\alpha-1} dy & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

donde $p, q \geq 0$ y $p + q = 1$. Esta es una medida de Lévy, pues para todo $R > 0$

$$\int_{0 < |y| \leq R} y^2 \phi(dy) = \int_{-R}^0 qC\alpha y^2 |y|^{-\alpha-1} dy + \int_0^R pC\alpha y^2 y^{-\alpha-1} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-R}^0 qC\alpha(-y)^{1-\alpha} dy + \int_0^R pC\alpha y^{1-\alpha} dy \\
&= -\frac{qC\alpha}{2-\alpha}(-y)^{2-\alpha} \Big|_{-R}^0 + \frac{pC\alpha}{2-\alpha} y^{2-\alpha} \Big|_0^R \\
&= \frac{C\alpha}{2-\alpha} R^{2-\alpha}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\phi\{y : |y| > R\} &= \int_{|y|>R} \phi(dy) \\
&= pC\alpha \int_R^{+\infty} y^{-\alpha-1} dy + qC\alpha \int_{-\infty}^{-R} |y|^{-\alpha-1} dy \\
&= -pCy^{-\alpha} \Big|_R^{+\infty} + qC(-y)^{-\alpha} \Big|_{-\infty}^{-R} = CR^{-\alpha}
\end{aligned}$$

son finitos. Ahora, consideremos una variable aleatoria estable bilateral Y con índice $0 < \alpha < 1$. Notemos que

$$\int_{0 < |y| \leq R} |y| \phi(dy) = C\alpha \int_0^R y^{-\alpha} dy = \frac{C\alpha}{1-\alpha} R^{1-\alpha}$$

es finito. En consecuencia, el Teorema 3.2.5 (a) implica que si Y está centrada ($a_1 = 0$), entonces tiene función característica $\hat{\mu}(\xi) = E[e^{i\xi Y}] = e^{\psi(\xi)}$, donde

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) \\
&= p \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) C\alpha y^{-\alpha-1} dy + q \int_{-\infty}^0 (e^{i\xi y} - 1) C\alpha (-y)^{-\alpha-1} dy \\
&= -pC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha + q \int_0^{+\infty} (e^{-i\xi x} - 1) C\alpha x^{-\alpha-1} dy \\
&= -pC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - qC\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha.
\end{aligned}$$

Notar que en el tercer paso se realizó un cambio de variable $x = -y$ y luego se usó la Proposición 3.2.7. Definimos $\hat{\mu}_n(\xi) = e^{\psi_n(\xi)}$, donde

$$\psi_n(\xi) = \int_{|y| > \frac{1}{n}} (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy).$$

En este sentido, consideremos la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_n$, donde cada $Y_n \sim \mu_n$. Además, definimos λ_n como

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \int_{|y| > \frac{1}{n}} \phi(dy) \\
&= pC\alpha \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} y^{-\alpha-1} dy + qC\alpha \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} (-y)^{-\alpha-1} dy \\
&= Cn^\alpha
\end{aligned}$$

y $\omega_n(\xi) = \lambda_n^{-1} I_{\{|y| > \frac{1}{n}\}} \phi(dy)$. Entonces, tomamos la familia de variables aleatorias $\{W_j\}_j$ independientes idénticamente distribuidas con medida de probabilidad ω_n . Así, se tiene que

$$P(W_j > x) = pAx^{-\alpha} \quad y \quad P(W_j < -x) = qAx^{-\alpha} \quad \forall x > A^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{n}.$$

Entonces, podemos escribir

$$\psi_n(\xi) = \lambda_n \int (e^{i\xi y} - 1) \omega_n(dy).$$

De esta manera, al igual que en el caso unilateral $Y_n \simeq W_1 + W_2 + \dots + W_N$, donde N es una variable aleatoria de Poisson con media $\lambda_n = Cn^\alpha$ independiente de cada W_k . Nótese que $\psi_n(\xi) \rightarrow \psi(\xi)$ para todo ξ . Entonces, el Teorema de continuidad de Lévy implica que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, lo cual muestra que también una variable aleatoria estable bilateral es esencialmente la acumulación de saltos con ley de potencias bilateral, donde un número finito de saltos tiene tamaño mayor a $\frac{1}{n}$ y un número infinito de saltos tiene tamaño muy pequeño inferior a $\frac{1}{n}$, para un n muy grande.

En el caso bilateral, las constantes p y q balancean los saltos hacia la derecha (positivos) o izquierda (negativos), respectivamente. Además, vimos que

$$\psi(\xi) = -pC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - qC\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha. \quad (4.4)$$

Entonces, una ley estable bilateral puede ser descompuesta en su parte positiva y negativa $\psi(\xi) = p\psi_+(\xi) + q\psi_-(\xi)$, donde

$$\begin{aligned}
\psi_+(\xi) &= \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) C\alpha y^{-\alpha-1} dy = -C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha \\
\psi_-(\xi) &= \int_{-\infty}^0 (e^{i\xi y} - 1) C\alpha |y|^{-\alpha-1} dy = -C\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha.
\end{aligned}$$

Entonces, $\hat{\mu}(\xi) = e^{\psi(\xi)} = e^{\psi_+(\xi)}e^{\psi_-(\xi)}$, lo cual muestra que existen Y^+ y Y^- variables aleatorias independientes tal que $Y \simeq Y^+ + Y^-$. En este sentido, podemos escribir que $Y_n \simeq Y_n^+ + Y_n^-$, es decir, Y_n tiene la misma distribución que la suma de dos procesos de Poisson compuestos, donde el primero acumula solamente saltos positivos y el segundo saltos negativos.

A partir de la expresión (4.4), la forma de generador de la derivada fraccionaria emerge naturalmente al invertir la transformada de Fourier $\psi(-\xi)\hat{f}(\xi)$, para una función f adecuada. Para invertir la transformada de Fourier con símbolo $\psi_-(-\xi)$, usamos el hecho que

$$\int e^{-i\xi x} f(x+y) dx = e^{i\xi y} \hat{f}(\xi)$$

para ver que

$$\psi_-(-\xi)\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \left(e^{i\xi y} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) \right) C\alpha y^{-\alpha-1} dy$$

es la transformada de Fourier de

$$\int_0^{+\infty} (f(x+y) - f(x)) C\alpha y^{-\alpha-1} dy.$$

Si tomamos $C = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} > 0$, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[-\psi_-(\xi)\hat{f}(\xi) \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[(-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \right] \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} (f(x) - f(x+y)) y^{-\alpha-1} dy \\ &= \frac{d^\alpha f(x)}{d(-x)^\alpha}, \end{aligned}$$

lo cual coincide con la forma de generador para la derivada fraccionaria negativa en el caso $0 < \alpha < 1$.

Ahora, sea $\{Z_t\}_t$ un proceso de Lévy bilateral, tal que $Z_1 \simeq Y$. Entonces

$$\hat{p}(\xi, t) = E \left[e^{-i\xi Z_t} \right] = e^{t\psi(-\xi)},$$

donde $\psi(-\xi) = -pD(i\xi)^\alpha - qD(-i\xi)^\alpha$ y $D = C\Gamma(1-\alpha) > 0$. En consecuencia,

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = \psi(-\xi)\hat{p}(\xi, t) = -pD(i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t) - qD(-i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t).$$

Esta ecuación se invierte en la ecuación de reacción-difusión fraccionaria

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -pD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha} - qD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}.$$

4.2. Aproximación de Poisson desplazada

En la sección anterior discutimos cómo una ley estable emerge como el límite de la suma de una variable aleatoria de Poisson con saltos de ley de potencias y coeficiente de estabilidad $0 < \alpha < 1$. En esta sección vamos a discutir el caso $1 < \alpha < 2$. A diferencia del caso $0 < \alpha < 1$, en esta ocasión naturalmente emerge una traslación o desplazamiento que acompaña a la variable aleatoria de Poisson compuesta. Esto se debe a que en el caso $0 < \alpha < 1$, cuando una variable aleatoria sigue una ley de potencias, su primer y segundo momento no existen [4]. Sin embargo, cuando $1 < \alpha < 2$ a pesar de que la varianza no existe, su primer momento existe.

Sea Y una variable aleatoria con ley estable unilateral y función característica $\hat{\mu}(\xi) = E[e^{i\xi Y}] = e^{\psi(\xi)}$, donde

$$\psi(\xi) = \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) C\alpha y^{-\alpha-1} dy = C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha,$$

para $1 < \alpha < 2$. Entonces, tomamos la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_n$, donde cada Y_n tiene función característica $\hat{\mu}_n(\xi) = E[e^{i\xi Y_n}] = e^{\psi_n(\xi)}$, donde

$$\psi_n(\xi) = \int_{y>\frac{1}{n}}^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) C\alpha y^{-\alpha-1} dy = \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \phi_n(dy)$$

y $\phi_n(dy) = C\alpha y^{-\alpha-1} I_{\{y>\frac{1}{n}\}}$ es una medida de Lévy asociada a la distribución de Y . Definimos

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int \phi_n(dy) \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} C\alpha y^{-\alpha-1} dy = Cn^\alpha. \end{aligned}$$

Entonces, si tomamos la medida de probabilidad $\omega_n(dy) = \lambda_n^{-1} \phi_n(dy)$ vemos que

$$\psi_n(\xi) = \lambda_n \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \omega_n(dy)$$

$$= \lambda_n \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1) \omega_n(dy) - i\xi a_n,$$

donde $a_n = \lambda_n \int y \omega_n(dy)$. Si consideramos la familia de variables aleatorias $\{W_j\}_j$ independientes e idénticamente distribuidas con medida de probabilidad ω_n , se tiene que $a_n = \lambda_n E[W_j]$. Además, nótese que

$$P(W_j > x) = \int_x^{+\infty} \omega_n(dy) = Ax^{-\alpha} \quad \forall x > A^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} E[W_j] &= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} y A \alpha y^{-\alpha-1} dy \\ &= A \alpha \left. \frac{y^{-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\frac{1}{n}}^{+\infty} = \frac{A \alpha}{\alpha-1} n^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1} n^{-1} \end{aligned}$$

es finito para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $1 < \alpha < 2$. De esto, nótese que

$$\psi_n(\xi) = \lambda_n [\hat{\omega}(\xi) - 1] - i\xi a_n.$$

y

$$e^{\psi_n(\xi)} = e^{\lambda_n [\hat{\omega}(\xi) - 1] - i\xi a_n} = E \left[e^{i\xi [W_1 + W_2 + \dots + W_N - a_n]} \right].$$

Entonces, $Y_n \simeq W_1 + W_2 \dots + W_N - a_n$, donde N es una variable aleatoria de Poisson con media λ_n . Notemos que, en este caso, la variable aleatoria Y_n es una variable aleatoria de Poisson compuesta que, además, posee una traslación o desplazamiento a_n .

$$\lambda_n = C n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

y

$$a_n = \lambda_n E[W_j] = \frac{\alpha C}{\alpha-1} n^{\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Esto quiere decir que tanto el número medio de saltos como el desplazamiento tienden a infinito a medida que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Sin embargo, notar que $\psi_n(\xi) \rightarrow \psi(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y en consecuencia $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

A partir de este procedimiento, consideremos $\{Z_t\}_t$ un proceso de Lévy tal que $Z_1 \simeq Y$. Entonces, Z_t tiene representación de Lévy $[0, 0, t\phi]$ para todo $t > 0$.

Además, consideremos la sucesión de procesos $\{Z_t^n\}_n$ con representación de Lévy $[0, 0, t\phi_n]$ tal que $Z_1^n \simeq Y_n$. De esta manera, para cada t fijo, $\{Z_t^n\}_n$ es un proceso de Poisson compuesto con saltos de ley de potencias. Además, este proceso está centrado en la media 0, pues podemos escribir

$$Z_t^n = W_1 + W_2 + \cdots + W_{N(t)} - ta_n,$$

donde $N(t)$ es una variable aleatoria de Poisson con tasa $t\lambda_n$ independiente de cada W_j . Entonces, $E[N(t)] = t\lambda_n$ y utilizando el Teorema de esperanza total, es fácil ver que

$$\begin{aligned} E[W_1 + W_2 + \cdots + W_{N(t)}] &= \sum_{k=0}^{+\infty} E[W_1 + W_2 + \cdots + W_k | N(t) = k] P(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kE[W]P(N(t) = k) \\ &= E[W]E[N(t)] = ta_n. \end{aligned}$$

Gracias a esto, podemos ver que para cada $t \geq 0$, $Z_t^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Z_t$. Entonces, para $1 < \alpha < 2$, un proceso de Lévy estable unilateral puede ser visto como el límite de procesos de Poisson compuesto centrados en la media 0.

Ahora, si la variable aleatoria Y tiene distribución estable bilateral con índice $1 < \alpha < 2$, tal que $a_2 = 0$, su función característica está dada por $E[e^{i\xi Y}] = e^{\psi(\xi)}$, donde

$$\psi(\xi) = p \frac{C\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha + q \frac{C\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha. \quad (4.5)$$

Entonces, para un proceso de Lévy estable bilateral tal que $Z_1 \simeq Y$. Entonces, la definición de un proceso de Lévy nos lleva a que su transformada de Fourier está dada por

$$\hat{p}(\xi, t) = E[e^{-i\xi Z_t}] = e^{t\psi(-\xi)}.$$

Definimos la constante $D = \frac{C\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}$ para ver que

$$\hat{p}(\xi, t) = e^{pDt(i\xi)^\alpha + qDt(-i\xi)^\alpha}.$$

Entonces

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = \psi(-\xi) \hat{p}(\xi, t) = pD(i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t) + qD(-i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t),$$

la cual se invierte en la ecuación de reacción-difusión fraccionaria

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = pD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha} + qD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}.$$

Un hecho curioso que podemos observar es que tanto en el caso $0 < \alpha < 1$ como en el caso $1 < \alpha < 2$, los pesos p y q asociados a los saltos positivos y negativos, respectivamente, en cierto modo también están asociados con las derivadas fraccionarias positiva y negativa, pues estos pesos aparecen como un producto en cada derivada.

Al igual que en el caso $0 < \alpha < 1$, podemos observar que de (4.5), la variable aleatoria estable bilateral Y puede ser descompuesta como la suma de dos componentes independientes que describen los saltos positivo y negativos. En este sentido, escribimos

$$\psi(\xi) = p\psi_+(\xi) + q\psi_-(\xi),$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_+(\xi) &= \int_0^{+\infty} (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) C\alpha y^{-\alpha-1} dy = C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha \\ \psi_-(\xi) &= \int_{-\infty}^0 (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) C\alpha |y|^{-\alpha-1} dy = C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir $Y \simeq Y^+ + Y^-$. De esto, podemos observar que para funciones adecuadas f y $C = \frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[(-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \right] (x) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^{+\infty} \left(e^{i\xi y} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) - i\xi y \hat{f}(\xi) \right) \frac{C\alpha}{y^{\alpha+1}} dy \right] (x) \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} (f(x+y) - f(x) - yf'(x)) y^{-\alpha-1} dy \\ &= \frac{d^\alpha f(x)}{d(-x)^\alpha}. \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos observar que el generador infinitesimal de la derivada fraccionaria de orden $1 < \alpha < 2$ emerge de manera natural a partir de una ley estable.

4.3. Distribuciones límite estables

4.3.1. Arreglos triangulares

En las Secciones 4.1 y 4.2, mediante algunos cálculos vimos de una forma intuitiva que una variable aleatoria estable emerge como el límite de un proceso de Poisson. En esta sección, se dará las herramientas necesarias para formalizar esto. Entonces, empezaremos repasando algunas definiciones básicas y un resultado que nos permitirá demostrar el conocido Teorema del Límite Central a partir de cierto procedimiento conocido como el método de arreglos triangulares.

