

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

VARIACIONES DEL MODELO DE HOTELLING

**MODELO DE HOTELLING: CIUDAD LINEAL CON FUNCIONES DE
DENSIDAD NO UNIFORMES. EL CASO DE LA FUNCIÓN DE
KUMARASWAMY.**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE ECONOMISTA**

MATEO XAVIER SOLIZ VILLAFUERTE

mateo.soliz @epn.edu.ec

DIRECTOR: JOSÉ FERNANDO RAMÍREZ ÁLVAREZ

jose.ramirez@epn.edu.ec

DMQ, julio 2024

CERTIFICACIONES

Yo, MATEO XAVIER SOLIZ VILLAFUERTE declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

MATEO XAVIER SOLIZ VILLAFUERTE

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por MATEO XAVIER SOLIZ VILLAFUERTE, bajo mi supervisión.

JOSÉ FERNANDO RAMÍREZ ÁLVAREZ

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

MATEO XAVIER SOLIZ VILLAFUERTE

JOSÉ FERNANDO RAMÍREZ ÁLVAREZ

DEDICATORIA

Con inmenso aprecio y profundo reconocimiento, dedico este Trabajo de Integración Curricular a mi querida familia, cuyo inquebrantable amor y fe en mí han sido el faro que ha guiado mi travesía académica.

A mi padre, cuyo ejemplo de integridad y laboriosidad ha sido una inspiración constante para alcanzar mis metas. Su sabiduría y consejos han sido pilares fundamentales en mi formación, motivándome a perseverar incluso en los momentos más desafiantes. Su apoyo incondicional y su capacidad para mostrarme el camino correcto han sido invaluable.

A mi madre, por su amor incondicional y su constante apoyo. Su dedicación y fortaleza han sido el cimiento sobre el cual he construido mis sueños. Sus palabras de aliento y su confianza en mis capacidades me han dado la fuerza necesaria para seguir adelante. Cada sacrificio y gesto de cariño de su parte me han impulsado a dar lo mejor de mí en cada etapa de este recorrido.

A mis hermanos, por su compañerismo y aliento inagotable. Sus palabras de ánimo y su presencia constante han sido un recordatorio de que no estoy solo en este viaje. Su apoyo incondicional y su alegría han sido una fuente inagotable de motivación y energía. Cada risa compartida y cada momento de complicidad me han recordado la importancia de la familia en este camino.

Esta obra es un reflejo del amor y respaldo que siempre me han brindado. Sin ustedes, este logro no habría sido posible. Cada página de este trabajo lleva impreso su influencia y apoyo, y es un testimonio del impacto que han tenido en mi vida.

Con todo mi cariño y gratitud, a ustedes dedico este esfuerzo culminado. Gracias por ser mi ancla y mi inspiración constante.

AGRADECIMIENTO

En este apartado, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todos los profesores que han contribuido a mi formación profesional a lo largo de mi carrera de pregrado. Sin su guía y dedicación, este logro no habría sido posible. Deseo destacar a tres profesores en particular, quienes han sido clave en mi desarrollo académico y personal:

A la Doctora Andrea Bonilla, con la cátedra de Macroeconomía no solo me motivó a avanzar en la carrera, sino que transformó mi visión de la economía. Gracias a ella, desarrollé un interés profundo por la investigación y una curiosidad insaciable por los temas relacionados con la Macroeconomía. Su pasión por la enseñanza y su capacidad para inspirar a sus estudiantes han sido esenciales en mi desarrollo académico.

A la Doctora Yasmín Salazar, le expreso mi más sincero agradecimiento por enseñarnos, desde la primera clase, a ser no solo excelentes profesionales, sino también excelentes seres humanos. Muchas gracias por su dedicación y rigor en nuestra formación. Su estricta pero justa enseñanza no solo me ha convertido en un mejor profesional, sino también en una mejor persona. Gracias a sus enseñanzas, he aprendido a valorar el conocimiento y la verdadera esencia del aprendizaje. Su capacidad para despertar el interés por aprender de manera profunda y significativa ha dejado una huella imborrable en mi vida. Su influencia y dedicación han sido fundamentales para mi crecimiento académico y personal.

Al Doctor José Ramírez, quien ha sido mi Director de Trabajo de Integración Curricular y mi profesor en diversas ocasiones a lo largo de la carrera. Agradezco profundamente los retos que nos ha planteado, su empatía y justicia, y la ayuda invaluable que nos ha brindado como formador de investigadores. Su apoyo y orientación han sido cruciales para el desarrollo de este Trabajo de Integración Curricular y para mi crecimiento tanto académico como personal.

Estos tres profesores no solo me enseñaron diversas áreas de la economía, sino que también lo hicieron con un enfoque cuantitativo, que es el factor más apasionante de la carrera. Agradezco a cada uno de ellos por mostrarme el valor de la economía y su conexión con las matemáticas y la estadística. Su influencia ha aumentado mi interés y pasión por esta carrera a lo largo de los años.

Les estaré eternamente agradecido.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES.....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA.....	II
DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTO.....	IV
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	V
RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
1 DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO.....	1
1.1 Objetivo general.....	3
1.2 Objetivos específicos	3
1.3 Alcance	3
1.4 Marco teórico	5
2 METODOLOGÍA.....	13
2.1 Fundamentos: Juegos dinámicos.....	13
2.2 Insumos analíticos: Función de densidad de probabilidad de Kumaraswamy (KW).....	21
2.3 Extensión: Modelo de Hotelling- Aplicación de la función de Kumaraswamy	26
2.4 Pseudo Código	35
3 RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	37
3.1 Resultados	37
3.2 Conclusiones	45
3.3 Recomendaciones	46
4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48
5 ANEXOS.....	52
ANEXO I. Definiciones.....	52
ANEXO II. Funciones lineales y no lineales monótonas decrecientes.	54
ANEXO III. Posiciones de Equilibrio.....	55
ANEXO IV. Precios de Equilibrio.....	56
ANEXO V. Posición de Indiferencia	57
ANEXO VI. Cantidades de Equilibrio	58
ANEXO VII. Beneficios de Equilibrio.....	59
ANEXO VIII. Código de Python de la extensión del modelo de Hotelling.	60

RESUMEN

El presente estudio analiza el Equilibrio de Nash para dos empresas que buscan maximizar sus beneficios con respecto a su decisión en precios y ubicación, en un mercado de bienes homogéneos para una ciudad lineal, utilizando como base el modelo de competencia espacial de Hotelling de dos etapas. Particularmente, en este modelo se asume que la distribución de los consumidores sigue una función de Kumaraswamy, a diferencia del modelo original donde esta distribución es uniforme. Es importante señalar que, para determinar la solución analítica del modelo, en este estudio se emplea la teoría de juegos dinámicos y las propiedades que tiene la función de Kumaraswamy. Por otro lado, para contrastar la solución analítica se realizan simulaciones numéricas para la determinación del Equilibrio de Nash. Los resultados analíticos obtenidos sugieren que, cuando la función de Kumaraswamy es una función lineal monótona creciente o decreciente, se cumple el principio de máxima diferenciación entre empresas. Por otro lado, los resultados numéricos obtenidos sugieren que inicialmente se cumple el principio de máxima diferenciación, pero a medida que los consumidores se conglomeran en un solo lado de la ciudad, existe asimetría en las posiciones de equilibrio de las empresas. Es decir, una de las empresas prefiere mantener su posición en el extremo de la ciudad y fijar precios bajos; mientras que la otra empresa decide posicionarse más cerca de la conglomeración de consumidores y fijar un precio más alto, y así liderar el mercado.

PALABRAS CLAVE: Modelo de Hotelling, Función de Kumaraswamy, Competencia espacial, Teoría de juegos, Equilibrio de Nash, Ciudad lineal.

ABSTRACT

The present study analyses the Nash Equilibrium for two firms seeking to maximize their profits with respect to their price and location decision, within a market for homogeneous goods in a linear city. It uses Hotelling's two-stage spatial competition model as a basis. Particularly, in this model it is assumed that the distribution of consumers follows a Kumaraswamy function, unlike the original model where this distribution is uniform. It is important to point out that, to determine the analytical solution of the model uses dynamic game theory and the properties of the Kumaraswamy function. On the other hand, in order to contrast the analytical solution, numerical simulations are carried out to determine the Nash Equilibrium. The analytical results obtained suggest that, when the Kumaraswamy function is an increasing or decreasing monotonic linear function, the principle of maximum differentiation between firms is satisfied. On the other hand, the numerical results obtained suggest that initially the principle of maximum differentiation is satisfied, but as consumers conglomerate on one side of the city, there is asymmetry in the equilibrium positions of the firms. That is, one of the firms prefers to maintain its position at the edge of the city and set low prices; while the other firm decides to position itself closer to the conglomeration of consumers and set a higher price, thus leading the market.

KEYWORDS: Hotelling's Model, Kumaraswamy Function, Spatial Competition, Game Theory, Nash Equilibrium, Linear City.

1 DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO

A lo largo de los años, en el campo de la economía industrial, se ha desarrollado teoría económica centrada en la competencia espacial entre empresas dentro de un mercado, la cual ha tenido como objetivo comprender y predecir como las empresas pueden ubicarse dentro de un espacio geográfico de manera eficiente. En este espacio, las empresas buscan maximizar sus beneficios (ganancias), teniendo en cuenta factores como: los beneficios de su competencia, la distribución de los consumidores dentro del mercado, los costos de producción y/o transporte, entre otros factores externos que pueden afectar a las empresas (Biscaia & Mota, 2013).

Según Smith (1981), el primer trabajo que suministró las bases de la competencia espacial en el campo de la economía fue el estudio de Fetter (1924), el cual presentó la existencia de la interdependencia de las empresas dentro de un mercado, a través de la ley de áreas de mercado. Esta ley ayuda a explicar cómo las empresas toman decisiones sobre la ubicación de sus establecimientos, la distribución de sus productos y la asignación de recursos dentro de un mercado. En este contexto, los consumidores de manera racional comparan los precios de cada uno de los bienes y su costo de transporte con relación a su ubicación, para obtener la decisión que maximice su utilidad.

Estas ideas dieron paso a muchos desarrollos teóricos acerca de la competencia espacial, que a lo largo de los años han sido considerados trabajos pioneros en la economía industrial, específicamente en la teoría de organización industrial y en la teoría de juegos. Entre estos trabajos se encuentra el modelo de Hotelling (1929). Este modelo fue desarrollado inicialmente como un modelo de competencia de dos etapas para un duopolio, el cual tiene como objetivo demostrar la existencia de un equilibrio estable para las empresas con respecto a sus posiciones y sus precios, evidenciando la diferenciación entre productos homogéneos para dos empresas dentro de una ciudad lineal. De este modo, el modelo de Hotelling intenta resolver la paradoja de Bertrand (1883), al mostrar que, ante cambios pequeños en el precio, las empresas solo pueden capturar adicionalmente una pequeña parte de la demanda ya existente dentro del mercado.

Hotelling obtuvo como resultado que las empresas alcanzan el equilibrio cuando estas se ubican simultáneamente en el centro de la ciudad y fijan precios iguales, a lo que Boulding (1966) denomina el principio de diferenciación mínima entre empresas. Sin embargo, unos años después, d'Aspremont et al. (1979) refutan este principio, demostrando que cuando se tienen costos de transporte lineales en el modelo base de Hotelling, no siempre existe un equilibrio para las empresas con respecto a sus precios. A partir de este resultado, el

mismo autor realiza una extensión del modelo original, en el cual los costos de transporte son cuadráticos con respecto a la distancia de las empresas. Esta extensión mostró la existencia de equilibrios para los precios de las empresas, dada cualquier ubicación dentro de la ciudad. Además, demostró que, para que las empresas logren alcanzar el equilibrio, estas deben ubicarse en los extremos de la ciudad de tal forma que se verifique el principio de máxima diferenciación.

Con el paso del tiempo, se fueron desarrollando modelos de competencia espacial en los cuales se fueron eliminando ciertos supuestos y añadiendo otros más realistas, dependiendo de cada uno de los contextos. Por ejemplo, en el trabajo de Anderson et al. (1997) se decidió plantear la extensión del modelo base de Hotelling, pero con una función simétrica log-cóncava para la distribución de los consumidores. En este estudio se concluyó que, si la forma funcional en la que los consumidores están distribuidos es muy cóncava, entonces el equilibrio es muy asimétrico con respecto a la posición de cada una de las empresas. Por otro lado, los trabajos de Eaton & Lipsey (1975) y Salop (1979) cambiaron a gran escala la estructura del modelo de Hotelling original, porque en estos casos se asume que los consumidores estarán ubicados en un círculo alrededor de la ciudad lineal, lo que implicaría un mercado circular. En la actualidad, el campo de la competencia espacial se ha ido diversificando con varios trabajos dentro de la rama de la economía industrial (Chen & Lai, 2008; Degryse et al., 2006; Lai & Tsai, 2004; Matsumura & Matsushima, 2004; Wang & Chen, 2008)

En este contexto, el presente trabajo de integración curricular se centra en determinar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para la extensión del modelo de Hotelling con posiciones endógenas, el cual involucra a dos empresas que compiten dentro de una ciudad lineal. Las particularidades de esta extensión son: i) la distribución de los consumidores viene dada a partir de una función de Kumaraswamy (1980), ii) se asume como supuesto que las empresas no pueden invadir el territorio de su rival, iii) se asume como supuesto que los costos de producción para las empresas son nulos, y iv) el costo de transporte para los consumidores es unitario. De manera específica, el desarrollo analítico de este trabajo se centrará en hallar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para casos específicos lineales de la función Kumaraswamy.

Paralelamente, en este trabajo se desarrolla un algoritmo para determinar los equilibrios en casos lineales y no lineales, con el objetivo de contrastar los resultados analíticos con los resultados numéricos obtenidos de las simulaciones. Por último, se presenta un análisis económico con respecto al comportamiento de cada una de las empresas en el mercado y las limitaciones que tiene este trabajo.

1.1 Objetivo general

Determinar y analizar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para el modelo de Hotelling con posiciones endógenas, cuando los consumidores están distribuidos a partir de una función de Kumaraswamy.

1.2 Objetivos específicos

1. Realizar una revisión bibliográfica sobre los trabajos que dieron solución al modelo de Hotelling y a los modelos de competencia espacial que se presentaron posteriormente a ese trabajo pionero. Además, elaborar una revisión bibliográfica de las diferentes extensiones del modelo de Hotelling.
2. Analizar el modelo base de Hotelling con posiciones endógenas para dos empresas en una ciudad lineal.
3. Desarrollar la extensión del modelo base de Hotelling, para los casos lineales en los que la función de Kumaraswamy es monótona creciente y decreciente.
4. Examinar los resultados analíticos de la extensión del modelo base de Hotelling para los casos desarrollados y presentar proposiciones o teoremas
5. Diseñar un algoritmo que permita determinar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para los casos en los que la función de Kumaraswamy es estrictamente monótona creciente y decreciente; y generar simulaciones cuando los parámetros de forma de la distribución varían respectivamente.
6. Analizar los resultados numéricos obtenidos y compararlos con los resultados analíticos de la extensión del modelo base.

1.3 Alcance

- Fase de revisión
 - Se realizará una revisión de la literatura sobre teoría de juegos. En esta parte, se mencionará los tipos de juegos, los elementos que tienen los juegos dinámicos con información incompleta, los conceptos de equilibrio, el Equilibrio de Nash, el Método de inducción hacia atrás y el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.
 - Se hará una revisión de la literatura de los diversos modelos de competencia espacial, con énfasis en el modelo base de Hotelling con posiciones endógenas para dos empresas, cuando los consumidores se distribuyen uniformemente en una ciudad lineal.

- Se realizará la revisión de la literatura acerca de las diversas extensiones del modelo base de Hotelling.
- Fase de diseño
 - Se realizará la revisión y el análisis de la función de distribución de Kumaraswamy.
 - Se determinará de manera analítica el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para el modelo base de Hotelling.
 - Se planteará la extensión del modelo de Hotelling en una ciudad lineal, cuando los consumidores están distribuidos a razón de una función de Kumaraswamy.
 - Se determinará de manera analítica el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para los casos lineales en los que la función de Kumaraswamy sea monótona creciente y decreciente, con respecto a la extensión del modelo de Hotelling.
- Fase de implementación
 - Se desarrollará un código Python que determine numéricamente cada uno de los Equilibrios de Nash para el modelo base.
 - Se presentará un Pseudo Código que determine el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para la extensión del modelo de Hotelling, teniendo en cuenta los supuestos establecidos en el capítulo de metodología.
 - Se desarrollará un código Python con relación al Pseudo código, para así, determinar numéricamente cada uno de los Equilibrios de Nash para la extensión del modelo mediante simulaciones.
- Fase de análisis
 - Se realizará un análisis estructural de los precios, posiciones, cantidades y beneficios de equilibrio para las dos empresas dentro de la ciudad lineal, cuando los parámetros de forma de la distribución de Kumaraswamy varían para cada uno de los casos no lineales.
 - Se realizará un análisis económico comparativo con respecto a los precios, posiciones, cantidades y beneficios de equilibrio, con el objetivo de justificar el comportamiento racional de cada una de las empresas, para cada uno de los casos del modelo que fueron especificados previamente.

1.4 Marco teórico

Modelo Base: Hotelling dinámico con posiciones endógenas

En este apartado se plantea y desarrolla el modelo de Hotelling con posiciones endógenas, haciendo uso de la teoría de juegos. Este modelo es usado como modelo base para la extensión en el capítulo de metodología del presente trabajo.

Planteamiento

El modelo de Hotelling (1929) es la abstracción de un problema de la economía industrial, el cual involucra 2 empresas que ofrecen bienes homogéneos dentro de un mercado en una ciudad lineal. Estas empresas buscan determinar los precios y posiciones que maximizan sus beneficios de manera simultánea, teniendo en cuenta que los consumidores están distribuidos uniformemente dentro de la ciudad lineal. Este problema se encuentra planteado mediante un juego dinámico de dos etapas, en el cual las posiciones son endógenas. Este juego dinámico será resuelto con teoría de juegos, asumiendo los siguientes supuestos:

- Ambas empresas deciden su posición y precios de oferta con base a un proceso de 2 etapas:
 - Primera etapa: Las empresas deciden la posición que maximiza simultáneamente sus beneficios.
 - Segunda etapa: Una vez resueltas las posiciones, las empresas deciden los precios de oferta que maximiza simultáneamente sus beneficios.
- Ambas empresas tienen un costo por unidad c , distinto de cero ($c \neq 0$).
- Los consumidores se encuentran ubicados en la posición x , la cual sigue una distribución uniforme.
- Cada consumidor dentro de la ciudad debe adquirir un solo bien.
- Los bienes proporcionados por las empresas son homogéneos.
- Las empresas A, B se encuentran localizadas a lo largo de un intervalo $[0,1]$, con posiciones a y $(1 - b)$, respectivamente, donde $a, b \in [0,1]$, así como se lo muestra en la figura 1:

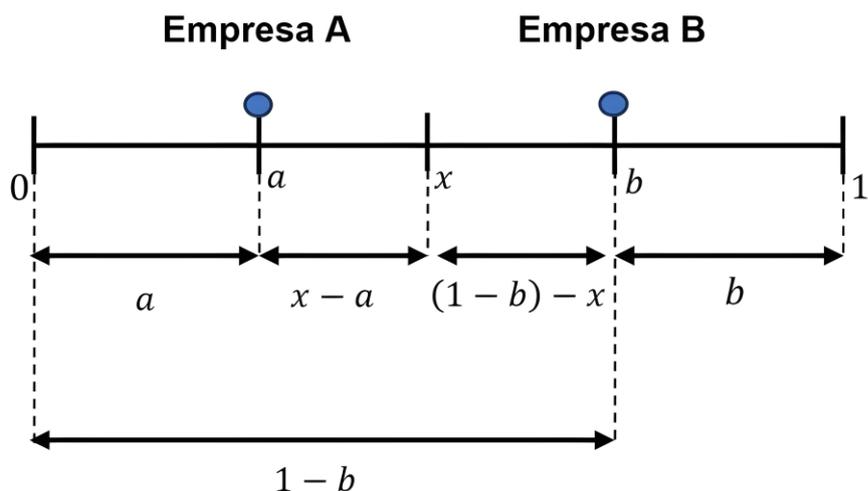


Figura 1. Posición de las empresas en la ciudad lineal.

