

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Variaciones del modelo de competencia en precios

**Modelo de competencia en precios con productos diferenciados,
el caso de interdependencia por redes de empresas**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE ECONOMISTA**

GARY STEVEN GUERRÓN FLORES

gary.guerron@epn.edu.ec

DIRECTOR: JOSÉ FERNANDO RAMÍREZ ÁLVAREZ

jose.ramirez@epn.edu.ec

DMQ, Julio 2024

CERTIFICACIONES

Yo, GARY STEVEN GUERRÓN FLORES declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

GARY STEVEN GUERRÓN FLORES

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por GARY STEVEN GUERRÓN FLORES, bajo mi supervisión.

JOSÉ FERNANDO RAMÍREZ ÁLVAREZ

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

GARY STEVEN GUERRÓN FLORES

Prof. JOSÉ FERNANDO REMÍREZ ÁLVAREZ, Ph.D.

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a Dios, ya que en Colosenses 3:23 se menciona que todo lo que hagamos, debe ser hecho con el corazón, que todo lo que hagamos sea para el Señor y no para las personas. Mi motivación para este trabajo, antes de cualquier cosa, es pensar que mi Señor lo leerá; por esa razón, lo realicé con amor y dedicación.

AGRADECIMIENTO

Antes de nada, me gustaría agradecer a Dios, mi Señor. Agradezco a mis padres, quienes me han apoyado en todo mi camino, tanto en mi vida como en mi camino académico. Quiero agradecer a mi hermano, quien me ha ayudado en varias circunstancias. Me gustaría agradecer a Mateo Soliz, un buen amigo que me ha ayudado mucho en mi vida universitaria y personal. Por último, pero no menos importante, agradezco a mi profesor José Ramírez, quien me ha mostrado paciencia y me ha guiado en la realización de este trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTO	IV
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	V
RESUMEN.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1 DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO	1
1.1 Objetivo general.....	2
1.2 Objetivos específicos	2
1.3 Alcance.....	2
1.4 Marco teórico	4
2 METODOLOGÍA.....	11
2.1 Fundamentos: Juegos Estáticos	11
2.2 Insumos Analíticos: Redes libres de escala	14
2.3 Extensión: Modelo de competencia de precios para bienes diferenciados con redes libres de escala	17
3 RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	25
3.1 Red productiva para el ejercicio de simulación	25
3.2 Conclusiones	38
3.3 Recomendaciones	38
4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	40
5 ANEXOS	42

RESUMEN

Este trabajo analiza las decisiones que una red de empresas toma sobre sus precios para alcanzar el mayor beneficio posible, con bienes diferenciados. Para ello, se utiliza el modelo clásico de competencia en precios para bienes heterogéneos, asumiendo que las relaciones de complementariedad y sustitución entre las empresas se encuentran representadas mediante un grafo dirigido y ponderado. Adicionalmente, se asume que la red de empresas es libre de escala, pues sigue empleando para ello el algoritmo de Barabási-Albert. Por un lado, la solución analítica del modelo muestra que el Equilibrio de Nash en precios para la red de empresas se encuentra determinado de manera lineal por la matriz de pesos del grafo que contiene los grados de complementariedad y sustitución. Por otro lado, en términos numéricos, los resultados de las simulaciones muestran que, cuando los bienes son sustitutos, un número muy pequeño de empresas (centrales) fijan un precio, en promedio más alto, además de producir más que las demás empresas (periféricas), desembocando en una mayor percepción de ganancias. Paralelamente, cuando se tienen bienes complementarios, las empresas centrales no solo fijan, en promedio, un precio más bajo, sino que su producción es menor en contraste con las empresas periféricas, provocando que sus beneficios sean bajos. Finalmente, se muestra que, para bienes sustitutos y complementarios, los precios y cantidades siguen una distribución normal, aunque los beneficios para bienes complementarios no poseen esta característica.

PALABRAS CLAVE: Competencia en precios, Bienes heterogéneos, Economía Industrial, Teoría de Juegos, Equilibrio de Nash, red libre de escala,

ABSTRACT

This paper examines the pricing decisions made by a network of firms to maximize profits with different types of goods. The model of price competition with diverse goods is used, assuming that the relationships of complementarity and substitution between firms are represented by a weighted directed graph. Additionally, the network of firms is assumed to be scale-free using the Barabási-Albert algorithm. The analytical solution of the model reveals that the Nash Equilibrium in prices for the network of firms is determined by the weight matrix of the network containing the degrees of complementarity and substitution. In numerical terms, the simulations show that when goods are substitutes, a small number of central firms set a higher price on average and produce more than the peripheral firms, resulting in higher profits. Conversely, when there are complementary goods, central firms not only set a lower price on average, but their production is also lower compared to peripheral firms, leading to lower profits. Additionally, it is demonstrated that for substitute and complementary goods, prices and quantities follow a normal distribution, while the profits of complementary goods do not exhibit this characteristic.

KEYWORDS: Price competition, Heterogeneous goods, Industrial Economics, Game Theory, Nash Equilibrium, scale-free network.

1 DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO

Una de las herramientas que ayuda en el estudio de la competencia de precios, dada la interacción entre agentes, es la teoría de juegos. Se sabe que, en teoría de oligopolio, más precisamente, en organización industrial, los agentes se encuentran en conflicto debido a su interdependencia estratégica. Esto provoca una lucha sobre quien fijará los precios óptimos, puesto que dichos agentes, al ser racionales, buscan obtener el mayor beneficio posible (Ricart, 1988; Vintila & Roman, 2021). Es por esta razón que se han desarrollado una gran variedad de modelos que puedan estudiar y comprender la competencia de precios. Dentro de estos modelos, se tiene el modelo de duopolio de Bertrand (1883), el cual establece las bases canónicas para la determinación de los precios óptimos mediante la introducción del conocido Equilibrio de Nash (EN) (Gibbons, 1992; Tadelis, 2013; Watson, 2013).

En el trabajo de Varian (1999), se menciona que el modelo de Bertrand cuenta con una problemática, conocida como la paradoja de Bertrand, la cual manifiesta que las empresas, a pesar de estar compitiendo en precios, establecen un precio que solo les permite salvar sus costos, sin generar ganancias. Consecuentemente, surgieron modelos que ayudaron a resolver esta paradoja, tales como el modelo de Edgeworth (1897), el cual propone poner una restricción sobre la cantidad producida; el modelo de Hotelling (1929), el cual introdujo la distancia como variable para que la competencia fuera sobre el costo de transporte; y el modelo de duopolio de Bertrand con bienes heterogéneos, que en contraste con el modelo original, cada empresa vende su “propio” producto, en lugar de ser el mismo para ambas (Pérez Navarro et al., 2004).

En este sentido, el modelo de Bertrand con bienes heterogéneos ha tenido varias extensiones. Dentro de estas, se puede mencionar la extensión de Vives (1985), donde las funciones de demanda son continuas, pudiendo trabajar con bienes sustitutos y complementarios. También, se tiene el modelo de Askar (2014), donde se utilizan funciones de costos no lineales. Por otro lado, hay variaciones donde los costos son asimétricos, tal es el caso de los trabajos de Vintila & Roman (2021); Zanchettin (2006); Ledvina & Sircar (2012). Asimismo, se tiene el modelo de Choi et al. (2021), donde la asimetría en los costos produce que el juego sea bayesiano.

En este trabajo de integración curricular, se hará una extensión al modelo de Bertrand, enfocado en la competencia de precios con bienes heterogéneos. Para este modelo, los grados de sustitución y complementariedad que posee cada empresa con respecto a sus rivales, se representa mediante un grafo dirigido ponderado, donde los nodos son las

empresas y las aristas representan la interacción de las empresas en el mercado. Estas interacciones se asumen diferentes, en lugar de ser iguales para todas las empresas como en el modelo original. En base a este modelo, se encuentra de manera analítica el EN para n -empresas, empleando herramientas del álgebra matricial, teoría de grafos y teoría de juegos.

Paralelamente, en este trabajo se desarrolla un algoritmo computacional que contrasta los resultados numéricos con los resultados analíticos para una red libre de escala de n -empresas, donde los grados de sustitución y complementariedad se comportan como una variable aleatoria. Este algoritmo se implementa para un conjunto considerable de empresas, llevando a cabo un gran número de simulaciones. Los precios, cantidades y beneficios obtenidos en este proceso se analizan de manera estructural con respecto al posicionamiento que tienen las empresas en la red. Además, se realiza una estadística descriptiva sobre los mismos, así como sus respectivos histogramas.

1.1 Objetivo general

Analizar el Equilibrio de Nash para el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados en una red productiva.

1.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión bibliográfica sobre trabajos que dieron solución a la paradoja de Bertrand. Además, elaborar una revisión bibliográfica sobre las extensiones al modelo de Bertrand con bienes diferenciados.
- Analizar el modelo de competencia de precios con bienes diferenciados para tres empresas, y desarrollar un teorema para la extensión correspondiente de n empresas.
- Generar un algoritmo computacional que encuentre el Equilibrio de Nash para las n -empresas en un grafo dirigido ponderado.
- Analizar los equilibrios de Nash que se desprenden para una red libre de escala con aleatoriedad en los grados de sustitución y complementariedad.

1.3 Alcance

- Fase de revisión

- Se realizará una revisión de literatura sobre teoría de juegos. En esta parte, se mencionará los tipos de juegos, los elementos que tienen los juegos estáticos con información completa y el equilibrio de Nash.
- Se realizará una revisión de la literatura del modelo base, es decir, el Modelo de duopolio de Bertrand con bienes heterogéneos para dos empresas.
- Fase de diseño
 - Se realizará una revisión de literatura sobre teoría de grafos con énfasis en conceptos de red.
 - Se realizará una revisión de literatura sobre redes libres de escala y el modelo de Barabási-Albert (BA).
 - Se planteará la extensión del modelo de Bertrand, enfocado en la competencia en precios con bienes diferenciados para tres empresas usando teoría de grafos, y se encontrará el EN de manera analítica.
 - Se extenderá el modelo a n-empresas mediante teoría de grafos y teoría matricial.
- Fase de implementación
 - Se presentará un pseudo código para la determinación del EN para n-empresas.
 - Se desarrollará un código Python para la construcción de una red de empresas libre de escala, utilizando el algoritmo de BA.
 - Se desarrollará un código Python para la determinación numérica de los Equilibrios de Nash
- Fase de análisis
 - Se realizará un análisis estructural de los precios, cantidades y beneficios del EN para una red productiva de 100 empresas, con 1,000 simulaciones Montecarlo para los grados de complementariedad y sustitución.
 - Se realizará un análisis descriptivo de la media de los precios, cantidades y beneficios del EN para las simulaciones obtenidas.

1.4 Marco teórico

Modelo Base: Modelo de competencia en precios con bienes heterogéneos

Planteamiento

En el trabajo de Gibbons (1992), se plantea el modelo de Bertrand enfocado en la competencia de precios con bienes heterogéneos, como un problema en el cual dos empresas buscan simultáneamente determinar los precios de sus productos diferenciados con el objetivo de maximizar sus beneficios. (Contreras et al., 2008)

Los supuestos que tiene este modelo son (Contreras et al., 2008; Pérez Navarro et al., 2004; Tadelis, 2013; Rabah Amira & Jim Y. Jinb, 2001):

- La empresa 1 y la empresa 2 buscan maximizar sus beneficios.
- Las empresas compiten, de manera simultánea, sobre los precios, los cuales se asumen no negativos.
- Los costos marginales de ambas empresas son constantes e iguales a c ($c \neq 0$), es decir,

$$C_1(q_1) = cq_1 \text{ y } C_2(q_2) = cq_2$$

donde q_1, q_2 son los niveles de producción de las empresas 1 y 2, respectivamente.

- Los productos son heterogéneos, de manera que existen funciones inversas de demanda diferentes para cada bien:

$$p_1(q_1, q_2) = a - q_1 - dq_2$$

$$p_2(q_1, q_2) = a - q_2 - dq_1$$

donde p_1, p_2 son los precios de las empresas 1 y 2, respectivamente; a es el precio base para producción nula de ambas empresas ($a > c > 0$)¹ y d es un parámetro de diferenciación ($-1 < d < 1$) tal que:

- Si $d > 0$, la empresa 1 y empresa 2 producen bienes sustitutos.
- Si $d < 0$, la empresa 1 y empresa 2 produce bienes complementarios.

¹ La condición $a > c > 0$ permite que la producción de los bienes sea positiva y no genere pérdidas.

- Si $d = 0$, la empresa 1 y empresa 2 producen bienes independientes.

A partir de este sistema, se obtienen las siguientes funciones de demanda

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{a}{1+d} - \frac{1}{1-d^2}p_1 + \frac{d}{1-d^2}p_2 \quad (1.1)$$

$$q_2(p_1, p_2) = \frac{a}{1+d} - \frac{1}{1-d^2}p_2 + \frac{d}{1-d^2}p_1 \quad (1.2)$$

Analizamos este sistema. Para ello, basta estudiar el comportamiento de la ecuación (1.1) dada su similar estructura. Esta ecuación muestra una relación negativa entre el precio de la empresa 1 (p_1) y su cantidad demandada (q_1). Es decir, a medida que el precio aumenta, su cantidad demandada disminuye (es decir, se cumple la ley de la demanda). Por otro lado, el precio de la empresa 2 (p_2) puede tener una relación positiva, negativa o neutral con respecto a la cantidad demandada de la empresa 1 (q_1). Si la relación es positiva ($d > 0$), a medida que la empresa rival aumenta su precio, la empresa 1 incrementará su cantidad demandada. Esta relación ocurre por la presencia de bienes sustitutos, pues si la empresa 2 decide aumentar sus precios, los consumidores optarán por los bienes que ofrece la empresa 1, provocando que esta demanda aumente. Por otra parte, si la relación es negativa ($d < 0$), un incremento del precio de la empresa 2 causará una disminución en la cantidad demanda de la empresa 1. Este fenómeno se explica por la presencia de bienes complementarios, pues cuando la empresa 2 decide subir el precio, los compradores también deciden no comprar los artículos de la empresa 1, lo que provoca que la cantidad demandada caiga para ambas. Finalmente, es importante señalar que no existe relación alguna entre el precio de la empresa 2 y la cantidad demandada de la empresa 1 cuando $d = 0$. En este caso, los bienes ofrecidos por ambas empresas son completamente independientes entre sí. La ausencia de una correlación refleja la falta de sustitución o complementariedad entre los productos, indicando que los consumidores no ven estos bienes como alternativas entre sí.

Ahora bien, los beneficios de la empresa 1 y de la empresa 2 son:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)q_1(p_1, p_2)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)q_2(p_1, p_2)$$

reemplazando (1.1) y (1.2), se tiene obtienen las siguientes funciones:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \left(\frac{a}{1+d} - \frac{1}{1-d^2}p_1 + \frac{d}{1-d^2}p_2 \right) \quad (1.3)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c) \left(\frac{a}{1+d} - \frac{1}{1-d^2} p_2 + \frac{d}{1-d^2} p_1 \right) \quad (1.4)$$

Estas funciones representan el punto de partida para el cálculo del EN.

Desarrollo

Para encontrar el EN de este problema, se debe maximizar las funciones de beneficio (1.3) y (1.4) de manera simultánea. Para ello, primero se determinan las funciones de mejor respuesta de ambas empresas $p_1^{BR}(p_2)$ y $p_2^{BR}(p_1)$, y luego se determinan los precios p_1^* y p_2^* que resuelven estas funciones dada la interdependencia estratégica entre las empresas, es decir:

$$p_1^{BR}(p_2) = p_1^*, \quad p_2^{BR}(p_1) = p_2^*$$

Formalmente, el problema de la empresa 1 consiste en:

$$\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \left(\frac{a}{1+d} - \frac{1}{1-d^2} p_1 + \frac{d}{1-d^2} p_2 \right)$$

Luego, la condición de primer orden para la empresa 1 es:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0$$

Así, se obtiene la función de mejor respuesta de la empresa 1:

$$p_1^{BR}(p_2) = \frac{a(1-d) + c}{2} + \frac{d}{2} p_2 \quad (1.5)$$

Para la empresa 2, se procede de manera similar. De este modo, se tiene que:

$$p_2^{BR}(p_1) = \frac{a(1-d) + c}{2} + \frac{d}{2} p_1 \quad (1.6)$$

Utilizando la ecuación (1.5) como ejemplo, se observa cómo el precio fijado por la empresa rival influye en la toma de decisiones de la empresa 1. En el escenario de bienes sustitutos ($d > 0$), si el precio de la empresa 2 sube en una unidad, la empresa 1 optará por aumentar el suyo en $\frac{d}{2}$. Esto sucede porque, al ser los bienes sustitutos, la empresa 1 decide aumentar su precio, pero manteniéndolo por debajo del precio de la empresa rival. De esta manera, el mercado elegirá consumir los bienes de la empresa 1 en lugar de los de la empresa 2. Además, el precio de la empresa 1 aumenta en comparación con su estado inicial, lo que lleva a un aumento adicional en los beneficios. En resumen, la empresa 1 decide aumentar su precio, pero lo suficiente como para que sigan siendo más bajos que los de la empresa 2, lo que resulta en un aumento de sus beneficios.