En teoría de probabilidades, cuando tenemos variables aleatorias W_1, \dots, W_n idénticamente distribuidas es usual acompañar de forma genérica su distribución, medidas de tendencia central y dispersión con la letra que las representa sin usar subíndices, por ejemplo, F_W , f_W , $E[W]$ y $E[W^2]$

Recordemos que dada una variable aleatoria Y , se dice que esta es infinitamente divisible si para cualquier entero n , podemos escribir

$$Y \simeq X_1 + \dots + X_n, \quad (4.6)$$

donde X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

Una definición que nos será muy útil es la de un arreglo triangular. Un arreglo triangular es un conjunto de variables aleatorias definido como

$$\{X_{nj} : j = 1, \dots, K_n \quad n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (4.7)$$

donde X_{n1}, \dots, X_{nK_n} son v.a.i.i.d para cada $n \geq 1$. Además, cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces $K_n \rightarrow +\infty$.

La idea de que este conjunto lleve el nombre de arreglo triangular es que, por ejemplo, en el caso particular $K_n = n$, el desarrollo de esta definición muestra una forma similar a una matriz triangular

$\{X_{11}\}$	$j = 1$	$n = 1$
$\{X_{21}, X_{22}\}$	$j = 1, 2$	$n = 2$
$\{X_{31}, X_{32}, X_{33}\}$	$j = 1, 2, 3$	$n = 3$
$\{X_{41}, X_{42}, X_{43}, X_{44}\}$	$j = 1, 2, 3, 4$	$n = 4$
\vdots	\vdots	\vdots
$\{X_{m1}, X_{m2}, X_{m3}, \dots, X_{mm-1}, X_{mm}\}$	$j = 1, 2, \dots, m$	$n = m$
\vdots	\vdots	\vdots

En este sentido, podemos generalizar la notación usada en (4.6) como la suma por filas de un arreglo triangular

$$Y \simeq S_n = X_{n1} + \dots + X_{nK_n}$$

Una suposición o restricción habitual que haremos consiste en que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq j \leq K_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.8)$$

Esta condición asegura que cada sumando sea asintóticamente despreciable.

Un concepto que utilizaremos a lo largo de esta sección es el de una variable aleatoria truncada, definida como

$$X_{nj}^R = X_{nj} I_{\{|X_{nj}| \leq R\}} \begin{cases} X_{nj} & \text{si } |X_{nj}| \leq R \\ 0 & \text{si } |X_{nj}| > R. \end{cases} \quad (4.9)$$

Además, decimos que una sucesión de medidas de Borel σ -finitas $\{\phi_n(dy)\}_n$ converge a una medida $\phi(dy)$ en $\{y : y \neq 0\}$ si $\phi_n(B) \rightarrow \phi(B)$ para cualquier conjunto de Borel B que es acotado lejos de 0 (es decir, existe $M > 0$ tal que $|x| > M$ para todo $x \in B$) y $\phi(\partial B) = 0$, donde ∂B es el conjunto frontera de B . Este tipo de convergencia es llamada convergencia vaga.

Un ejemplo muy sencillo que ilustra el método de arreglos triangulares consiste en tomar W_1, W_2, \dots, W_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tal que $E[W] = 0$ y $E[W^2] = \sigma^2 < +\infty$. Entonces,

$$X_{nj} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} W_j \quad 1 \leq j \leq n$$

define un arreglo triangular con $K_n = n$. Aquí, es conocido que por el TLC, la suma S_n de filas converge en distribución a una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Teorema 4.3.1. (Convergencia de arreglos triangulares) Dado un arreglo triangular (4.7) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq j \leq K_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- I. Existe una variable aleatoria Y infinitamente divisible y una sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $S_n - a_n \xrightarrow{d} Y$.
- II. a) $\sum_{j=1}^{K_n} P(X_{nj} \in dy) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(dy)$ para alguna medida de Borel σ -finita en $\{y : y \neq 0\}$
y
- b) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{K_n} \text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) = b \geq 0$

La variable aleatoria Y es infinitamente divisible y tiene representación de Lévy $[a, b, \phi]$, donde a depende de la elección de la constante de centrado $\{a_n\}_n$, la cual podemos tomar como

$$a_n = \sum_{j=1}^{K_n} E[X_{nj}^R] \tag{4.10}$$

para cualquier $R > 0$ tal que $\phi\{y : |y| = R\} = 0$. Entonces, podemos tomar

$$E[e^{i\xi Y}] = e^{\psi_0(\xi)}$$

donde

$$\psi_0(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^2 b + \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy).$$

A continuación, utilizando el Teorema 4.3.1 demostraremos el Teorema del Límite Central utilizando el método de arreglos triangulares.

Teorema 4.3.2. (Teorema del Límite Central (TLC)) Sean W_1, \dots, W_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tal que $m_1 = E[W]$ y $m_2 = E[W^2]$ existen. Entonces,

$$\frac{W_1 + \dots + W_n - nm_1}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (4.11)$$

donde $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

Demostración. Definimos el arreglo triangular

$$X_{nj} = n^{-\frac{1}{2}} W_j \quad j = 1, 2, \dots, K_n = n.$$

Por otro lado, notar que gracias a la desigualdad de Markov, se tiene que dada una función monótona no decreciente y no negativa h y cualquier $a > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(|X| > a) &= P(h(|X|) > h(a)) \\ &\leq \frac{E[h(|X|)]}{h(a)}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es conocida como desigualdad de Markov generalizada o extendida para funciones monótonas no decrecientes y no negativas. Entonces, gracias a esta desigualdad se tiene que

$$0 \leq P(|X_{nj}| > \varepsilon) = P(|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon) \leq \frac{E[|W_j|^2]}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por tanto, la condición (4.8) se cumple. Ahora, para mostrar que $S_n - a_n \xrightarrow{d} Y$ con $a_n = n\mu_1$ y a_n dado por (4.10), basta probar las condiciones a) y b) del segundo enunciado del Teorema 4.3.1.

Condición a). Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{K_n=n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) &= nP\left(\left|n^{-\frac{1}{2}}W_j\right| > \varepsilon\right) \\ &= nP\left(|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon\right) \\ &= nE\left[I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon\}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq nE \left[\left(\frac{W_j}{n^{\frac{1}{2}}\varepsilon} \right)^2 I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon\}} \right] \\ &= \varepsilon^{-2} E \left[W_j^2 I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon\}} \right]. \end{aligned}$$

Puesto que $m_2 = E [W_j^2]$ existe, $E \left[W_j^2 I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}\varepsilon\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Entonces la condición a) del Teorema 4.3.1 se mantiene para $\phi = 0$.

Condición b). Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K_n=n} \text{Var} (X_{nj}^\varepsilon) &= n \left\{ E [(X_{nj}^\varepsilon)^2] - E [X_{nj}^\varepsilon]^2 \right\} \\ &= nE \left[\left(n^{-\frac{1}{2}} W_j \right)^2 I_{\{|W_j| \leq \varepsilon\}} \right] - nE \left[n^{-\frac{1}{2}} W_j I_{\{|W_j| \leq \varepsilon\}} \right]^2 \\ &= E [W_j^2 I_{\{|W_j| \leq \varepsilon\}}] - E [W_j I_{\{|W_j| \leq \varepsilon\}}]^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_2 - m_1^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Entonces, el teorema de convergencia de arreglos triangulares implican que

$$S_n - a_n \xrightarrow{d} Y \sim [a, \sigma^2, 0].$$

Así, Y es una variable aleatoria normal. Además, de (4.10) se tiene que

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{j=1}^{K_n} E [X_{nj}^R] &= nE \left[n^{-\frac{1}{2}} W_j I_{\{|W_j| \leq n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \\ &= n^{\frac{1}{2}} \left\{ m_1 - E \left[W_j I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left| n^{\frac{1}{2}} E \left[W_j I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \right| &\leq n^{\frac{1}{2}} E \left[|W_j| I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \\ &\leq n^{\frac{1}{2}} E \left[|W_j| \left(\frac{|W_j|}{n^{\frac{1}{2}}R} \right) I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \\ &= R^{-1} E \left[W_j^2 I_{\{|W_j| > n^{\frac{1}{2}}R\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

La convergencia en el último paso se debe a que $m_2 = E [W_j^2]$ existe. Esto implica que $a_n - n^{\frac{1}{2}}m_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ y en consecuencia,

$$\frac{W_1 + \cdots + W_n - nm_1}{n^{\frac{1}{2}}} = S_n - n^{\frac{1}{2}}m_1 = S_n - a_n + \left(a_n - n^{\frac{1}{2}}m_1 \right) \xrightarrow{d} Y$$

y $a = 0$, es decir, $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. □

4.3.2. Límites estables unilaterales

En la Sección 4.3.1 se demostró el Teorema del Límite Central mediante un procedimiento conocido como arreglos triangulares. La idea de esta sección es utilizar este mismo procedimiento para extender el TLC al caso de distribuciones de probabilidad estables, donde la hipótesis de varianza finita falla.

Teorema 4.3.3. Sean W_1, \dots, W_n v.a.i.i.d positivas tal que $P(W > x) = Cx^{-\alpha}$ para $x > C^{\frac{1}{\alpha}}$ y $0 < \alpha < 2$. Entonces

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} (W_1 + \dots + W_n) - a_n \xrightarrow{d} Y \quad (4.12)$$

para alguna sucesión $\{a_n\}_n$, donde Y es una variable aleatoria con distribución estable unilateral y representación $[a, b, \phi]$, donde la medida de Lévy ϕ está dada por

$$\phi(dy) = \begin{cases} C\alpha y^{-\alpha-1} dy & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Si $0 < \alpha < 1$, podemos tomar $a_n = 0$ y entonces

$$\hat{\mu}(\xi) = E[e^{i\xi Y}] = e^{-C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha}.$$

Si $1 < \alpha < 2$ podemos tomar $a_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}} m_1$, donde $m_1 = E[W]$ y entonces se tiene

$$\hat{\mu}(\xi) = E[e^{i\xi Y}] = e^{\frac{C\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}(-i\xi)^\alpha}.$$

Demostración. Definimos el arreglo triangular

$$X_{nj} = n^{-\frac{1}{\alpha}} W_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

La condición (4.8) se tiene de una aplicación directa de la desigualdad de Markov. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|X_{nj}| > \varepsilon) &= P\left(|W_j| > n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon\right) \\ &= P\left(W_j > n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon\right) + P\left(W_j < -n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon\right) \\ &= P\left(W_j > n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon\right) + 0 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{E[W_j]}{n^{\frac{2}{\alpha}}\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Notar que eventualmente n es suficientemente grande, así que en el procedimiento anterior podemos tomar $n > 0$ tal que $\varepsilon > C^{\frac{1}{\alpha}}n^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Veamos que se cumple la condición a) del Teorema 4.3.1. Notar que para $y > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K_n} P(X_{nj} > y) &= nP\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}W_j > y\right) \\ &= nP\left(W_j > n^{\frac{1}{\alpha}}y\right) \\ &= nC\left(n^{\frac{1}{\alpha}}y\right)^{-\alpha} = Cy^{-\alpha}, \end{aligned}$$

siempre que $y > n^{-\frac{1}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}$. Además,

$$\sum_{j=1}^{K_n} P(X_{nj} < -y) = 0.$$

Entonces, la condición a) del Teorema 4.3.1 se tiene con $\phi(y, +\infty) = Cy^{-\alpha}$ para $y > 0$ y $\phi(-\infty, 0) = 0$ o equivalentemente

$$\phi(dy) = \begin{cases} C\alpha y^{-\alpha-1}dy & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Notar que es necesario que $0 < \alpha < 2$ para que ϕ sea una medida de Lévy, pues

$$\int_{0 < |y| < R} y^2 \phi(dy) = \frac{C\alpha}{2-\alpha} R^{2-\alpha} < +\infty \quad \forall R > 0$$

y

$$\begin{aligned} \phi\{y : y \neq 0\} &= \int I_{\{|y| > R\}} \phi(dy) \\ &= \int_R^{+\infty} \phi(dy) \\ &= Cy^{-\alpha} \Big|_R^{+\infty} = CR^{-\alpha} < +\infty \quad \forall R > 0. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que se cumple la condición b) del Teorema 4.3.1. Sea $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande tal que $\varepsilon > n^{-\frac{1}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) &= n \left\{ E \left[(X_{nj}^\varepsilon)^2 \right] - E \left[X_{nj}^\varepsilon \right]^2 \right\} \\
&\leq n E \left[(X_{nj}^\varepsilon)^2 \right] \\
&= n E \left[\left(n^{-\frac{1}{\alpha}} W_j \right)^2 I_{\{|n^{-\frac{1}{\alpha}} W_j| \leq \varepsilon\}} \right] \\
&= n^{1-\frac{2}{\alpha}} \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon} y^2 C \alpha y^{-1-\alpha} dy \\
&= \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C \alpha}{2-\alpha} - n^{1-\frac{2}{\alpha}} C^{\frac{2}{\alpha}} \frac{2}{\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C \alpha}{2-\alpha}.
\end{aligned}$$

La última convergencia se debe a que $1 - \frac{2}{\alpha} < 0$. En consecuencia

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{K_n} \text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) = b \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C \alpha}{2-\alpha} = 0,$$

pues $2 - \alpha > 0$, por lo que la condición b) del Teorema 4.3.1 se cumple con $b = 0$. Entonces, el segundo enunciado del Teorema 4.3.1 implica que $S_n - a_n \xrightarrow{d} Y_0$ para alguna sucesión $\{a_n\}_n$, donde

$$S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn} = n^{-\frac{1}{\alpha}} (W_1 + \cdots + W_n)$$

es la suma de las filas del arreglo triangular $\{X_{nj}\}_{n,j}$ y la variable aleatoria Y_0 es una variable aleatoria infinitamente divisible con medida de Lévy ϕ y sin componente normal ($b = 0$).

Supongamos que $0 < \alpha < 1$. Entonces, el Teorema 4.3.1 implica que podemos tomar $\{a_n\}_n$ de acuerdo a (4.10). De esta manera, $E[e^{i\xi Y_0}] = e^{\psi_0(\xi)}$, donde

$$\begin{aligned}
\psi_0(\xi) &= \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \\
&= \int (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) - i\xi \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy) \\
&= -C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - i\xi a. \\
\implies \psi_0(\xi) &= -C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - i\xi a. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} a &= \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy) = \int_0^R y C \alpha y^{-\alpha-1} dy \\ &= C \alpha \left. \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^R = \frac{C \alpha}{1-\alpha} R^{1-\alpha} \end{aligned}$$

para cualquier $R > 0$. Además, nótese que

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^{K_n} E[X_{nj}^R] = n E \left[n^{-\frac{1}{\alpha}} W_j I_{\{|n^{-\frac{1}{\alpha}} W_j| \leq R\}} \right] \\ &= n^{1-\frac{1}{\alpha}} \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{n^{\frac{1}{\alpha}} R} y C \alpha y^{-\alpha-1} dy \\ &= \frac{C \alpha}{1-\alpha} R^{1-\alpha} - n^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{C \alpha}{1-\alpha} R^{1-\alpha} = a. \end{aligned}$$

La convergencia en el último paso se debe a que $1 - \frac{1}{\alpha} < 0$. Gracias a (4.13), dada Y una variable aleatoria con ley estable unilateral y función característica $e^{-C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha}$, podemos escribir $Y_0 = Y - a$. Entonces, puesto que $a_n - a \rightarrow 0$, tenemos que

$$S_n - a = S_n - a_n + (a_n - a) \xrightarrow{d} Y_0.$$

En consecuencia $S_n = S_n - a + a \xrightarrow{d} Y_0 + a = Y$. Por tanto, podemos tomar $a_n = 0$ y en consecuencia, el límite tiene función característica $e^{-C\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha}$.

