ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

SIMULACION DE LA MAQUINA DE INDUCCION TRIFASICA MEDIANTE EL METODO DEL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE.

EDDY CESAR COBA RUBIO

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN LA ESPECIALIZACION DE INGENIERIA ELECTRONICA EN LA ESCUELA POLITECNICA NACIONAL.

QUITO - ECUADOR
Julio-1987

Certifico que el presente trabajo fue realizado en su totalidad por el Sr. Eddy Cesar Coba Rubio, bajo mi dirección.

Ing. Milton Toapanta H.

Julio 1987

AGRADECIMIENTO

Al Sr. Ing. Milton Toapanta , profesor de la Escuela Politécnica Nacional,por su dirección en este trabajo.

INDICE DE MATERIAS

		PAG
CAPITULO I :	LA MAQUINA DE INDUCCION.	
1.1.	Introducción	1
1.2	Ecuaciones de la máquina trifásica de inducción en variables a,b,c.	4
1.3	Ecuaciones de la máquina trifásica de inducción expresadas en un sistema arbitrario de referencia .	12
1.4	Voltajes de cualquier forma de onda periódica aplicados al estator.	24
CAPITULO II :	METODO DE SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE.	
2.1	Consideraciones generales.	34
2.2	Desarrollo matemático.	38
2.2.1	Ecuaciones de tranformación a un sistema de referencia múltiple :	38
2.2.1.a	Ecuaciones de voltajes.	38
2.2.1.b	Ecuaciones de corrientes.	54
2.2.1.c	Ecuación de Torque.	64
2.3	Transformación de las ecuaciones de un sistema de referencia múltiple,a un sistema de referencia :	71
2.3.1	Rotando en sincronismo.	71
2.3.2	Fija en el estator.	75
2.3.3	Fija en el rotor.	78

2.4	Transformación a variables de fase a,b,c.	83
2.5	Metodología general de la aplicación del método del sistema de referencia múltiple.	86
2.6	Evaluacón de pérdidas.	90
CAPITULO III :	SIMULACION DIGITAL.	
3.1	Consideraciones generales.	96
3.2	Formulación del modelo.	97
3.3	Diagramas de flujo.	101
3.4	Descripción del programa.	116
CAPITULO IV :	EJEMPLOS DE APLICACION Y RESULTADOS.	
4.1	Ejemplos de aplicación . Analisis y comparación de los resultados obtenidos	123
4.a	Estado estable.	
4.a.1	Operación balanceada con fuentes sinusoidales.	124
4.a.2	Operación balanceada con fuentes no sinusoidales	143
4.b	Operación desbalanceada.	163
4.b.1	Operación desbalanciada con fuentes sinusoidales	163
	Perdidas	192
	CONCLUCIONES Y RECOMENDACIONES.	193
APENDICE :	- Manual de uso del programa.	
	- Objetivos	
	- Nomenclatura	
	- Forma de proporcionar los datos al programa.	
	- Listados del programa.	

C A P I T U L O I

1.1. INTRODUCCION

Las máquinas de inducción se han constituído en las más utilizadas, debido a sus características especiales que las hacen convenientes para los diversos usos tanto industriales como domésticos. Así en el campo industrial se han desarrollado nuevos métodos en el área de máquinas eléctricas que involucran fuentes de alimentación no sinusoidales. En las máquinas se pueden presentar condiciones desbalanceadas que pueden ocasionar graves daños en los equipos, condiciones que aleatoriamente se dan y para lo cual los equipos de control de dichas máquinas deben estar diseñados de tal forma de tomar en cuenta dichas contingencias.

En años anteriores se han desarrollado trabajos de tesis referidos al comportamiento de motores polifásicos de inducción analizados mediante el método de las componentes simétricas el cual permite el estudio cuando la máquina está alimentada con fuentes no sinusoidales e inclusive la operación desbalanceada. Otros trabajos han realizado una simulación de la máquina de inducción en un sistema de coordenadas arbitrarias de referencia mediante el cual se ha estudiado tanto el estado transitorio como el estado estable de la máquina de inducción pero alimentada con fuentes sinusoidales.

El presente trabajo está encaminado al estudio a velocidad

constante y en el estado estable de una máquina de inducción trifásica simétrica con voltajes no sinusoidales aplicados al estator cuya forma de onda sea periódica, mediante el método de Sistemas de Referencia Múltiple.

En éste análisis no serán usadas las componentes simétricas - que introducen el uso de fasores e impedancias complejas.

En cambio, se introduce la teoría de estructuras de referencia múltiple, en la cual se prescinde del uso de fasores e impedancias complejas y más bien, es utilizada la teoría de circuitos DC para determinar el desempeño de la máquina de inducción, en lo que se refiere al análisis en estado estable de operación no balanceada y no sinusoidal las cuales antes estaban limitadas al estudio utilizando el método de las componentes simétricas.

El método del sistema de referencia múltiple es realizable mediante la construcción de un modelo matemático basado en la transformación del sistema de ecuaciones de fase de la máquina, a otro sistema de ejes arbitrarios de referencia q, d, o, a partir del cual y previa la descomposición en series de Fourier de cada una de las ondas de voltaje de entrada aplicadas al estator, se obtienen las ecuaciones en una estructura de referencia arbitraria luego de lo cual aplicamos el principio de superposición para obtener el desempeño de la máquina trifásica de inducción.

El modelo matemático antes mencionado se lo implementará en un computador digital APPLE 11c y permitirá analizar el comportamiento en

el estado estable y a velocidad constante de una máquina de inducción trifásica simétrica en los modos de operación NO balanceada y NO sinusoidal en lo que respecta a voltaje, corriente y torque.

El programa a desarrollarse permitirá que el usuario ingrese como datos la onda periódica de cada fase en forma de una función en el rango de 0 - 2π, y el programa las descompondrá en series de Fourier y éstos resultados se los utilizará en el programa principal para procesarlos y entregar los resultados.

El presente trabajo se lo desarrollará de la siguiente manera:

En el capítulo I se describirá la máquina de inducción trifásica en un sistema arbitrario de referencia q, d, o.

En el capítulo II se describe matemáticamente el método del sistema de referencia múltiple que es el que compete a éste trabajo de tesis.

En el capítulo III se implementa el modelo matemático para la simulación digital y su explicación.