Nota: En esta figura se muestra el esquema general de la ciudad lineal del modelo original de Hotelling donde a es la posición de la empresa A medida desde el origen, b es la posición de la empresa B, la cual se encuentra medida desde el extremo derecho de la ciudad, y x es la posición de un consumidor en la ciudad lineal.

Sean U_A, U_B las funciones de utilidad del consumidor con respecto al producto de cada empresa:

$$U_A = S - P_A - t(x - a)^2 \quad U_B = S - P_B - t((1 - b) - x)^2 \quad (1.1)$$

donde:

- S es la cantidad monetaria que está dispuesto a pagar el consumidor por el producto.
- P_A, P_B son los precios del producto de la empresa A, B respectivamente.
- t es el costo de transporte.
- x es la posición del consumidor en la ciudad lineal.
- a es la distancia entre el origen y la empresa A.
- $1 - b$ es la distancia entre el origen y la empresa B.

Sea \bar{x} la posición en la cual el consumidor es indiferente entre demandar los bienes de la empresa A o de la empresa B. Para hallar este punto de indiferencia se debe igualar las funciones de utilidad del consumidor (1.1), es decir:

$$U_A = U_B$$

lo cual implica:

$$\bar{x} = \frac{P_B - P_A}{2t(1 - a - b)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \quad (1.2)$$

Ahora bien, como $x \rightarrow U[0,1]$ entonces las cantidades de demanda de cada empresa se determinan utilizando la función de distribución acumulada (CDF). Formalmente:

$$q_A(P_A, P_B, a, b) = \int_0^{\bar{x}} 1 dz = \frac{P_B - P_A}{2t(1-a-b)} + \frac{(1-b+a)}{2}$$

$$q_B(P_A, P_B, a, b) = \int_{\bar{x}}^1 1 dz = \frac{P_A - P_B}{2t(1-a-b)} + \frac{(1+b-a)}{2}$$

Con ello, las funciones de beneficio de cada empresa son:

$$\Pi_A(P_A, P_B, a, b) = (P_A - c) q_A(P_A, P_B, a, b)$$

$$\Pi_A(P_A, P_B, a, b) = (P_A - c) \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right) \quad (1.3)$$

$$\Pi_B(P_A, P_B, a, b) = (P_B - c) q_B(P_A, P_B, a, b)$$

$$\Pi_B(P_A, P_B, a, b) = (P_B - c) \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1+b-a)}{2} \right) \quad (1.4)$$

Desarrollo

Para resolver este juego, se emplea la técnica generalizada de inducción hacia atrás para hallar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos y así eliminar aquellas amenazas no creíbles. Con base en esta técnica empezamos por la segunda etapa. En esta etapa, las empresas maximizan su beneficio Π_A, Π_B para determinar sus precios P_A^*, P_B^* de manera simultánea, dadas sus posiciones a y $1-b$. Formalmente:

$$P_A^*(a, b) = \arg \text{Max}_{P_A} \Pi_A(P_A, P_B^{MR}(P_A, a, b), a, b)$$

$$P_B^*(a, b) = \arg \text{Max}_{P_B} \Pi_B(P_A^{MR}(P_B, a, b), P_B, a, b)$$

Para resolver estos problemas, se utilizan las funciones de beneficio establecidas en (1.3) y (1.4). De esta manera, la condición de primer orden para la empresa A con respecto a su precio, de acuerdo con la ecuación (1.3), es:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial P_A} = 0$$

$$P_A - \frac{t}{2}((1-b)^2 - a^2) - \frac{C}{2} - \frac{P_B}{2} = 0$$

Con lo cual, la función de mejor respuesta de la empresa A con respecto a su precio, (P_A^{MR}) es:

$$P_A^{MR}(P_B, a, b) = \frac{t}{2}((1-b)^2 - a^2) + \frac{C}{2} + \frac{P_B}{2} \quad (1.5)$$

Asimismo, la condición de primer orden para la empresa B con respecto a su precio, de acuerdo con la ecuación (1.4), es:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial P_B} = 0$$

$$P_B - \frac{t}{2}((1-a)^2 - b^2) - \frac{C}{2} - \frac{P_A}{2} = 0$$

Por lo que la función de mejor respuesta para la empresa B con respecto a su precio, (P_B^{MR}) es:

$$P_B^{MR}(P_A, a, b) = \frac{t}{2}((1-a)^2 - b^2) + \frac{C}{2} + \frac{P_A}{2} \quad (1.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que está conformado por (1.5) y (1.6) se obtiene el Equilibrio de Nash para la segunda etapa, compuesto por los siguientes precios de equilibrio:

$$P_A^*(a, b) = t(1-b-a) \left(1 + \frac{a-b}{3}\right) + c \quad (1.7)$$

$$P_B^*(a, b) = t(1-b-a) \left(1 + \frac{b-a}{3}\right) + c \quad (1.8)$$

Una vez obtenido los precios de equilibrio para cada una de las empresas que maximizan sus beneficios, finaliza la segunda etapa y se procede con la primera etapa. En esta etapa, las empresas maximizan su beneficio Π_A, Π_B para determinar sus posiciones a^* y $1-b^*$ de manera simultánea, dados los precios $P_A^*(a, b)$ y $P_B^*(a, b)$, respectivamente, los cuales fueron obtenidos en la segunda etapa. Formalmente:

$$a^* = \arg \max_a \Pi_A(P_A^*(a, b^{MR}(a)), P_B^*(a, b^{MR}(a)), a, b^{MR}(a))$$

$$b^* = \arg \max_b \Pi_B(P_A^*(a^{MR}(b), b), P_B^*(a^{MR}(b), b), a^{MR}(b), b)$$

Para este fin, se utilizan las funciones de beneficio definidas en (1.3) y (1.4). De esta forma, el beneficio marginal de la empresa A con respecto a su posición, de acuerdo con la ecuación (1.3), es:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial P_A} = -\frac{t}{18}(3+a-b)(1+3a+b) \quad (1.9)$$

Por otro lado, el beneficio marginal de la empresa B con respecto a su posición, de acuerdo con la ecuación (1.4), es:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} = -\frac{t}{18}(3+b-a)(1+a+3b) \quad (1.10)$$

Analizando los beneficios marginales (1.9) y (1.10), se concluye que estos son negativos, dado que:

$$0 \leq a, b \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 + a - b > 0 \\ 1 + 3a + b > 0 \\ 1 + a + 3b > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \Pi_A}{\partial P_A} < 0, \frac{\partial \Pi_B}{\partial b} < 0$$

Con ello, la posición de la empresa A que maximiza su beneficio, dado su beneficio marginal negativo, es $a^* = 0$; y la posición de la empresa B que maximiza su beneficio, dado su beneficio marginal negativo, es $b^* = 0$. Dicho de otra forma, la mejor respuesta de cada empresa para la primera etapa es optar por ubicarse en cada extremo de la ciudad lineal. Si reemplazamos este resultado en las funciones de mejor respuesta de las empresas con respecto a sus precios, obtenemos que el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos es:

$$ENPS\{(P_A^*(a^*, b), P_B^*(a^*, b^*), a^*, b^*)\} = \{(t + c, t + c, 0, 0)\}$$

Con base en los resultados de este equilibrio, se concluye que los beneficios de las empresas A y B son:

$$\Pi_A(P_A^*(a^*, b^*), P_B^*(a^*, b^*), a^*, b^*) = \Pi_B(P_A^*(a^*, b), P_B^*(a^*, b^*), a^*, b^*) = \frac{t}{2}$$

Una vez desarrollado el modelo base a partir del Equilibrio de Nash perfecto en Subjuegos, a continuación, se presenta una revisión de la literatura relacionada con el modelo dinámico de Hotelling con posiciones endógenas. Esta revisión está conformada por las diversas extensiones del modelo que han sido presentadas a lo largo de los años y por la teoría de juegos para modelos dinámicos que están relacionados a la economía industrial, haciendo énfasis en la competencia espacial.

Revisión de literatura

El campo de la economía industrial nos ofrece un marco teórico sólido, con relación a la estructura del mercado, la conducta de las empresas y su desempeño económico dentro de la competencia. Este marco tiene como objetivo comprender, analizar e identificar como se estructuran los diferentes mercados, la conducta de cada empresa con relación a sus decisiones y como estas afectan el desempeño del mercado. A partir de esto, el paradigma de la estructura con relación a la conducta de las empresas y el desempeño de un mercado ha sido la piedra angular del análisis industrial. Bain (1951) en su trabajo menciona que la estructura del mercado es determinada directamente por la conducta de las empresas, lo que a su vez afecta el desempeño del mercado, enunciando así la existencia de una interdependencia entre estos elementos.

Por lo tanto, si centramos el presente análisis en la conducta de las empresas, se puede mencionar que la conducta cumple un papel fundamental en la competencia de las empresas. Esta característica ha sido estudiada ampliamente en la teoría microeconómica y posteriormente profundizada con el análisis de teoría de juegos. Por ejemplo, modelos como los de Cournot (1838) y Bertrand (1883), fueron la base para el análisis de la competencia vía precios y cantidades, respectivamente. Gracias al desarrollo de estos modelos surgieron muchas interrogantes y teorías con respecto al comportamiento racional de las empresas dentro de la económica. Con el pasar del tiempo, estos modelos se extendieron con el objetivo de incluir nuevos factores económicos que determinen el comportamiento de las empresas y la estructura del mercado.

Varias de las extensiones de estos modelos fueron denominados modelos de competencia espacial, porque estos incluyeron el factor de la ubicación geográfica o espacial de las empresas dentro del mercado, de tal manera que las firmas no solo compitan vía precios o cantidades sino también compitan por tener la ubicación que maximice sus beneficios. Según Lancaster (1979), la relevancia de los modelos de competencia espacial dentro de la teoría económica e industrial se debe en gran medida a la diferenciación espacial del producto, de tal manera que se logre tener una combinación de atributos que se ajusten a las preferencias de algún segmento de consumidores dentro del mercado. Es así como el factor de ubicación influye en la conducta tanto de las empresas como la de los consumidores y en la estructura de mercado.

De acuerdo con Ansari et al. (1994), los problemas relacionados con competencia espacial entre empresas comenzaron a ser estudiados con mayor profundidad desde el trabajo pionero de la ciudad lineal de Hotelling (1929). Este trabajo tuvo como resultado principal del modelo, el principio de diferenciación mínima entre empresas, el cual indica que las empresas se ubican estratégicamente una cerca de la otra en el centro de la ciudad lineal para maximizar sus beneficios, teniendo en cuenta que los bienes son homogéneos y los costos de transporte son lineales con respecto a las distancias.

Sin embargo, años después, d'Aspremont et al. (1979) refutaron el principio de diferenciación mínima, demostrando que, cuando se tienen costos de transporte lineales en el modelo, no siempre existe un Equilibrio de Nash con respecto a los precios. A partir de este resultado, d'Aspremont et al. (1979) realizaron una extensión del modelo original con costos de transporte cuadráticos con respecto a la distancia, en el cual, a diferencia del modelo original, si existe el Equilibrio de Nash en precios para las diversas ubicaciones que podrían tomar cada una de las empresas. El principal resultado de este modelo es el

principio de máxima diferenciación entre las empresas, el cual establece que las empresas deben ubicarse en los extremos de la ciudad lineal para maximizar sus ganancias.

En el modelo de Hotelling y en varias de sus extensiones, inicialmente se asume por simplicidad una función de distribución uniforme para la distribución de los consumidores dentro de la ciudad lineal. Pero, con el paso del tiempo, varios autores han realizado estudios con extensiones particulares del modelo, relajando este y otros supuestos para alinear mejor el modelo con la realidad. Por ejemplo, en el estudio de Neven (1986) se define una función de distribución cóncava continua, dos veces diferenciable, en la cual los consumidores se ubican alrededor del centro de la ciudad, teniendo como resultado que, mientras más se concentren los consumidores en el centro de la ciudad, las empresas tenderán a alejarse de los extremos de la ciudad. Por otra parte, autores como Tabuchi & Thisse (1995) demuestran que los Equilibrios de Nash para las posiciones de las empresas no son simétricos cuando la función de densidad es triangular simétrica. Similarmente, Zhou & Che (2021) desarrollaron un modelo con una función de densidad triangular no simétrica para un caso aplicado a la agricultura. Por otro lado, Montes-Rojas (2015) plantea un modelo de Hotelling con libre entrada de n -empresas y una distribución no uniforme generalizada que cumple ciertas características en torno a la centralidad y dispersión de los consumidores¹. Su principal resultado muestra que las empresas se posicionan de manera desigual, de tal manera que exista una mayor cantidad de empresas que fijan precios bajos en zonas con mayor densidad de consumidores.

Otra de las modificaciones al modelo de Hotelling, es aquella que aborda el equilibrio eficiente en el sentido de Pareto. Por ejemplo, el estudio de Shuai (2017) determina los Equilibrios de Nash en modelo de duopolio mixto, en el que la distribución de los consumidores es una distribución no uniforme generalizada que cumple con la ρ -concavidad de Caplin & Nalebuff (1991). Con base en estos supuestos, Shuai encuentra dos condiciones particulares que garantizan un equilibrio óptimo social para las empresas con respecto a sus posiciones dentro del mercado.

Finalmente, el estudio de Ansari et al. (1994) se asume una generalización de la distribución Beta como función de distribución de los consumidores en una ciudad bidimensional con casos de dos, tres y cuatro empresas. En ese estudio, se concluye para el caso de dos empresas que, una de las empresas tiende posicionarse más cerca de la

¹ Para ser precisos Montes-Rojas (2015), asumen una función de densidad de probabilidad que tiene un máximo en $x = 0$, es simétrica con respecto al eje vertical, es no negativa y tiene derivadas positivas para $x < 0$, negativas para $x > 0$

concentración de los consumidores cuando la distribución de los consumidores no es simétrica. Este estudio es el que más se relaciona con la presente investigación.

En conclusión, en el campo de la competencia espacial se pueden observar distintas extensiones del modelo de Hotelling, sobresaliendo más aquellos estudios en los cuales se asumen distribuciones de probabilidad no uniforme. En el presente estudio, se utiliza la función de Kumaraswamy (1980) para la distribución de los consumidores, la cual es una aproximación de la función Beta, con el objetivo de determinar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para el modelo de Hotelling con posiciones endógenas.

Existen varias razones por las cuales nos puede interesar usar la función Kumaraswamy en el presente trabajo, entre ellas se encuentra la determinación analítica del Equilibrio de Nash y sus propiedades, dado que la integral de esta función tiene primitiva, a diferencia de la función Beta. Además, con los parámetros de la función Kumaraswamy se puede generar una amplia variedad de distribuciones, lo cual permite considerar diferentes escenarios para el modelo.

El presente estudio se divide de la siguiente manera. En el capítulo 2, se muestra los fundamentos de los juegos dinámicos, se describe la función de probabilidad de Kumaraswamy, se analizan algunas de sus propiedades, y se detalla el desarrollo matemático (analítico) y numérico (Pseudo código) de la extensión del modelo tanto para casos lineales como no lineales de la función de Kumaraswamy. En el Capítulo 3, se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones de la extensión del modelo para precios, cantidades y ubicaciones de dos empresas, considerando funciones de Kumaraswamy estrictamente crecientes y decrecientes. Asimismo, en ese Capítulo se detallan las conclusiones y recomendaciones obtenidas del estudio.

2 METODOLOGÍA

2.1 Fundamentos: Juegos dinámicos

Introducción

A lo largo del tiempo, la teoría de juegos se ha caracterizado por ser un área de las matemáticas que estudia el comportamiento estratégico de los agentes racionales en situaciones en las que estos agentes interactúan entre sí de manera competitiva, con el objetivo de hallar ya sea un beneficio individual (juegos no cooperativos) o en algunos casos un beneficio colectivo (juegos cooperativos).

Gracias a Von Neumann & Morgenstern (1944), se estableció una base sólida de la teoría de juegos con su trabajo pionero denominado: “Teoría de Juegos y comportamiento económico”, el cual estuvo basado en los trabajos previos de varios economistas y matemáticos como Cournot (1838), Zermelo (1912), Borel (1953), Schneider & Edgeworth (1935), entre otros autores. 50 años después, la teoría de juegos tuvo una revolución debido al trabajo de los economistas Harsanyi, Selten y el matemático Nash, en el análisis pionero de la solución de juegos no cooperativos a través de los denominados “equilibrios”, por el cual fueron merecedores del premio nobel en ciencias Económicas en el año de 1994. En este sentido, la teoría de juegos comenzó a ser reconocida como una herramienta fundamental del análisis económico moderno. Hasta la actualidad, la teoría de juegos sigue siendo desarrollada de manera teórica y aplicada en diversos campos de estudio.

En primera instancia podemos pensar que la teoría de juegos está relacionada con la economía, dado que la economía está alineada con el estudio del comportamiento de los agentes económicos. Sin embargo, la teoría de juegos también puede ser usada en otras ciencias como: la biología, la sociología, las ciencias políticas, entre otras.

Según Pérez & Navarro (2013), la teoría de juegos estudia situaciones específicas en las que existe conflicto y cooperación entre los agentes (personas, empresas, equipos, etc.), los cuales están sometidos a ciertas reglas. Estas situaciones son denominadas juegos, en los que interactúan individuos racionales, con el objetivo de conseguir el mejor resultado posible a partir de la maximización de su utilidad, teniendo en cuenta que los resultados obtenidos dependen de sus acciones, de las acciones de los otros jugadores y del conjunto de reglas del juego.

En los siguientes apartados de este capítulo se realizará una breve revisión de teoremas y definiciones fundamentales de la teoría de juegos, obtenidas de los textos de Kreps (1990), Fudenberg & Tirole (1991), Watson (2002), Pérez et al. (2003), Osborne (2004), Rasmusen

(2006), Dixit et al. (2009), Sánchez-Cuenca (2009), Binmore, (2011), Myerson (1991), Pérez & Navarro (2013) y Tadelis (2013). Los trabajos de estos autores nos brindan perspectivas importantes, tanto teóricas como aplicadas sobre la teoría de juegos, en los diversos contextos económicos y sociales. Además, en estos textos podemos encontrar información con respecto a la toma de decisiones estratégicas, la negociación de los agentes y el diseño de mecanismos de interacción estratégica dentro de un juego. Toda esta información será de gran utilidad para lograr una mejor comprensión del presente trabajo.

Tipos de Juego

La distinción básica de los tipos de juego dentro de la teoría de juegos surge de la existencia de la “cooperación” entre los jugadores. A partir de esto, existen juegos denominados no cooperativos, en los cuales los jugadores persiguen su objetivo de manera individual y egoísta para maximizar su beneficio, sin ningún tipo de interés colectivo.

Por otro lado, si dentro de un juego más de un jugador persigue un objetivo común, el cual logre maximizar el beneficio de manera colectiva se tratará de un juego cooperativo. En este tipo de juego, los jugadores llegan a un acuerdo sobre las decisiones que van a tomar cada uno de ellos dentro del juego. Se debe tener en cuenta que dentro de los juegos no cooperativos existen: los juegos dinámicos y los juegos estáticos. A continuación, explicaremos cada uno de ellos.

