



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA ESPECTROSCOPIA DE BARIONES-MESONES UTILIZANDO UN MODELO DE QUARKS CONSTITUYENTES TEORÍA DE *SCATTERING* APLICADA AL SISTEMA MESÓN-BARIÓN

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

MARLON FABRICIO CONDE CORREA

marlon.conde@epn.edu.ec

DIRECTOR: ÁLVARO DUEÑAS VIDAL

alvaro.duenas@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2024

CERTIFICACIONES

Yo, MARLON FABRICIO CONDE CORREA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Marlon Fabricio Conde Correa

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Marlon Fabricio Conde Correa, bajo mi supervisión.

Álvaro Dueñas Vidal
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Marlon Fabricio Conde Correa

Álvaro Dueñas Vidal

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Álvaro Dueñas Vidal, docente de la Escuela Politécnica Nacional, por permitirme formar parte de este proyecto. También, agradezco al Dr. Pablo García Ortega docente de la Universidad de Salamanca por su constante orientación en el desarrollo del tema; sin sus consejos para resolver dudas, este trabajo no habría sido posible.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como propósito exponer un modelo para estudiar la Cromodinámica Cuántica (QCD) en el rango de bajas energías, para lograr dicho propósito se empleó el Modelo Quark Constituyente del Grupo de Física Nuclear de la Universidad de Salamanca. Con el cual, se ha estudiado un sistema en particular mesón-barión (Kaón-Nucleón) mediante sus constituyentes (quarks), es decir, un sistema de 5 cuerpos. Se calculó el potencial de este sistema, para posteriormente aplicarlo en la Teoría de *Scattering* donde, hemos conseguido describir secciones eficaces tanto elásticas como de intercambio de carga en un rango de hasta 450 MeV. Estas han sido comparadas con datos experimentales. Por lo tanto, podemos concluir que el modelo es válido para describir estos procesos ($KN \rightarrow KN$) en el rango de bajas energías.

Palabras clave: QCD, barión, mesón, bajas energías, *scattering*, sección eficaz.

ABSTRACT

This research work aims to articulate a theoretical framework for the exploration of Quantum Chromodynamics (QCD) within the domain of low-energy range. To this end, the Constituent Quark Model, as developed by the Nuclear Physics Group at the University of Salamanca, was employed. With this model, a particular system, the meson-baryon (Kaon-Nucleon), was studied through its constituents (quarks), constituting a 5-body system. The potential of this system was meticulously computed and subsequently applied within the framework of Scattering Theory. Our endeavor yielded a comprehensive description of both elastic and charge exchange cross-sections within a range of up to 450 MeV. These results were compared with experimental data. Therefore, we can conclude that the model is valid to describe these processes ($KN \rightarrow KN$) in the low-energy range.

Keywords: QCD, baryon, meson, low energy, scattering, cross-section.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado	1
1.1. Objetivo general	2
1.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcance	3
1.4. Marco teórico	3
1.4.1. Propiedades fundamentales de QCD	3
1.4.2. Modelizando QCD	4
2. Metodología	7
2.1. Método del grupo resonante	8
2.2. RGM para el sistema KN	13
2.2.1. Estados de bariones conformados por quarks ligeros	14
2.2.2. Estados de mesones conformados por quarks ligeros	15
2.3. Cálculos de los kernels RGM en el sistema KN	17
2.3.1. Interacción directa para el sistema KN	19
2.3.2. Ondas parciales	22
2.4. Teoría de Dispersión: Lippmann-Schwinger	24
2.4.1. Solución numérica de Lippmann-Schwinger	27
3. Resultados, conclusiones y recomendaciones	32

3.1. Resultados	32
3.2. Conclusiones y recomendaciones	37
4. Anexo de QCD	39
4.1. Grupo $SU(3)$	39
5. Anexo de Coordenadas para el sistema KN	41
5.1. Sistema formado por KN	41
6. Anexo de Elementos de espín, sabor y color en el sistema KN	44
6.1. Método para calcular los Coeficientes	44
6.2. Valores para el sistema KN	46
Bibliografía	52

Índice de figuras

2.1. Diagramas directos de la interacción quark-quark, para el proceso $Q\bar{n} - nnn \rightarrow Q\bar{n} - nnn$, con $Q = \{s\}$, $n = \{u, d\}$. La notación V_{ij} indica la interacción entre un par de quarks i y j	19
3.1. Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Potencial del sistema incluye diagramas de aniquilación. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].	34
3.2. Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. (a) Potencial del sistema incluye una corrección mediante el potencial a_o . (b) Potencial del sistema incluye corrección mediante un potencial óptico sin dependencia de isospín. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].	35
3.3. Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Corrección al potencial del sistema con potencial a_o más potencial óptico. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].	36

3.4. Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Corrección al potencial con el potencial óptico general. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].	37
6.1. En (a) tenemos los diagramas directos donde existe el intercambio de un bosón de Goldstone, el diagrama de aniquilación para el pión lo presentamos en (b) y en (c) presentamos el diagrama de aniquilación para el gluón.	48

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones, la base de la materia hadrónica. Aunque QCD ha demostrado ser un poderoso marco teórico para comprender los fenómenos de alta energía en la física de partículas, su aplicación a bajas energías plantea desafíos importantes.

En este contexto, este trabajo tiene como objetivo describir un formalismo teórico que permita estudiar QCD en el rango de bajas energías. Se ha empleado una cantidad inmensa de tiempo en describir a las interacciones fuertes a bajas energías, en donde la constante de acoplamiento es muy grande, y, por ende, resulta imposible modelar la interacción de color como una perturbación.

Entre los modelos más conocidos está el Cálculo en Redes (*Lattice QCD*) [3], que tiene la capacidad de obtener resultados no perturbativos desde principios fundamentales. Sin embargo, implica un considerable esfuerzo numérico, este modelo no posibilita el cálculo del espectro completo de energía y carece de una definición clara del espín. Por otro lado, existen modelos fenomenológicos que tienen la gran desventaja que requieren demasiados parámetros, entre los más conocidos está el modelo de la bolsa de MIT (*MIT Bag Model*) [4].

Por estos motivos, en el presente trabajo empleamos un modelo que permita describir numerosos procesos de la Física Hadrones, como es el Modelo Quark Constituyente del Grupo de Física Nuclear de la Universidad de Salamanca [5, 6], el cual ha logrado describir exitosamente y de una manera unificada la interacción NN [5], el espectro de

bariones[7] y el espectro de mesones ligeros[8].

La estructura del trabajo es la siguiente: en el marco teórico proporcionaremos algunas propiedades de QCD y presentaremos el modelo de la Universidad de Salamanca. En el capítulo 2, desarrollaremos el método del Grupo Resonante (RGM siglas en inglés), aplicándolo a nuestro caso de interés, el sistema mesón-barión. Nos enfocaremos en el kaón K y el nucleón N , para posteriormente exponer la teoría de *Scattering*. En el capítulo 3, presentaremos los resultados del estudio de los procesos $KN \rightarrow KN$, explorando las secciones eficaces elástica e intercambio de carga, y discutiremos los aspectos más relevantes asociados con este tipo de procesos.

Como comentario final, es importante señalar que en todo el trabajo utilizamos unidades naturales $\hbar = c = 1$.

1.1. Objetivo general

Desarrollar un formalismo completo que permita explicar QCD en el rango de bajas energías, proporcionando un marco teórico sólido para comprender fenómenos nucleares a escalas de energía más bajas.

1.2. Objetivos específicos

- Utilizar el modelo de quarks constituyentes no relativistas para modelar de manera detallada QCD a baja energía, profundizando en los mecanismos fundamentales que rigen las interacciones fuertes entre partículas subatómicas (quarks).
- Calcular el potencial del sistema mesón-barión (KN), donde K es el Kaón y N el nucleón, utilizando el formalismo desarrollado en el objetivo general. Este cálculo proporcionará una descripción cuantitativa del comportamiento del sistema en términos de QCD y abrirá nuevas perspectivas para comprender las propiedades de la interacción fuerte en el rango de bajas energías.
- Con el modelo desarrollado, llevar a cabo comparaciones sistemáticas con datos experimentales pertinentes. Esto nos permitirá validar y ajustar el formalismo propuesto, garantizando su aplicabilidad y precisión en la descripción de los fenómenos observados en experimentos nucleares a energías bajas.

1.3. Alcance

El modelo de quarks constituyentes permite la incorporación fenomenológica de las principales propiedades de QCD, como son libertad asintótica, confinamiento y ruptura espontánea de la simetría quiral. Además, constituye una herramienta teórica muy versátil para integrar nuevas ideas en el análisis de datos experimentales o el estudio de sistemas complejos que involucren quarks y gluones.

En este trabajo, nos centraremos en estudiar el sistema KN . El cálculo del potencial del sistema KN y las secciones eficaces del proceso $KN \rightarrow KN$, lo realizamos mediante ondas parciales con la metodología adecuada.

1.4. Marco teórico

1.4.1. Propiedades fundamentales de QCD

QCD es una Teoría Cuántica de Campos no abeliana con grupo $SU(3)$. Algunas propiedades del grupo $SU(3)$ son presentadas en el anexo (4). Esta teoría exhibe propiedades fundamentales que son,

1. Simetría quiral aproximada solo para quarks ligeros u y d , lo que implica invarianza bajo una transformación global $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$.
2. En distancias cortas o momentos grandes, la constante de acoplamiento efectivo $\alpha_s(Q^2)$ disminuye logarítmicamente, dando lugar a una libertad asintótica donde las interacciones entre quarks y gluones se debilitan [9, 10].
3. A largas distancias o momentos bajos, el acoplamiento efectivo se vuelve muy fuerte, resultando en el confinamiento de quarks. Los quarks y gluones no se han observado experimentalmente como estados de color libres, ya que están confinados dentro de los hadrones como partículas sin carga de color. Algunos estudios relevantes que abordan el confinamiento son [11, 12].
4. La simetría quiral se rompe espontáneamente, generando masa de forma dinámica. Los quarks que constituyen los hadrones adquieren una masa constituyente de cientos de MeV debido a la condensación de quarks y antiquarks.

1.4.2. Modelizando QCD

En cuanto a la modelización de QCD, al ser una teoría no perturbativa a bajas energías, se han desarrollado diversos métodos para su estudio, siendo los más utilizados el de *Lattice* QCD y la modelización. La modelización consiste en tomar las propiedades fundamentales de QCD antes mencionadas, para construir una teoría fenomenológica coherente con las observaciones experimentales.

Los modelos de quarks constituyentes surgieron de investigaciones sobre los momentos magnéticos del protón y el neutrón, sugiriendo la presencia de quarks (constituyentes) masivos con una masa aproximada de 300 MeV en la composición de estas partículas. Desde un enfoque fenomenológico, estos modelos abordan el confinamiento de quarks y la ruptura espontánea de la simetría quiral mediante potenciales efectivos, incorporando también efectos perturbativos de la Cromodinámica Cuántica (QCD), como el intercambio de gluones. Aunque inicialmente se planteaba que los hadrones se formaban a partir de quarks constituyentes masivos, la interpretación actual sostiene que el fenómeno de la masa constituyente se explica mediante la ruptura espontánea de la simetría quiral original $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ a una escala específica del momento.

Un ejemplo de sistema que revela el origen de la ruptura de la simetría quiral es el modelo de líquido de instantones propuesto por Dyakonov [13]. En este modelo, el propagador de los quarks se regula a través de la interacción con los modos cero del líquido de instantones, donde un instantón se define como una solución localizada de la ecuación de movimiento del gluón $D_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ de QCD. Independientemente de los detalles específicos sobre cómo los quarks adquieren masa dinámica, es posible formular un lagrangiano invariante bajo transformaciones quirales, como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - M(q^2)U\gamma_5] \Psi, \quad (1.1)$$

donde $U\gamma_5 = \exp(i\pi^a \lambda^a \gamma_5 / f_\pi)$, con f_π representando la constante de desintegración del pión, λ^a las matrices SU(3) de sabor, y π^a indicando los campos pseudoescalares ($\vec{\pi}$, K_i , η_8) con $i = 1 \dots 4$. La función $M(q^2)$ denota la masa del quark constituyente.

La relación entre la masa del quark constituyente y el momento puede obtenerse teóricamente, pero es posible parametrizarla como $M(q^2) = m_q F(q^2)$, donde $M(q^2 = 0) = m_q$ es la masa del quark constituyente ligero, y $M(q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Además,

$$F(q^2) = \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

donde Λ determina la escala en la que la simetría quiral se rompe.

La expansión de U^{γ_5} en términos de campos de bosones toma la forma:

$$U^{\gamma_5} = 1 + \frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \lambda^a \pi^a - \frac{1}{2f_\pi^2} \pi^a \pi^a + \dots, \quad (1.3)$$

donde el primer término genera la masa del quark constituyente, el segundo da lugar al intercambio de un bosón entre quarks, y la principal contribución del tercer término proviene del intercambio de dos piones correlacionados, que pueden modelarse en términos del intercambio de una partícula escalar (σ). Al insertar la ecuación (1.3) en (1.1), obtenemos un lagrangiano más simple invariante bajo la transformación quiral $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, con una masa constituyente dependiente de la escala y potenciales escalares y pseudoescalares. La forma explícita de estos potenciales se obtiene después de una reducción no relativista de las amplitudes de Feynman en cada proceso. Las distintas componentes del potencial son, central, tensorial y de espín-órbita, dependen del carácter del operador.

$$V_{qq}(\vec{q}_{ij}) = V_{qq}^C(\vec{q}_{ij}) + V_{qq}^T(\vec{q}_{ij}) + V_{qq}^{SO}(\vec{q}_{ij}), \quad (1.4)$$

donde C representa la parte central, T la tensorial y SO la de espín-órbita.

El potencial de la ecuación (1.4) posee distintas contribuciones las cuales son,

$$V_{qq}(\vec{q}_{ij}) = V_\pi(\vec{q}_{ij}) + V_\sigma(\vec{q}_{ij}) + V_K(\vec{q}_{ij}) + V_\eta(\vec{q}_{ij}). \quad (1.5)$$

Dadas las características del modelo, es conveniente expresar los potenciales de intercambio de bosones de Goldstone en el espacio de momento. Los beneficios de trabajar en espacio de momentos en lugar de el espacio de configuración las explicaremos en el siguiente capítulo, al formular el método RGM.