En el escenario de bienes complementarios ($d < 0$), si el precio de la empresa 2 sube en una unidad, el precio de la empresa 1 disminuirá en $\frac{d}{2}$ unidades. Esto se debe a que los bienes se complementan en su consumo; es decir, si el precio del producto de la empresa 2 aumenta, los consumidores tendrán menos incentivos para comprar tanto el bien de la empresa rival como el de la empresa 1. Es por esta razón que, la empresa 1 decide disminuir su precio para mitigar el impacto de la contracción de la demanda debido al aumento en el precio del bien de la empresa 2. Sin embargo, la empresa 1 no disminuirá su precio en exceso, ya que esto podría llevar a pérdidas. Por lo tanto, reduce su precio en una proporción al precio de su rival, asegurando así que pueda mantener su participación en el mercado y evitar pérdidas significativas.

Para el caso de bienes neutrales ($d = 0$) se tiene que el precio de la empresa 1 y la empresa 2 no sufren reacción alguna, debido a que ninguna de las dos empresas depende una de la otra. Sin embargo, el precio óptimo que decida cada empresa depende únicamente de sus costos y de sus estrategias de producción. En resumen, el precio que establece cada empresa se lo hace de manera independiente.

Para hallar el EN, se debe resolver el sistema formado por las ecuaciones (1.5) y (1.6). De esto resulta:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a(1-d) + c}{(2-d)} \quad (1.7)$$

Luego, reemplazando (1.7) en (1.1) y (1.2), se tiene que las cantidades demandadas óptimas de cada empresa son:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{(1+d)(2-d)} \quad (1.8)$$

Del mismo modo, reemplazando (1.7) y (1.8) en (1.3) y (1.4), se tiene que los beneficios óptimos son:

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{(a-c)^2(1-d)^2}{(1-d^2)(2-d)} \quad (1.9)$$

Se puede observar en (1.8) y (1.9) que $q_1^*, q_2^* > 0$ y $\pi_1^*, \pi_2^* > 0$, ya que $a > c$ y $|d| < 1$. Además, a partir de la ecuación (1.7), se tiene:

$$p_1^* = p_2^* = c + \frac{(a-c)(1-d)}{(2-d)}$$

$$p_1^*, p_2^* > c$$

En este caso, las empresas fijan un precio por encima de su costo marginal, logrando que las empresas generen ganancias.

Revisión de la literatura

Tras la publicación del modelo de Cournot (1838), Bertrand criticó su perspectiva al argumentar que, en la realidad, las empresas competían principalmente sobre precios en lugar de cantidades. Bertrand sostenía que quien redujera su precio ganaría una ventaja significativa, lo que resultaría en una duplicación de sus ganancias (Church & Ware, 2000). De esta manera, Bertrand introduce su modelo de competencia de precios sobre bienes homogéneos que, en contraste con el modelo de Cournot, donde las empresas toman decisiones de forma simultánea sobre la cantidad de producción, las empresas fijan sus precios de manera independiente (Bertrand, 1883). Así, resolviendo el problema planteado por Bertrand, y teniendo en cuenta que las empresas buscan establecer el precio más bajo posible con el objetivo de maximizar sus ganancias, se llega al equilibrio de Bertrand-Nash, donde el precio es igual al costo marginal y los beneficios son nulos (Tenorio Villalón & Martín Caraballo, 2015). Este resultado entra en un conflicto conocido como la paradoja de Bertrand, ya que se llega al mismo equilibrio competitivo que se obtiene en competencia perfecta, pese a que se tiene en el mercado solo dos empresas. Intuitivamente se pensaría que, en un duopolio, el precio sería ligeramente más alto que el costo marginal y no igual (Varian, 1999).

Algunos autores propusieron modificaciones al modelo de Bertrand para evitar caer en dicha paradoja. Entre ellos, se tiene a Edgeworth (1897), quien sugirió que las empresas también debían tener restricciones en la cantidad que podían producir. Esto introdujo la posibilidad de que las empresas, en lugar de simplemente igualar el precio al costo marginal, pudieran elegir cuanto producir y, por lo tanto, colaborar para mantener precios más altos. Esta modificación permite que las empresas tengan la opción tanto de competir como de aliarse, lo que resuelve la paradoja. De la misma forma, se tiene la contribución de Hotelling (1929), con su modelo de competencia espacial, en donde se incluye la distancia como una variable del modelo. Esto implica que, aunque los productos sean idénticos, las ubicaciones de las empresas generan costos de transporte o diferencias en las preferencias de los consumidores. Esta distancia permite a las empresas diferenciar efectivamente sus productos, logrando así la variación en los precios y rompiendo con la paradoja. De manera sutil, en el modelo de Hotelling se llega a apreciar la idea de diferenciación de productos, lo cual conduce al modelo de competencia en precios con productos diferenciados, que es una extensión del modelo original de Bertrand. En este modelo, los productos presentan ciertas diferencias a los ojos de los consumidores, lo cual

hace que el bien de cada empresa sea único. Esta diferenciación del producto le permite a cada empresa tener cierto poder sobre el mercado, lo que les permite colocar un precio por encima del costo marginal y así obtener beneficios no nulos (Pérez Navarro et al., 2004).

El modelo de Bertrand para bienes heterogéneos es un modelo que funciona bastante bien para eliminar la paradoja como se mencionó anteriormente. Al examinarlo, desde una perspectiva analítica, se puede recurrir al trabajo de Singh y Vives (1984), donde se parte del supuesto de que las empresas buscan fijar precios sobre bienes heterogéneos, teniendo presente que sus costos marginales son constantes. Además, se plantean funciones de demanda lineales, lo que permite trabajar con bienes complementarios y sustitutos. Esta estructura permite que el equilibrio de Bertrand-Nash sea único y que este equilibrio sea una estrategia dominante cuando se trata de bienes sustitutos o bienes complementarios. De igual manera, en el trabajo de Cheng, (1985), se realiza un análisis geométrico para tener una mejor comprensión sobre los equilibrios. Específicamente, Cheng demuestra que las empresas maximizan su beneficio cuando se tiene bienes complementarios en lugar de sustitutos. Por otra parte, Vives (1985) extiende el modelo de Bertrand con bienes diferenciados. Este trabajo no se plantea para dos empresas, sino para n -empresas. Además, se emplean funciones de demanda no lineales en lugar de funciones de demanda lineales. Esta variación admite un supuesto suficiente sobre las funciones de mejor respuesta para que estas sean una contracción. Este supuesto garantiza la existencia, unicidad y estabilidad de los equilibrios de Bertrand-Nash. Asimismo, Askar (2014) utiliza funciones no lineales sobre los costos con el objetivo de analizar cuáles son las condiciones de estabilidad del equilibrio. Para ello, las condiciones se centran en estrategias de mejor respuesta, ajuste adaptativo y racionalidad limitada. Así, cuando las empresas siguen una estrategia de mejor respuesta o un ajuste adaptativo, el EN se mantiene estable y es único, mientras que, si se sigue una racionalidad limitada, el EN se vuelve inestable.

Dentro de los modelos de competencia de precios, se asumen también asimetría en costos. Un ejemplo es el trabajo de Vintila y Roman (2021), donde el costo marginal de las empresas es constante pero diferente. Cuando se tiene esta asimetría en los costos, una de las empresas tiene ventaja competitiva, pues se espera que las personas elijan siempre su producto, ya que los precios son más bajos. Además, su Equilibrio de Nash existe y el precio máximo que se obtiene está por encima de los costos marginales. Sin embargo, cuando se habla de un Equilibrio de Nash único, los precios y los costos marginales son iguales. De igual manera, en el trabajo de Zanchettin (2006), no solo se toma en cuenta la asimetría en los costos, sino también en la demanda. Por un lado, la asimetría en costos

permite que las empresas sean diferentes, logrando así que las empresas puedan fabricar sus propios productos. Por otro lado, la asimetría en la demanda se entiende como la calidad o las características que presenta el producto, lo cual hace que resalte y se vuelva valioso, de alguna forma, para el consumidor que lo compra. Así, al centrarse en bienes sustitutos, se tiene que, cuando la asimetría es fuerte y/o los productos son débilmente diferenciados, los beneficios de una empresa eficiente y de la industria son más altos en el modelo de Bertrand que en el de Cournot. Además, en este modelo, los costos son más bajos y el beneficio social es mayor. Del mismo modo, el trabajo de Ledvina y Sircar (2012) realiza un análisis entre el modelo de Cournot y el modelo de Bertrand, con el supuesto de asimetría en los costos. Los hallazgos de Ledvina y Sircar indican que, sin importar si los bienes son homogéneos o heterogéneos, en el equilibrio se encuentran más empresas activas en el modelo de Cournot que en el modelo de Bertrand. También, se tiene que, si los bienes son heterogéneos, en el equilibrio habrá más empresas activas en comparación con los bienes homogéneos, sin importar entre ambos modelos.

Asimismo, existen modelos donde se tiene asimetría de información en costos. Esta característica se puede observar en el modelo de Spulber (1995). En este modelo, se asigna una probabilidad de ocurrencia sobre los costos de producción de un bien homogéneo, con lo cual su solución representa un equilibrio de Bayes-Nash. Los resultados son similares cuando se asume bienes heterogéneos. Por ejemplo, en el trabajo de Choi et al. (2021), se encuentra que, a medida que aumenta el grado de diferenciación sobre el producto, los precios disminuyen. Sin embargo, si la probabilidad de los precios marginales aumenta, los precios aumentan.

2 METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología que se emplea para estudiar la competencia en precios con bienes heterogéneos para una red de empresas. En este contexto, en la primera sección se realiza una descripción sobre los juegos estáticos para posteriormente introducir los elementos de este tipo de juegos y definir el Equilibrio de Nash. En la segunda parte, se define la red de empresas como un grafo dirigido ponderando, y además se introduce el concepto de red libre de escala. En la tercera parte, se desarrolla el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados para tres empresas, el cual servirá de base para extender el modelo a un mayor número de empresas. En el cuarto apartado, se realiza la extensión del modelo para una red de n-empresas, con ayuda de la teoría de juegos y la teoría de grafos previamente recapitulados. Finalmente, el capítulo termina presentando un teorema que generaliza los resultados hallados y un pseudo código que será útil para las simulaciones numéricas del equilibrio.

2.1 Fundamentos: Juegos Estáticos

Introducción a Teoría de Juegos

La definición atribuida a “juego” es la de una situación divertida en la que hay una interacción dentro de un grupo de individuos, quienes establecen reglas y buscan alcanzar el mejor pago o recompensa que se puede obtener después de haber alcanzado un determinado resultado (Vega-Redondo, 2003). Por otra parte, Ricart (1988) define juego como cualquier conflicto que resulte de las decisiones e interacciones de dos o más agentes. Este conflicto surge porque los intereses de los agentes se contraponen entre sí. De esta manera, nace la teoría de juegos, la cual, mediante la herramienta de las matemáticas, proporciona técnicas que ayudan a entender los conflictos que se generan entre diversos agentes, los cuales, siendo racionales e inteligentes, luchan por alcanzar su propio bienestar. Esto se puede trasladar al mundo de la política y la economía, donde los agentes constantemente toman decisiones para obtener una mejor utilidad, provocando incertidumbre y conflictos dentro de los involucrados (Myerson, 1991).

A continuación, se realiza una breve descripción de esta teoría, a partir de los trabajos de Tadelis (2013), Pérez Navarro et al. (2004), Gibbons (1992) y Watson (2013).

Tipos de Juegos

En teoría de juegos, es necesario realizar una distinción sobre juegos cooperativos y juegos no cooperativos. Por un lado, en los juegos cooperativos, algunos o todos los jugadores se ponen de acuerdo sobre que decisiones van a tomar para mejorar su beneficio. Por otro

lado, en los juegos no cooperativos, los jugadores conocen a sus oponentes y las decisiones que estos pueden tomar, sin embargo, estas decisiones se toman de manera independiente. Es decir, estos agentes actúan de manera egoísta, tratando de predecir cuales van a ser los movimientos de sus contrincantes para conseguir un beneficio propio.

Dentro de los juegos no cooperativos se desprenden los juegos estáticos y dinámicos, los cuales pueden tener información completa o información incompleta. Cuando se habla de juegos estáticos, se entiende que los jugadores toman sus decisiones de forma simultánea e independiente. Es decir, estos jugadores eligen realizar una acción al mismo tiempo, provocando que nadie sepa lo que cada uno elige. Por otro lado, en los juegos dinámicos, los jugadores toman sus decisiones de forma secuencial. Aquí, la decisión que toma un jugador depende de las decisiones previas que toma el otro jugador. En otras palabras, uno de los jugadores conoce la decisión que tomó algún otro jugador previamente.

En un juego con información completa, todos los jugadores deben tener conocimiento común de todas las posibles decisiones que puedan tomar cada jugador, de todos los posibles resultados que se pueden obtener con cada posible acción a tomar por los jugadores, y de las posibles preferencias que los jugadores desearían alcanzar como resultado. Por el otro lado, cuando el juego es de información incompleta, ya no se cuenta con el supuesto de conocimiento común. En esta parte, los jugadores no sabrán cuales son las preferencias de los demás jugadores, provocando incertidumbre sobre estos. En este sentido, el resultado al que vayan a llegar los jugadores, dependiendo de las acciones que decidan tomar, ya no será previsible.

Debido a que el modelo base de la presente investigación, esto es, el modelo de competencia en precios con bienes heterogéneos se centra en un juego Estático con información Completa, a continuación solo se abordaran los elementos de este tipo de juego.

Elementos de un Juego Estático con Información Completa

Se debe tener algunas suposiciones para este tipo de juegos. La primera es que los jugadores deben ser racionales, es decir, que los jugadores tomen una estrategia que haga que su beneficio o bienestar sea el más alto. La segunda es que los jugadores sean inteligentes, es decir, que los jugadores conocen las acciones, las preferencias y los resultados de todos los jugadores. Estos dos supuestos se reducen en uno, que es la suposición de que todos los jugadores tienen conocimiento común. En este contexto, la terminología que se usa en juegos estáticos con información completa, así como sus definiciones matemáticas, es la siguiente:

- i. Los jugadores son individuos, entre dos o más, que toman decisiones dentro de un juego para maximizar su utilidad.
- ii. Las acciones de cada jugador son las decisiones que se puede tomar en cada turno. Este conjunto de acciones puede ser finito o infinito.
- iii. Los resultados de un juego son las distintas posibilidades en que puede terminar un juego y este resultado está sujeto a una consecuencia para cada jugador.
- iv. Se denomina pago a lo que recibe cada jugador después de haberse terminado el juego. El pago depende del resultado del juego.
- v. Una estrategia es un conjunto de acciones que tiene un jugador.
- vi. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias que tiene un jugador.

