



# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA DEL SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO EN EL DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO**

### **MODELO PARA MINIMIZAR EL TIEMPO DE VIAJE PROMEDIO DE LOS PASAJEROS**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO  
MATEMÁTICO**

**JORGE ANDRÉS ZÚÑIGA DELGADO**

[jorge.zuniga@epn.edu.ec](mailto:jorge.zuniga@epn.edu.ec)

**DIRECTOR: DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL**

[luis.torres@epn.edu.ec](mailto:luis.torres@epn.edu.ec)

**DMQ, AGOSTO, 2024**

## **CERTIFICACIONES**

Yo, JORGE ANDRÉS ZÚÑIGA DELGADO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

---

JORGE ANDRÉS ZÚÑIGA DELGADO

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por JORGE ANDRÉS ZÚÑIGA DELGADO, bajo mi supervisión.

---

DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL  
**DIRECTOR**

## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

JORGE ANDRÉS ZÚÑIGA DELGADO

DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL

## **RESUMEN**

En la ciudad de Quito, la planificación y optimización del sistema de transporte público, especialmente en corredores estratégicos como la Eco-vía y el Trolebús, son fundamentales para la movilidad diaria de sus ciudadanos. La ciudad enfrenta desafíos significativos como congestión vehicular y contaminación, aumentando la demanda de un transporte público eficiente y sostenible. Este estudio se centra en la aplicación de modelos de programación lineal entera para la planificación de líneas que minimicen los tiempos totales de viaje de los pasajeros. Además, se presentan experimentos computacionales utilizando el software OpenLinTim para simular y evaluar diferentes escenarios en los corredores estratégicos, sobre instancias construidas a partir de información provista por la Secretaría de Movilidad del Municipio de Quito.

**Palabras clave:** Optimización del transporte público, planificación de líneas, programación lineal entera, minimización de tiempos de viaje.

## **ABSTRACT**

In the city of Quito, the planning and optimization of the public transportation system, especially in strategic corridors like the Ecovía and Trolebús, are essential for the daily mobility of its citizens. The city faces significant challenges such as traffic congestion and pollution, which increase the demand for efficient and sustainable public transportation. This study focuses on the application of integer linear programming models for line planning, with the aim to minimize the total travel times of passengers. Additionally, computational experiments are presented using the software OpenLinTim to simulate and evaluate different scenarios in the strategic corridors, on instances created from data provided by the Secretary of Mobility of Quito.

**Keywords:** Optimization of public transportation, line planning, integer linear programming, travel time minimization.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mis padres, Jorge e Isabel, por haberme guiado hasta esta etapa de mi vida y por permitirme ser la persona que soy hoy, gracias a su esfuerzo y enseñanzas.

Agradezco a mi hermana Johanna y a mi prima Gaby por ser las dos personas más importantes en mi crecimiento profesional y personal, y por la ayuda invaluable que siempre me han brindado.

Agradezco a mis tíos María, Rodrigo, y a mi primo Rodrigo J., por haber sido un apoyo crucial en mi carrera y en mi vida personal. Han sabido apoyarme y guiarme a lo largo de este trayecto.

Agradezco al Dr. Luis Miguel Torres, no solo por haber sido mi tutor en este trabajo, sino también por las enseñanzas que he recibido como persona. Su responsabilidad y exigencia me servirán como una guía a seguir en mi futuro.

Agradezco a Ammy Párraga por su apoyo incondicional. Es un privilegio haber coincidido en la vida con una persona tan maravillosa como ella.

A mis compañeros y colegas Luis, Diana, Jeremy, Erick, Rene, Cristina y Augustin, por haber hecho de esta etapa algo muy especial y emocionante, y con la esperanza de que en algún otro momento de la vida volveremos a ser un grupo tan unido como lo fuimos en esta carrera.

A mis compañeros y amigos Andrés, Paúl, Viviana, Sandy, Shaky y Nicolás, por permitirme ser parte de sus vidas y de esta etapa universitaria, también por haber hecho los primeros años de la carrera los más memorables de todos.

---

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>4</b>
<b>3. Formulación del modelo</b>	<b>13</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	14
3.2. Construcción del modelo . . . . .	15
<b>4. Experimentos computacionales</b>	<b>23</b>
4.1. Software OpenLinTim . . . . .	24
4.2. Preparación de instancias . . . . .	26
4.2.1. Preparación de paradas . . . . .	28
4.2.2. Preparación de aristas . . . . .	29
4.2.3. Preparación del conjunto de líneas . . . . .	37
4.2.4. Preparación de la matriz Origen-Destino . . . . .	39
4.2.5. Configuración de parámetros generales en OpenLinTim	41
4.3. Experimentos Computacionales . . . . .	42
4.3.1. Experimento 1 . . . . .	42
4.3.2. Experimento 2 . . . . .	43
4.3.3. Experimento 3 . . . . .	43
4.3.4. Experimento 4 . . . . .	43

4.4. Resultados computacionales . . . . .	44
4.4.1. Instancia TROLEBUS . . . . .	44
4.4.2. Instancia ECOVIA . . . . .	48
4.4.3. Instancia TROLEBUS-M . . . . .	52
4.4.4. Instancia ECOVIA-M . . . . .	55
4.4.5. Instancia INTEGRADO . . . . .	59
<b>5. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>63</b>
<b>A. Anexos</b>	<b>66</b>
A.1. Costos para las líneas de las cinco instancias . . . . .	66
A.2. Selección de líneas del cuarto experimento para las cinco instancias . . . . .	69
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>



---

## Índice de figuras

---

2.1. Secuencia clásica para la planificación de transporte público. . . . .	5
3.1. Ejemplo de red de transporte público no dirigida. . . . .	17
3.2. Red Change & Go. . . . .	19
4.1. Creación de redes dirigidas a partir de sus estaciones. . . . .	28
4.2. Fusión de paradas. . . . .	29
4.3. Unión de sentido de ida y vuelta para los sistemas de transporte de Trolebús y Ecovía. . . . .	30
4.4. Integración del Trolebús y la Ecovía. . . . .	31
4.5. PTN del Trolebús dirigido. . . . .	32
4.6. PTN de la Ecovía dirigido. . . . .	33
4.7. PTN del Trolebús no dirigido. . . . .	34
4.8. PTN de la Ecovía no dirigido. . . . .	35
4.9. PTN del sistema Integrado. . . . .	36
4.10 Líneas para el caso dirigido y no dirigido en el sistema de transporte del Trolebús y Ecovía. . . . .	39

---

## Índice de cuadros

---

4.1. Tabla de rutas y terminales Trolebús. . . . .	37
4.2. Tabla de rutas y terminales Ecovía. . . . .	37
4.3. Tabla de rutas y terminales para las instancias modificadas de Trolebús y Ecovía. . . . .	38
4.4. Matriz Origen-Destino para dos paradas del Trolebús. . . . .	40
4.5. Matriz Origen-Destino para las paradas del Trolebús en la red dirigida. . . . .	40
4.6. Resultados modelo LPMT para TROLEBUS. . . . .	44
4.7. Resultados caminos más cortos para TROLEBUS. . . . .	45
4.8. Resultados pesos OD para TROLEBUS. . . . .	46
4.9. Resultados Line Pool OpenLinTim para TROLEBUS. . . . .	47
4.10. Resultados modelos LPMT para ECOVIA. . . . .	48
4.11. Resultados caminos más cortos para ECOVIA. . . . .	49
4.12. Resultados pesos OD para ECOVIA. . . . .	50
4.13. Resultados Line Pool OpenLinTim para ECOVIA. . . . .	51
4.14. Resultados modelo LPMT para TROLEBUS-M. . . . .	52
4.15. Resultados caminos más cortos TROLEBUS-M. . . . .	53
4.16. Resultados pesos OD TROLEBUS-M. . . . .	54
4.17. Resultados Line Pool OpenLinTim TROLEBUS-M. . . . .	55
4.18. Resultados modelos LPMT ECOVIA-M. . . . .	56

4.19	Resultados caminos más cortos ECOVIA-M. . . . .	57
4.20	Selección de líneas para caminos más cortos ECOVIA-M. . .	57
4.21	Resultados pesos OD red de ECOVIA-M. . . . .	58
4.22	Selección de líneas OpenLinTim para ECOVIA-M. . . . .	58
4.23	Resultados Line Pool OpenLinTim ECOVIA-M. . . . .	59
4.24	Resultados modelos LPMT INTEGRADO. . . . .	60
4.25	Resultados caminos más cortos INTEGRADO. . . . .	60
4.26	Resultados modelos LPMT3 con diferentes valores de pesos OD INTEGRADO. . . . .	61
4.27	Resultados Line Pool OpenLinTim INTEGRADO. . . . .	62
A.1.	Líneas de transporte TROLEBUS y sus costos. . . . .	66
A.2.	Líneas de transporte ECOVIA y sus costos. . . . .	67
A.3.	Líneas de transporte TROLEBUS-M. . . . .	67
A.4.	Líneas de transporte ECOVIA-M. . . . .	68
A.5.	Líneas de transporte INTEGRADO. . . . .	68
A.6.	Selección de líneas TROLEBUS. . . . .	69
A.7.	Selección de líneas ECOVIA. . . . .	69
A.8.	Selección de líneas TROLEBUS-M. . . . .	69
A.9.	Selección de líneas ECOVIA-M. . . . .	70
A.10	Selección de líneas INTEGRADOS. . . . .	70

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

La optimización del transporte público representa un gran desafío en las ciudades en expansión, ya que busca mejorar la eficiencia y sostenibilidad de los sistemas de movilidad urbana. Este proceso implica maximizar el rendimiento de los recursos disponibles, minimizar los costos operativos y reducir los tiempos de viaje, garantizando un servicio de calidad y accesible para todos. Dentro la planificación estratégica, la planificación de líneas es una fase de interés, centrada en determinar las rutas óptimas y las frecuencias de operación para satisfacer de manera eficiente la demanda de los usuarios, permitiéndoles movilizarse y llegar a sus destinos de la forma más eficiente posible.

La planificación de líneas implica la creación de un sistema de rutas que cubra adecuadamente las áreas de demanda, minimice el tiempo de espera y maximice el uso de los recursos disponibles. Este proceso es complejo y requiere un modelado matemático preciso para encontrar la mejor solución que satisfaga tanto las necesidades del usuario como las limitaciones operativas y financieras del sistema. La programación lineal entera es una herramienta muy versátil que ha sido empleada con éxito para abordar este problema, permitiendo la formulación de modelos cuya solución computacional permite explorar la mejor configuración de rutas.

En el contexto de Quito, la planificación y optimización del sistema de transporte público es de vital importancia, especialmente en corredores estratégicos como el Trolebús y la Ecovía. Estos sistemas forman parte

integral del transporte metropolitano de la ciudad y son esenciales para la movilidad diaria de miles de ciudadanos. Quito enfrenta desafíos significativos en términos de congestión vehicular, contaminación y una demanda creciente de transporte público, lo que hace que la optimización de estos sistemas sea clave para mejorar la eficiencia operativa y la calidad del servicio.

El Sistema Metropolitano de Transporte de Pasajeros de Quito, que incluye, entre otros subsistemas, a los corredores de la Ecovía y el Trolebús, debe hacer frente a problemas de congestión y tiempos de viaje elevados, que afectan la eficiencia del servicio y la satisfacción de los usuarios. La integración y optimización de estos sistemas mediante técnicas de programación lineal entera puede permitir encontrar soluciones efectivas para reducir los tiempos de viaje, mejorar la conectividad y aumentar la eficiencia del servicio.

Este estudio se centra en la aplicación de estas técnicas para la planificación de líneas en los sistemas de transporte de la Ecovía, el Trolebús y una integración de ambas en la ciudad de Quito, con el objetivo de minimizar los tiempos de viaje promedio de los pasajeros. La importancia de este estudio radica en su potencial como un primer acercamiento para ofrecer soluciones concretas y efectivas que puedan ser implementadas por las autoridades locales, contribuyendo así a un sistema de transporte más eficiente, sostenible y accesible para los habitantes de Quito. Una planificación y optimización adecuadas pueden resultar en una mejor utilización de los recursos, una mayor satisfacción de los usuarios y una reducción de los costos operativos. Además, este estudio contribuye a una movilidad más sostenible al fomentar el uso del transporte público sobre el privado, lo cual es fundamental en una ciudad con altos niveles de congestión y contaminación.

El presente trabajo de integración curricular, se estructura de la siguiente manera: En el segundo capítulo se exploran los antecedentes históricos, investigaciones previas y fundamentos teóricos relacionados con el problema de la planificación de líneas en el transporte público. Se hará referencia al modelo propuesto en [17], cuyo objetivo principal es la minimización de los tiempos de viaje para los pasajeros, considerando al mismo tiempo restricciones presupuestarias. Además, se analizarán

diferentes formulaciones equivalentes que pueden ser aplicadas en este contexto, destacando la diversidad de enfoques y metodologías disponibles para abordar el problema.

En el tercer capítulo se desarrolla el modelo propuesto para abordar el problema de la planificación de líneas. En este capítulo se presentan definiciones fundamentales, revisión de ejemplos ilustrativos y conceptos previos que facilitan la comprensión del enfoque adoptado por [17] para la formulación del modelo.

En el cuarto capítulo, se detalla el procedimiento de preparación de las instancias utilizadas en los experimentos computacionales realizados con el software OpenLinTim. Se describe el procedimiento específico que fue seguido para la construcción de cada una de las cinco instancias, a partir de los datos provistos por la Secretaría de Movilidad. Las instancias abarcan configuraciones individuales tanto del Trolebús como de la Ecovía, variantes modificadas de ambas líneas y el sistema integrado de ambas. Además, se presentan los resultados computacionales de cuatro experimentos realizados con el modelo y se analizan los mismos.

Finalmente, en el quinto capítulo, se discuten algunas conclusiones y recomendaciones derivadas de la experimentación sobre la viabilidad de las soluciones alcanzadas y la comparación de los resultados obtenidos para todas las instancias.

# Capítulo 2

---

## Marco teórico

---

El desarrollo urbano y la expansión de las ciudades han incrementado la necesidad de sistemas de transporte público eficientes y bien estructurados. A medida que las urbes crecen y se densifican, la movilidad se convierte en una necesidad para mantener la funcionalidad y la calidad de vida de las personas en estos espacios. Un sistema de transporte optimizado es crucial para conectar diversas áreas, facilitar el acceso a empleos, educación, servicios, y promover una urbanización más sostenible al reducir la dependencia de vehículos privados, y minimizar el impacto ambiental.

En este contexto, la incorporación de técnicas de optimización matemática en la planificación del transporte público resulta esencial para mejorar la gestión de los recursos financieros y humanos. El uso de modelos y algoritmos avanzados sirve de apoyo para la formulación de estrategias efectivas basados en la exploración de datos concretos. Mediante la aplicación de estos métodos matemáticos, es posible, por ejemplo, anticipar y reducir la congestión, fortalecer la conexión entre diferentes áreas y proporcionar una respuesta rápida a las necesidades de movilidad de los ciudadanos, todo ello mientras se respetan los límites del presupuesto. La investigación matemática, por lo tanto, no solo mejora la operatividad y la sostenibilidad del sistema, sino que también mejora la experiencia de los usuarios, contribuyendo a un sistema de transporte público más accesi-

ble, fiable y ajustado a los requerimientos de una urbe que se transforma constantemente.

Debido a su complejidad, el proceso de planificación de un sistema de transporte público generalmente se descompone en varias etapas que se abordan de manera secuencial. En la Figura 2.1. se muestran las más comunes, las mismas que se explican a continuación.

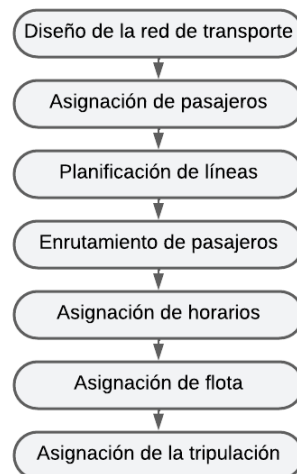


Figura 2.1: Secuencia clásica para la planificación de transporte público.

La planificación del transporte público es un proceso integral que comienza con el diseño de la red, donde se define la estructura y las conexiones del sistema, seguido de la asignación de pasajeros, que implica distribuir la demanda de usuarios en la red. La planificación de líneas determina las rutas y frecuencias óptimas para satisfacer la demanda; el enrutamiento de pasajeros asigna caminos para desplazar a los usuarios dentro de la red, tomando en consideración las líneas en operación. La calendarización de viajes establece horarios específicos para los viajes programados en el sistema, de manera que exista una adecuada sincronización entre las principales líneas. Posteriormente, la asignación de flota implica destinar vehículos adecuados para servir todos los viajes programados, finalmente, la asignación de tripulación se encarga de distribuir al personal necesario para operar esos vehículos, asegurando que se cumplan las regulaciones laborales y se mantenga un servicio de calidad.



Dentro del esquema general para la planificación del transporte público, abordamos las fases de forma secuencial para evitar la complejidad que supondría su gestión simultánea, en el presente trabajo de integración curricular nos vamos a centrar en la fase de planificación de líneas.