Ahora consideremos el caso $1 < \alpha < 2$. Entonces, el Teorema 4.3.1 implica que $E[e^{i\xi Y_0}] = e^{\psi_0(\xi)}$, donde

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \\ &= \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \phi(dy) + i\xi \int y I_{\{|y| > R\}} \phi(dy) \\ &= C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha + i\xi a, \end{aligned}$$

donde

$$a = \int y I_{\{|y| > R\}} \phi(dy) = \frac{C \alpha}{\alpha-1} R^{1-\alpha}$$

para cualquier $R > 0$. Además,

$$a_n = \frac{C\alpha}{1-\alpha} R^{1-\alpha} - n^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} = -a + n^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha-1} = -a + n^{1-\frac{1}{\alpha}} m_1.$$

Entonces, dada Y una variable aleatoria estable unilateral con función característica

$$\exp \left\{ C \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha \right\}$$

podemos escribir $Y_0 - a = Y$. En efecto, nótese que

$$S_n - a_n \xrightarrow{d} Y_0$$

y

$$a_n + a = n^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} C^{\frac{1}{\alpha}} = n^{1-\frac{1}{\alpha}} E[W] = n^{1-\frac{1}{\alpha}} m_1$$

implican que $S_n - n^{1-\frac{1}{\alpha}} m_1 = S_n - a_n - a \xrightarrow{d} Y_0 - a = Y$. Entonces, podemos tomar $a_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}} m_1$. \square

4.3.3. Límites estables bilaterales

Ahora, se demostrará que una variable aleatoria estable emerge como el límite de una caminata aleatoria con saltos de Pareto que permite saltos negativos y positivos. Al igual que en el caso unilateral, no es necesario añadir una constante de centrado cuando $0 < \alpha < 1$ y en el caso $1 < \alpha < 2$ podemos utilizar la media como la constante de centrado.

Teorema 4.3.4. Sean W_1, \dots, W_n v.a.i.i.d con función de distribución

$$P(W > x) = pCx^{-\alpha}$$

y

$$P(W < -x) = qCx^{-\alpha}$$

para todo $x > C^{\frac{1}{\alpha}}$, donde $C > 0$ y $0 < \alpha < 2$ y $p, q \geq 0$ tal que $p+q = 1$. Entonces

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} (W_1 + \dots + W_n) - a_n \xrightarrow{d} Y \quad (4.14)$$

para alguna sucesión $\{a_n\}_n$, donde Y es una ley estable con representación de Lévy $[a, 0, \phi]$, donde ϕ está dada por

$$\phi(dy) = \begin{cases} pC\alpha y^{-\alpha-1} dy & \text{si } y > 0 \\ qC\alpha |y|^{-\alpha-1} dy, \dots & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Si $0 < \alpha < 1$, podemos escoger $a_n = 0$. Entonces, Y tiene función característica

$$\hat{\mu}(\xi) = E [e^{i\xi Y}] = \exp \{pC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha + qC\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha\}. \quad (4.16)$$

Si $1 < \alpha < 2$, podemos escoger $a_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$, donde $m_1 = E[W]$. Entonces, Y tiene función característica

$$\hat{\mu}(\xi) = E [e^{i\xi Y}] = \exp \left\{ pC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha + qC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha \right\}. \quad (4.17)$$

Demostración. Al igual que en el Teorema 4.3.3, definimos el arreglo triangular

$$X_{nj} = n^{-\frac{1}{\alpha}}W_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

La desigualdad de Markov implica que para todo $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande tal que $n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon > C\frac{1}{\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq P(|X_{nj}| > \varepsilon) &\leq \frac{E[|W_j|]}{n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon} \left\{ \int_{C\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} pC\alpha x^{-\alpha} dx + \int_{-\infty}^{-C\frac{1}{\alpha}} qC\alpha(-x)^{-\alpha} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon} \left\{ \int_{C\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} pC\alpha x^{-\alpha} dx - \int_{+\infty}^{C\frac{1}{\alpha}} qC\alpha x^{-\alpha} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon} \left\{ \int_{C\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} pC\alpha x^{-\alpha} dx + \int_{C\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} qC\alpha x^{-\alpha} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon} (p+q) C\frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Esto implica que se cumple la condición (4.8).

Ahora, demostremos la condición a) del Teorema 4.3.1. Notar que para $y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K_n=n} P(X_{nj} > y) &= nP\left(W_j > n^{\frac{1}{\alpha}}y\right) \\ &= npC\left(n^{\frac{1}{\alpha}}y\right)^{-\alpha} = pCy^{-\alpha} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K_n=n} P(X_{nj} < -y) &= nP(W_j < -n^{\frac{1}{\alpha}}) \\ &= nqC \left(n^{\frac{1}{\alpha}}y\right)^{-\alpha} = pCy^{-\alpha} \end{aligned}$$

siempre que $n^{\frac{1}{\alpha}} > C^{\frac{1}{\alpha}}$. Entonces, la condición a) se mantiene con

$$\phi(-\infty, -y) = Cqy^{-\alpha}$$

y

$$\phi(y, +\infty) = pCy^{-\alpha}$$

para $y > 0$, lo cual es equivalente a (4.15). Por otro lado, para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{K_n=n} \text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) &= n\text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) \\ &= E[(X_{nj}^\varepsilon)^2] - E[X_{nj}^\varepsilon]^2 \\ &\leq E[(X_{nj}^\varepsilon)^2] \\ &= n^{1-\frac{2}{\alpha}} E\left[W_j^2 I_{\{|W_j| \leq n^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon\}}\right] \\ &= \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C\alpha}{2-\alpha} - n^{1-\frac{2}{\alpha}} \frac{\alpha}{2-\alpha} C^{\frac{2}{\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C\alpha}{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Gracias a esto, la condición b) del Teorema 4.3.1 se tiene con $b = 0$, pues

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{K_n} \text{Var}(X_{nj}^\varepsilon) = b \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2-\alpha} \frac{C\alpha}{2-\alpha} = 0.$$

Entonces, el Teorema 4.3.1 implica que $S_n - a_n \xrightarrow{d} Y_0$, donde Y_0 es una variable aleatoria infinitamente divisible sin componente normal y función característica $E[e^{i\xi Y_0}] = e^{\psi_0(\xi)}$.

Si $0 < \alpha < 1$, para todo $R > 0$ se tiene que

$$\psi_0(\xi) = \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \int (e^{i\xi y} - 1) \phi(dy) - i\xi \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy) \\
&= -pC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - qC\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha - i\xi a,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \int y I_{\{|y| \leq R\}} \phi(dy) \\
&= \int_0^R ypC\alpha y^{-\alpha-1} dy + \int_{-R}^0 yqC\alpha(-y)^{-\alpha-1} dy \\
&= \frac{C\alpha}{1-\alpha}(p-q)R^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Además, podemos escoger

$$\begin{aligned}
a_n = \sum_{j=1}^{K_n} E[X_{nj}^R] &= n^{1-\frac{1}{\alpha}} E\left[W_j I_{\{|W_j| \leq n^{\frac{1}{\alpha}} R\}}\right] \\
&= n^{1-\frac{1}{\alpha}} \left\{ \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{n^{\frac{1}{\alpha}} R} ypC\alpha y^{-1-\alpha} dy + \int_{-n^{\frac{1}{\alpha}} R}^{-C^{\frac{1}{\alpha}}} yqC\alpha|y|^{-1-\alpha} dy \right\} \\
&= \frac{C\alpha}{1-\alpha}(p-q)R^{1-\alpha} - n^{1-\frac{1}{\alpha}}(p-q)\frac{\alpha}{1-\alpha}C^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Esto implica que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{C\alpha}{1-\alpha}(p-q)R^{1-\alpha} = a$, pues $1 - \frac{1}{\alpha} < 0$ en este caso.

Definimos $Y = Y_0 + a$, la cual es una variable aleatoria infinitamente divisible con función característica (4.16). Notar que $S_n = S_n - a_n + a_n \xrightarrow{d} Y$, es decir, podemos tomar la constante de centrado $a_n = 0$.

Si $1 < \alpha < 2$, para todo $R > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_0(\xi) &= \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y I_{\{|y| \leq R\}}) \phi(dy) \\
&= \int (e^{i\xi y} - 1 - i\xi y) \phi(dy) + i\xi \int y I_{\{|y| > R\}} \phi(dy) \\
&= pC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha + qC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha + i\xi a,
\end{aligned}$$

donde

$$a = \int y I_{\{|y| > R\}} \phi(dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_R^{+\infty} ypC\alpha y^{-\alpha-1} dy + \int_{-\infty}^{-R} yqC\alpha(-y)^{-\alpha-1} dy \\
&= \frac{C\alpha}{\alpha-1}(p-q)R^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Además, del cálculo de a_n notemos que

$$a_n = \frac{C\alpha}{1-\alpha}(p-q)R^{1-\alpha} - n^{1-\frac{1}{\alpha}}(p-q)\frac{\alpha}{1-\alpha}C\alpha^{\frac{1}{\alpha}} = -a + n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$$

Definimos $Y = Y_0 - a$. Entonces, puesto que $a_n + a = n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$, se sigue que

$$S_n - n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1 = S_n - a_n - a \xrightarrow{d} Y_0 - a = Y.$$

En consecuencia, en el caso $1 < \alpha < 2$ podemos tomar la constante de centrado como $a_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$. \square

Observación 4.3.5. Como hemos podido ver a lo largo de esta sección, cuando $0 < \alpha < 1$, no es necesario añadir una constante de centrado para garantizar la convergencia de la suma de variables aleatorias de Pareto en una variable aleatoria estable. Sin embargo, en el caso $1 < \alpha < 2$ es posible añadir una constante de centrado sin que la convergencia se vea afectada. Además, esta constante de centrado puede ser tomada como $a_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$. Las variables aleatorias límite en el caso $1 < \alpha < 2$ son conocidos como variables aleatorias estables centradas. Esto se debe a que en las distribuciones que siguen una ley de potencias, en el caso $1 < \alpha < 2$ el primer momento existe y su segundo momento diverge. Sin embargo, como ya habíamos discutido, cuando $0 < \alpha < 2$, generalmente el primer momento o esperanza no existe.

4.3.4. Procesos estables de Lévy

El proceso de Poisson y el movimiento Browniano poseen incrementos estacionarios e independientes. Sin embargo, tienen trayectorias diferentes, el movimiento Browniano tiene trayectorias continuas, mientras que el proceso de Poisson posee discontinuidades (o saltos) de longitud 1. Por otro lado, existe una clase amplia de procesos estocásticos conocidos como procesos de Lévy, los cuales además de poseer incrementos estacionarios e independientes, combinan las características del proceso de Poisson y el movimiento Browniano. Los procesos de Lévy poseen trayectorias continuas, continuas con discontinuidades (saltos) ocasionales y discontinuidades puras. Como veremos, este tipo de procesos emergen como el límite hidrodinámico de variables aleatorias que siguen una ley de potencias (distribución de Pareto).

Proposición 4.3.6. Sean W_1, \dots, W_n v.a.i.i.d con ley de distribución

$$P(W > x) = pCx^{-\alpha}$$

y

$$P(W < -x) = qCx^{-\alpha}$$

para $x > C^{\frac{1}{\alpha}}$, $C > 0$ y $p, q \geq 0$ tal que $p + q = 1$. Entonces

a. Si $0 < \alpha < 1$

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[nt]} = n^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{[nt]} W_j \xrightarrow{d} Z_t \quad (4.18)$$

para todo $t > 0$, donde

$$E [e^{i\xi Z_t}] = \exp \{ -tpC\Gamma(1-\alpha)(-i\xi)^\alpha - tqC\Gamma(1-\alpha)(i\xi)^\alpha \}. \quad (4.19)$$

b. Si $1 < \alpha < 2$

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} \{ S_{[nt]} - [nt]m_1 \} = n^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{[nt]} (W_j - m_1) \xrightarrow{d} Z_t \quad (4.20)$$

para todo $t > 0$, donde $m_1 = E[W]$ y

$$E [e^{i\xi Z_t}] = \exp \left\{ tpC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (-i\xi)^\alpha + tqC \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (i\xi)^\alpha \right\}. \quad (4.21)$$

Demostración. Antes de empezar con la demostración de la proposición, recordemos la siguiente desigualdad para la función parte entera:

$$\begin{aligned} nt - 1 &< [nt] \leq nt \\ \implies t - \frac{1}{n} &< \frac{[nt]}{n} \leq t. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que

$$\frac{[nt]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t.$$

a)

Si $0 < \alpha < 1$, el Teorema 4.3.4 implica que la caminata aleatoria $n^{-\frac{1}{\alpha}}S_n$ converge en distribución a una variable aleatoria Y con función característica $\hat{\mu}$ dada por (4.16). Sea $\hat{\mu}_n$ la función característica de $n^{-\frac{1}{\alpha}}W_j$, entonces la caminata aleatoria $n^{-\frac{1}{\alpha}}S_n$ tiene función característica $\hat{\mu}_n(\xi)^n$ y

$$\hat{\mu}_n(\xi)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Esto implica que la caminata aleatoria $n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[nt]}$ tiene función característica $\hat{\mu}_n(\xi)^{[nt]}$. Entonces

$$\hat{\mu}_n(\xi)^{[nt]} = (\hat{\mu}_n(\xi)^n)^{\frac{[nt]}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(\xi)^t. \quad (4.22)$$

En consecuencia, el teorema de continuidad de Lévy implica que para cada $t \geq 0$, existe una variable aleatoria estable Z_t con función característica (4.19) tal que

$$n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[nt]} \xrightarrow{d} Z_t.$$

b)

Si $1 < \alpha < 2$, el Teorema 4.3.4 implica que la caminata aleatoria $n^{-\frac{1}{\alpha}}S_n - n^{1-\frac{1}{\alpha}}m_1$ converge en distribución a una variable aleatoria estable Y con función característica $\hat{\mu}$ dada por (4.17). Sea $\hat{\mu}_n$ la función característica de $n^{-\frac{1}{\alpha}}(W_j - m_1)$, entonces

$$\hat{\mu}_n(\xi)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(\xi).$$

En consecuencia, el mismo procedimiento realizado en (4.22) implica que para cada $t \geq 0$ existe una variable aleatoria estable Z_t con función característica (4.21) tal que

$$n^{-\frac{1}{\alpha}}\{S_{[nt]} - [nt]m_1\} \xrightarrow{d} Z_t.$$

□

La familia de variables aleatorias $\{Z_t\}_{t>0}$ de la Proposición 4.3.6 forma un proceso estocástico estable.

En el caso que $t = 0$ en (4.18) y (4.20), observamos que se tiene una sumatoria vacía, es decir, estas sumas son igual a 0. Entonces, podemos definir $Z_0 = 0$.

La familia de variables aleatorias estables $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy. Sin embargo, aún no hemos demostrados que sus incrementos son estacionarios e independientes. En este sentido, sean $s, t > 0$; la Proposición 4.3.6 implica que

$n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[nt]}$ y $n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[n(t+s)]}$ convergen en distribución a Z_t y Z_{t+s} , respectivamente. Además, notar

$$\begin{aligned} n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[n(t+s)]} &= n^{-\frac{1}{\alpha}}S_{[nt]} + n^{-\frac{1}{\alpha}}(S_{[n(t+s)]} - S_{[nt]}) \\ &= n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=1}^{[nt]} W_j + n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=[nt]+1}^{n[t+s]} W_j. \end{aligned}$$

De esto se sigue que las sumas $S_{[nt]}$ y $S_{[n(t+s)]} - S_{[nt]}$ son independientes, pues las variables aleatorias $W_1, W_2, \dots, W_{[n(t+s)]}$ son independientes. Entonces

$$E \left[\exp \left\{ i\xi n^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[n(t+s)]} \right\} \right] = E \left[\exp \left\{ i\xi n^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[nt]} \right\} \right] E \left[\left\{ i\xi n^{-\frac{1}{\alpha}} (S_{[n(t+s)]} - S_{[nt]}) \right\} \right].$$

En consecuencia, el Teorema de continuidad de Lévy implica que

$$E \left[e^{i\xi Z_{t+s}} \right] = E \left[e^{i\xi Z_t} \right] E \left[e^{i\xi (Z_{t+s} - Z_t)} \right].$$

Esto implica que Z_{t+s} puede ser escrito como la suma de dos variables independientes Z_t y $Z_{t+s} - Z_t$. En efecto, como la transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas de Fourier, entonces la función de densidad conjunta de Z_t y $Z_{t+s} - Z_t$ es la convolución de sus funciones de densidad y, en consecuencia, necesariamente Z_t y $Z_{t+s} - Z_t$ son independientes.