Formalmente, este juego se puede representar por la tripleta $\mathcal{G} = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$ donde:

- i. J es el conjunto de jugadores tal que $J = \{1, 2, \dots, n\}$.
- ii. S_i es el espacio o conjunto de estrategias de cada jugador $i \in J$.
- iii. $\pi_i: \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pagos o ganancias para cada jugador $i \in J$

Para el manejo analítico de este juego, se define el perfil de estrategias $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ como el vector que reúne las estrategias $s_i \in S_i$ que toman el conjunto de jugadores J . Asimismo, se define perfil de estrategias $\mathbf{s}_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ como el vector que reúne las estrategias de todos los jugadores, excepto aquella estrategia del jugador i

Equilibrio de Nash

En un juego estático con información completa, todos los jugadores logran identificar cual es el resultado de mayor utilidad y luchan para conseguirlo, sin embargo, existen trabas en su camino ya que estos resultados están sujetos a las decisiones de los demás jugadores. Este hecho sugiere definir un concepto de solución que ayude a encontrar un perfil de estrategias que pueda simplificar, analizar y predecir juegos estratégicos. Un concepto de solución frecuentemente utilizado en la literatura económica es el Equilibrio de Nash.

Un Equilibrio de Nash describe una situación en que todos los jugadores han tomado una decisión tal que ninguno de ellos tiene incentivos para cambiar su elección, pues cada jugador escogió la mejor estrategia, dada las estrategias que eligieron los demás jugadores. En este sentido, se hacen necesarias las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Mejor Respuesta

Sea un juego $\mathcal{G} = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$ y sean los perfiles de estrategia $s_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$. La estrategia s_i es la mejor respuesta del jugador i sí y solo si,

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \in S_i$$

Definición 2.2. Función de Mejor Respuesta

Sea un juego $\mathcal{G} = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$. La función de mejor respuesta del jugador i se define como el conjunto de estrategias de mejor respuesta del jugador i , dados todos los posibles perfiles de estrategias de los otros jugadores $s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir:

$$MR_i(S_{-i}) = \{s_i \in S_i : \pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \in S_i, s'_i \neq s_i\}$$

Definición 2.3. Equilibrio de Nash

Sean un juego $\mathcal{G} = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$ y $s^* \in S$. El perfil de estrategias s^* es un Equilibrio de Nash si $s_i^* \in MR_i(S_{-i}^*)$ para cada jugador en $i \in J$. Es decir,

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}^*) \quad \forall s'_i \in S_i$$

A partir de estas definiciones, se puede mencionar que el equilibrio es estratégicamente estable, ya que cada uno de los jugadores nunca cambiarían su estrategia, puesto que esta es la mejor estrategia que existe para cada uno de ellos. En otras palabras, la estrategia que escogieron es la estrategia común de mejor respuesta.

2.2 Insumos Analíticos: Redes libres de escala

Concepto de red

En el trabajo de Jackson (2008), se proporcionan los conceptos y definiciones fundamentales que ayudan en la representación y caracterización de redes. En ese contexto, se presenta la definición de un grafo (N, g) , donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto de nodos y $g_{n \times n}$ es una matriz cuyos elementos $g_{ij} \in \mathbb{R}_+$ representan la conexión que existe entre el nodo i y el nodo j . Esta matriz también se la conoce como matriz de adyacencia.

Es preciso mencionar que cuando las entradas de la matriz de adyacencia $g_{n \times n}$ toman valores de 0 ó 1, el grafo se llama grafo no ponderado. Por otro lado, cuando sus valores toman cualquier otro valor real positivo que represente la intensidad, fuerza o nivel de las relaciones entre los nodos, el grafo se llama grafo ponderado.

Otra consideración esencial radica en la distinción entre redes dirigidas y no dirigidas, dado que sus aplicaciones y modelos difieren significativamente. En el caso de una red no dirigida, los nodos están interconectados, pero las conexiones no tienen una dirección definida de manera unívoca. Si existe una conexión entre dos nodos, i y j , se establece una relación bidireccional: i está conectado a j y, simultáneamente, j está conectado a i . Por otro lado, en el caso de una red dirigida, los nodos establecen conexiones de manera unívoca y dirigida. Cuando existe un enlace dirigido desde el nodo i hacia el nodo j , no necesariamente implica que existe un enlace en la dirección opuesta, de j hacia i . En este caso, la relación es asimétrica y unidireccional entre los nodos.

Formalmente, se tiene que una red es dirigida si es posible que $g_{ij} \neq g_{ji}$. Esto significa que la conexión desde el nodo i al nodo j puede ser diferente de la conexión en la dirección opuesta, de j a i . En contraste, una red es no dirigida si se tiene que $g_{ij} = g_{ji}$ para todos los nodos i y j .

Adicionalmente, pueden existir algunos nodos que tienen una conexión consigo mismos. A esto se lo conoce como auto vínculos o bucles. De esta manera, si se establece esta conexión, se tiene que $g_{ii} = 1$; mientras que, si carece de dicho enlace, se tiene que $g_{ii} = 0$.

Red de libre escala

En el trabajo de Newman (2005), se menciona que la distribución de ley de potencias constituye un fenómeno estadístico ampliamente observado en diversas disciplinas científicas. Esta distribución se caracteriza por una relación particular entre variables, donde la probabilidad de medir un valor específico varía inversamente como una potencia de ese valor. Formalmente:

$$p(x) = Cx^{-\alpha}$$

donde C es una constante y α es el exponente de la ley de potencia. Por otro lado, esta distribución cumple con la propiedad de invariancia de escala. En efecto:

$$p(kx) = C(kx)^{-\alpha} = k^{-\alpha}p(x)$$

Esta distribución, al ser invariante de escala, muestra que la distribución se mantiene similar aun cuando sus valores de entrada tomen diferentes niveles de magnitud.

Este tipo de distribución se lo puede observar en una variedad de redes, denominadas redes libres de escala. Así lo explica Bales y Johnson (2006) al mencionar que existen redes que poseen una pequeña cantidad de nodos, comúnmente denominados "hubs", que

tienen un número elevado de conexiones; y una gran cantidad de nodos, llamados “nodos periféricos”, que cuentan con una cantidad relativamente reducida de conexiones, tal como se muestra en la figura 1.

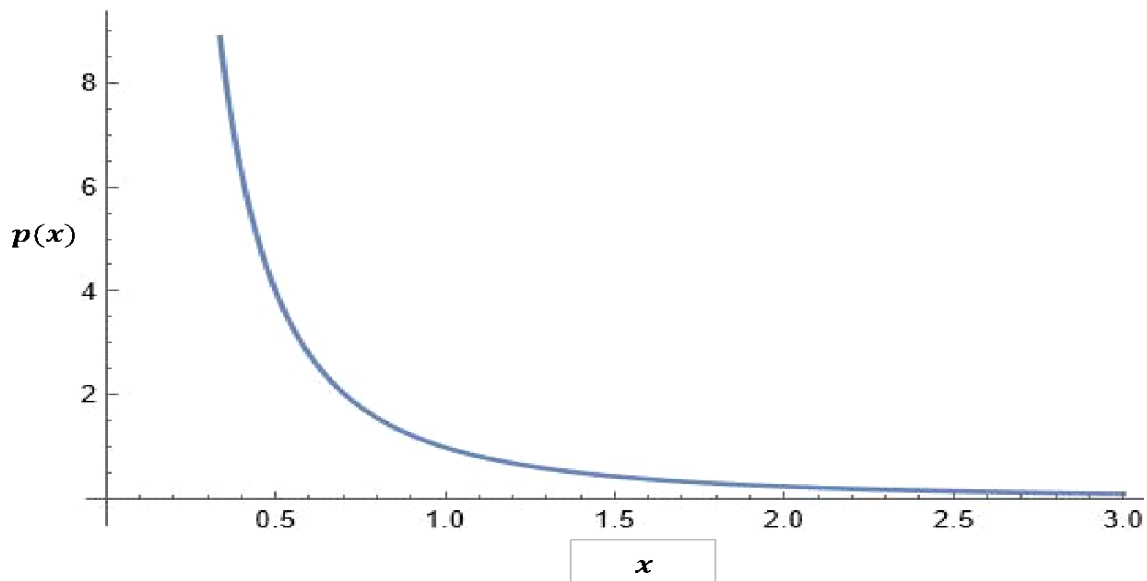


Figura 1. Distribución de Ley de Potencias

Nota: En este gráfico se muestra la distribución de ley de potencias, donde la probabilidad del valor x varía inversamente como la potencia de ese valor.

Barabási y Albert (1999) señalan que, en la mayoría de los sistemas, se generan redes que comparten una característica común: la conectividad de los nodos sigue una distribución de ley de potencias. Para que esto suceda, debe cumplirse, en primera instancia que, al agregar nuevos vértices o nodos a la red, la conectividad de estos aumentará. Como segundo aspecto, es esencial señalar que estos nuevos nodos buscan conectarse en lugares donde existe una mayor conectividad. Este fenómeno destaca la relevancia del crecimiento continuo y la preferencia por la conexión en la formación de redes complejas, contribuyendo así a la presencia de nodos altamente conectados y a la escalabilidad de la estructura de la red. De esta manera, en una red donde las conexiones de los vértices siguen una distribución de ley de potencias, la probabilidad de que un vértice interactúe con k vértices se expresa como $P(k) \sim k^{-\gamma}$, donde γ determina la rapidez con la que disminuye la probabilidad a medida que aumenta el grado de conectividad.

Modelo de Barabási y Albert

En el modelo propuesto por Barabási y Albert (1999), se integran los elementos crecimiento y preferencia para lograr alcanzar una distribución invariante de escala de forma natural. Para incorporar el componente de crecimiento de conectividad, se empieza con un número pequeño de nodos m_0 y después de cada instante de tiempo, se agrega un nuevo nodo.

Este nodo tendrá $m \leq m_0$ enlaces, el cual conectará con m nodos ya existentes en el sistema.

Por otro lado, para incorporar el elemento de preferencia de conexión, se define la siguiente probabilidad:

$$\Pi = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

donde:

- k_i es la conectividad o el número de conexiones que tiene el nodo i .
- $\sum_j k_j$ representa la suma de las conexiones de todos los nodos que tiene la red.

La expresión anterior muestra como la probabilidad de un nuevo vértice, que está conectado al vértice i , depende de la conectividad k_i de ese vértice. En otras palabras, los vértices más conectados tienen una mayor probabilidad de atraer nuevas conexiones debido a la preferencia por la conexión.

De esta manera, luego de t pasos, el modelo lleva a una red aleatoria con $t + m_0$ vértices y mt enlaces. Esta red evoluciona hacia un estado invariante de escala con la probabilidad $P(k)$ de que un vértice tenga k enlaces.

2.3 Extensión: Modelo de competencia de precios para bienes diferenciados con redes libres de escala

Modelo de competencia en precios con bienes diferenciados para tres empresas interdependientes

Planteamiento

En este apartado, se plantea un modelo de competencia de precios con bienes heterogéneos para un conjunto de tres empresas. Para ello, se considera una red productiva, representada por un grafo dirigido ponderado, conformada por tres nodos y nueve aristas, como se muestra en la figura 2.

Dentro de los elementos del grafo, se tiene:

- Los nodos 1, 2 y 3 que representan a las tres empresas.
- Las aristas (i, j) , $i, j \in \{1, 2, 3\}$ que representan las relaciones de diferenciación del bien que oferta la empresa j , frente a su empresa rival i .

- Los pesos $d_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}$ que definen el grado de sustitución ($0 < d_{ij} < 1$) y el grado de complementariedad ($-1 < d_{ij} < 0$) para la empresa j frente a su empresa rival i .

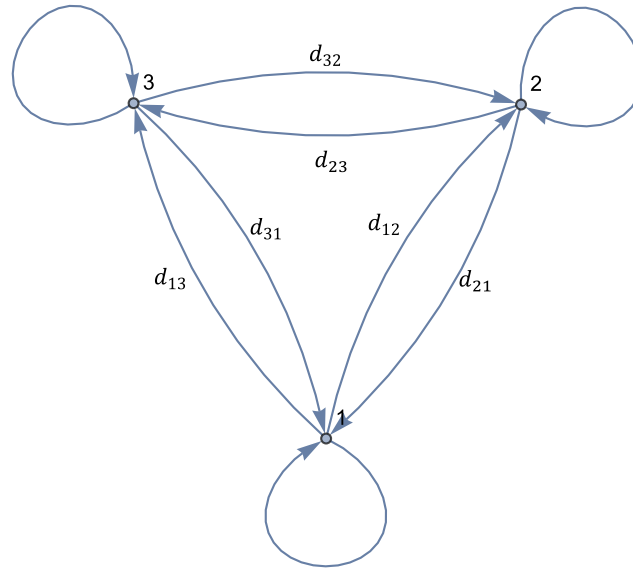


Figura 2. Grafo de una Red Productiva para tres empresas

Nota: Este gráfico muestra la red de 3 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados. Los nodos representan las empresas, mientras que las aristas representan las relaciones de complementariedad o sustitución entre ellas.

En este sistema de interdependencia, las funciones de demanda se encuentran definidas por:

$$q_1(p_1, p_2, p_3) = a - p_1 + d_{21}p_2 + d_{31}p_3 \quad (2.1)$$

$$q_2(p_1, p_2, p_3) = a - p_2 + d_{12}p_1 + d_{32}p_3 \quad (2.2)$$

$$q_3(p_1, p_2, p_3) = a - p_3 + d_{13}p_1 + d_{23}p_2 \quad (2.3)$$

La interpretación económica de estas ecuaciones es similar a la lectura que se mencionó en el Modelo Base de dos empresas en el marco teórico.

En este contexto, los beneficios de las tres empresas son

$$\pi_1(p_1, p_2, p_3) = (p_1 - c)(a - p_1 + d_{21}p_2 + d_{31}p_3) \quad (2.4)$$

$$\pi_2(p_1, p_2, p_3) = (p_2 - c)(a - p_2 + d_{12}p_1 + d_{32}p_3) \quad (2.5)$$

$$\pi_3(p_1, p_2, p_3) = (p_3 - c)(a - p_3 + d_{13}p_1 + d_{23}p_2) \quad (2.6)$$

Desarrollo

En el sistema anterior, el EN se encuentra definido por los precios p_1^* , p_2^* y p_3^* que maximizan los beneficios de la empresa 1, empresa 2 y empresa 3, respectivamente. Para hallar este equilibrio, se deben encontrar las funciones de mejor respuesta p_1^{BR} , p_2^{BR} y p_3^{BR} ; a partir de las condiciones de primer orden de las funciones de beneficio (2.4), (2.5) y (2.6).

De esta manera, el problema de la empresa 1 es:

$$\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2, p_3) = (p_1 - c)(a - p_1 + d_{21}p_2 + d_{31}p_3)$$

aplicando la condición de primer orden, se tiene:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0$$

con lo cual, la función de mejor respuesta es:

$$p_1^{BR}(p_2, p_3) = \frac{a + c}{2} + \frac{d_{21}}{2} p_2 + \frac{d_{31}}{2} p_3 \quad (2.7)$$

realizando el mismo proceso para la empresa 2 y la empresa 3, se tiene:

$$p_2^{BR}(p_1, p_3) = \frac{a + c}{2} + \frac{d_{12}}{2} p_1 + \frac{d_{32}}{2} p_3 \quad (2.8)$$

$$p_3^{BR}(p_1, p_2) = \frac{a + c}{2} + \frac{d_{13}}{2} p_1 + \frac{d_{23}}{2} p_2 \quad (2.9)$$

Como se recordará, en el Marco Teórico se llevó a cabo una descripción económica de las funciones de mejor respuesta para el caso del modelo base con 2 empresas. Sin embargo, para el caso específico de 3 empresas, es crucial realizar un análisis de los precios que fija una empresa cuando sus dos empresas rivales comercializan bienes sustitutos y complementarios por separado, ya que este escenario no ha sido previamente abordado.