Para abordar este desafío, se han desarrollado varios modelos matemáticos que, a partir de una red de transporte público existente y de información de demanda de transporte, buscan establecer líneas y sus frecuencias respectivas para cubrir la demanda de los usuarios. Como lo indica Schöbel [16], en esencia, se busca una planificación de líneas que sea factible en el sentido de que pueda operarse de manera eficaz, garantizando al mismo tiempo que el transporte público sea conveniente para los pasajeros y que los costos asociados sean mínimos.

En el problema de planificación de líneas, tal como lo señalan Born-dörfer et al [2], Scholl [18] y Schöbel y Scholl [17], existen dos objetivos principales: minimizar los costos de operación y maximizar el nivel de servicio para los pasajeros. Estos objetivos reflejan la doble finalidad de optimizar la eficiencia económica del sistema y la experiencia del usuario. Garantizar la calidad del viaje no solo mejora la satisfacción y la conveniencia para los usuarios, sino que también puede incrementar la utilización del sistema de transporte público, incentivando a más personas a optar por esta alternativa en lugar de los vehículos privados. Por otro lado, reducir los costos de operación es esencial para la sostenibilidad financiera del sistema, permitiendo que los recursos se utilicen de manera más efectiva y posibilitando inversiones en mejoras y expansiones futuras. Ambos objetivos se encaminan hacia desarrollar un sistema de transporte público que sea tanto atractivo para los usuarios como económicamente viable.

Tal como lo señala Schöbel [16], en los modelos orientados a costos, la función objetivo mide los costos asociados a la operación de cada línea, los cuales son proporcionales a su frecuencia. Además, se incorporan restricciones de capacidad y frecuencia mínima para asegurar un nivel mínimo de servicio. El objetivo primordial es encontrar un concepto de

línea que cumpla con estas restricciones y, al mismo tiempo, minimice los costos totales de operación.

Como un ejemplo notable de los modelos orientados a costos, Claessens et.al [5] estudian la planificación de líneas en el entorno de sistemas ferroviarios. En este enfoque, no solo se analizan las líneas y sus frecuencias, sino también el tipo de vehículo a operar. Los autores introducen un modelo donde se incluyen los costos fijos de mantenimiento, los costos variables por vagón por kilómetro (como los costos de energía, limpieza o los salarios del personal a bordo), y los costos variables por tren por kilómetro. Esta metodología proporciona una visión más detallada de los costos operativos, permitiendo una optimización más afinada de la planificación de líneas en términos de eficiencia económica y servicio.

En lo que respecta a la maximización del nivel del servicio para los pasajeros, los modelos propuestos pueden agruparse en tres categorías-. En una primera categoría están los modelos de maximización de viajeros directos, que buscan aumentar la cantidad de pasajeros que pueden viajar desde su origen a su destino sin necesidad de transbordos, elevando así la conveniencia del servicio. Otro grupo relevante lo constituyen los modelos de minimización de transferencias, que tienen como objetivo reducir la cantidad de transbordos necesarios, mejorando la comodidad y disminuyendo el tiempo de viaje. Finalmente, en este trabajo nos vamos a enfocar en un modelo de minimización del tiempo de viaje, que persigue minimizar la duración promedio de los trayectos de los pasajeros, creando rutas más directas y eficientes para facilitar la llegada de las personas a sus destinos. Al enfocarse en estos modelos, se potencia la eficiencia operativa del transporte público, haciéndolo más atractivo para los usuarios.

En el modelo de viajeros directos estudiado por Scholl [18], el objetivo es maximizar el número de usuarios que no necesitan cambiar de línea para llegar a su lugar de destino. Para ello es importante establecer un límite superior al número de vehículos, ya sea por razones de seguridad, garantizando que no se exceda un número máximo de vehículos, o por limitaciones presupuestarias de la compañía de transporte. Esto implica

que el costo total de operar los vehículos en las líneas no debe superar el presupuesto disponible.

Simonis [19], propone usar esta cota presupuestaria con un esquema inicial sin líneas, al cual se le agregan progresivamente rutas siguiendo los caminos más directos. Este enfoque busca aumentar el número de pasajeros que pueden viajar directamente a sus destinos, sin necesidad de hacer transbordos. La adición de líneas se mantiene hasta que se logra proporcionar un itinerario adecuado para cada pasajero, o hasta que los costos de implementación alcanzan el máximo presupuesto disponible.

Bussieck [3] se enfoca en maximizar la cantidad de viajeros que pueden desplazarse directamente entre puntos específicos sin necesidad de transbordos. Este modelo integra la planificación de líneas convencional con técnicas de optimización basadas en el problema de flujo multiproducto, específicamente para evaluar y potenciar el número de viajeros directos.

Dienst [7], describe un algoritmo de branch & bound diseñado para maximizar el número de pasajeros directos, suponiendo que existe una capacidad infinita de trenes. El algoritmo consiste en crear una partición de líneas agregándolas de forma sucesiva y escoger el nodo del árbol del algoritmo de branch & bound con el máximo número de viajeros directos, con ello encuentra la forma de establecer rutas directas para todos los viajeros de cada par Origen-Destino.

En el modelo de Bussieck et.al [4], a diferencia del modelo de Dienst, la suposición de capacidad infinita no es necesaria, ya que los autores introducen una restricción de capacidad, asegurando así que todos los viajeros directos puedan ser transportados; los modelos resultantes se formulan como programas enteros y se resuelven mediante técnicas de programación entera. Estos modelos incluyen variables de decisión que representan el número de viajeros directos entre las estaciones que son utilizadas dentro de alguna línea. Al agregar estas variables sobre todas las líneas y aplicar técnicas de relajación, se obtiene un modelo que pue-

de resolverse mediante un enfoque de planos cortantes. La formulación matemática del modelo prioriza la asignación efectiva de pasajeros a estas rutas directas, considerando tanto la capacidad de las líneas como la demanda de viajes entre los nodos de la red, buscando optimizar la eficiencia y la experiencia del usuario en el transporte público.

Un segundo grupo de modelos de planificación de líneas. comprende aquellos modelos para el diseño de rutas y frecuencias orientados a minimizar el número de veces que los pasajeros necesitan cambiar de una línea a otra durante sus trayectos. Este enfoque busca optimizar las conexiones entre diferentes líneas para mejorar la eficiencia del sistema y la experiencia de los pasajeros al disminuir los tiempos de espera, tiempos de transbordos y los posibles retrasos asociados con las transferencias.

La diferencia entre minimizar el número promedio de transferencias y maximizar el número de viajeros directos según Schobel y Scholl [17], radica en los objetivos de cada modelo. Mientras que el concepto de viajeros directos se centra en maximizar la comodidad de los pasajeros al proporcionar rutas directas y sin transferencias, el enfoque de minimización de transferencias considera la optimización de las conexiones para reducir la necesidad de cambios durante los trayectos y mejorar la eficiencia del sistema en general. Dicho de otro modo, la minimización de transferencias se centra en la eficiencia operativa y la resistencia a los retrasos, mientras que los viajeros directos priorizan la conveniencia y la simplicidad de los viajes para los pasajeros

Harbering [11] propone un modelo de planificación de líneas de transporte público con el objetivo de minimizar las transferencias de pasajeros. Esta formulación implica diseñar un modelo matemático que considere las diferentes rutas, conexiones y frecuencias para optimizar el sistema y reducir la necesidad de que los pasajeros cambien de línea durante sus viajes. En los modelos de viajeros directos podemos utilizar el mismo argumento de minimizar las transferencias de los pasajeros. Sin embargo, esto podría resultar en trayectos largos con altos tiempos de viaje y pocas transferencias. Para mejorar esta situación, el autor adopta y expande la

idea de Bussieck et.al [4], integrando el concepto de caminos preferibles desarrollado por Dienst [7]. A diferencia del modelo de pasajeros directos, en el que se pretendía que cada pasajero fuera encaminado por el camino más corto, el enfoque actual permite que los pasajeros elijan entre un conjunto de caminos preferibles. Estos caminos no se limitan a ser los más cortos en términos de distancia o tiempo de viaje estimado, sino que se ajustan a las preferencias individuales de los pasajeros, ofreciendo una solución más personalizada y eficiente para la planificación de rutas.

Un último grupo de modelos orientados a los pasajeros, y sobre los cuales profundizaremos en este estudio, comprende modelos que persiguen la minimización del tiempo total de viaje, es decir, se propone diseñar las líneas de manera que se reduzca al máximo el tiempo agregado de los desplazamientos de todos los pasajeros, incluidos los tiempos de penalización por transferencias entre líneas, todo ello tomando en consideración restricciones presupuestarias. Observar que minimizar el tiempo total de viaje es equivalente a minimizar el tiempo de viaje promedio de un pasajero en el sistema.

Un primer acercamiento a este problema es presentado por Goossens [9], quien realiza un trabajo orientado a minimizar el tiempo total de viaje de los pasajeros en una red ferroviaria. A diferencia de los modelos clásicos, se asume que el plan de líneas ya está definido. El problema es ajustar las paradas de las líneas a lo largo de sus rutas para disminuir el tiempo total de viaje de los pasajeros a través de la red. El mismo se formula como un problema de optimización que consiste en determinar una asignación de estaciones que reduzca el tiempo total de viaje de los pasajeros en la red. Se presupone que todos los pasajeros seleccionan sus rutas de manera que reduzcan su tiempo de viaje individual. Para garantizar que los pasajeros puedan ejercer esta libertad de elección, se asume que las capacidades de las líneas de tren son adecuadas. Esto conduce a una asignación de tráfico óptima para el sistema, mejorando la eficiencia general del transporte. El problema es finalmente formulado como un problema de flujo de red multiproducto, y se utiliza la relajación de Lagrange para obtener cotas inferiores del problema, aplicadas posteriormente en una estructura de branch & bound.

En lugar de analizar la red ferroviaria, Quak [14] examina la planificación de líneas en el contexto de autobuses. El autor propone un algoritmo bifásico donde, inicialmente, se construyen las líneas y posteriormente, se determinan las frecuencias y los horarios de salida. Este enfoque se distingue porque las líneas no se extraen de un conjunto predefinido, sino que se desarrollan desde cero, lo que constituye el núcleo de su investigación. Los objetivos principales de su modelo son minimizar el tiempo total de operación de los vehículos para reducir costos operativos y disminuir el tiempo promedio de desvío en las solicitudes de los pasajeros para mejorar su satisfacción, dado que los tiempos de viaje reducidos son una preferencia clara entre los usuarios. Al establecer un horario en la fase posterior, Quak intenta acortar los tiempos de espera para el cambio de autobús, vinculando así directamente con el segundo objetivo. No obstante, tiempos de espera muy breves pueden incrementar el riesgo de perder conexiones por demoras menores, siendo relevante reconocer que para los pasajeros es más incómodo realizar un transbordo que enfrentarse a un tiempo de viaje un poco más extenso.

Borndörfer et.al [1], proponen un modelo de flujo multiproducto para la planificación de líneas de transporte público. El objetivo de este modelo es minimizar una combinación del tiempo total de viaje de los pasajeros y los costos operativos; las rutas de las líneas se generan de manera dinámica, las frecuencias se gestionan utilizando variables continuas de frecuencia, y se permite a los pasajeros ajustar sus rutas en función del sistema de líneas calculado, sin asumir una división del sistema. Estas características son particularmente relevantes para escenarios de planificación de líneas en el transporte público, donde hay menos justificación para una división del sistema y más flexibilidad en el diseño de líneas que en la planificación de líneas ferroviarias. Se busca demostrar que tal modelo es manejable y puede utilizarse para optimizar el plan de líneas de una ciudad de tamaño medio.

Schöbel y Scholl [17] recientemente propusieron el modelo "*Line Planning with Minimal Travel Times*" (LPMT) que incorpora restricciones espe-

cíficas para asegurar que una línea sea incluida en el concepto de líneas si es utilizada por algún par Origen-Destino. Por otro lado, se asume que todos los pasajeros, utilizan las rutas más cortas para sus desplazamientos. El modelo se formula sobre una extensión de la red pública de transporte definida por las autoras, denominada red Change & Go, sobre la cual es posible calcular tanto los tiempos de viaje en las unidades como los tiempos requeridos para las transferencias.

Este modelo es estudiado con mayor detalle por Scholl [18], quien presenta cuatro formulaciones distintas para el (LPMT). Estas formulaciones son equivalentes desde el punto de vista de las soluciones enteras, aunque están asociadas a distintas relajaciones lineales. Además, se presenta una extensión al modelo (LPMT), denominada (LPMTF) que es presentada como una formulación más completa y realista del problema de planificación de líneas de transporte público en la que se incorporan restricciones de capacidad de vehículos y restricciones de flujo para asegurar que el sistema de transporte cumpla con las capacidades y frecuencias establecidas.

Cabe destacar que para los modelos (LPMT) y (LPMTF), tienen una estructura de bloque diagonal, con todos los bloques totalmente unimodulares. Como lo observan las autoras, esta estructura puede ser explotada para resolver las relajaciones lineales de instancias reales de gran escala mediante el empleo de técnicas de descomposición como el método de Danzig-Wolfe [6].

# Capítulo 3

---

## Formulación del modelo

---

En este capítulo se presenta un modelo de programación lineal entera para el problema de la planificación de líneas en sistemas de transporte público con el objetivo de minimizar los tiempos de viaje de los pasajeros. El modelo matemático desarrollado considera la selección óptima de líneas de transporte y la asignación eficiente de rutas para cada par Origen-Destino dentro de una red extendida denominada red "Change & Go". Este modelo, propuesto por Schobel y Scholl en su artículo "Line Planning with Minimal Traveling Time" [17], destaca por su enfoque integral que busca mejorar la experiencia de viaje de los usuarios al tiempo que garantiza la viabilidad económica y la eficacia del sistema de transporte público.

El artículo presenta la formulación del modelo LPMT, cuyo objetivo es minimizar el tiempo total de viaje de los pasajeros. Este modelo incluye variables binarias para la selección de líneas y arcos, restricciones de desplazamiento y conservación de flujo para los pasajeros, además de una restricción presupuestaria para garantizar la operatividad. Por otro lado, se presentan formulaciones alternativas y equivalentes denominadas LPMT2, LPMT3 y LPMT4 para la selección de líneas, todas con el objetivo común de minimizar los tiempos totales de viaje de los pasajeros.

En el modelo LPMT, se asume implícitamente que todos los clientes que viajan de la estación  $s$  a la estación  $t$  eligen el mismo camino en la red "Change & Go", es decir, el mismo conjunto de líneas. Adicionalmen-



te, se asume que la capacidad de las líneas no es una limitante, es decir, que todos los pasajeros pueden ser transportados por las rutas elegidas sin causar esperas ni afectar sus tiempos de viaje. Sin embargo, en la práctica, esto no siempre es así, ya que cada vehículo solo puede transportar un número limitado de pasajeros y generalmente hay un número limitado de vehículos disponibles a lo largo de cada línea.

Las autoras proponen, en el mismo trabajo, una extensión del modelo LPMT que tiene en cuenta la capacidad de los vehículos y el número de vehículos disponibles en cada línea dentro del horizonte de tiempo dado. En esta extensión, los pasajeros son enrutados a lo largo de diferentes caminos de  $s$  a  $t$  en la red "Change & go". En resumen, esta formulación ampliada del modelo LPMT permite una asignación más realista de pasajeros a diferentes caminos en la red de transporte, considerando las limitaciones de capacidad de los vehículos y el número de vehículos disponibles para cada línea.

### 3.1. Definiciones básicas

**Definición 1.** Un grafo no dirigido  $G = (S, E)$  es un par ordenado compuesto por un conjunto de nodos  $S$  y un conjunto de aristas  $E$ , tal que  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in S\}$ , de modo que si  $e = \{u, v\} \in E$ , se dice que los nodos  $u, v$  son los extremos de la arista  $e$ .

**Definición 2.** Un grafo dirigido  $G = (S, E)$  es un par ordenado compuesto por un conjunto de nodos  $S$  y un conjunto de arcos  $E$ , tal que  $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in S\}$ , de modo que si  $e = (u, v) \in E$ , se dice que los nodos  $u, v$  son los extremos del arco  $e$ , además, que es posible llegar del nodo  $u$  al nodo  $v$  mediante el arco  $e$ . Sin embargo, en un grafo dirigido no es posible ir del nodo  $v$  al nodo  $u$  mediante el arco  $e$ .

**Definición 3.** Una red de transporte público (PTN) es un grafo (dirigido o no dirigido)  $PTN = (S, E)$ , con un conjunto de nodos  $S$  representando las estaciones o paradas, y un conjunto de aristas o arcos  $E$ , en el cual cada arista  $\{u, v\}$  o cada arco  $(u, v)$ ,  $u, v \in S$ , representa una conexión di-

recta entre desde la estación  $u \in S$  y la estación  $v \in S$ . A cada arista  $\{u, v\}$  o arco  $(u, v)$ , el tiempo de conducción viene dado por  $t_{u,v}$ .