Dentro de los juegos dinámicos, los jugadores toman sus decisiones de manera secuencial, lo que posiblemente provocaría que cada jugador sepa la decisión que tomó su rival, generando así, una posible ventaja frente a su rival dentro del juego. En cambio, en los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones de manera simultánea e independiente, de tal manera que cada jugador toma una decisión sin saber qué decisión tomarán sus rivales en ese momento.

Además, según Tadelis (2013), estos tipos de juegos no cooperativos, tanto estáticos como dinámicos, pueden ser juegos de información completa o incompleta. En los juegos de información completa todos los jugadores conocen:

- Su conjunto de estrategias y el de los demás jugadores.
- Las preferencias de cada uno de los jugadores.
- Todos los posibles resultados que conllevan estas estrategias.
- Los pagos que conllevan estos posibles resultados.
- Como cada una de las decisiones pueden afectar sus resultados.

Es decir, dentro de este tipo de juegos se asume el supuesto de elección racional y el criterio de conocimiento común.

Por otro lado, en los juegos de información incompleta, al menos un jugador desconoce algún tipo de información dentro del juego, ya sean las estrategias, resultados o las preferencias; lo que provocaría que no exista conocimiento común y este jugador tenga cierta desventaja en comparación a los demás jugadores.

Elementos de un Juego

Asumiendo el supuesto de que los jugadores son racionales, inteligentes y que estos eligen sus estrategias simultáneamente, entonces definimos de manera general un juego de la siguiente forma:

Definición. Juego en forma normal

Un juego G se representa de manera normal como una "n-tupla" de tres componentes, tal que:

$$G = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$$

donde:

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores.
- S_i es el perfil de estrategias del jugador i con $i \in N$.
- $\{S_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de todos los conjuntos de perfiles de estrategias de los jugadores.
- u_i son las funciones de pago de cada jugador i .
- $\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ es el conjunto de las todas las funciones de pago o utilidad de los perfiles de estrategias de todos los jugadores.

■

Una vez definido un juego G , podemos concluir que básicamente los elementos de un juego son: el conjunto de jugadores, el conjunto de todos los conjuntos de perfiles de estrategias de los jugadores y el conjunto de las todas las funciones de utilidad de los perfiles de estrategias de todos los jugadores.

Elementos de un Juego Dinámico con Información Completa

El tipo de juego G que está representado en el apartado anterior, se considera un juego de forma normal (representación normal), el cual se caracteriza por la simultaneidad en las estrategias que toman los jugadores. Sin embargo, si se asume que todo juego es

simultaneo, se genera una limitación importante, dado que varios juegos pueden desarrollarse de manera no simultánea, con base en una secuencia de turnos, tal que los jugadores van tomando sus decisiones al ritmo que avanza el juego.

Para este tipo de situaciones en el que el juego no es simultaneo, se procede a representarlo de forma extensiva. Este juego pueda modelizarse con respecto a la secuencia de jugadas y a la información que disponen los jugadores en cada momento y en cada jugada (Sánchez-Cuenca, 2009). Aquí, cada jugador puede tomar su decisión con base en la selección que ya jugó su rival, a diferencia del juego simultaneo.

Con base en el texto de Pérez & Navarro (2013), la representación de un juego dinámico finito de forma extensiva finita se puede establecer mediante un “árbol de decisión”. Estos juegos pueden tener información completa, la cual puede ser perfecta o imperfecta. Los juegos dinámicos con información completa pero imperfecta tienen la característica de tener uno o varios conjuntos de información dentro del juego, así como se lo muestra más adelante en la figura 2.

Definición. Árbol de Decisión

Un árbol de decisión $T = (X, E)$ es un grafo dirigido, compuesto por un conjunto X de nodos y un conjunto $E \subset X \times X$ de aristas. El conjunto de aristas representa las acciones de los jugadores y está conformado por pares ordenados de nodos que cumplan con una relación de precedencia $>$, tal que: $x > x' \Leftrightarrow (x, x') \in E$. Esta relación cumple con los siguientes axiomas:

- Transitividad: $x > x', x' > x'' \Rightarrow x > x''$
- Asimetría: $x > x' \Rightarrow \sim (x' > x)$
- Incompletitud: no todos los nodos $x, z' \in X$ tienen una relación de precedencia definida entre ellos, tal que $(x, z') \notin E$ o $(z', x) \notin E$.

Por otro lado, el conjunto de nodos X está compuesto por:

- Nodo raíz (nodo inicial). $x_0 \in X: x_0 > x, \forall x \in X$
- Nodos predecesores. $Q = \{x \in X: \exists x' \in X, x > x'\}$ con $Q \subset X$
- Nodos terminales. $Z = \{x \in X: \nexists x' \in X, x > x'\}$ con $Z \subset X$

■

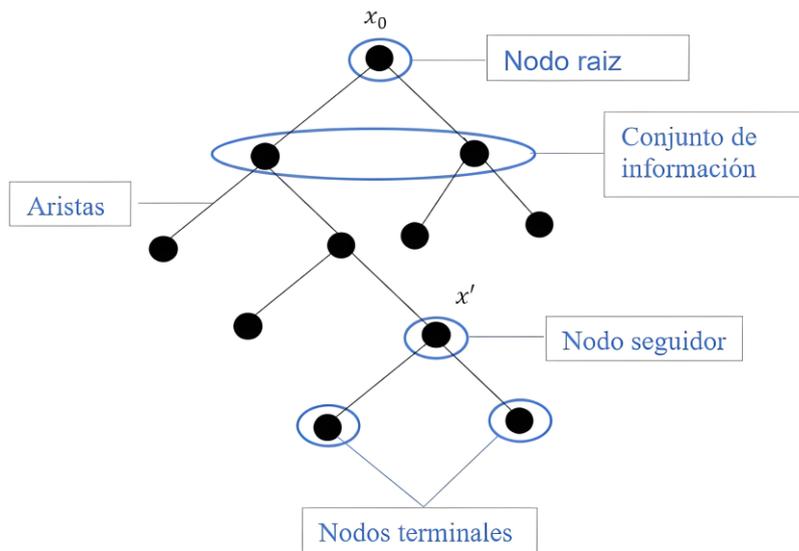


Figura 2. Representación extensiva de un juego

Nota: Esta figura muestra la estructura de un juego en su forma extensiva. Los nodos representan a los jugadores, mientras que las aristas representan las acciones que tiene cada jugador en cada fase del juego. Por otro lado, las elipses representan nodos de información (conjuntos de información) en los que los jugadores poseen asimetría de información.

Sobre la base de este árbol de decisión, se puede definir un juego dinámico de la siguiente manera.

Definición. Juego Dinámico

Sea $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores y $T = (X, E)$ el árbol de decisión, entonces un juego dinámico comprende los siguientes cinco elementos:

- 1) El orden de los movimientos $P = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, el cual representa una partición del conjunto de nodos X , tal que:

$$X_i \subset X \setminus Z, \quad \forall i \in N$$

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in N, i \neq j$$

donde X_i es el conjunto de nodos en los que toma la decisión el jugador $i \in N$.

- 2) El conjunto de acciones $A_i(x)$, el cual representa las decisiones de los jugadores en cada momento del juego, con $x \in X_i, i \in N$.
- 3) El conjunto de información $H_i = \{h_i^1, h_i^2, \dots, h_i^{k_i}\}$, el cual representa una partición del conjunto $X_i \in P, i \in N$, tal que:

$$h_i^j \subset X_i, \quad \forall 1 \leq j \leq k_i$$

$$h_i^j \cap h_i^{j'} = \emptyset, \quad \forall 1 \leq j, j' \leq k_i, j \neq j'$$

donde:

- h_i^j es la información que tiene el jugador i en su movimiento j .
- $k_i = |X_i|$ son las veces que el jugador i tiene que elegir dentro del juego.

Cada elemento h_i cumple con las siguientes propiedades:

- Si $x \in h_i, |h_i| = 1$, entonces el jugador i que se encuentra en el nodo x , reconoce que está en x .
- Si $x, x' \in h_i, x \neq x'$, entonces el jugador i que se encuentra en el nodo x no tiene la certeza de si se encuentra en x o x' .
- Si $x, x' \in h_i, x \neq x' \Rightarrow A_i(x) = A_i(x')$.

4) La función de estrategia s_i , la cual se define como:

$$s_i: H_i \rightarrow A_i$$

$$h_i \rightarrow s_i(h_i)$$

donde $A_i = \bigcup_{h_i \in H_i} \bigcup_{x \in h_i} A_i(x)$. A partir de esta función, se define al conjunto de estrategias como:

$$S_i = \{s_i(h_i): h_i \in H_i\}$$

5) La función de utilidad u_i , la cual se define como:

$$u_i: Z \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \rightarrow u_i(z)$$

■

Esta formalización permite visualizar todos los desarrollos posibles de un juego dinámico mediante un árbol de decisión que contemple la secuencia de jugadas, las estrategias posibles de los jugadores, la información que disponen en cada movimiento, y los pagos que reciben cada uno de los jugadores al finalizar el juego.

Conceptos de Equilibrio

Tadelis (2013) define el término “equilibrio” como una solución para un juego, la cual contiene el conjunto de estrategias con mayor probabilidad de ser razonables y que cumplen con los supuestos racionalidad, inteligencia y conocimiento común. De manera similar, el término “equilibrio” puede entenderse como el conjunto de estrategias que dominan a otras en términos de su utilidad o pago (Gibbons, 1992).

Con base en todo esto, a continuación, definiremos los conceptos necesarios para entender con mayor profundidad la solución de un juego a partir del Equilibrio de Nash. Para ello, primero se introducirá un concepto fundamental de teoría de juegos: las estrategias de mejor respuesta.

Definición 1: Estrategias de Mejor Respuesta

Sea G un juego. La estrategia $s_i^* \in S_i$ constituye la mejor respuesta del jugador i para las estrategias de sus oponentes $s_{-i} \in S_{-i}$ sí y solo si:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i^* \in S_i$$

■

En otras palabras, la mejor respuesta del jugador i , es el conjunto de estrategias que dominan en sentido débil y/o estricto (ver Anexo I). Intuitivamente, las estrategias de mejor respuesta son aquellas estrategias que siempre prevalecen sobre otras por su mayor pago, y debido a la racionalidad que tienen los jugadores, estas serían las estrategias de elección óptima.

Definición 2: Función de Mejor Respuesta (MR)

Sea G un juego. La función de Mejor Respuesta MR_i del jugador i se define como el conjunto de perfiles de estrategias de mejor respuesta s_i^* , dados los conjuntos de perfiles de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ de los demás jugadores. Formalmente:

$$MR_i(S_{-i}) = \{s_i^* \in S_i: u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i, s_i^* \neq s_i\}$$

■

Por lo tanto, la función $MR_i(S_{-i})$ es el conjunto que contiene todas las estrategias $s_i^* \in S_i$ que son mejor respuesta para el jugador i , dado las estrategias que tomen los demás jugadores dentro del juego.

Definición 3: Equilibrio de Nash.

Un perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \in S$ es un Equilibrio de Nash si y solo si la estrategia s_i^* es la mejor respuesta para los perfiles s_{-i}^* . Formalmente:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i, \forall i \in N$$

O de forma similar

$$s_i^* = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall i \in N$$

■

Refinamiento por Inducción hacia atrás

Según Sánchez-Cuenca (2009) en los juegos de información perfecta con representación extensiva debe existir en estrategias puras un Equilibrio de Nash que cumpla con el principio de racionalidad secuencial, siempre y cuando las funciones de pago entre los jugadores sean diferentes, esto se demuestra con el teorema de Zermelo-Kuhn.

Es por ello que, para calcular este equilibrio se debe aplicar el refinamiento por inducción hacia atrás. Este procedimiento comienza por los nodos terminales y retrocede sucesivamente por los nodos intermedios, descartando aquellas acciones de menor pago, hasta llegar al origen del juego. Se debe tener en cuenta que, si al comenzar por un nodo terminal y después de haber realizado el proceso no se llega hasta la primera jugada, entonces hay que repetir el proceso por otro nodo terminal, hasta llegar a la primera jugada.

Este procedimiento nos permite configurar una ruta de equilibrio para el juego, descartando rutas que no sean creíbles (factibles) por su menor pago para hallar el equilibrio. Además de contar con la ruta de equilibrio, este procedimiento toma en cuenta todas las mejores respuestas de cada jugador en cada posible jugada de su rival.

Teorema 1:

En un juego extensivo con información perfecta, todo equilibrio determinado por inducción hacia atrás es un Equilibrio de Nash, pero no todo Equilibrio de Nash se puede determinar por inducción hacia atrás.

■

Equilibrio Perfecto en Subjuegos

La limitación del refinamiento por inducción hacia atrás es que sólo funciona para juegos con información perfecta. Por lo tanto, para poder resolver este problema, Harsanyi & Selten (1988) propusieron el Equilibrio Perfecto en Subjuegos, el cual simplemente es una generalización del algoritmo de inducción hacia atrás. Para entender este proceso, se debe definir en primer lugar un Subjuego Propio.

Definición 4: Subjuego Propio.

Sea G un juego con representación extensiva. Un Subjuego Propio R se define como un árbol de decisión más pequeño conformado por un nodo inicial (nodo raíz) y varios nodos sucesores que cumplan con la relación de precedencia, tal que:

$$x \in R, x' \in h(x) \Rightarrow x' \in R$$

■

A partir de esta definición se puede definir el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

Definición 5: Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

Sea G un juego con representación extensiva. Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ un perfil de estrategias. σ^* es un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos si y solo si σ^* es un Equilibrio de Nash para todo Subjuego Propio R del juego G .²

■

Al ser este tipo de equilibrio un Equilibrio de Nash para todos los Subjuegos Propios del juego G se garantiza que las estrategias que tomarán los jugadores a lo largo del juego serán óptimas en cada etapa del juego, proporcionando así, una solución más realista para los diferentes tipos de juegos dinámicos que necesitemos resolver. Además, este equilibrio es igual a aquel que es determinado por inducción hacia atrás en juegos de información perfecta, tal como se lo enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2:

En juegos con información perfecta, el Equilibrio de Nash refinado por inducción hacia atrás equivale al Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.³

■

Debido a que el modelo de Hotelling es un juego de información perfecta con dos etapas, entonces este tipo de equilibrio es el que será utilizado en el presente trabajo como concepto de solución para el modelo base y su respectiva extensión. Una vez examinadas las nociones fundamentales para la comprensión del presente documento, a continuación, se procederá con la presentación de los insumos analíticos y la extensión del modelo teórico en el que se fundamenta la presente investigación.

2.2 Insumos analíticos: Función de densidad de probabilidad de Kumaraswamy (KW)

En los últimos años, la distribución de Kumaraswamy ha sido reconocida como una variante de la distribución Beta, debido a que estas distribuciones son notablemente similares en su forma. Sin embargo, la distribución de Kumaraswamy se distingue por su practicidad en

² "Un Equilibrio de Nash es Perfecto en Subjuegos si las estrategias de los jugadores constituyen un Equilibrio de Nash en cada Subjuego" (Selten, 1965)

³ "Pueden existir múltiples Equilibrios de Nash en un juego dinámico con información completa, pero el único Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos es el equilibrio asociado con el resultado obtenido por inducción hacia atrás" (Gibbons, 2022)

diversas aplicaciones. Esta distinción radica en su función de distribución acumulada (CDF) y su función de densidad de probabilidad (PDF), las cuales se pueden expresar de manera cerrada, (permitiendo que cada función pueda ser expresada de manera algebraica y explícita) a diferencia de la distribución Beta, la cual no siempre cumple esta característica (Michalowicz et al., 2013). Esto convierte a la distribución de Kumaraswamy en una opción más manejable en comparación a la distribución Beta, especialmente en actividades intensivas de computación y en la estimación de modelos con un enfoque de simulación.

La función de probabilidad de Kumaraswamy (KW) de parámetros de forma (α, β) fue introducida por Kumaraswamy (1980). Esta función es utilizada especialmente en estudios de simulación, en los cuales las funciones de densidad de probabilidad, distribución acumulada y cuantiles pueden expresarse de manera explícita, sin necesidad de la ayuda de métodos numéricos o aproximaciones.

Kumaraswamy (1980) y Ponnambalam et al.(2001) observaron que, dependiendo de la elección de los parámetros de forma, la distribución de KW puede capturar la forma de algunas distribuciones conocidas como: la distribución uniforme, la distribución triangular o casi cualquier tipo de distribución unimodal. En los últimos años se han desarrollado investigaciones teóricas sobre esta distribución, entre estas investigaciones se encuentran los estudios de Garg (2008), Jones (2009a), Mitnik (2013a) y Nadarajah (2008)

Definición. Función de densidad de probabilidad KW

La función de densidad de probabilidad de KW de parámetros de forma (α, β) se define como:

$$f(z; \alpha, \beta) = \alpha \beta z^{\alpha-1} (1 - z^\alpha)^{\beta-1}, \quad z \in (0, 1) \quad (2.1)$$

donde:

- α es un parámetro real positivo ($\alpha > 0$)
- β es un parámetro real positivo ($\beta > 0$)
- z es una variable aleatoria continua tal que $0 < z < 1$

■

A continuación, en la figura 3 se muestran 9 posibles formas que puede tomar la función de probabilidad de KW, dependiendo del valor numérico que tomen los parámetros de forma α, β ⁴:

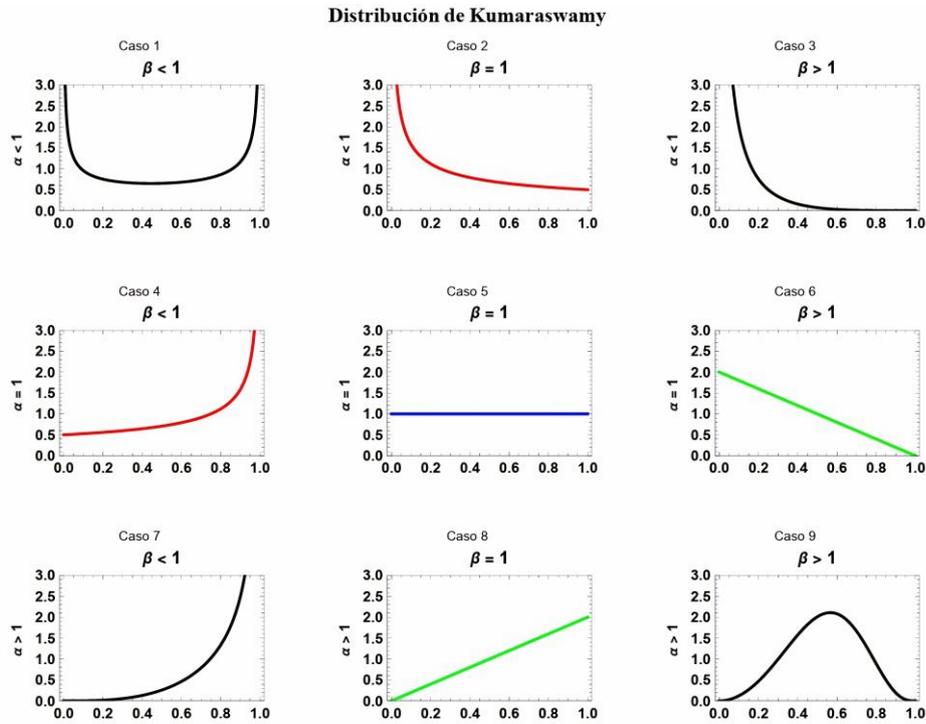


Figura 3. Distribución de Kumaraswamy – Elaboración Propia

Nota: Esta figura muestra 9 diferentes casos de la función de Kumaraswamy. Por filas, el parámetro de forma α toma valores en tres situaciones: $\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$. Por Columnas, el parámetro de forma β toma valores en tres situaciones: $\beta < 1, \beta = 1, \beta > 1$.