Sin pérdida de generalidad, analicemos el precio fijado por la empresa 1 mediante la ecuación (2.7), asumiendo que la empresa 2 comercializa bienes sustitutos ($d_{21} > 0$) y la empresa 3 comercializa bienes complementarios ($d_{31} < 0$). Además, supongamos que $d_{21} > d_{31}$ ². En este sentido, si el precio de la empresa 2 aumenta en una unidad, el precio de la empresa 1 aumenta en $\frac{d_{21}}{2}$. Paralelamente, si el precio de la empresa 3 aumenta en

² Es esencial incluir esta última expresión, ya que su omisión podría ocasionar dificultades en la interpretación, debido a la ambigüedad que podría surgir. Sin esta expresión, no se puede determinar con certeza la sensibilidad de la empresa 1 en respuesta a las estrategias de las demás empresas.

una unidad, el precio de la empresa 1 disminuye en $\frac{d_{31}}{2}$. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que $\frac{d_{21}}{2} > \frac{d_{31}}{2}$. Así, en conjunto, la empresa 1 subirá su precio de forma neta en $\frac{d_{21}}{2} - \frac{d_{31}}{2} > 0$. Por lo tanto, cuando la empresa 2 aumenta sus precios, la empresa 1 subirá sus precios en menor proporción que la empresa 2 para obtener un mayor beneficio en comparación a su estado inicial.

Por otro lado, si la empresa 3 aumenta sus precios, la empresa 1 tendrá que disminuir su precio, ya que los consumidores tendrán menos incentivos en comprar los productos de la empresa 3 y consecuentemente de la empresa 1. Esto haría que su precio disminuya, pero no lo suficiente para no generar pérdidas. Finalmente, la empresa 1 optará por aumentar su precio por debajo de $\frac{d_{21}}{2}$ y por encima de $\frac{d_{31}}{2}$ para tener los mayores beneficios posibles. La empresa 1 tomará esta mejor decisión ante la reacción de la empresa 2 y la empresa 3.

En base a las funciones de mejor respuesta (2.7), (2.8) y (2.9), se puede determinar el EN de tal manera que $p_1^{BR}(p_2^*, p_3^*) = p_1^*$, $p_2^{BR}(p_1^*, p_3^*) = p_2^*$, $p_3^{BR}(p_1^*, p_2^*) = p_3^*$, con lo cual la solución al sistema es:

$$p_1^* = \frac{(a+c)(4 + (2 + d_{23})d_{31} - d_{23}d_{32} + d_{21}(2 + d_{32}))}{8 - 2d_{12}d_{21} - 2d_{13}d_{31} - d_{12}d_{23}d_{31} - d_{13}d_{21}d_{32} - 2d_{23}d_{32}} \quad (2.10)$$

$$p_2^* = \frac{(a+c)(4 - d_{13}d_{31} + d_{12}(2 + d_{31}) + 2d_{32} + d_{13}d_{32})}{8 - 2d_{12}d_{21} - 2d_{13}d_{31} - d_{12}d_{23}d_{31} - d_{13}d_{21}d_{32} - 2d_{23}d_{32}} \quad (2.11)$$

$$p_3^* = \frac{(a+c)(4 - d_{13}d_{21} + d_{13}(2 + d_{21}) + 2d_{23} + d_{12}d_{23})}{8 - 2d_{12}d_{21} - 2d_{13}d_{31} - d_{12}d_{23}d_{31} - d_{13}d_{21}d_{32} - 2d_{23}d_{32}} \quad (2.12)$$

Como se puede observar, no es posible ofrecer una interpretación modesta a este resultado; sin embargo, se puede mencionar que en los precios p_1^* , p_2^* y p_3^* se refleja la competencia y las interacciones entre las tres empresas por los grados de sustitución y complementariedad d_{ij} .

Modelo de competencia en precios con bienes diferenciados para n-empresas interdependientes

Para la extensión del modelo, se define el grafo $G = (N, A)$ de la red productiva, donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ representa al conjunto de empresas y $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es la matriz de adyacencia de la red. Además, se tiene que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ representa la relación entre la empresa i y la empresa j . Si $a_{ij} = 1$, las decisiones sobre el precio de la empresa j se ven

afectadas por las decisiones que toma la empresa rival i ; y si $a_{ij} = 0$, no existe influencia entre las empresas. Por otro lado, sea $d: \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función de pesos tal que:

$$d(a_{ij}) = \begin{cases} d_{ij}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Esta función asigna a cada enlace a_{ij} una ponderación d_{ij} , donde $d_{ij} \in (-1,1)$ representan los grados de complementariedad o sustitución que ejerce la empresa i sobre su rival j . Esta función se puede representar también mediante una matriz de pesos $D = (d_{ij})_{n \times n}$.

En base a esta notación, las ecuaciones de demanda (2.1), (2.2) y (2.3) para el caso de $n = 3$ empresas tienen la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & -1 & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Generalizando para n -empresas, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & d_{21} & \cdots & d_{n1} \\ d_{12} & -1 & \cdots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{D}'\mathbf{p}$$

donde;

- \mathbf{q} es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa las cantidades de cada una de las n -empresas.
- \mathbf{a} es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa la cantidad inicial que cada empresa produce, sin tomar en cuenta la influencia que tienen las empresas rivales
- \mathbf{D} es una matriz de orden $n \times n$, que contiene el valor numérico de la relación que ejercen las empresas entre sí.
- \mathbf{p} es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa los precios que determinan cada una de las n -empresas.

De forma similar, para el caso de $n = 3$, las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cq_1 \\ cq_2 \\ cq_3 \end{pmatrix}$$

Extendiendo los beneficios a n-empresas, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Formalmente:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}\mathbf{q} + c\mathbf{q}$$

donde;

- $\boldsymbol{\pi}$ es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa los beneficios de cada una de las n-empresas.
- \mathbf{P} es una matriz diagonal de orden $n \times n$, que contiene los precios de las empresas.
- \mathbf{q} es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa las cantidades de cada una de las n-empresas.
- c es el costo por unidad de las empresas, el cual es diferente de cero.

Ahora bien, en el caso de $n = 3$, las funciones de mejor respuesta (2.7), (2.8), (2.9) pueden representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p_1 - \frac{d_{21}}{2}p_2 - \frac{d_{31}}{2}p_3 = \frac{a+c}{2}$$

$$-\frac{d_{12}}{2}p_1 + p_2 - \frac{d_{32}}{2}p_3 = \frac{a+c}{2}$$

$$-\frac{d_{13}}{2}p_1 - \frac{d_{23}}{2}p_2 + p_3 = \frac{a+c}{2}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_{21}}{2} & -\frac{d_{31}}{2} \\ -\frac{d_{12}}{2} & 1 & -\frac{d_{32}}{2} \\ -\frac{d_{13}}{2} & -\frac{d_{23}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$$

Generalizando para n-empresas, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_{21}}{2} & \dots & -\frac{d_{n1}}{2} \\ -\frac{d_{12}}{2} & 1 & \dots & -\frac{d_{n2}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{d_{1n}}{2} & -\frac{d_{2n}}{2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} \\ \vdots \\ \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$$

Teniendo así:

$$\mathbf{F}\mathbf{p} = \frac{a+c}{2}\mathbf{1}_n \quad (2.13)$$

donde:

- \mathbf{F} es una matriz de orden $n \times n$, con coeficientes constantes.
- \mathbf{p} es un vector columna de orden $n \times 1$, que representa los precios de las empresas.
- $\mathbf{1}_n$ es un vector columna de unos de orden $n \times 1$.

A primera vista, se puede notar que el sistema (2.13) es un sistema lineal, por lo que su solución se encuentra dada por:

$$\mathbf{p}^* = \frac{a+c}{2}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{1}_n$$

Como la matriz \mathbf{F} se puede reescribir como:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & -1 & \dots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}' + \frac{1}{2}\mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{p}^* = \frac{a+c}{2}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{1}_n$$

entonces es necesario que \mathbf{D}' sea invertible para que el sistema tenga solución. De esta manera, llegamos al siguiente teorema.

Teorema

En el modelo de competencia de precios con bienes diferenciados para una red libre de escala $G = (N, A)$, con matriz de pesos \mathbf{D} tal que $|D| \neq 0$, el Equilibrio de Nash es aquel vector de precios $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ tal que:

$$\mathbf{p}^* = \frac{a+c}{2} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{1}_n$$

donde $\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mathbf{D}' + \frac{1}{2} \mathbf{I}_n$.

Pseudo Código

En este apartado se indica, de manera muy resumida, los pasos para construir la matriz de adyacencia \mathbf{A} y la matriz \mathbf{F} que son necesarias para poder hallar el equilibrio de Nash en un sistema de n -empresas. En este pseudo algoritmo, se utiliza el algoritmo de Barabási Albert (BA) para generar relaciones entre empresas que cumplan la ley de potencias. A continuación, se presenta el pseudo algoritmo para la simulación del Equilibrio. En el Anexo III, se muestra con detalle el código programado en Python.

1. Se construye dos matrices de orden $n \times n$: una matriz triangular inferior \mathbf{MI} y una matriz triangular superior \mathbf{MS} , mediante el algoritmo de BA.
2. Se construye una matriz identidad \mathbf{I}_n , de orden $n \times n$.
3. Se obtiene la matriz de adyacencia $\mathbf{A} = \mathbf{MI} + \mathbf{I}_n + \mathbf{MS}$
4. Se construye la matriz \mathbf{D} , de orden $n \times n$, a partir de la matriz \mathbf{A} .
 - 5.1. Se empieza con una matriz nula.
 - 4.2. Para i, j desde 1 hasta n .
 - 4.2.1. Si $a_{ij} = 1$, entonces $d_{ji} = -1$.
 - 4.2.2. Si $a_{ij} \neq 1$, entonces $d_{ji} \in (-1, 1)$.
5. Se construye la matriz $\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mathbf{D}' + \frac{1}{2} \mathbf{I}_n$.
6. Se construye el vector $\mathbf{b} = \frac{a+c}{2} \mathbf{1}_n$.
7. Se halla el EN \mathbf{p}^* , tal que resuelva el sistema $\mathbf{Fp} = \mathbf{b}$.

3 RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan los resultados numéricos del modelo de competencia en precios para bienes diferenciados, sobre una red productiva libre de escala de 100 empresas generada mediante el algoritmo de Barabási- Albert. Para ello, se realizaron 1,000 simulaciones Montecarlo, asumiendo que los grados de sustitución y complementariedad siguen una distribución uniforme.

En la primera sección, se muestra la estructura de la red de empresas sobre la cual se realizará el ejercicio de simulación. Luego, en la segunda sección, se muestran los precios, cantidades y beneficios de los Equilibrios de Nash que se han obtenido cuando los bienes son plenamente sustitutos. Asimismo, en la tercera sección, se presenta los resultados cuando los productos son plenamente complementarios. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones.

3.1 Red productiva para el ejercicio de simulación

La red simulada con el algoritmo de Barabási-Albert para 100 empresas ($n = 100$), se encuentra representada de manera gráfica en la figura 3. Cabe subrayar que las aristas en este grafo son dirigidas, es decir, si la empresa i influye en la fijación de precios de la empresa j , entonces existirá una arista que nace desde el nodo i y termine en el nodo j , caso contrario no existirá tal arista.

En la figura 3, se puede observar que la empresa 1 es la que mayor conectividad tiene, seguida por la empresa 2, mientras que la mayoría de las demás empresas son las que tienen un menor número de relaciones. Este comportamiento es esperado, pues la red sigue una distribución de ley de potencias, la cual está presente en el algoritmo de Barabási-Albert. En consecuencia, la mayoría de las empresas de la red influyen sobre los precios que fijarán las empresas 1 y 2.

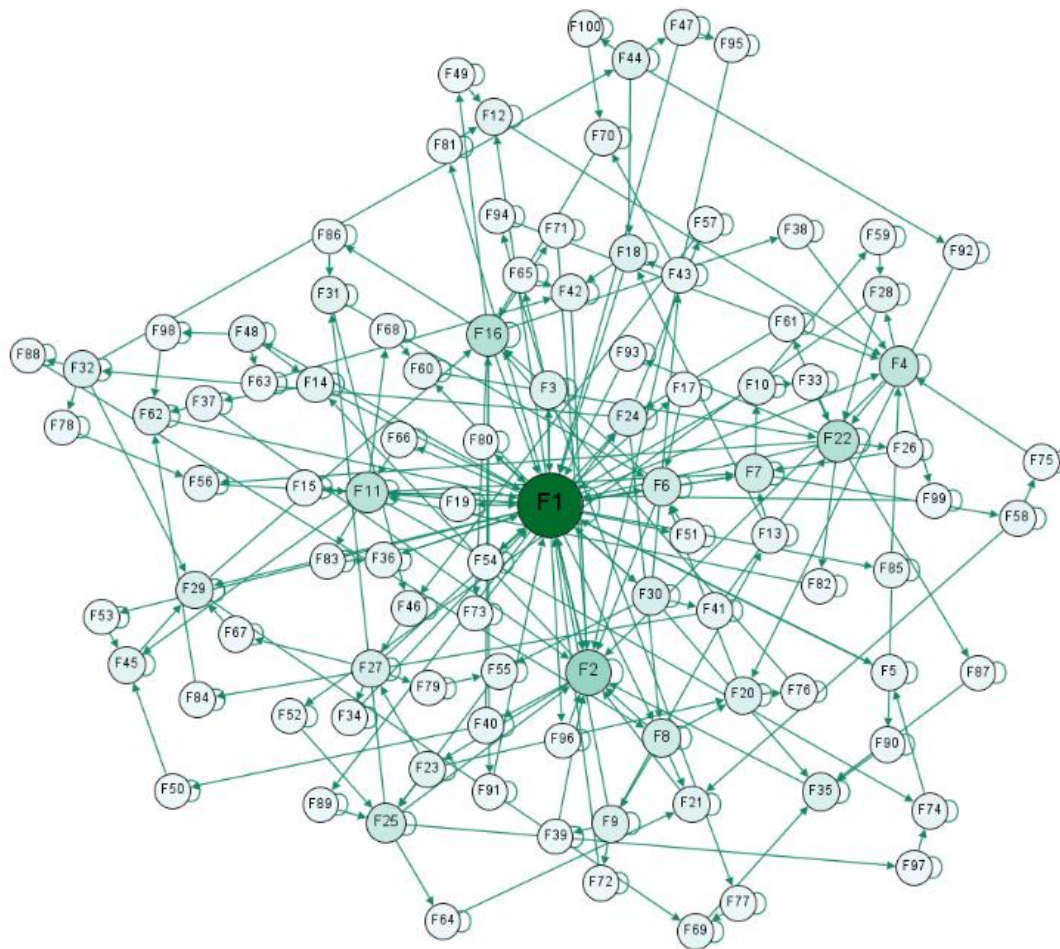


Figura 3. Grafo de una red de empresas

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados. Los nodos representan las empresas, mientras que las aristas representan las relaciones de complementariedad o sustitución entre ellas. Los nodos fueron distribuidos de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Este algoritmo simula las fuerzas físicas de atracción y repulsión, lo que permite que los nodos se distribuyan de tal manera que, los nodos que tienen una alta conectividad se acerquen entre sí y se ubiquen en el centro del grafo, mientras que los nodos con una menor conectividad se alejan de los demás y se ubiquen en los alrededores del grafo. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen una mayor conexión, en contraste con los nodos pequeños que tienen una menor conexión.

3.2 Resultados: Red productiva para Bienes Sustitutos

En esta sección, se realizaron 1,000 simulaciones, asumiendo que las relaciones de sustitución representadas en la figura 3 siguen una distribución uniforme $U[0,0.2]$.

Precios

En la figura 4, se muestra la estructura de la red de 100 empresas, con el tamaño de los nodos proporcional al precio medio fijado por las empresas en las simulaciones; es decir, entre mayor (menor) sea el precio fijado, mayor (menor) será el tamaño del nodo.