**Definición 4.** Un camino  $P$  sobre la  $PTN = (S, E)$  es una secuencia alternada de estaciones y aristas o arcos tales que  $P = u_i, e_i, u_{i+1}, e_{i+1}, \dots, e_{n-1}, u_n$ , con  $e_i = (u_i, u_{i+1})$  en el caso dirigido y  $e = \{u_i, u_{i+1}\}$  en el caso no dirigido, con  $e_i \in E$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $u_j \in S$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 5.** Una línea  $l$  se define como un camino dentro de la red de transporte público. Notamos como  $C_l$  al costo operativo de la línea  $l$ , que corresponde al costo total de realizar cada viaje de la línea.

**Definición 6.** Un reservorio de líneas  $\mathcal{L}$  es un conjunto de líneas pertenecientes a la red de transporte público.

**Definición 7.** Un concepto de líneas  $L = (\mathcal{L}, \mathcal{F})$  corresponde a un par ordenado de un reservorio de líneas, junto con sus frecuencias, tal que para cualquier  $l \in \mathcal{L}$ , esta tiene asignada una frecuencia  $f_l \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^+$ .

**Definición 8.** Dado un reservorio de líneas  $\mathcal{L}$  en la red de transporte público  $PTN = (S, E)$ , el conjunto de aristas que pasa por la línea  $l \in \mathcal{L}$  se denota como  $E(l)$ , mientras que el conjunto de líneas que pasan por una determinada estación  $u \in S$  se denota por  $\mathcal{L}(u)$ .

**Definición 9.** Se define el conjunto de pares Origen-Destino  $\mathcal{R} = \{(u, v) \in S \times S : w_{uv} > 0\}$ , donde  $w_{uv}$  es el número de pasajeros que viajan desde la estación  $u$  a la estación  $v$ .

## 3.2. Construcción del modelo

Para formular el modelo de programación lineal entera, consideraremos al problema de la planificación de líneas como la tarea de escoger un

subconjunto de líneas  $L \subseteq \mathcal{L}$ , tales que:

- Las líneas de  $L$  permitan a cada usuario viajar desde su origen hacia su destino.
- La suma de los costos  $C_l$  asociados a las líneas seleccionadas no sea muy costoso,
- Se minimicen las molestias o inconvenientes de los pasajeros. En el modelo asociaremos a cada camino  $P$  por el que un pasajero viaja desde su origen a su destino un valor de inconveniencia

$$\mathbf{Inconveniencia}(P) = k_1 \mathbf{Tiempo}(P) + k_2 \mathbf{Transferencias}(P). \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{Tiempo}(P)$  es el tiempo transcurrido mientras el pasajero está viajando en alguna unidad de transporte a lo largo del camino  $P$ ,  $\mathbf{Transferencias}(P)$  es el número de transferencias que el pasajero debe realizar a lo largo del camino  $P$ , y  $k_1, k_2$  son parámetros constantes reales no negativos.

Por tanto el problema de planificación de líneas consiste en encontrar un conjunto factible  $L \subseteq \mathcal{L}$  junto con un camino  $P$  para cada par Origen-Destino, tales que los costos del concepto de líneas no excedan una cota  $B$  presupuestaria y tales que la suma de todos los inconvenientes sobre todos los caminos sean minimizados.

Antes de comenzar a desarrollar el modelo, es importante contar con un enfoque que aborde tanto la planificación de las líneas de transporte como los tiempos que los pasajeros destinan a sus desplazamientos. Para ello, es esencial contar con un marco extendido de la red de transporte que permita la representación detallada de los tiempos de viaje y los intervalos de conexión, especialmente al considerar los momentos en que los usuarios necesitan realizar transbordos entre las diferentes líneas. En este contexto, Schöbel y Scholl [17], introducen el concepto de la red "Change & Go" como una extensión de la infraestructura de transporte para abordar el problema de manera efectiva.

**Definición 10.** La red Change& Go es un grafo dirigido  $C = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ .

El conjunto  $\mathcal{V}$ , es denominado el conjunto de nodos de la red Change & Go, y consiste en la unión de los conjuntos de nodos Change & Go ( $\mathcal{V}_{CG}$ ) y nodos Origen-Destino ( $\mathcal{V}_{OD}$ ) los cuales se definen a continuación:

- $\mathcal{V}_{CG} = \{(s, l) \in S \times \mathcal{L} : \mathcal{L}(s)\}$
- $\mathcal{V}_{OD} = \{(s, 0) : (s, t) \in \mathcal{R} \text{ o } (t, s) \in \mathcal{R}\}$

El conjunto de arcos  $\mathcal{E}$  consiste en la unión de tres conjuntos,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{change} \cup \mathcal{E}_{OD} \cup \mathcal{E}_{go}$  donde:

- $\mathcal{E}_{change} = \{((s, l_1), (s, l_2)) : \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG}\}$ , representan los arcos de cambios de línea en una misma estación.
- $\mathcal{E}_l = \{((s, l), (s', l)) : \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG} : (s, s') \in E\}$ , representan los arcos de conducción de la línea  $l$ .
- $\mathcal{E}_{go} = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{E}_l$ , representan el conjunto de arcos de conducción.
- $\mathcal{E}_{OD} = \{((s, 0), (s, l)) \in \mathcal{V}_{OD} \times \mathcal{V}_{CG} \text{ y } ((t, l), (t, 0)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{OD} : (s, t) \in \mathcal{R}\}$ , representan los arcos de entrada y salida.

**Ejemplo 1.** Presentamos a continuación un ejemplo de red Change & Go para una red de tres estaciones, mostradas a continuación.

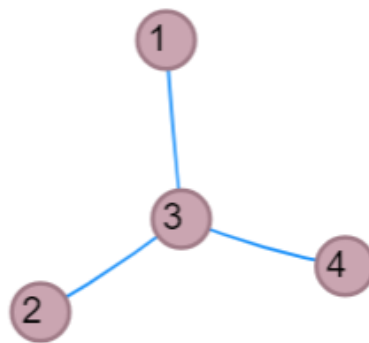


Figura 3.1: Ejemplo de red de transporte público no dirigida.

Dentro de esta red no dirigida, se considera un reservorio de líneas dadas por,  $\mathcal{L} = \{l_1, l_2\}$ . La primera línea,  $l_1$ , pasa por las estaciones 1, 3 y 2

mientras que la línea  $l_2$  pasa por las estaciones 1,3 y 4. Tenemos también los siguientes pares Origen-Destino.  $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4)\}$ .

Siguiendo las definiciones anteriores se establecen los nodos y aristas de la red Change & Go.

Las líneas que pasan por los nodos de la red son las siguientes:

- $\mathcal{L}(1) = \{l_1, l_2\}$
- $\mathcal{L}(2) = \{l_1\}$
- $\mathcal{L}(3) = \{l_1, l_2\}$
- $\mathcal{L}(4) = \{l_2\}$

por tanto obtenemos el conjunto

$$\mathcal{V}_{CG} = \{(1, l_1), (1, l_2), (2, l_1), (3, l_1), (3, l_2), (4, l_2)\}$$

además el conjunto,

$$\mathcal{V}_{OD} = \{(1, 0), (2, 0), (4, 0)\}$$

El conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  lo definimos con la unión de los siguientes conjuntos,

- $\mathcal{E}_{change} = \{((1, l_1), (1, l_2)), ((1, l_2), (1, l_1)), ((3, l_1), (3, l_2)), ((3, l_2), (3, l_1))\}$ , los arcos de cambios de línea en cada estación.
- $\mathcal{E}_{l_1} = \{((1, l_1), (3, l_1)), ((3, l_1), (1, l_1)), ((3, l_1), (2, l_1)), ((2, l_1), (3, l_1))\}$ ,  
 $\mathcal{E}_{l_2} = \{((1, l_2), (3, l_2)), ((3, l_2), (1, l_2)), ((3, l_2), (4, l_2)), ((4, l_2), (3, l_2))\}$ , por tanto,  $\mathcal{E}_{go} = \mathcal{E}_{l_1} \cup \mathcal{E}_{l_2}$ .
- $\mathcal{E}_{OD} = \{((1, 0), (1, l_1)), ((1, 0), (1, l_2)), ((2, 0), (2, l_1)), ((2, l_1), (2, 0)), ((4, l_2), (4, 0))\}$

así,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{change} \cup \mathcal{E}_{go} \cup \mathcal{E}_{OD}$ , con ello obtenemos la siguiente red extendida.

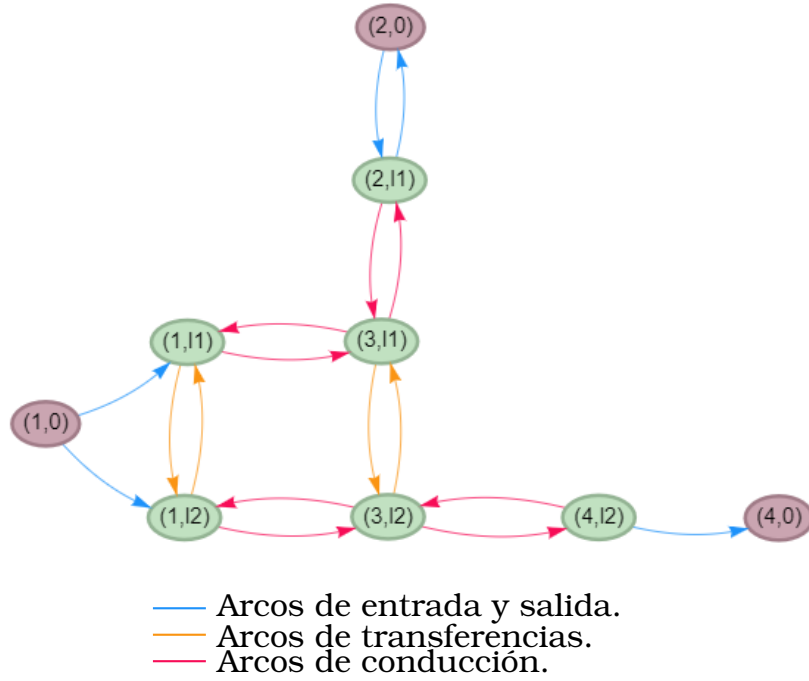


Figura 3.2: Red Change & Go.

Se asignan a continuación pesos a cada arco  $e \in \mathcal{E}$  en la red Change & Go para poder evaluar la función de inconveniencia de un camino definida en (3.1). Para los arcos de  $\mathcal{E}_{go}$ , el peso será igual al tiempo de viaje, mientras que los arcos de  $\mathcal{E}_{change}$  tienen peso igual a 1 para contabilizar el número de transferencias a lo largo del camino. Estos valores se ponderan por los parámetros  $k_1$  y  $k_2$ , para enfatizar uno u otro criterio dentro de la función objetivo. De esta manera,

$$c_e = \begin{cases} 0 & , \text{ si } e \in \mathcal{E}_{OD}, \\ k_1 t_{uv} & , \text{ si } e = ((u, l), (v, l)) \in \mathcal{E}_{go}, \\ k_2 & , \text{ si } e = ((u, l_1), (u, l_2)) \in \mathcal{E}_{change}. \end{cases}$$

Puesto que el objetivo es minimizar la inconveniencia para el pasajero necesitamos el cálculo de los caminos más cortos con respecto a los pesos de arriba señalados, entre cada par Origen-Destino. Para ello, se resuelve un problema de flujo costo mínimo con las siguientes restricciones de demanda.

$$\theta x_{st} = b_{st},$$

donde:

- $\theta \in \mathbf{Z}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$  es la matriz de incidencia nodo-arco de la red Change & Go.
- $b_{st} \in \mathcal{Z}^{\mathcal{V}}$  es el vector de demanda en los nodos de la red Change & Go, definido:

$$b_{st}^i = \begin{cases} 1 & , i = (s, 0), \\ -1 & , i = (t, 0), \\ 0 & , \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

- $x_{st}^e \in \{0, 1\}$  son variables binarias que toman el valor de 1 si el arco  $e$  es utilizado en el camino más corto del nodo  $(s, 0)$  al nodo  $(t, 0)$  dentro de la red Change & Go, y toman el valor de 0 en el caso contrario.
- $y_l \in \{0, 1\}$  para cada  $l \in \mathcal{L}$ , son variables binarias que toman el valor 1 cuando la línea  $l$  se escoge dentro del concepto de líneas y 0 en caso contrario.

Con ello, el modelo "Line Planing with Minimal Travel Times" (LPMT1) propuesto por Schöbel y Scholl [17], puede formularse de la manera siguiente:

$$\text{mín } \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}} w_{st} c_e x_{st}^e \quad (3.2)$$

$$\text{s.t. } \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} x_{st}^e \leq |\mathcal{R}| |\mathcal{E}_l| y_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \quad (3.3)$$

$$\theta x_{st} = b_{st}, \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} C_l y_l \leq B, \quad (3.5)$$

$$x_{st}^e, y_l \in \{0, 1\}, \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, e \in \mathcal{E}, l \in \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

La familia de restricciones (3.3) asegura que una línea debe ser incluida en el concepto de líneas si es utilizada en el camino asignado a algún par de Origen-Destino. Dicho de otra forma, si algún arco perteneciente a la línea es usado en el camino asignado a cualquier par Origen-Destino, entonces esa línea debe estar en el conjunto de líneas seleccionadas.

Las restricciones de conservación de flujo (3.4) aseguran que los pasajeros de cada par Origen-Destino se desplacen durante su trayecto por un único camino sobre la red Change & Go.

La restricción (3.5) es de tipo presupuestario y limita el costo total de operación de las líneas de transporte público. Esta restricción asegura que el costo total de operar las líneas seleccionadas, no supere el presupuesto disponible.

Es importante mencionar que hay diferentes formulaciones alternativas para este modelo, denominadas por las autoras como LPMT2, LPMT3 y LPMT4. Estas versiones del modelo de planificación de líneas con tiempos mínimos de viaje se las obtiene al sustituir la familia de restricciones (3.3) por las restricciones equivalentes que se describen a continuación. En LPMT2, se especifica que si una línea  $l$  no es seleccionada, entonces, para cada arco  $e$  de  $\mathcal{E}_l$ , debe cumplirse que la suma sobre todos los pares Origen-Destino de las variables  $x_{st}^e$  asociadas a este arco debe ser nula.

$$\sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} x_{st}^e \leq |\mathcal{R}| y_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, e \in \mathcal{E}_l. \quad (3.7)$$

LPMT3 especifica que si una línea  $l$  no es seleccionada, entonces, para cada par Origen-Destino  $(s, t)$  debe cumplirse que la suma sobre todos los arcos en  $\mathcal{E}_l$  de las variables  $x_{st}^e$  asociadas a este par  $(s, t)$  debe ser nula.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_l} x_{st}^e \leq |\mathcal{E}_l| y_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, (s, t) \in \mathcal{R}. \quad (3.8)$$

Finalmente LPMT4 requiere que si una línea no es seleccionada, entonces las variables asociadas a todos los arcos de  $\mathcal{E}_l$  y a todos los pares Origen-Destino deben ser iguales a cero.

$$x_{st}^e \leq y_l, \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, e \in \mathcal{E}_l : l \in \mathcal{L}. \quad (3.9)$$

Aunque los cuatro modelos son equivalentes desde el punto de vista de sus soluciones enteras, sus diferencias radican en el nivel de ajuste de las cotas proporcionadas por sus relajaciones lineales, siendo la formulación LPMT4 (3.9) la más fuerte, luego la formulación LPMT1 (3.3) la más débil, y finalmente LPMT2 (3.7) y LPMT3 (3.8) son formulaciones intermedias



que no son comparables entre sí.

Para resolver la relajación lineal de LPMT, se utiliza la técnica de descomposición de Dantzig-Wolfe, que permite descomponer el problema en subproblemas más manejables, mejorando la eficiencia de su resolución. Esta técnica implica la creación de un problema maestro que coordina las soluciones de los subproblemas, garantizando que se respeten las restricciones relacionadas con el presupuesto y la inclusión de líneas. Los subproblemas se enfocan en minimizar los costos de viaje para cada par Origen-Destino, aprovechando la naturaleza totalmente unimodular de la programación lineal para asegurar soluciones enteras.

# Capítulo 4

---

## Experimentos computacionales

---

En el presente capítulo se presentan los resultados computacionales de varios experimentos utilizando el software OpenLinTim [15], diseñado para la planificación del transporte público en sus distintas fases. Se muestran los resultados de diversos experimentos empleando cinco instancias derivadas del sistema de transporte público de la ciudad de Quito: el Trolebús, la Ecovía, una modificación de ambos y una integración de ambas. Cada experimentación se llevó a cabo en una computadora equipada con un procesador Intel Core i7 de 2.10 GHz y 32 GB de memoria RAM, configurada para garantizar un rendimiento óptimo en el procesamiento de datos. La máquina tenía instalado un sistema operativo Windows versión 10, pero para garantizar compatibilidad del software, se configuró una máquina virtual con el sistema operativo Linux, específicamente la distribución Debian, donde se integraron los solvers Gurobi y Xpress. Estas herramientas son requeridas por varios algoritmos de OpenLinTim [15].