A continuación, se muestran las propiedades que cumple la función de densidad de probabilidad de KW para cada caso, se debe tener en cuenta que cada uno de los gráficos presentados en la figura 3 fueron realizados con valores de α, β específicos, entonces si se cambian estos valores, los gráficos pueden variar para los diferentes casos. Por lo tanto, para no obtener una pérdida de generalidad en nuestro análisis, analizaremos el comportamiento de cada uno de los casos de la siguiente manera:

⁴ Nota: los casos 2 y 4 de la figura 3 se exhibe una relación de simetría, denominada casos “espejo”, la cual se manifiesta debido a la simetría que existe entre los casos con respecto al eje de las ordenadas. De manera análoga, se observa una simetría entre los casos 6 y 8.

- **Caso 1: $\alpha < 1, \beta < 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, \beta) = +\infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, \beta) = +\infty$$

$$f''(z; \alpha, \beta) > 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

Para este caso específico, Mitnik (2013) menciona que la distribución de KW tiende a ser una distribución con una “anti-modal”⁵, refiriéndose de este modo a que la distribución tiene un punto en el que la densidad de probabilidad es mínima en lugar de ser máxima.

- **Caso 2: $\alpha < 1, \beta = 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, 1) = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, 1) = \alpha$$

$$f'(z; \alpha, 1) < 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función no lineal monótona decreciente.

- **Caso 3: $\alpha < 1, \beta > 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, \beta) = +\infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, \beta) = 0$$

$$f'(z; \alpha, \beta) < 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función no lineal monótona decreciente.

- **Caso 4: $\alpha = 1, \beta < 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; 1, \beta) = \beta$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; 1, \beta) = +\infty$$

$$f'(z; 1, \beta) > 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función no lineal monótona creciente.

- **Caso 5: $\alpha = 1, \beta = 1$**

⁵ Anti-modal: es lo contrario a unimodal, de modo que la distribución tiene un punto en el que la densidad de probabilidad es mínima.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; 1, 1) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; 1, 1) = 1$$

$$f'(z; 1, 1) = 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso la distribución KW equivale a la distribución uniforme en el intervalo (0,1).

- **Caso 6: $\alpha = 1, \beta > 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; 1, \beta) = \beta$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; 1, \beta) = 0$$

$$f'(z; 1, \beta) < 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función lineal monótona decreciente.

- **Caso 7: $\alpha > 1, \beta < 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, \beta) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, \beta) = +\infty$$

$$f'(z; \alpha, \beta) > 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función no lineal monótona creciente.

- **Caso 8: $\alpha > 1, \beta = 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, 1) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, 1) = \alpha$$

$$f'(z; \alpha, 1) > 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

En este caso, la distribución KW es una función lineal monótona creciente.

- **Caso 9: $\alpha > 1, \beta > 1$**

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z; \alpha, \beta) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z; \alpha, \beta) = 0$$

$$f''(z; \alpha, \beta) < 0 \quad \forall z \in (0,1)$$

Según Mitnik (2013) para este caso la distribución KW es unimodal, refiriéndose de este modo a que la distribución tiene un único punto, en el que la densidad de probabilidad es máxima.

En resumen, la forma funcional, monotonía y concavidad de la distribución KW depende plenamente de los valores que tomen los parámetros de forma α y β . Estas características analíticas guardan similitud con las propiedades básicas de la distribución Beta.

Sin embargo, una de las características que diferencia a estos dos tipos de distribución es la simetría. La distribución de KW no tiene casos que sean especialmente simétricos (sin contar el caso de la distribución uniforme); de hecho, muchos de los casos tienden a ser simétricos cuando los valores de los parámetros α y β tienden a no ser tan grandes. En cambio, la distribución Beta si tiene casos simétricos (Jones, 2009a). Por otro lado, si se analiza la curtosis de la distribución KW con base a Jones (2009b), se tiene que la curtosis aumenta cuando ambos parámetros α, β aumentan ; o cuando solo uno de los parámetros α o β disminuye.

Basado en estos hallazgos, a continuación, se empleará la función de probabilidad KW como función de distribución de los consumidores, en el contexto de la ciudad lineal del modelo de Hotelling. Para ello, plantearemos la extensión del modelo de manera particular para los casos ocho y seis mostrados en la figura 3.

2.3 Extensión: Modelo de Hotelling- Aplicación de la función de Kumaraswamy

En este apartado se desarrolla la extensión del modelo de Hotelling para dos empresas en una ciudad lineal, cuando los consumidores están distribuidos de acuerdo con la función de Kumaraswamy; asumiendo como supuesto que los costos de producción para las empresas son nulos ($c = 0$). A lo largo de este apartado, se definen otros supuestos esenciales para el desarrollo teórico de este modelo.

Con base en el modelo clásico de Hotelling, comenzaremos definiendo las funciones de demanda q_A, q_B para las empresas A y B, respectivamente, a partir de la función de densidad KW (2.1) y la posición de indiferencia (1.2).

$$\begin{aligned} q_A(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta) &= \int_0^{\bar{x}} f(z; \alpha, \beta) dz , \\ q_B(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta) &= \int_{\bar{x}}^1 f(z; \alpha, \beta) dz \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde:

- \bar{x} es la posición de indiferencia entre demandar los bienes de la empresa A o de la empresa B.
- $f(z; \alpha, \beta)$ es la función de densidad de KW.

Para poder determinar las cantidades de cada empresa, necesitamos determinar la función de distribución acumulada (CDF) de la función KW, a partir de la función de densidad (2.1):

$$F(z; \alpha, \beta) = \int f(z; \alpha, \beta) dz = 1 - (1 - z^\alpha)^\beta \quad (2.3)$$

Con relación en las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tienen las cantidades de las empresas A y B de la siguiente forma:

$$q_A(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta) = 1 - (1 - \bar{x}^\alpha)^\beta \quad (2.4)$$

$$q_B(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta) = (1 - \bar{x}^\alpha)^\beta \quad (2.5)$$

Si se reemplaza la posición de indiferencia \bar{x} de la ecuación (1.2) en la ecuación (2.4) y (2.5), se obtiene:

$$q_A(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta, t) = 1 - \left(1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - a - b)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \right)^\alpha \right)^\beta \quad (2.6)$$

$$q_B(P_A, P_B, a, b, \alpha, \beta, t) = \left(1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - a - b)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \right)^\alpha \right)^\beta \quad (2.7)$$

Ahora bien, al igual que en el marco teórico, la extensión del modelo de Hotelling de dos etapas se resolverá mediante la técnica generalizada de inducción hacia atrás, con el objetivo de hallar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos. Para ello, se analizará particularmente los siguientes dos casos.

Caso 8: Función de densidad lineal monótona creciente $\alpha = 2$, $\beta = 1$

Las cantidades de cada empresa con relación a las ecuaciones (2,6) y (2,7) dado que $\alpha = 2$, $\beta = 1$, son:

$$q_A(P_A, P_B, t) = \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - b - a)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \right)^2$$

$$q_B(P_A, P_B, t) = 1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - b - a)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \right)^2$$

Con ello, si reemplazamos las cantidades de cada empresa en las funciones de beneficio (1.3) y (1.4), dado que los costos de producción son nulos, se tiene:

$$\Pi_A(P_A, P_B, t) = P_A q_A(P_A, P_B)$$

$$\Pi_A(P_A, P_B, t) = P_A \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - b - a)} + \frac{(1 - b + a)}{2} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$\Pi_B(P_A, P_B, t) = P_B q_B(P_A, P_B)$$

$$\Pi_B(P_A, P_B, t) = P_B \left(1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right)^2 \right) \quad (2.9)$$

Con relación al refinamiento de equilibrio por inducción hacia atrás, comenzaremos resolviendo la segunda etapa del modelo, esto permite, determinar los precios que maximizan los beneficios (2.8) y (2.9) dadas las posiciones de las empresas.

Segunda etapa

Primero, determinaremos la condición de primer orden que maximiza el beneficio de la empresa A (2.8) con respecto a su precio:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial P_A} = 0$$

$$\left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right)^2 - \frac{P_A}{t(1-b-a)} \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right)^2 - \frac{P_A}{t(1-b-a)} \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right) = 0$$

Como se puede observar, el primer factor de la izquierda coincide con la posición de indiferencia de los consumidores (1.1). Por simplicidad, se supondrá que la posición de indiferencia no alcanza ninguno de los extremos de la ciudad lineal ($0 < \bar{x} < 1$). Con ello, se tiene:

$$\left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} \right) \neq 0$$

Por lo tanto, el único factor que puede ser nulo en la condición de primer orden es:

$$\left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} - \frac{P_A}{t(1-b-a)} \right) = 0$$

Así, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} = \frac{P_A}{t(1-b-a)} \quad (2.10)$$

con lo cual, la función de mejor respuesta de la empresa A es:

$$P_A^{MR}(P_B, a, b, t) = \frac{P_B}{3} + \frac{t}{3}(1-b-a)(1-b+a) \quad (2.11)$$

De la misma manera, obtenemos la condición de primer orden que maximiza el beneficio de la empresa B con respecto su precio:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial P_B} = 0$$

$$\left(1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2}\right)^2\right) - \frac{P_B}{t(1-b-a)} \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2}\right) \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b+a)}{2} + \frac{P_B}{t(1-b-a)}\right) = 1$$

Para simplificar, remplazaremos el resultado obtenido en la ecuación (2.10) en la anterior ecuación, con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{P_A}{t(1-b-a)}\right) \left(\frac{P_A}{t(1-b-a)} + \frac{P_B}{t(1-b-a)}\right) = 1$$

Para que esta expresión este correctamente definida, se debe cumplir que $1 - b - a \neq 0$. Así, la función de mejor respuesta de la empresa B, P_B^{MR} es:

$$P_B^{MR}(P_A, a, b, t) = \frac{t^2(1-b-a)^2}{P_A} - P_A \quad (2.12)$$

Una vez hallada las funciones de mejor respuesta (2.11) y (2.12), se procede a resolver el sistema de ecuaciones conformado por estas ecuaciones; con el objetivo de hallar los precios de equilibrio P_A^* , P_B^* que determinan el Equilibrio de Nash para la segunda etapa. Para ello, reescribimos la ecuación (2.11) de la siguiente forma:

$$P_B = 3P_A - t(1-b-a)(1-b+a)$$

Igualando la anterior ecuación con la ecuación (2.12) se obtiene:

$$3P_A - t(1-b-a)(1-b+a) = \frac{t^2(1-b-a)^2}{P_A} - P_A$$

Reescribiendo la ecuación anterior, se obtiene:

$$4P_A^2 - P_A t(1-b-a)(1-b+a) = t^2(1-b-a)^2$$

Dado que a, b, t son constantes (porque estamos en la segunda etapa), entonces esta expresión representa una ecuación de segundo grado en P_A , con soluciones:

$$P_A^*(a, b, t) = \frac{t(1-b-a)(1-b+a) \pm \sqrt{t^2(1-b-a)^2(1-b+a)^2 + 16t^2(1-b-a)^2}}{8}$$

A partir de aquí, se asume que los precios de las empresas deben ser estrictamente positivos. Por ende, para que $P_A > 0$, solo se toma la solución positiva. Consecuentemente el precio que maximiza el beneficio de la empresa A en la segunda etapa es:

$$P_A^*(a, b, t) = \frac{(1 - b - a)t}{8} \left((1 - b + a) + \sqrt{17 + (a - b)(2 + a - b)} \right) \quad (2.13)$$

Si reemplazamos la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12), se obtiene el precio que maximiza el beneficio de la empresa B en la segunda etapa:

$$P_B^*(a, b, t) = \frac{(1 - b - a)t}{8} \left(-5(1 - b + a) + 3\sqrt{17 + (a - b)(2 + a - b)} \right) \quad (2.14)$$

Por lo tanto, el Equilibrio de Nash para la segunda etapa se encuentra determinado por los precios (2.13) y (2.14). Es fácil observar en estas expresiones que el segundo término del lado derecho es positivo para todo $a, b \in [0, 1]$, por lo que los precios de cada empresa serán positivos, si se cumple:

$$a + b < 1 \quad (2.15)$$

Esta restricción (2.15), se la puede interpretar como un supuesto en el que las empresas podrán maximizar sus beneficios siempre que estas no invaden el territorio de su rival⁶.

Los beneficios de equilibrio de la segunda etapa se obtienen reemplazando los precios (2.13) y (2.14) en las ecuaciones (2.8) y (2.9), con lo cual:

$$\Pi_A(P_A^*, P_B^*, t) = \frac{(1 - b - a)t}{8^3} \left((1 - b + a) + \sqrt{17 + (a - b)(2 + a - b)} \right)^3 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \Pi_B(P_A^*, P_B^*, t) &= \frac{(1 - b - a)t}{8} \left(-5(1 - b + a) + 3\sqrt{17 + (a - b)(2 + a - b)} \right) \\ &\times \left(1 - \frac{1}{8^2} \left((1 - b + a) + \sqrt{17 + (a - b)(2 + a - b)} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Una vez definidas las funciones de beneficio de cada empresa, se procede con la primera etapa.

Primera etapa

El beneficio marginal de la empresa A con respecto a su posición, considerando la función de beneficio (2.16) es:

⁶ Para poder interpretar de mejor manera esta restricción, se recomienda revisar nuevamente la figura 1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} &= 0 \\
\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} &= -\frac{t}{8^3} \left((1-b+a) + \sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} \right)^3 \\
&\quad + \frac{3(1-b-a)t}{8^3} \left((1-b+a) + \sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\frac{\sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} + (1+a-b)}{\sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)}} \right) \\
\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} &= \frac{(1-b-a)t}{8^3} \left((1-b+a) + \sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} \right)^3 \\
&\quad \times \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)}} \right) \\
\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} &= \frac{(1-b-a)t}{8^3} \left((1-b+a) + \sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} \right)^3 \\
&\quad \times \left(\frac{-\sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)} + 3}{\sqrt{17 + (a-b)(2+a-b)}} \right) \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Es fácil observar en la ecuación (2.18), que el factor de la izquierda es positivo para todo $a, b \in [0,1]$ tal que $a + b < 1$. Por otro lado, el factor de la derecha es negativo para todo $a, b \in [0,1]$. En este sentido, se concluye que el beneficio marginal de la empresa A con respecto a la posición de la empresa A es negativo para toda posición de la empresa A y empresa B:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} < 0, \forall a, b \in [0,1]$$

En relación con esto, el valor de a que máxima el beneficio de la empresa A, es el menor valor que puede tomar en su dominio $[0,1]$, es decir :

$$a^* = 0 \tag{2.19}$$

De manera análoga, el beneficio marginal de la empresa B con respecto a su posición, de acuerdo con la función de beneficio (2.17) es:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} = & -\frac{t}{8} \left(-5(1-b) + 3\sqrt{17 + (-b)(2-b)} \right) \\
& \times \left(1 - \frac{1}{8^2} \left((1-b) + \sqrt{17 + (-b)(2-b)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{(1-b)t}{8} \left(5 + \frac{3(-1+b)}{\sqrt{17 + (-b)(2-b)}} \right) \\
& \times \left(1 - \frac{1}{8^2} \left((1-b) + \sqrt{17 + (-b)(2-b)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{(1-b)t}{8} \left(-5(1-b) + 3\sqrt{17 + (-b)(2-b)} \right) \\
& \times \left(-\frac{2}{8^2} \right) \left((1-b) + \sqrt{17 + (-b)(2-b)} \right) \\
& \times \left(-1 + \frac{-1+b}{\sqrt{17 + (-b)(2-b)}} \right)
\end{aligned}$$

Si se asume que $a = 0$ por la ecuación (2.19), entonces esta expresión se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} = \frac{\left(-((7-2b+b^2)(25-2b+b^2)) + ((-1+b)(-41-2b+b^2)\sqrt{17-2b+b^2}) \right) t}{32\sqrt{17+(-2+b)b}}$$

Es fácil observar que el denominador de la anterior expresión es positivo para todo $b \in [0,1]$ y $t > 0$. Por otro lado, si analizamos los dos sumandos del numerador, se tiene:

$$-((7-2b+b^2)(25-2b+b^2)) < 0, \quad \forall b \in [0,1]$$

$$(-1+b)(-41-2b+b^2)\sqrt{17-2b+b^2} \leq 0, \quad \forall b \in [0,1]$$

Así, el numerador es negativo para todo $b \in [0,1]$. En este sentido, se concluye que el beneficio marginal de la empresa B con respecto a su posición es negativo para toda posición de la empresa B:

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} < 0, \quad \forall b \in [0,1], a = 0, t \geq 0$$

Por ende, el valor de b que maximiza el beneficio de la empresa B es el menor valor que puede tomar en su dominio $[0,1]$, es decir:

$$b^* = 0 \tag{2.20}$$

Con relación a este análisis, se concluye que la posición de la empresa A que maximiza su beneficio, dado su beneficio marginal negativo, es $a^* = 0$; y la posición de la empresa B que maximiza su beneficio, dado su beneficio marginal negativo, es $b^* = 0$.

Consecuentemente, el Equilibrio de Nash para la primera etapa es $a^* = b^* = 0$. Si reemplazamos estos valores en las ecuaciones (2.17) y (2.18) se obtienen los precios de equilibrio:

$$P_A^*(a^*, b^*, t) = \frac{t + \sqrt{17}t}{8}$$

$$P_B^*(a^*, b^*, t) = \frac{-5t + 3\sqrt{17}t}{8}$$

los cuales muestran que

$$P_B^*(a^*, b^*, t) > P_A^*(a^*, b^*, t), \quad \forall t > 0$$

$$P_B^*(a^*, b^*, t) = P_A^*(a^*, b^*, t), \quad t = 0$$

Por lo tanto, el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos es:

$$ENPS\{(P_A^*(a^*, b^*, t), P_B^*(a^*, b^*, t), a^*, b^*)\} = \left\{ \left(\frac{t + \sqrt{17}t}{8}, \frac{-5t + 3\sqrt{17}t}{8}, 0, 0 \right) \right\} \quad (2.21)$$

En conclusión, para el caso 8, la empresa B fijará un precio más alto en comparación al precio que fija la empresa A, siempre que el costo de transporte sea mayor a cero y se cumpla la restricción (2.19). Este equilibrio muestra paradójicamente que la empresa A se ubicará en el extremo izquierdo de la ciudad lineal, donde se concentran menos consumidores, no obstante, esta empresa fijará un precio más bajo para tratar de atraer más clientes y conseguir beneficios.

Por otro lado, como la empresa B se ubicará en el extremo derecho de la ciudad, entonces fijará precios más altos en comparación a la empresa A, debido a que, en su ubicación se concentrarán más consumidores que demandarán su producto.

Caso 6: Función de densidad lineal monótona decreciente $\alpha = 1, \beta = 2$

A continuación, se realiza un desarrollo análogo al del caso 8 que se presentó previamente, tomando en cuenta los mismos supuestos. Por lo tanto, las cantidades de cada empresa con relación a las ecuaciones (2,6) y (2,7) dado que $\alpha = 1, \beta = 2$, son:

$$q_A(P_A, P_B, t) = 1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - b - a)} + \frac{(-1 - b + a)}{2} \right)^2$$

$$q_B(P_A, P_B, t) = \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1 - b - a)} + \frac{(-1 - b + a)}{2} \right)^2$$

Con ello, las funciones de beneficio de cada empresa son:

$$\begin{aligned}\Pi_A(P_A, P_B, t) &= P_A q_A(P_A, P_B) \\ \Pi_A(P_A, P_B, t) &= P_A \left(1 - \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(-1-b+a)}{2} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\Pi_B(P_A, P_B, t) &= P_B q_B(P_A, P_B) \\ \Pi_B(P_A, P_B, t) &= P_B \left(\frac{P_B - P_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(-1-b+a)}{2} \right)^2\end{aligned}\quad (2.23)$$

Si analizamos y comparamos las funciones de beneficio (2.8) y (2.9) con las funciones de beneficio (2.22) y (2.23) se tiene que la función de beneficio de la empresa A del caso 6 es la misma que la de la empresa B del caso 8. Asimismo, la función de beneficio de la empresa B del caso 6 es la misma función de beneficio de la empresa A del caso 8. En este sentido, podemos concluir que tendremos la misma estructura de juego para el modelo de Hotelling para ambos casos. Esto se debe a la forma de la función de Kumaraswamy y a la simetría existente entre estos casos, como se presenta en la figura 3.