Por tanto, los potenciales no relativistas generados en la aproximación estática para los bosones de Goldstone son,

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{q}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_i m_j} \frac{\Lambda_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + q^2} \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q})}{m_\pi^2 + q^2} (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \\ V_\sigma(\vec{q}) &= -\frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 + q^2} \frac{1}{m_\sigma^2 + q^2}, \\ V_K(\vec{q}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_i m_j} \frac{\Lambda_K^2}{\Lambda_K^2 + q^2} \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q})}{m_K^2 + q^2} \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \cdot \lambda_j^a), \end{aligned} \quad (1.6)$$

Considerando \vec{q} como el momento transferido, $\vec{\sigma}_i$ y $\vec{\tau}_i$ representan las matrices de Pauli

para el espín e isospín del quark i , respectivamente, mientras que λ_i^a indica las matrices de Gell-Mann para el sabor asociadas con el quark i . Los potenciales se derivan de estados normalizados con un momento definido.

Adicionalmente, la constante de acoplamiento entre los bosones de Goldstone y los quarks constituyentes, expresada como $g_{ch}^2/4\pi$, se define mediante $g_{ch} = m_q/f_\pi$. En este contexto, m_i representa la masa del quark constituyente, y m_π , m_K son las masas de los bosones de Goldstone ajustadas a valores experimentales. Se exceptúa m_σ , que se determina mediante la relación $m_\sigma^2 \simeq m_\pi^2 + 4m_{u,d}^2$. Además, Λ_π , Λ_σ y Λ_K se refieren a los cut-offs asociados con la escala de energía.

Los potenciales presentados de (1.6) tienen términos centrales y tensoriales, para separar cada término empleamos la siguiente ecuación,

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q}) = \frac{1}{3}q^2(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) + [\vec{q} \otimes \vec{q}]^2 \cdot [\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]^2. \quad (1.7)$$

Dentro del anexo (6) desarrollamos una técnica que permite encontrar los valores de espín-sabor-color de las expresiones de (1.6).

Masas de quarks	$m_n(MeV)$	313
	$m_s(MeV)$	555
Bosones Goldstone	$m_\pi(fm^{-1})$	0.70
	$m_\sigma(fm^{-1})$	3.42
	$m_K(fm^{-1})$	2.51
	$\Lambda_\pi(fm^{-1})$	4.20
	$\Lambda_\sigma(fm^{-1})$	4.20
	$\Lambda_K(fm^{-1})$	4.20
	$g_{ch}^2/4\pi$	0.54
	α_s	0.497

Cuadro 1.1: Parámetros del modelo de [14].

Capítulo 2

Metodología

En el presente capítulo introducimos el método del grupo resonante (RGM en sus siglas en inglés) y lo aplicaremos para describir un sistema de varios quarks, estudiamos el sistema de un mesón-barión. RGM fue introducido por Wheeler en 1937 [15], este método fue concebido con el objetivo de representar a los núcleos como estructuras compuestas por múltiples subestructuras de nucleones, dichas subestructuras se las conoce como *clusters*.

El método se formula considerando al conjunto de partículas ligadas (*clusters*), cuya estructura interna se conoce, y donde la interacción se estudia por medio de las interacciones de sus elementos. Este método presenta varias ventajas como son, el estudio simultáneo de procesos de dispersión, estados ligados y reacciones. Como principal ventaja del método es la incorporación precisa del principio de exclusión de Pauli, utilizando para el caso donde el sistema este compuesto por fermiones funciones de onda antisimétricas. Además, considera casos donde la cinemática del problema es no relativista, lo que da como resultado un fácil estudio del movimiento del centro de masas.

A continuación, en la primera sección expondremos una formulación general, en la segunda detallamos la aplicación del método al sistema mesón-barión, dedicando la tercera sección al desarrollo de los kernels de RGM del sistema KN y finalmente en la cuarta sección presentaremos la Teoría de Dispersión.

2.1. Método del grupo resonante

En esta sección, vamos a exponer una explicación del método RGM dentro del espacio de momentos, enfocándonos cuando tenemos simplemente dos *clusters*. Esta formulación no abarca amplitudes de dispersión, las cuales dan una explicación de porque los *clusters* cambian al momento de interaccionar.

Para no extender la presentación del formalismo, solo consideramos dos *clusters* los cuales los llamamos A y B , estos están formados por N fermiones, donde cada fermión tiene igual masa y algunos serán indistinguibles, por otro lado, consideramos solo los grados de libertad espaciales. Usaremos \vec{p}_{ξ_C} para denotar a las coordenadas de Jacobi internas del *cluster* C , \vec{P} es el momento relativo entre los dos agregados y \vec{P}_{CM} es el momento del centro de masas. Lo cual nos conduce a una equivalencia entre las coordenadas de Jacobi $(\vec{p}_{\xi_A}, \vec{p}_{\xi_B}, \vec{P}, \vec{P}_{CM})$ y las coordenadas originales $(\vec{p}_i, \vec{p}_j)_{i \in A, j \in B}$. En cuanto a la estructura interna del *cluster* la representamos por la función de onda denotada como $\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})$. Por tanto, para el sistema de dos *clusters* expresamos la función de onda como,

$$\langle \vec{p}_{\xi_A} \vec{p}_{\xi_B} \vec{P} \vec{P}_{CM} | \psi \rangle = \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \chi(\vec{P}) \zeta(\vec{P}_{CM})], \quad (2.1)$$

donde el operador antisimétrico lo denotamos por \mathcal{O} , $\zeta(\vec{P}_{CM})$ representa la función de onda del movimiento de centro de masas, la despreciamos del cálculo posteriormente y representamos la función de onda que describe el movimiento relativo de los dos *clusters* como $\chi(\vec{P})$, esta función de onda viene a ser desconocida en el problema.

Las partículas que conforman a los *clusters* van a interaccionar mediante un potencial de dos cuerpos, con lo cual tenemos el hamiltoniano del sistema de la siguiente forma,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V_{ij} - K_{CM}, \quad (2.2)$$

siendo V_{ij} la interacción entre dos fermiones, K_{CM} es la energía cinética del sistema en el centro de masas y la masa del fermión por m_i .

Usamos la ecuación de Schrödinger para caracterizar la evolución del sistema de los dos *clusters*,

$$(\mathcal{H} - E_T) |\psi\rangle = 0, \quad (2.3)$$

a esta ecuación la expresamos de manera proyectada como,

$$\langle \delta\psi | \mathcal{H} - E_T | \psi \rangle = 0, \quad (2.4)$$

donde la función de onda varia por $\delta\psi$.

De lo anterior, sabemos que debemos hallar función de onda $\chi(\vec{P})$, es decir, en la ecuación (2.1) introducimos un nuevo parámetro continuo \vec{P}_i para poder separar la función de onda del operador antisimétrico, tenemos,

$$\langle \vec{p}_{\xi_A} \vec{p}_{\xi_B} \vec{P} \vec{P}_{CM} | \psi \rangle = \int \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \zeta(\vec{P}_{CM})] \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i. \quad (2.5)$$

Ahora al variar la función de onda solo consideramos la variación respecto al movimiento relativo, donde escribimos la variación en coordenadas de Jacobi,

$$\langle \delta\psi | \vec{p}_{\xi'_A} \vec{p}_{\xi'_B} \vec{P}' \vec{P}'_{CM} \rangle = \int \mathcal{O}[\phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) \zeta^*(\vec{P}'_{CM})] \delta\chi^*(\vec{P}_f) d\vec{P}_f. \quad (2.6)$$

Una vez realizamos esto, introducimos las ecuaciones anteriores en la ecuación proyectada (2.4) y llegamos a,

$$\int [{}^{RGM}H(\vec{P}_f, \vec{P}_i) - E_T^{RGM} N(\vec{P}_f, \vec{P}_i)] \chi(\vec{P}_i) \delta\chi^*(\vec{P}_f) d\vec{P}_i d\vec{P}_f = 0, \quad (2.7)$$

considerando que,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H(\vec{P}_f, \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{P}' d\vec{P}'_{CM} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} d\vec{P}_{CM} \times \\ &\quad \times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) \zeta^*(\vec{P}'_{CM}) \times \\ &\quad \times \mathcal{H} \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \zeta(\vec{P}_{CM})]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} {}^{RGM}N(\vec{P}_f, \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{P}' d\vec{P}'_{CM} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} d\vec{P}_{CM} \times \\ &\quad \times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) \zeta^*(\vec{P}'_{CM}) \times \\ &\quad \times \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \zeta(\vec{P}_{CM})], \end{aligned} \quad (2.9)$$

de estas ecuaciones observamos que el operador antisimétrico y el hamiltoniano conmutan, cumpliéndose que $\mathcal{O}^2 = \mathcal{N}\mathcal{O}$, donde \mathcal{N} da un valor de normalización, por otro lado, el término correspondiente a la variación de la función de onda $\delta\psi$ que proviene del ope-

rador antisimétrico desaparece. Como este operador no lo tomamos en cuenta, realizamos la integración en la coordenada \vec{P}_f , lo que da como resultando la coordenada del momento relativo final \vec{P}' . Además, la coordenada del centro de masas no está afectada por el operador antisimétrico, ya que este último término, al final, lo podemos escribir como suma de términos que intercambien partículas. Con este enfoque, eliminamos $\zeta(\vec{P}_{CM})$ del operador antisimétrico y, dado que el hamiltoniano no tiene una dependencia en el centro de masas, podemos llevar a cabo la integración en la coordenada \vec{P}_{CM} . Suponiendo que ζ ya está normalizada aportándonos un valor de uno. Por lo tanto, los kernels pueden expresarse de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
{}^{RGM}H(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \times \\
&\quad \times \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{H} \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i)], \quad (2.10) \\
{}^{RGM}N(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \times \\
&\quad \times \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{O}[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i)].
\end{aligned}$$

Como la ecuación (2.7) se cumple para toda variación de la función de onda $\delta\psi$ tenemos,

$$\int [{}^{RGM}H(\vec{P}, \vec{P}_i) - E_T^{RGM} N(\vec{P}', \vec{P}_i)] \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i = 0. \quad (2.11)$$

Hemos llegado a una expresión de la ecuación de Schrödinger para la incógnita del problema que es la función de onda del movimiento relativo.

Ahora expresamos el operador antisimétrico de la siguiente forma,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}' \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B, \quad (2.12)$$

donde \mathcal{O}_C es el operador antisimétrico del *cluster* C y \mathcal{O}' el operador antisimétrico que puede mezclar fermiones dentro de los *clusters*. Suponemos que las funciones de onda interna correspondientes del *cluster* C denotadas como $\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})$ ya están antisimetrizadas, por lo que cumplen,

$$\mathcal{O}_C[\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})] = \phi_C(\vec{p}_{\xi_C}). \quad (2.13)$$

Definimos al operador antisimétrico como $\mathcal{O}' = 1 + \mathcal{O}''$, podemos distinguir entre los términos asociados a la parte directa, donde no hay intercambio de fermiones, y la parte

de intercambio, donde ocurre el intercambio de fermiones entre los *clusters*. Así:

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H(\vec{P}', \vec{P}_i) &= {}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) + {}^{RGM}H_E(\vec{P}', \vec{P}_i), \\ {}^{RGM}N(\vec{P}', \vec{P}_i) &= {}^{RGM}N_D(\vec{P}', \vec{P}_i) + {}^{RGM}N_E(\vec{P}', \vec{P}_i), \end{aligned} \quad (2.14)$$

por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \times \\ &\quad \times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \mathcal{H} \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H_E(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \times \\ &\quad \times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \mathcal{H} \mathcal{O}''[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i)], \end{aligned}$$

en los términos de normalización estas relaciones son cumplidas. De tal manera que para la normalización directa es fácil integrar, y llegamos a,

$${}^{RGM}N_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i), \quad (2.16)$$

con el hecho que todas las funciones de onda vienen normalizadas a un valor de uno.

Ahora, consideramos que el hamiltoniano del sistema no cambia ante transformaciones de Galileo, y lo expresamos como,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}', \quad (2.17)$$

donde \mathcal{H}_C representa hamiltoniano del *cluster* C , formado por la energía de los fermiones tomando como referencia al centro de masas del *cluster* más las interacciones V_{ij} entre fermiones del mismo *cluster*, lo que nos da como resultado el siguiente hamiltoniano relativo de los *clusters*,

$$\mathcal{H}' = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} + \sum_{(i \in A, j \in B)} V_{ij}, \quad (2.18)$$

es decir, la suma de la energía cinética relativa de los dos *cluster* A y B más la interacción entre fermiones de diferentes *clusters*, con $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ la masa reducida del sistema.

Teniendo en cuenta que los operadores H_C solo actúan sobre las coordenadas internas

de los *clusters* para el término directo tenemos,

$${}^{RGM}H_C(\vec{P}', \vec{P}_i) = E_C \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i), \quad (2.19)$$

siendo E_C la energía del *cluster* C . En cuanto a la energía cinética para obtener su término directo lo planteamos así,

$${}^{RGM}K_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \frac{\vec{P}_i^2}{2\mu} \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i), \quad (2.20)$$

ya que el operador es diagonal y solo lo aplicamos sobre \vec{P} .

Ahora, comentaremos sobre el término de interacción. Donde definimos el kernel directo como,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \sum_{i \in A, j \in B} \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} \times \\ &\times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) V_{ij}(\vec{P}', \vec{P}_i) \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

lo expresado, nos ha llevado a la integración sobre todos los momentos internos de los *clusters* y la dependencia en los momentos relativos inicial y final la expresamos de manera directa a través de las interacciones V_{ij} en esos momentos.

En particular, un caso de suma importancia surge cuando las interacciones son locales, es decir, dependen del momento transferido $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ donde \vec{p}' y \vec{p} son respectivamente los momentos relativos final e inicial de los quarks que interaccionan. De tal manera que, el kernel directo tiene una dependencia $(\vec{P}' - \vec{P})$ que es local.

Por otro lado, nuestro hamiltoniano lo formulamos una vez restada ya la energía cinética del centro de masas,

$${}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \left(\frac{\vec{P}_i^2}{2\mu} + E_A + E_B \right) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i) + {}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i). \quad (2.22)$$

Expresamos la ecuación de Schrödinger proyectada como,

$$\left(\frac{\vec{P}'^2}{2\mu} - E \right) \chi(\vec{P}') + \int {}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i) \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i = 0, \quad (2.23)$$

con $E = E_T - E_A - E_B$ energía relativa entre los *clusters*.

Tenemos que resolver para los términos directos en esta ecuación de Schrödinger.