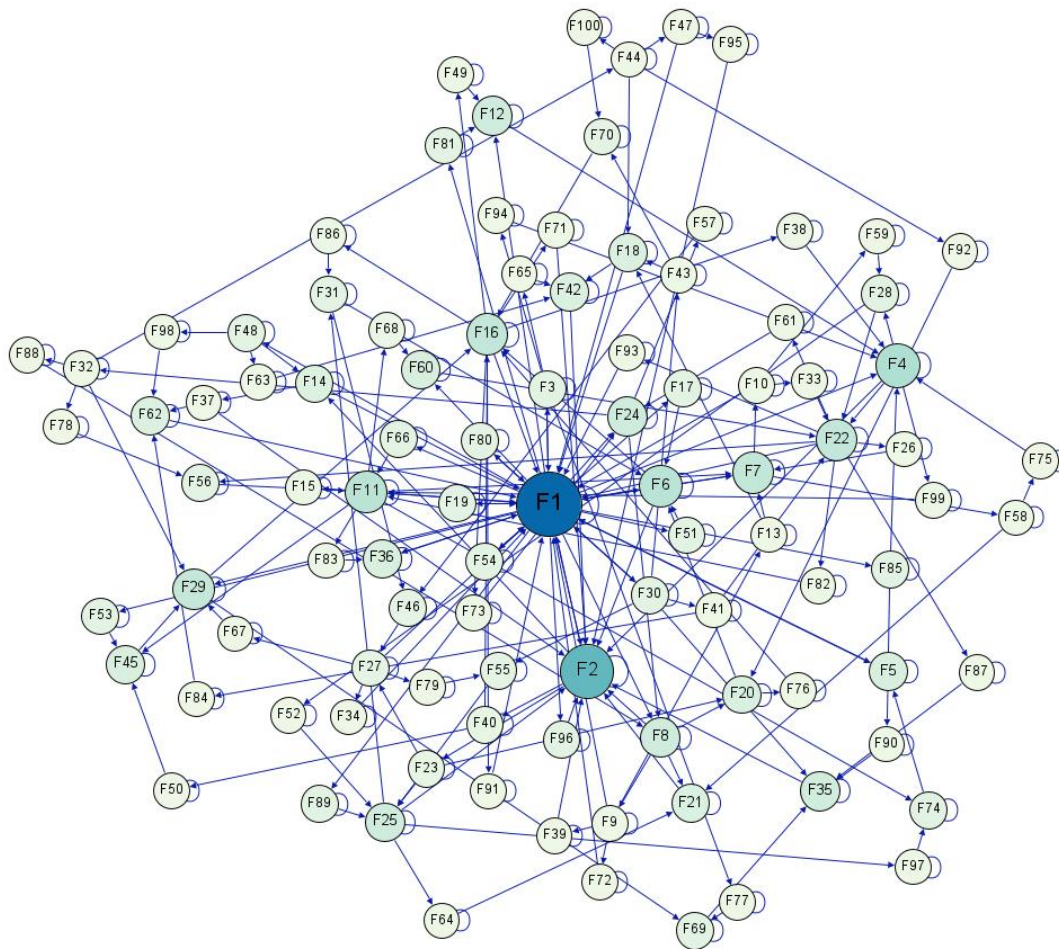


Figura 4. Grafo de una red de empresas con bienes sustitutos para precios

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen un mayor precio medio en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen un menor precio.

En esta figura, se puede observar que las empresas 1 y 2 fijan un precio, en promedio, más alto que las demás empresas. Además, hay que mencionar que estas empresas son las mismas que tienen una alta conectividad. Así, se puede observar una relación positiva existente entre la centralidad de las empresas y sus precios. Para verificar dicha relación,

se realizó las pruebas de correlación de Pearson, Spearman y Kendall, como se muestra en la tabla 1.

En la tabla 1, se puede ver que existe una correlación positiva entre el grado de centralidad de las empresas y sus precios, con una significancia del 5%. Este hecho muestra que, las empresas con una mayor conectividad tienen una posición de liderazgo dentro de la red, lo cual hace que tengan un mayor control sobre el mercado, pese a que la mayoría de las empresas sean sus rivales. Por esta razón, los precios de estas dos empresas, la empresa 1 y la empresa 2, son más altos en comparación con las demás. Cabe subrayar que esta situación es un equilibrio de Nash, pues todas las empresas toman su mejor decisión para maximizar su beneficio, en conocimiento de que las otras empresas harán lo mismo, llegando a una situación donde ninguna cambiará su decisión.

Tabla 1. Correlaciones entre el precio medio y la centralidad de la red de empresas para bienes sustitutos

	Estadístico	p-valor
Pearson	0.986908	1.80E-79
Spearman	0.789484	1.70E-22
Kendall	0.674279	4.30E-18

Nota: Esta tabla muestra los estadísticos y p-valor que se obtienen al realizar la prueba de Pearson, Spearman y Kendall sobre el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas y la centralidad de las empresas, donde la hipótesis nula establece que no existe correlación y la hipótesis alternativa afirma que existe correlación. Además, si el estadístico es muy cercano a 1, la correlación es positiva, mientras que si el estadístico es cercano a -1, la correlación es negativa.

En esta red con bienes sustitutos, las empresas rivales, al decidir subir sus precios, su demanda tiende a disminuir (ley de la demanda). Esto provoca que las empresas 1 y 2 tomen como mejor respuesta aumentar sus precios, pero por debajo del precio de las empresas rivales para atraer la demanda de estas últimas. Esta dinámica entre las empresas rivales y las empresas centrales (1 y 2) sigue hasta llegar a un equilibrio, de tal forma que sus precios estarán por encima del costo marginal. Por otra parte, las empresas centrales pueden producir bienes con un alto grado de diferenciación con respecto a las demás empresas. Por ejemplo, el producto puede poseer características únicas como un diseño innovador, tener una calidad superior a los demás productos, pertenecer a una marca reconocida, entre otros atributos. Estos elementos adicionales de diferenciación impuestos por las empresas centrales logran que el valor del producto aumente para los consumidores, permitiendo elevar su precio. Así, las empresas centrales perciben un mayor beneficio con respecto a las empresas rivales.

La tabla 2 muestra algunas estadísticas del precio promedio que fijan las 100 empresas, sobre las 1,000 simulaciones de la red. Aquí, la media de las simulaciones μ toma un valor muy cercano al valor de la mediana p_{50} . Esto muestra que, los datos se distribuyen

uniformemente alrededor de un punto central, lo que sugiere que no hay un sesgo en la distribución, es decir, se puede observar la presencia de la simetría característica de una distribución normal.

Tabla 2. Estadística descriptiva del precio promedio para bienes sustitutos

Media μ	6.779564
Mediana p_{50}	6.778053
Desviación Estándar σ	0.046188
Percentil 2.5% $p_{2.5}$	6.689273
Percentil 97.5% $p_{97.5}$	6.874453

Nota: Esta tabla muestra la estadística descriptiva sobre el precio promedio de las 1,000 simulaciones para una red de 100 empresas.

Adicionalmente, se puede observar el costo unitario ($c = 2$), queda fuera del intervalo $[\mu \pm 2\sigma] = [6.6872, 6.8719]$, indicando que los precios que fijan las empresas son, en promedio, más altos que el costo. Esto muestra que los precios se ubican por arriba del costo marginal, evitando caer en la paradoja de Bertrand. Se puede observar también que aproximadamente el 95% de los datos cae dentro de este intervalo, al compararlo con los percentiles $p_{2.5}$ y $p_{97.5}$.

De manera complementaria, se realizó un histograma para determinar qué tipo de distribución siguen las medias de los precios, como se muestra en la figura 5.

Como se puede observar en la figura 5, la distribución del precio promedio se ajusta a una distribución normal. En efecto, con ayuda de las pruebas de normalidad de Jarque-Bera y Kolmogorov, se tiene que, con una significancia al 5%, el precio promedio sigue una distribución normal, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Prueba de normalidad sobre el precio medio para bienes sustitutos

	Estadístico	p-valor
Jarque-Bera	2.025357	0.363245
Kolmogorov-Smirnov	0.025991	0.5007

Nota: Esta tabla muestra la prueba de normalidad de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov realizada sobre el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas. Esta prueba tiene como hipótesis nula la existencia de normalidad, mientras que la hipótesis alternativa establece la no existencia de normalidad.

Esto permite concluir que, a pesar de que dentro del algoritmo de Barabási-Albert este presente la distribución de ley de potencias, las medias de los precios se distribuyen conforme a una distribución normal.

Cantidades y Beneficios

En las figuras 6 y 7 se muestran las cantidades y beneficios promedio de las 100 empresas, respectivamente, obtenidas en las simulaciones del EN bajo la estructura de la red de la figura 3. En la figura 6, el tamaño de los nodos es proporcional a la cantidad promedio producida; mientras que para la figura 7, el tamaño de los nodos es proporcional a los beneficios medios obtenidos.

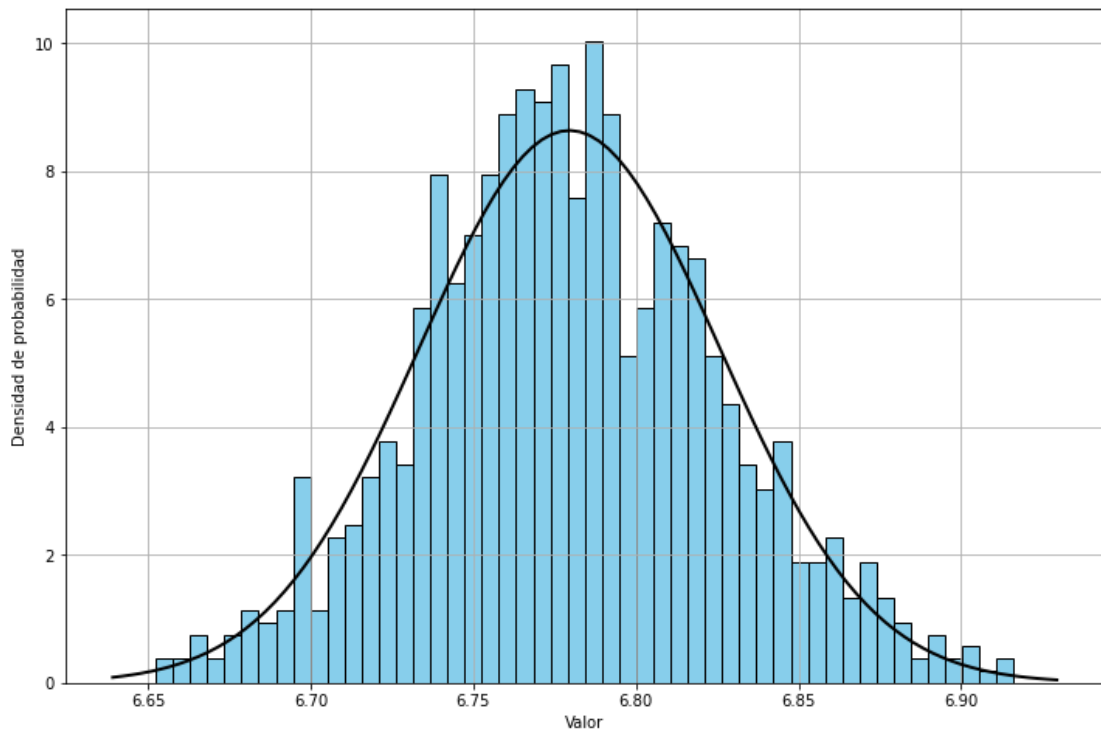


Figura 5. Histograma del precio medio para bienes sustitutos

Nota: Este gráfico muestra la distribución que siguen el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

En ambas figuras, se puede observar el mismo comportamiento que se obtuvo para el caso anterior pues los nodos 1 y 2 son los que tienen un mayor tamaño en comparación con los demás. Así, las empresas representadas por estos dos nodos son las que, en promedio, producen más y perciben una mayor ganancia que sus rivales. Como se pudo observar en el caso de precios, estas dos empresas tienen un mayor poder de mercado, además de tener una mayor cantidad de conexiones, provocando que su demanda agregada aumente. Por lo tanto, debido a que la demanda de las empresas rivales tiende a desplazarse a las empresas 1 y 2, estas dos empresas tienen que producir relativamente más que las demás.

Adicionalmente, las figuras 6 y 7 muestran una correlación positiva significativa en los resultados de la red de empresas. En la figura 6, esta correlación se presenta entre la

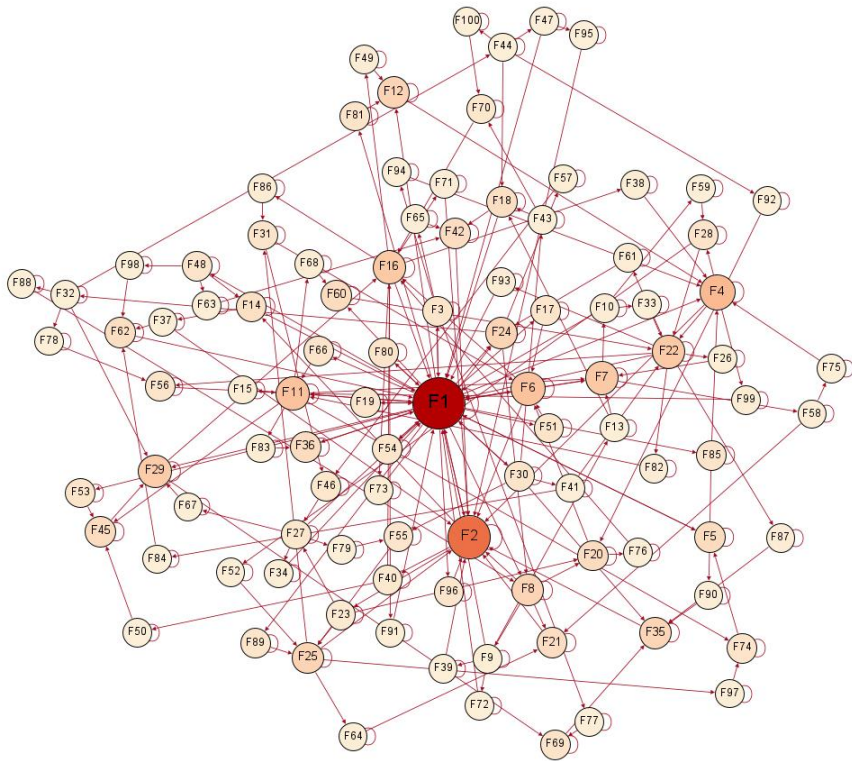


Figura 6. Grafo de una red de empresas con bienes sustitutos para cantidades

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen una mayor cantidad promedio producida en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen una menor cantidad.

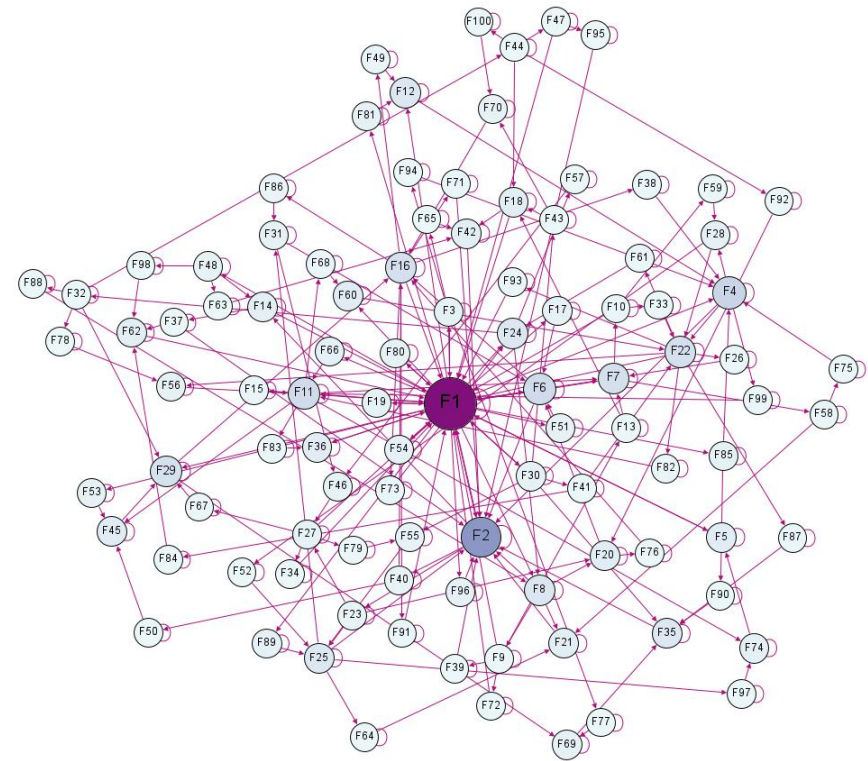


Figura 7. Grafo de una red de empresas con bienes sustitutos para beneficios

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen un mayor beneficio medio en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen un menor beneficio.

centralidad y la cantidad producida promedio; mientras que en la figura 7, la correlación corresponde a la centralidad y los beneficios medios obtenidos (ver Anexo I).

