



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODELO DE UNA ESTRELLA SIMPLE CON ROTACIÓN,
DE LA SECUENCIA PRINCIPAL**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UNA ESTRELLA SIMPLE
CON ROTACIÓN EN LA SECUENCIA PRINCIPAL**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO**

JAVIER ALEJANDRO VALLEJO JUMBO

javier.vallejo01@epn.edu.ec

DIRECTOR: ERICSON DANIEL LÓPEZ IZURIETA

ericsson.lopez@epn.edu.ec

DMQ, AGOSTO 2024

CERTIFICACIONES

Yo, JAVIER ALEJANDRO VALLEJO JUMBO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Javier Alejandro Vallejo Jumbo

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Javier Alejandro Vallejo Jumbo, bajo mi supervisión.

Ericson Daniel López Izurieta
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Javier Alejandro Vallejo Jumbo

Ericson Daniel López Izurieta

DEDICATORIA

*A mis padres,
por su cariño, cuidado y apoyo,
soy lo que soy gracias a ustedes.*

*A mi hermana,
por el contacto a pesar de la distancia
y ser tanto amiga como confidente.*

*A mis amigos,
por su amistad, confianza y soporte.*

*Y a todos quienes no pudieron seguir en este camino,
el esfuerzo y valor que han invertido durante ese tiempo
me ha ayudado a persistir,
por todo ello, gracias.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a todas las personas que permitieron esto.

Los momentos difíciles y desafiantes durante esta etapa hubieran sido imposibles de afrontar sin el apoyo de mis padres, quienes siempre lograron darme todo lo necesario y más para ayudarme. Les estoy infinitamente agradecido. A mi querida hermana, sin ti no hubiera podido afrontar las dificultades que conlleva vivir y estudiar en un lugar nuevo y diferente. Querida guambra, muchas gracias por todo tu cariño.

Gracias a todos los amigos que conocí durante la carrera, son la razón principal de que mi paso por la universidad sea un cúmulo de alegrías y recuerdos que apreciaré por toda mi vida. Quiero agradecer con todo mi corazón a Dome, Hugo, Liz, Mai, Mile O. y Mile T. Gracias, incluso esos momentos en donde todo estaba mal, donde la tristeza y la amarga frustración invadían mi alma, eran tolerables gracias a ustedes. Sé con seguridad que su amistad es algo que puedo atesorar.

También agradezco al Ph.D. Ericson López por la confianza e innegable ayuda al momento de realizar esta tesis. De igual manera, quisiera agradecer a la Ph.D. Oihane Blanco por su amabilidad y guía u orientación en los últimos semestres de mi carrera, lo que me ha incentivado ha profundizar en el estudio de la física y la matemática.

Especiales agradecimientos a mi tía, que al igual que una madre, ha representado uno de los soportes que me han permitido alcanzar este objetivo. Por todo, muchas gracias.

RESUMEN

En el presente trabajo se analizó el comportamiento de una estrella en la secuencia principal con rotación mediante la resolución de sus ecuaciones de estructura estelar a través de integración numérica, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se estudiaron dos casos específicos: los polos y la línea ecuatorial de la estrella. Se compararon los resultados obtenidos para la masa, presión y densidad en estos dos casos. Además, se examinaron los efectos de diferentes velocidades angulares y se utilizaron dos formalismos distintos: el formalismo newtoniano y el post-newtoniano. Se descubrió que la rotación influye en los perfiles de masa y presión, variando en función de la velocidad angular de la estrella y del formalismo físico aplicado.

Palabras clave: Runge-Kutta, Sol, rotación, integración numérica, aproximación post-newtoniana, formalismo newtoniano.

ABSTRACT

In this work, the behavior of a rotating star on the main sequence was analyzed by solving its stellar structure equations through numerical integration, using the fourth-order Runge-Kutta method. Two specific cases were studied: the poles and the equatorial line of the star. The mass, pressure, and density results were compared in these two cases. Additionally, the effects of different angular velocities were examined, and two distinct formalisms were used: the Newtonian and the post-Newtonian formalisms. It was found that rotation affects the mass and pressure profiles, varying with the star's angular velocity and the physical formalism employed.

Keywords: Runge-Kutta, Sun, rotation, numerical integration, post-Newtonian approximation .

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado	1
1.1. Objetivo general	2
1.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcance	2
1.4. Marco teórico	3
1.4.1. Modelo estelar	4
1.4.2. Revisión histórica de los modelos estelares	4
1.4.3. Estructura estelar de una estrella sin rotación	5
1.4.4. Formalismo Post-Newtoniano	6
1.4.5. Estructura estelar de una estrella con rotación	7
1.4.6. Método de Runge-Kutta	8
2. Metodología	11
2.1. Ecuaciones de estructura	11
2.1.1. Formalismo Newtoniano	11
2.1.2. Formalismo Post-Newtoniano	12
2.2. Método numérico	13
2.2.1. Simulación	15
3. Resultados, conclusiones y recomendaciones	21

3.1. Resultados	21
3.2. Conclusiones y recomendaciones	32
3.2.1. Conclusiones	32
3.2.2. Recomendaciones	33
A. Deducción de las ecuaciones de estructura	34
B. Resultados completos	41
B.0.1. Formalismo Newtoniano	41
B.0.2. Formalismo Post-newtoniano	44
B.0.3. Comparación entre los dos formalismos	46
C. Código	48
Bibliografía	53

Índice de figuras

3.1. Curvas de masa calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular	22
3.2. Comportamiento de la masa con respecto al radio dentro del formalismo newtoniano. Las curvas corresponden a mediciones realizadas sobre el polo y el ecuador del Sol sin alterar la velocidad angular. Las mediciones realizadas sobre el polo son iguales a las realizadas sobre una estrella sin rotación	23
3.3. Curvas de presión calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular	24
3.4. Comportamiento de la presión con respecto al radio dentro del formalismo newtoniano. Se considera un intervalo infinitesimal en \hat{r} alrededor de 0,21 para observar apropiadamente la diferencia entre las curvas de presión sin alterar la velocidad angular. Las mediciones son realizadas sobre el polo y el ecuador del Sol	25
3.5. Curvas de densidad calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular	26
3.6. Curvas de densidad calculadas en un rango de $\hat{r} \approx 0,3$ dentro del formalismo newtoniano y manteniendo la velocidad angular del Sol	27

3.7. Comportamiento de la masa respecto a la presión considerando el formalismo newtoniano manteniendo la velocidad angular	27
3.8. Comportamiento de la masa con respecto al radio considerando el formalismo post-newtoniano y diferentes velocidades angulares	28
3.9. Diferencia entre las curvas de masa calculadas considerando 2ω , 3ω y 4ω respecto de la curva de masa calculada con velocidad ω . Estas curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano	29
3.10. Comportamiento de la presión con respecto al radio considerando el formalismo post-newtoniano y diferentes velocidades angulares	30
3.11. Diferencia de las curvas de presión para las velocidades angulares 2ω , 3ω y 4ω con respecto a la curva de presión para la velocidad ω . Las curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano	31
B.4. Masa vs Presión	42
B.10. Masa vs Presión	45

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

El Sol junto con el sistema solar fueron formados aproximadamente hace 4,5 miles de millones de años en nubes moleculares constituidas de gas y partículas de polvo [1, 2].

En estas nubes, las estrellas empiezan su formación cuando los núcleos densos de las nubes colapsan debido a su propia gravedad. Durante este proceso, una parte del material remanente de la nube se acumula en el núcleo mientras que otra parte se esparce, formando un disco protostelar que mantiene el momento angular de la nube. El proceso se mantiene hasta la presecuencia principal, donde se forma el disco protoplanetario que se dispersa cuando la estrella entra a la secuencia principal, etapa en la cual pasa la mayor parte de su tiempo [2].

La rotación de las estrellas puede ser considerada desde su formación en las nubes moleculares. En la presecuencia principal, las estrellas se contraen y aumentan su rotación hasta la secuencia principal, donde las estrellas disminuyen su rotación debido al viento magnetizado [3].

Observaciones en la actividad magnética del Sol y sobre manchas solares han demostrado que el Sol presenta una rotación diferencial que depende de los polos, siendo mayor en ecuador y menor en los polos [4, 5, 6]. Se cree que la convección en el interior de las estrellas es lo que mantiene la rotación diferencial y varias simulaciones numéricas se han realizado sobre el tema [7].

La rotación de una estrella está ligada a diversos procesos físicos como el campo magnético o la masa [3, 6, 8], de ahí la importancia de su estudio.

Por tal motivo, en este trabajo se resolverá numéricamente las ecuaciones de estructura de una estrella con rotación en su secuencia principal considerando dos formalismos, el formalismo newtoniano y el post-newtoniano. Las ecuaciones serán resueltas por medio de un código programado en Python utilizando el entorno Jupyter.

1.1. Objetivo general

Desarrollar la integración numérica de un modelo teórico que describa una estrella simple con rotación en su secuencia principal, similar al Sol, bajo el formalismo newtoniano y post-newtoniano.

1.2. Objetivos específicos

1. Investigar los efectos de la rotación sobre la estructura y evolución de las estrellas.
2. Establecer una ecuación de estado apropiada para el modelo.
3. Resolver numéricamente las ecuaciones de estructura del modelo, bajo el formalismo newtoniano.
4. Resolver numéricamente las ecuaciones de estructura del modelo, bajo el formalismo post-newtoniano.
5. Validar el modelo

1.3. Alcance

Se realizará la integración numérica de las ecuaciones de estructura para una estrella con rotación bajo el formalismo newtoniano y post-newtoniano considerando parámetros del Sol.

El enfoque principal del trabajo es proponer y resolver las ecuaciones de estructura de un modelo sencillo, que no pierda validez ni rigurosidad y que sea comparable con otros modelos y con observaciones experimentales. Para ello, se comparan los resultados del modelo con rotación con modelos sin rotación, resaltando las diferencias entre los mismos.

El modelo será planteado dentro del formalismo newtoniano y los resultados serán extrapolados al formalismo post-newtoniano. Además, se cuantificará la diferencia entre los resultados de ambos modelos.

Para la integración numérica de las ecuaciones de estructura, se utilizará el método de Runge-Kutta de orden 4. El código será programado en Python utilizando el entorno Jupyter y se obtendrá las curvas de masa-radio, presión-radio, masa-presión y densidad-radio para diferentes velocidades angulares de la estrella.

1.4. Marco teórico

Las estrellas son las unidades fundamentales de materia luminosa en el universo y son usadas como herramientas para entender la estructura y evolución del universo [9]. Sin ir muy lejos, nuestro sistema solar contiene en su centro al Sol, una estrella enana en la secuencia principal del tipo G2V que emite la mayor parte de su radiación en el espectro visible y que está compuesta en un 70% de hidrógeno, 28% de helio y un 2% de elementos pesados [1].

Las estrellas se crean en nubes moleculares interestelares que debido al colapso gravitatorio se concentran en un núcleo denso, formando una protoestrella. Durante esta fase, la protoestrella acumula masa alrededor de su núcleo, formando un disco de gas debido al momento angular de la nube. Este proceso continúa hasta que la estrella pasa a la presecuencia principal, denominándola estrella T-Tauri. Antes de llegar a la secuencia principal, la estrella pierde masa y se la denomina post T-Tauri. En la secuencia principal, la estrella se mantiene en constante producción de energía por la fusión de hidrógeno en su núcleo [1, 2, 10].

La rotación de las estrellas en su secuencia principal ha sido comprobada experimentalmente por medio de observaciones en heliosismología,

astrosismología o espectropolarimetría [11, 12].

Considerar una rotación sobre las estrellas implica considerar nuevas ecuaciones de estructura, distorsiones sobre la superficie, aumento de la pérdida de masa, entre otros efectos [8].

1.4.1. Modelo estelar

Un modelo estelar o estructura estelar describe cuantitativamente el estado estacionario de una estrella, especificando las magnitudes físicas fundamentales que lo configuran y siendo consistente con las observaciones realizadas. Estas magnitudes físicas pueden ser: la presión, la densidad, la temperatura o la composición química [13, 14].

Los modelos estelares permiten deducir magnitudes físicas de las observaciones, profundizando el conocimiento sobre estos cuerpos. En consecuencia, mejores observaciones conlleva mejores modelos estelares [12].

1.4.2. Revisión histórica de los modelos estelares

En 1926 se publicó el primer trabajo en materia de estructura estelar: “*Internal Constitution of the Stars*” por Stanley Eddington. A partir de este trabajo se han desarrollado otros modelos estelares que consideran diferentes ecuaciones de estado, zonas dentro de la estrella, composiciones químicas u nuevos fenómenos físicos como la rotación [15].

Algunos modelos que se derivaron del trabajo de Eddington son: el modelo de J.H Jeans y H.N Russell que considera una proporción constante entre la luminosidad y la masa de la estrella. Los modelos “*Point-Source*” que consideran una opacidad constante o una presión de radiación despreciable y que fueron desarrollados por J.von Neumann y T.G. Cowling respectivamente [14].

En 1978 un modelo estelar que consideraba la rotación estelar fue desarrollado por Endal y Sofia [16, 17], donde se abarcó el comportamiento del momento angular así como también su transferencia. En 1991 Mc. Gregor y Brenner [18] desarrollaron un modelo que explicaba el comportamiento de las estrellas de tipo-G en la secuencia principal, incorporando un término de redistribución del momento angular entre el núcleo y la

zona convectiva [16]. El año siguiente Zhan contempló la circulación meridional para explicar la pérdida de momento angular en el núcleo [19], lo que permitió el entendimiento del flujo de masa desde el núcleo hasta la zona convectiva.

Estos modelos que incluyen la rotación a la estructura estelar consideran: la rotación de la estrella como la de un cuerpo rígido, el frenado por disco, el viento durante la etapa T-Tauri y el cambio de la tasa de acreción [16].

1.4.3. Estructura estelar de una estrella sin rotación

Dentro del formalismo newtoniano, la descripción más sencilla para un modelo estelar es dada por la ecuación de equilibrio hidrostático [20]:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m_r \rho}{r^2} \quad (1.1)$$

donde m_r es la masa encerrada en una esfera de radio r y ρ es la densidad de la estrella. La ecuación (1.1) representa el equilibrio entre la fuerza de gravedad y la presión dentro de una estrella sin movimiento [13, 21].

Una segunda ecuación se deriva de la conservación de la masa, la cual para una estrella con simetría esférica es:

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.2)$$

donde dm_r es la masa de un casquete esférico de grosor dr a una distancia r del centro de la estrella.

Para poder resolver el sistema de ecuaciones formado por (1.1) y (1.2) es necesario establecer una ecuación de estado. Generalmente, esta ecuación relaciona la presión P con la densidad ρ y caracteriza a la estrella estudiada [20].