Para esto, proyectamos en momento angular multiplicando por los armónicos esféricos correspondientes y realizamos las integraciones angulares obteniéndose,

$${}^{RGM}H_D^{L'M'}(P', P_i) = \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\hat{P}' d\hat{P}_i Y_{L'M'}^*(\hat{P}') Y_{LM}(\hat{P}_i) \times \quad (2.24)$$

$$\times \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \mathcal{H} \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}),$$

nos vemos restringidos a trabajar con estados de momento angular total definido J , por el hecho de tomar en cuenta los grados de libertad de espín. Los potenciales de interacción quark-quark V_{ij} serán tensores de orden cero en el espacio de momento angular total, que en general los escribimos como producto escalar de operadores en el espacio orbital por operadores en el espacio de espín de la siguiente manera,

$$V_{ij} = \mathcal{T}_L^{(k)} \cdot \mathcal{T}_S^{(k)}. \quad (2.25)$$

Cuando tengamos kernels donde la base de momento angular viene definida por un J emplearemos la ecuación siguiente,

$$\langle \nu' L' S' J' M' | \mathcal{T}_L^{(k)} \cdot \mathcal{T}_S^{(k)} | \nu L S J M \rangle = (-1)^{J'+S'+L} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times \quad (2.26)$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ S' & L' & k \end{matrix} \right\} \sum_{\nu''} \langle \nu' L' | | \mathcal{T}_L^{(k)} | | \nu'' L \rangle \langle \nu'' S' | | \mathcal{T}_S^{(k)} | | \nu S \rangle,$$

con ν denota a todos los números cuánticos que son necesarios para describir al sistema. De tal manera que, para el caso del operador de momento angular procederemos calculando el elemento de matriz reducido con el teorema de Wigner-Eckart, descrito anteriormente. Mientras que para el operador en espacio de espín se utilizarán técnicas de $SU(2)$ descritas en el anexo (6).

Finalmente, el resultado es una expresión que tiene distintos canales que hemos derivado de la ecuación de Schödinger proyectada de (2.23),

$$\left(\frac{P'^2}{2\mu} - E \right) \chi_{M'B'}^{JL'S'}(P') + \sum_{MBLS} \int P_i^2 dP_i^{RGM} V_D^{M'B'L'S'}(P', P_i) \chi_{MB}^{JLS}(P_i) = 0. \quad (2.27)$$

2.2. RGM para el sistema KN

Como primer paso antes de aplicar el método a nuestro sistema el mesón-barión, debemos dar las expresiones de las funciones de onda internas del mesón y del barión. Como

bien sabemos los hadrones están compuestos por quarks, los mesones están formados por un quark y un antiquark mientras que los bariones están formados por tres quarks, donde los quarks tienen una masa definida y están confinados dentro de una región del espacio. Los quarks interactúan entre ellos a través de un potencial que se deriva del lagrangiano del sistema. Por tanto, el tratamiento de mesones y bariones es distinta, dividimos su estudio en dos casos.

2.2.1. Estados de bariones conformados por quarks ligeros

Al referirse como un problema de tres cuerpos, hacer uso de soluciones exactas derivadas del lagrangiano resulta difícil. Por este hecho, lo usual es recurrir a otras técnicas para tratar el problema de una forma más simple. Un ejemplo de esto en [6], donde estudiaron el potencial NN obtenido de la aproximación de Born-Oppenheimer usando las funciones gaussianas, con un valor de la anchura fijo, muestran resultados muy parecidos a las funciones de onda exactas, soluciones de la ecuación de Schrödinger.

Así pues, por simplificar el cálculo, tomaremos las funciones de onda radial de los quarks como gaussianas,

$$\psi(\vec{p}_i) = \prod_{i=1}^3 \left[\frac{b^2}{\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{b^2 p_i^2}{2}}, \quad (2.28)$$

siendo b el tamaño del barión. La implementación de esta aproximación nos ayudará a simplificar el cálculo de los potenciales RGM, debido a que las gaussianas son funciones internas útiles.

La función de onda (2.28) expresada en términos de las coordenadas de Jacobi la escribimos,

$$\psi = \left[\frac{b^2}{3\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{b^2 P^2}{6}} \phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}), \quad (2.29)$$

donde \vec{P} es el momento centro de masas del barión y \vec{p}_{ξ_1} y \vec{p}_{ξ_2} los momentos correspondientes a las coordenadas internas. La función de onda espacial interna del barión es,

$$\phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}) = \left[\frac{2b^2}{\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-b^2 p_{\xi_1}^2} \left[\frac{3b^2}{2\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3b^2}{4} p_{\xi_2}^2}, \quad (2.30)$$

que tomaremos para el caso del nucleón N .

En la función de onda total del barión debemos añadir los grados de libertad de espín,

sabor y color, por lo tanto,

$$\Psi_B = \phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}) \chi_B \xi_c[1^3], \quad (2.31)$$

en esta ecuación, como ya hemos mencionado antes, $\phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2})$ denota los grados de libertad espaciales internos del barión, χ_B la función de onda espín-sabor acoplada a los números cuánticos del barión y $\xi_c[1^3]$ es el singlete de color.

2.2.2. Estados de mesones conformados por quarks ligeros

Para el caso de mesones, al tratarse de un problema de dos cuerpos se obtiene una solución exacta. Nos referimos a estudios realizados años atrás, en donde estudiaron los espectros de mesones [16], en el marco del modelo de quarks constituyentes, el cual estamos considerando aquí, utilizaremos las funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger a dos cuerpos expandidas en base de gaussianas.

No es necesario el uso del operador antisimétrico debido al hecho que el quark y anti-quark son distinguibles. Por este hecho, la función de onda total del mesón será añadiendo los grados de libertad de espín, sabor y color,

$$\Psi_M = \psi_M(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \chi_M \xi_c[1^3], \quad (2.32)$$

donde $\psi_M(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ representa los grados de libertad espaciales internos del mesón, χ_M la función de onda espín-sabor acoplada a los números cuánticos del mesón y $\xi_c[1^3]$ es el singlete de color.

A continuación, explicaremos que función de onda espacial emplearemos. Una vez encontrada una base de funciones de onda pertinentes procederemos a calcular los kernels RGM.

GEM en un sistema de dos cuerpos

Para dar una descripción a sistemas físicos complejos con gran precisión se han desarrollado diferentes métodos numéricos, tratando de dar un resultado aproximado desde puntos de vista diferentes. Dichos métodos han mejorado el entendimiento de los procesos físicos poco conocidos de forma experimental debido justamente a la dificultad de reproducirlos.

Uno de estos métodos es el Método de Expansión en Gaussianas [17] (o GEM por

sus siglas en inglés) usado en varios contextos. Fue planteado por M. Kamimura en 1988 tras realizar cálculos no adiabáticos a tres cuerpos, aplicados a la molécula muonica y las colisiones muon-átomo. Dichos sistemas servían de prueba de los modelos atómicos y moleculares que podían calcular una gran cantidad de observables físicos debido a la diferencia de masa del muon frente al electrón. El problema de la formulación en gaussianas es el inmenso número de parámetros. Sin embargo, Kamimura propuso una solución ingeniosa para generar los parámetros de las gaussianas, con la finalidad de que estos sean mínimos.

GEM originalmente fue planteado para resolver problemas de tres cuerpos, por lo tanto, usarlo para resolver un sistema de dos cuerpos es una trivialidad y M. Kamimura [17] lo usó para testear el método.

La forma funcional de la base hace que GEM sea uno de los métodos que describe tanto las correlaciones a corto alcance como el comportamiento asintótico de la función de onda en la región de largo alcance. Adicionalmente, la forma funcional de parte radial de la función de onda hace que el cálculo de los elementos de matriz sea analítico en la mayoría de los casos.

Si consideramos la ecuación de Schrödinger para un sistema a dos cuerpos con un potencial central, la ecuación en el espacio de momentos para la función de onda radial es la siguiente,

$$\frac{p^2}{2\mu}\psi_{lm}(\vec{p}) + \int V(\vec{p}, \vec{p}')\psi_{lm}(\vec{p}')d^3p' = E\psi_{lm}(\vec{p}), \quad (2.33)$$

siendo μ es la masa reducida y $V(\vec{p}, \vec{p}')$ es un potencial central. Expandimos $\psi_{lm}(\vec{p})$ en la base de funciones gaussianas,

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(\vec{p}) &= \sum_{n=1}^{n_{max}} C_{nl}\phi_{nlm}^G(\vec{p}), & \phi_{nl}(p) &= (-i)^l \frac{N_{nl}}{(2\eta)^{l+\frac{3}{2}}} p^l e^{-\frac{p^2}{4\eta}}, \\ \phi_{nlm}^G(\vec{p}) &= \phi_{nl}(p)Y_{lm}(\hat{p}), & N_{nl} &= \left[\frac{2^{2+l}(2\nu_n)^{l+3/2}}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde N_{nl} denota la constante de normalización de las funciones gaussianas $\langle \phi_{nlm}^G | \phi_{nlm}^G \rangle = 1$.

Los parámetros de rango los seleccionamos en una progresión geométrica como en

[17],

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{1}{r_n^2}, & n &= 1, \dots, n_{\text{máx}} \\ r_n &= r_1 a^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

siendo los parámetros libres $\{n_{\text{máx}}, r_1, r_{n_{\text{máx}}}\}$ o $\{n_{\text{máx}}, r_1, a\}$. De esta progresión geométrica derivamos que la base de funciones gaussianas no es ortogonal, y cumpliendo que el solapamiento entre vecinos cercanos, $\langle \phi_{nl}^G | \phi_{n-1l}^G \rangle$, es una constante independiente de n y en particular de la base, por lo que pensamos que el método funciona bien.

Los coeficientes de la expansión $\{c_{nl}\}$, y las autoenergías E , los encontramos a partir del principio variacional de Rayleigh-Ritz dando origen a un problema general de autovalores,

$$\sum_{n'=1}^{n_{\text{máx}}} [(K_{nn'} + V_{nn'}) - EN_{nn'}] c_{n'l} = 0, \quad n = 1, \dots, n_{\text{máx}} \quad (2.36)$$

esta ecuación la generalizamos para llegar a una donde consideramos canales acoplados de la forma,

$$\sum_{n'=1}^{n_{\text{máx}}} \left[(K_{nn'}^\alpha - EN_{nn'}^\alpha) c_{n'l}^\alpha + \sum_{\alpha'}^{\#\text{chnl}} V_{nn'}^{\alpha\alpha'} c_{n'l}^{\alpha'} \right] = 0, \quad \begin{aligned} n &= 1, \dots, n_{\text{máx}} \\ \alpha &= 1, \dots, \#\text{canales} \end{aligned} \quad (2.37)$$

en donde el potencial es el único operador que combina estados.

2.3. Cálculos de los kernels RGM en el sistema KN

Ahora desarrollaremos la manera de calcular los kernels RGM para nuestro sistema de estudio el mesón-barión (MB). Tras haber definido la función de onda total, iniciamos el proceso aplicando el método RGM, lo que nos conduce a una expresión para la función de onda, de carácter relativista según la ecuación (2.27), en la cual hemos añadido los grados de libertad de sabor como,

$$\left(\frac{P'^2}{2\mu} - E \right) \chi_{M'B'}^{JL'S'T'}(P') + \sum_{MBLS} \int P_i^2 dP_i^{RGM} V_D^{M'B'JL'S'T'}(P', P_i) \chi_{MB}^{JLST}(P_i) = 0, \quad (2.38)$$

con,

$$\psi_{MB}^{JLST}(\vec{p}_{\xi_M}, \vec{p}_{\xi_B}, \hat{P}) = [\psi_{MB}^{STC} Y_{LM}(\hat{P})]^{JLST}. \quad (2.39)$$

De forma global, existen dos tipos diferentes de operadores que unen los estados iniciales y finales, los cuales son:

- *Centrales*, tienen la característica de que los grados de libertad para los quarks no acoplan el momento angular y el espín.
- *Tensoriales*, tienen la característica que los grados de libertad para los quarks acoplan el momento angular y el espín.

Para encontrar estos potenciales centrales, debemos comenzar obteniendo la componente orbital de los kernels, así como los valores esperados de los operadores entre los estados iniciales y finales en los espacios correspondientes de espín-sabor y color. Sin embargo, cuando los potenciales son tensoriales, es preferible separar la componente orbital de la de espín mediante la ecuación (2.26), una vez realizada esta separación procedemos a calcular los elementos de matriz reducidos. En cuanto a la parte de espín-sabor lo óptimo es utilizar las propiedades del álgebra de $SU(3)$.

Para dar una descripción de la interacción entre los quarks, debemos considerar un potencial. Este potencial tiene la característica que describe la interacción entre dos quarks, de manera que el momento total de los quark no cambia, además suponemos una dependencia entre los momentos relativos tanto inicial y final de los quarks, y, para el resto tomamos como uno. Esto quiere decir que estamos usando un potencial que es del tipo quark-antiquark,

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{p}'_{ij}, \vec{p}_{ij}) \delta^3(\vec{P}'_{ij} - \vec{P}_{ij}) \prod_{k \neq i, j} \delta^3(\vec{p}'_k - \vec{p}_k), \quad (2.40)$$

donde,

$$\vec{p}_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{p}_i - \vec{p}_j), \quad \vec{P}_{ij} = \vec{p}_i + \vec{p}_j. \quad (2.41)$$

No es conveniente realizar las integrales directamente, primero realizamos un cambio de variables. Dicho cambio pasa de las coordenadas originales que son \vec{p}_i a las coordenadas de Jacobi \vec{p}_ξ dentro del potencial (2.40). Las mencionadas coordenadas originales y de Jacobi las presentamos en el anexo (5), donde detallamos como son para nuestro sistema. Además, para simplificar la expresión debemos realizar un tratamiento adecuado en las distribuciones $\delta^{(3)}$.

Posteriormente, mostramos los kernels de las interacciones locales para los quarks, lo que significa, tienen una dependencia en el momento transferido y sin explicar el tratamiento de los operadores de espín-sabor-color de los quarks. Esto último, lo detallamos en el anexo (6).

2.3.1. Interacción directa para el sistema KN

Nuestro objetivo es estudiar el sistema formado por un barión N (nnn) y un mesón K ($Q\bar{n}$) los cuales están en un onda definida S , además estos están conformados por quarks ligeros. Estamos estudiando un problema de cinco partículas las cuales son, cuatro quarks y un antiquark. Esto quiere decir que para calcular el kernel del sistema debemos estudiar 6 diagramas directos que en principio van a ser diferentes. Pero como tenemos un sistema particular que es el KN , basta con estudiar el sistema $Q\bar{n} - nnn$. Analizando este sistema, observamos que van a existir dos diagramas distintos con un valor 3 de multiplicidad para cada uno, como lo mostramos en la figura (2.1).