En el capítulo IV se realizarán ejemplos de aplicación y se analizará y comparará los resultados de operación en estado estable para los casos no sinusoidal y desbalanceado.

1.2. ECUACIONES DE LA MAQUINA TRIFASICA DE INDUCCION EN VARIABLES a, b, c. (1, 3, 9, 11)

Para el análisis se considerará una máquina de inducción trifásica lineal simétrica idealizada en donde:

1) El entrehierro sea uniforme

2) El circuito magnético sea lineal

3) Los devanados del estator sean idénticos, y que sean distribuídos de tal manera que produzcan una onda de fmm sinusoidal en el espacio (es decir, que se desprecia el contenido de armónicos de la onda de fmm).

4) Que el cambio en el valor de la resistencia debido a la temperatura y a cambios de frecuencia sea despreciable.

5) Devanados del rotor de la máquina simétrica sean idénticos y distribuídos de tal forma que produzcan una onda de fmm en el rotor sinusoidal y que tenga el mismo número de polos que la del estator.

Una vez tomado en cuenta lo anteriormente expuesto, se tomará para el desarrollo una máquina trifásica de dos polos como la de la figura 1.1. en la que se observa que el ángulo de desface entre cada devanado tanto del rotor como del estator es 120° y el ángulo entre los dos conjuntos de devanados θ_r.

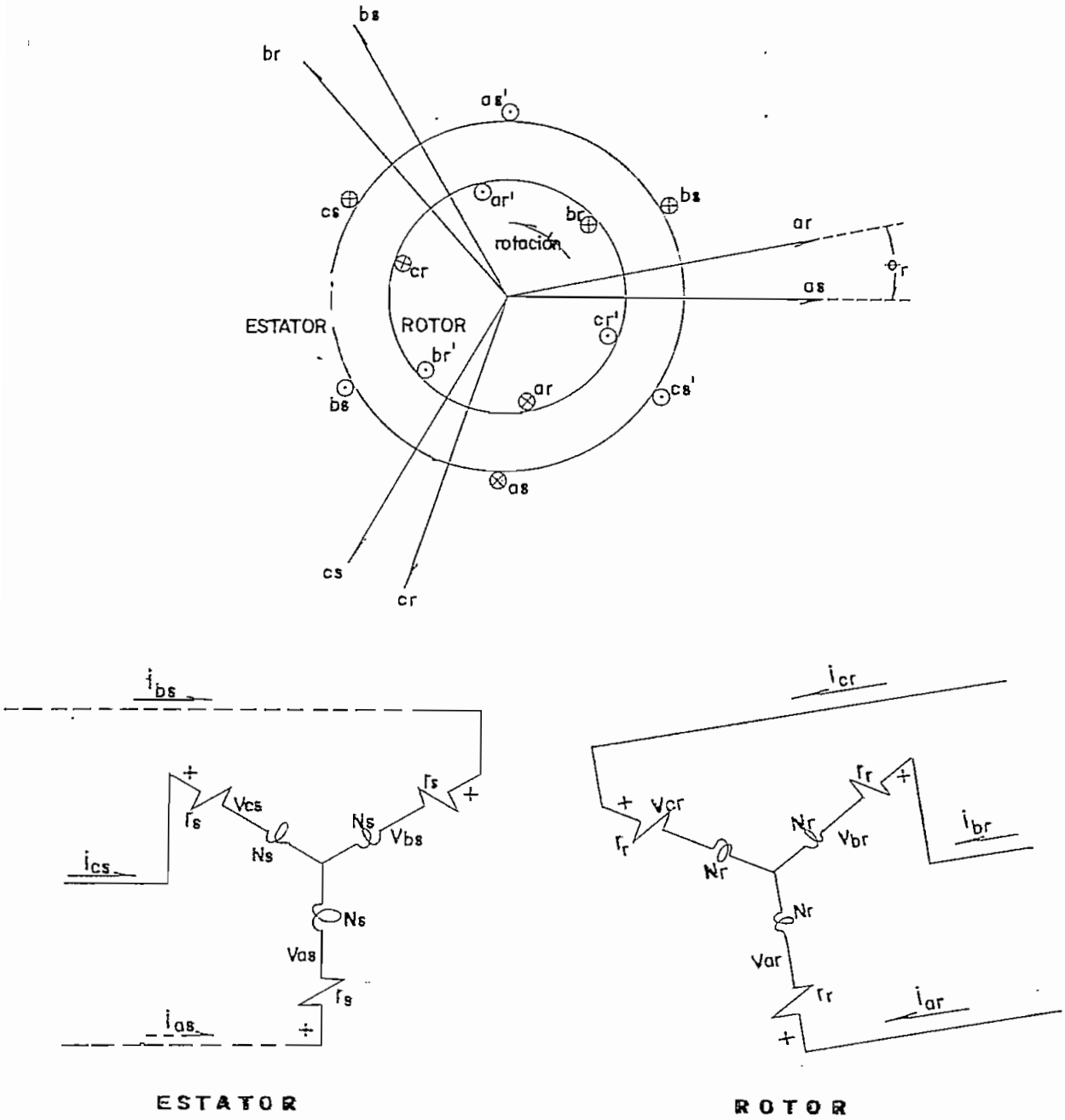

bs
br
as'
ar'
br
bs
cs
rotación
ar
cr
as
ESTATOR
ROTOR
cr'
br'
ar
bs
cs'
as
cs
cr
ibs
+
rs
Vcs
Ns
Ns
Vbs
rs
+
ics
Ns
Vas
rs
ias
+
ESTATOR
icr
+
Vcr
rr
Nr
Nr
Vbr
rr
+
ibr
Nr
Var
rr
iar
+
ROTOR

FIG. 1.1

Si se llama por a_s, b_s, c_s y a_r, b_r, c_r a los devanados del estator y rotor respectivamente.

La siguiente ecuación de voltaje es aplicable a cada uno de los devanados.

$$v = p.\lambda + r.i \tag{1}$$

donde:

v = voltaje por fase

r = resistencia total por fase de cada bobina

i = corriente por fase

λ = concatenaciones de flujo totales de una bobina

p = operador $\frac{d}{dt}$

La mayoría de las veces, en una máquina de inducción trifásica se tiene que estator y rotor son conectados como sistemas de tres hilos. En el caso de la máquina de inducción trifásica tipo "jaula de ardilla" puede ser considerada como un sistema a tres hilos. En éste desarrollo no se considerarán sistemas a 4 hilos.