De la misma manera que en el caso de los precios, se puede corroborar que las simulaciones de las cantidades y beneficios promedio siguen una distribución normal (ver Anexo I).

3.3 Resultados: Red productiva para Bienes Complementarios

En esta sección, se analiza el comportamiento de la red de empresas de la figura 3, asumiendo relaciones de complementariedad. Para ello, se realizaron 1,000 simulaciones de estas relaciones con una distribución uniforme $U[-0.2,0]$.

Precios

En la figura 8, se muestra la red de 100 empresas, de acuerdo con la estructura de red de la figura 3. En esta estructura, el tamaño de los nodos representa el precio medio que fijan las empresas, de manera que a mayor (menor) precio, más grande (pequeño) será el nodo.

En la figura 8, se puede observar una situación contraria al caso de bienes sustitutos. En este caso, las empresas 1 y 2 fijan un precio, en promedio, por debajo de las demás empresas. Además, existe una relación entre la conectividad de las empresas y los precios que fijan, relación que tiende a ser inversa. Esta correlación se corrobora realizando las pruebas de Pearson, Spearman y Kendall, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Correlaciones entre el precio medio y la centralidad de la red de empresas para bienes complementarios

	Estadístico	p-valor
Pearson	-0.985026	1.24E-76
Spearman	-0.778704	1.48E-21
Kendall	-0.662044	1.69E-17

Nota: Esta tabla muestra los estadísticos y p-valor que se obtienen al realizar la prueba de Pearson, Spearman y Kendall sobre el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas y la centralidad de las empresas, donde la hipótesis nula establece que no existe correlación y la hipótesis alternativa afirma que existe correlación. Además, si el estadístico es muy cercano a 1, la correlación es positiva, mientras que si el estadístico es cercano a -1, la correlación es negativa.

En esta tabla, se observa, con una significancia al 5%, que la correlación entre el grado de centralidad y el precio medio es negativa. Este hecho muestra que, las empresas con una alta conectividad dentro de la red son las que fijan, en promedio, precios más bajos. Esto provoca que las empresas centrales tomen un papel importante dentro de la red.

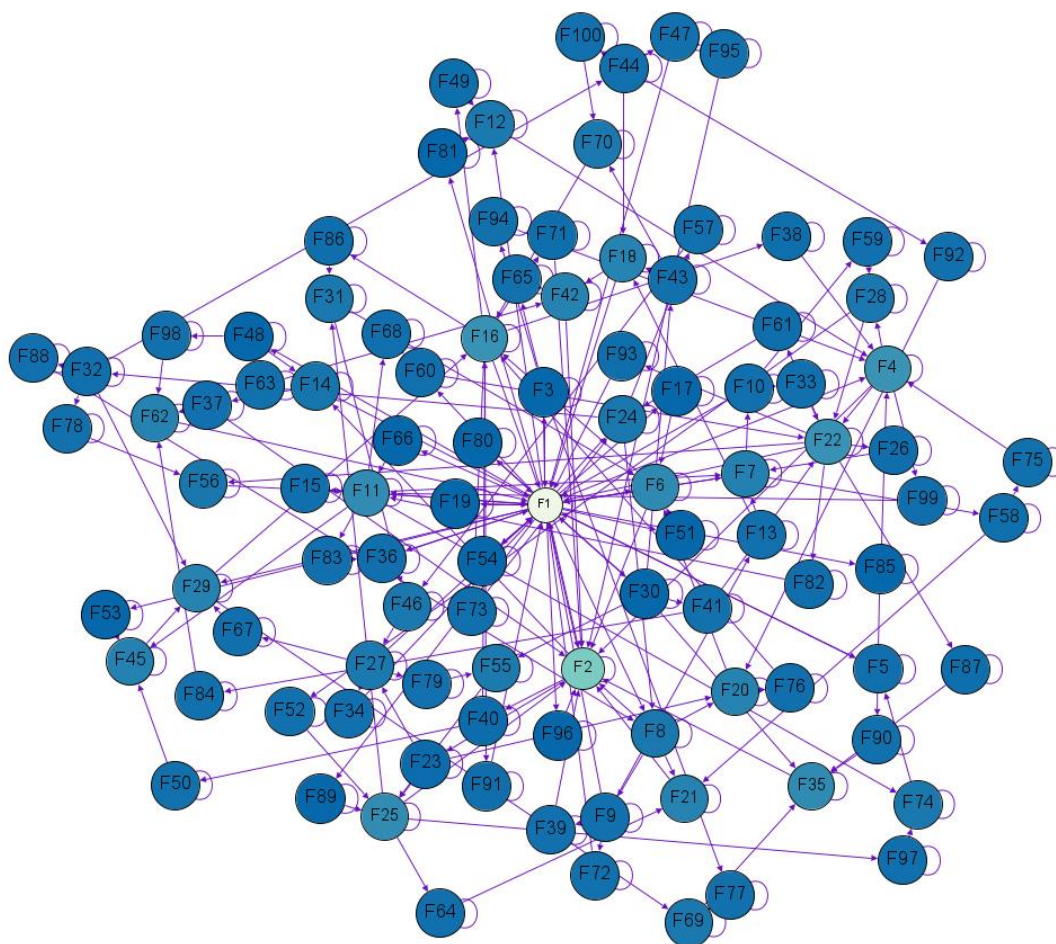


Figura 8. Grafo de una red de empresas con bienes complementarios para precios

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen un mayor precio medio en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen un menor precio.

En una red con bienes complementarios, las empresas más centrales son aquellas que producen un bien altamente complementario, es decir, los bienes que producen son primarios o fundamentales para el mercado, pues sin estos bienes, sería muy difícil consumir los bienes de las demás empresas. En otras palabras, para que este tipo de mercado funcione adecuadamente, es necesario que existan empresas que produzcan bienes esenciales de los cuales dependan las demás empresas. De esta manera, las empresas altamente centrales, al buscar maximizar sus beneficios, incentivan no solo que sus productos sean consumidos, sino también los productos de las empresas periféricas. Es por esta razón que, las empresas 1 y 2 deciden fijar un precio, en promedio, más bajo

en comparación con el resto de las empresas. Así, la demanda de las empresas centrales aumenta, al igual que la de las empresas periféricas, provocando que la demanda en su conjunto crezca.

En este análisis se puede observar el trasfondo del concepto de EN en las decisiones que toman las empresas para obtener la máxima ganancia, de la cual ninguna empresa quisiera moverse. Por ejemplo, si las empresas centrales aumentaran su precio, las demás empresas tendrían que reducir el suyo, incluso a un precio por debajo del costo para capturar la demanda. Esto provocaría que no solo las empresas periféricas tengan pérdidas y posteriormente quiebren, sino también afectaría a las empresas centrales y las llevaría a la quiebra.

Pese a que la demanda aumente de forma conjunta, son las empresas centrales las que tienen una mayor dependencia y beneficio de esta demanda. Las empresas periféricas no ganan el mismo beneficio que las empresas centrales, pues sus productos tienen pocas relaciones de complementariedad. Esto provoca que estas empresas no dependan tanto del aumento de la demanda conjunta, sino que dependan de factores individuales para poder maximizar sus beneficios, como las características intrínsecas del bien que ofertan, lo cual exige un aumento del precio. Por lo tanto, las empresas centrales toman como mejor respuesta disminuir sus precios para aumentar la demanda conjunta, mientras que las empresas periféricas rivales tienen como mejor respuesta alzar sus precios como consecuencia de aumentar el valor de su producto.

La tabla 5 muestra algunas estadísticas para las 1,000 simulaciones de la red de empresas. Aquí, el precio medio μ y el valor de la mediana p_{50} , son similares, lo cual sugiere que la distribución de los datos no posee sesgo a la derecha, ni sesgo a la izquierda. En consecuencia, la distribución de los precios medios podría ser simétrica.

Tabla 5. Estadística descriptiva del precio medio para bienes complementarios

Media μ	5.536525
Mediana p_{50}	5.53698
Desviación Estándar σ	0.017945
Percentil 2.5% $p_{2.5}$	5.502499
Percentil 97.5% $p_{97.5}$	5.573845

Nota: Esta tabla muestra la estadística descriptiva sobre el precio promedio de las 1,000 simulaciones para una red de 100 empresas.

Asimismo, se tiene que el costo ($c = 2$) no pertenece al intervalo $[\mu \pm 2\sigma] = [5.5006, 5.5724]$, por lo que se puede concluir que las empresas fijan, en promedio, un precio significativamente más alto que el costo. Cabe resaltar que este intervalo de

confianza es muy similar al construido por los percentiles $p_{2.5}$ y $p_{97.5}$ de la distribución empírica de las simulaciones. A continuación, en la figura 8 se muestra el histograma de los precios medios con el propósito de observar la distribución de los datos.

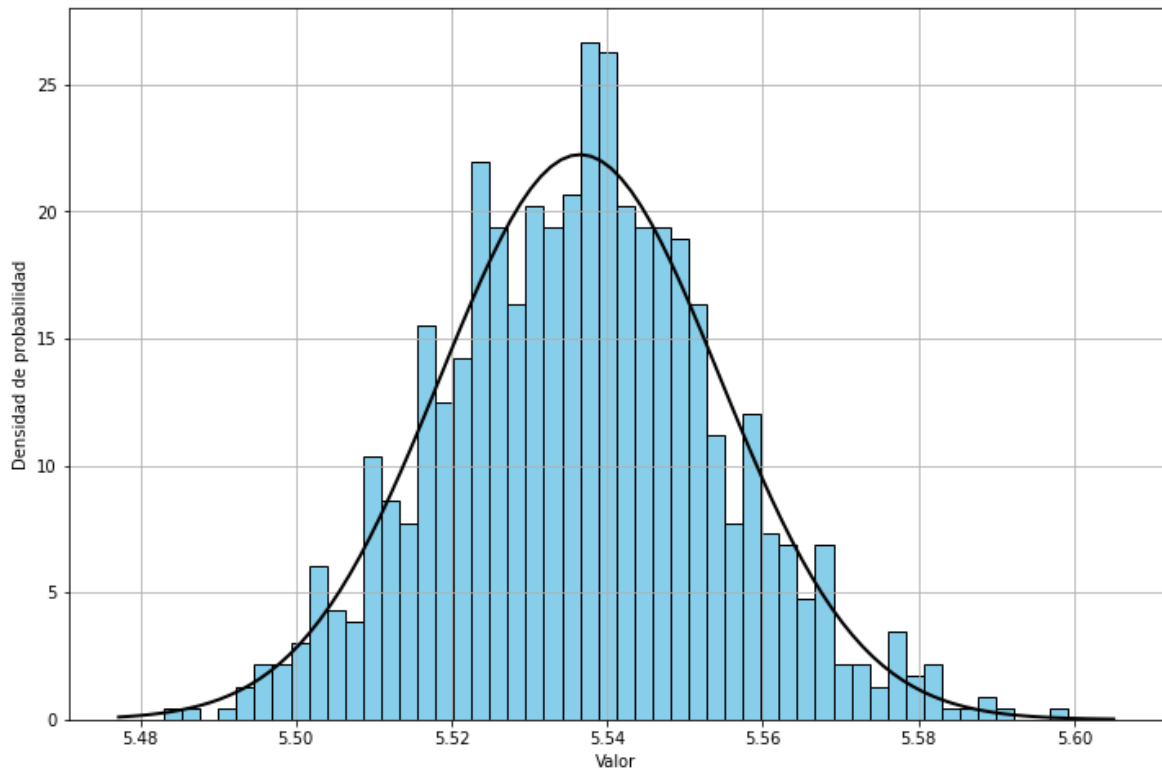


Figura 9. Histograma del precio medio para bienes complementarios

Nota: Este gráfico muestra la distribución que siguen el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

Como el histograma muestra, la distribución de los precios medios se ajusta a una distribución normal. Esto se confirma mediante las pruebas de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov realizadas en la tabla 6, las cuales, al 5% de significancia, no rechazan la hipótesis nula de normalidad. En este sentido, se puede concluir que las medias de los precios se distribuyen conforme una distribución normal, aunque, en su origen, la red de empresas se haya construido siguiendo una distribución de potencias, la cual está presente en el algoritmo de Barabási-Albert.

Tabla 6. Prueba de normalidad sobre el precio medio

	Estadístico	p-valor
Jarque-Bera	2.50129	0.28632
Kolmogorov-Smirnov	0.018142	0.890983

Nota: Esta tabla muestra la prueba de normalidad de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov realizada sobre el precio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas. Esta prueba tiene como hipótesis nula la existencia de normalidad, mientras que la hipótesis alternativa establece la no existencia de normalidad.

Cantidades y Beneficios

En las figuras 10 y 11 se muestran las cantidades y beneficios promedio de las 100 empresas, respectivamente, obtenidas en las simulaciones bajo la estructura de la red de la figura 3. En la figura 10, el tamaño de los nodos es proporcional a la cantidad promedio producida; mientras que para la figura 11, el tamaño es proporcional a los beneficios medios obtenidos.

En ambas figuras, el tamaño de los nodos decrece conforme aumenta la centralidad de estos. Es así como, las empresas mayormente centrales, 1 y 2, son las que, en promedio, producen menos y obtienen una menor ganancia, en comparación a las empresas periféricas. En el Anexo II se presentan las pruebas de correlación que confirman la relación inversa entre la producción y ganancia frente a la centralidad.

Como se mencionó anteriormente, las empresas centrales son las que más se benefician del aumento de la demanda en su conjunto, pero esto no significa que su producción sea proporcional a dicha demanda. Para este caso, se podría pensar que las empresas centrales, al fijar un precio más bajo, experimentarían un aumento de la demanda y por ende, un aumento en su producción. Sin embargo, sucede lo contrario: la disminución del precio desalienta la producción de las empresas, pues estas lo que buscan es maximizar sus beneficios. Por otra parte, las empresas periféricas, al fijar un precio más alto, estarían dispuestas a producir más; esto gracias también al incremento de la demanda conjunta que no es totalmente absorbido por la oferta de las empresas centrales.

En consecuencia, las empresas centrales son las que menos beneficios perciben, pues sus precios y cantidad producida es menor en comparación con las empresas periféricas. Además, la producción promedio se ajusta a una distribución normal, mientras que para caso de los beneficios esta propiedad no se cumple. Para este último caso, aunque el histograma sugería una distribución normal, las pruebas de normalidad muestran que se rechaza esta hipótesis (ver Anexo II).

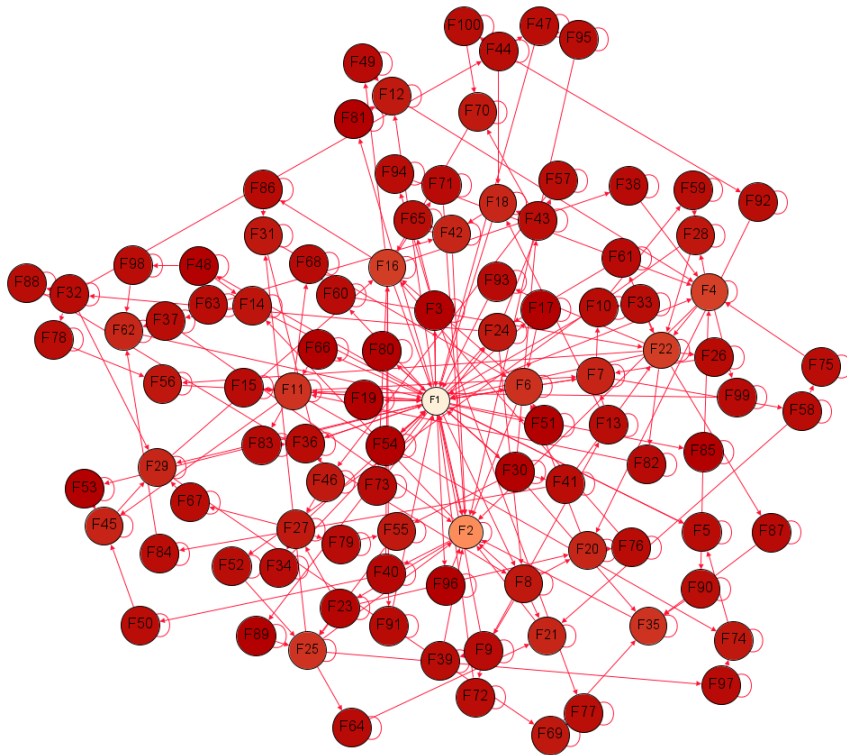


Figura 8. Grafo de una red de empresas con bienes complementarios para cantidades

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen una mayor cantidad promedio producida en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen una menor cantidad.