Los resultados computacionales, así como la preparación de las instancias y un manual detallado de instalación del software OpenLinTim [15] y los solver requeridos, que es parte integral del presente trabajo, se encuentran en el siguiente repositorio de Github: <https://github.com/jorgezdma/C.-computacionales-TIC.git>

## 4.1. Software OpenLinTim

El software que utilizaremos para los experimentos computacionales es OpenLinTim [15], un software de código abierto diseñado para resolver diversos problemas relacionados con la planificación del transporte público. OpenLinTim [15] tiene implementados algoritmos para múltiples fases de la planificación, desde la localización de paradas y la generación de conceptos de líneas, hasta la creación de horarios y la asignación de flotas. Cada una de estas fases puede trabajarse secuencialmente, ajustando distintos parámetros configurables del software. Además, OpenLinTim [15] puede integrarse con algunos solvers de programación lineal entera, entre ellos, Gurobi [10] y Xpress [8], los mismos que son requeridos por algunos de los algoritmos implementados. Por ello, fue necesario obtener licencias académicas para la instalación y correcto funcionamiento de estos solvers.

Para instalar OpenLinTim [15], primero se recurrió a la instalación del Windows Subsystem for Linux (WSL) versión 2.2.4.0, donde se configuró una máquina virtual con la distribución Debian, ya que OpenLinTim [15] está optimizado para sistemas operativos Linux y no existe una versión compatible para Windows. En la máquina virtual, se procedió a instalar Git, Python y varias bibliotecas necesarias para el funcionamiento del software. Utilizando Git, se clonaron los archivos de instalación desde el repositorio oficial de OpenLinTim [15] en GitHub. Una vez clonado el repositorio, se ejecutó un script de instalación que guiaba paso a paso el proceso.

Posteriormente, se instalaron los solvers Xpress [8] versión 9.2.0 y Gurobi [10] versión 10.0.2, utilizando los instaladores oficiales disponibles en sus respectivas páginas web y se ubicaron los archivos de licencia en las respectivas ubicaciones requeridas por los solvers. Finalmente, se configuraron las variables de entorno para ambos solvers, asegurando que OpenLinTim [15] pudiera reconocerlos y ejecutar sus algoritmos correctamente.

OpenLinTim [15] está organizado en varias carpetas que contienen código escrito en diversos lenguajes de programación para las diferentes etapas de la planificación del transporte público. Sin embargo, nos enfo-

caremos especialmente en la carpeta de datasets, que contiene una colección de bases de datos con instancias tanto reales como ficticias. Estas bases de datos permiten explorar y evaluar el funcionamiento del software en diferentes tipos de problemas y configuraciones. Dentro de estas instancias creadas intencionalmente, se incluyen parámetros de configuración variados, proporcionando una guía completa para comprender las capacidades del software y adaptarlo según nuestras necesidades.

OpenLinTim [15] está diseñado para ser utilizado desde una terminal empleando la herramienta "make". Para ejecutar OpenLinTim [15] en la máquina virtual, es necesario que el usuario se ubique dentro de alguna de las instancias disponibles en la carpeta datasets. Posteriormente, deben ejecutarse comandos específicos siguiendo la secuencia recomendada, precedidos por el comando "make". Este proceso permite que OpenLinTim [15] utilice sus algoritmos internos para resolver el problema en cuestión. Por ejemplo, para ejecutar el desarrollo del concepto de líneas, el usuario debe usar el comando "make lc-line-concept".

Es fundamental que los archivos con los datos de entrada necesarios estén presentes en una subcarpeta llamada "basis" dentro de la carpeta correspondiente a la instancia que hayamos escogido. Estos archivos contienen elementos como la red de transporte, las paradas, las aristas, la matriz Origen-Destino y otros parámetros generales que pueden ser ajustados según las necesidades específicas del problema que se esté abordando.

Es importante aclarar que, antes de proceder con la generación del concepto de líneas, en el cual nos centraremos para experimentar, OpenLinTim [15] corre algoritmos correspondientes a varias fases preliminares. Estas incluyen la localización de las paradas, la generación de cargas para las aristas, la creación de líneas y sus costos para una red de transporte, y la generación de matrices Origen-Destino. Si el usuario ya dispone de datos para estas fases, pueden ser omitidas. Sin embargo, es crucial tener en cuenta que si alguna de estas fases no se completa adecuadamente, no habrá suficiente información para calcular el concepto de líneas con éxito.

Para obtener información más detallada sobre el uso del software OpenLinTim [15], se puede consultar el manual de referencia [15].

A continuación, se presenta la preparación de las instancias extraídas de la red de transporte de Quito, específicamente del Sistema Metropolitano de Transporte de Pasajeros Ecovía y Trolebús.

## 4.2. Preparación de instancias

La Secretaría de Movilidad de Quito, en colaboración con el Centro de Modelización Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, proporcionó datos esenciales para la planificación del transporte público en la red de la ciudad de Quito, para los buses de tránsito rápido. Estos datos son parte integral del Plan Maestro de Movilidad Sostenible (PMMS) 2022-2042, el cual aborda la necesidad de nuevas políticas de movilidad sostenible y la inclusión del metro subterráneo de Quito. Un insumo clave para el PMMS es la Encuesta de Origen-Destino para Hogares (EODH), que recopiló información sobre los viajes de 5398 hogares en Quito, cubriendo 718 zonas de análisis de tráfico (ZATs). Esta encuesta genera estadísticas e indicadores de movilidad y sirve de base para el modelo de transporte de cuatro etapas, que incluye la generación, distribución, reparto modal y asignación de tráfico. Este modelo se implementó en el software PTV Visum [13], que detalla la red de transporte de Quito, incluyendo calles, intersecciones y paradas, y permite una asignación eficiente del tráfico, especialmente en escenarios de demanda pico. Para más información acerca de la obtención de los datos se refiere a la otra componente del presente proyecto de integración curricular, realizada por Jeremy Bastidas.

Para generar las instancias, inicialmente se utilizó la información proporcionada en archivos "shapefile", que se procesaron en PTV Visum [13]. A partir de estos, se extrajeron archivos con hojas de cálculo en formato Microsoft Excel con los datos necesarios para las paradas y las rutas que los vehículos pueden tomar en los distintos sistemas de transporte, como la Ecovía, el Trolebús y el sistema integrado.

Dentro de cada archivo Excel, se encuentra la información organizada de la siguiente manera:

**Paradas:** Información sobre el número de parada en orden, las coor-

denadas de latitud y longitud de cada parada, su nombre y los datos de embarque y desembarque de pasajeros.

**Líneas de Transporte:** Información acerca de las líneas para cada sistema de transporte, organizada en los sentidos sur-norte y norte-sur.

**Arcos o aristas:** Información sobre las conexiones entre paradas en la secuencia de ida y vuelta, y la longitud de cada arco o arista.

**Matriz Origen-Destino:** Información de la demanda de pasajeros en la red de la Ecovia, Trolebús y el Sistema Integrado

Posteriormente, estos datos fueron procesados utilizando el lenguaje de programación R. En este proceso, se adecuaron y estructuraron los cuatro archivos esenciales necesarios para OpenLinTim: un archivo de paradas (Stop), un archivo de aristas (Edge), una matriz Origen-Destino (OD) con las demandas de los pasajeros y un conjunto de líneas (Pool). Cada archivo se creó en formato de texto, utilizando el punto y coma como separador, que es el formato requerido por OpenLinTim [15] para su correcta interpretación y ejecución en las simulaciones.

A continuación, se presentan una breve descripción de la generación de las cinco instancias de transporte público utilizadas en los experimentos: la Ecovía, el Trolebús, una modificación de ambas y el sistema integrado.

- **TROLEBUS:** Corresponde a la instancia del Trolebús en el caso dirigido.
- **ECOVIA:** Corresponde a la instancia de la Ecovía en el caso dirigido.
- **TROLEBUS-M:** Corresponde a la instancia modificada del Trolebús y es un grafo no dirigido.
- **ECOVIA-M:** Corresponde a la instancia modificada de la Ecovía y es un grafo no dirigido.
- **INTEGRADO:** Corresponde a la instancia integrada del Trolebús y la Ecovía y es un grafo no dirigido.

### 4.2.1. Preparación de paradas

Para la generación de las paradas, se trabajó en dos instancias utilizando un grafo dirigido. La información inicial de los archivos Excel para las paradas incluía estaciones que indicaban la secuencia que estas podían tomar en sentido de ida y de regreso. Por lo tanto, se dividieron estas paradas para diferenciar los trayectos de ida y vuelta. Las paradas de ida se denotaron con  $|>$  y las de regreso con  $<|$ , ubicadas después del nombre de la parada. Esto permitió colocar las paradas en las secuencias correctas, excluyendo aquellas que no podían ser utilizadas en el sentido de ida o de vuelta. A continuación, se muestra un ejemplo del tratamiento de algunas paradas para el caso del Trolebús.

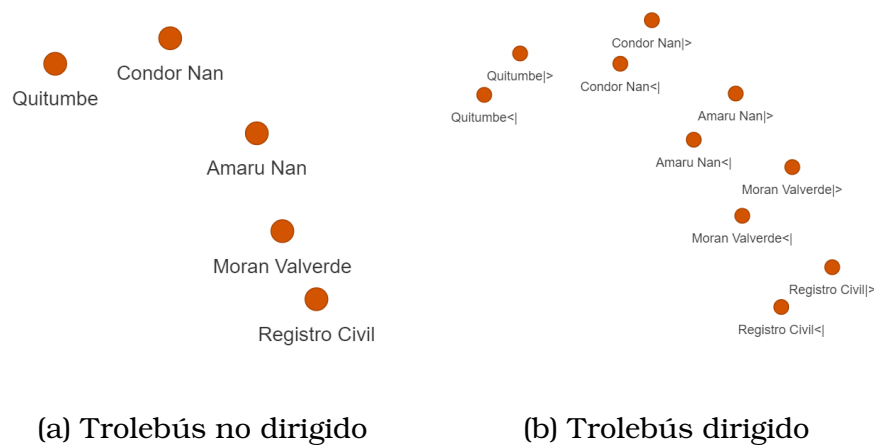


Figura 4.1: Creación de redes dirigidas a partir de sus estaciones.

En la Figura 4,1a se presentan algunas paradas del Trolebús sin diferenciar su sentido, mientras que en la Figura 4,1b se muestra el correspondiente grafo dirigido, diferenciando las paradas de ida y de vuelta para algunas paradas del sistema de transporte Trolebús.

Para el caso no dirigido, correspondiente a las instancias del Trolebús modificado, Ecovía modificado y de la red Integrada del Trolebús y Ecovía, varias paradas que tenían una sola dirección fueron agrupadas en un solo nodo que representa ambas direcciones, con el propósito de simplificar el problema. A continuación se muestra cómo se trató esta fusión de paradas para representar tanto la ida como la vuelta:

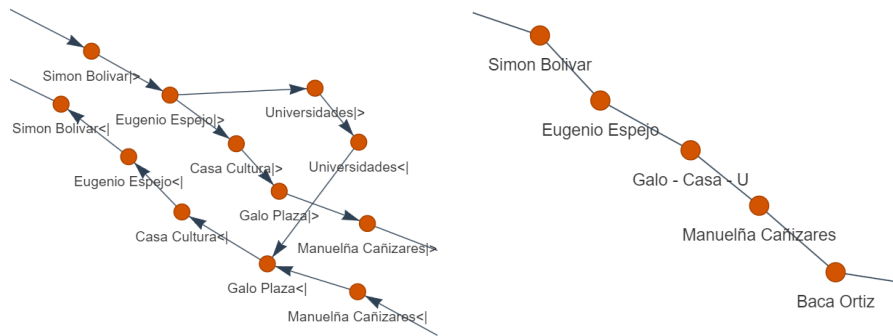


Figura 4.2: Fusión de paradas.

La Figura 4.2 muestra un segmento de las paradas del sistema de transporte Ecovía. En este tramo, el recorrido va en sentido sur-norte desde la estación Simón Bolívar, pasando por Eugenio Espejo y Universidades. Posteriormente, el trayecto forma un ciclo de regreso en sentido norte-sur, desde las universidades hacia Galo Plaza Lasso, Casa de la Cultura, Eugenio Espejo y otras paradas. Para evitar complicaciones con las estaciones que solo admiten una dirección, especialmente en el caso de las universidades, se decidió fusionar las tres estaciones más cercanas, creando un punto central donde los pasajeros pudieran detenerse. Esta simplificación se realizó para facilitar el tratamiento del problema en un contexto no dirigido.

Una vez que las paradas fueron bien estructuradas, tanto con dirección como sin dirección, se procedió a elaborar el archivo Stop.GIV. Este archivo contiene información sobre el número de parada, el nombre corto y largo de la parada, y sus coordenadas de latitud y longitud. Como se indicó antes, todos los archivos de entrada de OpenLinTim [15] son archivos de texto separados por punto y coma.

#### 4.2.2. Preparación de aristas

Para la creación de los arcos en las instancias dirigidas, se establecieron conexiones entre las paradas de manera secuencial, según la información sobre el sentido en el que cada una de las paradas es utilizada. Este proceso garantizó que las rutas diferencien adecuadamente los



trayectos de ida y vuelta sin generar ciclos que pueden alterar el funcionamiento de los algoritmos en el software de OpenLinTim [15]. Además, se añadieron arcos específicos que indicaban los cambios de sentido en varias paradas de la red de transporte, tanto en la Ecovía como en el Trolebús, así como en el sistema integrado.

Por ejemplo, en el caso del Trolebús, se añadieron arcos que conectan la estación de La Colón en sentido de ida con la misma estación en sentido de vuelta, así como la estación de El Recreo en ambos sentidos. Estos arcos adicionales permiten la representación de las posibles maniobras dentro del sistema del Trolebús.

En el caso de la Ecovía, se añadieron arcos que conectan la estación Playón de La Marín en el sentido de ida con la misma estación en el sentido de vuelta, así como la estación de Marín Central en el sentido de ida con la misma estación en el sentido de vuelta y finalmente a la estación Universidades en ambos sentidos. Esto permite una mayor precisión en la simulación del flujo vehicular. La Figura 4.3 presenta una breve representación gráfica de la inclusión de algunas aristas que unen ambos sentidos para el Trolebús y la Ecovía.

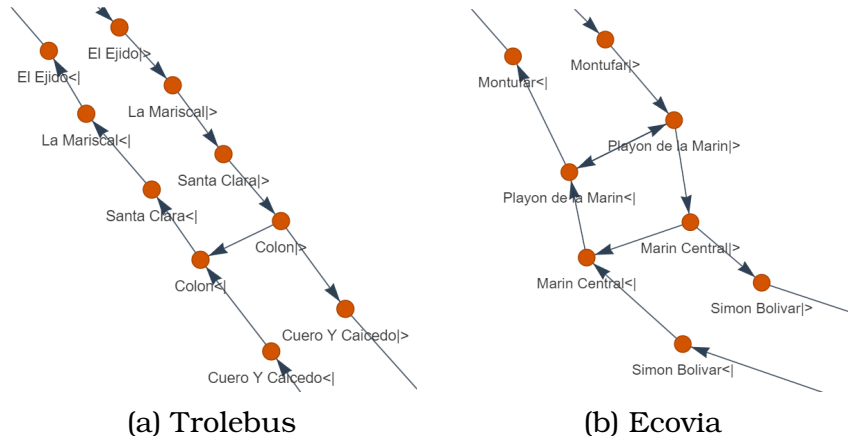


Figura 4.3: Unión de sentido de ida y vuelta para los sistemas de transporte de Trolebús y Ecovía.

Para las instancias no dirigidas de las modificaciones del Trolebús, Ecovía y la red integrada del Trolebús y la Ecovía, se generaron aristas de forma secuencial sin considerar una dirección específica, ya que previamente se habían modificado algunas paradas para poder representar

una red no dirigida en la que la circulación sobre las aristas sea en ambos sentidos, tanto para la Ecovía como para el Trolebús. Además, se incluyeron aristas que integran el sistema del Trolebús con la Ecovía.

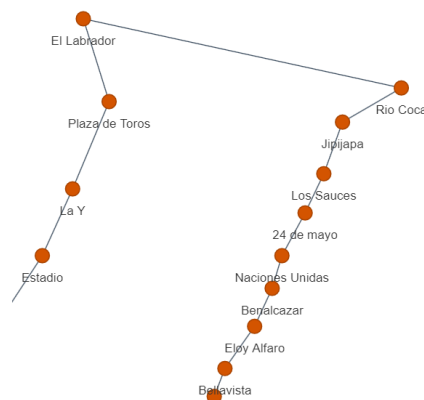


Figura 4.4: Integración del Trolebús y la Ecovía.

En la Figura 4.4, se muestra una de las aristas de conexión entre la Ecovía y el Trolebús, en este caso, la que conecta la parada de la Río Coca de la Ecovía con la de El Labrador del Trolebús.

Posteriormente, se elaboró el archivo Edge.GIV para cada instancia, el cual contiene como información: el número de arista, la parada inicial, la parada final, la longitud del arco o arista, así como la cota inferior y superior del tiempo que un vehículo tarda en recorrer dicha arista.