Si se expresa en forma matricial los voltajes fase-neutro para devanados del estator y rotor se tiene:

$$\begin{vmatrix} |V_{abc_s}| \\ - - - - \\ |V_{abc_r}| \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} |\lambda_{abc_s}| \\ - - - \\ |\lambda_{abc_r}| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} |r_s| & |0| \\ - - - - - & \\ |0| & |r_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |i_{abc_s}| \\ - - - - \\ |i_{abc_r}| \end{vmatrix} \tag{2}$$

En donde:

$$\left|V_{abc_s}\right| = \begin{vmatrix} V_{as} \\ V_{bs} \\ V_{cs} \end{vmatrix} \qquad \left|V_{abc_r}\right| = \begin{vmatrix} V_{ar} \\ V_{br} \\ V_{cr} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$\left|r_s\right| = \begin{vmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{vmatrix} \qquad \left|r_r\right| = \begin{vmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$\left|i_{abc_s}\right| = \begin{vmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{vmatrix} \qquad \left|i_{abc_r}\right| = \begin{vmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\left|\lambda_{abc_s}\right| = \begin{vmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{vmatrix} \qquad \left|\lambda_{abc_r}\right| = \begin{vmatrix} \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Como: $\lambda = L \cdot i$ (7)

donde L = inductancia del devanado

Entonces matricialmente se tiene:

$$\begin{vmatrix} \left|\lambda_{abc_s}\right| \\ \hline \left|\lambda_{abc_r}\right| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left|L_s\right| & \left|L_{SR}\right| \\ \hline \left|L_{SR}\right|^T & \left|L_r\right| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left|i_{abc_s}\right| \\ \hline \left|i_{abc_r}\right| \end{vmatrix} \tag{8}$$

donde

$$|L_s| = \begin{vmatrix} L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ss} \end{vmatrix} \; ; \; |L_r| = \begin{vmatrix} L_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{rr} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

$$|L_{SR}| = L_{sr} \begin{vmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r \end{vmatrix} \qquad (10)$$

donde:

$L_{ss} = L_s - L_{sm}$

$L_{rr} = L_r - L_{rm}$

L_s = Inductancia propia de un devanado del estator

L_r = Inductancia propia de un devanado del rotor

L_{sm} = Inductancia mutua entre fases del estator

L_{rm} = Inductancia mutua entre fases del rotor

L_{sr} = Amplitud del acoplamiento mutuo entre los devanados del estator y del rotor.

θ_r = Desplazamiento angular entre ejes del estator y del rotor.

$|L_{SR}|$ = Submatriz de inductancias mutuas entre devanados del rotor y estator.

De lo anterior, se observa que la inductancia mutua entre un

$$
\begin{vmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
L_{ss} & 0 & 0 & L_{sr}\cos\theta_r & L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) \\
0 & L_{ss} & 0 & L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos\theta_r & L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) \\
0 & 0 & 0 & L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos\theta_r \\
L_{sr}\cos\theta_r & L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) & L_{rr} & 0 & 0 \\
L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos\theta_r & L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) & 0 & L_{rr} & 0 \\
L_{sr}\cos(\theta_r-\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos(\theta_r+\frac{2\pi}{3}) & L_{sr}\cos\theta_r & 0 & 0 & L_{rr}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{vmatrix}
$$

Ecuación matricial (11)

devanado del estator y uno del rotor varía en forma sinusoidal con respecto al desplazamiento angular θ_r, por tanto, aparecen en las ecuaciones de voltaje coeficientes que varían con el tiempo. Esta indeseable condición puede ser tratada mediante una transformación que se describirá más adelante.

Entonces las ecuaciones de las concatenaciones de flujo para una máquina a 3 hilos puede ser expresada tal como (11).

Generalmente se tienen las ecuaciones del rotor referidas al estator, esto se logra multiplicando dichas ecuaciones por la relación del número de espiras de los devanados del estator y del rotor.

Entonces:

$$\left|i'_{abc_r}\right| = \frac{Nr}{Ns}\left|i_{abc_r}\right|$$

$$\left|V'_{abc_r}\right| = \frac{Ns}{Nr}\left|V_{abc_r}\right|$$

$$\left|r'_r\right| = \left(\frac{Ns}{Nr}\right)^2 \left|r_r\right| \qquad (12)$$

$$\left|\lambda'_{abc_r}\right| = \frac{Ns}{Nr}\left|\lambda_{abc_r}\right|$$

$$\left|L'_r\right| = \left(\frac{Ns}{Nr}\right)^2 \left|L_r\right|$$

Entonces la ecuación (2) quedará luego de hacer los reemplazos respectivos:

$$\begin{vmatrix} |V_{abc_s}| \\ \hline |V'_{abc_r}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |r_s| + p\,|L_s| & p\,|L_{MS}| \\ \hline p\,|L_{MS}|^T & |r'_r| + p\,|L'_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |i_{abc_s}| \\ \hline |i'_{abc_r}| \end{vmatrix} \quad (13)$$

Donde:

$$|L_{MS}| = \frac{Ns}{Nr}\,|L_{SR}| \quad (14)$$

Para obtener la ecuación del torque electromagnético se sabe que la energía almacenada en el campo magnético tiene por ecuación:

$$W = \frac{1}{2}\,|i|^T\,|L|\,|i| \quad (15)$$

en donde

$$|i| = \begin{vmatrix} |i_{abc_s}| \\ \hline |i'_{abc_r}| \end{vmatrix} \quad |i|^T = \begin{vmatrix} |i_{abc_s}|^T & |i'_{abc_r}|^T \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$|L| = \begin{vmatrix} |L_s| & |L_{MS}| \\ \hline |L_{MS}|^T & |L'_r| \end{vmatrix}$$

La ecuación del torque electromagnético:

$$Te = \frac{P}{2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \theta_r} \quad (17)$$

donde P = número de polos de la máquina.