Consecuentemente, podemos determinar directamente el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos, con respecto al resultado analítico hallado para el caso 8, debido a que el desarrollo sería el mismo, pero con las empresas intercambiadas. De esta manera, se tiene formalmente para el caso 6 que el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos es:

$$ENPS\{(P_A^*(a^*, b^*, t), P_B^*(a^*, b^*, t), a^*, b^*)\} = \left\{ \left(\frac{-5t + 3\sqrt{17}t}{8}, \frac{t + \sqrt{17}t}{8}, 0, 0 \right) \right\} \quad (2.24)$$

Los equilibrios (2.21) y (2.24) permiten concluir que, si la distribución de los consumidores dentro de la ciudad lineal es una función lineal monótona creciente o decreciente, entonces se cumple el principio de máxima diferenciación entre empresas, debido a que las empresas optan por ubicarse en los extremos de la ciudad para diferenciar espacialmente sus productos y competir netamente vía precios.

Teorema:

Sea el modelo de Hotelling para dos empresas A y B, con producción de bienes homogéneos en una ciudad lineal donde las empresas A y B compiten vía precios P_A, P_B y posiciones $a, b \in [0,1]$, con costos de transporte unitarios ($t = 1$) y costos de producción nulos ($c = 0$). Si los consumidores se distribuyen conforme a la distribución de Kumaraswamy $f(z; \alpha, \beta) = \alpha \beta z^{\alpha-1} (1 - z^\alpha)^{\beta-1}$ con parámetros de forma α, β ; entonces los precios y posiciones de equilibrio que maximizan los benéficos de las empresas de manera simultánea son:

a) $\alpha = 2, \beta = 1$

$$P_A^* = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}, \quad P_B^* = \frac{-5 + 3\sqrt{17}}{8}, \quad a^* = 0, \quad b^* = 0$$

b) $\alpha = 1, \beta = 2$

$$P_A^* = \frac{-5 + 3\sqrt{17}}{8}, \quad P_B^* = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}, \quad a^* = 0, \quad b^* = 0$$

■

2.4 Pseudo Código

El Pseudo Código presentado en esta sección para la extensión del modelo de Hotelling en una ciudad lineal, es la base para el desarrollo del código en lenguaje Python empleado para las simulaciones. Este código se presenta en el Anexo VIII.

Pseudo código para la simulación de la extensión del modelo de Hotelling

1. Segunda Etapa

1.1 Definir las variables de precios de cada empresa P_A y P_B .

1.2 Determinar la posición de indiferencia \bar{x} del consumidor a partir de las variables P_A, P_B y las posiciones $a, b \in [0,1]$ y el costo de transporte $t > 0$, tal que:

$$\bar{x}(P_A, P_B, a, b, t) = \frac{P_B - P_A}{2t(1 - a - b)} + \frac{(1 - b + a)}{2}$$

bajo la restricción: $0 < \bar{x} < 1$.

1.3 Definir las funciones de cantidad de cada empresa q_A y q_B a partir de \bar{x}, α, β tal que:

$$q_A(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta) = \int_0^{\bar{x}} f(z) dz$$

$$q_B(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta) = \int_{\bar{x}}^1 f(z) dz$$

donde:

$$f(z; \alpha, \beta) = \alpha \beta z^{\alpha-1} (1 - z^\alpha)^{\beta-1} \text{ con } z \in (0, 1)$$

1.4 Definir las funciones de beneficio de cada empresa π_A y π_B con P_A, P_B, q_A, q_B .

$$\Pi_A(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta, c) = (P_A - c) q_A(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta)$$

$$\Pi_B(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta, c) = (P_B - c) q_B(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta)$$

1.5 Definir las funciones de mejor reacción P_A^{MR} y P_B^{MR} para las empresas.

$$P_A^{MR}(P_B, a, b, t, \alpha, \beta, c) = \arg \max_{P_A} \pi_A(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta, c)$$

$$P_B^{MR}(P_A, a, b, t, \alpha, \beta, c) = \arg \max_{P_B} \pi_B(P_A, P_B, a, b, t, \alpha, \beta, c)$$

1.6 Definir un sistema de ecuaciones P_A^{MR}, P_B^{MR} ; con variables a determinar P_A, P_B

1.7 Resolver el sistema de ecuaciones en 1.6 para determinar los precios de equilibrio P_A^* y P_B^* , de forma que:

$$P_A^* = P_A^*(a, b, t, \alpha, \beta, c)$$

$$P_B^* = P_B^*(a, b, t, \alpha, \beta, c)$$

1.8 Fin de la Segunda etapa.

2. Primera etapa

2.1 Determinar las funciones de mejor reacción a^{MR} y b^{MR} para las empresas A y B, respectivamente, utilizando los precios de equilibrio en 1.7.

$$a^{MR}(b, t, \alpha, \beta, c) = \arg \max_a \pi_A(P_A^*(a, b, t, \alpha, \beta), P_B^*(a, b, t, \alpha, \beta), a, b, \alpha, \beta, c, t)$$

$$b^{MR}(a, t, \alpha, \beta, c) = \arg \max_b \pi_B(P_A^*(a, b, t, \alpha, \beta), P_B^*(a, b, t, \alpha, \beta), a, b, \alpha, \beta, c, t)$$

bajo la restricción: $a + b < 1$.

2.2 Definir un sistema de ecuaciones a^{MR}, b^{MR} ; con variables a determinar a, b .

2.3 Resolver el sistema de ecuaciones en 2.2 para determinar las posiciones de equilibrio a^* y b^* , de forma que:

$$a^* = a^*(\alpha, \beta, t, c)$$

$$b^* = b^*(\alpha, \beta, t, c)$$

2.4 Fin de la Primera etapa.

3. Hallar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

3.1 Establecer una serie de valores del parámetro $\alpha \in [1, 15]$, con $c = 0, \beta = t = 1$

3.2 Para cada valor α .

3.2.1 Suministrar un valor inicial P_A^0, P_B^0 para los Precios de cada Empresa, a^0, b^0 para las Posiciones de cada empresa para la resolución numérica de los puntos 1 y 2.

3.2.2 Guardar las Posiciones de equilibrio a^*, b^* y calcular los Precios de equilibrio P_A^*, P_B^* en 1.7 tal que:

$$P_A^*(a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

$$P_B^*(a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

3.2.3 Calcular Cantidades q_A^*, q_B^* en 1.3 y los Beneficios de equilibrio π_A^*, π_B^* en 1.4 tal que:

$$q_A^* = q_A(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

$$q_B^* = q_B(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

$$\Pi_A(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta, c) = (P_A^* - c) q_A(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

$$\Pi_B(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta, c) = (P_B^* - c) q_B(P_A^*, P_B^*, a^*, b^*, t, \alpha, \beta)$$

Una vez presentados los fundamentos de teoría de juegos, el desarrollo analítico de la extensión del modelo y el Pseudo código (el cual será la base para el código que se usará en Python para las simulaciones); se procederá a presentar en el siguiente capítulo: los resultados, conclusiones y limitaciones de la extensión de este modelo para cada uno de los casos de interés que fueron desarrollados en este capítulo.

3 RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

3.1 Resultados

En este apartado se presentan los resultados de las simulaciones de la extensión del modelo de Hotelling con posiciones endógenas en una ciudad lineal, específicamente para los casos 8 y 6 de la función de KW, los cuales fueron propuestos previamente en el capítulo de metodología. Adicionalmente, en este apartado se realiza la interpretación económica del comportamiento de las empresas con relación a los resultados obtenidos.

Para comenzar, analicemos el comportamiento de la distribución de los consumidores. La figura 4 es una representación gráfica de la distribución KW para 4 casos particulares $\alpha = 2, \alpha = 5, \alpha = 10, \alpha = 15$, con $\beta = 1$.

Caso 8: Funciones lineales y no lineales monótonas crecientes $\alpha > 1, \beta = 1$

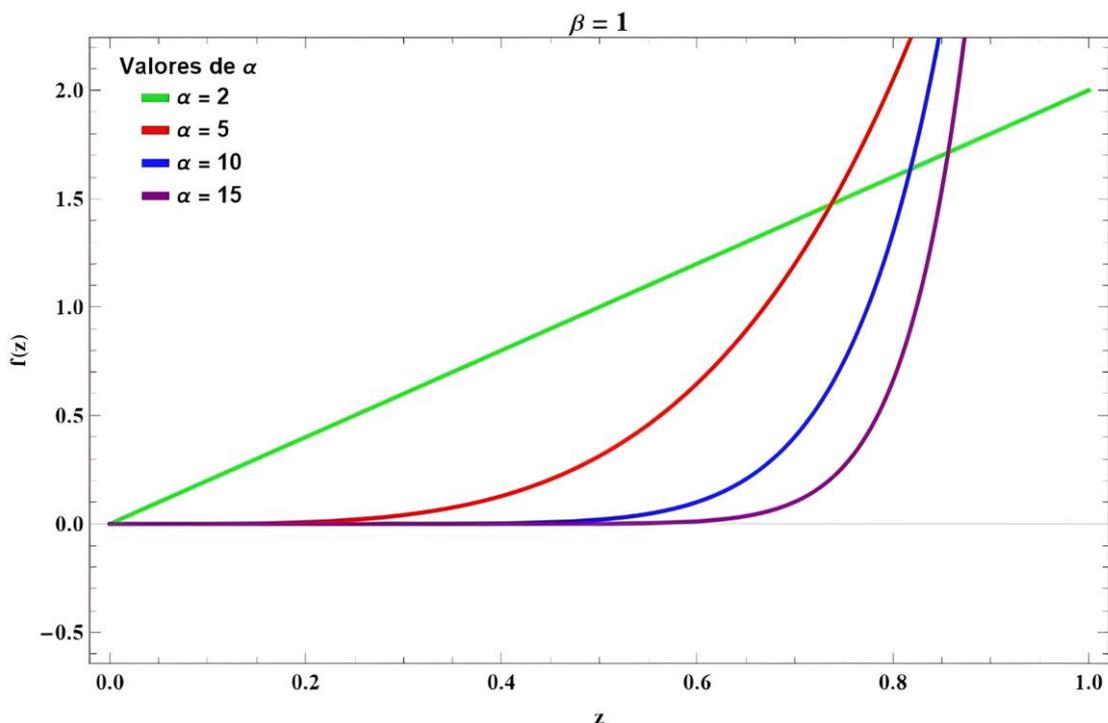


Figura 4. Caso 8- función de Kumaraswamy

Nota: Esta figura muestra 4 diferentes formas que puede tomar la función de densidad de KW para el caso 8 ($\alpha > 1$),

$\beta = 1$). Para cada una de las formas, el parámetro de forma α toma valores en cuatro situaciones: $\alpha = 2, \alpha = 5, \alpha = 10, \alpha = 15$.

Como se puede apreciar en la figura 4, a medida que aumenta el valor de α , la distribución de KW tiene cambios tanto en su forma como en su pendiente. Por ejemplo, cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, la distribución tiene una forma lineal con pendiente positiva, este es precisamente es uno de los casos desarrollados en el capítulo de metodología. Sin embargo, si el valor de α aumenta, la pendiente de la función varía en cada punto y su comportamiento se vuelve de carácter asintótico, con una concentración cada vez mayor en la parte derecha de la distribución.

A continuación, revisaremos los resultados de las simulaciones con relación a posiciones, precios, cantidades y beneficios del equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos, que toman las empresas A y B cuando varía exclusivamente el parámetro α en el intervalo $[1,15]$. Para ello, se asume que $\beta = 1, c = 0, t = 1$.⁷ Cabe subrayar que estos equilibrios son los resultados óptimos de cada empresa, descartando aquellas amenazas que puedan existir por parte de los rivales al querer acaparar el mercado con precios bajos que no maximicen su beneficio. Además, dado los supuestos planteados en la extensión del modelo, estas variables se encuentran restringidas en el intervalo $[0,1]$.

Posiciones de Equilibrio

Para que las empresas puedan maximizar su beneficio dentro del modelo, deberán primero decidir la posición en la cual se ubicarán dentro de la ciudad lineal. Para ello, las empresas deben tener en cuenta que, dentro de este esquema de competencia, podrán fijar precios positivos si y solo si, el costo de transporte es positivo (en este caso se asume $t = 1$) y las empresas no invaden el territorio de su rival; es decir, sus posiciones deben cumplir con la restricción $a + b < 1$.

Además, para que cada empresa pueda determinar la ubicación que maximice simultáneamente su beneficio, deberá tener en cuenta, cual es la distribución de los consumidores dentro de la ciudad y suponer la decisión de su rival, dado que su decisión será simultánea a la de su rival.

En la figura 5 se presenta la elección de cada empresa con respecto a sus posiciones, acorde a los diferentes valores de α . Como se puede observar, cuando los valores de α

⁷ Se debe tener en cuenta que al escoger el caso particular de $c = 0, t = 1$ y $0 < \bar{x} < 1$ entonces los precios, las cantidades y beneficios estarán dentro del rango de cero a uno. $(P_A, P_B, q_A, q_B, \pi_A, \pi_B \in [0,1])$

aumentan, la empresa A decide mantener su ubicación en el extremo izquierdo de la ciudad lineal ($a^* = 0$). Simultáneamente, la empresa B decide mantenerse en el extremo derecho de la ciudad lineal ($b^* = 0$) para valores de $\alpha \leq 2.5$. Sin embargo, cuando $\alpha > 2.5$, la empresa B decide alejarse un poco del extremo derecho, ubicándose cerca de la posición 0.90 de la ciudad lineal.

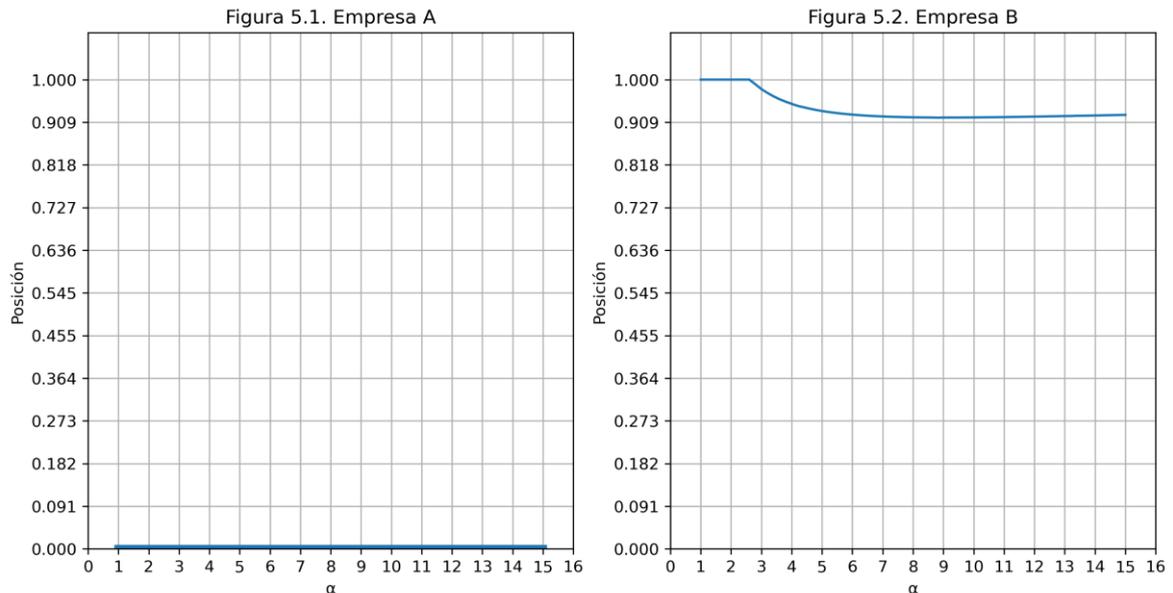


Figura 5. Posiciones de Equilibrio de las empresas con respecto Alfa

Nota: Las figuras 5.1 y 5.2 muestran como varían las posiciones de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma α varia ($\alpha \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\beta = 1$.

Este comportamiento de la empresa B puede ser explicado por la alta concentración de consumidores al lado derecho de la ciudad lineal cuando $\alpha > 2$, tal como se lo muestra en la figura 4. Dadas estas circunstancias, la empresa B podría estar ubicándose estratégicamente alrededor de una mayor proporción de consumidores, para que así, posiblemente logre aumentar la demanda de sus productos con un mayor grupo objetivo de consumidores.

Por otro lado, la empresa A se encuentra limitada con respecto a la elección de su posición, debido a las siguientes razones: 1) la empresa no puede invadir el territorio de la empresa rival porque si lo hace, tendrán que fijar un precio negativo y 2) El beneficio marginal de la empresa A es negativo ($\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha} < 0$), (así como se lo presento en el capítulo de metodología), por lo que mientras más se aleje del extremo izquierdo, menor será su beneficio. Por ende, a esta empresa no le conviene abandonar el extremo de la ciudad. Estos resultados fueron similares a los que se obtuvieron en el estudio de Anderson (1997), el cual concluyo que, si la función de densidad de la distribución de los consumidores es demasiado convexa,

entonces los resultados del equilibrio para la primera etapa son asimétricos. Es decir, las ubicaciones de mejor respuesta de las empresas tienden a polarizarse de manera diferente, tal y como se lo muestra en la figura 5.

En conclusión, cuando los valores de α aumentan, la empresa A tiende a mantener su posición de equilibrio en el extremo izquierdo de la ciudad lineal, mientras que la empresa B tiende a alejarse de manera estratégica un poco del extremo derecho de la ciudad lineal, para así poder rodearse de una mayor proporción de consumidores.

Precios de Equilibrio

Una vez determinada de manera simultánea las posiciones de equilibrio de cada una de las empresas, se procede a fijar los precios de equilibrio que maximicen el beneficio de cada una de ellas. En la figura 6 se muestra como varían los precios de equilibrio de cada empresa cuando los valores de α cambian.

Si los valores de α aumentan, los consumidores tienden a concentrarse en mayor magnitud en el territorio de la empresa B, así como se lo presenta en la figura 4. Entonces, con base en la figura 6, la empresa A tienden a disminuir los precios hasta acercarse a cero⁸ ($P_A^* \rightarrow 0$). Esto sucede porque la empresa A, al ser un agente racional, buscará maximizar su beneficio, tratando de captar la atención de los consumidores con precios bajos. En este sentido, la empresa A tratara de hacer más atractivo su producto a través de un tipo de diferenciación monetaria con respecto al producto de la empresa B.