**La cota inferior** representa el tiempo mínimo en minutos que un vehículo tarda en recorrer el arco o arista, calculado asumiendo una velocidad constante y sin interrupciones. Aplicando la función piso para obtener el valor entero más cercano hacia abajo, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Cota inferior} = \left\lfloor \frac{\left( \frac{\text{longitud del arco o arista}}{\text{velocidad del vehículo}} \right) \times 60}{2} \right\rfloor.$$

**La cota superior** representa el tiempo máximo en minutos que un vehículo tarda en recorrer el arco o arista, considerando posibles retrasos o variaciones en la velocidad. Aplicando la función techo para obtener el valor entero más cercano hacia arriba, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Cota superior} = \left\lceil \left( \frac{\text{longitud del arco o arista}}{\text{velocidad del vehículo}} \right) \times 60 \times 2 \right\rceil.$$

Las figuras a continuación ilustran la red de transporte público para las cinco instancias.

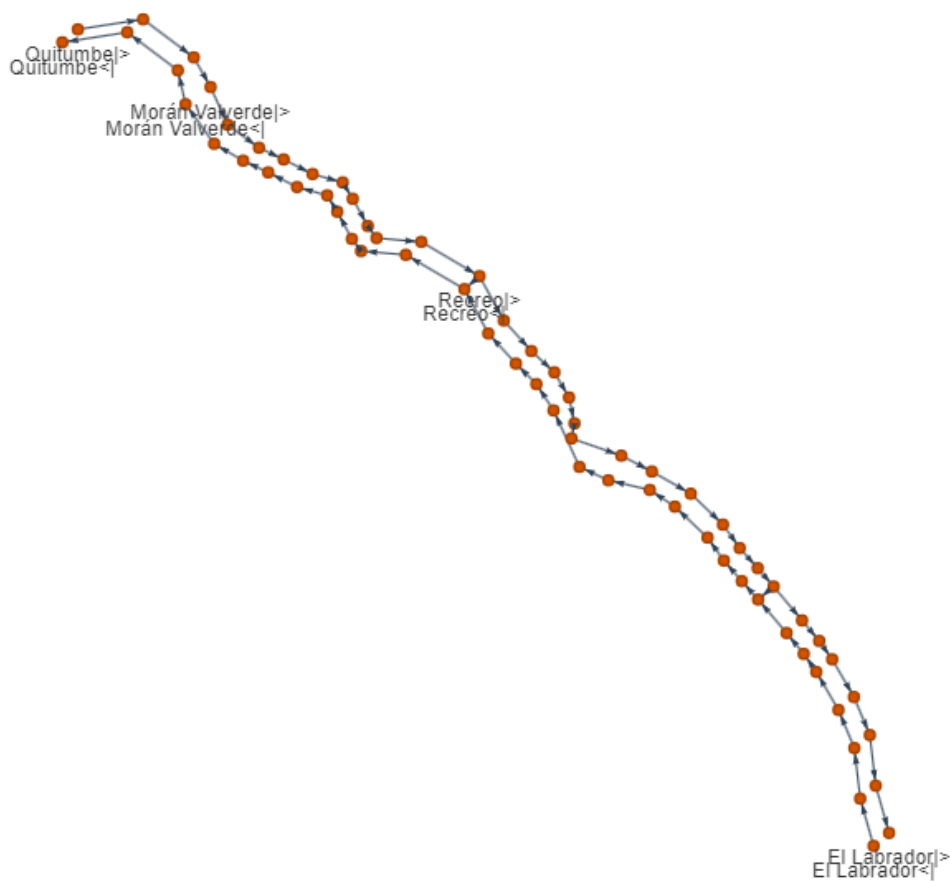


Figura 4.5: PTN del Trolebús dirigido.

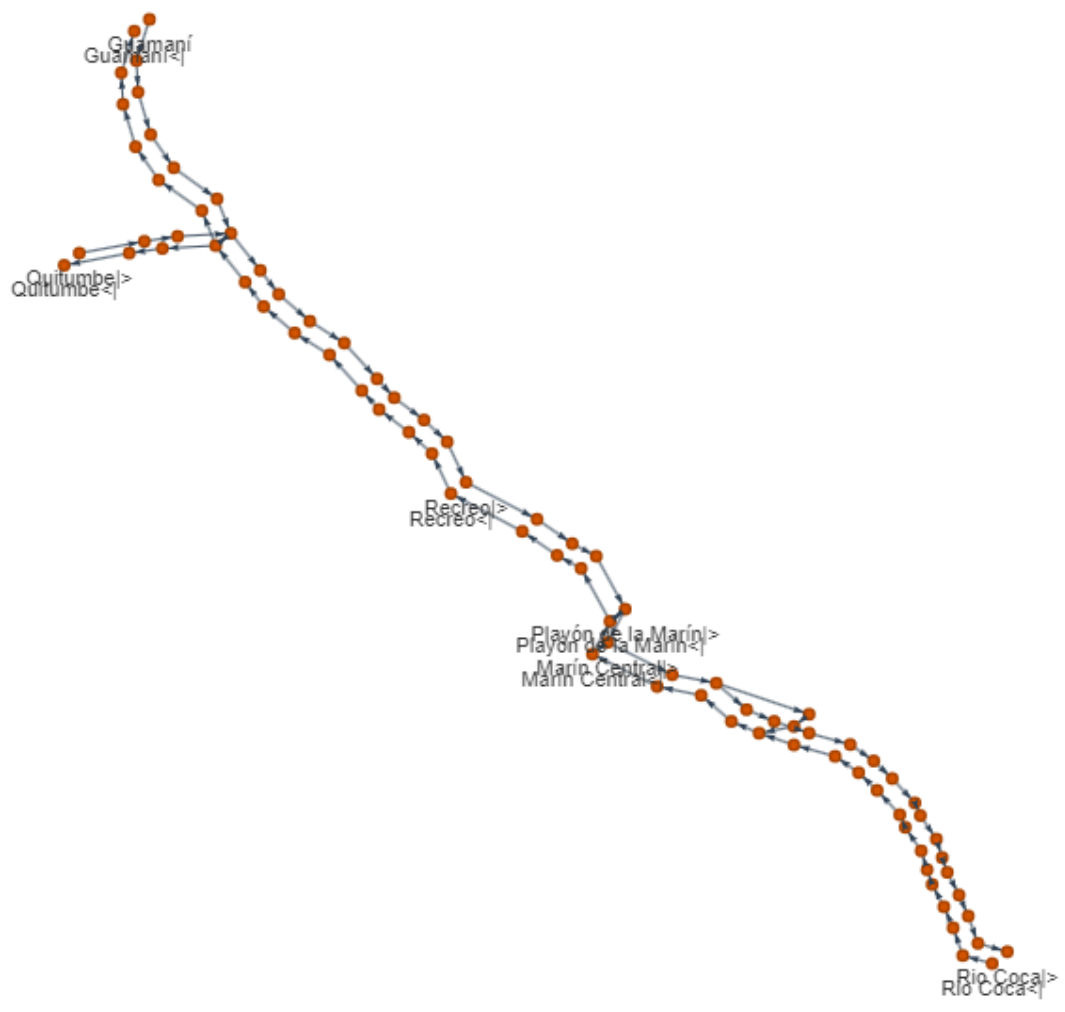


Figura 4.6: PTN de la Ecovía dirigido.

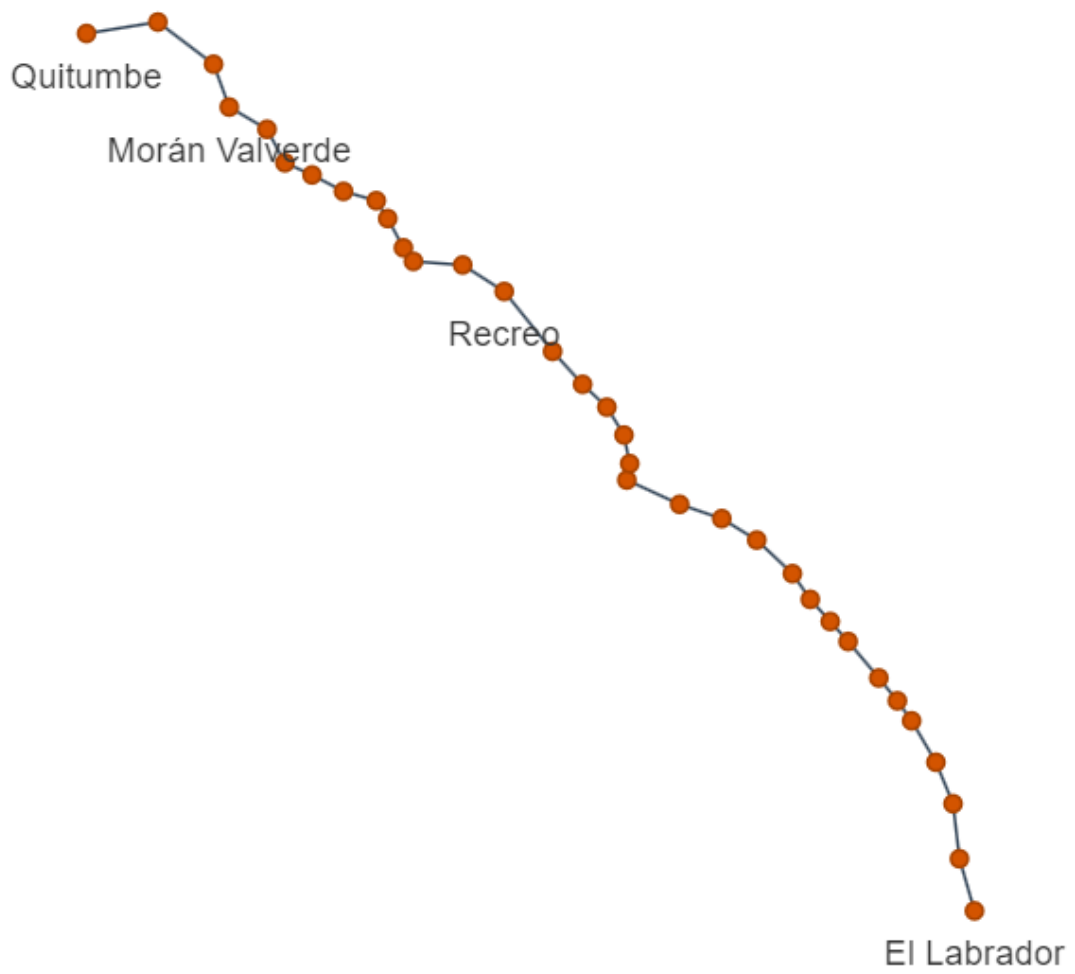


Figura 4.7: PTN del Trolebús no dirigido.

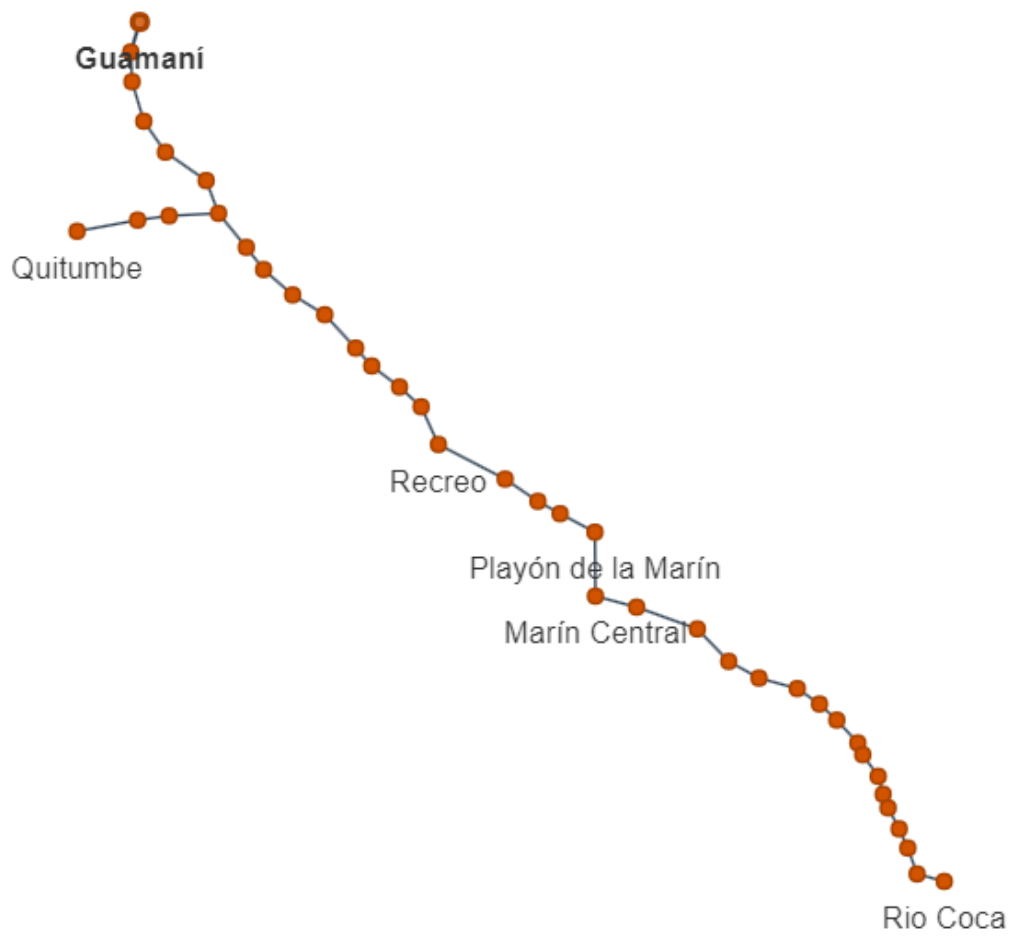


Figura 4.8: PTN de la Ecovía no dirigido.



Figura 4.9: PTN del sistema Integrado.

### 4.2.3. Preparación del conjunto de líneas

Para la preparación del conjunto de líneas, se seleccionaron y procesaron segmentos específicos del conjunto de aristas establecido en la sección anterior, de acuerdo con las necesidades de las líneas del sistema de transporte.

En el caso de la instancia del Trolebús dirigido, se incluyeron las líneas que operan actualmente, conocidas como circuitos C1, C2, C4 y C6. En el Cuadro 4.1 se indican las líneas y las terminales que ellas atraviesan.

<b>Ruta</b>	<b>Terminales</b>
C1 sur-norte	Recreo - Labrador
C1 norte-sur	Labrador - Recreo
C2 sur-norte	Morán Malverde - Labrador
C2 norte-sur	Labrador - Morán Malverde
C4 ciclo cerrado	Quitumbe - Colón - Quitumbe
C6 ciclo cerrado	Quitumbe - Recreo - Quitumbe

Cuadro 4.1: Tabla de rutas y terminales Trolebús.

Para la instancia de la Ecovía dirigida, se consideraron las rutas E1, E1M, E2, E3 y E4. Estas rutas también fueron escogidas de las rutas actuales del sistema de transporte de Ecovía de Quito. El Cuadro 4.2. indica sus terminales.

<b>Ruta</b>	<b>Terminales</b>
E1 ciclo cerrado	Guamaní - Universidades - Guamaní
E1M ciclo cerrado	Guamaní - Marín Central - Guamaní
E2 sur- norte	Quitumbe - Río Coca
E2 norte-sur	Río Coca - Quitumbe
E3 ciclo cerrado	Río Coca - Playón de la Marín - Río Coca
E4 ciclo cerrado	Quitumbe - Playón de la Marín - Quitumbe

Cuadro 4.2: Tabla de rutas y terminales Ecovía.

Las rutas indicadas en los Cuadros 4.1 y 4.2 con sentido sur-norte y norte-sur representan líneas que conectan dos terminales, de tal forma que cada sentido puede ser operado independientemente. En cambio, las



líneas que se describen como ciclos cerrados son aquellas que conectan un terminal con una estación sin posibilidad para el estacionamiento de unidades, por lo que un bus que opere cualquiera de estas líneas debe dar la vuelta al llegar a la mitad del trayecto y regresar hacia la terminal de inicio.

En el caso de las instancias no dirigidas de la Ecovía y el Trolebús modificado (instancias tercera y cuarta), se implementó un cambio adicional en el conjunto de líneas. Estas nuevas líneas son más pequeñas y cubren la ciudad de manera más diversa, tanto para la Ecovía como para el Trolebús. Se propusieron nuevas líneas con el objetivo de aumentar la dificultad computacional de las instancias. En el Cuadro 4.3, se muestran las nuevas líneas.

<b>Ruta</b>	<b>Terminales para Trolebús</b>	<b>Ruta</b>	<b>Terminales para Ecovía</b>
T1	Colón - El Labrador	E1	Quitumbe - El Capulí
T2	Plazas - Mariana de Jesús	E2	Guamaní - Puente de Guajalo
T3	Recreo - El Ejido	E3	El Capulí - Recreo
T4	Moran Valverde - Sto. Domingo	E4	Puente de Guajalo - Chimbacalle
T5	Mercado Mayorista - Recreo	E5	Recreo - Playón de la Marín
T6	Quitumbe - Moran Valverde	E6	Playón de la Marín - Galo/C.Cultura/Univers.
T7	Quitumbe - Recreo	E7	Playón de la Marín - Marín Central
T8	España - Plazas	E8	Playón de la Marín - Eloy Alfaro
T9	El Ejido - Estadio	E9	Galo/C.Cultura/Univers - Río Coca
T10	Mercado Mayorista - Cuero Y Caicedo	E10	Guamaní - Chimbacalle
		E11	Recreo - Río Coca
		E12	Chimbacalle - Galo/C.Cultura/Univers.
		E13	Galo/C.Cultura/Univers - Naciones Unidas
		E14	Baca Ortíz - Río Coca

Cuadro 4.3: Tabla de rutas y terminales para las instancias modificadas de Trolebús y Ecovía.