Si se reemplaza (15) en (17) se obtiene:

$$Te = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |i|^T \left| \frac{\partial}{\partial \theta_r} L \right| |i| \qquad (18)$$

Desarrollando (18) se llega a:

$$Te = -\left(\frac{P}{2}\right) L_{ms} \{ (i_{as}(i'_{ar} - \frac{1}{2} i'_{br} - \frac{1}{2} i'_{cr}) +$$

$$+ i_{bs} (i'_{br} - \frac{1}{2} i'_{ar} - \frac{1}{2} i'_{cr}) +$$

$$+ i_{cs} (i'_{cr} - \frac{1}{2} i'_{br} - \frac{1}{2} i'_{ar})) \text{ sen } \theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} (i_{as}(i'_{br} - i'_{cr}) +$$

$$+ i_{bs} (i'_{cr} - i'_{ar}) + i_{cs} (i'_{ar} - i'_{br})) \cos\theta_r \} \qquad (19)$$

donde

$$L_{ms} = \frac{Ns}{Nr} L_{sr} \qquad (20)$$

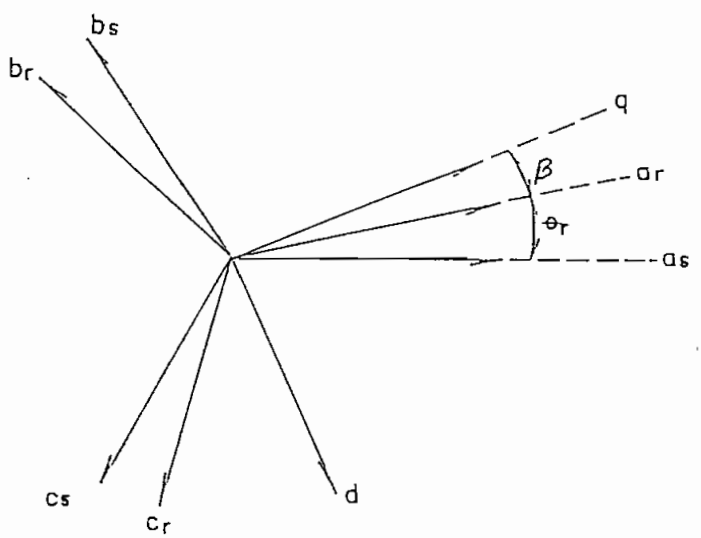


FIG. 1.2

1.3. ECUACIONES DE LA MAQUINA TRIFASICA DE INDUCCION EXPRESADAS EN UN SISTEMA ARBITRARIO DE REFERENCIA. (1, 2, 3, 9, 11, 12)

Como se comentó anteriormente, en la ecuación (10) se ve que las inductancias mutuas entre rotor y estator varían sinusoidalmente en el tiempo en función del ángulo θ_r existente entre los ejes del estator y los del rotor, dicha indeseable característica que complica el análisis puede ser eliminada mediante un apropiado cambio de variables transformando voltajes y corrientes tanto de estator y rotor, a variables definidas en un sistema de ejes arbitrarios de referencia que gira a una velocidad arbitraria ω.

En la figura (1.2) se tienen:

a) Los ejes a, b, c, del estator los cuales están fijos.

b) Los ejes a, b, c, del rotor los cuales giran a una velocidad angular eléctrica ω_r.

c) Los ejes q, d, que son ortogonales y que giran a una velocidad arbitraria ω.

d) El ángulo entre el nuevo sistema de ejes q, d, y los ejes a,b, c, fijos del estator es θ.

Las ecuaciones de transformación resultan a partir de las relaciones trigonométricas que existen entre los grupos de ejes de estator y rotor, con el grupo de ejes ortogonales q, d del sistema de referen-

cia arbitrario.

Si al tiempo cero se asume que los tres grupos de ejes coinciden, entonces, las ecuaciones generalizadas de transformación que resultan son:

$$f_{qs} = \frac{2}{3}\left(f_{as}\cos\theta + f_{bs}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cs}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad (21)$$

$$f_{ds} = \frac{2}{3}\left(f_{as}\,\mathrm{sen}\,\theta + f_{bs}\,\mathrm{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cs}\,\mathrm{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad (22)$$

$$f_{os} = \frac{1}{3}\left(f_{as} + f_{bs} + f_{cs}\right) \qquad (23)$$

$$f'_{qr} = \frac{2}{3}\left(f'_{ar}\cos\beta + f'_{br}\cos\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) + f'_{cr}\cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad (24)$$

$$f'_{dr} = \frac{2}{3}\left(f'_{ar}\,\mathrm{sen}\,\beta + f'_{br}\,\mathrm{sen}\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) + f'_{cr}\,\mathrm{sen}\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad (25)$$

$$f'_{or} = \frac{1}{3}\left(f'_{ar} + f'_{br} + f'_{cr}\right) \qquad (26)$$

Donde:

f = variable que puede representar voltajes, corrientes o concatenaciones de flujo.

θ = Es el ángulo de desplazamiento del sistema de referencia arbitrario.

$$\beta = \theta - \theta_r \qquad (27)$$

$$\theta(t) = \int_o^t \omega . dt + \theta(o) \qquad (28)$$

$$\theta_r(t) = \int_0^t \omega_r . dt + \theta_r(o) \qquad (29)$$

En éstas ecuaciones, el factor $\frac{2}{3}$ ha sido introducido para mantener invariante la potencia, pues se ha cambiado de un sistema trifásico a un sistema que puede considerarse bifásico, pues las variables f_{os} y f'_{or} sólo son introducidas con el fin de hacer consistente la transformación realizada ya que en general, son necesarias tres variables independientes. (3)

Además según las ecuaciones (23) y (26) se pueden observar particularidades de las variables referidas al eje cero:

1.- Son independientes de la velocidad ω a la que gira el sistema arbitrario de referencia.

2.- Son independientes de los ejes q y d.

3.- Se presentan únicamente en el lugar donde son originadas.

Así por ejemplo, cuando se tenga un desbalance en el rotor, solo habrán variables de eje cero en el rotor.

4.- Para el caso de sistemas que tienen conexión de tres alambres, es decir sin conexión de neutro, las componentes de eje cero desaparecen, incluso para sistemas desbalanceados (9).