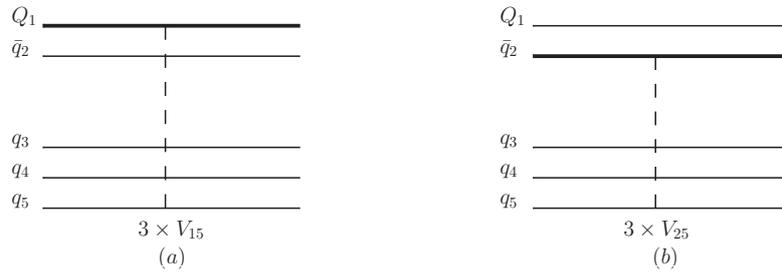


Figura 2.1: Diagramas directos de la interacción quark-quark, para el proceso $Q\bar{n} - nnn \rightarrow Q\bar{n} - nnn$, con $Q = \{s\}$, $n = \{u, d\}$. La notación V_{ij} indica la interacción entre un par de quarks i y j .

Aquí solo tenemos términos de interacción directa quark-antiquark. Utilizamos las funciones de onda del mesón y barión mencionadas en la sección anterior. Con lo cual la interacción $Q\bar{n}$ -nucleón podemos estudiarla sencillamente con el diagrama directo V_{25} que tiene multiplicidad 3, debido a que el nucleón tienen una función de onda totalmente antisimétrica. El diagrama directo V_{15} que corresponde a la interacción Qn da una contribución de cero, por el hecho que en este caso la simetría quiral esta explícitamente rota, y, como cada quark se encuentra en un singlete de color diferente, no tenemos un intercambio de gluones.

Para simplificar nuestro estudio, estamos considerando al mesón como al barión en onda S de tal manera que las integrales resultan simples. Con dicha consideración, obte-

nemos el potencial directo del sistema KN :

$$\begin{aligned}
{}^{RGM}V_{D25} = & 3\pi^{\frac{3}{2}} \sum_{\eta_A, \eta'_A, \eta_\rho, \eta_\lambda}^{\eta_{max}} \frac{N'_{\eta_A} N_{\eta_A} N'_{\eta_{B\rho}} N_{\eta_{B\rho}} N'_{\eta_{B\lambda}} N_{\eta_{B\lambda}}}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)^{3/2} 4(\eta_{B\rho}^* + \eta_{B\rho})^{3/2} 4(\eta_{B\lambda}^* + \eta_{B\lambda})^{3/2}} \times \\
& \times e^{-\frac{1}{4}(\vec{P}' - \vec{P})^2 \left[\frac{(m_2 - M_A)^2}{M_A^2(\eta_A + \eta_{A'}^*)} + \frac{(m_5 - M_B)^2}{M_B^2(\eta_{B\lambda} + \eta_{B\lambda}^*)} \right]} C_{\eta_A} C_{\eta_\rho, \eta_\lambda} V(\vec{P}' - \vec{P}), \tag{2.42}
\end{aligned}$$

siendo el valor de 3 que proviene de la multiplicidad de los diagramas directos, m_i denota la masa del quark i correspondiente, $M_A = m_1 + m_2$, $M_B = m_3 + m_4 + m_5$ y donde el sumatorio en los $\eta_A, \eta'_A, \eta_\rho, \eta_\lambda$ barre toda la base de las gaussianas tanto para la función de onda interna del mesón K como para la del barión N , teniendo en cuenta que el barión tiene dos componentes en las coordenadas de Jacobi.

Podemos distinguir el factor de forma para el mesón y para el barión (en sus dos componentes ρ y λ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{F}_A &= \sqrt{\pi} \sum_{\eta_A, \eta'_A}^{\eta_{max}} C_{\eta_A} C_{\eta_{A'}} \frac{N'_{\eta_A} N_{\eta_A}}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}(\vec{P}' - \vec{P})^2 \left[\frac{(1 - \frac{m_2}{M_A})^2}{\eta_A + \eta_{A'}^*} \right]}, \\
\mathcal{F}\mathcal{F}_{B\rho} &= \sqrt{\pi} \sum_{\eta_{B\rho}, \eta'_{B\rho}}^{\eta_{max}} C_{\eta_{B\rho}} C_{\eta'_{B\rho}} \frac{N'_{\eta_{B\rho}} N_{\eta_{B\rho}}}{4(\eta_{B\rho}^* + \eta_{B\rho})^{3/2}}, \\
\mathcal{F}\mathcal{F}_{B\lambda} &= \sqrt{\pi} \sum_{\eta_{B\lambda}, \eta'_{B\lambda}}^{\eta_{max}} C_{\eta_{B\lambda}} C_{\eta'_{B\lambda}} \frac{N'_{\eta_{B\lambda}} N_{\eta_{B\lambda}}}{4(\eta_{B\lambda}^* + \eta_{B\lambda})^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}(\vec{P}' - \vec{P})^2 \left[\frac{(1 - \frac{m_5}{M_B})^2}{\eta_{B\lambda} + \eta_{B\lambda}^*} \right]}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Como hemos mencionado, cuando tenemos definido en una base el momento angular J y deseamos expresar su kernel, empleamos la ecuación (2.26), partiendo del hecho que el potencial es del tipo $V = \mathcal{T}_q^{(k)} \cdot \mathcal{T}_s^{(k)}$, de tal manera que si $k = 0$ el potencial será central y si $k = 2$ será tensorial, en general escribimos esto como,

$$\begin{aligned}
\langle \nu' L' S' J' M' | V_{ij} | \nu L S J M \rangle &= (-1)^{J'+S'+L} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times \\
&\times \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ S' & L' & k \end{matrix} \right\} \langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | | \mathcal{T}_q^{(k)} | | (\phi_M \phi_B)^L \rangle \langle (\chi_M \chi_B)^{S'} | | \mathcal{T}_s^{(k)} | | (\chi_M \chi_B)^S \rangle, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

hemos acoplado J total con un L orbital relativo, y con $\chi_M \chi_B$ denotando la función de espín del sistema mesón-barión.

La parte de espín la podemos estudiar por medio del teorema de Wigner-Eckart como,

$$\langle S' || [\sigma_i \otimes \sigma_k]^k || S \rangle = \frac{\langle S' | [\sigma_i \otimes \sigma_k]_m^k | S \rangle \sqrt{2S+1}}{\langle (SS_3)(km) | S' S'_3 \rangle}. \quad (2.45)$$

Para la parte orbital hemos calculado la parte escalar:

$$\langle \phi'_M \phi'_B | \mathcal{T}_q | \phi_M \phi_B \rangle = \mathcal{F}\mathcal{F}_A \cdot \mathcal{F}\mathcal{F}_{B_{\rho,\lambda}} \cdot V_{ij}(\vec{q}), \quad (2.46)$$

entonces, para calcular $\langle \phi'_M \phi'_B | V_{Tij}^C(q) [q \otimes q]^2 | \phi_M \phi_B \rangle$ necesitamos la descomposición de un tensor irreducible de orden k en armónicos esféricos:

$$[\vec{q} \otimes \vec{q}]_{m_k}^k = \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!!}} |q|^k Y_{km_k}(\vec{q}), \quad (2.47)$$

donde hemos tomado $\vec{q} = \vec{P}' - \vec{P}$. Por lo tanto, tenemos un armónico esférico $Y_{kM}(\vec{P}' - \vec{P})$ que debemos descomponer. Para esto, hacemos uso de la expansión de un armónico esférico [18], con: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L}$,

$$\begin{aligned} r^L Y_{LM}(\hat{r}) &= \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_1=-m_1}^{l_1} (-1)^{L-l_1} \left[\frac{4\pi(2L+1)!}{(2l_1+1)![2(L-l_1)+1]!} \right]^{\frac{1}{2}} r_1^{l_1} r_2^{L-l_1} \times \\ &\times C_{l_1 m_1, (L-l_1)(M-m_1)}^{LM} Y_{l_1 m_1}(\hat{r}_1) Y_{l_2, (M-m_1)}(\hat{r}_2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por otro lado, tenemos una dependencia en el ángulo en el potencial tensorial entre \vec{P} y \vec{P}' ($z = \cos(P' - P)$). Para poder tratarlo correctamente tenemos que descomponer, primero, el potencial en ondas parciales:

$$V(\vec{q}) = 2\pi \int dz \sum_{l_F m_F} V(\vec{q}) Y_{l_F m_F}^*(P) Y_{l_F m_F}(P') \mathcal{P}_{l_F}(z), \quad (2.49)$$

con \mathcal{P}_{l_F} los polinomios de Legendre. Y posteriormente realizamos las integrales en armónicos esféricos.

2.3.2. Ondas parciales

Al realizar la descomposición en ondas parciales, llegamos a:

$$\begin{aligned} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^k \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle &= 2\pi \int dz \sum_{L_F m_F} V(q) [q \otimes q]_{m_k}^k \times \\ &\times Y_{L_F m_F}^*(P) Y_{L_F m_F}(P') Y_{L M_L}^*(\hat{P}) Y_{L' M'_L}(\hat{P}') P_{l_F}(z), \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde los dos últimos armónicos esféricos en L y L' vienen de que los estados inicial y final, tienen un momento orbital definido.

Descomponiendo ahora el término tensorial con la expresión (2.47),

$$\begin{aligned} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^k \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle &= 2\pi \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!!}} \int dz \sum_{L_F m_F} V(q) [q \otimes q]_{m_k}^k \times \\ &\times Y_{l_F m_F}^*(P) Y_{l_F m_F}(P') Y_{l_F m_F}^*(P) Y_{l_F m_F}(P') Y_{L M_L}^*(\hat{P}) Y_{L' M'_L}(\hat{P}') P_{l_F}(z), \end{aligned} \quad (2.51)$$

y usando la ecuación (2.48), resultar ser:

$$\begin{aligned} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^k \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle &= 2\pi \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!!}} \sum_{l_F m_F} \sum_{l_1=0}^k \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} (-1)^{(k-l_1)} \times \\ &\times \left[\frac{4\pi(2k+1)!}{(2l_1+1)! [2(k-l_1)+1]!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{l_1 m_1, (k-l_1)(m_k-m_1)}^{k m_k} \int dz V(q) P_{l_F}(z) P^{l_1} \times \\ &\times P'^{k-l_1} Y_{l_1 m_1}(\hat{P}) Y_{(k-l_1)(m_k-m_1)}(\hat{P}') Y_{l_F m_F}^*(\hat{P}) Y_{l_F m_F}(\hat{P}') Y_{L M_L}^*(\hat{P}) Y_{L' M'_L}(\hat{P}'). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ahora podemos agrupar en los ángulos \hat{P} y \hat{P}' , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^k \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle &= 2\pi \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!!}} \sum_{l_F m_F} \sum_{l_1=0}^k \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} (-1)^{(k-l_1)} \times \\ &\times \left[\frac{4\pi(2k+1)!}{(2l_1+1)! [2(k-l_1)+1]!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{l_1 m_1, (k-l_1)(m_k-m_1)}^{k m_k} \times \\ &\times \int dz V(q) P_{l_F}(z) P^{l_1} P'^{k-l_1} \times \\ &\times \int d\hat{P} Y_{l_1 m_1}(\hat{P}) Y_{l_F m_F}^*(\hat{P}) Y_{L M_L}^*(\hat{P}) \times \\ &\times \int d\hat{P}' Y_{(k-l_1)(m_k-m_1)}(\hat{P}') Y_{l_F m_F}(\hat{P}') Y_{L' M'_L}(\hat{P}'). \end{aligned} \quad (2.53)$$

La integral de tres armónicos esféricos viene dada por la expresión,

$$\int d\Omega Y_{l_1 m_1}(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) Y_{l_3 m_3}(\Omega) = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}_3 \sqrt{4\pi}} C_{l_1 0, l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1, l_2 m_2}^{l_3 m_3}, \quad (2.54)$$

con $\hat{l}_1 = \sqrt{2l_1 + 1}$. Esta integral la conseguimos combinando dos de los armónicos esféricos en uno [19], con series de Clebsch-Gordan, y luego integrando. También nos será útil la expresión $Y_{l, m}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l, -m}(\Omega)$. De manera que, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | \mathcal{T}_{m_k}^k | (\phi_M \phi_B)^L \rangle &= 2\pi \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!!}} \sum_{l_F m_F}^k \sum_{l_1=0}^{l_1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} (-1)^{(k-l_1)} \times \\ &\times \frac{\hat{l}_1 (k - l_1 \hat{L}')}{4\pi \hat{L}} \left[\frac{4\pi (2k+1)!}{(2l_1+1)! [2(k-l_1)+1]!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times C_{l_1 m_1, (k-l_1)(m_k-m_1)}^{k m_k} C_{l_1 0, l_F 0}^{L 0} C_{l_1 m_1, l_F m_F}^{L M_L} \times \\ &\times C_{(k-l_1) 0, L' 0}^{l_F 0} C_{(k-l_1)(m_k-m_1), L' M_L'}^{l_F m_F} P^{l_1} P^{l' k-l_1} \int dz V(q) P_{l_F}(z). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Finalmente, para obtener el término irreducible tenemos que dividir por,

$$\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | | \mathcal{T}^k | | (\phi_M \phi_B)^L \rangle = \frac{\hat{L}}{C_{LM_L, km_k}^{L' M_L'}} \langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | \mathcal{T}_{m_k}^k | (\phi_M \phi_B)^L \rangle. \quad (2.56)$$

Calculado el término irreducible, usamos la ecuación (2.44), a continuación, mostramos las expresiones para la parte central ($k=0$) y tensorial ($k=2$).