Se asume que existe una relación simple entre P y ρ de la forma $P = K\rho^\nu$ donde K y ν son constantes. La relación anterior se la conoce como

ecuación politrópica y para un gas ideal es [13, 21]:

$$P = K\rho^{4/3} \quad \text{con} \quad K = \left(\frac{3R^4}{a\mu^4}\right)^{1/3} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3} \rho^{4/3} \quad (1.3)$$

donde R es la constante de los gases ideales, $a = \sigma/c$ relaciona la constante de Stefan-Boltzmann σ con la velocidad de la luz c , μ es la masa molar del gas y $\beta = P_{gas}/P$ es una relación entre presiones. La deducción de (1.3) considera la presión de un gas ideal P_{gas} y la presión de radiación dentro de la estrella P_{rad} tal que $P = P_{gas} + P_{rad}$ [21, 22].

Finalmente, considerando (1.3) en (1.1) y (1.2) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^{3/4} \\ \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{K^{3/4}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \end{cases} \quad (1.4)$$

1.4.4. Formalismo Post-Newtoniano

Las ecuaciones anteriores son deducidas dentro del formalismo newtoniano, sin embargo, es posible deducir una ecuación análoga a la del equilibrio hidrostático considerando la relatividad general. Al estar trabajando sobre cuerpos masivos como las estrellas, esta consideración no es trivial.

La ecuación para el equilibrio hidrostático en la Relatividad General es la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [21]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} \quad (1.5)$$

que en el límite $c^2 \rightarrow \infty$ toma la forma de la ecuación (1.1).

Sin embargo, uno de los problemas de la Relatividad General es que las ecuaciones de Einstein son no lineales. Por ende, resulta casi imposible encontrar una solución exacta a estas ecuaciones. Por esta razón, se han desarrollados esquemas de aproximación que permitan resolver estas ecuaciones, siendo uno de estos esquemas el de la aproximación post-Newtoniana [23].

La aproximación post-Newtoniana surge de considerar campos débiles y movimientos lentos. De esta forma, al realizar una expansión sobre aquellos parámetros que describen el espacio se obtiene: un espacio-tiempo vacío y plano en la expansión de orden cero, el formalismo Newtoniano en la expansión de primer orden y las correcciones post-Newtonianas en la expansión de segundo orden. Al formalismo que incluye el tratamiento Newtoniano y las correcciones post-Newtonianas se lo conoce como aproximación post-newtoniana [24].

Para campos gravitacionales pequeños, se puede expandir (1.5) y mantener solo los términos con $1/c^2$. Esto genera la aproximación post-Newtoniana de las ecuaciones de TOV [21]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} + \frac{2Gm}{rc^2} \right) \quad (1.6)$$

1.4.5. Estructura estelar de una estrella con rotación

La deducción de las ecuaciones de estructura para una estrella con rotación se derivan de la ecuación de movimiento de un fluido perfecto, al considerar que sobre cada elemento de fluido se genera una aceleración centrípeta necesaria para describir un movimiento de rotación [25, 26, 27].

Cada elemento de fluido dentro de la estrella rota alrededor del eje \hat{z} con una velocidad angular $\omega(\theta)$ que depende de la latitud, debido a la rotación diferencial del Sol [11].

Esta velocidad angular en coordenadas esféricas se la puede escribir como:

$$\omega(\theta) = \gamma + \Omega \cos^2(\theta) + \zeta \cos^4(\theta) \quad (1.7)$$

donde $\gamma = 2,97 \times 10^{-6} \text{rad/s}$ es la velocidad angular en el ecuador y $\Omega = -4,84 \times 10^{-7} \text{rad/s}$ y $\zeta = -3,60 \times 10^{-7} \text{rad/s}$ son parámetros de ajuste [11].

De esta forma, sobre cada elemento de masa del Sol se ejercerá una aceleración centrípeta, que en coordenadas esféricas estará expresada como:

$$\vec{a}_c = -a_c \left(\sin(\theta) \hat{r} + \cos(\theta) \hat{\theta} \right) \quad \text{con} \quad a_c = r\omega(\theta)^2 \sin(\theta)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento de un fluido perfecto estará escrita como [27]:

$$\vec{a}_c = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{F}_g \quad (1.8)$$

donde P es la presión, ρ la densidad del Sol y \vec{F}_g es la fuerza de gravedad. De esta expresión se deduce el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = r\rho [\omega(\theta) \sin(\theta)]^2 - \frac{Gm}{r^2}\rho \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho \sin(\theta) \cos(\theta) [r\omega(\theta)]^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Manteniendo la suposición realizada para las ecuaciones de estructura estelar de una estrella sin rotación, se considera a la estrella como una estrella gaseosa que cumple la ecuación de estado de un gas ideal. Por este motivo, se puede mantener la ecuación politrópica (1.3) para este caso.

Sin embargo, la ecuación (1.3) sugiere que la presión y la densidad dependen de r y de θ de acuerdo a (1.9). Esto limita que se pueda utilizar la ecuación (1.2), ya que la masa dependerá de r y θ también.

Para resolver las ecuaciones de estructura presentadas en esta sección, se estudiarán casos específicos sobre las ecuaciones (1.9). De esta forma, se encontrará ecuaciones similares a (1.4), lo que también permitirá encontrar las ecuaciones de estructura en el formalismo post-newtoniano.

1.4.6. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método práctico que solo necesita un punto para empezar o para mejorar el algoritmo, a diferencia de otros métodos como el de Euler o el de Picard. Este método se deriva de dos expansiones de Taylor sobre sus variables dinámicas y sus derivadas [28].

Sea l el número total de variables dinámicas y t el tiempo, entonces, el vector con las variables dinámicas,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_l) \quad (1.10)$$

y el vector generalizado de velocidad o vector de derivadas,

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) = [g_1(\mathbf{y}, t), g_2(\mathbf{y}, t), \dots, g_t(\mathbf{y}, t)] \quad (1.11)$$

describen la dinámica del sistema de acuerdo a las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \quad (1.12)$$

Por otro lado, se puede expandir cada una de las variables de (1.10) en la forma de $y_i(t + \tau)$ en términos de t con una expansión de Taylor:

$$y_i(t + \tau) = y_i + \tau \frac{dy_i}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\tau^3}{3!} \frac{d^3 y_i}{dt^3} + \dots \quad (1.13)$$

Además, derivando (1.12) con respecto al tiempo se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy_i}{dt} \right) = \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k} g_k \quad (1.14)$$

De donde se define a los términos de (1.14) como:

$$g_{i,t} = \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

$$gg_{i,y} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k} g_k = (\partial_k g_i) g_k$$

Para facilitar la nomenclatura, la misma que se mantendrá para derivadas de orden superior, se considerará que $y_i = y$ y $g_i = g$ son componentes cualquiera de (1.10) y (1.11) respectivamente.

De esta forma, se puede escribir (1.13) como:

$$y(t + \tau) = y + \tau g + \frac{\tau^2}{2} (g_t + gg_y) + \frac{\tau^3}{3!} (g_{tt} + 2gg_{ty} + g^2 g_{yy} + gg_y^2 + g_t g_y) + \dots \quad (1.15)$$

Por otro lado, también se puede escribir $y_i(t + \tau)$ como:

$$y_i(t + \tau) = y_i + \alpha_1 c_{i1} + \alpha_2 c_{i2} + \dots + \alpha_m c_{im} \rightarrow y(t + \tau) = y + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_m c_m \quad (1.16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \tau g(y, t), \\
 c_2 &= \tau g(y + \nu_{21}c_1, t + \nu_{21}\tau), \\
 c_3 &= \tau g(y + \nu_{31}c_1 + \nu_{32}c_2, t + \nu_{31}\tau + \nu_{32}\tau), \\
 &\vdots \\
 c_m &= \tau g\left(y + \sum_{i=1}^{m-1} \nu_{mi}c_i, t + \tau \sum_{i=1}^{m-1} \nu_{mi}\right)
 \end{aligned}$$

donde α_i con $i = 1, 2, \dots, m$ y ν_{ij} con $i = 2, 3, \dots, m$ y $i < j$ son parámetros que se determinan comparando (1.15) y (1.16).

El método más conocido es aquel en el cual se trunca la expansión hasta obtener un error del orden de τ^4 , es decir, hasta $\mathcal{O}(\tau^4)$. Este es el método de Runge-Kutta de cuarto orden o Runge-Kutta 4, el cual está dado por [28]:

$$y(t + \tau) = y + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)$$

donde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \tau g(y, t), \\
 c_2 &= \tau g\left(y + \frac{c_1}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right), \\
 c_3 &= \tau g\left(y + \frac{c_2}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right), \\
 c_4 &= \tau g(y + c_3, t + \tau)
 \end{aligned}$$

Si bien el método explicado en esta sección considera funciones que dependen del tiempo t , en realidad, se puede considerar funciones que dependan de cualquier otra variable, mientras se mantenga la forma del vector de derivadas.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Ecuaciones de estructura

2.1.1. Formalismo Newtoniano

Se mencionó anteriormente que para encontrar las ecuaciones de estructura estelar de una estrella con rotación se analizarían casos específicos sobre las ecuaciones (1.9).

Estos casos estudian el comportamiento de las ecuaciones (1.9) sobre los polos y sobre la línea ecuatorial de la estrella, permitiendo eliminar la dependencia de θ de estas ecuaciones y por consiguiente, encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre el cual trabajar.

Además, los mismos representan casos límites de las ecuaciones (1.9) puesto que, en los polos, la contribución de la aceleración centrípeta es nula, obteniéndose el mismo sistema de ecuaciones que para una estrella sin rotación (1.4), mientras que en la línea ecuatorial la contribución de la fuerza centrípeta es máxima, obteniéndose un sistema de ecuaciones que describa el comportamiento de una estrella con rotación.

Por otro lado, en estos dos casos de estudio, se puede considerar la ecuación (1.2) ya que la presión y la densidad solo dependen de r .

Estos dos casos los expresamos como:

- Los polos: $\theta = 0^\circ$ y 180°
- El ecuador: $\theta = 90^\circ$

De esta forma, el sistema de ecuaciones que se tiene, utilizando [1.3](#), es:

Para los polos:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{K^{4/3}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^{3/4} \end{cases} \quad (2.1)$$

Para el ecuador:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{\omega^2}{K^{3/4}} r P^{3/4} - \frac{G}{K^{4/3}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^{3/4} \end{cases} \quad (2.2)$$

Es importante remarcar que la velocidad angular ω en [\(2.2\)](#) es la velocidad angular de la estrella en la línea ecuatorial. Para una deducción más detallada de las ecuaciones de estructura para una estrella con rotación considerando la segunda ley de Newton y realizando un análisis de fuerzas refiérase al anexo [A](#).

2.1.2. Formalismo Post-Newtoniano

Como se mencionó en el marco teórico, el formalismo post-newtoniano es un método que se ha desarrollado para encontrar esquemas de aproximación sobre las ecuaciones de Einstein y de esta manera poder resolverlas [\[23\]](#).

De esta forma, si se considera la ecuación [\(2.2\)](#) se observa que la fuerza centrípeta añade un término de rotación a las ecuaciones de estructura de la estrella sin rotación. Por tanto, este termino puede considerarse como un término de corrección a las ecuaciones de estructura para una estrella sin rotación.

Si se considera que las ecuaciones derivadas del formalismo post-newtoniano para una estrella sin rotación tienden en el límite newtoniano

a las ecuaciones del formalismo newtoniano, entonces, es factible añadir el termino de rotación a estas ecuaciones.

De esta forma, manteniendo las mismas hipótesis que para una estrella sin rotación, las ecuaciones de estructura para una estrella con rotación bajo el formalismo post-newtoniano son:

En los polos:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{K^{3/4}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \left(1 + \frac{K^{3/4}}{c^2} P^{1/4} + \frac{4\pi r^3 P}{c^2 m} + \frac{2G m}{c^2 r} \right) \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^3 \end{cases} \quad (2.3)$$

En el ecuador:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{\omega^2}{K^{3/4}} r P^{3/4} - \frac{G}{K^{3/4}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \left(1 + \frac{K^{3/4}}{c^2} P^{1/4} + \frac{4\pi r^3 P}{c^2 m} + \frac{2G m}{c^2 r} \right) \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^3 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2. Método numérico

Para resolver las ecuaciones de estructura anteriormente deducidas, se utiliza el método de Runge-Kutta 4. Para ello, es necesario establecer condiciones iniciales.

En el centro de la esfera, se puede considerar que $m(r = 0) = 0$. Es decir, no existe masa encerrada en un radio $r = 0$. De esta forma, la masa $m(r)$ crece hasta abarcar el radio del Sol.

Por otro lado, la presión $p(r)$ en el centro de la estrella ($r = 0$) es diferente de 0 [22], por tanto, se puede escribir $P(r = 0) = P_{\odot 0}$, donde $P_{\odot 0}$ es la presión del Sol en su centro.

De esta forma, las condiciones iniciales para resolver las ecuaciones de estructura son:

$$m(r = 0) = 0, \quad P(r = 0) = P_{\odot 0}$$

Estas condiciones se mantienen tanto para el caso newtoniano como para el caso post-newtoniano.

Además, con el fin de evitar la propagación de errores, es necesario normalizar las ecuaciones, utilizando parámetros relacionados con el Sol [22]:

$$\rho_{\odot 0} \approx 8 \times 10^4 \frac{kg}{m^3}, \quad P_{\odot 0} \approx 1,3 \times 10^{16} Pa, \quad M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} kg, \quad R_{\odot} \approx 7 \times 10^5 km$$

Se escribe las nuevas variables adimensionales como:

$$\hat{r} = \frac{r}{R_{\odot}}, \quad \hat{m} = \frac{m}{M_{\odot}}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\odot 0}}, \quad \hat{P} = \frac{P}{P_{\odot 0}} \quad (2.5)$$

Donde r_{\odot} , M_{\odot} , ρ_{\odot} y P_{\odot} corresponden al radio, masa, densidad y presión del Sol respectivamente.