Si se llama:

$$|T_s| = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{Cos}(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \mathrm{sen}\,\theta & \mathrm{sen}(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \mathrm{sen}(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$T_r = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos(\beta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta+\frac{2\pi}{3}) \\ \mathrm{sen}\,\beta & \mathrm{sen}(\beta-\frac{2\pi}{3}) & \mathrm{sen}(\beta+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \tag{31}$$

Entonces, las ecuaciones (21) - (26) expresadas en forma matricial quedarán:

$$\begin{vmatrix} |f_{qdo_s}| \\ \hline |f'_{qdo_r}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |T_s| & |0| \\ \hline |0| & |T_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |f_{abc_s}| \\ \hline |f'_{abc_r}| \end{vmatrix} \tag{32}$$

Ahora, si se desea la transformación inversa, es decir dadas las variables en q, d, o, transformarlas a variables a, b, c, Entonces:

$$\begin{vmatrix} |f_{abc_s}| \\ \hline |f'_{abc_r}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |T_s|^{-1} & |0| \\ \hline |0| & |T_r|^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |f_{qdo_s}| \\ \hline |f'_{qdo_r}| \end{vmatrix} \tag{33}$$

Donde:

$$|T_s|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{vmatrix} \tag{34}$$

$$|T_r|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 1 \\ \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\beta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{vmatrix} \tag{35}$$

Si en la ecuación (8) se refieren todas las variables al estator, matricialmente puede expresarse como:

$$|\lambda| = |L| \quad |i| \tag{36}$$

estando (36) en variables a, b, c.

Donde:

$$|\lambda| = \begin{vmatrix} |\lambda_{abc_s}| \\ - - - - \\ |\lambda'_{abc_r}| \end{vmatrix} ; \quad |L| = \begin{vmatrix} |L_s| & |L_{SR}| \\ - - - - & - - \\ |L_{SR}|^T & |L'_r| \end{vmatrix} ; \quad |i| = \begin{vmatrix} |i_{abc_s}| \\ - - - - \\ |i'_{abc_r}| \end{vmatrix} \tag{37}$$

Si se aplica la transformación directa a ejes q,d, o, a la ecuación (36), se tiene:

$$|T||\lambda| = |T||L||i| \tag{38}$$

se sabe que $|T||T|^{-1} = |1|$ (39)

Multiplicando al segundo miembro por (39), resulta:

$$|T||\lambda| = |T||L||T|^{-1}|T||i| \tag{40}$$

Realizando operaciones se llega a lo siguiente, ya en variables q, d, o.

$$|^{\lambda}qdo| = |^{L}qdo|\ |^{i}qdo| \tag{41}$$

donde:

$$|^{\lambda}qdo| = |T|\ |\lambda| \tag{42}$$

$$|^{i}qdo| = |T|\ |i| \tag{43}$$

$$|^{L}qdo| = |T|\ |L|\ |T|^{-1} \tag{44}$$

Si se desarrolla la ecuación (44) se llega a:

$$|^{L}qdo| = \begin{vmatrix} |T_s|\ |L_s|\ |T_s|^{-1} & |T_s|\ |L_{MS}|\ |T_r|^{-1} \\ \hline |T_r|\ |L_{MS}|^{T}\ |T_s|^{-1} & |T_r|\ |L'_r|\ |T_r|^{-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

que da como resultado:

$$|L_{qdc}| = \begin{vmatrix} L_{ss} & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ss} & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ \hline M & 0 & 0 & L'_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & L'_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{rr} \end{vmatrix} \tag{46}$$

donde:

$$M = \frac{3}{2} L_{ms} \tag{47}$$

M = Inductancia de magnetización de la máquina

Se puede descomponer las inductancias L_{ss} y L'_{rr} en sus componentes de dispersión y de magnetización.

$$L_{ss} = L_{ls} + M \tag{48}$$

$$L'_{rr} = L'_{lr} + M \tag{49}$$

Recordando que en la ecuación (10) se tenía que las inductancias mutuas entre rotor y estator eran variables en el tiempo pues dependían de la posición del rotor, mientras que, una vez realizada la transformación al sistema de ejes de referencia arbitrario se ha conseguido eliminar dicha dependencia.

Otra nota importante es que las inductancias propias no sufren

ninguna alteración.

Para encontrar las ecuaciones de voltaje en q, d, o se puede partir de la ecuación (2) pero referidas todas sus variables al estator se tendrá:

$$|V| = p\,|\lambda| + |R|\,|i| \tag{50}$$

Donde:

$$|V| = \begin{vmatrix} |V_{abc_s}| \\ ---- \\ |V_{abc_r}'| \end{vmatrix} ; \quad |\lambda| = \begin{vmatrix} |\lambda_{abc_s}| \\ ---- \\ |\lambda_{abc_r}'| \end{vmatrix} ; \quad |i| = \begin{vmatrix} |i_{abc_s}| \\ ---- \\ |i_{abc_r}'| \end{vmatrix} ;$$

$$|\lambda| = \begin{vmatrix} |\lambda_{abc_s}| \\ ---- \\ |\lambda_{abc_r}'| \end{vmatrix} ; \quad |R| = \begin{vmatrix} |r_s| & |0| \\ ------ \\ |0| & |r_r'| \end{vmatrix} \tag{51}$$

Realizando la transformación directa a (50):

$$|T|\,|V| = |T|\,p\,|\lambda| + |T|\,|R|\,|i| \tag{52}$$

Multiplicando por $|T|^{-1}\,|T|$

$$|T|\,|V| = |T|\,p\,\{\,|T|^{-1}\,|T|\,|\lambda|\,\} + |T|\,|R|\,|T|^{-1}\,|T|\,|i| \tag{53}$$

Da como resultado en variables q d o:

$$|V_{qdo}| = |T|\ p\ \{\ |T|^{-1}\ |\lambda_{qdo}|\ \} + |T|\ |R|\ |T|^{-1}\ |i_{qdo}| \qquad (54)$$

Analizando se tiene que:

$$|T|\ |R|\ |T|^{-1} = |R| \qquad (55)$$

además, puesto que $|\lambda_{qdo}|$ y $|T|^{-1}$ son funciones del tiempo (54) quedará como:

$$|V_{qdo}| = |T|\ p\ |T|^{-1}\ |\lambda_{qdo}| + |T|\ |T^{-1}|\ p\ |\lambda_{qdo}| + |R|\ |i_{qdo}| \qquad (56)$$