Término central ($k=0$)

Para el término central tenemos:

$$\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | \mathcal{T}_0^0 | (\phi_M \phi_B)^L \rangle = 2\pi \delta_{LL'} \times \int dz V(q) P_L(z). \quad (2.57)$$

El término irreducible tenemos que dividir por,

$$\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | | \mathcal{T}^0 | | (\phi_M \phi_B)^L \rangle = \hat{L} \langle (\phi_M \phi_B)^{L'} | \mathcal{T}_0^0 | (\phi_M \phi_B)^L \rangle, \quad (2.58)$$

llegamos a la expresión para el término central,

$$\begin{aligned} \langle \nu' L' S' J' M' | V_{ij} | \nu L S J M \rangle &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \hat{S}^{-1} \times \\ &\times \left\langle (\chi_M \chi_B)^{S'} \left| \mathcal{T}_s \right| (\chi_M \chi_B)^S \right\rangle 2\pi \int dz V(q) \mathcal{P}_L(z). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Término tensorial (k=2)

Para el caso tensorial, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^2 \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle &= 2\pi \sum_{l_F, l_1, l_2, m_1, m_2, m_F} \sqrt{\frac{2!}{5!!} \frac{5!}{(2l_1 + 1)!(2l_2 + 1)!}} \times \\ &\times (-1)^{l_2 + m_F + m_2 + M'_L} \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}_F^2}{\hat{L} \hat{L}'} C_{l_1 m_1, l_2 m_2}^{2m_k} C_{l_1 0, l_F 0}^{L 0} C_{l_1 m_1, l_F m_F}^{L M_L} C_{l_2 0, l_F 0}^{L' 0} C_{l_2 - m_2, l_F - m_F}^{L' - M'_L} \times \\ &\times P^{l_1} P^{l_2} \int dz V(q) \mathcal{P}_{l_F}(z). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Finalmente, para obtener el término irreducible tenemos que dividir por

$$\left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}^2 \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle = \frac{\hat{L}}{C_{LM_L, 2m_k}^{L' M'_L}} \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}_{m_k}^2 \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle. \quad (2.61)$$

Expresamos,

$$\begin{aligned} \langle \nu' L' S' J' M' | V_{ij} | \nu L S J M \rangle &= (-1)^{J' + S' + L} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ S' & L' & 2 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times \left\langle (\phi_M \phi_B)^{L'} \left| \mathcal{T}^2 \right| (\phi_M \phi_B)^L \right\rangle \left\langle (\chi_M \chi_B)^{S'} \left| \mathcal{T}_s \right| (\chi_M \chi_B)^S \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.4. Teoría de Dispersión: Lippmann-Schwinger

Dentro de la teoría de dispersión (*scattering*) necesitamos conocer dos conceptos básicos que vienen ha ser la matriz S y la matriz T .

Para plantear cualquier problema de dispersión necesitamos inicialmente un estado libre, denotado como $|\lambda_{entrada}\rangle$ el cual es asintótico y comienza en un tiempo $t = -\infty$, posteriormente ingresa en cierta región del espacio (a $t = 0$ por convección) y en dicha zona interacciona transformándose en un estado $|\lambda\rangle$, finalmente en un tiempo $t = \infty$ el estado $|\lambda_{salida}\rangle$ escapa asintóticamente. Lo que quiere decir que para un observador pueda describir la órbita de la dispersión debe conocer las dos asíntotas la de entrada y la

de salida.

En la Teoría de Dispersión, es posible establecer una relación entre esos estados mediante los *operadores de Møller*, los cuales se comprenden como operadores isométricos, según se explica en [20]: “Actuando sobre cualquier vector del espacio de Hilbert \mathcal{H} , proporcional al estado a $t = 0$ del que proviene o hacia el que evolucionaría dicho estado asintótico representado por ese vector”. De tal manera que tenemos,

$$|\lambda\rangle = \Omega_+ |\lambda_{entrada}\rangle = \Omega_- |\lambda_{salida}\rangle. \quad (2.63)$$

Por este hecho, los operadores isométricos implican que para cada estado normalizado $|\lambda_{entrada}\rangle$ o $|\lambda_{salida}\rangle$ en el espacio de Hilbert, existe un único estado normalizado $|\lambda\rangle$ en el correspondiente subespacio de estados de *scattering* \mathcal{R} , y al contrario.

Aunque el proceso de dispersión se lo representa mediante dos asíntotas, no sucede de esa forma. Usualmente se expresa la asíntota de la salida en función de la de entrada, sin dar alguna referencia a la órbita que en realidad describe. Debido a la propiedad de isometría de Ω_{\pm} , la expresión $|\lambda\rangle = \Omega_- |\lambda_{out}\rangle$ se puede invertir. De hecho, como $\Omega_-^\dagger \Omega_- = 1$, se puede multiplicar la expresión anterior por Ω_-^\dagger para obtener,

$$|\lambda_{salida}\rangle = \Omega_-^\dagger |\lambda\rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\lambda_{entrada}\rangle, \quad (2.64)$$

en donde se define el operador de dispersión como,

$$\mathbf{S} = \Omega_-^\dagger \Omega_+, \quad (2.65)$$

llegando a,

$$|\lambda_{salida}\rangle = \mathbf{S} |\lambda_{entrada}\rangle, \quad (2.66)$$

el cual, es el resultado esperado.

El operador \mathbf{S} viene a contener toda la información de un proceso de dispersión. Entonces si logramos calcular dicho operador el problema estará finalizado.

Un beneficio de tener el operador \mathbf{S} es que podemos calcular las amplitudes de probabilidad en un proceso de colisión, las cuales son de gran importancia para los experimentales. Esta cantidad nos conducirá a encontrar la probabilidad de que una partícula que entra en colisión con una asíntota $|\lambda_1\rangle$ sea observada en el estado asintótico $|\lambda_2\rangle$. Dicha probabilidad será:

$$\mathcal{P}_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} = |\langle \lambda_2 | \mathbf{S} | \lambda_1 \rangle|^2. \quad (2.67)$$

Por lo tanto, la amplitud de probabilidad para el proceso $|\lambda_1\rangle \rightarrow |\lambda_2\rangle$ es el elemento de la matriz- S $\langle \lambda_2 | S | \lambda_1 \rangle$. Por supuesto, todavía no tenemos una cantidad directamente mensurable, por fortuna, podemos relacionar la matriz- S con la sección eficaz del proceso.

A la matriz S la podemos dividir en dos partes de la siguiente forma,

$$S = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta(E_{p'} - E_p) T(\vec{p}', \vec{p}), \quad (2.68)$$

la primera parte está relacionada con las amplitudes de probabilidad correspondiente a partículas que no fueron dispersadas, la segunda parte nos da la amplitud de probabilidad de las partículas que si cambiaron su órbita. Como estamos considerando colisiones elásticas, la energía del sistema no se ve afectada, por lo cual introducimos una distribución delta para la conservación de esta. Mientras que a la expresión $T(\vec{p}', \vec{p})$ es una función analítica, muy conocida en los problemas de dispersión como la matriz- T .

Como tenemos una delta de conservación en la energía, la matriz- T está definida en particular cuando los momentos son iguales $\vec{p}' = \vec{p}$. Es por esta razón que la denotamos como matriz- T *on-shell*. Además, para realizar cálculos podemos definir otra matriz- T para los momentos que no cumplen la relación de los momentos antes mencionada.

Queremos dar una solución al problema de dispersión, entonces empleamos la ecuación de Lippmann Schwinger [21]. En la sección donde formulamos RGM hemos obtenido una ecuación de Schödinger proyecta (2.23) la cual expresa el movimiento relativo de partículas ligadas. Si optamos por usar la ecuación de Schödinger para explicar los estados de dispersión resulta imposible, y, por este motivo derivamos de esta la ecuación de Lippman-Schwinger. En nuestro estudio como tenemos diferentes canales acoplados, la ecuación resulta ser un conjunto de ecuaciones integrales acopladas, su expresión resulta en,

$$T_{\alpha}^{\alpha'}(z; p' p) = V_{\alpha}^{\alpha'}(p', p) + \sum_{\alpha''} \int dp'' p''^2 V_{\alpha''}^{\alpha'}(p', p'') \frac{1}{z - E_{\alpha''}(p'')} T_{\alpha}^{\alpha''}(z; p'', p), \quad (2.69)$$

donde α es el conjunto de números cuánticos $MBJLST$ que dan lugar a cierta onda parcial, denotamos $V_{\alpha}^{\alpha'}(p', p)$ al potencial del sistema KN proyectado. Como estamos en el régimen no relativista definimos la energía $E_{\alpha''}(p'')$ para el momento p'' , teniendo la siguiente ecuación,

$$E_{\alpha}(p) = \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} + \Delta M_{\alpha}, \quad (2.70)$$

donde la masa reducida del sistema mesón-barión es μ_{α} para su respectivo canal α y el

límite de la diferencia del sistema es ΔM_α , el cual es el threshold de más baja energía que nosotros elijamos. Para dar un valor al threshold tomamos los valores de las masas físicas y llegamos a que el umbral ΔM_α no es más que la diferencia entre la masa del sistema de referencia KN y la masa del sistema KN en el canal α . Por otra parte, definimos los momentos tal que cumplen la siguiente relación,

$$k_\alpha^2 = 2\mu_\alpha(E - \Delta M_\alpha), \quad (2.71)$$

de esta forma para canales por encima del umbral $k_\alpha^2 > 0$, por lo que k_α es real, en este caso se los conoce como momentos ‘*on-shell*’.

Para estos estados de dispersión damos una solución a la ecuación de Lippmann-Schwinger para $z = E + i\epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0^+$ y donde E es la energía del proceso por encima del umbral KN , debemos tomar $\epsilon > 0$ para evitar el polo por la parte superior y así propagar hacia adelante.

Una vez realizado el cálculo de la matriz T , tomamos como momentos inicial y final en cada canal los correspondientes momentos *on-shell*, llegamos a lo que denominamos la parte *on-shell* y la relacionamos con la matriz S . Como estamos en el régimen no relativista la cinemática viene dada por,

$$S_\alpha^{\alpha'} = 1 - 2\pi i \sqrt{\mu_{\alpha'} \mu_\alpha k_{\alpha'} k_\alpha} T_\beta^{\beta'}(E + i0; k_{\alpha'}, k_\alpha), \quad (2.72)$$

donde k_α definido por (2.71).

2.4.1. Solución numérica de Lippmann-Schwinger

Para ofrecer una solución, es fundamental contar con potenciales que se puedan separar, ya que esto simplifica la ecuación a una forma algebraica; de lo contrario, resolver la ecuación de Lippmann-Schwinger resulta casi imposible. En situaciones donde los potenciales son más complejos, se recurre a técnicas perturbativas, como el uso de series de Born, o se recurre a soluciones numéricas. En nuestro caso, optamos por la última opción, dado que nuestro potencial se aplica a un sistema realista.

Haftel y Tabakin, en [22], desarrollaron una técnica numérica que se basa en una matriz invertida. Este método implica una resolución numérica al discretizar todas las

integrales involucradas, utilizando la siguiente ecuación,

$$\int f(x)dx = \sum_{j=1}^N f(x_j)g_j, \quad (2.73)$$

donde la integral de la función se discretiza en N puntos denominados x_j , cada uno con su respectivo peso g_j . A partir de la relación (2.73), logran plantear una ecuación integral que resulta ser sencilla, creando así un conjunto de N ecuaciones algebraicas donde la variable desconocida es la función en los N puntos.

Luego, aplicamos este modelo a la ecuación (2.69), siguiendo un caso análogo al presentado en [23] y extendiéndolo para incorporar canales con umbrales diferentes. Para la técnica de integración, empleamos Gauss-Legendre de [24]. Este método se utiliza para integrar funciones en el intervalo $(-1, 1)$; sin embargo, es necesario expandir este rango para considerar un intervalo $(0, \infty)$. Para ello, utilizamos una función tangente [23] para proyectar el intervalo,

$$p_i = c \tan x_i, \quad x_i \in (-1, 1) \Rightarrow p_i \in (0, \infty), \quad (2.74)$$

con c como una constante que regula el rango de integración, tomándola en $c \sim 2000$ MeV.

Mediante el cálculo de la contribución del polo para todos los canales que se encuentran por encima del umbral, describimos como $\alpha \in \mathcal{C}$ al canal genérico incluido en el cálculo. Además, $\alpha_o \in \mathcal{C}_o$ denota los canales α que están por encima del límite de la energía del proceso, y $\alpha_c \in \mathcal{C}_c$ a los que están por debajo. Con esto, los posibles canales iniciales y finales en un proceso real serán los \mathcal{C}_o , por lo tanto, tenemos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x - x_o \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{f(x)}{x - x_o} \mp i\pi f(x) \delta(x - x_o), \quad (2.75)$$

la expresión (2.69) resulta,

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\alpha'}(E; p', p) &= V_{\alpha}^{\alpha'}(p', p) + \sum_{\alpha''} \mathcal{P} \int dp'' p''^2 V_{\alpha''}^{\alpha'}(p', p'') \frac{2\mu_{\alpha''}}{k_{\alpha''}^2 - p''^2} \times \\ &\times T_{\alpha}^{\alpha''}(E; p'', p) - i\pi \sum_{\alpha_o} \mu_{\alpha_o} k_{\alpha_o} V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, p), \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde hemos escrito los propagadores en función de los momentos definidos por (2.71).

Para proceder con el cálculo numérico ajustamos la integración teniendo en cuenta que,

$$\mathcal{P} \int \frac{dq}{k^2 - q^2} = 0, \quad \forall k^2 > 0, \quad (2.77)$$

resultando ser,

$$\sum_{\alpha_o} \mathcal{P} \int dp'' k_{\alpha_o}^2 V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) \frac{2\mu_{\alpha_o}}{k_{\alpha_o}^2 - p''^2} T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, p) = 0. \quad (2.78)$$

Tomando en consideración la ecuación (2.78) en (2.76) tenemos,

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\alpha'}(E; p', p) &= V_{\alpha}^{\alpha'}(p', p) + \sum_{\alpha_c} \mathcal{P} \int dp'' p''^2 V_{\alpha_c}^{\alpha'}(p', p'') \frac{2\mu_{\alpha_c}}{k_{\alpha_c}^2 - p''^2} \times \\ &\times T_{\alpha}^{\alpha_c}(E; p'', p) + \sum_{\alpha_o} \mathcal{P} \int dp'' \frac{2\mu_{\alpha_o}}{k_{\alpha_o}^2 - p''^2} [p''^2 V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', p'') T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; p'', p) - \\ &- k_{\alpha_o}^2 V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, p)] - i\pi \sum_{\alpha_o} \mu_{\alpha_o} k_{\alpha_o} V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, p), \end{aligned} \quad (2.79)$$

con esto logramos que el cálculo numérico de las integrales no presenten divergencias, debido a que el canal α_c en el propagador no posee ningún polo y para el canal α_o tanto el numerador como denominador se anulan en el mismo punto k_{α_o} , dando como resultado un cero de primer orden.