⁸ Las empresas podrán fijar precios cercanos a cero y no tener pérdidas. Esto se debe a que se asumió que el costo de producción para este caso teórico es cero ($c = 0$)

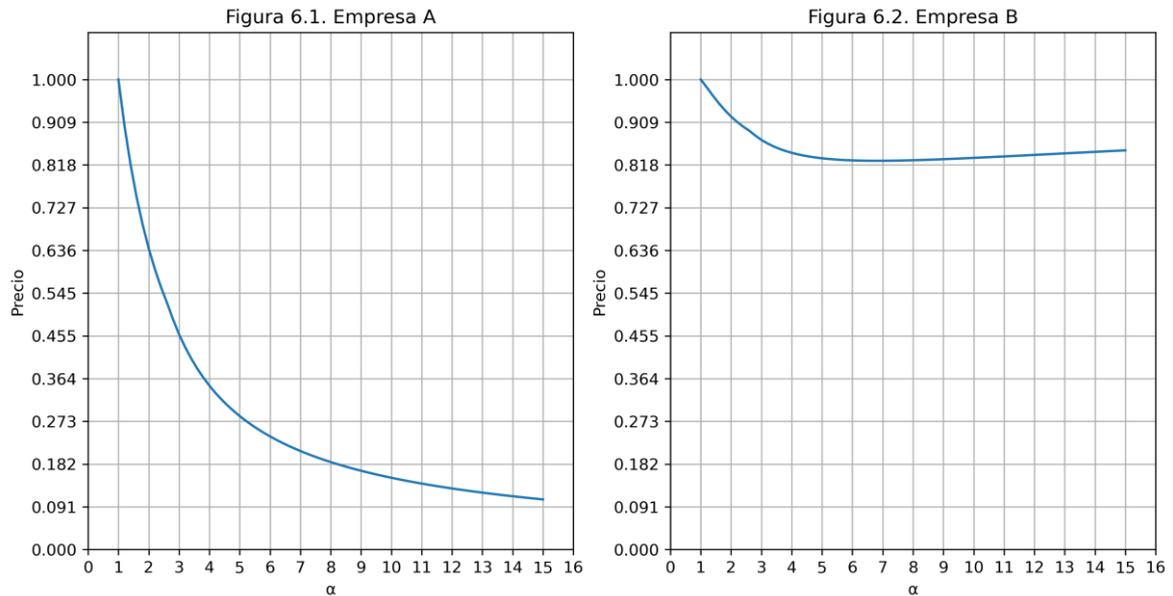


Figura 6. Precios de Equilibrio de las empresas con respecto Alfa

Nota: Las figuras 6.1 y 6.2 muestran como varían los precios de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma α varia ($\alpha \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\beta = 1$.

Por otro lado, la empresa B tendrá una mayor flexibilidad al momento de fijar un precio, debido a la ventaja que le otorga su ubicación con respecto a la distribución de los consumidores, como se presentó en la figura 5. Inicialmente, cuando los valores de α comienzan a aumentar hasta las 5 unidades, la empresa B decide disminuir gradualmente sus precios por motivos de competencia, debido a que aún existe una considerable proporción de consumidores en el territorio de la empresa A que pueden demandar su producto por los precios bajos. Sin embargo, para valores de α mayores a las 5 unidades, la empresa B tiende a estabilizar sus precios e incluso aumentarlos.

Se debe tener en cuenta que, aunque los precios de la empresa A tiendan a disminuir, estos pueden no volverse más atractivos para los consumidores, debido a la larga distancia que estos tengan que recorrer para adquirir el producto. Es así como la distancia entre el consumidor y la empresa podría desmotivar al consumidor de su compra, a tal punto que, el consumidor prefiera los productos de la empresa rival.

La posición de indiferencia que se presenta en la figura 7 demuestra que un consumidor indiferente debe ubicarse cada vez más cerca del extremo derecho de la ciudad lineal a medida que aumenta el valor de α . Este fenómeno sucede porque al consumidor le dará igual recorrer una mayor distancia hacia la empresa A y pagar un bajo precio, o recorrer una menor distancia hacia la empresa B y pagar un precio más alto.

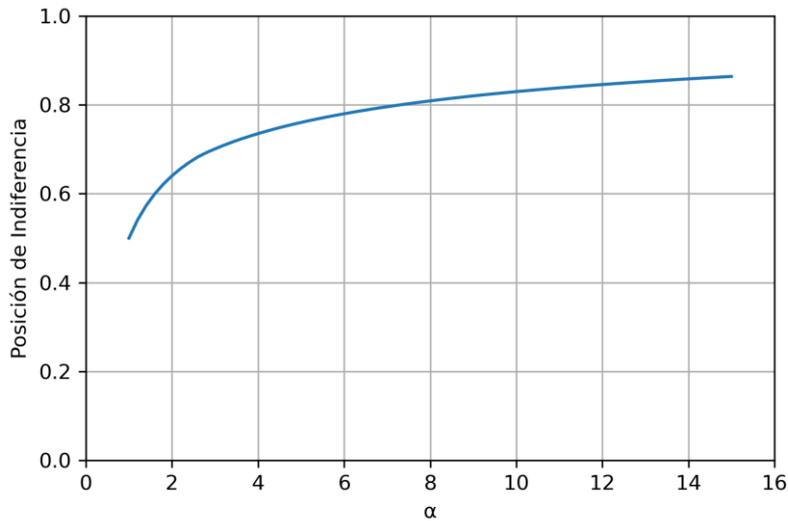


Figura 7. Posición de indiferencia de los consumidores con respecto Alfa

Nota: Esta figura muestra como varía la posición de indiferencia de los consumidores dentro de la ciudad lineal cuando, el parámetro de forma α varía ($\alpha \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\beta = 1$.

En conclusión, después de fijar sus posiciones, las empresas compiten con respecto a sus precios de tal forma que, la empresa A tratará de ser más competitiva disminuyendo progresivamente sus precios hacia cero, a medida que aumente el valor de α . Por otro lado, la empresa B, al tener una ventaja por su posición, fijará un precio más alto en comparación al precio de su rival, logrando así liderar el mercado dentro de la ciudad lineal.

Cantidades de Equilibrio

Así como los precios, las cantidades producidas de una empresa juegan un papel fundamental dentro de un mercado, por la ley de oferta y demanda. Después de que las empresas deciden su posición y precio de equilibrio respectivamente, deben decidir la cantidad de equilibrio que producirán para ofertar dentro del mercado, teniendo en cuenta la distribución de los consumidores dentro de la ciudad lineal.

A continuación, en la figura 8 se presenta los niveles de producción de cada empresa con respecto a cada valor de α .

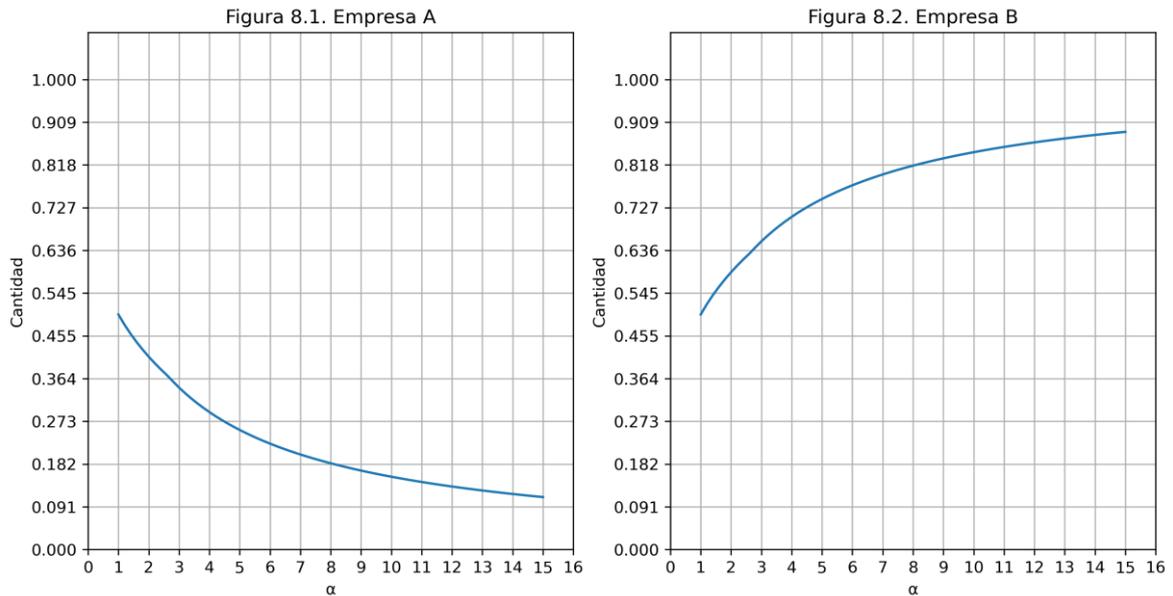


Figura 8. Cantidades de Equilibrio de las empresas con respecto Alfa

Nota: Las figuras 8.1 y 8.2 muestran como varían las cantidades de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma α varía ($\alpha \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\beta = 1$.

Como se observa en la figura 8, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ las empresas de manera simultánea fijan los mismos niveles de producción; debido a que nos encontramos en el caso clásico del modelo de Hotelling con posiciones endógenas, el cual fue presentado en el capítulo de marco teórico y constituye el caso 5 de la función de KW.

Sin embargo, a medida que aumenta los valores de α , la empresa A comienza a producir cada vez menos unidades, porque los consumidores tienden a concentrarse más lejos de la posición de esta empresa. Por ende, la demanda de sus productos disminuye dentro del mercado, a pesar de que sus precios sean relativamente competitivos con respecto a los de la empresa B. Paralelamente, la empresa B, al tener la ventaja gracias a su posición, estará más cerca del cúmulo de consumidores dentro de la ciudad, por ende, decidirá producir más unidades. En consecuencia, la empresa B no solo decide fijar precios altos en comparación a la empresa rival, también decide producir cada vez más.

Cabe subrayar que estos resultados dependen plenamente del costo de transporte, los precios y las posiciones de las empresas. En este sentido, el comportamiento de estas variables afecta directamente en la cantidad que ofertará cada empresa en cada una de las diferentes situaciones dentro del mercado de la ciudad lineal. Además, los resultados presentados en este apartado son consistentes con los resultados analíticos obtenidos para los casos seis y ocho de la función de Kumaraswamy del capítulo de metodología.

Beneficios de Equilibrio

Como paso final de este modelo de competencia, se analiza el beneficio óptimo que alcanza cada empresa, con relación a los precios, cantidades y posiciones de equilibrio determinados en las secciones anteriores. En la figura 9 se muestra como varían los beneficios de equilibrio de cada una de las empresas cuando el parámetro α aumenta.

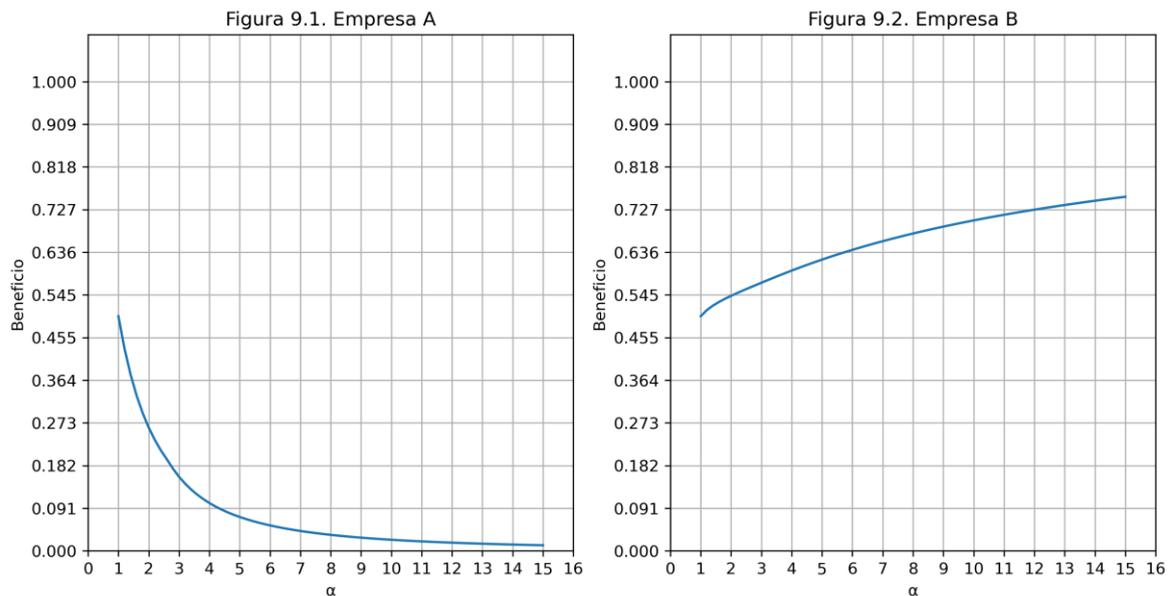


Figura 9. Beneficios de Equilibrio de las empresas con respecto Alfa

Nota: Las figuras 9.1 y 9.2 muestran como varían los beneficios de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma α varia ($\alpha \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\beta = 1$.

Los resultados de esta figura 9 son evidentes. Por un lado, la empresa A conseguirá cada vez menos beneficios cuando α aumente, hasta ser cercanos a cero, como consecuencia de la pérdida de consumidores y los bajos precios que fija para su producto. Por otro lado, la empresa B tendrá mayores beneficios, debido a que, al tener ventaja competitiva y lograr cubrir una gran proporción de la demanda, esta empresa tendrá altos niveles de producción y precios. Por ende, a medida que aumenta los valores de α , los beneficios de la empresa B aumentarán con un comportamiento similar al de rendimientos decrecientes de escala.

Una vez analizados los equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos para el caso 8, podemos concluir por el Teorema presentado en el apartado 2.3 del capítulo de metodología que, los resultados para el modelo de Hotelling con posiciones endógenas para el caso 6 son los mismos, pero con la particularidad que las empresas intercambian su comportamiento, debido a que en este caso los consumidores se concentraran en la parte izquierda de la ciudad lineal. En otras palabras, en el caso 6 la empresa A se comporta como la empresa B del caso 8 y, análogamente, la empresa B se comporta como

la empresa A. El lector podrá encontrar los resultados de las simulaciones del equilibrio Perfecto en Subjuegos para el caso 6 en el apartado de Anexos del presente documento.

3.2 Conclusiones

En retrospectiva, el modelo de Hotelling inicialmente tiene como objetivo resolver la paradoja de Bertrand cuando los consumidores están distribuidos uniformemente dentro de una ciudad lineal, pero con el pasar del tiempo este modelo ha sido modificado con supuestos que estén más acordes con la realidad, generando así diversas extensiones dentro del campo. Gracias a todos estos desarrollos, se ha incentivado el interés y desarrollo de la competencia espacial en el campo de la economía industrial. De tal modo, que la humanidad ha tenido acceso a un medio simple y exitoso para introducir una componente espacial en la modelización del comportamiento de los agentes económicos.

Este trabajo tiene como objetivo determinar el equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para el modelo de Hotelling con posiciones endógenas, cuando los consumidores están distribuidos a partir de una función de Kumaraswamy, con el fin de analizar el comportamiento dinámico de las empresas con respecto a sus precios, posiciones, cantidades y beneficios dentro del mercado de la ciudad lineal.

En resumen, los resultados de la extensión modelo de competencia espacial que son presentados en este documento, muestran como las empresas compiten vía de precios y posiciones dentro de la ciudad lineal. En este contexto, el comportamiento y la competencia de las empresas se basará simplemente en la forma y el tipo de distribución que tienen los consumidores dentro de la ciudad.

Por consiguiente, si la distribución de los consumidores tiende a ser una función estrictamente monótona creciente, entonces la empresa que este más cerca del extremo derecho de la ciudad lineal, tendrá una ventaja competitiva con respecto a su rival, siempre y cuando se cumpla que $a + b < 1$. En este sentido, esta empresa tendrá mayores beneficios, debido a su posición estratégica dentro de la ciudad y, a sus altos niveles de producción y precios. Por otro lado, la empresa rival estará limitada a competir estratégicamente vía precios para tratar de mantenerse en el mercado, y a medida que la distribución de los consumidores tienda a ser una función monótona creciente no lineal, su producción disminuirá al igual que sus beneficios.

Análogamente, por el Teorema que fue presentado en el apartado 2.3 del Capítulo de metodología, se tiene que, si la distribución de los consumidores tiende a ser una función estrictamente monótona decreciente, entonces la empresa que este más cerca del extremo izquierdo de la ciudad, tendrá una ventaja competitiva con respecto a su rival, siempre y

cuando se cumpla que $a + b < 1$. En este sentido, esta empresa tendrá mayores beneficios, debido a su posición estratégica dentro de la ciudad y, a sus altos niveles de producción y precios. Por otro lado, la empresa rival estará limitada a competir estratégicamente vía precios para tratar de mantenerse en el mercado, y a medida que la distribución de los consumidores tienda a ser una función monótona decreciente no lineal, su producción disminuirá al igual que sus beneficios.

Por consiguiente, se puede concluir para estos casos de análisis que, inicialmente se cumple el principio de máxima diferenciación entre las empresas competidoras. Sin embargo, a medida que la distribución de los consumidores va cambiando de forma, la empresa que tiene una ventaja competitiva podrá alejarse del extremo de la ciudad lineal para desplazarse más cerca de la conglomeración de los consumidores, y así poder fijar precios más altos en comparación a los de su rival debido a su diferenciación espacial; mientras que la empresa rival optará por mantener su posición en el otro extremo de la ciudad para competir absolutamente vía precios. Estos resultados de precios, posiciones y beneficios de equilibrio son similares a los obtenidos por Ansari et al. (1994) en su modelo de Hotelling para dos empresas con una distribución Beta (en el caso asimétrico) en un espacio bidimensional. Además, estos resultados son acordes al comportamiento racional que suelen tener las empresas, ya que, según Biscaia & Mota (2013), las empresas intuitivamente desean diferenciar más sus productos para poder flexibilizar la competencia con respecto a los precios, con el objetivo de obtener mayores ganancias dentro del mercado.

Los hallazgos de este trabajo proporcionan una interpretación de los Equilibrios de Nash en el modelo de competencia espacial cuando, los consumidores se aglomeran en un solo lado de la ciudad lineal. Sin embargo, este trabajo tiene varias limitaciones y supuestos que se pueden mejorar. Por ende, en el siguiente apartado se presentan varias recomendaciones, las cuales pueden ser abordadas para futuras investigaciones.

3.3 Recomendaciones

A lo largo de este trabajo, se han establecido diferentes supuestos que, de cierto modo, han permitido modelar algunos casos particulares de la competencia espacial con el modelo Hotelling. Sin embargo, al tomar varios de estos supuestos, se ha limitado directa e indirectamente el desarrollo de este modelo teórico. Con ello, a continuación, se enuncian las diferentes limitaciones que tiene este trabajo y como estas podrían evitarse para el desarrollo de futuros estudios.

Una de las limitaciones principales de este trabajo es que solo se analizan los casos 5, 6 y 8 de la función de Kumaraswamy para la distribución de los consumidores en el modelo de Hotelling. Por ello, trabajos futuros podrían centrarse en el desarrollo analítico y numérico del equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para casos generales de esta distribución, aunque ello podría demandar el empleo de herramientas cuantitativas más complejas y exigentes.

Por otro lado, los supuestos planteados en este estudio constituyen una fuerte limitante en la representación de la competencia espacial a través del modelo. Por ejemplo, los supuestos de los costos de producción nulos ($c = 0$) y los costes de transporte unitarios ($t = 1$) son poco realistas y provocan que el dominio de las variables de interés (precios cantidades y beneficios) se restrinja al intervalo $[0,1]$. Por esa razón, se recomienda que en trabajos futuros se pueda considerar una estructura de costos más fehaciente, que posiblemente incluya no linealidades. Además, es importante subrayar que, para casos específicos, se puede relajar el supuesto en el que las empresas no puedan invadir el territorio de su rival.