Esto también modifica las condiciones iniciales a:

$$\hat{m}(\hat{r} = 0) = 0, \quad \hat{P}(\hat{r} = 0) = 1 \quad (2.6)$$

Además, para la resolución de estas ecuaciones es necesario determinar el valor de K . De la ecuación (1.3), para condiciones iniciales, en $r = 0$ se tiene:

$$P(r = 0) = K\rho(r = 0)^{4/3} \rightarrow K = \frac{P_{\odot 0}}{\rho_{\odot 0}^{4/3}}$$

Para el formalismo newtoniano, de acuerdo a las relaciones (2.5) las ecuaciones (2.1) y (2.2) se reescriben para su resolución por medio de métodos numéricos como:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = A\hat{r}^2\hat{P}^{3/4} \\ \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} = -B\frac{\hat{m}\hat{P}^{3/4}}{\hat{r}^2} + C\hat{r}\hat{P}^{3/4}\delta \end{cases} \quad (2.7)$$

donde

$$A = \frac{4\pi R_{\odot}^3 P_{\odot}^{3/4}}{M_{\odot} K^{3/4}}, \quad B = \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot} P_{\odot}^{1/4} K^{3/4}}, \quad C = \frac{\omega^2 R_{\odot}^2}{P_{\odot}^{1/4} K^{3/4}}$$

Por otro lado, para el formalismo post-newtoniano y análogo al formalismo newtoniano, usando (2.5) se reescriben las ecuaciones (2.4) y (2.3)

para su resolución por medio de métodos numéricos como:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = A\hat{P}^{3/4}\hat{r}^2 \\ \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} = -B\frac{\hat{m}\hat{P}^{3/4}}{\hat{r}^2} \left(1 + D\hat{P}^{1/4} + E\frac{\hat{r}^3\hat{P}}{\hat{m}} + F\frac{\hat{m}}{\hat{r}} \right) + C\hat{r}\hat{P}^{3/4}\delta \end{cases} \quad (2.8)$$

donde

$$A = \frac{4\pi R_{\odot}^3 P_{\odot}^{3/4}}{M_{\odot} K^{3/4}}, \quad B = \frac{GM_{\odot}}{K^{3/4} P_{\odot}^{1/4} R_{\odot}}, \quad C = \frac{\omega^2 R_{\odot}^2}{P_{\odot}^{1/4} K^{3/4}}$$

$$D = \frac{K^{3/4} P_{\odot}^{1/4}}{c^2}, \quad E = \frac{4\pi R_{\odot}^3 P_{\odot}}{c^2 M_{\odot}}, \quad F = \frac{2GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}$$

En ambos formalismos, se utiliza una función δ definida como:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{Para los polos} \\ 1 & \text{Para el ecuador} \end{cases} \quad (2.9)$$

Nótese que las constantes A , B y C son las mismas para ambos formalismos. Además, puesto que se está analizando casos particulares de θ , la masa tendrá como límite un diferencial de masa dM_{\odot} . Sin embargo, se prefiere utilizar M_{\odot} para comparar las curvas obtenidas de los casos con y sin rotación y también para minimizar la propagación de errores.

2.2.1. Simulación

Las ecuaciones de estructura de una estrella con rotación bajo el formalismo newtoniano y post-newtoniano son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales, por lo tanto, es factible resolver los sistemas de ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. La ejecución de este método fue realizado por medio de un código escrito en Python en el entorno Jupyter.

La estructura del código se presenta a continuación.

Descripción de las ecuaciones y valores utilizados

En esta sección se describe el problema a resolver. Esto incluye una descripción de las ecuaciones adimensionales utilizadas, tanto para el formalismo newtoniano como para el post-newtoniano. Además, se detalla las constantes utilizadas en las ecuaciones de estructura en función de los parámetros del Sol. Los valores de estos parámetros son detallados junto con los valores de otras constantes físicas en esta sección.

Librerías

En esta sección se detallan las librerías utilizadas, las cuales fueron:

- *NumPy*: Se utiliza para constantes matemáticas y funciones matemáticas.
- *matplotlib.pyplot*: Se utiliza para la creación de cálculos.
- *astropy*: Se utiliza para las constantes físicas: M_{\odot} , R_{\odot} , G y c . Las constantes físicas P_{\odot} y ρ_{\odot} fueron recopiladas de [22]. La constante física ω fue recopilada de [11].

Además, se incluye el comando `plt.rcParams['text.usetex']=True` para la ejecución de texto en formato LaTeX.

Definición de parámetros

En esta sección se detallan las variables utilizadas en el código. Esta sección se subdivide en: condiciones iniciales, constantes físicas, constantes de las ecuaciones de estructura bajo el formalismo newtoniano y post-newtoniano y parámetros del intervalo de integración.

En condiciones iniciales se especifica los valores tomados como condiciones iniciales para el formalismo newtoniano. Estas condiciones son:

$$\hat{m}_{new}(\Delta\hat{r}) = 0, \quad \hat{P}_{new}(\Delta\hat{r}) = 1$$

donde se toma como punto de partida el tamaño del paso $\Delta\hat{r}$.

Esto debido a que en $\hat{r} = 0$ el sistema de ecuaciones (2.7) no tiene solución, es decir, es singular en este punto.

Cabe mencionar que en esta sección no se consideran las condiciones iniciales del formalismo post-newtoniano. Para ello, primero se resuelven las ecuaciones de estructura para el formalismo newtoniano. Esto debido a que se utiliza como condición inicial para la masa el primer valor diferente de cero calculado para la masa en los polos en el formalismo newtoniano. Esto se realiza debido a que el sistema de ecuaciones (2.8) en el formalismo post-newtoniano es singular en $\hat{m} = 0$ y $\hat{r} = 0$. De esta forma, las condiciones iniciales para el formalismo post-newtoniano son:

$$\hat{m}_{post}(\Delta\hat{r}) = \hat{m}_{new-polo}(2\Delta\hat{r}), \quad \hat{P}_{post}(\Delta\hat{r}) = 1$$

Nótese que se utiliza la masa calculada en polos, sin embargo, se puede utilizar tanto la masa calculada en los polos como en el ecuador. Se demostrará en la sección de resultados que los primeros valores calculados de la masa se mantienen iguales independientemente del caso estudiado.

Después, se escriben las variables correspondientes a las constantes físicas y parámetros del Sol utilizados en las ecuaciones de estado.

Con respecto a las constantes de las ecuaciones de estructura, estas son calculadas usando las variables antes mencionadas. Es importante mencionar que las constantes A, B Y C son los términos correspondientes a la formulación newtoniana siendo C la constante correspondiente al término de rotación. Estas constantes son las mismas para ambas formulaciones. Por otro lado D, E y F son los términos correspondientes a la formulación post-newtoniana.

Finalmente, esta sección incluye los parámetros del intervalo de integración, intervalo tomado sobre la variable adimensional \hat{r} . De esta forma, el intervalo está definido entre $0 < \hat{r} \leq 1$ dividido en $n = 5000$ pasos y cuyo tamaño de paso es $\Delta\hat{r} = 0,0002$.

Funciones

En esta sección se definen las funciones que resuelven las ecuaciones de estructuras. Estas funciones son:

- $dm(r, p)$: Representa la derivada de la masa con respecto al radio y es la misma para los dos formalismos (2.7) y (2.8). Toma la forma:

$$\left. \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} \right|_i = \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} (\hat{r}_i, \hat{P}_i)$$

donde \hat{r}_i, \hat{P}_i son el radio y la presión evaluadas en el i-ésimo paso respectivamente. Los argumentos que esta función toma son “r” y “p” que representan a \hat{r}_i y \hat{P}_i respectivamente.

- $dpn(r, p, m, d, ptjw)$: Representa la derivada de la presión con respecto al radio en el formalismo newtoniano (2.7). Toma la forma:

$$\left. \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} \right|_i = \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} (\hat{r}_i, \hat{P}_i, \hat{m}_i)$$

donde \hat{r}_i, \hat{P}_i y \hat{m}_i son el radio, la presión y la masa evaluadas en el i-ésimo paso. Esta función toma como argumentos “r”, “p” y “m” que representan a \hat{r}_i, \hat{P}_i y \hat{m}_i respectivamente. Además, también toma como argumentos d que representa la expresión (2.9) y toma un valor de 0 cuando se estudia los polos o 1 cuando se estudia el ecuador. Finalmente, también se considera el argumento “ptjw” que representa el porcentaje tomado de la velocidad angular ω , siendo 1 cuando se considera la totalidad de ω . Este argumento puede tener un valor mayor a 1.

- $dpp(r, p, m, d, ptjw)$: Representa la derivada de la presión con respecto al radio en el formalismo post-newtoniano (2.8). Igual que para dpn , toma la forma:

$$\left. \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} \right|_i = \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} (\hat{r}_i, \hat{P}_i, \hat{m}_i)$$

Esta función considera los mismos argumentos que se utilizan en dpn .

- $rk4(r, p, m, d, ptjw, dp)$: Esta función contiene el método de Runge-Kutta de orden 4. Los argumentos de la función: “r”, “p”, “m”, “d” y “ptjw” son los mismos argumentos utilizados en dpn y dpp . El argumento “dp” representa la derivada de la presión del formalismo

newtoniano o post-newtoniano según convenga. Es decir, “dp” recibe como entrada una función: d_{pn} o d_{pp} .

Resolución de ecuaciones

La resolución de las ecuaciones de estructura usando el método de Runge-Kutta 4 sigue el siguiente orden.

En primer lugar, se resuelven las ecuaciones de estructura en el formalismo newtoniano. Para ello, se considera dos casos, los polos y el ecuador, sin alterar el valor de la velocidad angular. En cada uno de estos casos se calcula la masa, la presión y la densidad con respecto al radio. Asimismo, se resuelven las ecuaciones de estructura en el ecuador considerando las velocidades angulares: $w = \omega, 2\omega, 3\omega$ y 4ω .

Finalmente, considerando como condición inicial para la masa el primer valor calculado de esta en el ecuador en el formalismo newtoniano, se resuelven las ecuaciones de estructura en el formalismo post-newtoniano, siguiendo el mismo procedimiento que para el caso newtoniano.

Curvas

En esta sección se realiza la creación de gráficos de las ecuaciones de estructura resueltas en la sección anterior.

Esta sección se subdivide en tres secciones: el formalismo newtoniano, el formalismo post-newtoniano y la comparación entre ambos formalismos.

En la primera sección, se crean los gráficos de las curvas de masa, presión y densidad con respecto al radio manteniendo el valor de la velocidad angular. Además, se agrega la curva de presión con respecto al radio. En cada gráfico se representan los dos casos, el de los polos y el del ecuador. Debido a que las diferencias entre las curvas de los dos casos son imperceptibles gráficamente, se crean gráficas de la diferencia entre las curvas de masa, presión y densidad con respecto al radio.

Después, en el mismo formalismo newtoniano, se crean los gráficos de las curvas de masa, presión y densidad con respecto al radio en el ecuador para las diferentes velocidades angulares consideradas en la sección

anterior. Asimismo, se calcula la diferencia de estas curvas con respecto a la curva con velocidad angular $w = \omega$.

En la segunda sección, se repite el mismo procedimiento realizado en la primera sección pero considerando el formalismo post-newtoniano.

Finalmente, en la tercera sección se comparan las curvas obtenidas en los dos formalismos. Para ello, la sección se subdivide en dos secciones: los polos y el ecuador.

En la primera sección, se comparan las curvas de masa, presión y densidad con respecto al radio calculadas en el polo de los dos formalismos. Análogamente a las secciones anteriores, se calcula la diferencia entre las curvas obtenidas del formalismo newtoniano con respecto a las del formalismo post-newtoniano.

En la segunda sección, se realiza el mismo procedimiento realizado anteriormente, pero considerando las curvas calculadas en el ecuador.

La parte del código que resuelve las ecuaciones de estructura está en el [anexo C](#).

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Las ecuaciones de estructura estelar para una estrella con rotación tanto en el límite newtoniano como post-newtoniano analizadas en los dos casos de estudio (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) contienen al modelo para una estrella simple sin rotación. Esto es fácilmente observable comparando las ecuaciones (2.1) y (2.3) con las ecuaciones (1.4) y (1.6). Por lo tanto, en esta sección se considerará el caso del polo como el de una estrella sin rotación mientras que el caso del ecuador como el de una estrella con rotación. Esto se lo realizará para observar las diferencias entre los dos modelos y visualizar el efecto que genera la rotación en las ecuaciones de estructura de una estrella sin rotación.

La resolución de las ecuaciones de estructura en ambos formalismos, el newtoniano y el post-newtoniano, generan las mismas curvas con ligeras diferencias. Tanto las curvas de masa-radio, presión-radio, densidad-radio y masa-presión mantienen la misma forma, por lo que se puede generalizar los resultados de un formalismo al otro sin pérdida de rigurosidad.

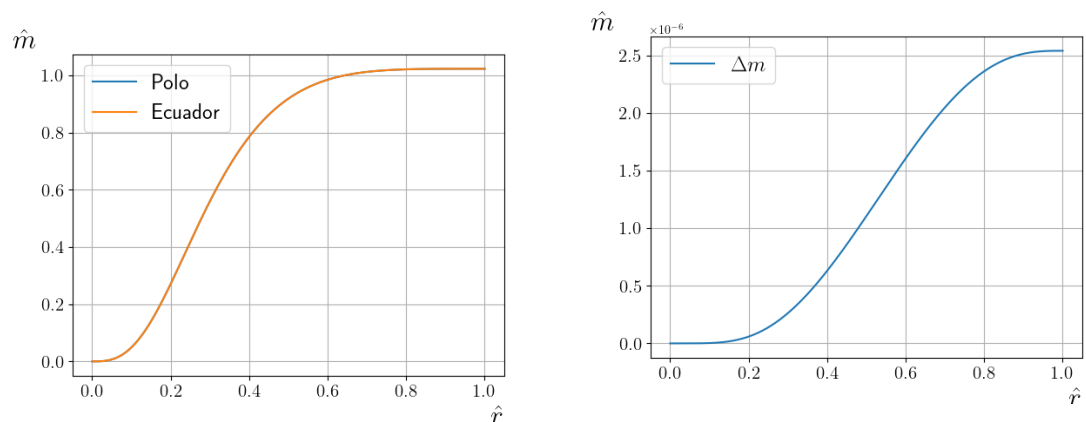
De igual forma se hará con las curvas obtenidas de masa, presión y densidad considerando diferentes velocidades angulares, ya que, con las velocidades angulares consideradas en la sección de metodología, la

forma general de la masa y la presión no se altera de forma que puedan ser vistas fácilmente en los gráficos. Por tal motivo también se puede generalizar la descripción y análisis de las curvas de presión, masa y densidad para diferentes velocidades angulares.

Sin embargo, si bien la forma que tienen estas curvas es la misma para los diferentes formalismos y casos estudiados, existen diferencias entre las mismas.

Se empezará describiendo los resultados obtenidos de la resolución numérica de las ecuaciones de estructura estelar. Todos estos resultados obtenidos de la simulación están referidos en el anexo B.

Tanto del formalismo newtoniano como del post-newtoniano se obtuvieron las curvas de masa, presión y densidad con respecto al radio, sin alterar el valor de la velocidad angular. Estas curvas son comparadas en los dos casos de estudios, los polos y el ecuador, tanto gráficamente como cuantitativamente. Para lo último, se creó el gráfico de la diferencia entre ambas curvas. Adicionalmente, también se obtuvo los gráficos de presión con respecto a masa, comparando las curvas entre los polos y el ecuador.