Necesitamos ahora encontrar la matriz de dispersión, para esto debemos hallar primero la matriz T ‘*on-shell*’. Para esto planteamos las ecuaciones anteriores de tal manera que cumpla $p = k_{\alpha}$, con p siendo el momento inicial. Si discretizamos las integrales según la expresión (2.73), la ecuación (2.79) resulta en,

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\alpha'}(E; p', k_{\alpha}) &= V_{\alpha}^{\alpha'}(p', k_{\alpha}) + \sum_{\alpha_c} \sum_i g_i p_i^2 V_{\alpha_c}^{\alpha'}(p', p_i) \frac{2\mu_{\alpha_c}}{k_{\alpha_c}^2 - p_i^2} T_{\alpha}^{\alpha_c}(E; p_i, k_{\alpha}) + \\ &+ \sum_{\alpha_o} \sum_i g_i \frac{2\mu_{\alpha_o}}{k_{\alpha_o}^2 - p_i^2} [p_i^2 V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', p_i) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; p_i, k_{\alpha}) - \\ &- k_{\alpha_o}^2 V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, k_{\alpha})] - i\pi \sum_{\alpha_o} \mu_{\alpha_o} k_{\alpha_o} V_{\alpha_o}^{\alpha'}(p', k_{\alpha_o}) T_{\alpha}^{\alpha_o}(E; k_{\alpha_o}, k_{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde i denota al índice que barre todos los puntos de integración y g_i denota sus respectivos pesos. Planteamos las ecuaciones tomando como momento final los momentos utilizados para la integración $p' = p_i$ y el momento ‘*on-shell*’ del canal final $p' = k_{\alpha'}$. Para el caso en que tenemos canales por debajo del umbral \mathcal{C}_c , estos canales no están permitidos como estados iniciales o finales en el proceso de dispersión, de manera que debemos

eliminar del cálculo las ecuaciones en las que aparezcan $T_{\alpha_c}^{\alpha'}(E; p', k_{\alpha_c})$ o $T_{\alpha_c}^{\alpha_c}(E; k_{\alpha_c}, p)$. Por otro lado, como los propagadores en los canales \mathcal{C}_c no contienen ningún polo en las integrales no aparecen contribuciones de la parte ‘*on-shell*’ de la matriz T . Omitir estas ecuaciones equivale a emplearlas todas definiendo el potencial como cero para los momentos imaginarios k_{α_c} ,

$$V_{\alpha_c}^{\alpha'}(E; p', k_{\alpha_c}) = 0, \quad V_{\alpha_c}^{\alpha_c}(E; k_{\alpha_c}, p) = 0, \quad (2.81)$$

de donde obtenemos el mismo número de ecuaciones por encima y por debajo del umbral.

Bajo este contexto, al considerar N_{Ch} canales distintos y N puntos de integración, establecemos un conjunto de $N_{Ch} \times N_{Ch} \times (N + 1)$ ecuaciones. Cada una de estas ecuaciones está compuesta por el mismo número de incógnitas. Expresamos estas ecuaciones de la siguiente manera,

$$T_{\alpha}^{\alpha'}(E; p_i, k_{\alpha}), \quad T_{\alpha}^{\alpha'}(E; k_{\alpha'}, k_{\alpha}). \quad (2.82)$$

El conjunto de ecuaciones las expresamos de forma matricial como,

$$L \cdot T = V \Rightarrow T = L^{-1} \cdot V, \quad (2.83)$$

donde T y V son matrices con dimensión $(N_{Ch}(N + 1) \times N_{Ch})$ escritas como,

$$\begin{aligned} T_{(\alpha'-1)(N+1)+i,\alpha} &= T_{\alpha}^{\alpha'}(E; p_i, k_{\alpha}), \\ T_{\alpha'(N+1),\alpha} &= T_{\alpha}^{\alpha'}(E; k_{\alpha'}, k_{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} V_{(\alpha'-1)(N+1)+i,\alpha} &= V_{\alpha}^{\alpha'}(p_i, k_{\alpha}), \\ V_{\alpha'(N+1),\alpha} &= V_{\alpha}^{\alpha'}(k_{\alpha'}, k_{\alpha}), \end{aligned} \quad (2.85)$$

y L es una matriz cuadrada de dimensión $(N_{Ch}(N + 1)) \times (N_{Ch}(N + 1))$ descrita por,

$$\begin{aligned} L_{(\alpha'-1)(N+1)+i,(\alpha-1)(N+1)+j} &= \delta_{ij}\delta_{\alpha'\alpha} - V_{\alpha}^{\alpha'}(p_i, p_j) \frac{2\mu_{\alpha}}{k_{\alpha}^2 - p_j^2} p_j^2 g_j, \\ L_{(\alpha'-1)(N+1)+i,\alpha(N+1)} &= V_{\alpha}^{\alpha'}(p_i, k_{\alpha}) \left[\left(\sum_{l=1}^N \frac{2\mu_{\alpha} k_{\alpha}^2 g_l}{k_{\alpha}^2 - p_l^2} \right) + i\pi\mu_{\alpha} k_{\alpha} \right], \\ L_{\alpha'(N+1),(\alpha-1)(N+1)+j} &= -V_{\alpha}^{\alpha'}(k_{\alpha'}, p_j) \frac{2\mu_{\alpha}}{k_{\alpha}^2 - p_j^2} p_j^2 g_j, \\ L_{\alpha'(N+1),\alpha(N+1)} &= 1 + V_{\alpha}^{\alpha'}(k_{\alpha'}, k_{\alpha}) \left[\left(\sum_{l=1}^N \frac{2\mu_{\alpha} k_{\alpha}^2 g_l}{k_{\alpha}^2 - p_l^2} \right) + i\pi\mu_{\alpha} k_{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde $\alpha, \alpha' \in \{1, \dots, N_{Ch}\}$ barre todos los canales e $i \in \{1, \dots, N\}$ todos los puntos de integración, y donde consideramos la condición dada por (2.81) para canales por debajo del umbral.

Una vez hecho el cálculo como hemos presentado la matriz T es compleja y de ella obtuvimos la matriz de *scattering* que cumple la condición de unitariedad,

$$S \cdot S^+ = S^+ \cdot S = Id. \quad (2.87)$$

Podemos simplificar el problema introduciendo una matriz R . Está matriz la relacionamos con la matriz S mediante,

$$S = (1 + iR)(1 - iR)^{-1}, \quad (2.88)$$

de tal manera que si R es real aseguramos la unitariedad en el cálculo. También podemos plantear para ella una ecuación de Lippmann-Schwinger análoga a la expuesta, pero con la particularidad que en las integrales se toma solamente el valor principal, de manera que la contribución dada por el polo está dentro de la matriz R . Esto facilita el cálculo, sin embargo, en el formalismo con la matriz T la condición de unitariedad implica un test numérico del cálculo, el cual no es posible realizar para R .

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

En el segundo capítulo, examinamos la ecuación de Lippmann-Schwinger, una herramienta ampliamente utilizada para analizar estados de dispersión (*scattering*), y calculamos la matriz de dispersión T a partir de dicha ecuación. Además, destacamos la similitud de esta ecuación con la ecuación de Schrödinger.

Para proceder a calcular la sección eficaz del proceso $KN \rightarrow KN$, empleamos los términos de la matriz de dispersión S para cada una de las ondas parciales. Hemos analizado para un canal, $KN \rightarrow KN$, presentamos las expresiones para las secciones eficaces tanto elástica como de intercambio de carga, las cuales son:

$$\begin{aligned}\sigma_e^{I,KN} &= \frac{\pi}{2p_{KN}^2} \sum_J (2J+1) |1 - S_J^{JI}|_{KN}^2, \\ \sigma_{ce}^{I,KN} &= \frac{\pi}{2p_{KN}^2} \sum_J (2J+1) |S_J^{JI}|_{KN}^2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde I denota el isospín para el correspondiente canal, el término S_J^{JI} es el elemento de matriz del estado singlete. La sección eficaz elástica $K^-p \rightarrow K^-p$ y de intercambio de carga $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ las obtenemos haciendo combinaciones lineales adecuadas de la

matriz S de dispersión en (3.1), con:

$$\begin{aligned} S_{e,J}^{JI} &= \frac{1}{2}(S_J^{J1} + S_J^{J0}), \\ S_{ce,J}^{JI} &= \frac{1}{2}(S_J^{J1} - S_J^{J0}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Al momento de formular el potencial del sistema KN , como mencionamos en el capítulo 2, los diagramas directos que intervienen son los V_{25} con multiplicidad 3, donde tenemos el intercambio de un π y un σ . Con esto calculamos el potencial del sistema KN , y encontramos las secciones eficaces.

Los primeros resultados no fueron los deseados debido que al compararlos con datos experimentales, las secciones eficaces descritas por el modelo iniciaban en un orden de 500 mb, por lo tanto, para poder disminuir la interacción tomamos en cuenta diagramas de aniquilación a través de un π y un gluón, los presentamos en el anexo (6).

Una vez incluidos los diagramas de aniquilación, obtuvimos una mejora para describir la fenomenología del proceso $KN \rightarrow KN$ esto lo presentamos en la figura (3.1). En la región de energía del proceso de $KN \rightarrow KN$ se encuentra $\Lambda(1520)$, para poder describirla de manera correcta hacemos uso de la sección eficaz de la resonancia en base a la expresión de Breit-Wigner y de sus parámetros de [2], presentamos la expresión:

$$\sigma(E) = \frac{(2J+1)4\pi}{2k^2} \left[\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4} \right] d, \quad (3.3)$$

donde E es la energía en el c.m. (centro de masas) del proceso, J el momento angular del proceso, E_0 es la energía en el c.m. de la resonancia, Γ es el ancho a media altura de la resonancia y d la altura del pico de la resonancia.

$E_0(MeV)$	1522
$\Gamma(MeV)$	14
d	$25,789 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 3.1: Parámetros de $\Lambda(1520)$.

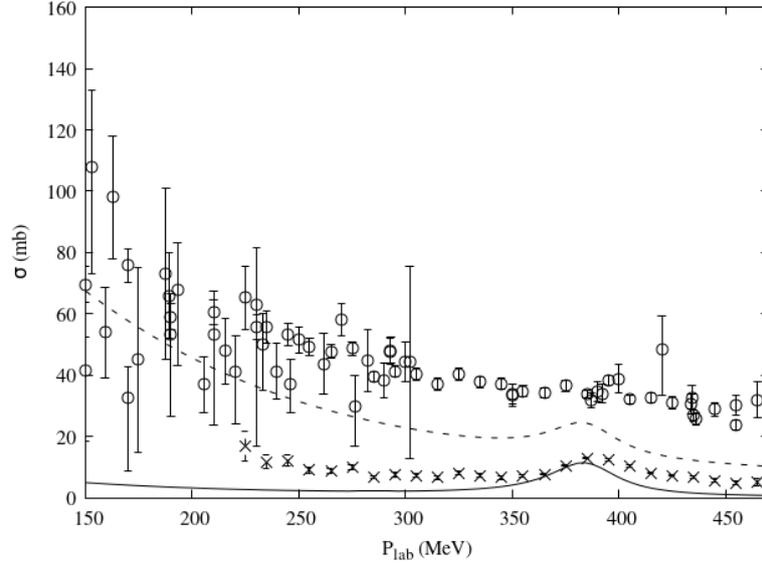


Figura 3.1: Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Potencial del sistema incluye diagramas de aniquilación. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].

Observamos que el modelo presenta una alta simetría con respecto al isospín para describir procesos $KN \rightarrow KN$. Por este motivo, se añadió un potencial denominado a_o para intentar romper dicha simetría, con esta corrección al potencial del sistema logramos describir de manera satisfactoria la sección eficaz de intercambio de carga presentamos estos resultados en la figura (3.2) parte (a).

El potencial a_o se lo expresa como,

$$V_{a_0}(\vec{q}) = \frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \frac{1}{m^2 + q^2} (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \quad (3.4)$$

donde \vec{q} es el momento transferido entre quarks, $\Lambda = 12,8(\text{fm}^{-1})$ es *cut-off*, $m = 1526,11$ (MeV) masa, y el coeficiente isospín $(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)$ lo mostramos en el apéndice (6)

Como no logramos describir las dos secciones eficaces, realizamos pruebas con otro potencial. Dicho potencial es el llamado potencial óptico, logramos dar una mejor descripción de la sección elástica del proceso, estos resultados los mostramos en la figura (3.2) parte (b).

El potencial óptico (sin dependencia de isospín), se expresa como,

$$V_{opt}(\vec{q}) = V_r + iW_i e^{-\frac{q^2 b'^2}{3}}, \quad (3.5)$$

siendo \vec{q} el momento transferido entre quarks, V_r parte real y W_i parte imaginaria del peso de la gaussiana, y b' rango de la gaussiana.

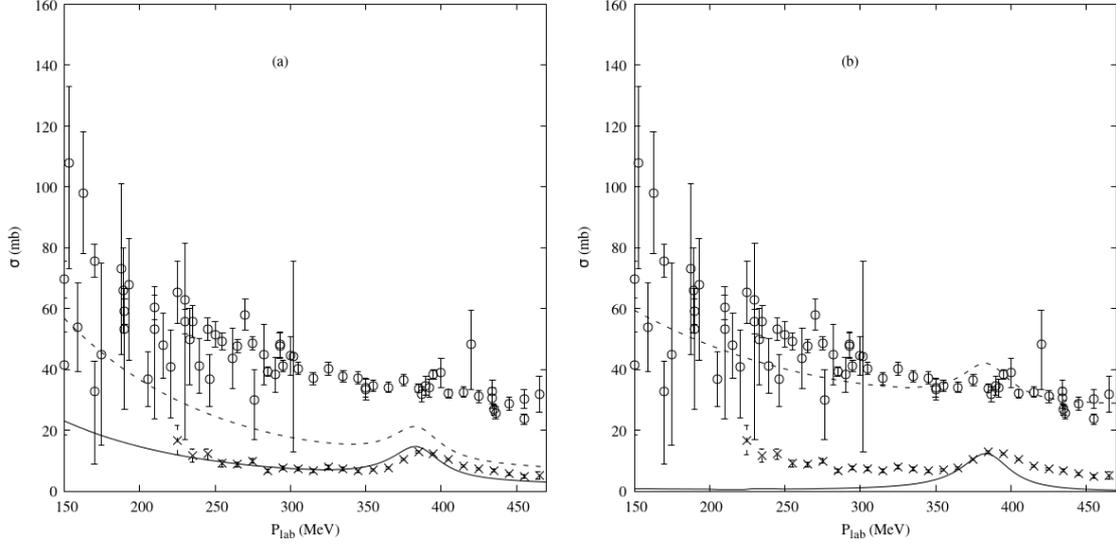


Figura 3.2: Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0 p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. (a) Potencial del sistema incluye una corrección mediante el potencial a_o . (b) Potencial del sistema incluye corrección mediante un potencial óptico sin dependencia de isospín. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].