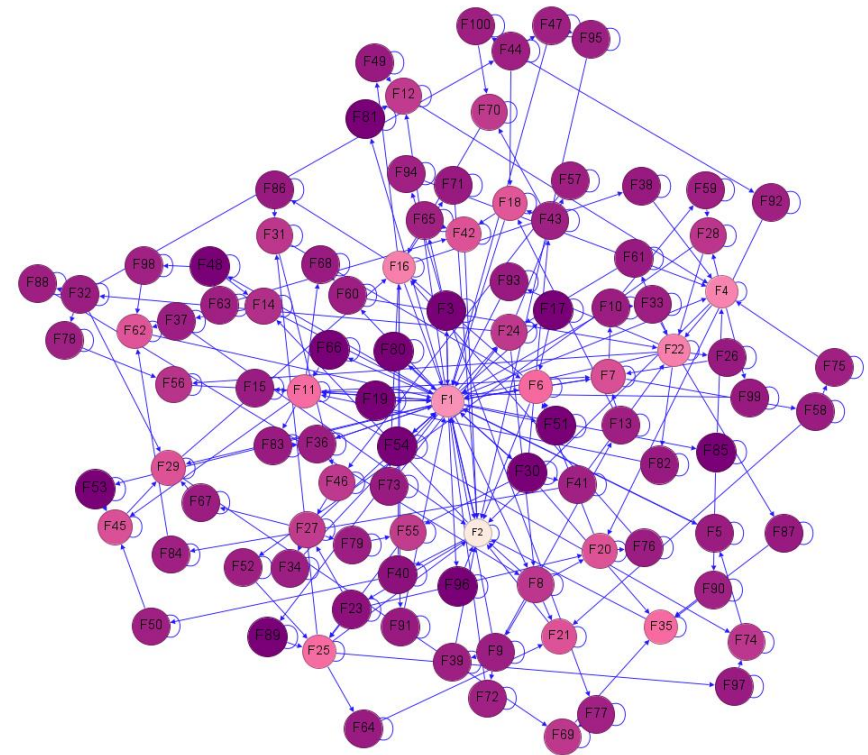


Figura 9. Grafo de una red de empresas con bienes complementarios para beneficios

Nota: Este gráfico muestra la red de 100 empresas que componen el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, considerando la distribución de la figura 3 de acuerdo con el algoritmo Force Atlas 2 del software Gephi. Aquí, los nodos más grandes representan los nodos que tienen un mayor beneficio medio en las 1,000 simulaciones, en contraste con los nodos pequeños que tienen un menor beneficio.

3.4 Conclusiones

Este trabajo busca analizar el Equilibrio de Nash para el modelo de competencia en precios con bienes diferenciados, para una red libre de escala con grados de sustitución y complementariedad aleatorios. Entre los principales hallazgos, se tiene que, para el caso de bienes sustitutos, se obtuvo que las empresas centrales son las que fijan, en promedio, un precio más alto que las empresas periféricas, pues sus productos tienen un alto grado de diferenciación, dándoles un mayor poder de mercado. Por otro lado, cuando se trata de bienes complementarios, las empresas centrales establecen, en promedio, un precio más bajo en comparación con las empresas periféricas, pues si fijan un precio más alto, todas las empresas quebrarían, incluidas las centrales. En este contexto, existe una correlación positiva entre el precio medio y la conectividad de las empresas, si los bienes son sustitutos; mientras que, si los bienes son complementarios, la relación es inversa.

Asimismo, en relación con los bienes sustitutos, las empresas centrales son aquellas que más producen en la red de empresas, pues la demanda de las empresas rivales se desplaza hacia las empresas centrales, provocando que estas últimas produzcan más y obtengan un mayor beneficio. En cuanto a los bienes complementarios, sucede lo contrario, las empresas centrales son las firmas que producen menos, pues su precio es más bajo que las empresas no centrales, lo cual reduce los incentivos para aumentar la producción y por lo tanto el beneficio.

Finalmente, tanto para bienes sustitutos como para bienes complementarios, se tiene que los precios y cantidades siguen una distribución normal. Sin embargo, los beneficios de los bienes complementarios no cumplen con esta característica como si sucede cuando los bienes son sustitutos.

3.5 Recomendaciones

El presente trabajo se puede extender y mejorar de diversas formas. En cuanto al modelo desarrollado, se puede emplear otro tipo de distribución, diferente a la distribución uniforme, para representar la incertidumbre alrededor de los grados de sustitución y complementariedad. Por ejemplo, se podría utilizar la distribución normal centrada en cero y truncada en el intervalo $[-1,1]$. Asimismo, sería interesante observar cómo se comportan los resultados ante distintas estructuras de red, que no tomen como base el algoritmo de Barabási-Albert para generar grafos libres de escala. Por ejemplo, se podría utilizar i algoritmos que generen redes con distintos niveles de asortatividad (es decir, la tendencia

de los nodos a conectarse con otros nodos que tienen propiedades similares) y formación de comunidades.

Por otra parte, se podría analizar cómo se comporta economías mixtas donde existen bienes complementarios y/o sustitutos en distintas proporciones. Además, se podría extender el modelo cambiando alguno de los supuestos analíticos establecidos en este trabajo. Por ejemplo, en la revisión de literatura, se pudo observar casos en los cuales los costos son asimétricos, la curva de demanda no es lineal, o juegos donde existe desinformación (es decir, juegos bayesianos).

4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Askar, S. S. (2014). On Cournot–Bertrand competition with differentiated products. *Annals of Operations Research*, 223(1), 81–93. <https://doi.org/10.1007/s10479-014-1612-8>
- Bales, M. E., & Johnson, S. B. (2006). Graph theoretic modeling of large-scale semantic networks. *Journal of Biomedical Informatics*, 39(4), 451–464. <https://doi.org/10.1016/j.jbi.2005.10.007>
- Barabási, A.-L., & Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286, 509–512. www.sciencemag.org
- Bertrand, J. (1883). Théorie mathématique de la richesse sociale. *Journal Des Savants 1883*, 499–508.
- Cheng, L. (1985). Comparing Bertrand and Cournot equilibria: a geometric approach. *Rand Journal of Economics*, 16(1), 146–152.
- Choi, P.-S., Dunaway, E., & Muñoz-Garcia, F. (2021). *Sconomics Industrial Organization Practice Exercises with Answer Keys*. <http://www.springer.com/series/10099>
- Church, J., & Ware, R. (2000). *Industrial Organization: A Strategic Approach*.
- Contreras, R., Georgantzis, N., & Ginés, M. (2008). Collusion in a Bertrand duopoly model with decreasing returns and product differentiation. *Estudios de Economía*, 35, 19–31.
- Cournot, A. (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/indexhttp://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3183> Disponible en: <<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3183>>
- Edgeworth, F. Y. (1897). La Teoría Pura del Monopolio. *Giornale Degli Economisti* 40, 13–31.
- Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*.
- Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, 39(153), 41–57. <http://www.jstor.orgURL:http://www.jstor.org/stable/2224214>
- Jackson, M. O. (2008). *Social and Economic Networks*. Princeton University Press.
- Ledvina, A., & Sircar, R. (2012). Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production. *Mathematics and Financial Economics*, 6(4), 261–293. <https://doi.org/10.1007/s11579-012-0076-3>
- Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press.
- Newman, M. E. J. (2005). Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*, 46(5), 323–351. <https://doi.org/10.1080/00107510500052444>
- Pérez Navarro, J., Jimeno Pastor, J. L., & Cerdá Tena, E. (2004). *Teoría de Juegos*. Prentice Hall / Pearson.
- Rabah Amira, & Jim Y. Jinb. (2001). Cournot and Bertrand equilibria compared: substitutability, complementarity and concavity. *International Journal of Industrial Organization*, 19, 303–317.
- Ricart, J. E. (1988). *Una Introducción a la Teoría de Juegos*. IESE Business School.

- Singh, N., & Vives, X. (1984). Price and quantity competition in a differentiated duopoly. *Journal of Economics*, 15(4).
- Spulber, D. F. (1995). BERTRAND COMPETITION WHEN RIVAL'S COSTS ARE UNKNOWN*. *The Journal of Industrial Economics*, 43(1), 1–11.
- Tadelis, S. (2013). *Game Theory An Introduction*.
- Tenorio Villalón, Á. F., & Martín Caraballo, A. M. (2015). Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos. *Boletín de Matemáticas* 22(1), 77–95.
- Varian, H. R. (1999). *Microeconomía Intermedia: Un enfoque actual* (Barcelona: Antoni Bosch editor, Ed.; quinta).
- Vega-Redondo, F. (2003). *Economics and The Theory of Games*. Cambridge University Press.
- Vintila, A., & Roman, M. D. (2021). Bertrand competition under asymmetric conditions. *Sciend*, 15(1), 235–244. <https://doi.org/10.2478/picbe-2021-0023>
- Vives, X. (1985). On the Efficiency of Bertrand and Cournot Equilibria with Product Differentiation. *Journal of Economy Theory*, 36, 166–175.
- Watson, J. (2013). *Strategy : an introduction to game theory*.
- Zanchettin, P. (2006). Differentiated Duopoly with Asymmetric Costs. *Journal of Economics & Management Strategy*, 15, 999–1015.

5 ANEXOS

ANEXO I. Tablas y gráficos de las cantidades y beneficios promedio para bienes sustitutos

Tabla 7. Correlación entre la cantidad y beneficio promedio frente a la centralidad de la red de empresas para bienes complementarios

	Cantidades		Beneficios	
	Estadístico	p-valor	Estadístico	p-valor
Pearson	0.986908	1.80E-79	0.98407	2.52E-75
Spearman	0.789484	1.70E-22	0.783573	5.65E-22
Kendall	0.674279	4.30E-18	0.668162	8.56E-18

Nota: Esta tabla muestra los estadísticos y p-valor que se obtienen al realizar la prueba de Pearson, Spearman y Kendall sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas y la centralidad de las empresas, donde la hipótesis nula establece que no existe correlación y la hipótesis alternativa afirma que existe correlación. Además, si el estadístico es muy cercano a 1, la correlación es positiva, mientras que si el estadístico es cercano a -1, la correlación es negativa.

Tabla 8. Estadística descriptiva de la cantidad y beneficio promedio

	Cantidades	Beneficios
Media μ	4.779564	23.861928
Mediana p_{50}	4.778053	23.840913
Desviación Estándar σ	0.046188	0.584216
Percentil 2.5% $p_{2.5}$	4.689273	22.690213
Percentil 97.5% $p_{97.5}$	4.874453	25.085287

Nota: Esta tabla muestra la estadística descriptiva sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de empresas.

Tabla 9. Prueba de normalidad sobre la cantidad y beneficio promedio

	Cantidades		Beneficios	
	Estadístico	p-valor	Estadístico	p-valor
Jarque-Bera	2.025357	0.363245	4.903976	0.086122
Kolmogorov-Smirnov	0.025991	0.5007	0.023436	0.633381

Nota: Esta tabla muestra la prueba de normalidad de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov realizada sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas. Esta prueba tiene como hipótesis nula la existencia de normalidad, mientras que la hipótesis alternativa establece la no existencia de normalidad.

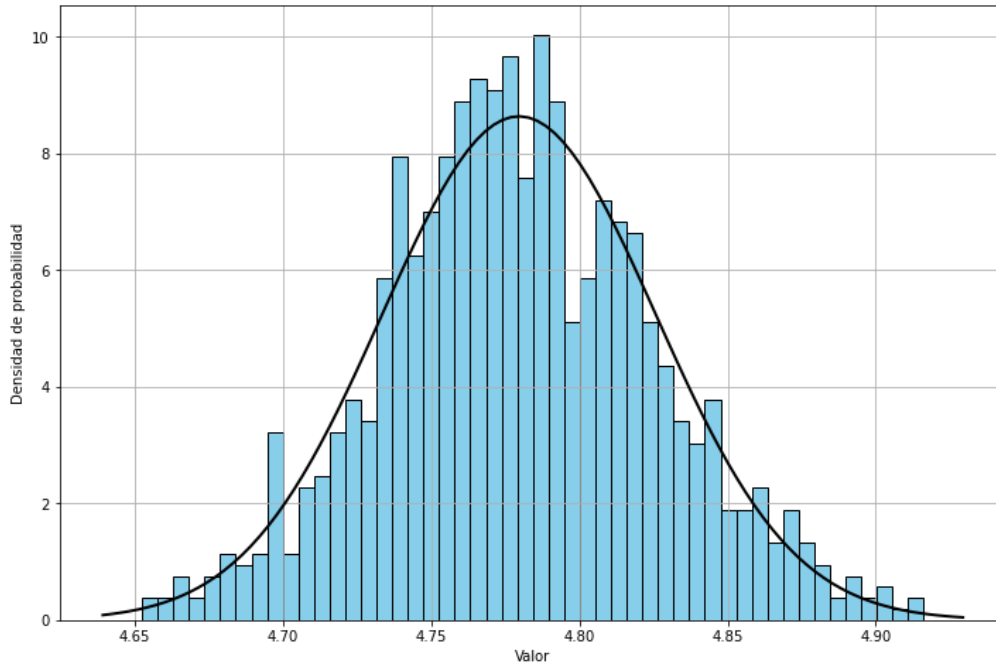


Figura 10. Histograma de la cantidad media

Nota: Este grafico muestra la distribución que siguen la cantidad media de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

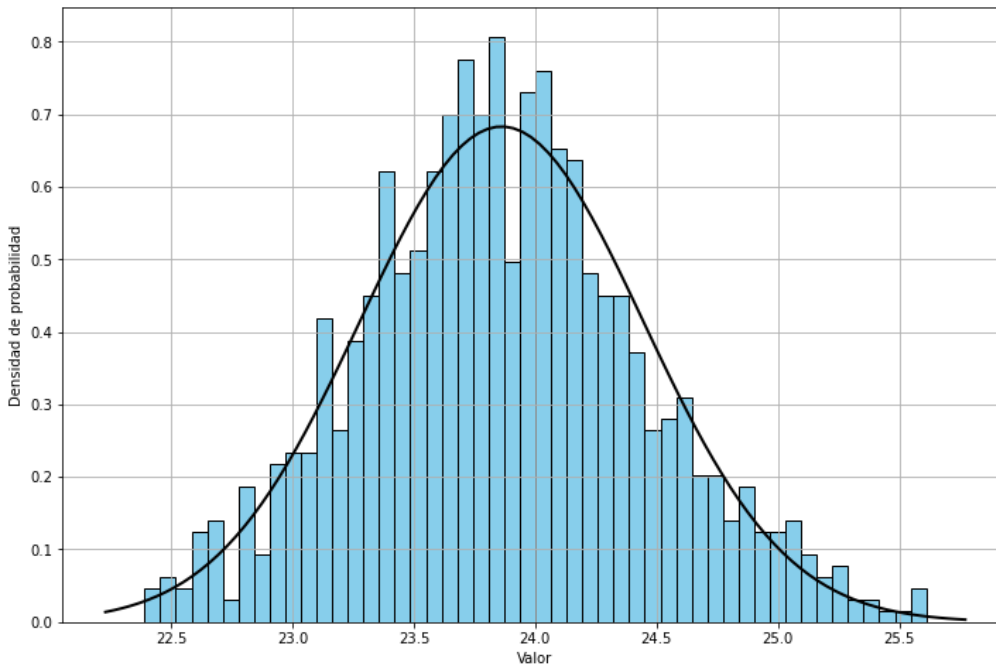


Figura 11. Histograma del beneficio medio

Nota: Este grafico muestra la distribución que siguen el beneficio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

ANEXO II. Tablas y gráficos de las cantidades y beneficios promedio para bienes complementarios

Tabla 10. Correlación entre la cantidad y beneficio promedio frente a la centralidad de la red de empresas para bienes complementarios

	Cantidades		Beneficios	
	Estadístico	p-valor	Estadístico	p-valor
Pearson	-0.985026	1.24E-76	-0.748856	3.30E-19
Spearman	-0.778704	1.48E-21	-0.778625	1.50E-21
Kendall	-0.662044	1.69E-17	-0.661488	1.80E-17

Nota: Esta tabla muestra los estadísticos y p-valor que se obtienen al realizar la prueba de Pearson, Spearman y Kendall sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas y la centralidad de las empresas, donde la hipótesis nula establece que no existe correlación y la hipótesis alternativa afirma que existe correlación. Además, si el estadístico es muy cercano a 1, la correlación es positiva, mientras que si el estadístico es cercano a -1, la correlación es negativa.