(a) Comportamiento de la masa con respecto al radio

(b) Diferencia entre la masa calculada en el ecuador con la masa calculada en el polo

Figura 3.1: Curvas de masa calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular

Por otro lado, considerando los valores de velocidad angular: ω , 2ω , 3ω y 4ω , se obtuvo los gráficos de masa y presión con respecto al radio. Análogamente al caso anterior, se obtuvo los gráficos de las diferencia entre las curvas con velocidad angular $w = 2\omega$, $w = 3\omega$ y $w = 4\omega$ con

respecto a la curva con $w = \omega$.

Finalmente, se obtuvo las gráficas de masa, presión y densidad con respecto al radio, comparando las curvas obtenidas de los dos formalismos. Esto se separó por casos, considerando los polos y el ecuador.

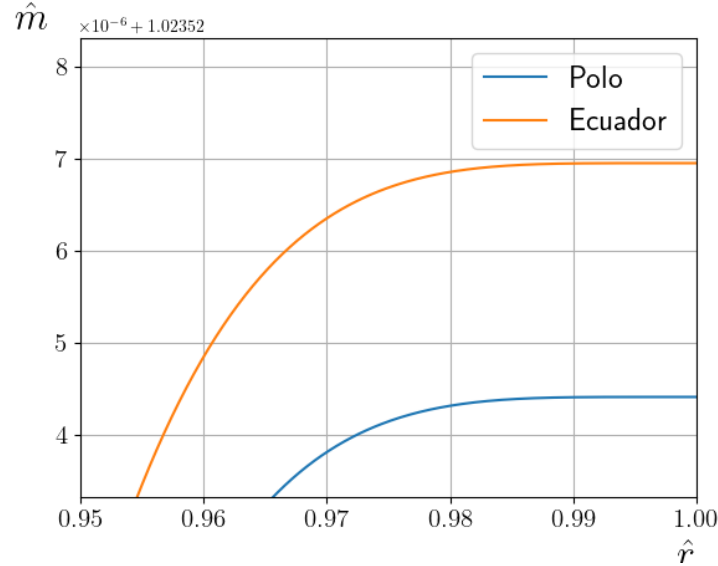


Figura 3.2: Comportamiento de la masa con respecto al radio dentro del formalismo newtoniano. Las curvas corresponden a mediciones realizadas sobre el polo y el ecuador del Sol sin alterar la velocidad angular. Las mediciones realizadas sobre el polo son iguales a las realizadas sobre una estrella sin rotación

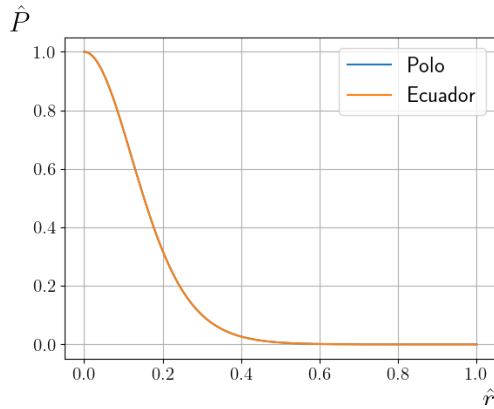
Las gráficas de masa con respecto al radio sugieren que la masa contenida en una esfera de radio r aumenta con este 3.1a. Sin embargo, para valores mayores a $0,8R_{\odot}$, la masa permanece constante. Además, para $\hat{r} \approx 0$ los valores son prácticamente los mismos 3.1b.

La diferencia entre la masa de los polos con respecto a la del ecuador, para ambos formalismos, aumenta con \hat{r} y alcanza una diferencia máxima de $\Delta m_{max} \approx 2,55 \times 10^{-6}$ cuando $r = R_{\odot}$ 3.1b. Esta diferencia de masa en la superficie de la estrella es de aproximadamente $5,08 \times 10^{24}[kg]$, la cual es despreciable comparándola con la masa del Sol.

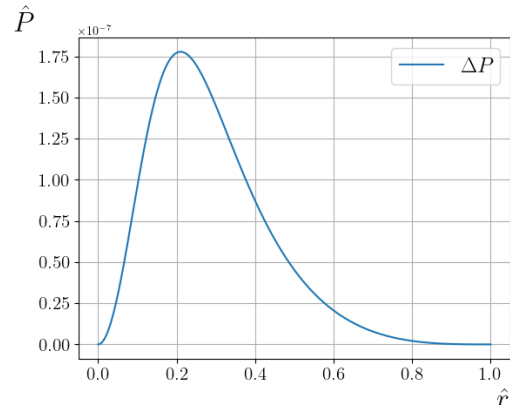
Esta diferencia está representada en la figura 3.2 donde se observa que en el ecuador se acumula mayor masa sobre la superficie de la estrella. Este efecto se debe a la rotación de la estrella, específicamente, por considerar la aceleración centrípeta en la ecuación de movimiento de un fluido perfecto (1.8).

Por otro lado, de acuerdo con el modelo planteado por las ecuaciones (2.7) y (2.8), se tiene que $m(r = R_{\odot}) = 1,0294M_{\odot}$ con una diferencia de $\pm 2,55 \times 10^{-6}$ dependiendo del caso de estudio. Sin embargo, se espera que la masa sea igual a la masa del Sol cuando el radio considerado sea el del Sol, por lo tanto, las ecuaciones de estructura planteadas, tanto para el formalismo newtoniano como para el post-newtoniano, resueltas con el método de Runge-Kutta 4, presenta un error de $\epsilon \approx 2,94\%$.

Esto se debe a que se consideró un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Se puede eliminar este error considerando al sistema como uno con condiciones de frontera, sin embargo, se prefirió usar un problema de condiciones iniciales para observar la diferencia de la masa en la superficie de la estrella debido a los efectos de la rotación de la estrella.



(a) Comportamiento de la presión con respecto al radio



(b) Diferencia entre la presión calculada en el ecuador con la calculada en el polo

Figura 3.3: Curvas de presión calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular

De las gráficas de presión con respecto al radio se observa que la presión dentro de la estrella decrece con el radio siendo cero cuando $r \geq R_{\odot}$, es decir, fuera de la estrella 3.3a. Esto concuerda con la formulación considerada, pues la ecuación de movimiento de un líquido perfecto está definida dentro de la estrella.

Por otro lado, observando la diferencia entre las curvas de presión de los polos con el ecuador se observa una diferencia máxima de $\Delta P_{max} \approx 1,77 \times 10^{-7}$ 3.3b, por lo que si bien, es una diferencia considerablemen-

te baja tomando como parámetro la presión del Sol en su centro, esta correspondería a una diferencia de aproximadamente $2,3 \times 10^9 [Pa]$ o $22805,27[atm]$.

La diferencia de presión tiene forma de campana de Gauss [3.3b](#), donde su pico se encuentra en $r \approx 0,21R_{\odot}$. Es decir, alrededor del núcleo de la estrella, la presión en los polos y en el ecuador encuentran su diferencia máxima. Por otro lado, la diferencia es mínima en su centro y en la superficie del Sol.

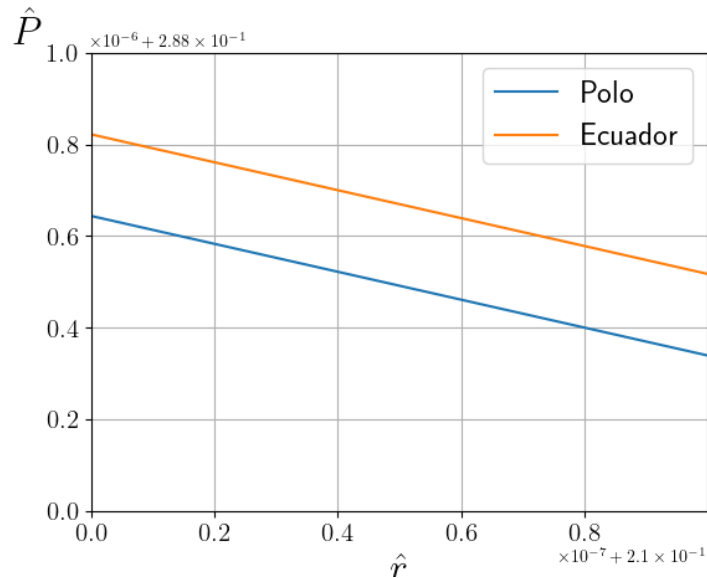
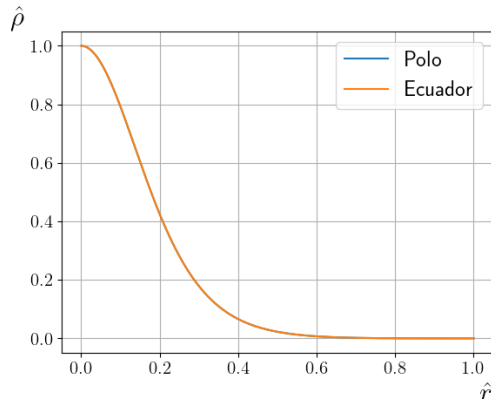


Figura 3.4: Comportamiento de la presión con respecto al radio dentro del formalismo newtoniano. Se considera un intervalo infinitesimal en \hat{r} alrededor de 0,21 para observar apropiadamente la diferencia entre las curvas de presión sin alterar la velocidad angular. Las mediciones son realizadas sobre el polo y el ecuador del Sol

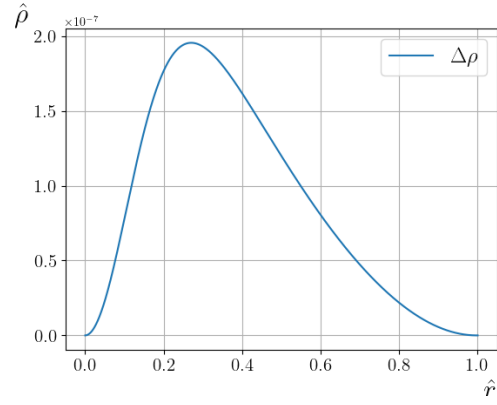
Esta diferencia está representada gráficamente en la figura [3.4](#) donde se observa que la presión en el ecuador es mayor que en los polos, alrededor de $r \approx 0,21R_{\odot}$.

Por otro lado, estudiando la densidad dentro de la estrella, se observa que esta disminuye con el radio de la estrella, y tiene una forma similar a la de la presión [3.5a](#). Esto se debe a la ecuación de estado considerada [\(1.3\)](#) en las ecuaciones de estructura.

Por las gráficas y también por las ecuaciones de estructura, la densidad es inversamente proporcional a la masa y directamente proporcional a la presión. Entonces, la densidad de la estrella es mayor en su núcleo



(a) Comportamiento de la densidad con respecto al radio



(b) Diferencia entre la densidad calculada en el ecuador con la calculada en el polo

Figura 3.5: Curvas de densidad calculadas en el formalismo newtoniano sin alterar la velocidad angular

que en su corteza.

Físicamente, se interpreta que la densidad es mayor en el núcleo debido a la presión. Esto se puede entender observando las gráficas de la masa con respecto al radio 3.1a, donde se observa que alrededor del núcleo la masa no varía. Por (1.2) se sabe que la presión depende de la variación de la masa, por tanto, la única dependencia de la densidad en el núcleo es debido a su presión, y esta es diferente de 0 en el núcleo. Análogamente, en la corteza, la densidad depende mayormente de la presión, sin embargo, en la corteza, la presión disminuye. De esta forma, la densidad es mayor en el núcleo que en la corteza.

Por otro lado, la diferencia de densidad calculada entre el polo y el ecuador se mantiene en un mayor rango que en la presión 3.5b. Esto se explica principalmente por la dependencia de la densidad con la variación de la masa. Además, la densidad calculada en el ecuador es mayor que la calculada en los polos 3.6, con una diferencia máxima de $\Delta\rho_{max} \approx 1,95 \times 10^{-7}$ lo que equivale a una diferencia de $\approx 15,63 \times 10^{-3} [kg/m^3]$ alrededor de $r \approx 0,27R_{\odot}$. Esta, a diferencia de la masa y la presión, es una diferencia considerablemente baja, tanto en parámetros del Sol como en unidades convencionales de densidad.

La magnitud de la diferencia entre un caso y el otro es el mismo independientemente del formalismo considerado. Por tanto, la rotación influ-

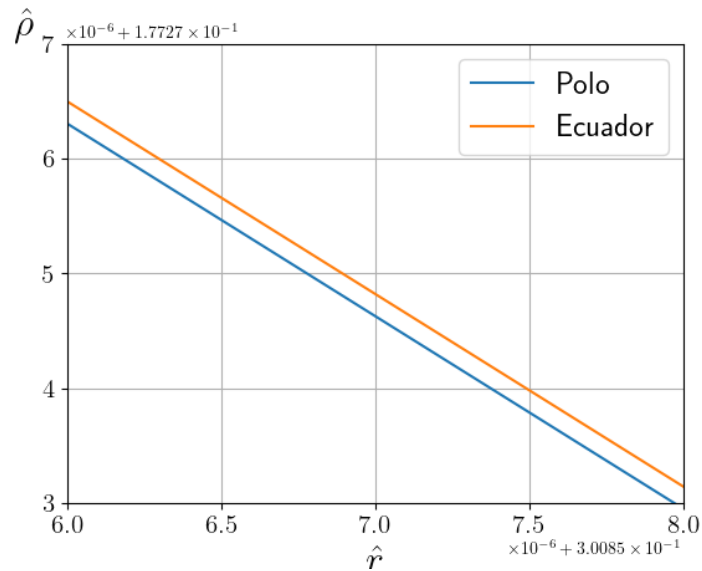


Figura 3.6: Curvas de densidad calculadas en un rango de $\hat{r} \approx 0,3$ dentro del formalismo newtoniano y manteniendo la velocidad angular del Sol

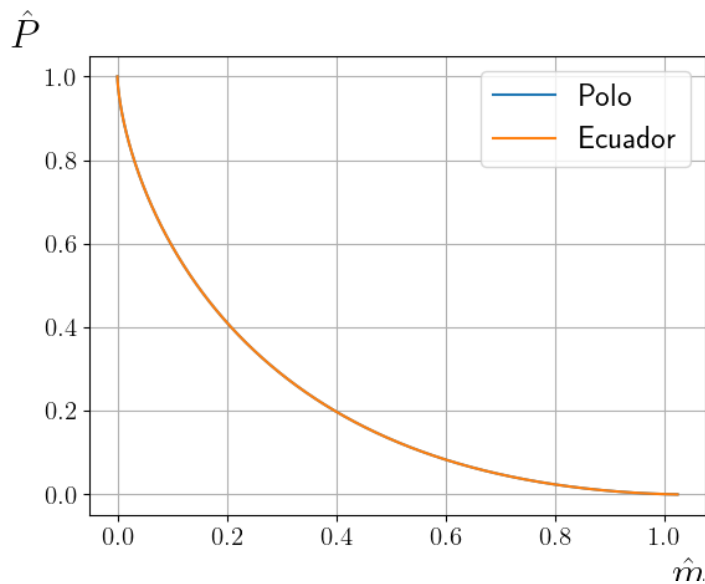


Figura 3.7: Comportamiento de la masa respecto a la presión considerando el formalismo newtoniano manteniendo la velocidad angular

ye en la densidad del interior de la estrella, específicamente, aumentando la densidad de la estrella.