Si $\quad |\lambda_{qdo}| = |L_{qdo}|\ |i_{qdo}| \qquad (57)$

$$|H| = |T|\ p\ |T|^{-1} \qquad (58)$$

Entonces (56) queda como:

$$|V_{qdo}| = \{\ |H|\ |L_{qdo}| + |L_{qdo}|\ p + |R|\ \}\ |i_{qdo}| \qquad (59)$$

desarrollando (58), se llega a:

$$|H| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & p\theta & 0 & & & \\ -p\theta & 0 & 0 & & |0| & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & p\beta & 0 \\ & |0| & & -p\beta & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad (60)$$

Realizando los reemplazos respectivos en la ecuación (59) se llega a las ecuaciones generales de voltaje en el sistema de ejes arbitrarios de referencia:

$$\begin{vmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{os} \\ v'_{qr} \\ v'_{dr} \\ v'_{or} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (r_s + L_{ss}\,p) & L_{ss}\,p\theta & 0 & Mp & Mp\theta & 0 \\ -L_{ss}\,p\theta & (r_s + L_{ss}\,p) & 0 & -Mp\theta & Mp & 0 \\ 0 & 0 & r_s & 0 & 0 & 0 \\ Mp & Mp\beta & 0 & (r'_r + L'_{rr}\,p) & L'_{rr}\,p\beta & 0 \\ -Mp\beta & Mp & 0 & -L'_{rr}\,p\beta & (r'_r + L'_{rr}\,p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r'_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{os} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{or} \end{vmatrix} \tag{61}$$

Si se expresa (61) en función de las concatenaciones de flujo totales se tiene:

$$v_{qs} = r_s\, i_{qs} + p\,\lambda_{qs} + \lambda_{ds}\,p\theta \tag{62}$$

$$v_{ds} = r_s\, i_{ds} + p\,\lambda_{ds} + \lambda_{qs}\,p\theta \tag{63}$$

$$v_{os} = r_s\, i_{os} + p\,\lambda_{os} \tag{64}$$

$$v'_{qr} = r'_r\, i'_{qr} + p\,\lambda'_{qr} + \lambda'_{dr}\,p\beta \tag{65}$$

$$v'_{dr} = r'_r\, i'_{dr} + p\,\lambda'_{dr} + \lambda'_{qr}\, p\beta \tag{66}$$

$$v'_{or} = r'_r\, i'_{or} + p\,\lambda'_{or} \tag{67}$$

donde las concatenaciones de flujo totales son:

$$\lambda_{qs} = L_{ss}\, i_{qs} + M\, i'_{qr} \tag{68}$$

$$\lambda_{ds} = L_{ss}\, i_{ds} + M\, i'_{dr} \tag{69}$$

$$\lambda_{os} = L_{ss}\, i_{os} \tag{70}$$

$$\lambda'_{qr} = L'_{rr}\, i'_{qr} + M\, i_{qs} \tag{71}$$

$$\lambda'_{dr} = L'_{rr}\, i'_{dr} + M\, i_{ds} \tag{72}$$

$$\lambda'_{or} = L'_{rr}\, i'_{or} \tag{73}$$

Que si se reemplaza (48) - (49) en (68) a (73) se obtiene:

$$\lambda_{qs} = L_{ls}\, i_{qs} + M\,(i_{qs} + i'_{qr}) \tag{74}$$

$$\lambda_{ds} = L_{ls}\, i_{ds} + M\,(i_{ds} + i'_{dr}) \tag{75}$$

$$\lambda_{os} = L_{ss}\, i_{os} \tag{76}$$

$$\lambda'_{qr} = L'_{lr}\, i'_{qr} + M\,(i_{qs} + i'_{qr}) \tag{77}$$

$$\lambda'_{dr} = L'_{lr}\, i'_{dr} + M\,(i_{ds} + i'_{dr}) \tag{78}$$

$$\lambda'_{or} = L'_{rr}\, i'_{or} \tag{79}$$

Los términos $\lambda_{qs}\, p\theta$; y $\lambda_{ds}\, p\theta$; $\lambda'_{qr}\, p\theta$; $\lambda'_{dr}\, p\theta$ representan los voltajes de velocidad pues:

$$p\theta = \omega \text{ y } p\beta = \omega - \omega_r \tag{80}$$

donde: ω = Velocidad a la que gira el sistema de ejes arbitrarios.

$p\beta$ = Velocidad relativa entre los ejes arbitrarios y el rotor.

Mientras que los términos $p\,\lambda_{qs}$; $p\,\lambda_{ds}$; $p\,\lambda'_{qr}$; $p\,\lambda'_{dr}$ representan los voltajes de transformación (6).

Para hallar las ecuaciones del torque electromagnético, partiendo de (19) y aplicando a ésta ecuación, la transformación, se llega a la siguiente expresión en variables q d o:

$$Te = \frac{3}{2}\left(\frac{P}{2}\right) M\,(i_{qs} \cdot i'_{dr} - i_{ds} \cdot i'_{qr}) \tag{81}$$

Si se pone (81) en función de las concatenaciones de flujo se llega a:

$$Te = \frac{3}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{P}{2}\right)(\lambda'_{qr} \cdot i'_{dr} - \lambda'_{dr} \cdot i'_{qr}) \tag{82}$$

Donde: m = número de fases

p = número de polos

1.4. VOLTAJES DE CUALQUIER FORMA DE ONDA PERIODICA APLICADOS AL ESTATOR. (1, 3, 9)

Se pueden hallar las expresiones de los voltajes qs y ds en una estructura de referencia fija en el estator simplemente haciendo que el ángulo $\theta = 0$ en (21) y (22):

$$f_{qs} = \frac{2}{3} \left| f_{as} \cos 0° + f_{bs} \cos \left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cs} \cos \left(0 + \frac{2\pi}{3}\right) \right.$$

$$= \frac{2}{3} \left| f_{as} - 0.5\, f_{bs} - 0.5\, f_{cs} \right|$$

$$f_{qs} = \frac{2}{3} f_{as} - \frac{1}{3} f_{bs} - \frac{1}{3} f_{cs}$$

Si, voltajes son los que interesan:

$$v_{qs} = \frac{2}{3} v_{as} - \frac{1}{3} v_{bs} - \frac{1}{3} v_{cs} \tag{83}$$