Por otro lado, tanto para $0 < \alpha < 1$ y $1 < \alpha < 2$, la Proposición 4.3.6 implica que la función característica de Z_s se puede escribir de la forma $e^{s\psi(\xi)}$. Además, ya que $Z_{t+s} - Z_t$ es independiente de Z_t , notar que

$$\begin{aligned} E \left[e^{i\xi Z_{t+s}} \right] &= E \left[e^{i\xi \{Z_t + (Z_{t+s} - Z_t)\}} \right] \\ &= E \left[e^{i\xi Z_t} \right] E \left[e^{i\xi (Z_{t+s} - Z_t)} \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{(t+s)\psi(\xi)} &= e^{t\psi(\xi)} E \left[e^{i\xi (Z_{t+s} - Z_t)} \right] \\ E \left[e^{i\xi (Z_{t+s} - Z_t)} \right] &= e^{s\psi(\xi)}, \end{aligned}$$

lo que muestra que $Z_{t+s} - Z_t$ y Z_s tienen la misma función característica y en consecuencia la misma función de densidad, es decir, $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios. Por lo tanto, la familia de variables aleatorias de la proposición 4.3.6 define un proceso de Lévy.

Capítulo 5

Modelos de difusión

Uno de los fenómenos más comunes que se ha observado en la naturaleza es la difusión. La difusión es un proceso mediante el cual la materia (partículas o moléculas) se transporta desde una región con altas concentraciones hacia una región con bajas concentraciones, debido a movimientos moleculares aleatorios. Este fenómeno es comúnmente ilustrado con un experimento clásico que consiste en inyectar un colorante o soluto dentro de agua limpia. Al cabo de unos segundos podremos observar como el colorante se esparce de aquella región con mayor concentración a regiones con menos concentración de colorante. Si fuera posible observar cada partícula de colorante, cada individuo (partícula) se comporta como un caminante aleatorio, por lo que es común modelar su trayectoria a través de caminatas aleatorias. En este sentido, matemáticamente el movimiento de la materia en un proceso difusivo que puede ser modelado mediante caminatas aleatorias, considerando cada componente de materia como partículas que se mueven en un espacio geométrico discreto. Por otro lado, la difusión es modelada a través de Ecuaciones Diferenciales Parciales, mediante la segunda ley de Fick, la cual afirma que el flujo de materia es proporcional a su gradiente de concentración, dando lugar a la clásica ecuación de difusión

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

donde la constante D es conocida como el coeficiente de concentración.

La ecuación de difusión predice cómo el flujo de la difusión y el gradiente de concentración varían con el tiempo, generando acumulación o agotamiento de las sustancias difusivas. De esto último, podemos notar que la difusión ocurre en la naturaleza en estados no-estacionarios, donde el tiempo es continuo, además de

que las sustancias se mueven a través de un espacio geométrico continuo. Sin embargo, como habíamos discutido, la difusión también se puede modelar utilizando caminatas aleatorias, donde consideramos que cada partícula se mueve en un espacio discreto, lo cual suena algo contradictorio. Entonces, ¿de qué manera se conectan las ecuaciones diferenciales con las caminatas aleatorias?

La respuesta a la última interrogante se encuentra en el límite continuo de una caminata aleatoria, donde es necesario realizar un reescalado adecuado en el espacio parametral y el espacio de estados. En este sentido, estamos interesados en estudiar el comportamiento hidrodinámico de una caminata aleatoria, lo que permitirá apreciar el comportamiento a largo plazo de un sistema de partículas que obedecen una ley de probabilidad y también conocer el tipo de ecuación diferencial que obedece esta ley de probabilidad. Empezaremos estudiando caminatas aleatorias cuyos saltos siguen una ley de probabilidad con varianza finita, para posteriormente continuar con caminatas aleatorias cuyos saltos siguen una ley de potencias (distribución de Pareto).

5.1. El modelo de difusión tradicional

El modelo de difusión tradicional combina elementos de la teoría de probabilidades, las ecuaciones diferenciales parciales y la física. Como habíamos mencionado en la introducción de este capítulo, el movimiento de partículas suspendidas en un medio puede ser descrito por una caminata aleatoria. En este sentido, consideremos la sucesión de variables aleatorias $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ independientes idénticamente distribuidas que representarán los saltos de una partícula. Entonces, la caminata aleatoria

$$S_n = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n,$$

nos proporciona la localización de una partícula luego de dar n saltos.

Sea $F_\eta(x) = P(\eta \leq x)$ la función de distribución acumulativa de los saltos, y asumamos que la función de densidad existe

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = P(\eta = x).$$

Entonces, los momentos de la variable aleatoria η que describe los saltos de una partícula están dados por

$$m_k = E[\eta^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_\eta(x) dx.$$

En el presente trabajo, nos referiremos como la transformada de Fourier de una variable aleatoria para referirnos a la transformada de Fourier de su función de densidad, la cual como vimos en el Sección 3.1, está estrechamente relacionada con la función característica por medio de un signo negativo $\hat{\mu}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$. La transformada de Fourier está dada por:

$$\hat{f}(\xi) = E[\exp\{-i\xi\eta\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f_{\eta}(x) dx.$$

Si los primeros momentos de η existen, la expansión en series de Taylor de la función exponencial compleja alrededor del punto $z_0 = 0$, $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$, junto con el hecho que $\int_{\mathbb{R}} f_{\eta}(x) dx = 1$, nos conduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 - i\xi x + \frac{(-i\xi x)^2}{2!} + \dots \right) f_{\eta}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 - i\xi x + \frac{(-i\xi x)^2}{2} + o(\xi^2 x^2) \right) f_{\eta}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_{\eta}(x) dx - i\xi \int_{\mathbb{R}} x f_{\eta}(x) dx - \frac{\xi^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{\eta}(x) dx + \int_{\mathbb{R}} o(\xi^2 x^2) f_{\eta}(x) dx \\ &= 1 - i\xi m_1 - \frac{1}{2} \xi^2 m_2 + o(\xi^2), \end{aligned}$$

para $\xi \rightarrow 0$. Entonces

$$\hat{f}(\xi) = 1 - i\xi m_1 - \frac{1}{2} \xi^2 m_2 + o(\xi^2). \quad (5.1)$$

Consideremos que los saltos η_k están centrados en cero y tienen varianza $m_2 = \sigma^2$ finita. Entonces, la expresión (5.1) se puede escribir como

$$\hat{f}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2 \sigma^2}{2} + o(\xi^2),$$

para $\xi \rightarrow 0$. Por lo tanto, la caminata aleatoria S_n tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} E[e^{-i\xi S_n}] &= E[e^{-i\xi(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n)}] \\ &= \prod_{k=1}^n E[e^{-i\xi \eta_k}] \\ &= E[e^{-i\xi \eta}]^n = \hat{f}(\xi)^n, \end{aligned}$$

y la suma normalizada $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} E \left[e^{-i\xi(n^{-\frac{1}{2}}S_n)} \right] &= E \left[e^{-i(\xi n^{-\frac{1}{2}})S_n} \right] \\ &= \hat{f}(n^{-\frac{1}{2}}\xi)^n \\ &= \left(1 - \frac{\xi^2\sigma^2}{2n} + o(n^{-1}) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que la transformada de Fourier de una función de densidad normal f con media μ y varianza σ^2 está dada por la expresión

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\mu\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}},$$

lo que implica que el límite $e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}$ corresponde a la transformada de Fourier de la función de densidad de una variable aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, es decir,

$$e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}} = E[\exp\{-i\xi Z\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Teorema 5.1.1. (Teorema de continuidad de Lévy). Sean $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria en \mathbb{R} tal que $X_n \xrightarrow{d} X$. Entonces $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ uniformemente sobre subconjuntos compactos, donde \hat{f}_n y \hat{f} son la transformada de Fourier de las funciones de densidad de las variables aleatorias X_n y X , respectivamente.

Recíprocamente, si $\{X_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias tal que

$$\hat{f}_n(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi)$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$ y el límite $\hat{f}(\xi)$ es continuo en $\xi = 0$, entonces $\hat{f}(\xi)$ es la transformada de Fourier de la función de densidad de alguna variable aleatoria X y $X_n \xrightarrow{d} X$.

De lo hecho anteriormente, el teorema de continuidad de Lévy nos proporciona el tradicional Teorema del Límite Central, es decir, existe una variable aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, tal que

$$n^{-\frac{1}{2}}S_n = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

donde \xrightarrow{d} representa la convergencia en ley o en distribución, la cual en teoría de probabilidades también suele ser llamada como convergencia débil, cuyo concepto

es totalmente diferente a la convergencia débil del análisis matemático, donde esta convergencia está definida en base a funcionales.

Este argumento puede ser extendido a una caminata aleatoria reescalada

$$S_{[ct]} = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{[ct]},$$

la cual proporciona la localización de una partícula en un tiempo $t > 0$ en cualquier tiempo de escala $c > 0$. Si hacemos que la escala de tiempo crezca cada vez más, el tiempo irá cada vez más rápido, por ejemplo, si la unidad de tiempo con la que estamos trabajando es en minutos y tomamos $c = 60$, el tiempo cambia de minutos a horas.

El límite a largo plazo de una caminata aleatoria reescalada es conocido como límite hidrodinámico de $S_{[ct]}$ y la idea consiste en pasar de un proceso estocástico discreto a un proceso estocástico continuo como se muestra a continuación:

Para empezar, nótese que

$$\begin{aligned} E \left[e^{-i\xi c^{-\frac{1}{2}} S_{[ct]}} \right] &= \left(1 - \frac{\xi^2 \sigma^2}{2c} + o(c^{-1}) \right)^{[ct]} \\ &= \left[\left(1 - \frac{\xi^2 \sigma^2}{2c} + o(c^{-1}) \right)^c \right]^{\frac{[ct]}{c}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos la siguiente desigualdad para la función parte entera

$$x - 1 < [x] \leq x \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, se tiene que

$$\frac{ct - 1}{c} < \frac{[ct]}{c} \leq \frac{ct}{c},$$

pues $c > 0$. En consecuencia, si $c \rightarrow +\infty$, el teorema de estricción implica que

$$\frac{[ct]}{c} \rightarrow t,$$

puntualmente. Por lo tanto,

$$E \left[e^{-i\xi c^{-\frac{1}{2}} S_{[ct]}} \right] \xrightarrow{c \rightarrow \infty} e^{-t \frac{\xi^2 \sigma^2}{2}}.$$

Para cada $t > 0$, denotamos a este límite como

$$\hat{p}(\xi, t) = e^{-t \frac{\xi^2 \sigma^2}{2}},$$

el cual corresponde a la transformada de Fourier de una función de densidad normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$, por lo que la transformada de Fourier límite $\hat{p}(\cdot, t)$ se invierte en

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Por lo tanto, el teorema de continuidad de Lévy implica que para cada $t > 0$, existe una variable aleatoria $Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ tal que

$$\frac{S_{[ct]}}{\sqrt{c}} \xrightarrow{d} Z_t.$$

Notemos que para cada $t > 0$, la función característica de cada Z_t está dada por $\hat{\mu}(\xi, t) = \hat{p}(-\xi, t)$. Entonces, si realizamos un proceso idéntico al que se hizo para demostrar que la familia de variables aleatorias de la Proposición 4.3.6 es un proceso de Lévy, se puede verificar que la familia de variables aleatorias normales $\{Z_t\}_t$ tiene incrementos estacionarios e independientes, por lo que $\{Z_t\}_t$ constituye un movimiento Browniano con media 0 y varianza $\sigma^2 t$.

Por otro lado, nótese que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(\xi, t) &= -\frac{\sigma^2}{2} \xi^2 e^{-t \frac{\xi^2 \sigma^2}{2}} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (i\xi)^2 \hat{p}(\xi, t), \end{aligned}$$

lo cual implica que la transformada de Fourier $\hat{p}(\cdot, t)$ resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(\xi, t) = \frac{\sigma^2}{2} (i\xi)^2 \hat{p}(\xi, t). \quad (5.2)$$

Teorema 5.1.2. Teorema de inversión de Fourier Si $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$, entonces la transformada de Fourier \hat{f} existe. Además, si $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \infty$, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Demostración. Antes de proceder a realizar la demostración, empezaremos estableciendo la siguiente notación: dada una función h , denotaremos a h_t como $h_t(x) = t^{-1}h(t^{-1}x)$.

Para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\phi(\xi) = e^{i\xi x - \frac{t^2 \xi^2}{4}}.$$

Notar que para cada $t > 0$, ϕ es integrable respecto a ξ . En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\phi(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |e^{i\xi x}| e^{-\frac{t^2 \xi^2}{4}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2 \xi^2}{4}} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{t^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{2}{t^2}}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2 \cdot \frac{2}{t^2}}\right\} d\xi \\ &= \frac{2}{t} \sqrt{\pi} < +\infty. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y + i\xi x - \frac{t^2 \xi^2}{4}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y-x) - \frac{t^2 \xi^2}{4}} d\xi \\ &= \mathcal{F}_{\xi} \left[e^{-\frac{t^2 \xi^2}{4}} \right] (y-x). \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que dada la función $e(x) = e^{-ax^2}$ con $a > 0$, su transformada de Fourier está dada por la expresión

$$\hat{e}(\xi) = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{a}}.$$

Entonces,

$$\hat{\phi}(y) = \frac{4\sqrt{\pi}}{t} \exp\left\{-4\left(\frac{x-y}{t}\right)^2\right\}.$$

Utilizando la notación establecida al inicio de la demostración, si definimos

$$g(x) := 4\sqrt{\pi}e^{-4x^2},$$

se tiene que

$$\hat{\phi}(y) = g_t(x - y).$$

Ahora, como ϕ y f son funciones integrables, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{\phi}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) g_t(x - y) dy \\ &= f * g_t(x). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx &= 4\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-4x^2} dx \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{8}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{8}}\right\} dx \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

el teorema 8.14 en [Folland]

$$\lim_{t \rightarrow 0} f * g_t = 2\pi f$$

en $L^1(\mathbb{R})$. En consecuencia

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x)$$

en $L^1(\mathbb{R})$. Por otro lado, como \hat{f} es una función $L^1(\mathbb{R})$, $|e^{i\xi x}| = 1$ y para cada $t > 0$, la función $e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}}$ es continua respecto a ξ , se tiene que $e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)$ es integrable para cada $t > 0$. Notar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) = e^{i\xi x} \hat{f}(\xi).$$

Además, puesto que para cada $t > 0$ la función $e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}}$ alcanza su máximo en $\xi = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) \right| &= e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} \left| \hat{f}(\xi) \right| \\ &\leq \left| \hat{f}(\xi) \right| \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Entonces, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2\xi^2}{4}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Finalmente, la unicidad del límite nos lleva al resultado deseado

$$2\pi f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

□

Multiplicando la ecuación (5.2) por $e^{i\xi x}$ e integrando respecto a ξ , se tiene lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(\xi, t) d\xi = \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} (i\xi)^2 \hat{p}(\xi, t) d\xi. \quad (5.3)$$

Observación 5.1.3. Si la derivada f' de una función existe y si f, f' son integrables, entonces integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &= [e^{-i\xi x} f(x)]_{x=-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &= 0 + (i\xi) \hat{f}(\xi) \\ &= (i\xi) \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Si f'' existe y es integrable, se tiene además que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f''](\xi) &= (i\xi) \mathcal{F}[f'](\xi) \\ &= (i\xi)^2 \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

La Observación 5.1.3 implica que (5.3) puede ser reescrita como

$$\int e^{i\xi x} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi = \frac{\sigma^2}{2} \int e^{i\xi x} \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 p(\cdot, t)}{\partial x^2} \right] (\xi) d\xi. \quad (5.4)$$

En esta última expresión utilizamos la notación \mathcal{F}_x para referirnos que se trata de la transformada de Fourier respecto a la variable x , para evitar posibles confusiones.

Finalmente, debemos verificar que

$$\int e^{i\xi x} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi \quad \forall t > 0. \quad (5.5)$$

Para demostrar (5.5) usaremos la siguiente versión del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.

Teorema 5.1.4. (Teorema de convergencia dominada) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tal que

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si existe una función g integrable en \mathbb{R} tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Escribimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t+h) d\xi - \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \cdot \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} d\xi, \end{aligned}$$

donde $\hat{p}(\xi, t) = e^{-t \frac{\xi^2 \sigma^2}{2}}$.