Para la quinta instancia, correspondiente a la integración no dirigida, se realizó una combinación de todas las líneas actuales del Trolebús y la Ecovía del sistema de transporte de Quito, sin considerar la dirección. Es decir, se incluyeron las rutas C1, C2, C3 y C4 del Trolebús, así como las rutas E1, E1M, E2, E3 y E4 de la Ecovía, sin distinguir entre el sentido sur-norte o norte-sur. Esto se debe a que OpenLinTim [15] asume que un vehículo puede recorrer cada arista de cada camino en ambos sentidos, representando tanto la ida como la vuelta. Además, se incluyeron las conexiones necesarias entre ambos sistemas de transporte para una

integración completa.

Puesto que para las dos primeras instancias estamos trabajando con el caso dirigido, estas líneas fueron tomadas en sentido de ida y vuelta respetando la dirección de los trayectos. Mientras que en los casos no dirigidos, las líneas fueron seleccionadas en función de las paradas que deben cubrir.

A continuación, se presenta un ejemplo para el Trolebús con la línea C1 en sentido sur-norte para el caso dirigido, y para el sistema integrado en el caso no dirigido con la línea E4 de la Ecovía, cubriendo las paradas correspondientes a su extensión.



(a) Línea c1 del Trolebús sentido Sur-Norte

(b) Línea E4 de la Ecovía

Figura 4.10: Líneas para el caso dirigido y no dirigido en el sistema de transporte del Trolebús y Ecovía.

#### 4.2.4. Preparación de la matriz Origen-Destino

Para la generación de la matriz Origen-Destino, se dividió el análisis en dos casos: dirigido y no dirigido. Para el caso dirigido, correspondiente a las dos primeras instancias, se utilizó la información proporcionada por el software PTV Visum [13] acerca de número de embarques y desembarques para las paradas individuales. Una vez que se dividieron las paradas en sentido de ida y vuelta, se procedió a distribuir la demanda en la dirección en que las personas pueden viajar.

La matriz Origen-Destino del caso no dirigido es procesada para obte-

ner la matriz Origen-Destino de las redes dirigidas, separando el flujo de pasajeros en los dos sentidos. Las personas que viajan de las estaciones del sur hacia el norte utilizan la ruta cuyas paradas están marcadas con  $|>$ , mientras que las personas que viajan de norte a sur utilizan la ruta con paradas marcadas con  $<|$ . De esta manera, se genera un flujo de personas que viajan en una misma dirección sin cambiar de sentido, a menos que exista algún arco de retorno.

A continuación, se presenta un ejemplo pequeño del tratamiento realizado para la matriz Origen-Destino para dos paradas del Trolebús, con el fin de visualizar mejor la distribución de la demanda entre los dos sentidos.

	El Calzado	El Ejido
El Calzado	0	103
El Ejido	157	0

Cuadro 4.4: Matriz Origen-Destino para dos paradas del Trolebús.

En el Cuadro 4.4, se observa que 103 personas se desplazan desde El Calzado hacia El Ejido, mientras que 157 personas se desplazan en la dirección opuesta, desde El Ejido hacia El Calzado.

A continuación, procederemos a duplicar las paradas para ambos sentidos y distribuir la demanda según la dirección de las paradas.

	El Calzado $ >$	El Ejido $ >$	El Calzado $< $	El Ejido $< $
El Calzado $ >$	0	103	0	0
El Ejido $ >$	0	0	0	0
El Calzado $< $	0	0	0	0
El Ejido $< $	0	0	157	0

Cuadro 4.5: Matriz Origen-Destino para las paradas del Trolebús en la red dirigida.

Obtenemos una matriz Origen-Destino que respeta las direcciones de las paradas para el flujo de las personas, dependiendo del sentido en el que se desplacen.

Para las instancias modificadas de la Ecovía y el Trolebús en el escenario no dirigido, se ajustaron los valores de la matriz Origen-Destino proporcionada por el software PTV Visum [13]. Específicamente, se multiplicaron por 10 todas las entradas correspondientes a los desplazamientos

tos de las personas, aumentando así significativamente la demanda en la red de transporte, con la finalidad de incrementar la dificultad computacional de cada instancia.

Para generar la demanda en el caso de la red integrada, se empleó un algoritmo de OpenLinTim [15]. A partir de la información de embarque de personas en las respectivas paradas del sistema de transporte de Quito, el algoritmo estima el número de viajes entre todos los posibles pares Origen-Destino, es decir, pares ordenados de paradas. El procedimiento implica calcular el camino más corto entre cada par de estaciones. La distribución de los destinos de viaje para los pasajeros que embarcan en una misma estación se hace de forma aleatoria con una probabilidad, proporcional al cociente entre la demanda en la estación destino y el cuadrado de la distancia entre las estaciones de origen y destino.

#### **4.2.5. Configuración de parámetros generales en OpenLinTim**

Para cada una de las cinco instancias, se configuraron los parámetros en OpenLinTim [15], como se indica a continuación. Se ajustaron las capacidades de los vehículos del Trolebús y la Ecovía a 160 pasajeros por unidad. La velocidad de los autobuses se fijó en  $16,34km/h$  para el Trolebús y en  $18km/h$  para la Ecovía, utilizando datos oficiales de la página del transporte de pasajeros de Quito [12].

Además, se especificó la longitud de las aristas y arcos en el archivo Edges en kilómetros, el horizonte de planificación sobre el cual se trabajó fue de 60 minutos. Finalmente se configuró el modelo de minimización del tiempo de viaje por el método de generación de columnas. Los valores para varios parámetros de este modelo fueron modificados para realizar los experimentos, como se indica en la siguiente sección.

Es importante destacar que para obtener resultados del concepto de líneas en OpenLinTim [15], requiere información que se calcula en fases previas de la planificación, como un reservorio de líneas (Pool) y los costos asociados a su operación (Pool Cost), así como un archivo de cargas sobre las aristas (Load).

Cuando ya tenemos un reservorio de líneas previo, OpenLinTim [15] cuenta con un algoritmo que calcula exclusivamente los costos de operación de las líneas. Este algoritmo proporciona el nombre de la línea, su longitud y el costo asociado. En caso de no contar con un reservorio de líneas previo, también existe la opción de generarlo mediante un algoritmo auxiliar que construye todas las líneas entre pares de terminales. En la red del Trolebús y la Ecovía, por ejemplo, estas terminales son todas las paradas donde los vehículos pueden iniciar o finalizar trayectos.

Para la generación del archivo Load, que representa las cargas sobre las aristas, también se dispone de un algoritmo que calcula la carga de pasajeros por arista. Además, se pueden configurar parámetros como la frecuencia mínima y máxima permitida para cada arista.

Una vez construidas las instancias de la red de transporte de Quito, ejecutamos cuatro experimentos relacionados con el modelo de minimización de tiempos de viaje.

## **4.3. Experimentos Computacionales**

### **4.3.1. Experimento 1**

Para el primer experimento, se llevarán a cabo pruebas con los cuatro tipos de modelos formulados inicialmente: LPMT1, LPMT2, LPMT3 y LPMT4. Compararemos tanto los valores de la función objetivo como los tiempos de ejecución de los algoritmos.

Para esto, se ajustarán varios parámetros clave. Los costos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  se fijarán en 2 unidades, representando los minutos adicionales que las personas se demoran desde su llegada a la estación de origen hasta embarcar en el bus de su respectiva línea y desde la llegada del bus a su estación de destino hasta salir de la parada. Cabe señalar que en el modelo se fijan automáticamente los costos de las aristas de transferencia entre líneas, es decir las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{change}$ , como el doble de los costos de las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{change}$ . Estos costos reflejan los minutos adicionales asociados al cambio de una línea a otra dentro de la red Change & Go.

Se establecerá una cota presupuestaria suficientemente alta para permitir la operación de todas las líneas del transporte público consideradas en el reservorio en cada una de las instancias. Observaremos qué líneas y tiempos son seleccionados para cada instancia bajo estas condiciones.

### **4.3.2. Experimento 2**

Para el segundo experimento, utilizaremos el modelo que mejores resultados arrojó en el experimento anterior. Como el algoritmo de solución está basado en el esquema de generación de columnas, donde las columnas del modelo representan los caminos que siguen los pasajeros entre cada par Origen-Destino dentro de la red Change& Go, un parámetro interesante a estudiar es el número  $k$  de caminos que se colocan como columnas iniciales en el modelo con  $k \in \{1, 2, 3, 5\}$ . También fijaremos nuevamente una cota presupuestaria que abarque las líneas establecidas en cada instancia, y estableceremos los pesos de las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  en 2 unidades.

### **4.3.3. Experimento 3**

Para el tercer experimento computacional, se realizarán cambios en los pesos de las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$ . Los pesos de las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{change}$ , son automáticamente fijados por el algoritmo al doble de los pesos de las aristas en  $\mathcal{E}_{OD}$ . Los pesos en  $\mathcal{E}_{OD}$  se configurarán en 1, 2, 3 y 5, y se observará cómo cambian los valores de la función objetivo y el tiempo de ejecución del algoritmo. Para este experimento, se tomarán en cuenta los parámetros de los modelos que resultaron ser los mejores en los primeros dos experimentos.

### **4.3.4. Experimento 4**

Finalmente, en el cuarto experimento se generará el reservorio de líneas utilizando el algoritmo interno de OpenLinTim [15] llamado "Terminal to Terminal". Este algoritmo calcula todos los caminos posibles en la red de transporte, que conecten pares de terminales, donde las terminales son paradas especiales (previamente marcadas), en las que las líneas

pueden iniciar y finalizar sus trayectos. Con este enfoque, se generará un nuevo concepto de líneas que será comparado con el que se obtuvo al utilizar el reservorio de líneas preestablecidas para cada una de las instancias. Para este experimento, se fijarán nuevamente los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  a 2, se tomará un valor de  $k = 2$  para la cantidad de caminos iniciales entre cada par Origen-Destino, y se utilizará el modelo LPTM1 para cada una de las cinco instancias.

## 4.4. Resultados computacionales

### 4.4.1. Instancia TROLEBUS

**Experimento 1:** Para el primer experimento en la instancia del Trolébus en el caso dirigido, se tomará un valor de presupuesto de 315 unidades. Este valor se selecciona porque la suma de los costos de todas las líneas actuales del sistema de transporte de Quito, calculados con OpenLinTim [15] es apenas superior a este presupuesto. En el Cuadro A.1, que se encuentra en la sección de anexos, se detallan las líneas actuales con sus costos individuales establecidos por los algoritmos de OpenLinTim.

A continuación, se presentan los resultados para los cuatro modelos derivados del modelo LPMT. La información incluye el mejor valor de la función objetivo de la relajación lineal obtenida de la generación de columnas, el número de variables y restricciones para cada modelo, y el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos.

<b>Presupuesto</b>	315			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	6			
<b>Modelo</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
LPMT1	1,930,669	1,992	1,006	1.2
LPTM2	1,930,669	1,992	1,177	1.1
LPMT3	1,930,669	1,992	6,958	1.0
LPMT4	1,930,669	1,992	176,761	1.4

Cuadro 4.6: Resultados modelo LPMT para TROLEBUS.

En el Cuadro 4.6 se muestra que, usando en el reservorio todas las líneas del Trolebús disponibles en el caso dirigido, presentadas en el Cuadro 4.1, para cada modelo seleccionado se obtiene un valor igual para la función objetivo. Este valor puede interpretarse como el tiempo total que todas las personas se demoran en llegar a su destino, medido en minutos. Dividiendo este tiempo por el número total de viajes en el Trolebús, que resulta de sumar todas las componentes de la matriz Origen-Destino (77,980), se obtiene un tiempo promedio de 24.758 minutos por viaje en la red de Trolebús en Quito. Sin embargo, se observa un gran aumento en el número de restricciones para el modelo LPMT4, lo cual afectó ligeramente el tiempo de ejecución. Por otro lado, el modelo que proporciona una respuesta más rápida es el LPMT3, con un tiempo de ejecución de 1 segundo.

**Experimento 2:** Para el segundo experimento, tomamos el modelo que mejor resultado dio en el experimento anterior, en este caso el modelo LPMT3, debido a su menor tiempo de ejecución, ya que todos los modelos arrojaron el mismo valor objetivo.

<b>Modelo</b>		LPMT3		
<b>Presupuesto</b>		315		
<b>Pesos OD</b>		2		
$ \mathcal{L} $		6		
<b>k</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	1,930,669	999	6,958	0.6
2	1,930,669	1,992	6,958	1.1
3	1,930,668	2,895	6,958	1.8
5	1,930,668	4,971	6,958	4.5

Cuadro 4.7: Resultados caminos más cortos para TROLEBUS.

Como se puede observar en el Cuadro 4.7, los valores de la función objetivo no se modifican al cambiar los valores del parámetro  $k$ . Esto indica que, al aumentar el número de los caminos más cortos en la red Change & Go que se incluyen como columnas iniciales del modelo, no conseguimos mejorar la solución obtenida cuando se emplea un único camino. Esto puede deberse a la topología simple de la red de transporte del Trolebús, que considera trayectos directos y sencillos para llegar de



un punto a otro. Además, se puede observar que la diferencia en estas ejecuciones radica en el número de variables que se generan y en el tiempo de ejecución, el cual tiende a ser mayor a medida que se incluyen más caminos.

**Experimento 3:** En el tercer experimento, se realizaron cambios en los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  con el objetivo de observar las modificaciones en la función objetivo. Además, se utilizaron los parámetros que dieron mejores resultados en los experimentos uno y dos.

A continuación, se presentan los resultados para los cuatro valores correspondientes a los pesos  $\mathcal{E}_{OD}$ . La información incluye el mejor valor de la función objetivo, el tiempo de viaje promedio en minutos, el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos, el número de variables y restricciones para cada modelo, y el gap obtenido en cada caso.

<b>Modelo.</b>	LPMT3				
<b>k</b>	1				
<b>Presupuesto</b>	315				
$ \mathcal{L} $	6				
<b>Pesos OD</b>	<b>Valor Óptimo</b>	<b>T. viaje promedio</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	1,770,449	22.7	999	6,958	0.7
2	1,930,669	24.8	999	6,985	0.6
3	2,090,889	26.8	999	6,985	0.6
5	2,411,329	30.9	999	6,985	0.6

Cuadro 4.8: Resultados pesos OD para TROLEBUS.

En el cuadro anterior, podemos observar que tanto el número de variables como el de restricciones se mantiene constante en los experimentos. Sin embargo, se nota un cambio en la función objetivo, con tiempos totales de viaje crecientes conforme los pesos en las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$  aumentan. Esto es coherente, dado que estamos asignando un tiempo adicional para el embarque en la parada de origen y para el desembarque en la parada de destino. Al incrementar el tiempo que las personas tardan en realizar estos trayectos, la función objetivo se ve directamente afectada, reflejando un aumento en el tiempo total de viaje necesario para que una persona llegue a su destino.

Para el primer caso, al asignar un peso de 1 a las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ , el tiempo promedio de viaje de las personas es de 22.7 minutos. Sin embargo, al

aumentar este peso en los casos siguientes, el tiempo promedio de viaje incrementa en dos minutos por cada minuto de incremento en el peso de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ , que indica que el algoritmo siempre selecciona el mismo camino sobre la red para cada par Origen-Destino.

**Experimento 4:** En el cuarto experimento, se trabajó con el modelo LPMT1, con un reservorio con 30 líneas calculado por el algoritmo "Terminal to Terminal" de OpenLinTim [15]. Se resolvió varias veces el modelo de planificación de líneas variando el parámetro del presupuesto disponible. A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

Modelo		LPMT1			
$\mathcal{L}$		30			
(k, Pesos OD)		(2,2)			
Presupuesto	L	Valor óptimo	N. de variables	N. de restricciones	Tiempo
1,560	25	1,924,221	2,016	1,054	1.7
1,000	19	1,924,221	2,016	1,054	1.7
520	10	1,924,221	2,016	1,054	1.8
365	7	1,924,221	2,016	1,054	1.7

Cuadro 4.9: Resultados Line Pool OpenLinTim para TROLEBUS.

El Cuadro 4.9 muestra que el algoritmo de OpenLinTim [15] generó un total de 30 líneas. Al comparar la función objetivo, observamos que el tiempo de viaje total se mantiene constante conforme el presupuesto baja, aunque el número de líneas operadas disminuye, hasta llegar a 7 líneas cuando el presupuesto es de 365 unidades. Esto resulta en un tiempo promedio de viaje de aproximadamente 24.6 minutos, obtenido dividiendo el valor objetivo por el número de viajes en la red. Sin embargo, si se asigna un presupuesto menor a 365 unidades, no es posible encontrar una solución factible con las líneas generadas por OpenLinTim [15]. Es importante mencionar que, de hecho de obtener un tiempo de viaje constante a medida que el presupuesto disminuye es poco realista y revela la limitación del modelo LPMT: al no incluir capacidades en los vehículos ni frecuencias en las líneas, se asume que es posible enviar cualquier cantidad de pasajeros por una misma línea al mismo costo.