Tabla 11. Estadística descriptiva de la cantidad y beneficio promedio

	Cantidades	Beneficios
Media μ	3.536525	13.081022
Mediana p_{50}	3.53698	13.068888
Desviación Estándar σ	0.017945	0.160063
Percentil 2.5% $p_{2.5}$	3.502499	12.794172
Percentil 97.5% $p_{97.5}$	3.573845	13.417085

Nota: Esta tabla muestra la estadística descriptiva sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de empresas.

Tabla 12. Prueba de normalidad sobre la cantidad y beneficio promedio

	Cantidades		Beneficios	
	Estadístico	p-valor	Estadístico	p-valor
Jarque-Bera	2.50129	0.28632	25.236298	0.000003
Kolmogorov-Smirnov	0.018142	0.890983	0.044524	0.036802

Nota: Esta tabla muestra la prueba de normalidad de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov realizada sobre la cantidad y beneficio promedio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas. Esta prueba tiene como hipótesis nula la existencia de normalidad, mientras que la hipótesis alternativa establece la no existencia de normalidad.

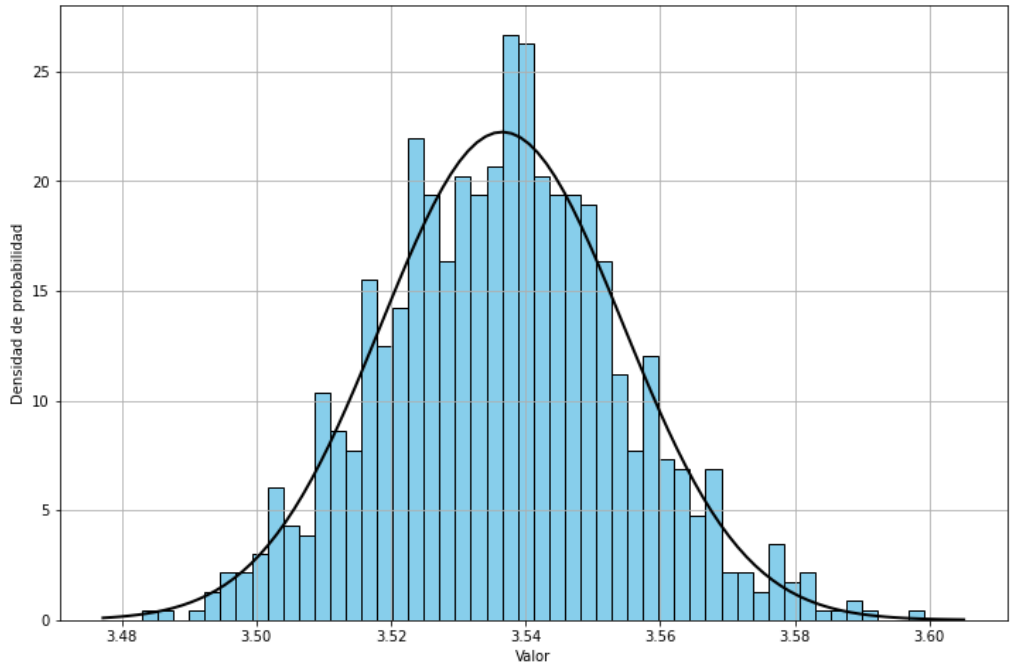


Figura 12. Histograma de la cantidad media

Nota: Este grafico muestra la distribución que siguen la cantidad media de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

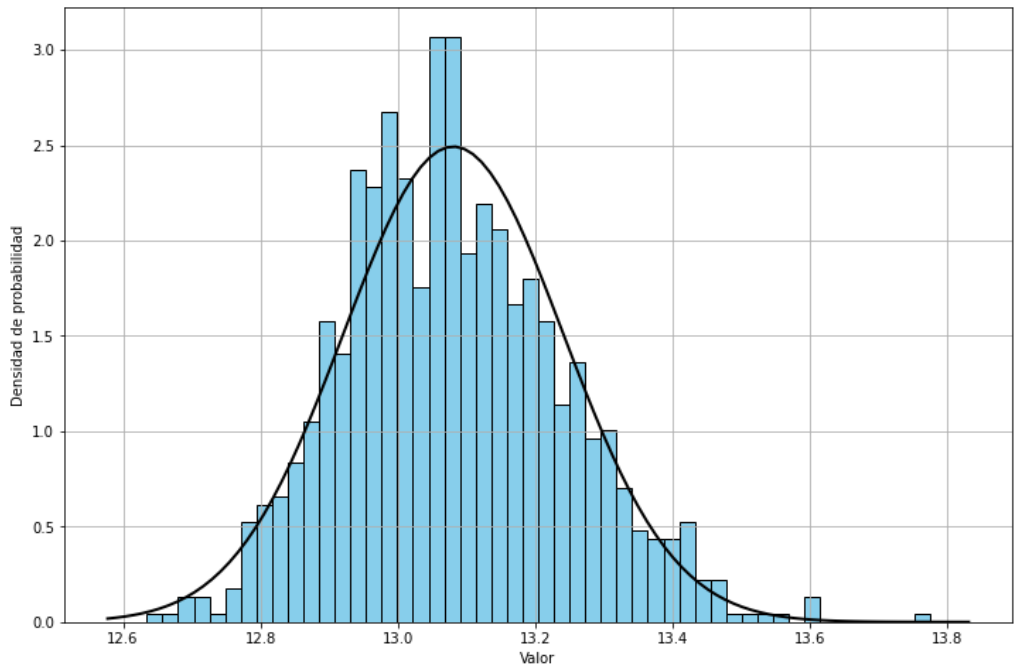


Figura 13. Histograma del beneficio medio

Nota: Este grafico muestra la distribución que siguen el beneficio medio de las 1,000 simulaciones para la red de 100 empresas representada a través de un histograma. Además, se hace una comparación entre el histograma y la curva de distribución normal para determinar su tendencia.

ANEXO III. Código Python del Algoritmo

```
#####
%% 0) Librerías
#####

!pip install python-igraph

import random
import igraph as ig
import numpy as np
import csv
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.stats import norm
from scipy.stats import jarque_bera, kstest
from scipy.stats import pearsonr, spearmanr, kendalltau

#####
%% 1) matriz A
#####

def matriz_A(n, m):
    g_ba_ti = ig.Graph.Barabasi(n, m, directed = True)
    MI = g_ba_ti.get_adjacency_sparse().toarray()

    g_ba_ts = ig.Graph.Barabasi(n, m, directed = True)
    MS = np.transpose(g_ba_ts.get_adjacency_sparse().toarray())

    I = np.eye(n)

    A = MI + I + MS

    return A

#####
%% 2) matriz auxiliar D1
#####

def matriz_D1(n, tipo):
    D1 = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                D1[i, j] = -1
            else:
                if tipo == 'Mixto':
                    D1[i, j] = np.random.uniform(-0.2, 0.2)
                elif tipo == 'Sustitutos':
                    D1[i, j] = np.random.uniform(0, 0.2)
                elif tipo == 'Complementarios':
                    D1[i, j] = np.random.uniform(-0.2, 0)
                elif tipo == 'Tendencia a sustitutos':
                    D1[i, j] = np.random.uniform(-0.1, 0.2)
                elif tipo == 'Tendencia a complementarios':
                    D1[i, j] = np.random.uniform(-0.2, 0.1)

    return D1

#####
%% 3) matriz de pesos D
#####

def matriz_D(n, matriz_A, tipo):
    A = np.transpose(matriz_A)
    D1 = matriz_D1(n, tipo)

    D = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i, j] == 1:
```

```

        D[i, j] = D1[i, j]
    else:
        D[i, j] = 0
    return D

#####
### 4) matriz F
#####

def matriz_F(n, matriz_D):
    D = matriz_D
    I = np.eye(n)
    F = (-1/2) * D + (1/2) * I
    return F

#####
### 5) vector b
#####

def vector_b(a, c, n):
    b = np.full((n, 1), (a + c)/2)
    return b

#####
### 6) Equilibrio de Nash p*
#####

def EN(a, c, n, matriz_D):
    F = matriz_F(n, matriz_D)
    b = vector_b(a, c, n)
    p = np.linalg.solve(F, b)
    return p

#####
### 7) vector q
#####

def vector_q(a, n, matriz_D, vector_p):
    vector_a = np.full((n, 1), a)
    D = matriz_D
    p = vector_p
    q = vector_a + D.dot(p)
    return q

#####
### 8) matriz P
#####

def matriz_P(p):
    n = len(p)
    P = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i==j:
                P[i,j] = p[j]
            else:
                P[i,j] = 0
    return P

#####
### 9) vector pi
#####

def vector_pi(p, vector_q, c):
    P = matriz_P(p)
    q = vector_q
    pi = P.dot(q) - c*q
    return pi

```

```

#####
%% 10) Tabla de Estadística Descriptiva
#####

def est_des(vector, vector_name):
    mean_v = np.mean(vector)
    variance_v = np.var(vector)
    std_v = np.std(vector)
    min_v = np.min(vector)
    max_v = np.max(vector)
    percentiles_v = np.percentile(vector, [2.5, 50, 97.5])

    df_ed = pd.DataFrame({
        'Media:': [mean_v],
        'Percentil (Mediana) 50%:': [np.percentile(vector, 50)],
        'Desviación Estandar:': [std_v],
        'Mínimo:': [min_v],
        'Máximo:': [max_v],
        'Percentil 2.5%:': [np.percentile(vector, 2.5)],
        'Percentil 5%:': [np.percentile(vector, 5)],
        'Percentil 95%:': [np.percentile(vector, 95)],
        'Percentil 97.5%:': [np.percentile(vector, 97.5)]
    })

    df_ed = df_ed.T
    df_ed.columns = [vector_name]

    return df_ed

#####
%% 11) Graficas de los Histogramas
#####

def plot_histogram(vector, vector_name):
    plt.figure(figsize=(12, 8))
    plt.hist(vector, bins=50, density=True, color='skyblue', edgecolor='black')

    mu, std = norm.fit(vector)
    xmin, xmax = plt.xlim()
    x = np.linspace(xmin, xmax, 100)
    p = norm.pdf(x, mu, std)
    plt.plot(x, p, 'k', linewidth=2)

    plt.title(f'Histograma y Distribución Normal de {vector_name}')
    plt.xlabel('Valor')
    plt.ylabel('Densidad de probabilidad')
    plt.grid(True)
    plt.show()

#####
%% 12) Tabla de resumen de las pruebas de normalidad
#####

def tests(vector):
    mu, sigma = np.mean(vector), np.std(vector)
    jb_stat, jb_p_value = jarque_bera(vector)
    ks_stat, ks_p_value = kstest(vector, 'norm', args=(mu, sigma))

    df_results = pd.DataFrame({
        'Estadístico': [jb_stat, ks_stat],
        'p-valor': [jb_p_value, ks_p_value]
    }, index=['Jarque-Bera', 'Kolmogorov-Smirnov'])

    return df_results

#####
%% 13) Tabla de resumen de las pruebas de Correlación
#####

def corr_test(vector1, vector2):
    pearson_stat, pearson_p_value = pearsonr(vector1, vector2)
    spearman_stat, spearman_p_value = spearmanr(vector1, vector2)
    kendall_stat, kendall_p_value = kendalltau(vector1, vector2)

```



```

df_results = pd.DataFrame({
    'Estadístico': [pearson_stat, spearman_stat, kendall_stat],
    'p-valor': [pearson_p_value, spearman_p_value, kendall_p_value]
}, index=['Pearson', 'Spearman', 'Kendall'])

return df_results

#####
### 14) 1,000 simulaciones para una red de 100 empresas
#####

def simu(a, c, n, m, s):

    centrales = [np.zeros(n)]

    A = matriz_A(n, m)

    tipos_relacion = [
        'Mixto',
        'Sustitutos',
        'Complementarios',
        'Tendencia a sustitutos',
        'Tendencia a complementarios'
    ]

    matrices_p = []
    medias_columnas_p = []
    medias_filas_p = []

    matrices_q = []
    medias_columnas_q = []
    medias_filas_q = []

    matrices_pi = []
    medias_columnas_pi = []
    medias_filas_pi = []

    for tipo in tipos_relacion:
        matriz_p = np.zeros((n, s))
        matriz_q = np.zeros((n, s))
        matriz_pi = np.zeros((n, s))

        central = np.sum(A, axis=0)
        centrales.append(central)

        for sim_idx in range(s):
            D = matriz_D(n, A, tipo)
            F = matriz_F(n, D)
            p = EN(a, c, n, D)
            q = vector_q(a, n, D, p)
            pi = vector_pi(p, q, c)

            matriz_p[:, sim_idx] = np.squeeze(p)
            matriz_q[:, sim_idx] = np.squeeze(q)
            matriz_pi[:, sim_idx] = np.squeeze(pi)

        media_filas_p = np.mean(matriz_p, axis=1)
        medias_filas_p.append(media_filas_p)
        nombre_vector = f"Precios ({tipo})"

        media_filas_q = np.mean(matriz_q, axis=1)
        medias_filas_q.append(media_filas_q)
        nombre_vector = f"Cantidades ({tipo})"

        media_filas_pi = np.mean(matriz_pi, axis=1)
        medias_filas_pi.append(media_filas_pi)
        nombre_vector = f"Beneficios ({tipo})"

    matrices_p.append(matriz_p)
    matrices_q.append(matriz_q)
    matrices_pi.append(matriz_pi)

```

```

media_columnas_p = np.mean(matriz_p, axis=0)
medias_columnas_p.append(media_columnas_p)

media_columnas_q = np.mean(matriz_q, axis=0)
medias_columnas_q.append(media_columnas_q)

media_columnas_pi = np.mean(matriz_pi, axis=0)
medias_columnas_pi.append(media_columnas_pi)

for i, tipo in enumerate(tipos_relacion):
    print(f"Estadísticas descriptivas de precios ({tipo}):")
    print(est_des(medias_columnas_p[i], 'p'))

    print(f"Test de Jarque-Bera y Kolmogoro-Smirnov de precios ({tipo})")
    print(tests(medias_columnas_p[i]))

    print(f"Test de Pearson, Spearman y Kendall de precios ({tipo})")
    print(corr_test(centrales[i], medias_filas_p[i]))

    print(f"Estadísticas descriptivas de cantidades ({tipo}):")
    print(est_des(medias_columnas_q[i], 'q'))

    print(f"Test de Jarque-Bera y Kolmogoro-Smirnov de cantidades ({tipo})")
    print(tests(medias_columnas_q[i]))

    print(f"Test de Pearson, Spearman y Kendall de cantidades ({tipo})")
    print(corr_test(centrales[i], medias_filas_q[i]))

    print(f"Estadísticas descriptivas de beneficios ({tipo}):")
    print(est_des(medias_columnas_pi[i], 'pi'))

    print(f"Test de Jarque-Bera y Kolmogoro-Smirnov de beneficios ({tipo})")
    print(tests(medias_columnas_pi[i]))

    print(f"Test de Pearson, Spearman y Kendall de beneficios ({tipo})")
    print(corr_test(centrales[i], medias_filas_pi[i]))

    plot_histogram(medias_columnas_p[i], f'Medias de los Precios ({tipo})')
    plot_histogram(medias_columnas_q[i], f'Medias de las Cantidades ({tipo})')
    plot_histogram(medias_columnas_pi[i], f'Medias de los Beneficios ({tipo})')

simu(a=5, c=2, n=100, m=1, s=1000)

```