Mientras que, para dar una descripción correcta de ambas secciones, optamos en primer lugar por una combinación del potencial a_o más el potencial óptico, mostramos los resultados en la figura (3.3).

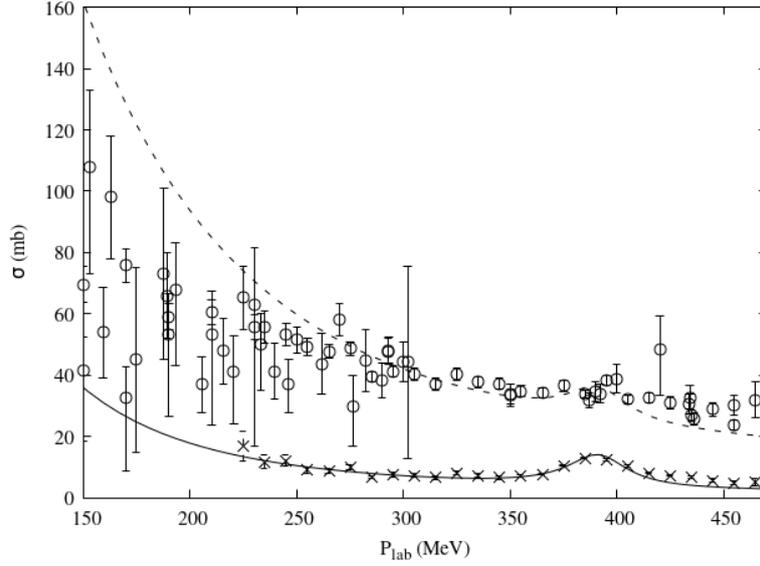


Figura 3.3: Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0 p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Corrección al potencial del sistema con potencial a_o más potencial óptico. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].

Finalmente optamos por un potencial óptico más general, en el que tiene en cuenta el isospín. Con esto, obtuvimos resultados que describen la fenomenología del proceso $KN \rightarrow KN$ en el rango de bajas energías mostramos estos resultados finales en la figura (3.4), además de los parámetros del potencial óptico general para describir el proceso.

La forma del potencial óptico general la expresamos como,

$$V_{opt}^{KN,I}(\vec{q}) = (V_r^I + i \cdot W_i^I) e^{-b'^2 q^2/2}, \quad (3.6)$$

donde \vec{q} es el momento transferido entre dos quarks e I el isospín total.

$b'(fm)$	$1,027 \cdot 10^{-3}$
$V_r^{I=0}(GeV^{-2})$	$0,9950 \cdot 10^{-4}$
$W_i^{I=0}(GeV^{-2})$	$0,455 \cdot 10^{-5}$
$V_r^{I=1}(GeV^{-2})$	$-0,280 \cdot 10^{-4}$
$W_i^{I=1}(GeV^{-2})$	$-0,745 \cdot 10^{-5}$

Cuadro 3.2: Parámetros del potencial óptico con dependencia de isospín.

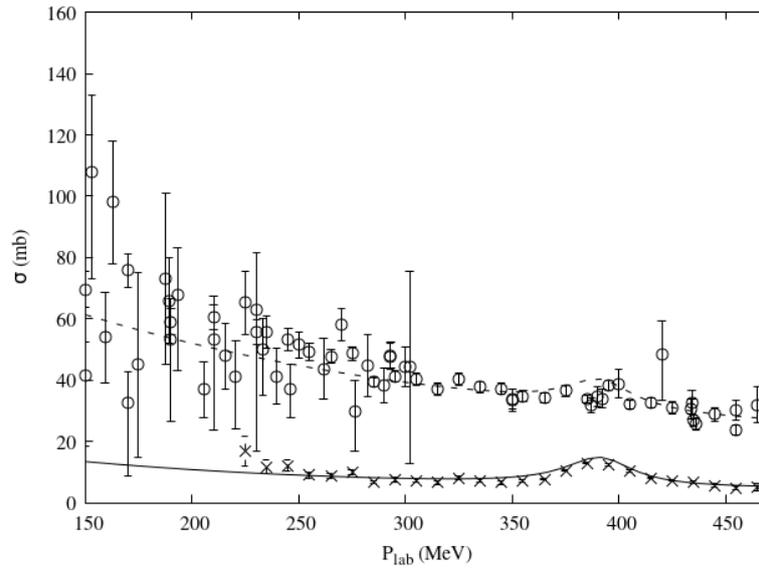


Figura 3.4: Gráfica de secciones eficaces de $KN \rightarrow KN$ a baja energía. La línea continua es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow \bar{K}^0p$ de nuestro modelo, mientras que la línea entre cortada es la sección eficaz del proceso $K^-p \rightarrow K^-p$. Corrección al potencial con el potencial óptico general. Los datos experimentales los representamos como puntos en diferentes estilos tomados de [1, 2].

El uso del potencial óptico general es debido a que nos ayuda a describir de manera fenomenológica los canales de desintegración del proceso $KN \rightarrow KN$ que no tenemos en cuenta en este trabajo, y que serían muy costosos de describir de manera microscópica.

3.2. Conclusiones y recomendaciones

Por medio del modelo del Modelo Quark Constituyente del Grupo de Física Nuclear de la Universidad de Salamanca, hemos estudiado un canal, procesos de $KN \rightarrow KN$. Donde hemos formulado el potencial del sistema KN a través de sus constituyentes quarks.

Por lo expuesto en la sección de los resultados, concluimos que el modelo es una herramienta de gran utilidad al momento de describir estos procesos en el rango de bajas energías. Además, que mediante el modelo, hemos sido capaces de describir las secciones eficaces elásticas e intercambio de carga para el proceso $KN \rightarrow KN$ hasta un rango energía de aproximadamente 450 MeV. Esto lo hemos logrado con el uso del potencial óptico general, cabe mencionar que aquí presentamos una primera aproximación. Es decir,

podemos conseguir un mejor ajuste de este potencial óptico general mediante la espectroscopía del proceso. Validamos el modelo ya que hemos sido capaces de dar una buena descripción de la fenomenología del proceso mencionado.

Como recomendación, en futuros trabajos se puede añadir otro canal, esto con la finalidad de estudiar procesos del tipo $K^*N \rightarrow K^*N$, lo que aumentará el rango de estudio a medias energías. Por otro lado, el cálculo de secciones eficaces constituye la base para describir observables de tal manera que se puedan comparar con datos experimentales, brindando a los experimentales una herramienta teórica potente para comparar sus datos.

Capítulo 4

Anexo de QCD

4.1. Grupo $SU(3)$

El grupo $SU(3)$ juega un papel esencial en el contexto de las interacciones fuertes. En la teoría cuántica de campos, el $SU(3)$ de color actúa como un grupo gauge para la Cromodinámica Cuántica (QCD). En el sector ligero, que involucra los quarks arriba (u), abajo (d) y el extraño (s), el grupo de sabor $SU(3)$ emerge como una simetría global aproximada que organiza el espectro de hadrones en representaciones irreducibles de $SU(3)$.

Dada su significativa importancia en las aplicaciones de este trabajo, presentaremos algunas propiedades de este grupo y su álgebra de Lie. Los elementos de $SU(3)$ están constituidos por todas las matrices unitarias de 3×3 con determinante igual a 1, expresadas como,

$$U(\phi) = e^{(-i \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{2})}, \quad (4.1)$$

donde ϕ_{α} son números reales y λ_{α} representa los generadores infinitesimales del grupo. Estas matrices son conocidas como las matrices de Gell-Mann y constan de ocho elemen-

tos linealmente independientes, cada una con una representación explícita.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Estas matrices poseen las siguientes propiedades:

$$\frac{\lambda_\alpha}{2} = i \frac{\partial U}{\partial \phi_\alpha}(0, \dots, 0), \quad \lambda_\alpha = \lambda_\alpha^\dagger, \quad \text{traza}(\lambda_\alpha) = 0, \quad \text{traza}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}. \tag{4.3}$$

Para deducir la estructura del grupo de Lie, es necesario examinar las relaciones de conmutación de las matrices de Gell-Mann.

$$\left[\frac{\lambda_\alpha}{2}, \frac{\lambda_\beta}{2} \right] = i d_{\alpha\beta\gamma} \frac{\lambda_\gamma}{2}, \tag{4.4}$$

donde los elementos del grupo $SU(3)$ no obedecen la propiedad de conmutación, esta característica se evidencia en las constantes de estructura $d_{\alpha\beta\gamma}$. Estas constantes son reales y antisimétricas, y poseen sus respectivos valores,

$\alpha\beta\gamma$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$d_{\alpha\beta\gamma}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cuadro 4.1: Constantes de estructura completamente antisimétricas.

Capítulo 5

Anexo de Coordenadas para el sistema KN

5.1. Sistema formado por KN

Necesitamos primero las coordenadas de Jacobi para el estudiar el sistema KN , estas coordenadas están en función de la coordenadas de los cinco quarks que constituyen al sistema KN , utilizamos:

$$\vec{p}_{\xi_1} = \frac{m_2}{M_A} \vec{p}_1 - \frac{m_1}{M_A} \vec{p}_2, \quad (5.1)$$

$$\vec{p}_{\xi_2} = \frac{1}{2}(\vec{p}_3 - \vec{p}_4), \quad (5.2)$$

$$\vec{p}_{\xi_3} = \frac{m_3 + m_4}{M_B} \vec{p}_5 - \frac{m_5}{M_B}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4), \quad (5.3)$$

$$\vec{P} = \frac{M_B}{M_T}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - \frac{M_A}{M_T}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5), \quad (5.4)$$

$$\vec{P}_{cm} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5, \quad (5.5)$$

donde denotamos la masa del quark i con m_i , $M_A = m_1 + m_2$ la suma del quark (1 y 2), $M_B = m_3 + m_4 + m_5$ la suma de las masas de los quarks (3,4 y 5) y $M_T = M_A + M_B$, para el ordenamiento de los quarks nos basamos en la figura (2.1).

La inversa de las coordenadas de Jacobi da como resultado las coordenadas originales

\vec{p}_i , que son las siguientes:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{\xi_1} + \frac{m_1}{M_A} \vec{P} + \frac{m_1}{M_T} \vec{P}_{cm}, \quad (5.6)$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_{\xi_1} + \frac{m_2}{M_A} \vec{P} + \frac{m_2}{M_T} \vec{P}_{cm}, \quad (5.7)$$

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_{\xi_2} - \frac{1}{2} \vec{p}_{\xi_3} - \frac{m_3 + m_4}{2M_B} \vec{P} + \frac{m_3 + m_4}{2M_T} \vec{P}_{cm}, \quad (5.8)$$

$$\vec{p}_4 = -\vec{p}_{\xi_2} - \frac{1}{2} \vec{p}_{\xi_3} - \frac{m_3 + m_4}{2M_B} \vec{P} + \frac{m_3 + m_4}{2M_T} \vec{P}_{cm}, \quad (5.9)$$

$$\vec{p}_5 = \vec{p}_{\xi_3} - \frac{m_5}{M_B} \vec{P} + \frac{m_5}{M_T} \vec{P}_{cm}, \quad (5.10)$$

para el estado final \vec{p}'_i ocupamos las mismas coordenadas originales.

Cuando realizamos el cálculo de los *kernles* RGM lo esencial es dar las coordenadas de Jacobi, porque así expresamos las interacciones. Dichas interacciones para el sistema KN vienen ha ser locales, tenemos,

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{p}'_{ij}, \vec{p}_{ij}) \delta^3(\vec{P}'_{ij} - \vec{P}_{ij}) \prod_{k \neq i, j} \delta^3(\vec{p}'_k - \vec{p}_k), \quad (5.11)$$

siendo,

$$\vec{p}_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{p}_i - \vec{p}_j), \quad \vec{P}_{ij} = \vec{p}_i + \vec{p}_j. \quad (5.12)$$

La interacción directa puede expresarse de manera consolidada, teniendo en cuenta que $i = \{1, 2\}$ (Mesón) y $j = \{3, 4, 5\}$ (Barión) y que el barión y mesón poseen todos sus momentos orbitales iguales a 0.

$$\begin{aligned} V_{ij} = & V \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) + \frac{(-1)^j}{2} (\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2}) + \frac{a_j}{4} (\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{m_i}{M_A} + \frac{f_j}{2} \left(h_j - \frac{m_3 + m_4}{M_B} \right) \right] (\vec{P}' - \vec{P}) \right) \delta^3(\vec{P}'_{cm} - \vec{P}_{cm}) \times \\ & \times \delta^3 \left(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1} + (-1)^i \left(1 - \frac{m_i}{M_A} \right) (\vec{P}' - \vec{P}) \right) \times \\ & \times \delta^3 \left(\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2} + \frac{c_j}{2} (\vec{P}' - \vec{P}) \right) \delta^3 \left(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3} + \left(h_j - \frac{m_5}{M_B} \right) (\vec{P}' - \vec{P}) \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

aquí nosotros definimos los siguientes coeficientes $a_j = [1, 1, -2]$, $c_j = [1, -1, 0]$, $d_j = [1, 1, -1]$, $h_j = [0, 0, 1]$ y $f_j = [-1, -1, 2]$ cuando $j = \{3, 4, 5\}$.

Este potencial viene de los diagramas directos con una dependencia en j . No obstante, cuando realizamos las integrales necesarias para llegar a la ecuación (2.42), desaparece la dependencia en todos los términos que incluye el índice j . Por tanto, tenemos que los

diagramas son iguales $V_{i3} = V_{i4} = V_{i5}$, es decir existe una valor 3 de multiplicidad para los diagramas V_{15} y V_{25} respectivamente.

Capítulo 6

Anexo de Elementos de espín, sabor y color en el sistema

KN

Desarrollamos en este anexo una técnica para dar con los valores de espín-isospín-color para el sistema (Kaón-Nucleón).

6.1. Método para calcular los Coeficientes

Primero escribimos la función de onda en espín-sabor-color del mesón K de la siguiente manera,

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_M}} |(\chi_1, \chi_2)S\rangle \otimes |(t_1, t_2)T\rangle \otimes \xi_c[1^2], \quad (6.1)$$

siendo el ket $|(\chi_1, \chi_2)S\rangle$ ($|(t_1, t_2)T\rangle$) el que corresponde al acoplamiento de espín (isospín) del par quark-antiquark del mesón K , con $\chi_1 = \chi_2 = \frac{1}{2}$ y $t_1 = t_2 = \{0, \frac{1}{2}\}$, y donde S (T) su espín (isospín) total y N_M es un factor de normalización.