En el Cuadro A.6 se muestra la solución de las 7 líneas obtenida por OpenLinTim [15].

#### 4.4.2. Instancia ECOVIA

**Experimento 1:** Para el primer experimento en el caso de la red de Ecovía dirigida, se tomó un presupuesto de 320 unidades. Este presupuesto fue seleccionado basado en el costo de las líneas actuales presentadas en el Cuadro A.2 en la sección de anexos. A continuación, se presentan los resultados obtenidos, que incluyen el mejor valor objetivo de la relajación lineal para las cuatro versiones del modelo LPMT, el número de variables y restricciones, el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos y el gap obtenido en cada caso.

<b>Presupuesto</b>		320		
<b>Pesos OD</b>		2		
$ \mathcal{L} $		6		
<b>Modelo</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
LPMT1	3,118,116	3,340	1,683	2.6
LPTM2	3,118,116	3,340	1,905	2.5
LPMT3	3,118,116	3,340	14,995	2.6
LPMT4	3,118,116	3,340	384,855	3.3

Cuadro 4.10: Resultados modelos LPMT para ECOVIA.

En el Cuadro 4.10 se observa que usando en el reservorio todas las líneas actuales de la Ecovía presentadas en el Cuadro 4.2 para todas las versiones del modelo LPMT se obtiene el mismo valor óptimo de 3,118,116, que representa el tiempo total de viaje de los pasajeros. Al dividir este valor por el total de viajes, que es la suma de las componentes de la matriz Origen-Destino para la Ecovía (93,621), se obtiene un tiempo promedio de 33.3 minutos por viaje sobre la red de la Ecovía. Es destacable que el modelo que presentó la menor duración en su ejecución fue el modelo LPMT2 con 2.5 segundos, mientras que el que mayor duración tuvo fue el modelo LPMT4 con 3.3 segundos, como era de esperarse debido a la mayor cantidad de restricciones.

**Experimento 2:** Para el segundo experimento, tomamos el modelo que mejor resultado dio en el experimento anterior, en este caso el modelo LPMT2, debido a su menor tiempo de ejecución, ya que todos los modelos arrojaron el mismo valor objetivo. Se presenta a continuación

los resultados obtenidos al variar el número de columnas iniciales en el problema, las cuales corresponden a caminos más cortos entre pares Origen-Destino en la red Change & Go.

<b>Modelo</b>		LPMT2		
<b>Presupuesto</b>		320		
<b>Pesos OD</b>		2		
$ \mathcal{L} $		6		
<b>k</b>	<b>Valor Optimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	3,118,116	1,674	1,905	1.1
2	3,118,116	3,340	1,905	2.6
3	3,118,116	5,006	1,095	5.6
5	3,118,116	8,338	1,905	14.8

Cuadro 4.11: Resultados caminos más cortos para ECOVIA.

Como podemos observar en el cuadro anterior, modificar el número de caminos más cortos iniciales entre cada par o Origen-Destino en la red no resulta en un nuevo valor para la función objetivo; en promedio, el tiempo de viaje de una persona sigue siendo de 33.3 minutos. Sin embargo, se nota que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan considerablemente, desde 1.1 segundos, que corresponden a la generación de un solo camino más corto, hasta 14.8 segundos, que corresponden a la generación de cinco caminos más cortos entre cada par Origen-Destino en la red. El valor de la función objetivo mejora respecto al caso cuando se emplea un solo camino; esto se debe a la topología simple de la red, que considera trayectos directos y sencillos para llegar de un punto a otro.

**Experimento 3:** En el tercer experimento, se realizaron cambios en los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  con el objetivo de observar las modificaciones en la función objetivo. Además, se utilizaron los parámetros que dieron mejores resultados en los experimentos anteriores.

<b>Modelo.</b>	LPMT2				
<b>k</b>	1				
<b>Presupuesto</b>	320				
$ \mathcal{L} $	6				
<b>Pesos OD</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>T. viaje promedio</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	2,913,812	31.1	1,674	1,905	1.2
2	3,118,116	33.3	1,674	1,905	1.1
3	3,322,420	35.5	1,674	1,905	1.2
5	3,731,028	39.9	1,674	1,905	1.1

Cuadro 4.12: Resultados pesos OD para ECOVIA.

En la tabla anterior, podemos observar que al modificar los pesos en las aristas del conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$ , los valores de la función objetivo cambian considerablemente, con tiempo de viajes totales que van desde los 2,913,812 minutos a 3,731,028 minutos. A pesar de que el número de variables y restricciones se mantiene constante, el tiempo promedio de viaje experimenta un aumento significativo.

Para calcular el tiempo promedio de viaje, se divide el valor objetivo total entre el número total de viajes, que se obtiene sumando todas las entradas de la matriz Origen-Destino (93,621). Con un peso de 1 en las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ , el tiempo promedio de viaje es de aproximadamente 31.1 minutos. Sin embargo, al aumentar este peso en los casos siguientes, el tiempo promedio de viaje incrementa en dos minutos por cada minuto de cambio de peso en las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ . Se espera este comportamiento, ya que el aumento corresponde al incremento en la duración del camino (que contiene 2 aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ ). Esto indica además que el algoritmo posiblemente está seleccionando el mismo camino para cada par Origen-Destino en la solución.

**Experimento 4:** Para el cuarto experimento, se trabajó con el modelo LPMT1 con un reservorio de 141 líneas calculado por el algoritmo "Terminal to Terminal" de OpenLinTim [15]. Se resolvió varias veces el modelo de planificación de líneas modificando los valores de presupuesto disponible y se fijaron los pesos de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$  al igual que el parámetro  $k$  en dos unidades. A continuación, se presentan los resultados:

<b>Modelo</b>		LPMT1			
$\mathcal{L}$		141			
<b>(k, Pesos OD)</b>		(2,2)			
<b>Presupuesto</b>	$L$	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
7,158	110	3,084,237	3,473	1,949	8.7
3,579	40	3,084,237	3,473	1,949	8.5
1,500	28	3,084,237	3,473	1,949	8.7
690	12	3,084,237	3,473	1,949	8.7

Cuadro 4.13: Resultados Line Pool OpenLinTim para ECOVIA.

El cuadro anterior muestra que, al generar un reservorio de 141 líneas, utilizar un presupuesto de 690 unidades monetarias y seleccionar 12 líneas dentro del sistema de transporte de la Ecovía, se obtiene el mismo tiempo total de viaje que seleccionar 110 líneas con un presupuesto de 7,158 unidades monetarias. Aquí nuevamente, se evidencia la limitación del modelo LPMT. Al no incluir las capacidad de los vehículos ni las frecuencias para las líneas, se asume que es posible enviar cualquier cantidad de pasajeros por una misma línea al mismo costo, lo cual es poco realista.

Con un presupuesto de 690 unidades, se logra un tiempo promedio de viaje de 32.9 minutos por persona, calculado dividiendo el valor objetivo de 3,084,237 minutos entre los 93,621 viajes realizados. Esta mejora en el tiempo de viaje representa una ligera reducción en comparación con las líneas actuales establecidas en Quito, utilizadas como reservorio en el Experimento 1, donde el tiempo promedio era de aproximadamente 33.3 minutos.

Sin embargo, la mejora no es significativa considerando que se utilizaron 12 líneas del reservorio con un presupuesto de 690 unidades en el experimento actual, mientras que en el experimento 1 se alcanzó un tiempo similar con seis líneas del reservorio (6) y un presupuesto de 320 unidades.

En el Cuadro A.7 ubicado en la sección de anexos, se muestra la solución de 12 líneas obtenida por OpenLinTim [15].

### 4.4.3. Instancia TROLEBUS-M

Se presentan a continuación los resultados computacionales correspondientes a la instancia no dirigida del Trolebús modificado. Se llevarán a cabo experimentos sobre el nuevo reservorio de líneas para el Trolebús presentados en el Cuadro 4.3.

**Experimento 1:** Para el primer experimento, se estableció un presupuesto de 360 unidades monetarias, que resulta ser suficiente para seleccionar un número mínimo de líneas y asegurar que el problema tenga soluciones factibles. En el Cuadro A.3 en anexos, se detallan las líneas utilizadas con sus costos individuales establecidos.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los distintos modelos derivados del modelo LPMT. La información incluye el mejor valor de la función objetivo de la relajación lineal obtenida de la generación de columnas, el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos, el número de variables y restricciones para cada modelo,

<b>Presupuesto</b>	360			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	10			
<b>Modelo</b>	<b>Valor Óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
LPMT1	19,832,319	1,994	1,015	1.1
LPTM2	19,832,319	1,994	1,106	1.1
LPMT3	19,832,319	1,994	10,945	1,1
LPMT4	19,832,319	1,994	101,399	1.3

Cuadro 4.14: Resultados modelo LPMT para TROLEBUS-M.

Podemos observar en el Cuadro 4.14, el valor objetivo es el mismo para las cuatro versiones del modelo LPMT, lo que indica que el tiempo total de viaje se mantiene igual. De hecho, al examinar las soluciones para los distintos modelos, se determinó que todas consisten del mismo plan de líneas  $L = \{T1, T2, T3, T4, T7, T9, T10\}$ . La principal diferencia entre los modelos radica en el número de restricciones, que aumenta conforme se cambian los modelos. No obstante, el tiempo de ejecución es muy similar en todos los casos.

Los resultados obtenidos para cada modelo, al dividir el valor objetivo total entre el número de viajes en la matriz Origen-Destino modificada, que es 779,800, proporcionan un tiempo promedio de 25.43 minutos por viaje en la nueva red modificada.

**Experimento 2:** Para el segundo experimento, utilizaremos el modelo LPMT1, que fue el modelo que mejores resultados dio en el experimento anterior debido a su mayor velocidad de ejecución. Analizaremos ahora los efectos de variar el parámetro  $k$  que controla el número de caminos entre cada par Origen-Destino en la red Change & Go a usar como columnas iniciales en el modelo.

<b>Modelo</b>	LPMT1			
<b>Presupuesto</b>	360			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	10			
<b>k</b>	<b>Valor Óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	Infactible			
2	19,832,319.10	1,994	1,015	1.1
3	19,832,319.10	2,984	1,015	1.8
5	19,832,319.10	4,964	1,015	4.5

Cuadro 4.15: Resultados caminos más cortos TROLEBUS-M.

Como se puede observar en el cuadro anterior, usando el reservorio de líneas del Cuadro 4.3 no fue posible encontrar una solución factible si se inicializan las columnas con un solo camino más corto. Sin embargo, para la generación de 2, 3 y 5 caminos más cortos, sí se encontró una solución. Las líneas seleccionadas del reservorio de líneas en este casos son las mismas que en el experimento anterior. Además, el tiempo promedio de viaje se mantiene constante en promedio de 25.43 minutos por viaje.

**Experimento 3:** En el tercer experimento, se realizaron cambios en los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  con el objetivo de observar las modificaciones en la función objetivo. Además, se utilizaron los parámetros que dieron mejores resultados en los experimentos uno y dos.



<b>Modelo.</b>		LPMT1			
<b>k</b>		1			
<b>Presupuesto</b>		360			
$ \mathcal{L} $		10			
<b>Pesos OD</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>T. viaje promedio</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	17,909,119	22.9	1,994	1,015	1.1
2	19,832,319	25.4	1,994	1,015	1.0
3	21,755,519	27.9	1,994	1,015	0.5
5	25,601,919	32.8	1,994	1,015	0.5

Cuadro 4.16: Resultados pesos OD TROLEBUS-M.

De manera similar a las instancias anteriores, se observa que el valor objetivo aumenta a medida que los pesos de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$  se incrementan. En esta instancia, las líneas seleccionadas del reservorio de líneas coinciden con las del Experimento 1 y 2. Los resultados muestran un incremento en el valor objetivo de 17,909,119 a 25,601,919. Al dividir estos valores por el total de viajes en la matriz Origen-Destino (779,800), se obtiene un tiempo promedio de viaje que varía de 22.9 minutos a 32.8 minutos. Sin embargo, a diferencia de las otras instancias, por cada unidad de incremento en el peso de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ , se observa un incremento de cerca de 2,5 minutos en el tiempo promedio de viaje. Si asumimos que las rutas asignadas a los usuarios se mantienen constantes (como parece ser el caso en los experimentos anteriores), esto indicaría la existencia de transferencias en algunas de las rutas. Observar que si una ruta contiene un arco de transferencia, su duración total aumentará en 4 unidades por cada unidad de aumento en el peso de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ . Así, el incremento observado en el tiempo de viaje promedio podría explicarse si, por ejemplo, el 25 de las rutas tienen una transferencia y el 75 de las rutas no tienen transferencias.

Además, se observa que el tiempo de ejecución se reduce a medida que aumentan los pesos en la red. Esto sugiere que, aunque el tiempo de viaje total aumenta con mayores pesos, el tiempo de ejecución del algoritmo mejora.

**Experimento 4:** Para el cuarto experimento, se trabajó con el modelo LPMT1, con un reservorio de 6 líneas calculado por el algoritmo "Terminal to Terminal" del software OpenLinTim [15], se resolvió varias veces el problema de planificación modificando los presupuestos disponibles. A

continuación se presentan los resultados:

<b>Modelo</b>		LPMT1			
$ \mathcal{L} $		6			
<b>(k, Pesos OD)</b>		(2,2)			
<b>Presupuesto</b>	$ L $	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
310	6	19,102,919	1,992	1,007	1.1
250	4	19,102,919	1,992	1,007	1
150	2	19,102,919	1,992	1,007	1.1

Cuadro 4.17: Resultados Line Pool OpenLinTim TROLEBUS-M.

Con un presupuesto de 310 unidades monetarias, es posible operar todas las seis líneas del reservorio. Sin embargo, los resultados muestran que con un presupuesto menor de 150 unidades monetarias, se obtiene el mismo tiempo de viaje promedio de 14.4 minutos operando únicamente dos líneas, lo cual contradice la intuición. Nuevamente, como en instancias anteriores, cabe destacar la limitación del modelo LPMT de no incluir las capacidades en los vehículos ni las frecuencias para las líneas, asumiendo que una cantidad ilimitada de pasajeros pueden viajar en un mismo vehículo.

En el Cuadro A.8 en la sección de anexos, se muestra la solución de las 2 líneas que obtuvo OpenLinTim [15].

#### 4.4.4. Instancia ECOVIA-M

**Experimento 1:** Para el primer experimento, utilizaremos las líneas del sistema de la Ecovía presentadas en el Cuadro 4.3. Estableceremos un presupuesto mínimo de 515 unidades monetarias para que las líneas puedan ser seleccionadas en las soluciones. Los costos individuales de las líneas se muestran en Cuadro A.4 en la sección de anexos.

<b>Presupuesto</b>	515			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	14			
<b>Modelo</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
LPMT1	32,823,570	3,044	1,550	2.3
LPTM2	32,823,570	3,044	1,661	2.4
LPMT3	32,823,570	3,044	22,830	2.3
LPMT4	32,823,570	3,044	191,661	2.7

Cuadro 4.18: Resultados modelos LPMT ECOVIA-M.

En el cuadro anterior, se pueden observar los resultados para los cuatro modelos aplicados al sistema de la Ecovía. Todos los modelos seleccionan las mismas líneas, excluyendo las rutas E2, E6, E13 y E14. Además, todos los modelos obtienen el mismo valor objetivo de 32,823,570 minutos totales de viaje. Dividiendo este valor por el total de viajes en la red modificada de Ecovía (936,210), se obtiene un tiempo promedio de viaje aproximadamente 35.06 minutos por persona.

Con base en estos resultados, concluimos que el modelo LPMT1 es el más adecuado para esta instancia, ya que ofrece el menor tiempo de ejecución y presenta un número de restricciones menor en comparación con los otros modelos.

**Experimento 2:** Para el segundo experimento, utilizamos el modelo que obtuvo mejores resultados en el primer experimento, en este caso el modelo LPMT1. En esta fase, modificamos el parámetro  $k$  que controla el número de rutas entre cada par Origen-Destino usadas como columnas iniciales en el algoritmo y comparamos las soluciones obtenidas. A continuación, se presentan los resultados de las distintas configuraciones.

<b>Modelo</b>	LPMT1			
<b>Presupuesto</b>	515			
<b>Pesos OD</b>	2			
<b>k</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	Infactible			
2	32,823,570	3,044	1,550	2.2
3	32,823,570	4,553	1,550	4.8
5	32,823,570	7,571	1,550	13.1

Cuadro 4.19: Resultados caminos más cortos ECOVIA-M.

En el Cuadro 4.19 podemos observar que las modificaciones en la generación de caminos más cortos resultaron en los mismos valores objetivos para cada configuración. Sin embargo, hay una diferencia en la selección de las líneas: en el caso con  $k = 1$ , no se encontró una solución factible, mientras que, para los demás casos, se presentan a continuación las líneas seleccionadas.