Pero si se analiza la figura (1.3), se tiene que:

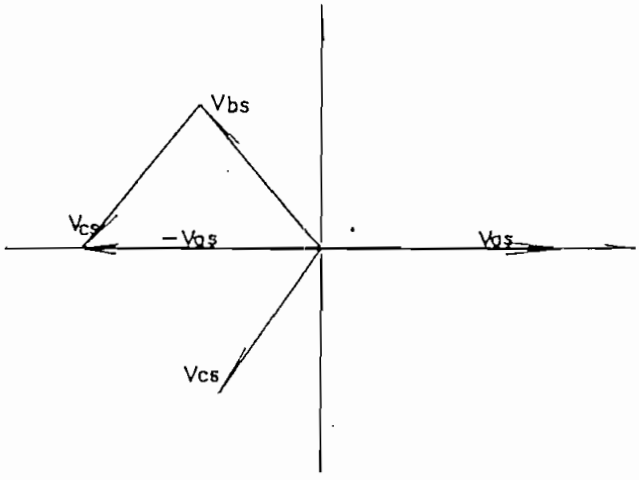


Fig. 1.3.

$$-\frac{1}{3} v_{bs} - \frac{1}{3} v_{cs} = +\frac{1}{3} v_{as} \tag{84}$$

lo que se puede comprobar sacando factor común:

$$-\frac{1}{3}(v_{bs} + v_{cs}) = \frac{1}{3} v_{as} \tag{85}$$

Ahora, puesto que se está considerando una máquina de inducción simétrica a 3 hilos se cumplirá que:

$$v_{as} + v_{bs} + v_{cs} = 0 \tag{86}$$

despejando:

$$v_{bs} + v_{cs} = - v_{as} \tag{87}$$

Si se reemplaza (86) en (85) se llega a una identidad.

Entonces (83) quedará como:

$$v_{qs}{}^{s} = \frac{2}{3} v_{as} - \frac{1}{3}(v_{bs} + v_{cs})$$

$$= \frac{2}{3} v_{as} - \frac{1}{3}(- v_{as})$$

$$v_{qs}{}^{s} = v_{as} \tag{88}$$

Donde el superíndice s denotará variables en una estructura de referencia fija en el estator.

Ahora haciendo $\theta = 0$ en (22) se tiene:

$$f_{ds} = \frac{2}{3} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} f_{bs} + \frac{\sqrt{3}}{2} f_{cs} \right|$$

$$v_{ds}^{s} = \frac{2}{3} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} v_{bs} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_{cs} \right|$$

$$v_{ds}^{s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| v_{cs} - v_{bs} \right|$$

$$v_{ds}^{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| - v_{bs} + v_{cs} \right| \qquad (89)$$

Si los voltajes del estator son de cualquier forma de onda periódica, entonces v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} pueden ser expresados en series de Fourier:

$$v_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\,\omega_e t + V_{kq\gamma} \operatorname{sen} k\,\omega_e t) \qquad (90)$$

$$v_{ds}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\,\omega_e t + V_{kd\gamma} \operatorname{sen} k\,\omega_e t) \qquad (91)$$

En donde:

ω_e = velocidad angular eléctrica correspondiente a la componente fundamental de frecuencia del voltaje de fase aplicados al estator.

α, γ = son subíndices que denotan respectivamente los términos coseno y seno.

Se define una Estructura de referencia rotando sincronizadamente como la estructura de referencia la cual gira a una velocidad angular eléctrica ω_e de la componente fundamental de los voltajes aplica-

dos. (1)

Los voltajes aplicados en la estructura de referencia rotando sincronizadamente v_{qs}^{e} y v_{ds}^{e}, pueden ser expresados como función de v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} de la siguiente manera:

De la ecuación (21) y si el superíndice e denota voltajes aplicados en la estructura de referencia rotando sincronizadamente, entonces

$$v_{qs}^{e} = \frac{2}{3}\left(v_{as}\cos\omega_e t + v_{bs}\cos\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) + v_{es}\cos\left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \tag{92}$$

En donde $\theta = \omega_e t$

y sabiendo que:

$$\cos\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\omega_e t \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\omega_e t \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2}\cos\omega_e t + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega_e t \tag{93}$$

$$\cos\left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos\omega_e t - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega_{et} \tag{94}$$

reemplazando (93) y (94) en (92):

$$v_{qs}^{e} = \frac{2}{3}\left(v_{as}\cos\omega_e t + v_{bs}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_e t + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega_e t\right) + \right.$$

$$\left. + v_{cs}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_e t - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega_e t\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} v_{as} \cos \omega_e t - \frac{1}{3} v_{bs} \cos \omega_e t + \frac{1}{\sqrt{3}} v_{bs} \operatorname{sen} \omega_e t -$$

$$- \frac{1}{3} v_{cs} \cos \omega_e t - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{cs} \operatorname{sen} \omega_e t$$

$$= \frac{2}{3} v_{as} \cos \omega_e t - \frac{1}{3} \cos \omega_e t (v_{bs} + v_{cs}) - \frac{1}{\sqrt{3}} (-v_{bs} + v_{cs}) \operatorname{sen} \omega_e t$$

pero recordando (86), (88) y (89)

$$v_{bs} + v_{cs} = - v_{as}$$

$$v_{qs}{}^{s} = v_{as} \quad \text{y} \quad v_{ds}{}^{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} (- v_{bs} + v_{cs})$$

efectuando los reemplazos se tiene que:

$$v_{qs}{}^{e} = v_{qs}{}^{s} \cos \omega_e t - v_{ds}{}^{s} \operatorname{sen} \omega_e t \tag{95}$$

Ahora, para hallar $v_{ds}{}^{e}$, partiendo de (22) y con $\theta = \omega_e t$

$$v_{ds}{}^{e} = \frac{2}{3} (v_{as} \operatorname{sen} \omega_e t + v_{bs} \operatorname{sen}(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) + v_{cs} \operatorname{sen}(\omega_e t + \frac{2\pi}{3})) \tag{96}$$

Sabiendo que:

$$\operatorname{sen}(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) = - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega_e t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega_e t$$

$$\operatorname{sen}(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}) = - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega_e t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega_e t$$