Sea $t > 0$ arbitrario, pero fijo. Puesto que h converge a 0 podemos considerar h tan pequeño tal que $|h| < \frac{t}{2}$.

El Teorema del Valor Medio asegura que existe $c \in (0, h)$ tal que

$$\frac{e^{-h\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} - 1}{h} = -\frac{\sigma^2\xi^2}{2}e^{-c\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}.$$

Entonces,

$$|1 - e^{-h\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}| \leq \frac{\sigma^2\xi^2}{2}|h|e^{t\frac{\sigma^2\xi^2}{4}} \quad (5.6)$$

implica que

$$\begin{aligned} \left| e^{i\xi x} \cdot \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} \right| &= \frac{|\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)|}{|h|} \\ &= e^{-t\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \frac{|1 - e^{-h\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}|}{|h|} \\ &\leq \frac{\sigma^2\xi^2}{2} e^{-t\frac{\sigma^2\xi^2}{4}}. \end{aligned}$$

Nótese que $F(\xi) := \frac{\sigma^2\xi^2}{2}e^{-\frac{t\sigma^2\xi^2}{4}}$ es una función integrable respecto a ξ . En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F(\xi)d\xi &= \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \frac{\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\cdot\frac{2}{t\sigma^2}}\right\} d\xi \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\cdot\frac{2}{t\sigma^2}}\right\} d\xi \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}} \cdot \frac{2}{t\sigma^2} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\frac{2}{t\sigma^2}}} < +\infty. \end{aligned}$$

Entonces, el Teorema de convergencia dominada implica que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) \xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(\xi, t) d\xi. \quad (5.7)$$

Aplicando (5.7) en (5.4), el Teorema de inversión de Fourier implica que para cada $t > 0$, la función de densidad se Z_t resuelve la ecuación de difusión

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) muestra la relación entre la constante de dispersividad $D := \frac{\sigma^2}{2}$ y la varianza de los saltos de las partículas.

En muchas aplicaciones, es útil añadir una tendencia vt . Así, definimos el movimiento Browniano con tendencia vt como la familia de variables aleatorias $\{vt + Z_t\}_t$, donde Z_t es un movimiento Browniano con media 0 y varianza $\sigma^2 t$. De este modo se tiene que la transformada de Fourier

$$\hat{p}(\xi, t) = E \left[e^{-i\xi(vt + Z_t)} \right] = e^{-i\xi vt} E \left[e^{-i\xi Z_t} \right] = e^{-i\xi vt - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = \left(-i\xi v + \frac{\sigma^2}{2} (i\xi)^2 \right) \hat{p}(\xi, t). \quad (5.9)$$

Multiplicamos la ecuación (5.9) por $e^{i\xi x}$ e integramos respecto a ξ para obtener la siguiente ecuación:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi = -v \int_{\mathbb{R}} i\xi \hat{p}(\xi, t) d\xi + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^2 \hat{p}(\xi, t) d\xi. \quad (5.10)$$

Recordemos que $\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial p(\cdot, t)}{\partial x} \right] (\xi) = (i\xi) \hat{p}(\xi, t)$. Entonces, utilizando (5.7) y el Teorema de inversión para la transformada de Fourier, se tiene que la ecuación diferencial (5.9) se invierte en la ecuación de reacción-difusión

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.11)$$

La función de densidad del movimiento Browniano con tendencia

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (5.12)$$

es una densidad normal con media vt y varianza $\sigma^2 t$, que resuelve la ecuación diferencial (5.11).

La ecuación de reacción-difusión (5.11) representa el límite hidrodinámico de una caminata aleatoria cuyos saltos tienen una media $m_1 = E[\eta] = v$ distinta de cero. En efecto, escribimos

$$S_{[ct]} = \sum_{k=1}^{[ct]} \eta_k$$

como

$$S_{[ct]} = \sum_{k=1}^{[ct]} (\eta_k - v) + [ct]v.$$

Así, la variable aleatoria $\eta_k - v$ tiene media 0 y varianza σ^2 . Sin embargo, la suma $\sum_{k=1}^{[ct]} (\eta_k - v)$ crece como $c^{\frac{1}{2}}$ y la suma $[ct]v = \sum_{k=1}^{[ct]} v$ crece como c para c suficientemente grande. Entonces es necesario realizar un reescalado a dos escalas de la siguiente manera:

$$S^{(c)}(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k=1}^{[ct]} (\eta_k - v) + \frac{[ct]}{c} v,$$

cuya función de densidad tiene transformada de Fourier

$$E \left[e^{-i\xi S^{(c)} t} \right] = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \xi^2}{c} + o(c^{-1}) \right)^{[ct]} \cdot e^{-i \frac{\xi}{c} [ct] v} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} e^{-i \xi v t - \frac{1}{2} t \sigma^2 \xi^2}.$$

Físicamente, seguimos una nube de partículas (copias independientes idénticamente distribuidas de una caminata aleatoria $S[ct]$) en un sistema de coordenadas móvil con origen en vt . En este sistema de coordenadas móvil, la nube de partículas se propaga de acuerdo a la ecuación de reacción-difusión.

5.2. El modelo de difusión anómala

En la sección anterior vimos que el modelo de difusión tradicional representa el límite hidrodinámico de una caminata aleatoria con saltos de varianza finita. Sin embargo, en muchos fenómenos del mundo real, los saltos de las partículas siguen una distribución de cola pesada. Entonces, emerge un modelo diferente que describe el límite hidrodinámico de este nuevo tipo de caminata aleatoria; este modelo es conocido como el modelo de difusión anómala, el cual involucra una derivada temporal y una derivada espacial de orden fraccionario.

La difusión anómala emerge en sistemas desordenados o que se encuentran lejos del equilibrio termodinámico [3], donde la complejidad del sistema induce un comportamiento anómalo en el desplazamiento y la dispersión de una partícula que se difunde en un medio. Un ejemplo de difusión anómala, se halla en hidrología de aguas subterráneas, donde los saltos de las partículas de un contaminante o un mineral en el agua siguen una ley de cola pesada, debido a que las partículas son

arrastradas río abajo a grandes velocidades.

Al igual que en la sección anterior, consideremos la caminata aleatoria

$$S_n = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$$

y supongamos que los saltos η siguen una distribución de Pareto centrada, es decir, tiene media 0.

Observación 5.2.1. Una variable aleatoria de Pareto X con coeficiente $1 < \alpha < 2$ tiene función de distribución acumulada

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - Cx^{-\alpha} & \text{si } x \geq C^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \text{si } x < C^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases} \quad (5.13)$$

y función de densidad

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \alpha Cx^{-\alpha-1} & \text{si } x \geq C^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \text{si } x < C^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases} \quad (5.14)$$

El k -ésimo momento está dado por

$$\begin{aligned} m_k = E[X^k] &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx \\ &= C\alpha \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} x^{k-\alpha-1} dx \\ &= C\alpha \left. \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right|_{x=C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-k} C^{\frac{k}{\alpha}}, \end{aligned}$$

donde $0 < k < \alpha$ es un entero positivo. Para $k \geq \alpha$, el k -ésimo momento no existe, puesto que la integral de m_k diverge. Entonces, para $1 < \alpha < 2$ el primer momento m_1 existe, pero su segundo momento no está definido (es infinito).

Proposición 5.2.2. Una variable aleatoria de Pareto X con función de densidad (5.14), para algún $1 < \alpha < 2$ tiene transformada de Fourier

$$E[e^{-i\xi X}] = 1 - i\xi m_1 + D(i\xi)^\alpha + O(\xi^2) \quad (5.15)$$

para ξ tendiendo a 0, donde $D = C^{\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}}$.

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
E[e^{-i\xi X}] &= \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} e^{-i\xi x} C\alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&= \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} (e^{-i\xi x} + 1 - 1 + i\xi x - i\xi x) C\alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&= \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} C\alpha x^{-\alpha-1} dx - i\xi \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} x C\alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&\quad + \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) C\alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&= 1 - i\xi m_1 + \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) C\alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&= 1 - i\xi m_1 + C \int_0^{+\infty} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) \alpha x^{-\alpha-1} dx \\
&\quad - C \int_0^{C^{\frac{1}{\alpha}}} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) \alpha x^{-\alpha-1} dx.
\end{aligned}$$

Para continuar, debemos determinar expresiones simplificadas de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) \alpha x^{-\alpha-1} dx, \\
I_2 &= \int_0^{C^{\frac{1}{\alpha}}} (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) \alpha x^{-\alpha-1} dx.
\end{aligned}$$

Para el cálculo de I_1 , integramos por partes tomando $u = (e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x)$ y $dv = \alpha x^{-\alpha-1} dx$. Entonces

$$\begin{aligned}
I_1 &= -(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) x^{-\alpha} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} i\xi (1 - e^{-i\xi x}) x^{-\alpha} dx \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} i\xi (1 - e^{-i\xi x}) x^{-\alpha} dx \\
&= \int_0^{+\infty} i\xi (1 - e^{-i\xi x}) x^{-\alpha} dx.
\end{aligned}$$

Nótese que el término en la frontera $-(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) x^{-\alpha} \Big|_{x=0}^{+\infty}$ se anula, pues

$$\begin{aligned}
|-(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x)| &= |\cos(\xi x) - i\operatorname{sen}(\xi x) - 1 + i\xi x| \\
&= |(\cos(\xi x) - 1) + i(\xi x - \operatorname{sen}(\xi x))| \\
&\leq |\cos(\xi x) - 1| + |\xi x - \operatorname{sen}(\xi x)|.
\end{aligned}$$

Para $0 < x < 1$, el teorema del valor medio implica que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$|\cos(\xi x) - 1| \leq |\xi| \cdot |\operatorname{sen}(\xi c)|x. \quad (5.16)$$

Nuevamente, por el teorema del valor medio, existe $h \in (0, c)$ tal que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(\xi c)| &\leq |\xi| \cdot |\cos(\xi h)|c \\
&\leq |\xi|x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$|\cos(\xi x) - 1| \leq \xi^2 x^2. \quad (5.17)$$

Utilizando el mismo razonamiento y (5.16) se tiene que

$$|\xi x - \operatorname{sen}(\xi x)| \leq \xi^2 x^2. \quad (5.18)$$

Las desigualdades (5.17) y (5.18) implican que para $0 < x < 1$, se tiene que

$$|-(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) x^{-\alpha}| \leq |\xi|^2 x^{2-\alpha}. \quad (5.19)$$

Puesto que $2 - \alpha > 0$, la estimación (5.19) implica que

$$-(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) x^{-\alpha} \Big|_{x=0} = 0.$$

Por otro lado, puesto que $1 - \alpha < 0$ y $\alpha > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 \leq |-(e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x) x^{-\alpha}| &\leq |e^{-i\xi x} - 1| |x|^{-\alpha} + |i\xi x| \cdot |x|^{-\alpha} \\
&= |e^{-i\xi x} - 1| |x|^{-\alpha} + |\xi| \cdot |x|^{1-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_1 = \int_0^{+\infty} i\xi(1 - e^{-i\xi x})x^{-\alpha} dx$. Nuevamente, integrando por partes con $u = -i\xi e^{-i\xi x} + i\xi$ y $dv = x^{-\alpha} dx$ se tiene que

$$I_1 = i\xi(1 - e^{-i\xi x}) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \frac{(i\xi)^2}{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} x^{1-\alpha} dx \quad (5.20)$$

De manera similar a (5.16), el teorema del valor medio afirma que existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$\left| i\xi (1 - e^{-i\xi x}) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right| \leq C_\alpha x^{2-\alpha}, \quad (5.21)$$

para $0 < x < 1$.

Dado que $2 - \alpha > 0$, (5.21) implica que

$$i\xi (1 - e^{-i\xi x}) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=0} = 0.$$

Además, dado que $1 - \alpha < 0$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} i\xi (1 - e^{-i\xi x}) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$$

En consecuencia, el término en la frontera de (5.20) se anula y se tiene que

$$I_1 = \frac{(i\xi)^2}{\alpha - 1} \int_0^\infty e^{-i\xi x} x^{1-\alpha} dx.$$

En esta última expresión, realizando el cambio de variable $z = i\xi x$ se tiene que

$$I_1 = \frac{(i\xi)^\alpha}{\alpha - 1} \int_0^\infty e^{-z} z^{2-\alpha-1} dz = \frac{(i\xi)^\alpha}{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha) = D(i\xi)^\alpha.$$

En el caso de I_2 , el Teorema de Taylor implica que existe $y \in (0, x)$ tal que

$$e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x - (i\xi)^2 e^{-i\xi y} \frac{x^2}{2} = 0. \quad (5.22)$$

La ecuación anterior implica que

$$|e^{-i\xi x} - 1 + i\xi x| = \frac{(\xi x)^2}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{\xi^2}{2} \int_0^{C^{\frac{1}{\alpha}}} C_\alpha x^{-1-\alpha} x^2 dx \\ &= \frac{\xi^2 C_\alpha}{2(2-\alpha)} x^{2-\alpha} \Big|_0^{C^{\frac{1}{\alpha}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)} \xi^2.$$

Notar que como $2 > \alpha$ y $C > 0$, se tiene que $\frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)} > 0$. Además, para ξ tendiendo a 0, existe $M = \frac{\alpha C^{\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)} > 0$ tal que

$$|I_2| \leq M\xi^2,$$

es decir, $I_2 = O(\xi^2)$. Por lo tanto,

$$E [e^{-i\xi X}] = 1 - i\xi m_1 + D(i\xi)^\alpha + O(\xi^2).$$

□

Al principio de esta sección, por facilidad elegimos una caminata aleatoria con saltos de Pareto centrados, lo cual se justifica a continuación:

Sea X una variable aleatoria de Pareto y tomamos las variables aleatorias $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ independientes idénticamente distribuidas con $X - m_1$, entonces $E[\eta_k] = 0$ y $Var[\eta_k] = +\infty$.

Si $C = \frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)} > 0$, la Proposición 5.2.2 implica que

$$\begin{aligned} E [e^{-i\xi(X-m_1)}] &= E [e^{-i\xi X}] e^{i\xi m_1} \\ &= [1 - i\xi m_1 + (i\xi)^\alpha + O(\xi^2)] \cdot [1 + im_1\xi + (im_1\xi)^2 + O(\xi^3)] \\ &= 1 + (i\xi)^\alpha + O(\xi^2) \end{aligned}$$

Entonces la caminata aleatoria $S_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ tiene transformada de Fourier

$$E [e^{-i\xi S_n}] = (1 + (i\xi)^\alpha + O(\xi^2))^n \quad \text{para } \xi \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

Además, de (5.23) se tiene que la caminata aleatoria normalizada $n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n$ tiene transformada de Fourier

$$E \left[e^{-i\xi n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n} \right] = \left(1 + \frac{(i\xi)^\alpha}{n} + O\left(n^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \right)^n. \quad (5.24)$$

Como $\frac{2}{\alpha} > 0$, se tiene que $n^{-\frac{2}{\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, de donde:

$$O\left(n^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Además, recordemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

puntualmente. Esto implica que

$$E \left[e^{-i\xi n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{(i\xi)^\alpha}.$$

El teorema de representación de Lévy implica que $e^{(i\xi)^\alpha}$ es la transformada de Fourier de una variable aleatoria estable. Entonces, existe una variable aleatoria Z estable tal que $E[e^{-i\xi Z}] = e^{(i\xi)^\alpha}$.

En consecuencia, el teorema de continuidad de Lévy implica que una caminata aleatoria con saltos de cola pesada converge en distribución a la variable aleatoria estable Z , es decir,

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{d} Z.$$

Observación 5.2.3. Notemos que de cierta forma, la última expresión es muy similar al Teorema del Límite Central, por lo que, grosso modo, puede considerarse como una extensión del Teorema del Límite Central para variables aleatorias con varianza infinita.