<b>N. caminos</b>	<b>Selección de líneas (<math>L</math>)</b>
k=2	E1, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E11, E12
k=3	E1, E4, E5, E8, E9, E10, E11, E12, E14
k=5	E1, E3, E5, E10, E11, E12

Cuadro 4.20: Selección de líneas para caminos más cortos ECOVIA-M.

Notar que al aumentar el número de caminos disponibles para los pasajeros entre cada par Origen-Destino, el algoritmo tiene disponibles más opciones para cubrir la demanda, lo que implica que, en general, requerirá seleccionar una menor cantidad de líneas seleccionadas, ya que estas pueden recorrer una mayor extensión en la red de transporte.

**Experimento 3:** En el tercer experimento, se realizaron cambios en los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  con el objetivo de observar las modificaciones en la función objetivo. Además, se utilizaron los parámetros que mejor ajustaron los modelos de los experimentos uno y dos.

<b>Modelo.</b>	LPMT1				
<b>k</b>	2				
<b>Presupuesto</b>	515				
<b>Pesos OD</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>T. viaje promedio</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	29,969,130	32	3,044.00	1,550.00	2.4
2	32,823,570	35.1	3,044.00	1,550.00	2.4
3	35,678,010	38.1	3,044.00	1,550.00	2.3
5	41,386,890	44.2	3,044.00	1,550.00	2.3

Cuadro 4.21: Resultados pesos OD red de ECOVIA-M.

Podemos ver en la tabla anterior cómo los valores objetivos aumentan conforme los pesos de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  se incrementan. Al igual que en las instancias previas, el tiempo de viaje aumenta con el incremento de los pesos OD.

Para un peso de 1, al dividir el valor objetivo por 936,210, obtenemos un tiempo promedio de 32 minutos por viaje. En cambio, para un peso de 5, el tiempo promedio de viaje resulta en 44.2 minutos. Esto evidencia que al aumentar los pesos OD, el tiempo de viaje promedio también se incrementa considerablemente

Para este modelo, se presentan las soluciones de las líneas escogidas para cada una de las configuraciones de pesos  $\mathcal{E}_{OD}$ . Se obtuvieron distintos resultados para cada configuración de pesos, lo que refleja cómo la elección de líneas se adapta según las variaciones en los pesos OD.

<b>Pesos OD</b>	<b>Selección de líneas (<math>L</math>)</b>
1	E1, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E12
2,3	E1, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E11, E12
5	E1, E3, E4, E6, E8, E10, E11, E12, E13, E14

Cuadro 4.22: Selección de líneas OpenLinTim para ECOVIA-M.

**Experimento 4:** En el cuarto experimento se utilizó un reservorio de 15 líneas calculado por el algoritmo "Terminal to Terminal" de OpenLinTim [15], se trabajó con el modelo LPMT1 y se resolvió el problema de planificación de líneas modificando los presupuestos disponibles. Se presentan a continuación los resultados obtenidos:

<b>Modelo</b>		LPMT1			
$\mathcal{L}$		15			
<b>(k, Pesos OD)</b>		(2,2)			
<b>Presupuesto</b>	$L$	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
771	14	30,859,530	3,057	1,552	2.3
620	12	30,859,530	3,057	1,552	2.2
415	8	30,859,530	3,057	1,552	2.3

Cuadro 4.23: Resultados Line Pool OpenLinTim ECOVIA-M.

En el cuadro anterior, observamos que podemos alcanzar el mismo valor objetivo utilizando una cantidad de 8 líneas con un presupuesto de 415 unidades monetarias. Esto representa una mejora económica significativa en comparación con una selección de 14 líneas con un presupuesto de 771 unidades. Sin embargo, esto es posible debido a la limitación del modelo LPMT; al no considerar frecuencias para las líneas ni capacidades para los vehículos, se asume que es posible enviar cualquier cantidad de pasajeros por una misma línea al mismo costo lo cual.

El tiempo de viaje promedio por persona, calculado al dividir el valor objetivo de 30,859,530 por el total de viajes (936,210), resulta aproximadamente un promedio de 32.9 minutos por viaje. Comparando esto con el Experimento 1, donde el tiempo promedio fue de 35.06 minutos, obtenemos una mejora de 3.15 minutos por viaje. Además, logramos reducir el presupuesto de 515 unidades a 415 unidades monetarias.

En Cuadro A.9 en la sección de anexos se muestra la solución de las 8 líneas que se obtuvieron con OpenLinTim [15].

#### 4.4.5. Instancia INTEGRADO

**Experimento 1:** Para el primer experimento, se ha fijado un presupuesto de 567 unidades monetarias para la selección de las líneas. Los costos individuales de cada línea en el sistema Integrado se muestran en el Cuadro A.5 en la sección de anexos.

Los resultados obtenidos para los modelos LPMT se presentan a continuación.

<b>Presupuesto</b>	567			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	9			
<b>Modelo</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
LPMT1	3,116,089	4,627	2,331	3.9
LPTM2	3,116,089	4,627	2,520	4.1
LPMT3	3,116,089	4,627	27,708	3.9
LPMT4	3,116,089	4,627	463,920	4.7

Cuadro 4.24: Resultados modelos LPMT INTEGRADO.

Como se puede observar en el cuadro anterior, seleccionando todas las rutas actuales del sistema integrado, para todos los modelos se obtiene el mismo valor objetivo, que representa el tiempo total de viaje de las personas en el sistema integrado de Quito. Sin embargo, se presentan diferencias en el tiempo de ejecución de los algoritmos, siendo el modelo LPMT3 el más rápido. Dividiendo el valor objetivo por la cantidad total de viajes en la red combinada del Trolebús y Ecovía (171,601), obtenemos un tiempo de viaje promedio de 18.15 minutos por persona.

**Experimento 2:** Para el segundo experimento, utilizaremos el modelo LPMT3, que fue mas eficiente en tiempo en el experimento anterior. Realizamos pruebas cambiando el parámetro  $k$  que controla el número de caminos entre cada para Origen-Destino empleados como columnas iniciales, y reportamos los resultados a continuación.

<b>Modelo</b>	LPMT3			
<b>Presupuesto</b>	567			
<b>Pesos OD</b>	2			
$ \mathcal{L} $	9			
<b>k</b>	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
1	3,116,089	2,319	27,708	1.5
2	3,116,089	4,627	27,708	3.8
3	3,116,089	6,935	27,708	8.4
5	3,116,089	11,551	27,708	23.1

Cuadro 4.25: Resultados caminos más cortos INTEGRADO.

Como se observa en la tabla anterior, obtenemos un tiempo promedio de 18.15 minutos en todos los casos, seleccionando todas las líneas actuales del sistema integrado como en el Experimento 1. Sin embargo, notamos que cuando  $k = 1$ , el tiempo de ejecución es menor y el número de variables es reducido, mientras se mantiene el mismo valor objetivo que en las otras configuraciones de caminos más cortos.

**Experimento 3:** En el tercer experimento, utilizaremos los parámetros que demostraron el mejor rendimiento en los Experimentos 1 y 2. Además, se modificará el peso de las aristas en el conjunto  $\mathcal{E}_{OD}$  para observar cómo afectan los cambios en la función objetivo.

Modelo.		LPMT3			
k		1			
Presupuesto		567			
$\mathcal{L}$		9			
Pesos OD	Valor óptimo	T. viaje promedio	N. de variables	N. de restricciones	Tiempo
1	2,627,576	15.31	2,319	27,708	1.50
2	3,116,089	18.16	2,319	27,708	1.50
3	3,604,581	21.01	2,319	27,708	1.40
5	4,581,494	26.70	2,319	27,708	1.40

Cuadro 4.26: Resultados modelos LPMT3 con diferentes valores de pesos OD INTEGRADO.

En la tabla anterior, se observa que al aumentar los pesos de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$  de 1 a 5, el tiempo total de viaje aumenta de 2,627,576 minutos a 4,581,494 minutos. Esto implica un cambio en el tiempo promedio de viaje por persona, que pasa de 15,31 minutos a 26,70 minutos. Esto es coherente, dado que estamos asignando un tiempo adicional para el embarque en la parada de origen y para el desembarque en la parada de destino.

El incremento observado en el tiempo de viaje promedio es en cada caso ligeramente superior a 2,85 minutos por cada unidad de aumento en el peso de las aristas  $\mathcal{E}_{OD}$ . Esto puede indicar la existencia de algunas rutas con transferencias en la solución, aunque al ser la diferencia menor que para la instancia ECOVIA-M, son necesarios más experimentos antes de establecer conclusiones.

**Experimento 4:** Para el cuarto experimento, se utilizó el reservorio de 120 líneas generado por el algoritmo "Terminal to Terminal" de OpenLinTim [15], se trabajó con el modelo LPMT1 y se resolvió el problema



de planificación de líneas modificando los presupuestos disponibles. A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

<b>Modelo</b>		LPMT1			
$\mathcal{L}$		120			
<b>(k, Pesos OD)</b>		(2,2)			
<b>Presupuesto</b>	$L$	<b>Valor óptimo</b>	<b>N. de variables</b>	<b>N. de restricciones</b>	<b>Tiempo</b>
6,310	111	2,844,571	4,436	2,399	11.3
3,150	37	2,844,571	4,436	2,399	11.3
1,500	28	2,844,571	4,436	2,399	12.6
900	17	2,844,571	4,436	2,399	11.4

Cuadro 4.27: Resultados Line Pool OpenLinTim INTEGRADO.

Como se observa en el cuadro anterior, OpenLinTim [15] generó un total de 120 líneas entre las terminales de la red integrada. El valor objetivo permanece constante al reducir el presupuesto. Notamos que, al seleccionar 17 líneas, se obtiene el mismo tiempo de viaje promedio que al utilizar las 111 líneas propuestas en la solución con un presupuesto de 6,310 unidades monetarias. Sin embargo, este resultado es posible debido a la limitación del modelo LPMT, al no considerar capacidades para los vehículos ni frecuencias para las líneas.

En el Cuadro A.10 en la sección de anexos se muestra la solución de las 17 líneas y las secuencias de las terminales que se obtuvieron de OpenLinTim [15].

# Capítulo 5

---

## Conclusiones y recomendaciones

---

1. Dada la estructura simple de la red de transporte de Quito para el Trolebús y la Ecovía, el segundo experimento para cada instancia demostró que el modelo puede resolver eficientemente el problema de minimización de tiempo, ya que en la mayoría de los casos requiere solo un camino para enrutar a los pasajeros sobre la red Change & Go. Esto significa que basta con utilizar los caminos más cortos, lo cuales son los sea más eficientes en términos de tiempo.
2. Gracias a los experimentos realizados en las cinco instancias, se ha demostrado que es posible alcanzar tiempos de viaje promedio eficientes con un número reducido de líneas y un presupuesto establecido. Por ejemplo, en algunos casos, se pudo encontrar un tiempo de viaje promedio eficiente sin necesidad de seleccionar todas las líneas obtenidas mediante OpenLinTim [15]. Esto sugiere que, específicamente en la red de Quito, debido a su simplicidad, una elección cuidadosa de líneas puede ofrecer una solución óptima en tiempos de viaje. Sin embargo, es de suma importancia tener en cuenta que el modelo no considera las capacidades de los vehículos ni las frecuencias de las líneas, asumiendo que se pueden mandar pasajeros por las mismas líneas de forma ilimitada, lo cual no es realista. Por lo tanto, se requieren hacer nuevos experimentos con un modelo que incluya frecuencias antes de poder establecer conclusiones definitivas.

3. Se pudieron observar cambios drásticos en los resultados de los tiempos al utilizar redes dirigidas y no dirigidas. Esto se debe a que, en el caso dirigido, se contemplan las longitudes de aristas en ambos sentidos, lo que modifica el tiempo de viaje de un pasajero que se mueve en la red y hace que la planificación de líneas sea más realista. En cambio, en el caso no dirigido, se asume una simetría tanto en la ida como en la vuelta, lo que claramente afecta los resultados al simplificar las variaciones en los tiempos de viaje para cada persona.
4. El modelo de planificación de líneas para minimizar los tiempos de viaje puede ser un gran método para encontrar, al menos en primera instancia, líneas que enruten a los pasajeros de la mejor forma y evitar largos tiempos de trayecto. Sin embargo, la formulación utilizada tiene la limitante de no contar con una restricción para las frecuencias, ni para las capacidades de los buses, lo que le impide capturar la realidad adecuadamente. El modelo LPMT asume que todos los pasajeros que se suben en alguna parada pueden ser transportados por las aristas sin ningún problema, lo cual no siempre refleja la realidad del transporte público, donde es importante tomar en cuenta la capacidad y la frecuencia de los vehículos. Un trabajo futuro podría considerar una formulación de modelo con frecuencias de líneas y capacidades de vehículos, para lo cual se debería abordar el problema del incremento en la complejidad computacional.
5. Como podemos observar en la mayoría de los experimentos para cada una de las cinco instancias, generar un reservorio de líneas mediante el software OpenLinTim ofrece una solución mejor en términos de reducción del tiempo de viaje promedio de las personas. Sin embargo, nos enfrentamos al problema de requerir una mayor cantidad de presupuesto, el cual no tenemos previamente establecido por falta de información sobre los costos de operación verdaderos en los casos presentados. Adicionalmente, hay que considerar que no cualquier estación puede servir como terminal de una línea, por lo que cualquier reservorio de líneas propuesto debería ser previamente analizado desde un punto de vista técnico antes de que pueda ser utilizado en el entorno de una aplicación práctica.

6. Se recomienda al usuario que trabaje con el software OpenLinTim la verificación exhaustiva de los resultados obtenidos. Es importante observar los códigos de libre acceso y estar al tanto de las actualizaciones, ya que, al tratarse de versiones públicas y gratuitas, podrían presentar desactualizaciones o pequeños fallos. Estos problemas pueden requerir ajustes y correcciones, como se evidenció en el caso del presente trabajo de integración curricular.

---

## Referencias bibliográficas

---

- [1] Ralf Borndörfer, Martin Grötschel, and Marc E Pfetsch. A column-generation approach to line planning in public transport. *Transportation Science*, 41(1):123–132, 2007.
- [2] Ralf Borndörfer, Heide Hoppmann, and Marika Karbstein. A configuration model for the line planning problem. In *ATMOS-13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems-2013*, volume 33, pages 68–79. Schloss Dagstuhl—Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013.
- [3] Michael Bussieck. *Optimal lines in public rail transport*. PhD thesis, Univ.-Bibl., 1998.
- [4] Michael R Bussieck, Peter Kreuzer, and Uwe T Zimmermann. Optimal lines for railway systems. *European Journal of Operational Research*, 96(1):54–63, 1997.
- [5] M.T. Claessens, N.M. van Dijk, and P.J. Zwaneveld. Cost optimal allocation of rail passenger lines. *European Journal of Operational Research*, 110(3):474–489, 1998.
- [6] George B Dantzig and Philip Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations research*, 8(1):101–111, 1960.
- [7] Hartmut Dienst. *Linienplanung im spurgeführten Personenverkehr mit Hilfe eines heuristischen Verfahrens*. Institut für Verkehr, Eisenbahnwesen und Verkehrssicherung Technische . . . , 1978.
- [8] FICO® Xpress Optimization. Fico, Xpress Solver, 2024.

- [9] Jan-Willem Goossens. Models and algorithms for railway line planning problems. *Universiteit Maastricht, Maastricht*, 2004.
- [10] Gurobi Optimization, LLC. Gurobi Optimizer Reference Manual, 2024.
- [11] Jonas Harbering. Delay resistant line planning with a view towards passenger transfers. *Top*, 25(3):467–496, 2017.
- [12] Pasajeros Quito. Sitio web oficial. <https://www.pasajerosquito.gob.ec>. Consultado el 13 de julio de 2024.
- [13] PTV Group. Ptv visum: Planificación de transporte. <https://www.ptvgroup.com/es/productos/ptv-visum>, 2024. Consultado: 2024-07-15.
- [14] C.B. Quack. Bus line planning. Master’s thesis, University of Delft, 2003.
- [15] P. Schiewe, A. Schöbel, S. Jäger, S. Albert, U. Baumgart, C. Biedinger, V. Grafe, S. Roth, A. Schiewe, F. Spühler, M. Stinzendörfer, and R. Urban. Lintim - integrated optimization in public transportation. <https://www.lintim.net>, 2023.
- [16] Anita Schöbel. Line planning in public transportation: models and methods. *OR spectrum*, 34(3):491–510, 2012.
- [17] Anita Schöbel and Susanne Scholl. Line Planning with Minimal Traveling Time. In Leo G. Kroon and Rolf H. Möhring, editors, *5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways (ATMOS’05)*, volume 2 of *Open Access Series in Informatics (OA-SIcs)*, pages 1–16, Dagstuhl, Germany, 2006. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik.
- [18] Susanne Scholl. *Customer-oriented line planning*. Phd thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2005.
- [19] Carsten Simonis and Henning Wall. Omnibusnetze zur erschließung von verdichtungsräumen und deren randzonen. *FORSCH STRASSENBAU U STRASSENVERKEHRSTECH*, (317), 1980.