Finalmente, para terminar la descripción del comportamiento de la presión, la masa y la densidad se estudió la relación entre la masa y la presión 3.7, las cuales son inversamente proporcionales, comprobando el análisis realizado en la densidad.

Las diferencias máximas entre los valores calculados de masa, presión y densidad, considerando dos casos, los polos y el ecuador de la estrella, independientemente del formalismo considerado, son resumidos en la tabla 3.1.

Magnitud	Parámetros del Sol	SI
$\Delta m_{max} \approx$	$2,55 \times 10^{-6} M_{\odot}$	$5,08 \times 10^{24} [kg]$
$\Delta P_{max} \approx$	$1,77 \times 10^{-7} P_{\odot}$	$2,3 \times 10^9 [Pa]$
$\Delta \rho_{max} \approx$	$1,95 \times 10^{-7} \rho_{\odot}$	$1,56 \times 10^{-2} [kg/m^3]$

Cuadro 3.1: Diferencias máximas de masa, presión y densidad entre los valores calculados en los polos y los valores calculados en el ecuador

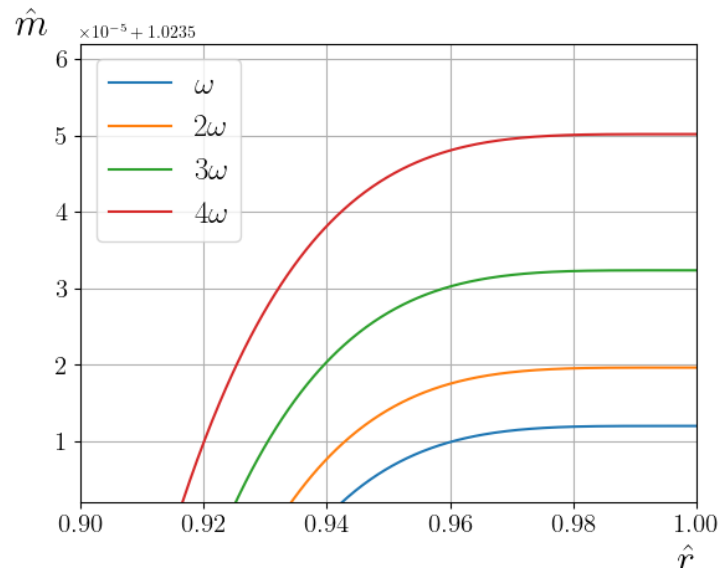


Figura 3.8: Comportamiento de la masa con respecto al radio considerando el formalismo post-newtoniano y diferentes velocidades angulares

Al analizar el comportamiento de la masa con respecto al radio cuando se considera diferentes velocidades angulares se observa que el comportamiento general de la masa no varía del descrito anteriormente (fig. B.5a y fig.B.11a). Además, tampoco depende del formalismo que se este considerando. Sin embargo, la masa en la superficie del Sol cambiará al considerar diferentes velocidades angulares.

En particular, esta variación es proporcional a la velocidad angular, por lo que a mayores velocidades angulares se tiene mayor masa en la superficie de la estrella (fig.3.8 y 3.9).

En la tabla 3.2 se pueden observar las diferencias entre las curvas

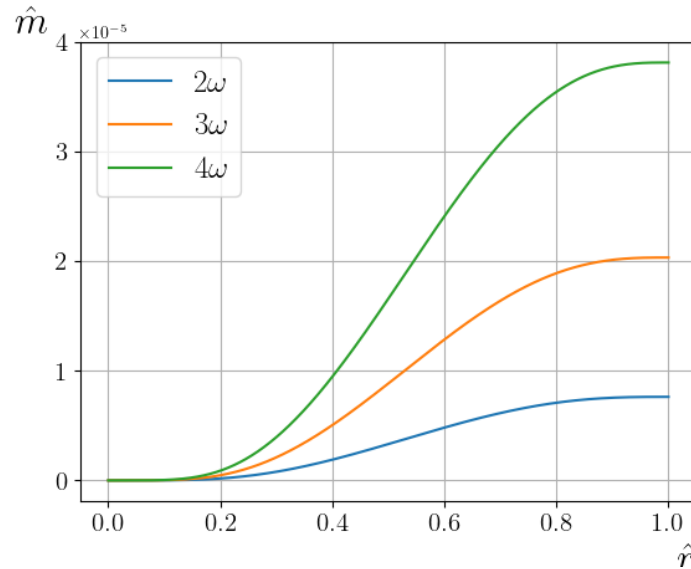


Figura 3.9: Diferencia entre las curvas de masa calculadas considerando 2ω , 3ω y 4ω respecto de la curva de masa calculada con velocidad ω . Estas curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano

Velocidad angular	$[\times 10^{-6} M_{\odot}]$	$[\times 10^{25} kg]$
2ω	7,67	1,52
3ω	20,46	4,06
4ω	38,37	7,62

Cuadro 3.2: Diferencias máximas de las curvas de masa para las velocidades angulares 2ω , 3ω y 4ω con respecto a la curva de masa para la velocidad ω . Las curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano

de masa al considerar diferentes velocidades angulares, como se puede visualizar en la figura 3.9.

Por tanto, la velocidad angular de la estrella determina la variación de las curvas de masa, siendo mayor la variación al considerar velocidades angulares altas.

El mismo comportamiento se mantiene para la presión (fig. 3.10 y 3.11). A mayores velocidades angulares le corresponden mayores presiones dentro de la estrella. Exceptuando este efecto sobre la presión, el comportamiento general de la presión es el mismo que fue descrito anteriormente. Además, la variación de la presión aumenta para mayores velocidades. Esto puede ser observado de la fig. 3.11 y de la tabla 3.3.

Finalmente, comparando las curvas de masa y presión entre los dos

Velocidad angular	$[\times 10^{-7} P_{\odot}]$	$[\times 10^9 Pa]$
2ω	5,33	6,93
3ω	14,21	18,48
4ω	26,66	34,66

Cuadro 3.3: Diferencias máximas de las curvas de presión para las velocidades angulares 2ω , 3ω y 4ω con respecto a la curva de presión para la velocidad ω . Las curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano

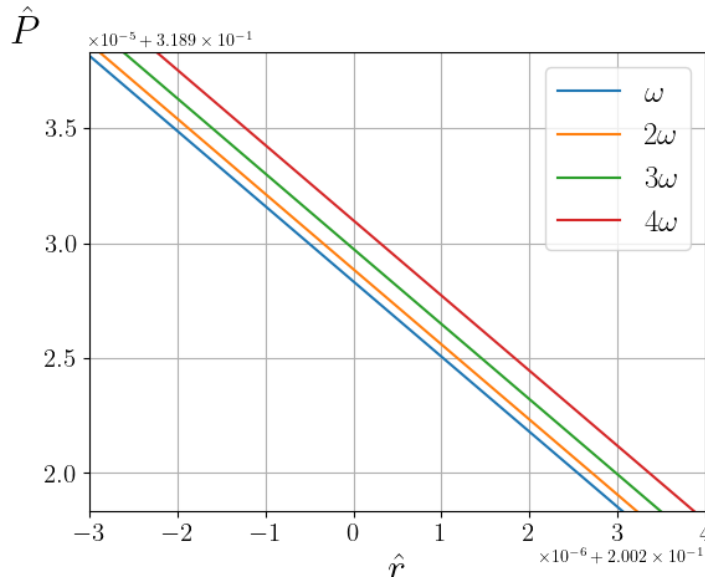


Figura 3.10: Comportamiento de la presión con respecto al radio considerando el formalismo post-newtoniano y diferentes velocidades angulares

formalismos, se observa que las curvas presentan ligeras desviaciones entre si, al igual que los casos anteriormente mencionados (fig. 3.12a y 3.12b).

De hecho, de la tabla 3.4 se observa que estas desviaciones no dependen del caso de estudio, es decir, no depende de si se considera un estrella con rotación o en reposo.

Sin embargo, estas diferencias son mucho mayores a las calculadas considerando los casos de estudio o diferentes velocidades angulares. Por lo tanto, si bien las diferencias para la masa y la presión al comparar los formalismo newtoniano y post-newtoniano son despreciables comparándolas con los parámetros del Sol, estas son mucho más significativas que las diferencias entre casos de estudio o velocidad angular.

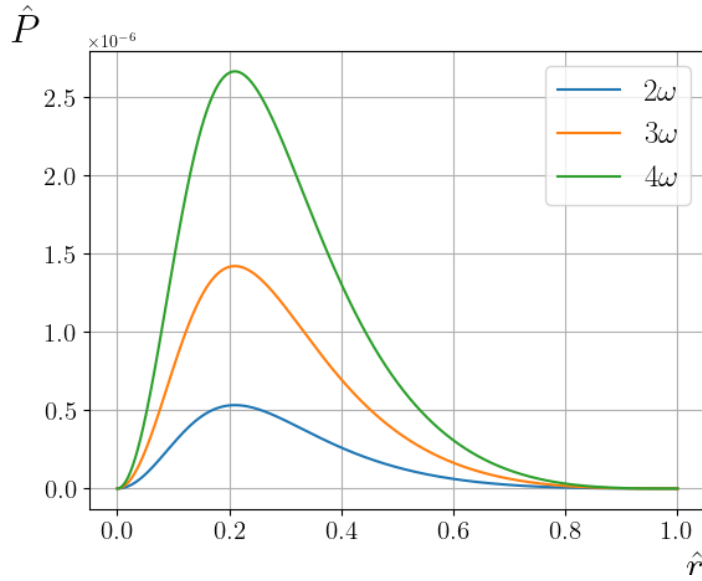
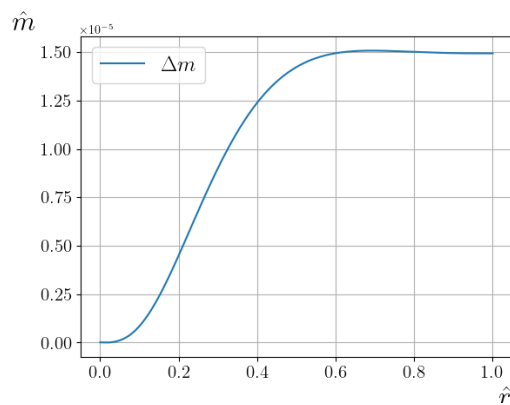
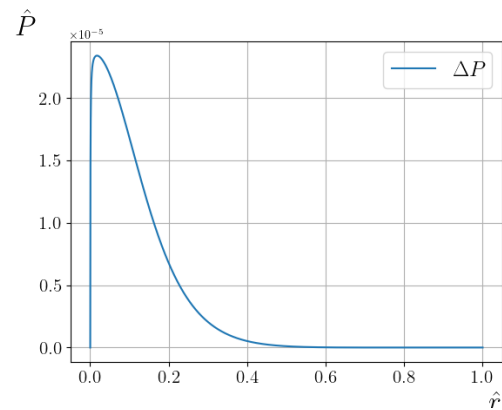


Figura 3.11: Diferencia de las curvas de presión para las velocidades angulares 2ω , 3ω y 4ω con respecto a la curva de presión para la velocidad ω . Las curvas fueron calculadas en el formalismo post-newtoniano



(a) Diferencia entre la curva de masa del formalismo newtoniano y la curva de masa del formalismo post-newtoniano



(b) Diferencia entre la curva de presión del formalismo newtoniano y la curva de presión del formalismo post-newtoniano

Caso	Masa [$\times 10^{-5} M_{\odot}$]	Presión [$\times 10^{-5} P_{\odot}$]
Ecuador	1.517583	2.31311812
Polos	1.517585	2.31311813

Cuadro 3.4: Desviaciones máximas al comparar las curvas de masa y presión con respecto al radio para los dos formalismos, el newtoniano y post-newtoniano. La tabla considera también los casos de estudio, los polos y el ecuador

3.2. Conclusiones y recomendaciones

3.2.1. Conclusiones

La deducción de las ecuaciones de estructura estelar para una estrella con rotación, en la secuencia principal, se basó principalmente en la ecuación de estado politrópica ec.(1.3) y en la ecuación de movimiento para un fluido perfecto ec.(1.8), considerando que el fluido sale de su equilibrio debido a la fuerza centrípeta que actúa sobre un elemento de fluido, fuerza necesaria para que la misma describa una trayectoria circular y por tanto, un movimiento de rotación. Más detalles sobre la deducción de las ecuaciones de estructura pueden ser revisadas en la otra componente de este proyecto.

Para resolver las ecuaciones de estructura estelar de una estrella con rotación ec.(1.9), se contempló dos casos de estudio: el comportamiento en el polo de la estrella y en su línea ecuatorial.

Estas consideraciones permitieron simplificar las ecuaciones de estructura a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. Asimismo, esta simplificación permitió extrapolar los efectos de la rotación sobre las ecuaciones de estructura en el formalismo newtoniano a la aproximación post-newtoniana. Esto debido a que la rotación adiciona un término extra sobre las ecuaciones de estructura de una estrella sin rotación.

Resolver el sistema de ecuaciones de estructura como un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales por medio del método de Runge-Kutta de orden 4, generó un error del $\epsilon \approx 2,35\%$.

Sin embargo, al abordar las ecuaciones de estructura estelar como un problema de condiciones iniciales, se logró observar y cuantificar las diferencias entre los modelos que describen una estrella sin rotación y aquellos que consideran la rotación. Además, esta metodología permitió comparar las variaciones entre un modelo de estrella rotante en el marco del formalismo newtoniano y uno en el formalismo post-newtoniano.

El término de rotación derivado de las ecuaciones de estructura incrementa la masa de la corteza solar en la región ecuatorial. Además,

también provoca un aumento significativo en la presión estelar cerca del núcleo, a una distancia aproximada de $r \approx 0,21R_{\odot}$. Este aumento en la presión y la masa está directamente relacionado con la velocidad angular de la estrella, incrementándose a medida que lo hace la velocidad angular. Por lo tanto, la velocidad angular desempeña un papel crucial en las ecuaciones de estructura estelar para una estrella en rotación.

Finalmente, las ecuaciones de estructura en ambos formalismos muestran el mismo comportamiento general para la masa y la presión. Sin embargo, existe una diferencia notable entre las curvas de masa y presión obtenidas por cada formalismo. Esta diferencia es más significativa que las variaciones observadas al comparar distintas velocidades angulares o diferentes casos de estudio. A pesar de esto, ambos formalismos capturan el comportamiento esencial de una estrella en rotación de manera consistente.