De la misma manera, se recomienda realizar la misma extensión de este modelo, pero, en lugar de encontrar los equilibrios en estrategias puras, se determinen estos equilibrios en estrategias mixtas. Así mismo, se podría modificar la estructura del modelo a tal punto que la ciudad no sea necesariamente lineal sino una algún tipo de ciudad bidimensional.

Finalmente, como recomendación adicional, se podría modificar la segunda etapa del modelo, de tal manera que las empresas compitan vía cantidades en lugar de precios. Con ello, se podría contrastar los resultados de equilibrio de este modelo de competencia espacial vía precios, con un modelo de Hotelling de competencia espacial vía a cantidades al estilo de la competencia de Cournot.

4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, S. P., Goeree, J. K., & Ramer, R. (1997). Location, Location, Location. *Journal of Economic Theory*, 77(1), 102–127. <https://doi.org/10.1006/jeth.1997.2323>
- Ansari, A., Economides, N., & Ghosh, A. (1994). Competitive Positioning in Markets with Nonuniform Preferences. *Marketing Science*, 13(3), 248–273.
- Bain, J. S. (1951). Relation of Profit Rate to Industry Concentration: American Manufacturing, 1936–1940. *The Quarterly Journal of Economics*, 65(3), 293–324. <https://doi.org/10.2307/1882217>
- Bertrand J (1883) Theorie mathematique de la richesse sociale. *Journal des Savants* 67 : 499–508
- Binmore, K. (2011). *La teoría de juegos: Una breve introducción*. Alianza Editorial.
- Biscaia, R., & Mota, I. (2013). Models of spatial competition: A critical review. *Papers in Regional Science*, 92(4), 851–872. <https://doi.org/10.1111/j.1435-5957.2012.00441.x>
- Borel, E. (1953). The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels. *Econometrica*, 21(1), 97–100. <https://doi.org/10.2307/1906946>
- Boulding, K. E. (1966). *Economic Analysis*. Harper & Row.
- Caplin, A., & Nalebuff, B. (1991). Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium. *Econometrica*, 59(1), 25. <https://doi.org/10.2307/2938239>
- Chen, C.-S., & Lai, F.-C. (2008). Location choice and optimal zoning under Cournot competition. *Regional Science and Urban Economics*, 38(2), 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.regsciurbeco.2008.01.009>
- Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L. Hachette.
- d'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J., & Thisse, J.-F. (1979). On Hotelling's "Stability in Competition". *Econometrica*, 47(5), 1145. <https://doi.org/10.2307/1911955>
- Degryse, H., Laeven, L. A., & Ongena, S. R. G. (2006). The Impact of Organizational Structure and Lending Technology on Banking Competition. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.886264>
- Dixit, A. K., Skeath, S., Reiley, D. H., & Reiley, D. (2009). *Games of Strategy*. W. W. Norton & Company.
- Eaton, B. C., & Lipsey, R. G. (1975). The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition. *The Review of Economic Studies*, 42(1), 27–49. <https://doi.org/10.2307/2296817>

- Fetter, F. A. (1924). The Economic Law of Market Areas. *The Quarterly Journal of Economics*, 38(3), 520–529. <https://doi.org/10.2307/1882335>
- Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). *Game Theory*. MIT Press.
- Garg, M. (2008). On Distribution of Order Statistics from Kumaraswamy Distribution. *Kyungpook Mathematical Journal*, 48(3), 411–417. <https://doi.org/10.5666/KMJ.2008.48.3.411>
- Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctvcmxrzd>
- Gibbons, R. (2022). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch editor.
- Harsanyi, J. C., & Selten, R. (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press.
- Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, 39(153), 41–57. <https://doi.org/10.2307/2224214>
- Jones, M. C. (2009a). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, 6(1), 70–81. <https://doi.org/10.1016/j.stamet.2008.04.001>
- Jones, M. C. (2009b). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, 6(1), 70–81. <https://doi.org/10.1016/j.stamet.2008.04.001>
- Kreps, D. M. (1990). *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford University Press.
- Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, 46(1), 79–88. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(80\)90036-0](https://doi.org/10.1016/0022-1694(80)90036-0)
- Lai, F.-C., & Tsai, J.-F. (2004). Duopoly locations and optimal zoning in a small open city. *Journal of Urban Economics*, 55(3), 614–626. <https://doi.org/10.1016/j.jue.2003.12.003>
- Lancaster, K. (1979). *Variety, Equity, and Efficiency: Product Variety in an Industrial Society*. Columbia University Press.
- Matsumura, T., & Matsushima, N. (2004). Endogenous Cost Differentials between Public and Private Enterprises: A Mixed Duopoly Approach. *Economica*, 71(284), 671–688.
- Michalowicz, J. V., Nichols, J. M., & Bucholtz, F. (2013). *Handbook of Differential Entropy*. CRC Press.
- Mitnik, P. A. (2013a). New Properties of the Kumaraswamy Distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42(5), 741–755. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581782>

- Mitnik, P. A. (2013b). New Properties of the Kumaraswamy Distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42(5), 741–755.
<https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581782>
- Montes-Rojas, G. (2015, noviembre 1). *SPATIAL COMPETITION AND THE LOCATION OF FIRMS WITH NON-UNIFORMLY DISTRIBUTED CUSTOMERS*.
<https://www.semanticscholar.org/paper/SPATIAL-COMPETITION-AND-THE-LOCATION-OF-FIRMS-WITH-Montes-Rojas/54f9129522a85df83ff8d05b263cf3afcc0ef7b5>
- Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press.
<https://doi.org/10.2307/j.ctvjsf522>
- Nadarajah, S. (2008). On the distribution of Kumaraswamy. *Journal of Hydrology*, 348(3–4), 568–569. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.09.008>
- Neven, D. J. (1986). On Hotelling's competition with non-uniform customer distributions. *Economics Letters*, 21(2), 121–126. [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(86\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0165-1765(86)90049-2)
- Osborne, M. J. (2004). *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press.
- Pérez, J., Cerdá Tena, E., & Jimeno Pastor, J. L. (2003). *Teoría de juegos*. Pearson Educación. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=121317>
- Pérez, J., & Navarro, J. P. (2013). *Teoría de juegos*. Ibergacetas Publicaciones, S.L.
- Ponnambalam, K., Seifi, A., & Vlach, J. (2001). Probabilistic design of systems with general distributions of parameters. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 29(6), 527–536. <https://doi.org/10.1002/cta.173>
- Rasmusen, E. (2006). *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. Wiley.
- Salop, S. C. (1979). Monopolistic Competition with Outside Goods. *The Bell Journal of Economics*, 10(1), 141–156. <https://doi.org/10.2307/3003323>
- Sánchez-Cuenca, I. (2009). *Teoría de juegos*. CIS.
- Schneider, E., & Edgeworth, F. Y. (1935). Mathematical Psychics. An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences. *Economica*, 2(6), 235.
<https://doi.org/10.2307/2548685>
- Selten, R. (1965). Spieltheoretische Behandlung Eines Oligopolmodells MIT Nachfrageträgheit. *Zeitschrift Für Die Gesamte Staatswissenschaft*, 121, 301–324.
- Shuai, J. (2017). A comment on mixed oligopoly spatial model: The non-uniform consumer distribution. *Economic Theory Bulletin*, 5(1), 57–63.
- Smith, D. M. (1981). *Industrial Location: An Economic Geographical Analysis*. Wiley.
- Tabuchi, T., & Thisse, J.-F. (1995). Asymmetric equilibria in spatial competition. *International Journal of Industrial Organization*, 13(2), 213–227.
[https://doi.org/10.1016/0167-7187\(94\)00449-C](https://doi.org/10.1016/0167-7187(94)00449-C)

- Tadelis, S. (2013). *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press.
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior* (pp. xviii, 625). Princeton University Press.
- Wang, Q., & Chen, Q. (2008). Cournot competition and location choice with wage bargaining. *Economics Bulletin*. <https://www.semanticscholar.org/paper/Cournot-competition-and-location-choice-with-wage-Wang-Chen/51ec753698d9c53aa7ad05084579adfd112648c9>
- Watson, J. (2002). *Strategy: An Introduction to Game Theory*. W.W. Norton.
- Zermelo, Ernst. (1912). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. En Proc. Fifth Congress Mathematicians (pp. 501–504). Cambridge University Press.
- Zhou, Y., & Che, Y. (2021). Research on Government Logistics Subsidies for Poverty Alleviation with Non-uniform Distribution of Consumers. *Omega*, 104, 102489. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102489>

5 ANEXOS

ANEXO I. Definiciones

Definición 5: Estrategia Dominante

Según Pérez & Navarro (2013), partiendo de un razonamiento intuitivo se dice que una estrategia de un jugador es dominante en el sentido débil o no estricto cuando esta es igual de buena o más que cualquier otra estrategia del juego. Teniendo en cuenta que esta estrategia es respuesta a cualquier perfil de estrategias que elijan los demás jugadores.

Por lo tanto, sea un juego $G = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$ con $i \in N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ y sean $s_i, s_i^* \in S_i$ dos estrategias del jugador i . Se dice que la estrategia s_i está dominada por la estrategia s_i^* sí y solo si:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i^* \neq s_i$$

Donde:

s_{-i} es el perfil de estrategias de los jugadores sin contar la estrategia del jugador i .

S_{-i} es el conjunto de perfiles de estrategias de los jugadores sin contar la estrategia del jugador i .

Equivalentemente se tiene que la estrategia s_i^* domina en el sentido débil o no estricto a la estrategia s_i .

Definición 6: Estrategia Estrictamente Dominante

Sánchez-Cuenca (2009) menciona que una estrategia de un jugador es dominante en el sentido fuerte o estricto cuando esta estrategia es más beneficiosa en el pago que cualquier otra estrategia, la cual es respuesta a cualquier perfil de estrategias que elijan los demás jugadores.

Por lo tanto, sea un juego $G = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$ con $i \in N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ y sean $s_i, s_i^* \in S_i$ dos estrategias del jugador i . Se dice que la estrategia s_i está estrictamente dominada por la estrategia s_i^* sí y solo si:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i^* \neq s_i$$

Donde:

s_{-i} es el perfil de estrategias de los jugadores sin contar la estrategia del jugador i .

S_{-i} es el conjunto de perfiles de estrategias de los jugadores sin contar la estrategia del jugador i .

Con relación a esta definición, una de las soluciones del juego es todos los perfiles de estrategias en los cuales cada jugador usa una estrategia estrictamente dominante. Además, equivalentemente se tiene que la estrategia s_i^* domina de manera fuerte o estricta a la estrategia s_i .

Proposición 1:

Sea un juego G . Para todo jugador i con $i \in N$, se tiene que su perfil de estrategias $s_i \in S_i$ no es un perfil de estrategias de mejor respuesta, si s_i está dominada por cualquier otra estrategia $s_i^* \in S_i$.

Proposición 2:

Si s_i^* es una estrategia estrictamente dominante para el jugador i , entonces esta debe ser la mejor respuesta para el jugador i , $\forall s_{-i} \in S_{-i}$.

En otras palabras, la estrategia s_i^* es la mejor respuesta del jugador i , porque esta estrategia domina estrictamente a cualquiera estrategia $s_i \in S$ del jugador i , para todo $s_i^* \neq s_i$. Por lo tanto, toda estrategia estrictamente dominante es una estrategia de mejor respuesta, pero no toda estrategia de mejor respuesta es una estrategia estrictamente dominante.

ANEXO II. Funciones lineales y no lineales monótonas decrecientes.

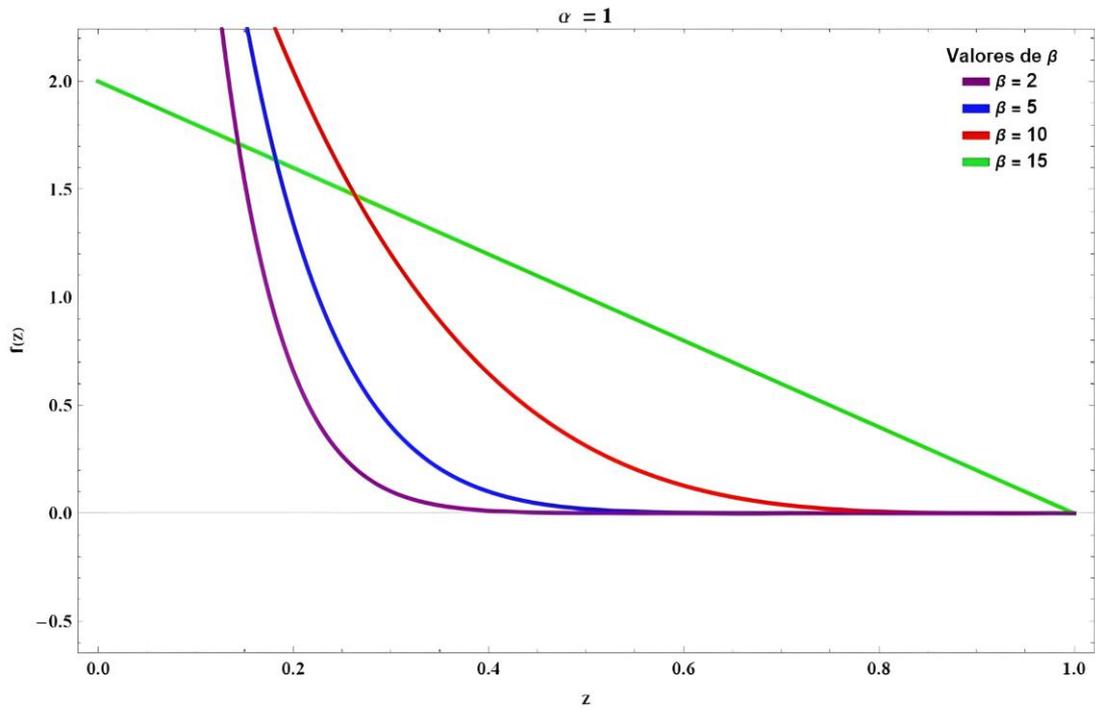


Figura 10. Caso 6 - Función de Kumaraswamy

Nota: Esta figura muestra 4 diferentes formas que puede tomar la función de densidad de KW para el caso 6 ($\alpha = 1, \beta > 1$). Para cada una de las formas, el parámetro de forma α toma valores en cuatro situaciones: $\beta = 2, \beta = 5, \beta = 10, \beta = 15$.

ANEXO III. Posiciones de Equilibrio

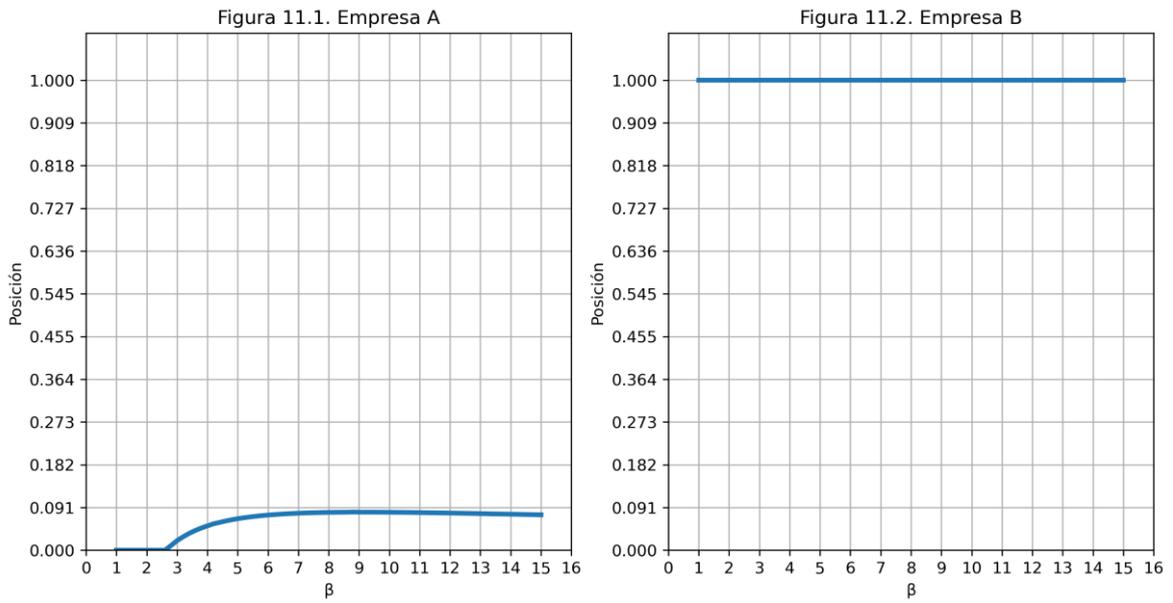


Figura 11. Posiciones de Equilibrio de las empresas con respecto a Beta

Nota: Las figuras 11.1 y 11.2 muestran como varían las posiciones de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma β varia ($\beta \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\alpha = 1$.

ANEXO IV. Precios de Equilibrio

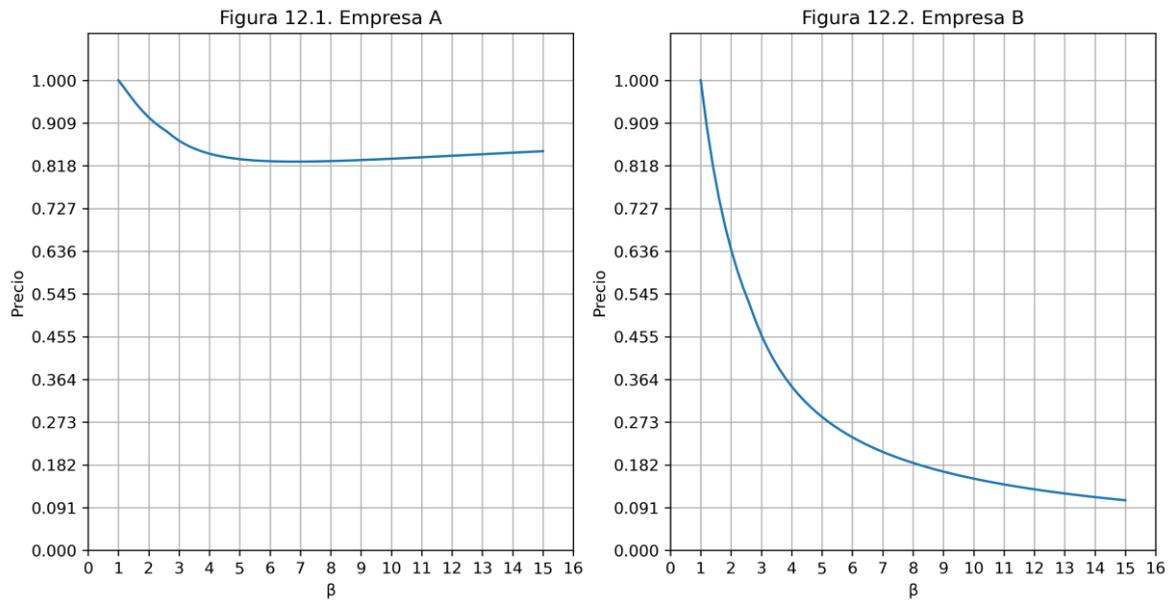


Figura 12. Precios de Equilibrio de las empresas con respecto a Beta

Nota: Las figuras 12.1 y 12.2 muestran como varían los precios de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma β varia ($\beta \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\alpha = 1$.