De manera similar escribiremos la función de onda en espín-sabor-color para el barión N como,

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_B}} \left| \left(l, \frac{1}{2} \right) S \right\rangle \otimes \left| \left(l, \frac{1}{2} \right) T \right\rangle \otimes \xi_c[1^3], \quad (6.2)$$

donde l representa el acoplamiento de los dos primeros quarks del Barión N , donde $S(T)$ denota el espín (isospín) y N_B es un factor de normalización. Los valores de la normalización son $N_N = 2$ y los acoplamientos mínimos son $l_N = 0$ para el barión N .

Como la función de onda de color ξ_c la podemos factorizar, la dejamos de lado y solo nos centramos en los de valores de espín-sabor. Entonces podemos escribir de forma general la función de onda de espín-sabor del sistema mesón-barión de la siguiente manera,

$$|MB; ST\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_M N_B}} \left| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) S_M; \left(l, \frac{1}{2} \right) S_B; S \right\rangle \otimes |(t_1, t_2)T_M; (l, t_5)T_B; T\rangle, \quad (6.3)$$

donde S (T) es el espín (isospín) total al que se acopla el sistema. En particular en el sistema KN en esta función de onda los quarks (1, 2) pertenecen al mesón K y los quarks (3,4,5) al barión N siguiendo el ordenamiento de quarks de la figura (2.1).

Cuando tenemos un operador en el espacio de espín-isospín dado por $\mathcal{V}^S \cdot \mathcal{V}^T$ los valores de espín-sabor que necesitaremos los obtenemos de los elementos de matriz reducidos del operador entre los estados inicial y final, estos son representados por,

$$\begin{aligned} \langle M'B'; S'T' || \mathcal{V}^S \cdot \mathcal{V}^T || MB; ST \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_M N_B N_{M'} N_{B'}}} \times \\ &\times \eta_{MB}^{M'B'}(\mathcal{V}^S, S', S) \eta_{MB}^{M'B'}(\mathcal{V}^T, T', T), \end{aligned} \quad (6.4)$$

siendo,

$$\eta_{MB}^{M'B'}(\mathcal{V}^T, T', T) = \langle (t'_1, t'_2)T_{M'}; (l', t'_5)T_{B'}; T' || \mathcal{V}^T || (t_1, t_2)T_M; (l, t_5)T_B; T \rangle, \quad (6.5)$$

procedemos de forma análoga para calcular los valores de espín. A pesar de que el cómputo de los valores de espín lo podemos simplificar utilizando técnicas de $SU(2)$, dado que el cálculo de los valores de sabor debe llevarse a cabo en $SU(3)$ completo, resulta más práctico emplear herramientas computacionales como *Mathematica*. De esta manera, establecemos un método consistente para la determinación de los valores de espín-sabor-color. La obtención de estos valores implica simplemente la multiplicación de los valores de espín-sabor por los correspondientes valores de color, los cuales factorizan en todos los casos.

6.2. Valores para el sistema KN

Valores escalares del proceso $KN \rightarrow KN$

$T(\chi'_1, \chi_1)S$	$\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$	$\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5$	$\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5$	$\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$	$\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$
$0(0, 0) \frac{1}{2}$	3	0	0	0	0
$0(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	0	0
$0(1, 1) \frac{1}{2}$	3	-2	-10	0	0
$0(1, 1) \frac{3}{2}$	3	1	5	0	0
$1(0, 0) \frac{1}{2}$	-1	0	0	0	0
$1(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{3}$	$-5/\sqrt{3}$	0	0
$1(1, 1) \frac{1}{2}$	-1	-2	10/3	0	0
$1(1, 1) \frac{3}{2}$	-1	1	-5/3	0	0

$T(\chi'_1, \chi_1)S$	$\lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$	$\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5$	$\lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$	$\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5$	$\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$
$0(0, 0) \frac{1}{2}$	1	0	0	0	0
$0(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$1/\sqrt{3}$	0	0	0
$0(1, 1) \frac{1}{2}$	1	-2/3	0	0	0
$0(1, 1) \frac{3}{2}$	1	1/3	0	0	0
$1(0, 0) \frac{1}{2}$	1	0	0	0	0
$1(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$1/\sqrt{3}$	0	0	0
$1(1, 1) \frac{1}{2}$	1	-2/3	0	0	0
$1(1, 1) \frac{3}{2}$	1	1/3	0	0	0

Cuadro 6.1: Tabla de valores del término central para el proceso $KN \rightarrow KN$. El factor de multiplicidad 3 ya está considerado en los coeficientes. La notación (χ_1, χ'_1) es para el espín del mesón K inicial y final respectivamente, mientras que S denota el espín total del sistema KN y T denota el isospín total del sistema KN .

Valores tensoriales del proceso $KN \rightarrow KN$

$(S, S')T$	$[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2$	$\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$	$[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 \sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$	$\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) 0$	$-\sqrt{\frac{10}{3}}$	3	$-5\sqrt{\frac{10}{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) 0$	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	3	$5\sqrt{\frac{10}{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) 0$	$2\sqrt{\frac{10}{3}}$	3	$10\sqrt{\frac{10}{3}}$	0
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) 1$	$-\sqrt{\frac{10}{3}}$	-1	$\frac{5\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) 1$	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	-1	$-\frac{5\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) 1$	$2\sqrt{\frac{10}{3}}$	-1	$-\frac{10\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0

$(S, S')T$	$\lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$	$[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 \lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$	$[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 \sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) 0$	1	$-\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) 0$	1	$\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) 0$	1	$\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) 1$	1	$-\frac{10\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) 1$	1	$\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0
$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) 1$	1	$\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0

Cuadro 6.2: Tabla de valores del término tensorial para el proceso $KN \rightarrow KN$. El factor de multiplicidad 3 ya está considerado en los coeficientes. Presentamos los coeficientes cuando el espín del mesón K es $\chi_1 = \chi'_1 = 1$ tanto inicial y final respectivamente, para el caso en donde el espín del mesón K es $\chi_1 = 0$ o $\chi'_1 = 0$ tanto inicial y final, los valores son ceros.

Diagramas de aniquilación del proceso $KN \rightarrow KN$

En las interacciones a nivel quark para nuestro sistema KN , existen diagramas de aniquilación por medio de un pión π y el gluón ver figura (6.1) (b) y (c). Estos diagramas los obtenemos de estudiamos como los realizados en [25].

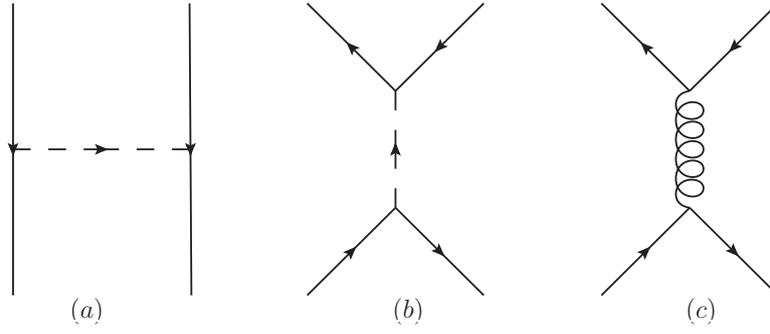


Figura 6.1: En (a) tenemos los diagramas directos donde existe el intercambio de un bosón de Goldstone, el diagrama de aniquilación para el pión lo presentamos en (b) y en (c) presentamos el diagrama de aniquilación para el gluón.

Expresamos los potenciales que dan origen a los diagramas de aniquilación para el sistema KN , como:

$$\begin{aligned}
 V_{KN}^{OPE}(\vec{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2 - m_\pi^2} (\vec{\lambda}_{25} \cdot \vec{\lambda}_{25}) (\vec{\sigma}_{25} \cdot \vec{\sigma}_{25}) (\vec{\tau}_{25} \cdot \vec{\tau}_{25}), \\
 V_{KN}^{OGE}(\vec{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{\alpha_s}{4m_q^2} (\vec{\lambda}_{25} \cdot \vec{\lambda}_{25}) (\vec{\sigma}_{25} \cdot \vec{\sigma}_{25}) (\vec{\tau}_{25} \cdot \vec{\tau}_{25}).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

A continuación, mostramos los valores en los siguientes cuadros,

$T(\chi'_1, \chi_1)S$	$\vec{\lambda}_{25} \cdot \vec{\lambda}_{25}$	$(\vec{\tau}_{25} \cdot \vec{\tau}_{25}) (\vec{\sigma}_{25} \cdot \vec{\sigma}_{25})$
$0(0, 0) \frac{1}{2}$	1/3	3/2
$0(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$-1/2\sqrt{3}$
$0(1, 1) \frac{1}{2}$	1/3	11/6
$0(1, 1) \frac{3}{2}$	1/3	5/3
$1(0, 0) \frac{1}{2}$	1/3	5/2
$1(0, 1) \frac{1}{2}$	0	$7/\sqrt{3}$
$1(1, 1) \frac{1}{2}$	1/3	31/18
$1(1, 1) \frac{3}{2}$	1/3	19/9

Cuadro 6.3: Tabla de valores escalares para diagramas de aniquilación del Pión. El factor de multiplicidad 3 ya está considerado en los coeficientes. La notación (χ_1, χ'_1) es para el espín del mesón K inicial y final respectivamente, mientras que S denota el espín total del sistema KN y T denota el isospín total del sistema KN .

$T(\chi'_1, \chi_1)S$	$\vec{\lambda}_{25} \cdot \vec{\lambda}_{25}$	$(\vec{\tau}_{25} \cdot \vec{\tau}_{25}) (\vec{\sigma}_{25} \cdot \vec{\sigma}_{25})$
0 (0, 0) $\frac{1}{2}$	4/9	9/2
0 (0, 1) $\frac{1}{2}$	0	$-\sqrt{3}/2$
0 (1, 1) $\frac{1}{2}$	4/9	11/2
0 (1, 1) $\frac{3}{2}$	4/9	5
1 (0, 0) $\frac{1}{2}$	4/9	3/2
1 (0, 1) $\frac{1}{2}$	0	$1/6\sqrt{3}$
1 (1, 1) $\frac{1}{2}$	4/9	25/18
1 (1, 1) $\frac{3}{2}$	4/9	13/9

Cuadro 6.4: Tabla de valores escalares para diagramas de aniquilación del Gluón. El factor de multiplicidad 3 ya está considerado en los coeficientes. La notación (χ_1, χ'_1) es para el espín del mesón K inicial y final respectivamente, mientras que S denota el espín total del sistema KN y T denota el isospín total del sistema KN .

Referencias bibliográficas

- [1] Terry S. Mast, Margaret Alston-Garnjost, Roger O. Bangerter, Angela S. Barbaro-Galtieri, Frank T. Solmitz, and Robert D. Tripp. Elastic, Charge Exchange, and Total K- p Cross-Sections in the Momentum Range 220-MeV/c to 470-MeV/c. *Phys. Rev. D*, 14:13, 1976.
- [2] R. L. Workman and Others. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [3] Thomas A DeGrand and Carleton DeTar. *Lattice methods for quantum chromodynamics*. World Scientific, 2006.
- [4] CE Carlson, TH Hansson, and C Peterson. Meson, baryon, and glueball masses in the mit bag model. *Physical Review D*, 27(7):1556, 1983.
- [5] F Fernandez, A Valcarce, U Straub, and Amand Faessler. The nucleon-nucleon interaction in terms of quark degrees of freedom. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 19(12):2013, 1993.
- [6] A Valcarce, H Garcilazo, F Fernández, and P González. Quark-model study of few-baryon systems. *Reports on Progress in Physics*, 68(5):965–1041, March 2005.
- [7] A Valcarce, F Fernandez, P Gonzalez, and V Vento. Chiral quark cluster model study of the low-energy baryon spectrum. *Phys. Lett. B*, 367(arXiv: nucl-th/9509009):35–39, 1996.
- [8] J Vijande, F Fernandez, and A Valcarce. Constituent quark model study of the meson spectra. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 31(5):481, 2005.
- [9] David J Gross and Frank Wilczek. Asymptotically free gauge theories. ii. *Physical Review D*, 9(4):980, 1974.

- [10] H David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30(26):1346, 1973.
- [11] KD Born, Edwin Laermann, N Pirch, Thomas F Walsh, and PM Zerwas. Hadron properties in lattice qcd with dynamical fermions. *Physical Review D*, 40(5):1653, 1989.
- [12] Gunnar S Bali. Qcd forces and heavy quark bound states. *Physics Reports*, 343(1-2):1–136, 2001.
- [13] DI Dyakonov and V Yu Petrov. Chiral condensate in the instanton vacuum. *Physics Letters B*, 147(4-5):351–356, 1984.
- [14] U. Taboada-Nieto, P. G. Ortega, D. R. Entem, F. Fernández, and J. Segovia. Kaon spectrum revisited, 2022.
- [15] John Archibald Wheeler. Molecular viewpoints in nuclear structure. *Physical Review*, 52(11):1083, 1937.
- [16] J Segovia, AM Yasser, DR Entem, and F Fernandez. $J^p c = 1$ -hidden charm resonances. *Physical Review D*, 78(11):114033, 2008.
- [17] E Hiyama, Y Kino, and M Kamimura. Gaussian expansion method for few-body systems. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 51(1):223–307, 2003.
- [18] Ying-Nan Chiu. Irreducible tensor expansion of solid spherical harmonic-type operators in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 5(2):283–288, 1964.
- [19] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics, revised edition, 1995.
- [20] J.R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Dover Books on Engineering. Dover Publications, 2012.
- [21] GE Brown and AD Jackson. The nucleon-nucleon interaction north-holland. *New York*, 1976.
- [22] CW Wong and SK Young. Nucleon potential models from proton-proton scattering. *Nuclear Physics A*, 273(2):445–450, 1976.
- [23] Karlheinz Langanke, Joachim A Maruhn, and Steven E Koonin. *Computational nuclear physics*, volume 1. Springer, 1991.

- [24] WH Press, BP Flannery, SA Teukolski, and WT Vetterling. *Numerical Recipes (Cambridge, Univ. Press, Cambridge)*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1986.
- [25] D. R. Entem and F. Fernández. The $n\bar{N}$ interaction in a constituent quark model: Baryonium states and protonium level shifts. *Phys. Rev. C*, 73:045214, Apr 2006.