3.2.2. Recomendaciones

Es fundamental considerar las singularidades de las ecuaciones de estructura al resolverlas mediante métodos numéricos. Estas singularidades pueden ser abordadas al examinar valores cercanos a ellas para garantizar la estabilidad del cálculo.

Además, es imprescindible resolver las ecuaciones de estructura en unidades adimensionales. Esto no solo facilita una mejor visualización de las curvas obtenidas, sino que también ayuda a reducir los errores en los resultados numéricos.

Capítulo A

Deducción de las ecuaciones de estructura

La aceleración centrípeta del diferencial de masa tendrá dirección radial \hat{R} en coordenadas cilíndricas. Pasando a coordenadas esféricas, se tiene:

$$\vec{a}_c = -a_c \hat{R} = -a_c (\sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}) = \vec{a}_{c\hat{r}} + \vec{a}_{c\hat{\theta}}$$

Donde a_c es el módulo de la aceleración centrípeta y $\hat{R} = \sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}$

Se observa por tanto que \vec{a}_c en coordenadas esféricas posee dos componentes, en \hat{r} y $\hat{\theta}$.

Las fuerzas consideradas en el diferencial de masa son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{P1} = P(r, \theta)\Delta A_1 \hat{r} \\ \vec{F}_{P2} = -P(r + \Delta r, \theta)\Delta A_1 \hat{r} \\ \vec{F}_{P3} = P(r, \theta)\Delta A_2 \hat{\theta} \\ \vec{F}_{P4} = -P(r, \theta + \Delta\theta)\Delta A_2 \hat{\theta} \\ \vec{F}_g = -\frac{Gm(r)\Delta m}{r^2} \hat{r} \end{array} \right.$$

Con

$$\Delta A_1 = r^2 \sin(\theta)\Delta\theta\Delta\phi \quad \text{y} \quad \Delta A_2 = r \sin(\theta)\Delta r\Delta\phi$$

Que cumplen:

$$\Delta V = \Delta A_1 \Delta r = r \Delta\theta \Delta A_2$$

Por tanto, el análisis de fuerzas sobre \hat{r} es:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\hat{r}} &= \Delta m \vec{a}_{c\hat{r}} \\ \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} + \vec{F}_g &= \Delta m \vec{a}_{c\hat{r}} \\ -\frac{P(r + \Delta r, \theta) - P(r, \theta)}{\Delta r} - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) &= -a_c \sin(\theta) \rho(r)\end{aligned}$$

Se ha dividido la última ecuación para el diferencial de volumen, obteniéndose una expresión con ρ que es la densidad de la estrella.

Haciendo $\Delta r \rightarrow 0$, se deduce:

$$\frac{\partial P(r, \theta)}{\partial r} = a_c \sin(\theta) \rho(r) - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, el análisis de fuerzas sobre θ es:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\hat{\theta}} &= \Delta m \vec{a}_{c\hat{\theta}} \\ \vec{F}_{P3} + \vec{F}_{P4} &= \Delta m \vec{a}_{c\hat{\theta}} \\ P(r, \theta) \Delta A_2 - P(r, \theta + \Delta \theta) \Delta A_2 &= -\Delta m a_c \cos(\theta) \\ \frac{\Delta A_2}{\Delta V} (P(r, \theta) - P(r, \theta + \Delta \theta)) &= -\frac{\Delta m}{\Delta V} a_c \cos(\theta) \\ \frac{P(r, \theta + \Delta \theta) - P(r, \theta)}{r \Delta \theta} &= \rho(r) a_c \cos(\theta)\end{aligned}$$

Haciendo $\Delta \theta \rightarrow 0$, se deduce:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P(r, \theta)}{\partial \theta} = a_c \cos(\theta) \rho(r) \quad (\text{A.2})$$

De esta forma, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para la presión:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = a_c \sin(\theta) \rho(r) - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = a_c \cos(\theta) \rho(r) \end{cases}$$

El movimiento del diferencial de masa será similar al de una partícula describiendo una trayectoria circular sobre un plano. Por lo tanto, el

módulo de la aceleración centrípeta será:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega(\theta)^2$$

Donde $\omega(\theta)$ es la velocidad angular de la estrella y R es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta el diferencial de masa.

De acuerdo a nuestro sistema de referencia, $R = r \sin(\theta)$ y se tiene:

$$a_c = r \sin(\theta)\omega(\theta)^2 \quad (\text{A.3})$$

Y el sistema de ecuaciones para la presión es:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = r\rho(r) [\omega(\theta) \sin(\theta)]^2 - \frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sin(\theta) \cos(\theta)\rho(r) [r\omega(\theta)]^2 \end{cases}$$

Por otro lado, considerando cascarones esféricos de espesor dr a una distancia r del centro de la esfera y de masa Δm , la densidad de la estrella en un volumen ΔV es:

$$\rho(r) = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

El volumen del cascaron esférico se expresa como: $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$ por tanto:

$$\rho(r) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{4\pi r^2 \Delta r} \rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta r} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

De esta forma, se tiene:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (\text{A.4})$$

Esta expresión considera que la densidad de la estrella solo depende de su radio.

El sistema de ecuaciones que se tiene es:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = r\rho(r) [\omega(\theta) \sin(\theta)]^2 - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho(r) \sin(\theta) \cos(\theta) [r\omega(\theta)]^2 \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, es necesario encontrar una ecuación para la densidad, la cual puede ser deducida del gas ideal.

Para facilitar los cálculos, se considera al diferencial de masa en tres casos, cuando se encuentra en los polos $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ y en el ecuador $\theta = 90^\circ$

En los polos, no existe contribución de la aceleración centrípeta de acuerdo a (A.3), ya que esta se anula en 0° y 90°

Por tanto, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Por otro lado, en el ecuador, la aceleración centrífuga solo tiene una componente en \hat{r} , por tanto, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = r [\omega(\theta = 90^\circ)]^2 \rho(r) - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

En ambos casos, $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, es decir, la presión solo depende de r . Además, se considerará $\omega(\theta = 90^\circ) = \omega$ como la velocidad angular de la estrella en la línea ecuatorial.

Las ecuaciones (A.6) son las mismas ecuaciones que para las de una estrella sin rotación, mientras que las ecuaciones (A.7) son las ecuaciones para una estrella con rotación en el ecuador.

Como se considera a la estrella formada por un gas ideal, la presión será [22]:

$$P_{gas} = \frac{R}{\mu} \rho T \quad (\text{A.8})$$

donde R es la constante de los gases ideales, μ es la masa molar y T es la temperatura del gas.

Para eliminar la dependencia de la presión con T se considera la presión de radiación [22]:

$$P_{rad} = \frac{4\sigma}{3c} \rho T \quad (\text{A.9})$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y c es la velocidad de la luz en el vacío.

La presión en un punto dentro de la estrella será:

$$P = P_{gas} + P_{rad}$$

Considerando que la proporción de P_{gas} y P_{rad} es constante dentro de la estrella, Se puede escribir la constancia de las proporciones de P_{gas} y P_{rad} en la estrella como:

$$\beta = \frac{P_{gas}}{P} \quad (\text{A.10})$$

De (A.8), (A.9) y (A.10) se deduce:

$$P = \left(\frac{1 - \beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \left(\frac{3cR^4}{4\sigma\mu^4} \right)^{1/3} \rho^{4/3}$$

Que se puede reescribir como:

$$P(r) = K \rho(r)^{4/3} \quad \text{con} \quad K = \left(\frac{1 - \beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \left(\frac{3cR^4}{4\sigma\mu^4} \right)^{1/3} \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.11) es una ecuación politrópica de exponente 4/3[22] cuya constante K será determinada por las condiciones de la estrella. De esta forma, se reescriben las ecuaciones (A.6) y (A.7) como:

Para los polos:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{K^{4/3}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^{3/4} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Para el ecuador:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{\omega^2}{K^{3/4}} r P^{3/4} - \frac{G}{K^{4/3}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^{3/4} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

De las ecuaciones (2.2) se observa que en el ecuador se añade un término correspondiente a la rotación de la estrella a las ecuaciones para una estrella sin rotación. Por tal motivo, este término se lo considerará como un factor de corrección.

De esta forma, las ecuaciones de estructura en el formalismo post-newtoniano, en el ecuador, se lo puede escribir como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \omega^2 r \rho(r) - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} + \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right) \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Como se tiene un gas ideal, se usa (A.11) para reescribir las ecuaciones (A.14) como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{\omega^2}{K^{3/4}} r P^{3/4} - \frac{G}{K^{3/4}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \left(1 + \frac{K^{3/4}}{c^2} P^{1/4} + \frac{4\pi r^3 P}{c^2 m} + \frac{2Gm}{c^2 r} \right) \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^3 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

En los polos, la ecuación es la misma que para una estrella sin rotación. Entonces, considerando (A.11), las ecuaciones de estructura en los

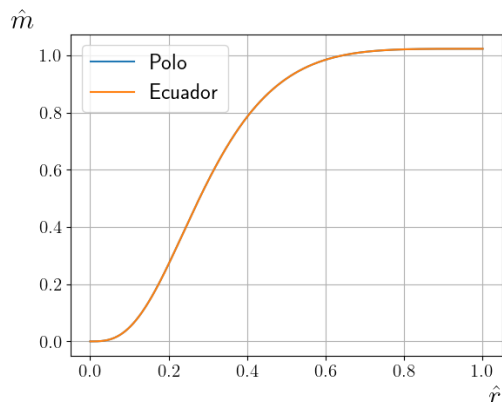
polos para el formalismo post-newtoniano son:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{K^{3/4}} \frac{mP^{3/4}}{r^2} \left(1 + \frac{K^{3/4}}{c^2} P^{1/4} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{r^3 P}{m} + \frac{2G}{c^2} \frac{m}{r} \right) \\ \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{K^{3/4}} r^2 P^3 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

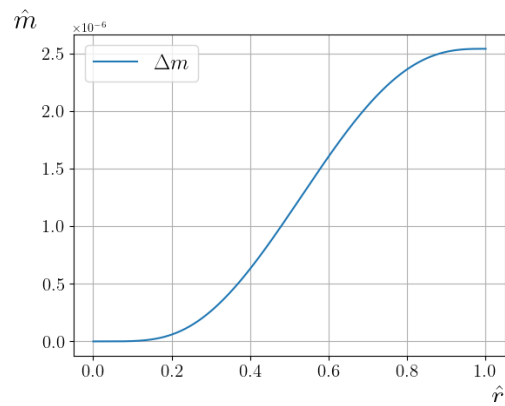
Capítulo B

Resultados completos

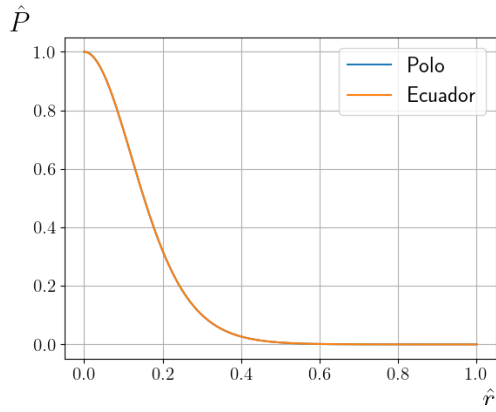
B.0.1. Formalismo Newtoniano



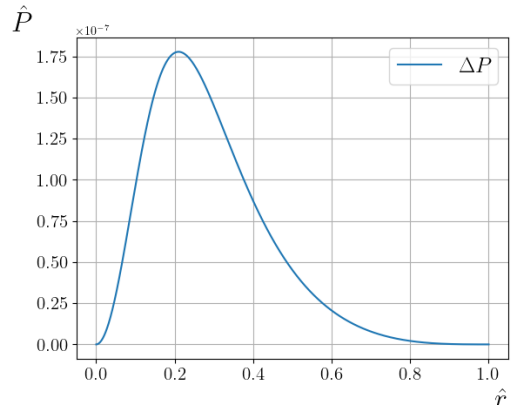
(a) Masa vs radio



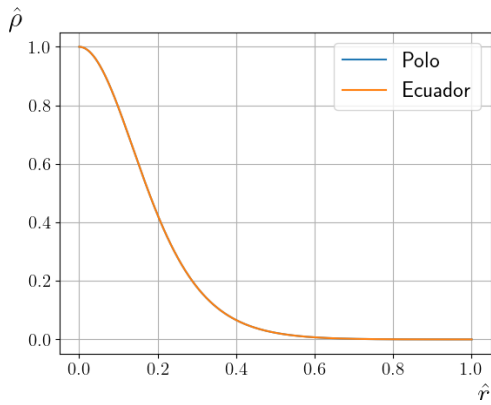
(b) Diferencia entre curvas de masa



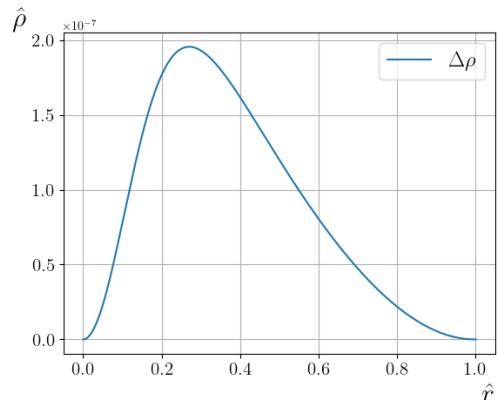
(a) Presión vs radio



(b) Diferencia entre curvas de presión



(a) Densidad vs radio



(b) Diferencia entre curvas de densidad

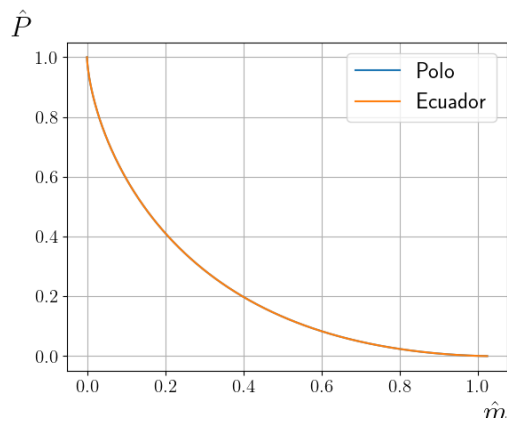
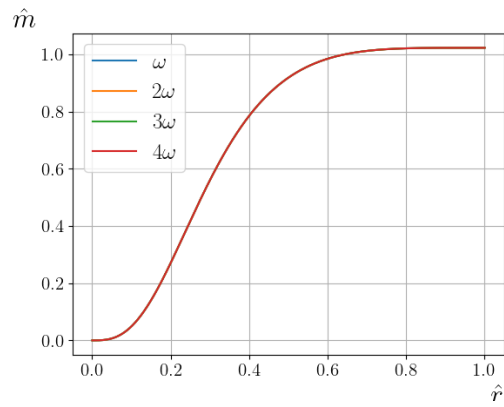
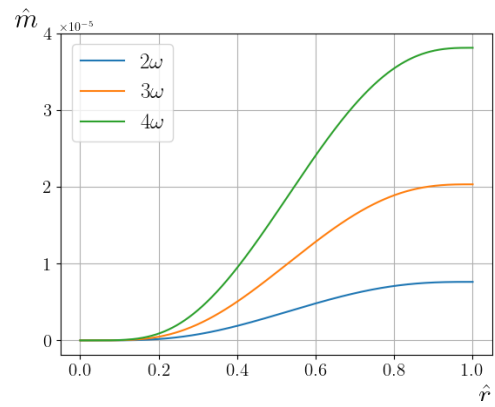