Ahora, consideremos la caminata aleatoria con saltos de ley de potencias reescalada $c^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[ct]}$. La transformada de Fourier (5.24) implica que

$$E \left[\exp\{-i\xi c^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[ct]}\} \right] = \left(1 + \frac{(i\xi)^\alpha}{c} + O\left(c^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \right)^{[ct]} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} e^{t(i\xi)^\alpha},$$

donde el límite

$$e^{t(i\xi)^\alpha} = E[e^{-i\xi Z_t}] = \hat{p}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} p(x, t) dx$$

es la transformada de Fourier de una función de densidad estable. En consecuencia, el Teorema 4.3.1 implica que la familia de variables aleatorias $\{Z_t\}_t$ constituye un proceso de Lévy.

Claramente, la transformada de Fourier $\hat{p}(\xi, t) = e^{t(i\xi)^\alpha}$ resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = (i\xi)^\alpha e^{t(i\xi)^\alpha} = (i\xi)^\alpha \hat{p}(\xi, t). \quad (5.25)$$

La Proposición 2.1.3 implica que el lado derecho de (5.25) se invierte en

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha}. \quad (5.26)$$

Ahora, utilizaremos un argumento similar al caso normal para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi,$$

donde $\hat{p}(\xi, t) = e^{t(i\xi)^\alpha}$.

Observación 5.2.4. Nótese que $|e^{t(i\xi)^\alpha}| = e^{t|\xi|^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$, pues

$$\begin{aligned} (i\xi)^\alpha &= (i \cdot \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|)^\alpha \\ &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \\ &= |\xi|^\alpha \exp\left\{i \cdot \operatorname{sgn}(\xi) \frac{\pi\alpha}{2}\right\} \\ &= |\xi|^\alpha \left[\cos\left(\operatorname{sgn}(\xi) \frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\operatorname{sgn}(\xi) \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \\ &= |\xi|^\alpha \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Notar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} d\xi.$$

Además, la Observación 5.2.4 implica lo siguiente

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} \right| &= \left| \frac{e^{(t+h)(i\xi)^\alpha} - e^{t(i\xi)^\alpha}}{h} \right| \\ &= \left| e^{i(i\xi)^\alpha} \right| \cdot \left| \frac{1 - e^{h(i\xi)^\alpha}}{h(i\xi)^\alpha} \right| \cdot |(i\xi)^\alpha| \\ &= e^{t|\xi|^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \left| \frac{1 - e^{h(i\xi)^\alpha}}{h(i\xi)^\alpha} \right| \cdot |\xi|^\alpha \end{aligned}$$

Por otro lado, para $t > 0$ fijo y $|h| < -\frac{t}{2} \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$, una expansión de series de Taylor muestra que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 - e^{h(i\xi)^\alpha}}{h(i\xi)^\alpha} \right| &= \left| \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h(i\xi)^\alpha)^k}{k!}}{h(i\xi)^\alpha} \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h(i\xi)^\alpha)^k}{k!}}{h(i\xi)^\alpha} \right| \\
&\leq \frac{1}{|h(i\xi)^\alpha|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h(i\xi)^\alpha|^k}{k!} \\
&= \frac{e^{|h(i\xi)^\alpha|} - 1}{|h(i\xi)^\alpha|} \\
&= \frac{e^{|h| \cdot |\xi|^\alpha} - 1}{|h| \cdot |\xi|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Además, para $|h| < -\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$, el Teorema del valor medio implica que

$$e^{|h| \cdot |\xi|^\alpha} - 1 \leq |h| \cdot |\xi|^\alpha e^{-\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |h|^\alpha} \quad (5.27)$$

La expresión (5.27) implica que

$$\left| \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} \right| \leq |\xi|^\alpha e^{\frac{t}{2} |\xi|^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad \forall \quad |h| < -\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \quad (5.28)$$

Observación 5.2.5. Notar que el término $-\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ es estrictamente positivo, pues

$$\begin{aligned}
1 &< \alpha < 2 \\
\frac{\pi}{2} &< \frac{\pi\alpha}{2} < \pi \\
\therefore 0 &> \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) > -1.
\end{aligned}$$

Definimos $C_{\alpha,t} := -\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \frac{t}{2} \left| \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right| > 0$, y notemos que la integral respecto a ξ del término a la derecha de (5.28) se reduce a

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha e^{\frac{t}{2} |\xi|^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} d\xi = 2 \int_0^\infty \xi^\alpha e^{-C_{\alpha,t} \xi^\alpha} d\xi.$$

Realizamos el cambio de variable $u = C_{\alpha,t} \xi^\alpha$ y vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha e^{\frac{t}{2} |\xi|^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} d\xi = \frac{2}{\alpha C_{\alpha,t}^{1+\frac{1}{\alpha}}} \int_0^\infty u^{1+\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{2}{\alpha C_{\alpha,t}^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < +\infty.$$

Entonces, $|\xi|^\alpha e^{\frac{t}{2}|\xi|^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$ es integrable respecto a ξ , para todo $t > 0$. Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{p}(\xi, t) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} d\xi \quad (5.29)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{p}(\xi, t+h) - \hat{p}(\xi, t)}{h} d\xi \quad (5.30)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} d\xi. \quad (5.31)$$

Entonces, (5.26) y (5.31) implican que $p(x, t)$ resuelve la ecuación de reacción-difusión fraccionaria

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha} \quad (5.32)$$

La ecuación (5.32) modela la *super-difusión*. Por otro lado, notemos que Z_{ct} y $C^{\frac{1}{\alpha}} Z_t$ tienen la misma distribución, pues

$$\begin{aligned} E[e^{-i\xi Z_{ct}}] &= \hat{p}(\xi, ct) \\ &= e^{ct(i\xi)^\alpha} \\ &= e^{t(ic^{\frac{1}{\alpha}}\xi)^\alpha} \\ &= \hat{p}(c^{\frac{1}{\alpha}}\xi, t) = E\left[e^{-i\xi c^{\frac{1}{\alpha}} Z_t}\right] \end{aligned}$$

Esta propiedad es conocida como *autosimilitud*. Lo cual implica que la solución de (5.32) satisface la relación de escala

$$p(x, t) = c^{-\frac{1}{\alpha}} p\left(c^{-\frac{1}{\alpha}} x, t\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0,$$

pues

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[p(\cdot, ct)](\xi) &= \hat{p}\left(c^{\frac{1}{\alpha}}\xi, t\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi c^{\frac{1}{\alpha}} x} p(x, \xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} c^{-\frac{1}{\alpha}} p\left(c^{-\frac{1}{\alpha}} z, t\right) dz \end{aligned}$$

$$= \mathcal{F}_x \left[c^{-\frac{1}{\alpha}} p(c^{-\frac{1}{\alpha}}(\cdot), t) \right].$$

En particular, la velocidad de propagación es $t^{\frac{1}{\alpha}}$, la cual es más rápida que la velocidad de propagación $t^{\frac{1}{2}}$ en la ecuación de difusión clásica $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, ya que $1 < \alpha < 2$.

A continuación, añadimos una escala $D^{\frac{1}{\alpha}}$ y una tendencia vt al proceso estable Z_t para definir el proceso de Lévy con tendencia $vt + D^{\frac{1}{\alpha}}Z_t$, cuya transformada de Fourier está dada por

$$\hat{p}(\xi, t) = E \left[\exp\{-i\xi(vt + D^{\frac{1}{\alpha}}Z_t)\} \right] = \exp\{-i\xi vt + Dt(i\xi)^\alpha\},$$

la cual resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = (-i\xi v + D(i\xi)^\alpha) \hat{p}(\xi, t). \quad (5.33)$$

Análogamente al caso normal y utilizando (5.32), la ecuación diferencial (5.33) se invierte en la ecuación de reacción-difusión fraccionaria con tendencia

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial p}{\partial x} + D \frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha}. \quad (5.34)$$

En hidrología de aguas subterráneas, la ecuación (5.34) es también llamada ecuación de *dispersión-advección fraccionaria* (FADE). La advección es el desplazamiento de las partículas suspendidas en agua en movimiento, y la dispersión es la propagación de las partículas que siguen diferentes trayectorias de flujo a través de un medio poroso.

La densidad de partículas que resuelve (5.34), tiene un centro de masa móvil $x = vt$ y se propaga a una velocidad $t^{\frac{1}{\alpha}}$, debido a la autosimilitud.

5.3. Un modelo de difusión anómala más general

Una ecuación de difusión fraccionaria más general se asocia a una caminata aleatoria con saltos que siguen una distribución de Pareto bilateral. Sea X una variable aleatoria de Pareto con coeficiente $1 < \alpha < 2$, entonces su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} pC\alpha x^{-\alpha-1} & \text{si } x > C^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \text{si } -C^{\frac{1}{\alpha}} \leq x \leq C^{\frac{1}{\alpha}} \\ qC\alpha |x|^{-\alpha-1} & \text{si } x < -C^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

donde $C > 0$ y p, q son dos reales positivos tal que $p + q = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} m_k = E[X^k] &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx \\ &= pC\alpha \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} x^{k-\alpha-1} dx + qC\alpha \int_{-\infty}^{-C^{\frac{1}{\alpha}}} x^k (-x)^{-\alpha-1} dx \\ &= pC^{\frac{k}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - k} + qC\alpha \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} (-1)^k y^{k-\alpha-1} dy \\ &= (p + (-1)^k q) C^{\frac{k}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - k}, \end{aligned}$$

para $0 < k < \alpha$. Cuando $n \geq \alpha$, el k -ésimo momento no existe.

La transformada de Fourier de X se puede calcular inmediatamente utilizando la Proposición 5.2.2 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} E[e^{-i\xi X}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f_{\eta}(x) dx \\ &= p \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} e^{i\xi x} x^{-\alpha-1} dx + q \int_{-\infty}^{-C^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-i\xi x} C\alpha (-x)^{-\alpha-1} dx \\ &= p [1 - i\xi m + D(i\xi)^{\alpha} + O(\xi^2)] + q \int_{C^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} e^{i\xi y} C\alpha y^{-\alpha-1} dy \\ &= p [1 - i\xi m + D(i\xi)^{\alpha} O(\xi^2)] + q [1 + i\xi m + D(-i\xi)^{\alpha} + O(\xi^2)] \\ &= 1 - (p - q)i\xi m + pD(i\xi)^{\alpha} + qD(-i\xi)^{\alpha} + O(\xi^2), \end{aligned}$$

donde $m = C^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha-1}$ y $D = C^{\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}}$.

Ahora, consideremos la caminata aleatoria $S_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$, donde $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ son v.a.i.i.d con la variable aleatoria $Y = X - m_1$.

Puesto que $m_1 = (p - q)m = E[X]$, se sigue que la variable aleatoria $Y = \eta - m_1$ tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} E[e^{-i\xi Y}] &= E[e^{-i\xi X}] e^{i\xi m_1} \\ &= [1 - i\xi m_1 + pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha + O(\xi^2)] \cdot [1 + i\xi m_1 + O(\xi^2)] \\ &= 1 + pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha + O(\xi^2). \end{aligned}$$

En consecuencia, la caminata aleatoria reescalada $\frac{S_{[ct]}}{C^{\frac{1}{\alpha}}}$ tiene transformada de Fourier

$$\begin{aligned} E\left[e^{-i\xi C^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[ct]}}\right] &= \left(1 + \frac{pD(i\xi)^\alpha}{C} + \frac{qD(-i\xi)^\alpha}{C} + O(C^{-\frac{2}{\alpha}})\right)^{[ct]} \\ &= \left(1 + \frac{pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha}{C} + O(C^{-\frac{2}{\alpha}})\right)^{[ct]}. \end{aligned}$$

$$E\left[e^{-i\xi C^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[ct]}}\right] \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} e^{t[pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha]}.$$

La transformada de Fourier $\hat{p}(\xi, t) = e^{t[pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha]}$ resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{p}(\xi, t)}{\partial t} = [pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha] \hat{p}(\xi, t). \quad (5.35)$$

La linealidad de la transformada de Fourier y la Proposición 2.1.3 implican que (5.35) se invierte en la ecuación de difusión anómala

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = pD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial x^\alpha} + qD \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}. \quad (5.36)$$

Gracias al teorema de representación de Lévy, la transformada de Fourier

$$\hat{p}(\xi, t) = e^{t[pD(i\xi)^\alpha + qD(-i\xi)^\alpha]}$$

pertenece a una función de densidad estable y, en consecuencia, gracias al Teorema de continuidad de Lévy, para cada $t > 0$, existe una variable aleatoria Z_t tal que

$$c^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[ct]} \xrightarrow{d} Z_t.$$

Además, gracias al Teorema 4.3.6, podemos afirmar que $\{Z_t\}_t$ es un proceso de Lévy. En consecuencia, los procesos de Lévy emergen como el límite hidrodinámico de caminatas aleatorias con saltos de Pareto y a pesar de no tener una expresión analítica para sus funciones de densidad, gracias al Teorema de representación de Lévy podemos afirmar que estas son funciones de densidad estables, las cuales resuelven ecuaciones de difusión anómala del tipo (5.32), (5.34) y (5.36).

Observación 5.3.1. Debemos observar que a lo largo del Capítulo 5 hemos trabajado con caminatas aleatorias que poseen saltos de Pareto, donde el índice de estabilidad α toma valores en el intervalo abierto $(1, 2)$, esto se debe a que cuando $0 < \alpha < 1$, el primer momento de este tipo de saltos diverge [4], por ello no es posible usar una expansión en series de Taylor para seguir este procedimiento. Sin embargo, para este caso, el Teorema 4.3.6 nos da una forma explícita para la transformada de Fourier de la función de densidad de las variables estables Z_t cuando $0 < \alpha < 1$. Entonces, realizando el mismo procedimiento a partir (5.25) llegamos a la misma conclusión del caso $1 < \alpha < 2$.

Capítulo 6

Simulaciones

En este capítulo definiremos un paseo aleatorio S_n que sigue una ley de potencias con el fin de realizar experimentos computacionales que permitan observar que, con una escala adecuada, la caminata aleatoria eventualmente se comportará como un proceso de Lévy. En este sentido, los resultados que esperamos obtener son trayectorias continuas con saltos (discontinuidades) ocasionales. Además, se simulará las soluciones de la ecuación de difusión anómala. Para ello debemos discretizar primero la variable espacial de una ecuación diferencial del tipo (5.36), lo cual dará como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias respecto a la variable temporal. Este sistema de ecuaciones tiene un esquema continuo, por lo que la variable temporal también debe ser discretizada. Para discretizar la variable espacial utilizaremos la derivada de Grünwald-Letnikov y en el caso de la derivada temporal utilizaremos esquemas semi-implícitos de Euler.

6.1. Aproximando el proceso de Lévy

Sean $C > 0$ y $p, q \geq 0$ tal que $p + q = 1$ y consideremos la siguiente función:

$$H(x) = \begin{cases} -\left(\frac{qC}{x}\right)^{1/\alpha} & \text{si } x \in (0, q) \\ \left(\frac{pC}{1-x}\right)^{1/\alpha} & \text{si } x \in (q, 1), \end{cases}$$

donde $0 < \alpha < 2$. Ahora, sean u_1, u_2, \dots, u_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformes $\mathcal{U}(0, 1)$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $X_n = H(u_n)$. Las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n siguen una ley de potencias. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

Si $x < -C^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned}
 P(X_n \leq x) &= P\left(\left(\frac{qC}{u_n}\right)^{1/\alpha} \geq -x\right) \\
 &= P\left(\frac{qC}{u_n} \geq (-x)^\alpha\right) \\
 &= F_{u_n}(qC(-x)^{-\alpha}) \\
 &= qC(-x)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x > C^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned}
 P(X_n \leq x) &= P\left(\left(\frac{pC}{1-u_n}\right)^{1/\alpha} \leq x\right) \\
 &= P\left(\frac{pC}{1-u_n} \leq x^\alpha\right) \\
 &= P(pCx^{-\alpha} \leq 1-u_n) \\
 &= F_{u_n}(1-pCx^{-\alpha}) \\
 &= 1-pCx^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

De este modo, podemos observar que $P(X_n \leq x) = f_{X_n}(x) \simeq x^{-1-\alpha}$. En consecuencia, las variables aleatorias X_n siguen una ley de potencias. Sin embargo, notemos que estas variables no están definidas para valores $y \in [-C^{\frac{1}{\alpha}}, C^{\frac{1}{\alpha}}]$, lo cual ciertamente no representa un problema, pues podemos tomar $f_{X_n}(y) = 0$. Por lo tanto,

$$P(X_n \leq x) = \begin{cases} qC(-x)^{-\alpha} & \text{si } x < -C^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \text{si } x \in [-C^{\frac{1}{\alpha}}, C^{\frac{1}{\alpha}}] \\ 1-pCx^{-\alpha} & \text{si } x > C^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Definir variables aleatorias en términos de variables aleatorias uniformes resulta muy útil para realizar experimentos computacionales, debido a que este tipo de variables aleatorias se las puede simular fácilmente o existen funciones predeterminadas en distintos programas computacionales que permiten la simulación de las mismas.