ANEXO V. Posición de Indiferencia

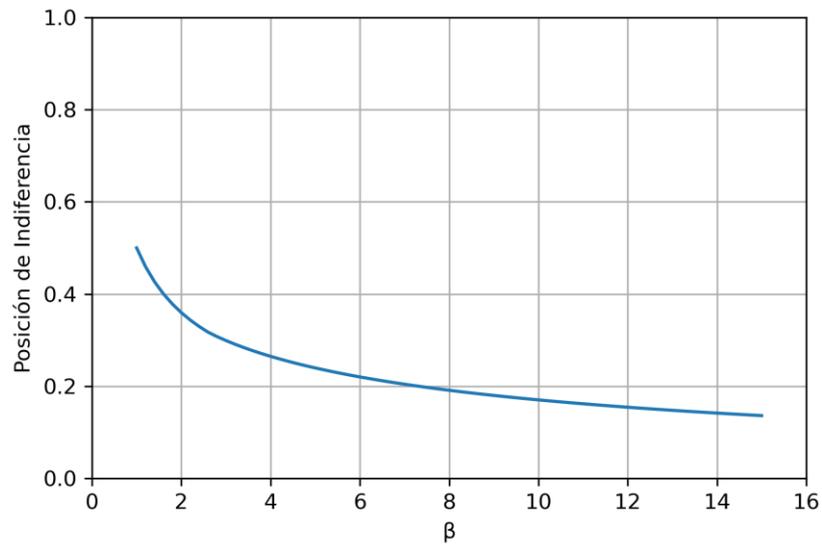


Figura 13. Posición de Indiferencia con respecto a Beta

Nota: Esta figura muestra como varia la posición de indiferencia de los consumidores dentro de la ciudad lineal cuando, el parámetro de forma β varia ($\beta \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\alpha = 1$.

ANEXO VI. Cantidades de Equilibrio

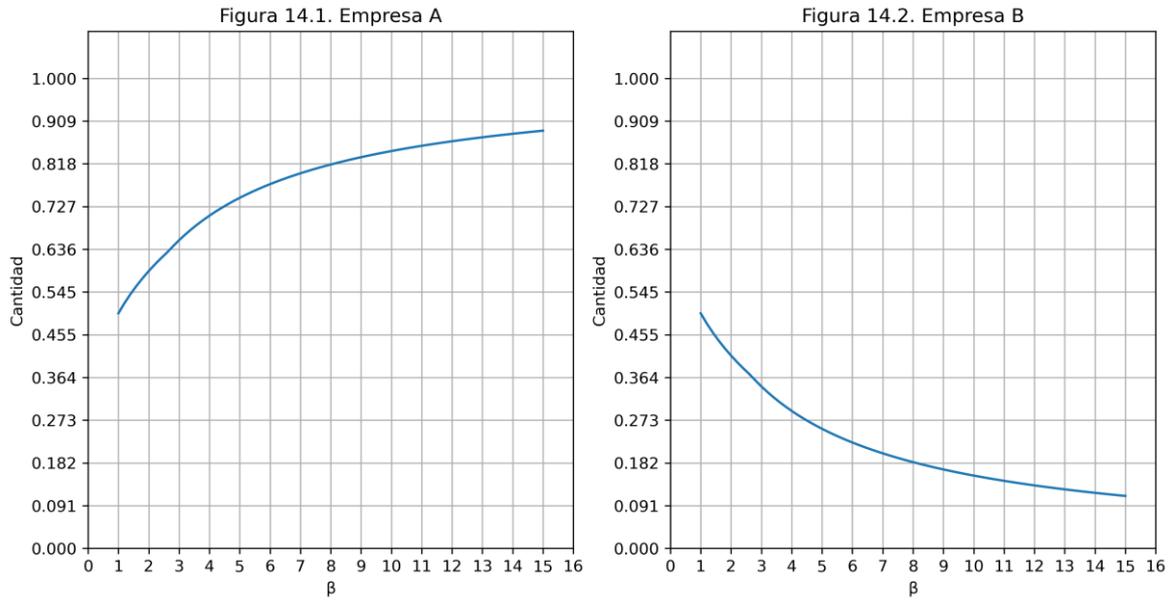


Figura 14. Cantidades de Equilibrio de las empresas con respecto a Beta

Nota: Las figuras 14.1 y 14.2 muestran como varían las cantidades de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma β varía ($\beta \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\alpha = 1$.

ANEXO VII. Beneficios de Equilibrio

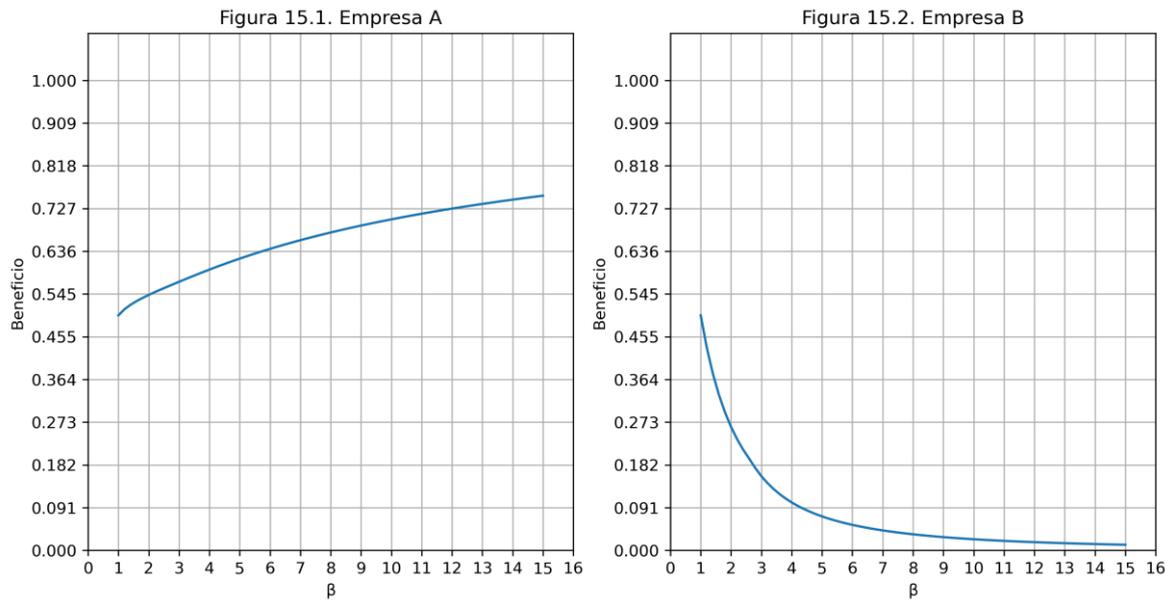


Figura 15. Beneficios de Equilibrio de las empresas con respecto a Beta

Nota: Las figuras 15.1 y 15.2 muestran como varían los beneficios de equilibrio de la empresa A y B respectivamente, cuando el parámetro de forma β varía ($\beta \in [1,15]$) y el parámetro de forma $\alpha = 1$.

ANEXO VIII. Código de Python de la extensión del modelo de Hotelling.

```

1 #####
2 ### 0) Librerías
3 #####
4
5 import numpy as np
6 import warnings
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import numpy as np
9 from scipy.optimize import minimize_scalar
10 from scipy.optimize import fsolve
11 import random as rd
12 import statistics
13 from scipy import stats
14 import sympy as sp
15 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
16
17 #####
18 ### 1) Definición de la posición de indiferencia (x_value) y las
19 cantidades de cada empresa qA,qB:
20 #####
21
22 def x_value(PA, PB, a, b, t):
23     return ((PB - PA) / (2 * t * (1 - b - a))) + (1 / 2) * (1 - b + a)
24
25 def qA(PA, PB, a, b, t,alpha,beta):
26     x=x_value(PA, PB, a, b, t)
27     return 1-(1-x**alpha)**beta
28
29 def qB(PA, PB, a, b, t,alpha,beta):
30     x=x_value(PA, PB, a, b, t)
31     return (1-x**alpha)**beta
32
33 #####
34 ### 2) %% Funciones de beneficio de cada empresa piA, piB:
35 # Definición de la función de beneficio de la empresa A:
36 #####
37
38 def piA(PA, PB, a, b, c, t,alpha,beta):
39     return PA * qA(PA, PB, a, b, t,alpha,beta) - c * qA(PA, PB, a, b,
40 t,alpha,beta)
41
42 #####
43 ### 3) Definición de la función de beneficio de la empresa B:
44 #####
45
46 def piB(PA, PB, a, b, c, t,alpha,beta):
47     return PB * qB(PA, PB, a, b, t,alpha,beta) - c * qB(PA, PB, a, b,
48 t,alpha,beta)
49 #####
50 ### 4) Segunda Etapa
51 #Definición de las funciones de mejor reacción de cada empresa
52 (#beneficio marginal de cada empresa con respecto a su precio)

```

```

53
54 # Función de mejor reacción de la empresa A con respecto a su
55 precio(prA1):
56 #####
57
58 def prA1(PB, a, b, c, t,alpha,beta):
59     res = minimize_scalar(lambda PA: -piA(PA, PB, a, b, c,
60 t,alpha,beta),bounds=(PB+t*(-1+2*a-(a**(2))+b**(2))),
61 PB+t*(1-2*b+b**(2)-(a**(2))))), method='bounded')
62     return res.x
63
64 #####
65 %% 5) Función de mejor reacción de la empresa B con respecto a su
66 precio (prB1):
67 #####
68
69 def prB1(PA, a, b, c, t,alpha,beta):
70     res = minimize_scalar(lambda PB: -piB(PA, PB, a, b, c,
71 t,alpha,beta),bounds=(PA+t*(a**(2)-1+2*b-(b**(2))),
72 PA+t*(1-2*a+(a**(2))-(b**(2))))), method='bounded')
73     return res.x
74
75
76 #####
77 %% 6) Sistema de ecuaciones (conformado por las funciones de mejor
78 reacción de las empresas con respecto a sus precios) para resolver de
79 la segunda etapa:
80 #####
81
82 def sistema1(P, a, b, c, t,alpha,beta):
83     PA, PB = P
84     return [PA - prA1(PB, a, b, c, t,alpha,beta), PB - prB1(PA, a, b,
85 c, t,alpha,beta)]
86
87 #####
88 %% 7) Definición de los precios de equilibrio de la segunda etapa
89 (PA*, PB*):
90 #####
91
92 def P_star1(P0,a,b,c,t,alpha,beta):
93     PA, PB = P0
94     PA_star1,PB_star1=fsolve(sistema1, [PA,
95 PB],args=(a,b,c,t,alpha,beta))
96     return PA_star1,PB_star1
97
98 #####
99 %% 8) Primera Etapa
100 # Definición de las funciones de mejor reacción de cada empresa para
101 #la primera etapa (beneficio marginal del beneficio con respecto a la
102 #posición para cada empresa)
103
104 # Función de mejor reacción de la empresa A con respecto a su posición
105 (prA2):
106 #####
107

```

```

108 def prA2(P0, b, c, t, alpha, beta):
109     upper_bound_a = 1 - b - 1e-10 # Restamos una pequeña cantidad
110     res = minimize_scalar(lambda a: -piA(P_star1(P0, a, b, c, t,
111 alpha, beta)[0], P_star1(P0, a, b, c, t, alpha, beta)[1], a, b, c, t,
112 alpha, beta), bounds=(0, 1-b), method='bounded')
113     return res.x
114
115 #####
116 # Función de mejor reacción de la empresa B con respecto a su posición
117 (prB2):
118 #####
119 def prB2(P0, a, c, t, alpha, beta):
120     upper_bound_b = 1 - a - 1e-10
121     res = minimize_scalar(lambda b: -piB(P_star1(P0, a, b, c, t,
122 alpha, beta)[0], P_star1(P0, a, b, c, t, alpha, beta)[1], a, b, c, t,
123 alpha, beta), bounds=(0, 1-a), method='bounded')
124     return res.x
125
126 #####
127 %% 9) Definición del sistema de ecuaciones (conformado con las
128 funciones de mejor reacción de cada empresa con respecto a su
129 posición) para resolver de la primera etapa:
130 #####
131
132 def sistema2(d,P0, c, t, alpha, beta):
133     a, b = d
134     return [a - prA2(P0, b, c, t, alpha, beta), b - prB2(P0, a, c, t,
135 alpha, beta)]
136
137 #####
138 %% 10) Definimos las posiciones de equilibrio de la primera
139 etapa(a*,b*)
140 #####
141
142 def d_star(d, P0, c, t, alpha, beta):
143     a, b = d
144     a_star1, b_star1 = fsolve(sistema2, [a, b], args=(P0, c, t, alpha,
145 beta))
146     return a_star1, b_star1
147
148 #####
149 %% 11) Definición de un vector inicial de los precios para generar un
150 punto de partida a cada simulación.
151 #####
152
153 def generar_vector_P0(t, a, b):
154     # Generar P0[1] en el rango [0, 1]
155     P0_1 = np.random.uniform(0, 1)
156
157     # Calcular los límites para P0[0] según las restricciones dadas
158     P0_0_min = max(P0_1 + t * (1 - b - a) * (-1 - b + a), 0)
159     P0_0_max = P0_1 + t * (1 - b - a) * (1 - b + a)
160
161     # Generar P0[0] dentro de los límites calculados
162     P0_0 = np.random.uniform(P0_0_min, P0_0_max)

```

```

163
164 # Calcular los límites para P0[1] según las restricciones dadas
165 P0_1_min = max(P0_0 - t * (1 - b - a) * (1 - b + a), 0)
166 P0_1_max = P0_0 - t * (-1 - b + a) * (1 - b - a)
167
168 # Generar P0[1] dentro de los límites calculados
169 P0_1 = np.random.uniform(P0_1_min, P0_1_max)
170
171 # He de asegurar que las componentes del vector de precios sean
172 mayores o iguales a cero
173 P0_0 = max(P0_0, 0)
174 P0_1 = max(P0_1, 0)
175
176 return np.array([P0_0, P0_1])
177
178 #####
179 %% 12 )Definición de una función que nos genere vector inicial de las
180 posiciones de las empresas(d) para dar un punto de partida a la
181 simulación.
182 #####
183
184 def generar_vector_d():
185     # Generar d[0] en el rango (0, 1)
186     d_0 = np.random.uniform(0, 1)
187
188     # Generar d[1] en el rango (0, 1)
189     d_1 = np.random.uniform(0, 1)
190
191     # Ajustar los valores para cumplir con las restricciones
192     d_0 = min(max(d_0, 0), 1 - d_1)
193     d_1 = min(max(d_1, 0), 1 - d_0)
194
195     # Asegurar que la suma de d[0] y d[1] sea menor que 1
196     if d_0 + d_1 >= 1:
197         # Ajustar d[0] y d[1] si la suma es mayor o igual a 1
198         ratio = np.random.uniform(0, 1)
199         d_0 *= ratio
200         d_1 *= (1 - ratio)
201
202     return np.array([d_0, d_1])
203
204 #####
205 %% 13) Simulación para el caso 8.
206 # listas vacías de resultados con respecto a cada empresa:
207 #####
208
209 Precios_A1=[]
210 Precios_B1=[]
211 Posiciones_A1=[]
212 Posiciones_B1=[]
213 Cantidades_A1=[]
214 Cantidades_B1=[]
215 Beneficio_A1=[]
216 Beneficio_B1=[]
217 Posicion_x1=[]

```

```

218
219 #####
220 ### 14) Evaluación con Alfa=2 Beta=1
221 # Parámetros:
222 #####
223
224 c,t=0,1
225 alpha=2
226 beta=1
227 print("Alfa", alpha)
228 print("Beta", beta)
229 d = generar_vector_d()
230 print("Vector inicial d generado:", d)
231 # Generar vector P0
232 P0 = generar_vector_P0(t, d[0], d[1])
233 print("Vector inicial P0 generado:", P0)
234 # Generar vector d
235 a_value=d_star(P0, d, c, t,alpha,beta)[0]
236 b_value=d_star(P0, d, c, t,alpha,beta)[1]
237 PA_value=P_star1(P0,a_value,b_value,c,t,alpha,beta)[0]
238 PB_value=P_star1(P0,a_value,b_value,c,t,alpha,beta)[1]
239 P1=[PA_value,PB_value]
240 a1=[a_value,b_value]
241 a_value=d_star(P1, a1, c, t,alpha,beta)[0]
242 b_value=d_star(P1, a1, c, t,alpha,beta)[1]
243
244 #####
245 ### 15) Imprimir resultados del modelo, para la primera simulación.
246 #####
247
248 print("Precio de la empresa A",PA_value)
249 print("Precio de la empresa B",PB_value)
250 print("Posición de la empresa A",a_value)
251 print("Posición de la empresa B",1-b_value)
252 print("Beneficio de la empresa A",piA(PA_value, PB_value, a_value,
253 b_value, c, t,alpha,beta))
254 print("Beneficio de la empresa B",piB(PA_value, PB_value, a_value,
255 b_value, c, t,alpha,beta))
256 print("Cantidad de la empresa A", qA(PA_value, PB_value, a_value,
257 b_value, t,alpha,beta))
258 print("Cantidad de la empresa B", qB(PA_value, PB_value, a_value,
259 b_value, t,alpha,beta))
260 print("Posición de indiferencia", x_value(PA_value, PB_value, a_value,
261 b_value, t))
262 del PA_value, PB_value, P1, a_value, b_value
263
264 #####
265 ### 16) Simulación con Alfa>=1 Beta=1
266 #####
267
268 for i in np.arange(1, 15.200, 0.200):
269     # Parámetros
270     c,t=0,1
271     alpha=i
272     beta=1

```

```

273     while True:
274         try:
275             print("Alfa", alpha)
276             print("Beta", beta)
277             # Generar vector d
278             d = generar_vector_d()
279             print("Vector inicial d generado:", d)
280             # Generar vector P0
281             P0 = generar_vector_P0(t, d[0], d[1])
282             print("Vector inicial P0 generado:", P0)
283             # evaluación del modelo con los diversos parametros
284             a_value=d_star(P0, d, c, t,alpha,beta)[0]
285             b_value=d_star(P0, d, c, t,alpha,beta)[1]
286             PA_value=P_star1(P0,a_value,b_value,c,t,alpha,beta)[0]
287             PB_value=P_star1(P0,a_value,b_value,c,t,alpha,beta)[1]
288             P1=[PA_value,PB_value]
289             a1=[a_value,b_value]
290             a_value=d_star(P1, a1, c, t,alpha,beta)[0]
291             b_value=d_star(P1, a1, c, t,alpha,beta)[1]
292
293             # Imprimir resultados del modelo
294             print("Precio de la empresa A",PA_value)
295             print("Precio de la empresa B",PB_value)
296             print("Posición de la empresa A",a_value)
297             print("Posición de la empresa B",1-b_value)
298             print("Beneficio de la empresa A",piA(PA_value, PB_value,
299 a_value, b_value, c, t,alpha,beta))
300             print("Beneficio de la empresa B",piB(PA_value, PB_value,
301 a_value, b_value, c, t,alpha,beta))
302             print("posición de indiferencia", x_value(PA_value,
303 PB_value, a_value, b_value, t))
304             Precios_A1.append(PA_value)
305             Precios_B1.append(PB_value)
306             Posiciones_A1.append(a_value)
307             Posiciones_B1.append(1-b_value)
308             Cantidades_A1.append(qA(PA_value, PB_value, a_value,
309 b_value, t,alpha,beta))
310             Cantidades_B1.append(qB(PA_value, PB_value, a_value,
311 b_value, t,alpha,beta))
312             Beneficio_A1.append(piA(PA_value, PB_value, a_value,
313 b_value, c, t,alpha,beta))
314             Beneficio_B1.append(piB(PA_value, PB_value, a_value,
315 b_value, c, t,alpha,beta))
316             Posicion_x1.append(x_value(PA_value, PB_value, a_value,
317 b_value, t))
318             del PA_value,PB_value,P1,a1,a_value,b_value
319
320             # Si no se produce ningún error, salimos del bucle while
321             break
322
323         except ValueError as e:
324             # Si se produce un ValueError, mostramos el mensaje de
325 error
326             print("Se produjo un ValueError:", e)
327

```

```
328         # Vuelve a compilar todo el código
329         Continue
330
```