Figura B.4: Masa vs Presión

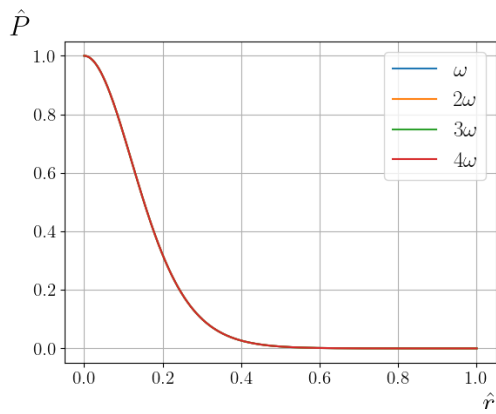
Diferentes velocidades



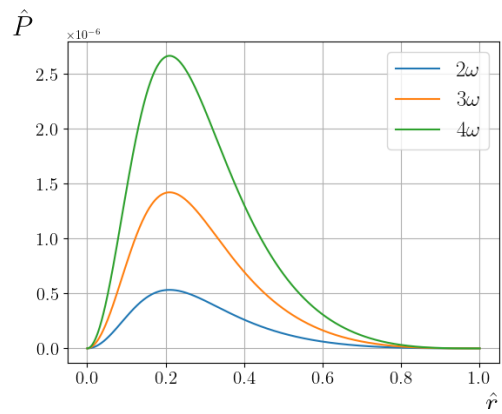
(a) Masa vs radio



(b) Diferencia entre curvas de masa

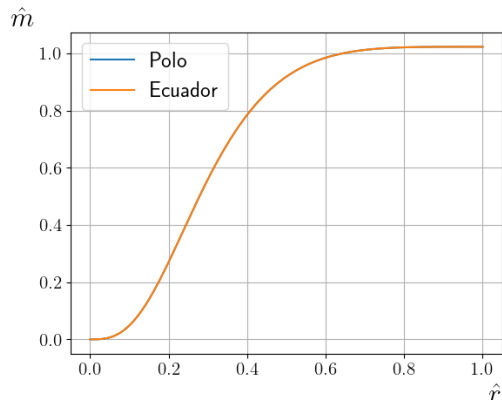


(a) Presión vs radio

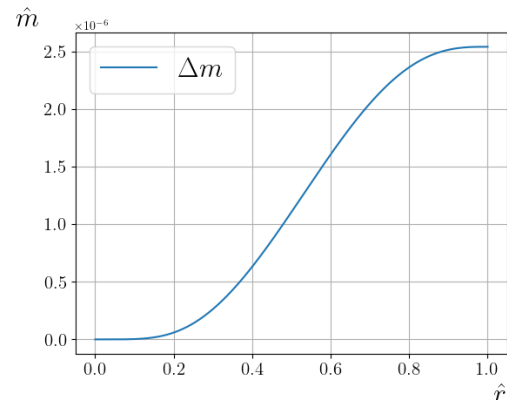


(b) Diferencia entre curvas de presión

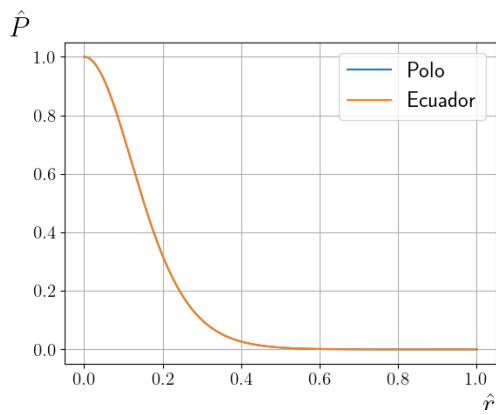
B.0.2. Formalismo Post-newtoniano



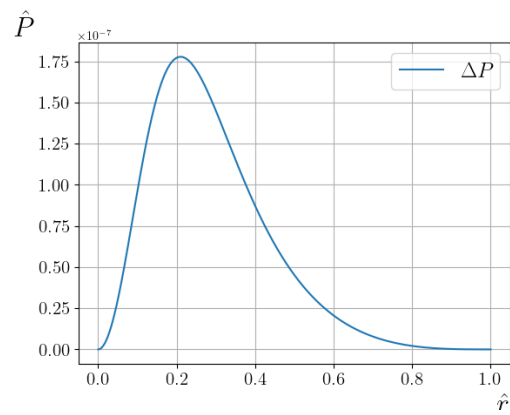
(a) Masa vs radio



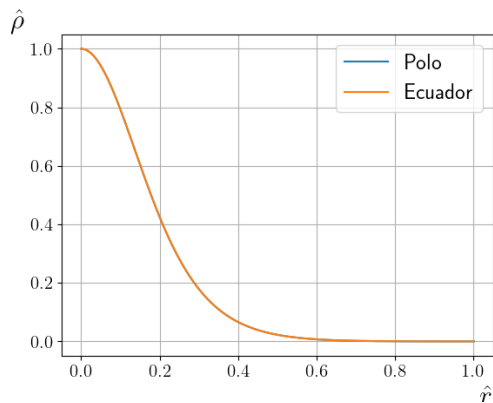
(b) Diferencia entre curvas de masa



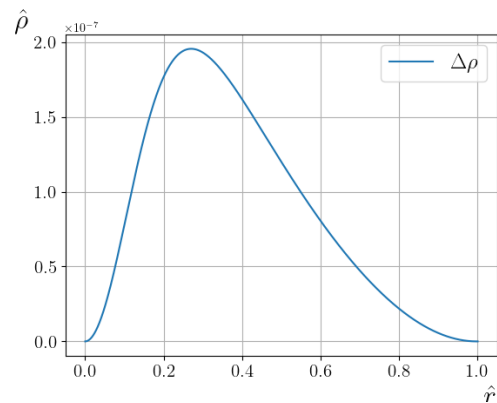
(a) Presión vs radio



(b) Diferencia entre curvas de presión



(a) Densidad vs radio



(b) Diferencia entre curvas de densidad

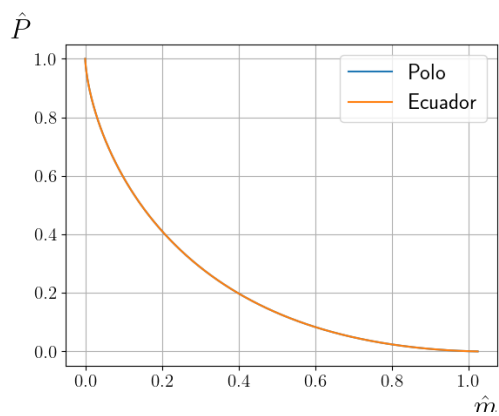
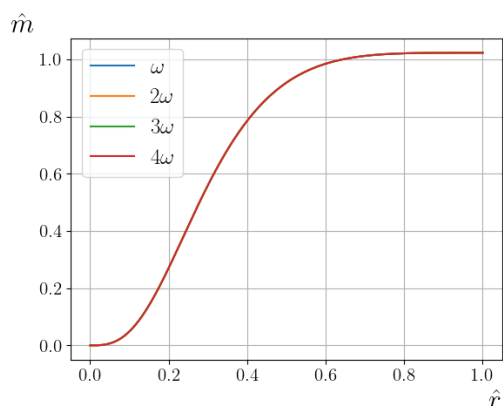
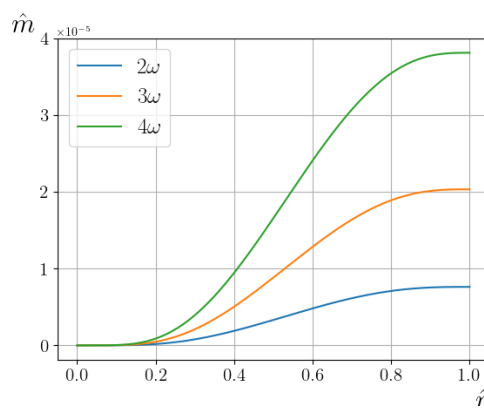