Si $0 < \alpha < 1$, definimos la caminata aleatoria

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Por otro lado, si $1 < \alpha < 2$, realizamos un centrado en la caminata aleatoria de la siguiente manera,

$$S_n = (X_1 - m_1) + (X_2 - m_1) + \cdots + (X_n - m_1),$$

donde $m_1 = (p - q)C^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

Para simular las trayectorias de esta caminata aleatoria definida, se utilizó el lenguaje de programación **R** para generar el siguiente algoritmo:

```

Caminata<-function(a,q,n)
{
t<-0.4
C<-1
p<-1-q
m1<-(p-q)*(C^(1/a))*(a/(a-1))
#m1=0 #Cuando 0<a<1
y<-0

for (i in 2:n) {
  u<-runif(1)
  if(u<q) {
    y[i]<-y[i-1]-(((q*C)/u)^(1/a) - m1)
  } else {
    if(u>q) {
      y[i]<-y[i-1]+(((p*C)/(1-u))^(1/a) - m1)
    }
  }
}

plot(y, main='Trayectorias de un paseo aleatorio con ley
de potencias', xlab='', ylab='', type="overplotted",
col="cornflowerblue",pch=16,panel.first=grid())
}

```

Se empezó considerando el caso en que los pesos p y q son iguales. Una de las trayectorias obtenidas se muestra a continuación:

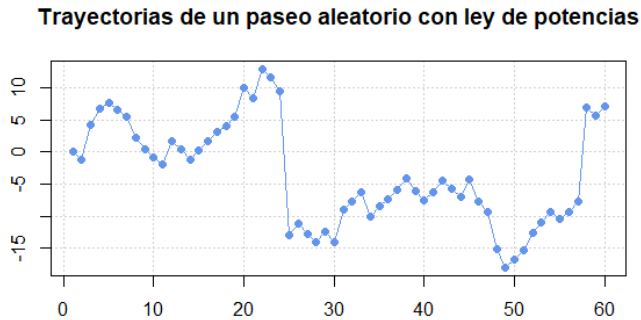


Figura 6.1: Simulación de un paseo aleatorio, $\alpha = 1.5$ y $q = p = 0.5$

Podemos observar que los saltos tienden a oscilar alrededor de 0. Esto tiene sentido, pues la media m_1 en este caso es exactamente igual a 0.

Ahora, vamos a considerar el caso en que $q < p$.

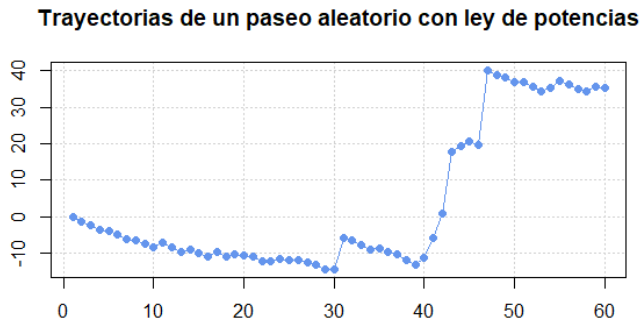


Figura 6.2: Simulación de un paseo aleatorio, $\alpha = 1.5$ y $q = 0.1$

Notemos que a causa de que el peso p (asociado a los saltos positivos) es mayor al peso q , los saltos abruptos tienden a ser positivos, lo que ocasiona que la caminata

aleatoria cada vez tome valores positivos más grandes.

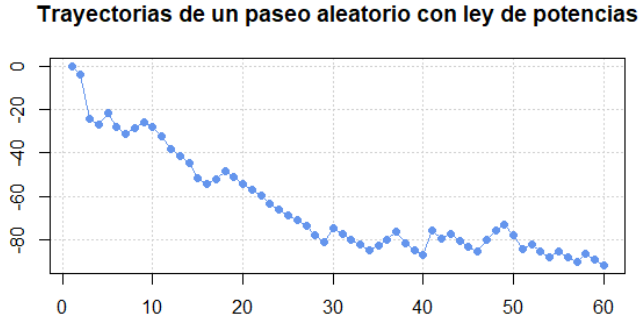


Figura 6.3: Simulación de un paseo aleatorio, $\alpha=1.5$ y $q=0.7$

Finalmente, el caso en que $q > p$, sucede lo contrario que en la Figura 6.2. Podemos observar que la caminata aleatoria tiende a tomar valores negativos cada vez más grandes.

Ahora, realizamos un reescalado de la caminata aleatoria S_n con $1 < \alpha < 2$ de la siguiente manera:

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[nt]}.$$

En el Teorema 4.3.6 vimos que cuando n tiende a infinito, la caminata aleatoria converge en distribución a un proceso de Lévy. Entonces, si N es un entero positivo suficientemente grande, se tiene que para todo $t > 0$

$$N^{-\frac{1}{\alpha}} (X_1 + X_2 + \cdots + X_{[Nt]} - [Nt]m_1) \simeq Z_t,$$

donde Z_t tiene función característica (4.17).

Para simular las trayectorias del proceso estocástico límite, vamos a considerar un algoritmo desarrollado en **RStudio**, el cual toma como dato la variable N y el usuario puede empezar a dar valores cada vez más grandes a esta variable, para observar el comportamiento límite de la caminata aleatoria.

```

P_Levy<-function(a,q,N){
t<-0.1
C<-1
p<-1-q
m1<-(p-q)*(C^(1/a))*(a/(a-1))
#m1=0 #Cuando 0<a<1
y<-0

for (i in 2:floor(N*t)) {
u<-runif(1)
if(u<q) {
y[i]<-y[i-1]-((1/n)^(1/a))*(((q*C)/u)^(1/a) - m1)
} else {
if(u>q) {
y[i]<-y[i-1]+((1/n)^(1/a))*(((p*C)/(1-u))^(1/a) - m1)
}
}
}
plot(y,xlab='t>0', ylab='',type="l",main="Trayectorias de un
proceso estable de Lévy",col="cornflowerblue",
panel.first=grid())
}

```

Las trayectorias obtenidas por el algoritmo se muestran a continuación, para distintos casos:

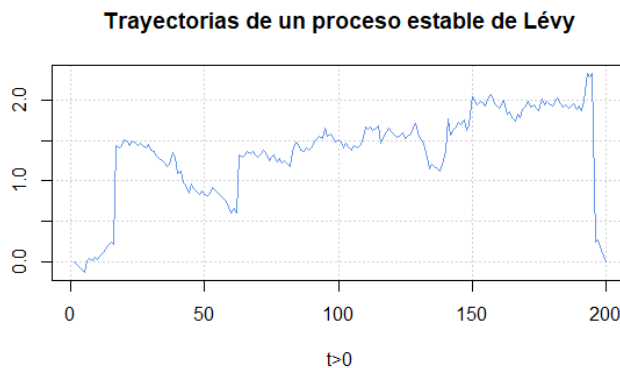


Figura 6.4: Proceso de Lévy con coeficiente de estabilidad $\alpha=1.5$ y $q=p=0.5$

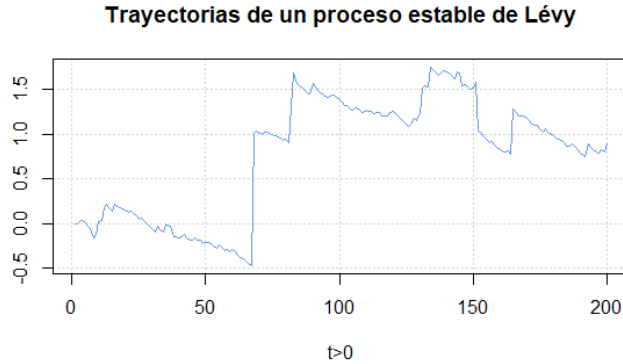


Figura 6.5: *Proceso de Lévy con coeficiente de estabilidad $\alpha = 1.5$ y $q = 0.1$*

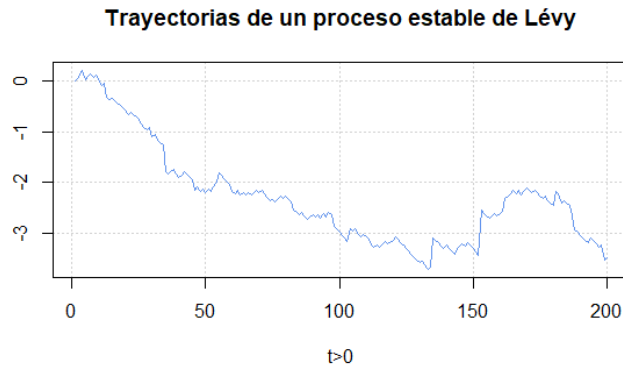


Figura 6.6: *Proceso de Lévy con coeficiente de estabilidad $\alpha = 1.5$ y $q = 0.7$*

Para la simulación de las trayectorias de un proceso de Lévy, se ha tomado $N = 2000$. Esto nos permite visualizar que el proceso límite tiene trayectorias continuas con eventuales discontinuidades o saltos abruptos, lo cual es una característica fundamental de las trayectorias de un proceso de Lévy. En hidrología de aguas subterráneas, si seguimos la trayectoria de una partícula, esta será continua con un comportamiento aleatorio. Sin embargo, debido a que la partícula es arrastrada

río abajo, ocasionalmente dará saltos abruptos, los cuales están representados en las discontinuidades de un proceso de Lévy.

6.2. Solución numérica de la ecuación de difusión anómala

Recordemos que la derivada fraccionaria está dada por el límite del operador de retardos fraccionario

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x - ih). \quad (6.1)$$

Esta definición resulta no ser muy práctica para realizar experimentos numéricos, por lo que es necesario introducir una definición equivalente con una noción de límite inferior a y límite superior b . Entonces, para $n \rightarrow +\infty$ y $x < b$ podemos escribir la serie (6.1) de la siguiente manera:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = x - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x - ih). \quad (6.2)$$

Notar que la serie (6.2) se toma sobre un intervalo $[a, x]$, es decir, se da la noción de un límite inferior. Entonces, para h suficientemente pequeño realizamos la discretización con nodos igualmente espaciados $a = x_0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = b$ para ver que

$$\begin{aligned} d_x^\alpha f(x_k) = \frac{d^\alpha f(x_k)}{dx^\alpha} &\approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x_k - ih) \quad k = 0, 1, \dots, N \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{\alpha}{i} f_{k-i} \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Si denotamos $\omega_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$, vemos que

$$\begin{pmatrix} d_x^\alpha f(x_0) \\ d_x^\alpha f(x_1) \\ d_x^\alpha f(x_2) \\ \vdots \\ d_x^\alpha f(x_N) \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_0^\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^\alpha & \omega_0^\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^\alpha & \omega_1^\alpha & \omega_0^\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_N^\alpha & \omega_{N-1}^\alpha & \omega_{N-2}^\alpha & \cdots & \cdots & \omega_0^\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Si $p = 1$ y denotamos a la matriz en (6.3) como $B_\alpha \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$, la ecuación fraccionaria (5.36) se puede aproximar de la siguiente manera

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = \frac{D}{h^\alpha} B_\alpha p(t) & t > 0 \\ p(0) = p^0, \end{cases} \quad (6.4)$$

donde $p(t) = [p(x_0, t), p(x_1, t), \dots, p(x_N, t)]^T$.

Nótese que este procedimiento es para $1 < \alpha < 2$. Para el caso $0 < \alpha < 1$, el procedimiento es exactamente igual, pero con la diferencia de que hay un signo negativo junto a la matriz B_α en (6.4).

Los esquemas más utilizados para resolver (6.4) son los esquemas de Euler semi-implícitos. Para ello, denotemos como p^k al valor de p en el instante t^k , donde $t^k = k\Delta t$, para $\Delta t > 0$ tendiendo a 0. De esta manera, el esquema semi-implícito con parámetro θ es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{p^{k+1} - p^k}{\Delta t} = \frac{D}{h^\alpha} B_\alpha (\theta p^{k+1} + (1 - \theta)p^k) & k = 0, 1, 2, \dots \\ p(0) = p^0, \end{cases} \quad (6.5)$$

o de manera equivalente

$$\left[I_{N+1} - \frac{\Delta t}{h^\alpha} D\theta B_\alpha \right] p^{k+1} = \left[I_{N+1} + \frac{\Delta t}{h^\alpha} D(1 - \theta) B_\alpha \right] p^k,$$

donde I_{N+1} es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$. Si $\theta = 0$ se tiene el método de Euler explícito, si $\theta = 1$ se tiene el método de Euler implícito, el cual es incondicionalmente estable. De manera general, el método de Euler semi-implícito es incondicionalmente estable si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ y condicionalmente estable si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.

Si el peso $p < 1$, entonces la ecuación diferencial (5.36) incluye una derivada fraccionaria negativa, la cual está asociada a los saltos negativos. Para discretizar esta derivada usaremos su forma en diferencias finitas, dada por el operador de avance:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(-x)^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x + ih). \quad (6.6)$$

En este caso, es necesario introducir una noción equivalente con un límite superior b . Entonces, para $a < x$ y $n \rightarrow +\infty$, se tiene que

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(-x)^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = b - x}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x - ih). \quad (6.7)$$

Para h suficientemente pequeño, y considerando los nodos igualmente espaciados que utilizamos para la derivada fraccionaria (6.2), se tiene que la derivada fraccionaria negativa se aproxima como

$$\begin{aligned} d_{-x}^\alpha f(x_k) &= \frac{d^\alpha f(x_k)}{d(-x)^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x_k + ih) \quad k = 0, 1, \dots, N \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f_{k+i} \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

De este modo, nótese que se tiene el siguiente sistema que aproxima la derivada fraccionaria negativa,

$$\begin{pmatrix} d_{-x}^\alpha f(x_0) \\ d_{-x}^\alpha f(x_1) \\ d_{-x}^\alpha f(x_2) \\ \vdots \\ d_{-x}^\alpha f(x_N) \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_0^\alpha & \omega_1^\alpha & \omega_2^\alpha & \omega_3^\alpha & \cdots & \omega_N^\alpha \\ 0 & \omega_0^\alpha & \omega_1^\alpha & \omega_2^\alpha & \cdots & \omega_{N-1}^\alpha \\ 0 & 0 & \omega_0^\alpha & \omega_1^\alpha & \cdots & \omega_{N-2}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_0^\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Notar que la matriz asociada a (6.8) es la transpuesta de B_α . De esta manera, el esquema que aproxima la ecuación diferencial (5.36) es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = \frac{D}{h^\alpha} H_\alpha p(t) & t > 0 \\ p(0) = p^0, \end{cases} \quad (6.9)$$

donde $H_\alpha = pB_\alpha + qB_\alpha^T$. De esta manera, utilizando el esquema (6.5) se tiene que

$$\left[I_{N+1} - \frac{\Delta t}{h^\alpha} D\theta H_\alpha \right] p^{k+1} = \left[I_{N+1} + \frac{\Delta t}{h^\alpha} D(1-\theta) H_\alpha \right] p^k,$$

con condición inicial $p(0) = p^0$.