Figura B.10: Masa vs Presión

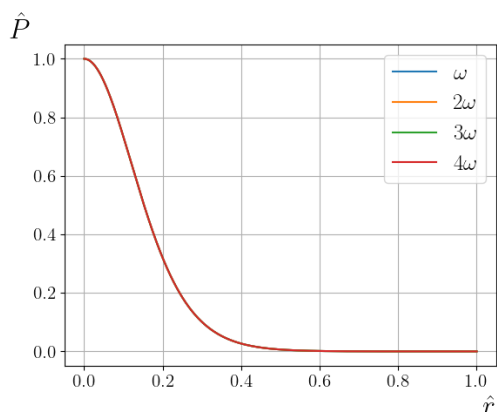
Diferentes velocidades



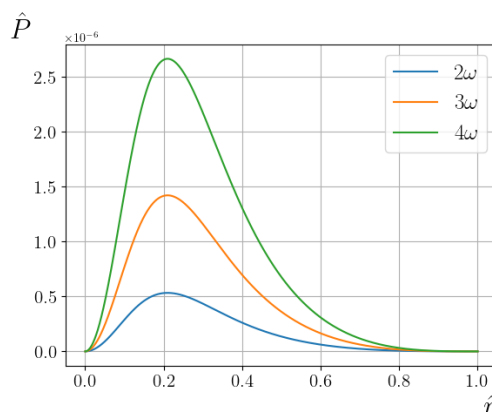
(a) Masa vs radio



(b) Diferencia entre curvas de masa



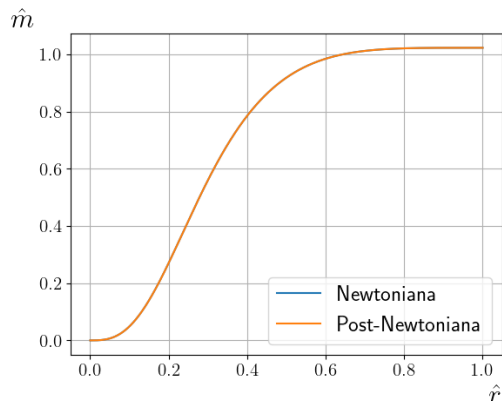
(a) Presión vs radio



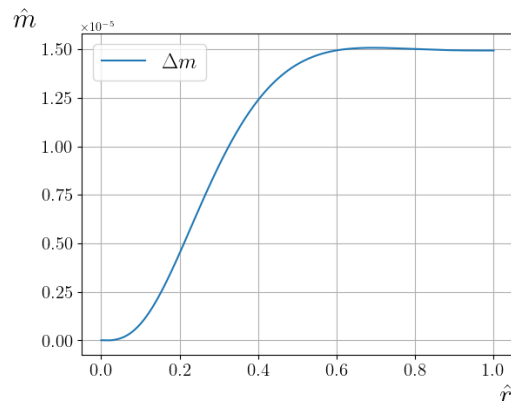
(b) Diferencia entre curvas de presión

B.0.3. Comparación entre los dos formalismos

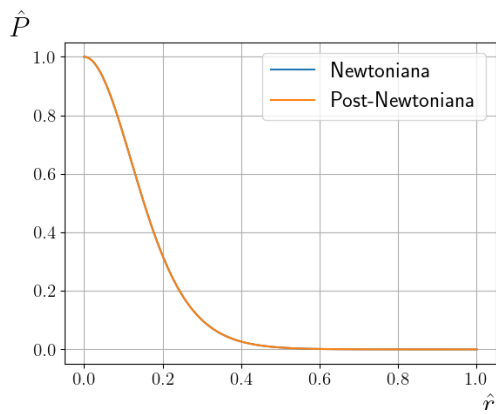
Polo



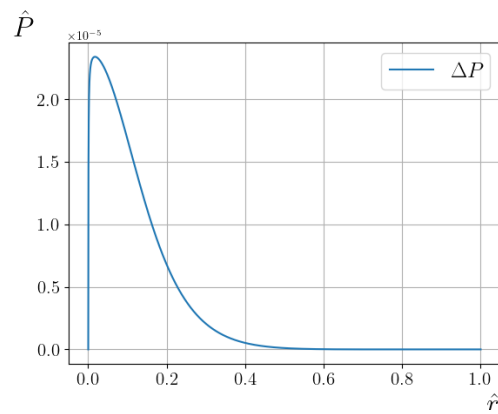
(a) Masa vs radio



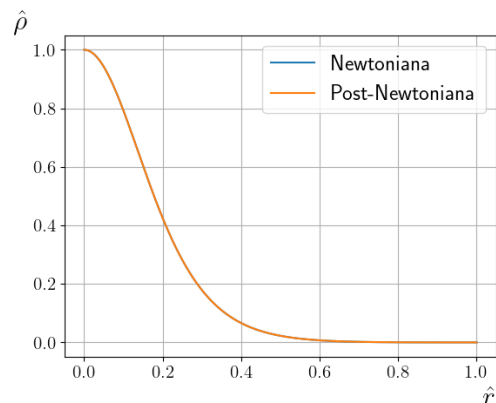
(b) Diferencia entre curvas de masa



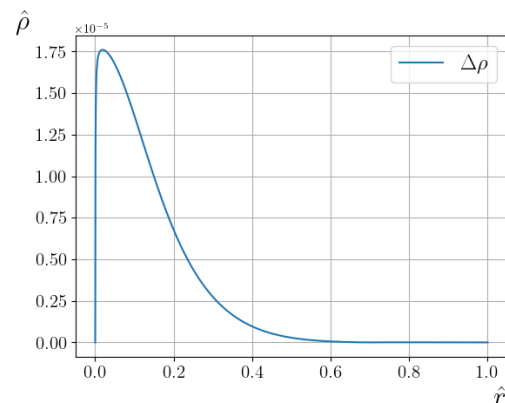
(a) Presión vs radio



(b) Diferencia entre curvas de presión

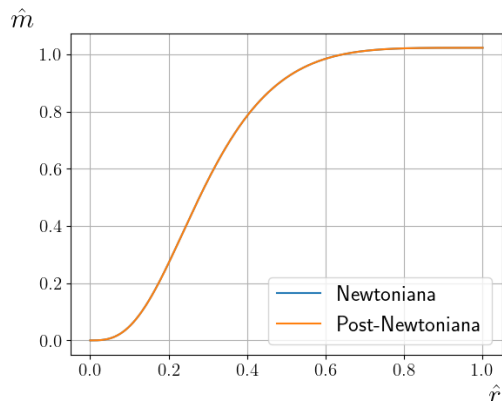


(a) Densidad vs radio

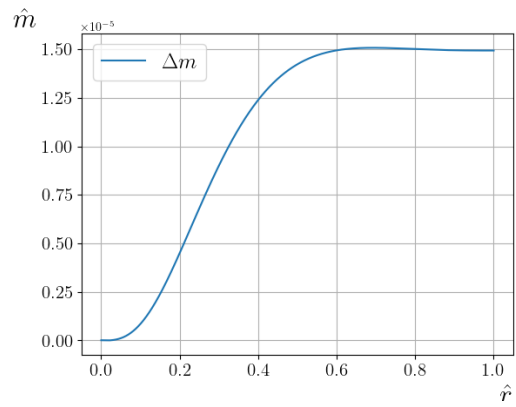


(b) Diferencia entre curvas de densidad

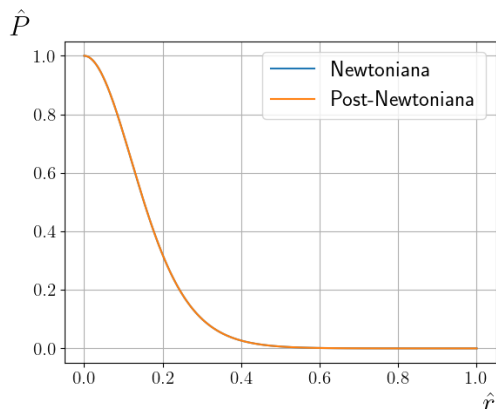
Ecuador



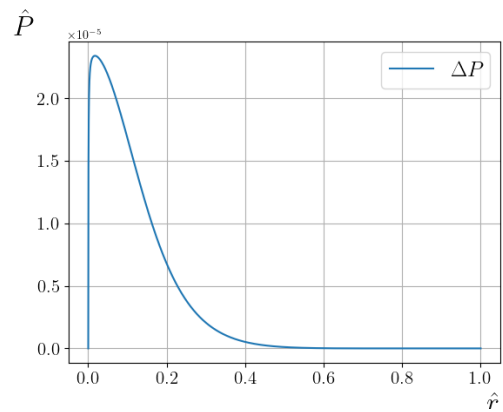
(a) Masa vs radio



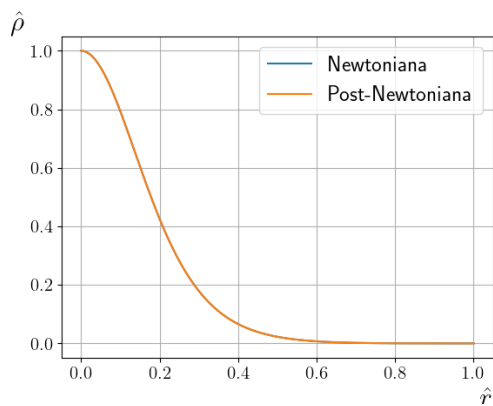
(b) Diferencia entre curvas de masa



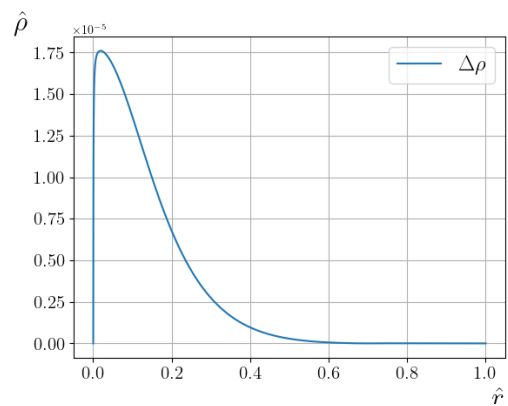
(a) Presión vs radio



(b) Diferencia entre curvas de presión



(a) Densidad vs radio



(b) Diferencia entre curvas de densidad

Capítulo C

Código

```
1 #--- Librerias ---
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from astropy import constants as const
5 plt.rcParams['text.usetex'] = True
6
7
8 #--- Condiciones y parametros ---
9 ## Condiciones iniciales
10 mo = 0 # m(r=dr) = 0
11 po = 1 # p(r=dr) = 1
12
13 ## Constantes Fisicas
14 ps = 1.3e16
15 ms = const.M_sun.value #2e30
16 rs = const.R_sun.value #7e8
17 G = const.G.value #6.674e-1
18 rhos = 8e4
19 ks = ps/pow(rhos,1.33)
20 c = const.c.value #3e8
21 w = 2.97e-6
22
23 ## Constantes de las ecuaciones de estructura - Newtoniano
24 A = (4*np.pi*rs**3*pow(ps,0.75))/(ms*pow(ks,0.75))
25 B = (G*ms)/(rs*pow(ps,0.25)*pow(ks,0.75))
26 C = (w*rs)**2/(pow(ps,0.25)*pow(ks,0.75))
27
```

```

28 ## Constantes de las ecuaciones de estructura - Postnewtoniano
29 D = pow(ps,0.25)*pow(ks,0.75)/c**2
30 E = (4*np.pi*ps*rs**3)/(ms*c**2)
31 F = (2*G*ms)/(rs*c**2)
32
33 ##Parametros de la grilla
34 n = 5000
35 dr = 1/n
36
37
38 #---Funciones---
39 ## Derivada de la Masa en el formalismo Newtoniano
40 def dm(r,p):
41     return A*r**2*pow(p,0.75)
42
43 ## Derivada la de Presion en el formalismo Newtoniano
44 def dpn(r,p,m,d,ptjw):
45     ### d: 0 (polo), 1 (ecuador) ###
46     ### ptjw es el porcentaje de la velocidad angular ###
47     f = -(B*m*pow(p,0.75))/r**2 + C*r*pow(p,0.75)*d*pow(ptjw,2)
48     return f
49
50 ## Derivada de la Presion en el formalismo Post-newtoniano
51 def dpp(r,p,m,d,ptjw):
52     ### d: 0 (polo), 1 (ecuador) ###
53     ### ptjw: Porcentaje de la velocidad angular w ###
54     f = (-B*m*pow(p,0.75)/(r**2)*
55           (1 + D*pow(p,0.25) + E*r**3*p/m + F*m/r) +
56           C*r*pow(p,0.75)*d*ptjw**2)
57     return f
58
59 ## Metodo Runge-Kutta 4
60 def rk4(r,p,m,d,ptjw,dp):
61     ### d: 0 - polo, 1 - ecuador ###
62     ### pw: porcentaje de la velocidad angular ###
63     ### dpr: funcion - derivada de la presion ###
64
65     k1m = dr*dm(r,p)
66     k1p = dr*dp(r,p,m,d,ptjw)
67
68     k2m = dr*dm(r+dr*0.5,p+0.5*k1p)
69     k2p = dr*dp(r+dr*0.5,p+0.5*k1p,m+0.5*k1m,d,ptjw)
70

```

```

71     k3m = dr*dm(r+dr*0.5,p+0.5*k2p)
72     k3p = dr*dp(r+0.5*dr,p+0.5*k2p,m+0.5*k2m,d,ptjw)
73
74     k4m = dr*dm(r+dr,p+k3p)
75     k4p = dr*dp(r+dr,p+k3p,m+k3m,d,ptjw)
76
77     mrk = m + (k1m + 2*k2m + 2*k3m + k4m)/6
78     prk = p + (k1p + 2*k2p + 2*k3p + k4p)/6
79
80     if type(mrk) == complex:
81         mrk = mrk.real
82     if type(prk) == complex:
83         prk = prk.real
84
85     return mrk,prk
86
87
88 #--- Integracion numerica ---
89 ## Formalismo Newtoniano
90 mn = []     ### Masa ###
91 pn = []     ### Presion ###
92 dn = []     ### Densidad ###
93 for j in range(0, 2):
94     masa = [mo]
95     presion = [po]
96     densidad = [pow(po,0.75)]
97     radio = [dr]
98     p = po
99     m = mo
100    for i in range(2,n+1):
101        ri = i*dr
102        m, p = rk4(ri,p,m,j,1,dpn)
103        masa.append(m), presion.append(p),
104        radio.append(ri), densidad.append(pow(p,0.75).real)
105    mn.append(masa), pn.append(presion), dn.append(densidad)
106
107    ## Integracion para diferentes velocidades angulares
108    mnw = []     ### Masa ###
109    pnw = []     ### Presion ###
110    for j in range(1, 5):
111        masa = [mo]
112        presion = [po]
113        radio = [dr]

```



```

114     p = po
115     m = mo
116     for i in range(2,n+1):
117         ri = i*dr
118         m, p = rk4(ri,p,m,1,j,dpn)
119         masa.append(m), presion.append(p), radio.append(ri)
120     mnw.append(masa), pnw.append(presion)
121
122 ## Formalismo Post-newtoniano
123 mopn=mn[0][1]   ### Condicion inicial - Post-newtoniano ###
124
125 mpn = []       ### Masa ###
126 ppn = []       ### Presion ###
127 dnpn = []     ### Densidad ###
128
129 for j in range(0,2):
130     m = mopn
131     p = po
132     r = [dr]
133     masa = [mopn]
134     presion = [po]
135     densidad = [pow(po,0.75)]
136     for i in range(2,n+1):
137         ri = i*dr
138         m,p = rk4(ri,p,m,j,1,dpp)
139         masa.append(m), presion.append(p),
140         r.append(ri), densidad.append(pow(p,0.75).real)
141     mpn.append(masa), ppn.append(presion), dnpn.append(densidad)
142
143 ## Integracion para diferentes velocidades angulares
144 mpnw = []      ### Masa ###
145 ppnw = []      ### Presion ###
146
147 for j in range(1, 5):
148     m = mopn
149     p = po
150     r = [dr]
151     masa = [mopn]
152     presion = [po]
153     for i in range(2,n+1):
154         ri = i*dr
155         m, p = rk4(ri,p,m,1,j,dpp)
156         masa.append(m), presion.append(p), r.append(ri)

```

```
mpnw.append(masa), ppnw.append(presion)
```

Referencias bibliográficas

- [1] Tilman Spohn, Doris Breuer, and Torrence V. Johnson. *Encyclopedia of the Solar System*. 2014.
- [2] Karin I. Öberg and Edwin A. Bergin. Astrochemistry and compositions of planetary systems. *Physics Reports*, 893:1–48, 2021.
- [3] Manuel Güdel. The sun through time. *Space Science Reviews*, 216(8):143, Dec 2020.
- [4] Jean Francois Donati. Stellar differential rotation, 11 2003.
- [5] D. Sierra-Porta, D.D. Herrera Acevedo, and Y.P. Hernández Días. View of SUNSPOTCALC: Una aplicación Web para calcular la rotación diferencial del Sol, 2023.
- [6] G R " Udiger. Differential rotation on the lower main sequence. *Astron. Nachr./AN*, 325, 2004.
- [7] H. Hotta and K. Kusano. Solar differential rotation reproduced with high-resolution simulation. *Nature Astronomy*, 5(11):1100–1102, Nov 2021.
- [8] G Meynet and A Maeder. Stellar evolution with rotation V. Changes in all the outputs of massive star models. *Astron. Astrophys*, 361:101–120, 2000.
- [9] Richard B Larson. The physics of star formation. *Reports on Progress in Physics*, 66(10):1651, sep 2003.

- [10] Eric E. Mamajek, Michael R. Meyer, and James Liebert. Post-t tau-ri stars in the nearest ob association. *The Astronomical Journal*, 124(3):1670, sep 2002.
- [11] John G. Beck. A comparison of differential rotation measurements (Invited Review). *Solar Physics*, 191(1):47–70, 2000.
- [12] S Ekström, C Georgy, P Eggenberger, G Meynet, N Mowlavi, A Wyttenbach, A Granada, T Decressin, R Hirschi, U Frischknecht, C Charbonnel, and A Maeder. Astrophysics Grids of stellar models with rotation I. Models from 0.8 to 120 M at solar metallicity ($Z = 0.014$). *AA*, 537:146, 2012.
- [13] Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics, Second Edition*. Cambridge University Press, jan 2019.
- [14] Subrahmanyan Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. 1939.
- [15] W. H. Mccrea. An introduction to the study of stellar structure. *Nature*, 144:130–131, 1939.
- [16] Mauricion A. Vargas D. *Un Modelo para la Rotación Estelar antes de la Secuencia Principal Un Modelo para la Rotación Estelar antes de la Secuencia Principal*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2021.
- [17] A. S. Endal and S. Sofia. The evolution of rotating stars. II. Calculations with time-dependent redistribution of angular momentum for 7 and 10 M sun stars. , 220:279–290, February 1978.
- [18] K. B. MacGregor. Future Prospects for the Theory of Solar-Stellar Winds. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 14, page 946, September 1982.
- [19] Qiming Zhan, Alan H. Manson, and Chris E. Meek. The impact of gaps and spectral methods on the spectral slope of the middle atmospheric wind. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 58(12):1329–1336, aug 1996.

- [20] J Diaz Polanco and F Arretche. Un modelo didáctico para la estructura del centro estelar. *Am. J. Phys. Educ*, 5:485, 2011.
- [21] Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert, and Achim Weiss. *Stellar Structure and Evolution*. 2012.
- [22] Andrés Aceña. Una estrella bien simple. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42:1–8, 2020.
- [23] Toshifumi Futamase and Yousuke Itoh. The Post-Newtonian Approximation for Relativistic Compact Binaries Living Reviews in Relativity. *Living Rev. Relativity*, 10(2), 2007.
- [24] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *GRAVITATION*. Princeton University Press, jan 2017.
- [25] Yunus A. Çengel and John M. Cimbala. Fluids Mechanics - Fundamentals and Applications. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9):1024/1051, 2017.
- [26] Ninla Elmawati Falabiba, Wisnu Anggaran, Affiifi. Mayssara A. Abo Hassanin Supervised, B.B Wiyono, Ninla Elmawati Falabiba, Yong Jun Zhang, Yong Li, and Xu Chen. *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, volume 5. 2014.
- [27] J.M. Ibáñez, J.A Font, J.A Miralles, P. Cerdá-Durán, and J.M Marti. Ecuaciones de la Dinámica de Fluidos Perfectos, jun 2004.
- [28] Tao Pang. *An introduction to computational physics, second edition*. 2006.