Por otro lado, notar que

$$\begin{aligned}\omega_i^\alpha &= (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{\Gamma(i+1)} \\ &= -\frac{\alpha\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

Entonces, si $0 < \alpha < 1$ se tiene que

$$\omega_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ -\frac{\alpha\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1-\alpha)} & \text{si } i > 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Si $1 < \alpha < 2$, vemos que $-1 < 1 - \alpha < 0$. Entonces, para obtener coeficientes positivos como argumento de la función Gamma, realizamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \Gamma(2-\alpha) \\ \Gamma(1-\alpha) &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

De esta manera vemos que en el caso $1 < \alpha < 2$ se tiene que

$$\omega_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ -\alpha & \text{si } i = 1 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} & \text{si } i > 1. \end{cases} \quad (6.11)$$

Las expresiones (6.10) y (6.11) serán de gran ayuda para la implementación de la matriz H_α .

Recordemos que en general las funciones de densidad estables carecen de una expresión matemática explícita, por lo que las soluciones a la ecuación diferencial (5.36) se hallarán mediante simulaciones numéricas. En este sentido, se empezó implementando la matriz H_α mediante el siguiente algoritmo:

```
matriz <- function(alpha,N)
{
  if(alpha<1){
    w <- as.data.frame(c(1))
    for (i in 1:N)
    {
      w_aux <- -(alpha*gamma(i-alpha))/(gamma(i+1)*gamma(1-alpha))
      w <- rbindlist(list(w,as.data.frame(w_aux)),
        use.names=FALSE)
```

6.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN ANÓMALA 117

```

    rm(w_aux)
  }
  matriz <- setDT(matrix(w))
  for (j in 1:N)
  {
    matriz_aux <- rbindlist(list(as.data.frame(rep(0,j)),
      w[1:(N+1-j)]), use.names=FALSE)
    matriz <- cbind(matriz,setDT(matriz_aux))
    rm(matriz_aux)
  }
  return(matriz)
}
else {
  if (alpha>1){
    w <- as.data.frame(c(1,-alpha/gamma(2)))
    for (i in 2:N)
    {
      w_aux<-(alpha*(alpha-1)/gamma(2-alpha))*
        (gamma(i-alpha)/gamma(i+1))
      w <- rbindlist(list(w,as.data.frame(w_aux)),
        use.names=FALSE)
      rm(w_aux)
    }
    matriz <- setDT(matrix(w))
    for (j in 1:N)
    {
      matriz_aux <- rbindlist(list(as.data.frame(rep(0,j)),
        w[1:(N+1-j)]), use.names=FALSE)
      matriz <- cbind(matriz,setDT(matriz_aux))
      rm(matriz_aux)
    }
    return(matriz)
  }
}
}

matriz2 <- function(alpha,N)
{
  A<-matrix(0,N-1,N-1)
  W=as.matrix(matriz(alpha,N))
  for (i in 1:N-1) {

```



```

    for (j in 1:N-1) {
      A[i,j]=W[i+1,j]
    }
  }
  A<-A
}

```

Ahora, debemos establecer una condición inicial para el problema (6.9). Para esto, recordemos que esperamos que para cada $t > 0$, la solución de la ecuación (5.36) sea la función de densidad de una variable Z_t proveniente de un proceso de Lévy. En este sentido, sabemos que $p(x, 0) = 1$ si $x = 0$ y $p(x, 0) = 0$ para $x \neq 0$, por ello tomamos p^0 como el vector cuyas componentes son igual a 0 a excepción de cuando $x_k = 0$. Además, dado que la solución del problema (5.36) está definida sobre todo \mathbb{R} , la idea es hacer que a y b tomen valores grandes, aunque no es necesario hacer que tiendan al infinito, ya que las soluciones que esperamos obtener del problema (5.36), a partir de cierto límite tienden a tomar valores casi nulos. Entonces, tomando en consideración lo dicho en este párrafo, se implementó la siguiente función que depende del peso p y el coeficiente de estabilidad α :

```

simulacion_numerica <- function(alpha,p1){
#Parámetros
n=160
p0<-rep(0,n-1)
for (i in 1:(n-1)) {
  if (i==(n+2)/2){
    p0[i]=1
  } else {
    p0[i]=0
  }
}
p<-p0

s=rep(0,1)
if (alpha<1){
  s=-1
} else{
  if(alpha>1){
    s=1
  }
}
}

```

6.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN ANÓMALA 119

```
Ba<-s*as.matrix(matriz2(alpha,n))
q1<-1-p1
t<-1
m<-100
dt<-t/m
b<-14.5
a<--14.5
h<-(b-a)/n
theta<-0
C<-1
D<-C*gamma(2-alpha)/(alpha-1)
Ha<-p1*Ba +q1*t(Ba)
Bdf=(dt*D/(h^(alpha)))*Ha
#Solución
M<-matrix(0,n-1,m+1)
M[,1]=p0
for (i in 1:m)
{
p<-(solve(diag(n-1)-theta*Bdf))%*((diag(n-1)+(1-theta)*Bdf)%*%p)
M[,i+1]=p
}
x<-rep(0,n-1)
x[1]==-10
for (i in 2:(n-1)) {
  x[i]=x[i-1]+h
}

soluciones <- data.frame(Ejex = x,
                        m1 = M[,20],
                        m2 = M[,40],
                        m3 = M[,60],
                        m4 = M[,80],
                        m5 = M[,m])
#,
#m5 = abs(M[,50]),
#m6 = abs(M[,51]))

#Gráfico
g <- ggplot(data = soluciones, aes(x = Ejex, y = Solucion)) +
  geom_line(aes(x = Ejex, y = M[,20]), colour = "dodgerblue4") +
  geom_line(aes(x = Ejex, y = M[,40]), colour = "firebrick1") +
  geom_line(aes(x = Ejex, y = M[,60]), colour = "darkorange") +
```

```
geom_line(aes(x = Ejex, y = M[,80]), colour = "darkorchid4")+
geom_line(aes(x = Ejex, y = M[,m]), colour = "deeppink2")

g
}
```

Los resultados que se mostrarán corresponden a tiempos $t_1 = 0,2$, $t_2 = 0,4$, $t_3 = 0,6$, $t_4 = 0,8$ y $t_5 = 1$.

Primero se consideró que $p = q = \frac{1}{2}$. En la Figura 6.7 podemos apreciar que a causa que $p = q$, la solución del problema (5.36) tiene su eje de simetría alrededor de $x = 0$, por ello podríamos considerar que el proceso de Lévy asociado a las funciones de densidad representadas en la Figura 6.7 proviene de un paseo aleatorio con cola pesada simétrico. Además, podemos observar que a medida que el tiempo avanza, la forma de campana característica de esta solución va achatándose.

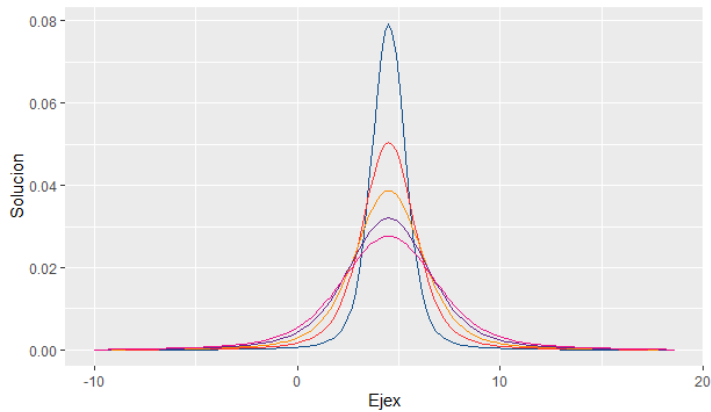


Figura 6.7: Solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p = q$

Los resultados en el caso $p > q$ se aprecian en la Figura 6.8. Podemos observar que a medida que la solución evoluciona, esta va achatándose, pero con la diferencia que se presenta una asimetría hacia el eje positivo x y además la cola derecha de la solución tiende a concentrarse a hacia la derecha a causa de que el peso p , asociado a los saltos positivos, ocasiona que estos ocurran con más frecuencia.

6.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN ANÓMALA 121

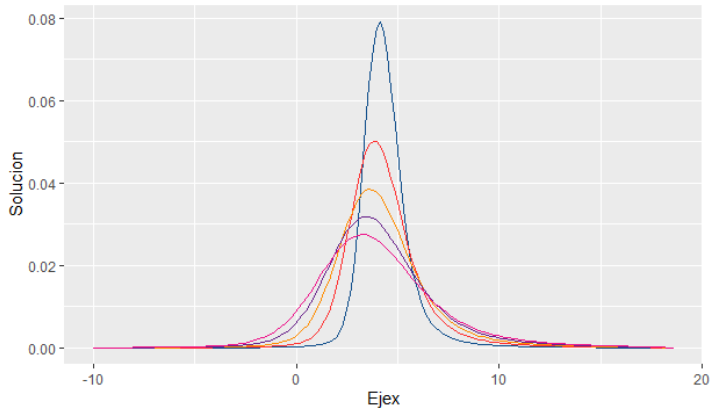


Figura 6.8: Solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p > q$

Los resultados para el caso $p < q$ se aprecian en la Figura 6.9. Observamos nuevamente que la solución del problema (5.36) va achatándose a medida que esta evoluciona. Sin embargo, a causa de que el peso q es mayor a p , observamos que la cola izquierda de estas funciones de densidad tiende a concentrarse hacia el eje negativo x .

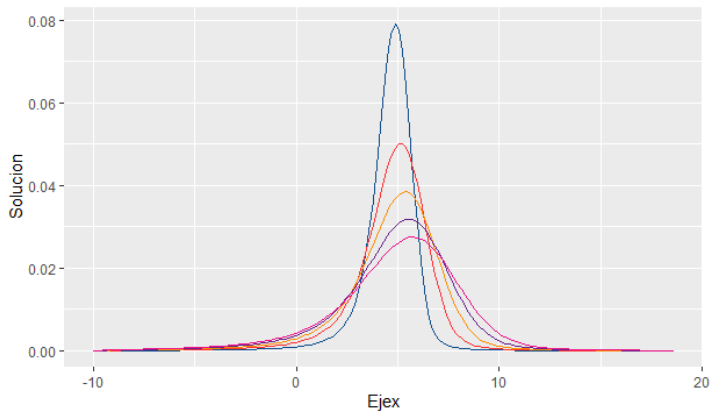


Figura 6.9: Solución de la ecuación (5.36), $\alpha = 1.5$ y $p < q$

En cada uno de los casos, podemos observar que la forma de la solución de la ecuación de difusión fraccionaria bilateral tiene la forma característica de las funciones de densidad estables, las cuales como habíamos mencionado con anterioridad, en general carecen de una expresión matemática que las caracterice. Sin embargo, gracias a los métodos numéricos podemos hallar aproximaciones a estas soluciones, lo cual nos permite describir o entender su comportamiento.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo consistió en estudiar el límite hidrodinámico de una caminata aleatoria con saltos de ley de potencias (distribución de Pareto) y cómo este se relaciona con la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias. En este sentido, el Teorema de representación de Lévy, el Teorema de continuidad de Lévy y el Teorema de inversión para la transformada de Fourier jugaron un papel importante a lo largo de este trabajo. Las conclusiones de este trabajo se derivan de resultados teóricos, así como computacionales.

El resultado del Teorema 4.3.4 nos proporcionó la forma de la función característica de una variable aleatoria límite asociada a una caminata aleatoria con ley de potencias. La expresión matemática de esta función característica y el Teorema de representación de Lévy nos indicaron que eventualmente, una caminata aleatoria con saltos de ley de potencias se comporta como una variable aleatoria estable. Este resultado puede ser considerado como una extensión del clásico Teorema del Límite Central para variables aleatorias con varianzas infinitas. Además, podría considerarse como una extensión del Teorema del Límite Central para variables aleatorias con media infinita, ya que en el caso que el índice de estabilidad $0 < \alpha < 1$, la media de una variable aleatoria con saltos de ley de potencias no existe y es por ello que no se requiere añadir un coeficiente de centrado para garantizar la convergencia en distribución de una caminata con saltos de ley de potencias a una variable aleatoria estable.

La Proposición 4.3.6 es un resultado casi inmediato del Teorema 4.3.4, cuyo resultado nos proporcionó una colección de variables aleatorias a tiempo continuo, a partir de un proceso estocástico a tiempo discreto y espacio de estados discreto. Para esto, el proceso discreto considerado fue una caminata aleatoria con saltos

de ley de potencias reescalada y mediante la expresión de la transformada de Fourier del proceso límite, apreciamos que este proceso estocástico es una familia de variables aleatorias estables, lo cual en un principio nos dio indicios que se trataba de un proceso de Lévy. En este sentido, más adelante se mostró que esta familia de variables aleatorias posee incrementos estacionarios e independientes, lo cual permitió confirmar que los procesos de Lévy emergen como el límite en distribución de caminatas aleatorias con saltos de ley de potencias. Además, con el fin de visualizar este resultado, en el Capítulo 6 se definió una colección de variables aleatorias con saltos de ley de potencias bilateral y a partir de estas variables aleatorias definimos una caminata aleatoria, de la cual se simuló varias trayectorias. De estas simulaciones, se pudo apreciar que la presencia de una varianza infinita ocasiona que la caminata aleatoria presente saltos ocasionales abruptos. Por otro lado, cuando se reescaló esta caminata aleatoria, se pudo observar que las trayectorias del proceso límite asociado corresponde a las trayectorias de un proceso de Lévy.

Por otro lado, si derivamos la transformada de Fourier asociada a la función característica proporcionada por la Proposición 4.3.4 respecto a la variable temporal o siguiendo el procedimiento para el caso $1 < \alpha < 2$ del Capítulo 5, se puede apreciar que la transformada de Fourier de un proceso de Lévy resuelve un tipo de ecuación diferencial parcial, la cual a priori no puede ser invertida directamente como en el modelo de difusión clásico. Sin embargo, si recurrimos al cálculo fraccionario, la proposición 2.1.3 nos permite invertir la ecuación diferencial asociada a la transformada de Fourier de un proceso de Lévy. Esto permitió ver que las funciones de densidad de un proceso de Lévy resuelven un tipo particular de ecuaciones diferenciales conocidas como ecuaciones de difusión anómala.

Algo que debemos tener en cuenta es que las funciones de densidad estables en general carecen de una expresión matemática explícita que las caracterice. Debido a este hecho, a pesar que sabemos que las funciones de densidad de un proceso de Lévy resuelven la ecuación de difusión anómala, no es posible hallar una solución de manera directa. Sin embargo, los métodos numéricos nos permitieron simular las soluciones de la ecuación de difusión anómala (5.36), lo cual nos permitió apreciar que en efecto, las funciones de densidad de un proceso de Lévy resuelven este tipo de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, los semigrupos asociados a procesos de Lévy (mediante una convolución entre una función f y las funciones de densidad de un proceso de Lévy) resuelven el problema (3.20) a través del generador infinitesimal del semigrupo, el cual coincide con la forma de generador de la derivada de Caputo. Esto nos permite apreciar que si f es una función de densidad, la expresión (3.20) corres-

ponde a un problema de valor inicial que involucra derivadas fraccionarias y su solución es la función de densidad de un proceso de Lévy con una localización inicial aleatoria.

Bibliografía

- [1] Zhen-Qing Chen, Wai-Tong Louis Fan, et al. Hydrodynamic limits and propagation of chaos for interacting random walks in domains. *Annals of Applied Probability*, 2017.
- [2] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [3] D Hernández. Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones. *Miscelánea Matemática*, 2014.
- [4] Oliver Ibe. *Markov processes for stochastic modeling*. Newnes, 2013.
- [5] Pavel L Krapivsky, Sidney Redner, and Eli Ben-Naim. *A kinetic view of statistical physics*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] Mark M Meerschaert and Alla Sikorskii. *Stochastic models for fractional calculus*, volume 43. Walter de Gruyter, 2011.
- [7] Luis Rincón. Introducción a los procesos estocásticos. *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNAM*, 2012.
- [8] Sheldon M Ross. *Introduction to probability models*. Academic press, 2014.
- [9] Timo Seppäläinen. Translation invariant exclusion processes (book in progress). *Department of Mathematics, University of Wisconsin*, 2003.
- [10] Adriana Uquillas and Adilson Simonis. First displacement time of a tagged particle in a stochastic cluster in a simple exclusion process with random slow bonds. *Advances in Applied Probability*, 2019.