Reemplazando en (93):

$$v_{ds}^{e} = \frac{2}{3} v_{as} \text{ sen } \omega_e t - \frac{1}{3} v_{bs} \text{ sen } \omega_e t - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{bs} \cos \omega_e t - \frac{1}{3} v_{cs} \text{ sen } \omega_e t$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} v_{cs} \cos \omega_e t$$

$$v_{ds}^{e} = \frac{2}{3} v_{as} \text{ sen } \omega_e t - \frac{1}{3} (v_{bs} + v_{cs}) \text{ sen } \omega_e t + \frac{1}{\sqrt{3}} (- v_{bs} + v_{cs}) \cos \omega_e t$$

Entonces por (86), (88) y (89), se obtiene:

$$v_{ds}^{e} = v_{qs}^{s} \text{ sen } \omega_e t + v_{ds}^{s} \cos \omega_e t \tag{97}$$

Si se sustituye (90) y (91) en (95) y (97):

$$v_{qs}^{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\, \omega_e t + V_{kd\gamma} \text{ sen } k\, \omega_e t) \cos \omega_e t -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\, \omega_e t + V_{kd\gamma} \text{ sen } k\, \omega_e t) \text{ sen } \omega_e t \tag{98}$$

Para facilitar el desarrollo, haciendo $\omega_e t = \theta$

$$v_{qs}^{e} = \cos\theta \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\theta + V_{kq\gamma} \text{ sen } k\theta\ ) - \text{sen}\theta \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\theta +$$

$$+ V_{kd\gamma} \text{ sen } k\theta\ )$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha}\{ 2\cos k\theta \cos\theta \} + V_{kq\gamma}\{ 2\text{sen } k\theta \cos\theta \} +$$

$$+ V_{kd\alpha}\{ - 2\text{sen}\theta \cos k\theta \} + V_{kq\gamma}\{ - 2\text{sen } k\theta \text{ sen}\theta \}\ )$$

Sabiendo que:

$$\cos(k\theta + \theta) = \cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(k\theta - \theta) = \cos k\theta \cos\theta + \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}(k\theta + \theta) = \operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos k\theta$$

$$\operatorname{sen}(k\theta - \theta) = \operatorname{sen} k\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos k\theta$$

$$v_{qs}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \{ \cos(k\theta + \theta) + \cos(k\theta - \theta) \} + V_{kd\gamma} \{\cos(k\theta + \theta) -$$

$$- \cos(k\theta - \theta) \} + V_{kd\alpha} \{ - \operatorname{sen}(k\theta + \theta) + \operatorname{sen}(k\theta - \theta) \} +$$

$$+ V_{kq\gamma} \{\operatorname{sen}(k\theta + \theta) + \operatorname{sen}(k\theta - \theta) \})$$

$$v_{qs}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos(k+1)\theta + V_{kd\gamma} \cos(k+1)\theta + V_{kq\gamma} \operatorname{sen}(k+1)\theta -$$

$$- V_{kd\alpha} \operatorname{sen}(k+1)\theta + V_{kq\alpha} \cos(k-1)\theta - V_{kd\gamma} \cos(k-1)\theta +$$

$$+ V_{kq\gamma} \operatorname{sen}(k-1)\theta + V_{kd\alpha} \operatorname{sen}(k-1)\theta)$$

agrupando por factor común y haciendo $\theta = \omega_e t$ se obtiene:

$$v_{qs}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \cos(k+1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k-1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \quad (99)$$

Ahora, por un procedimiento similar para calcular v_{ds}^{e}:

$$v_{ds}{}^{e} = \text{sen}\theta \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\theta + V_{kq\gamma} \text{sen}\, k\theta) + \cos\theta \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\theta +$$

$$V_{kd\gamma} \text{sen}\, k\theta) \qquad (100)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha}' \{2\text{sen}\theta \cos k\theta\} + V_{kq\gamma}' \{2\text{sen}\, k\theta\, \text{sen}\theta\} +$$

$$V_{kd\alpha}' \{2\cos\theta \cos k\theta\} + V_{kd\gamma}' \{2\cos\theta\, \text{sen}\, k\theta\})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha}' \{\text{sen}(k\theta + \theta) - \text{sen}(k\theta - \theta)\} + V_{kq\gamma}' \{\cos(k\theta - \theta) -$$

$$- \cos(k\theta + \theta)\} + V_{kd\alpha}' \{\cos(k\theta + \theta) + \cos(k\theta - \theta) +$$

$$+ V_{kd\gamma}' \{\text{sen}(k\theta + \theta) + \text{sen}(k\theta - \theta)\})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha}' \text{sen}(k\theta + \theta) - V_{kq\alpha} \text{sen}(k\theta - \theta) + V_{kq\gamma} \cos(k\theta - \theta) -$$

$$- V_{kq\gamma} \cos(k\theta + \theta) + V_{kd\alpha} \cos(k\theta + \theta) + V_{kd\alpha} \cos(k\theta - \theta) +$$

$$+ V_{kd\gamma} \text{sen}(k\theta + \theta) + V_{kd\gamma} \text{sen}(k\theta - \theta))$$

Sacando factores comunes y con $\theta = \omega_e t$:

$$v_{ds}{}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \text{sen}(k+1)\omega_e t - (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \cos(k+1)\omega_e t -$$

$$- (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \text{sen}(k-1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t) \qquad (101)$$

Las expresiones (99) y (101), pueden ser expresadas como:

$$v_{qs}^{e} = v_{qs}^{+e} + v_{qs}^{-e} \tag{102}$$

$$v_{ds}^{e} = v_{ds}^{+e} + v_{ds}^{-e} \tag{103}$$

donde:

$$v_{qs}^{+e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k-1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t\} \tag{104}$$

$$v_{ds}^{+e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{-(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t\} \tag{105}$$

$$v_{qs}^{-e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k+1)\omega_e t + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t\} \tag{106}$$

$$v_{ds}^{-e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t - (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \cos(k+1)\omega_e t\} \tag{107}$$

Las expresiones (99)y (101) se puede observar que tienen un término constante y unos términos variando sinusoidalmente los cuales forman una serie de juegos bifásicos balanceados.

Los voltajes v_{kqs}^{+e} y v_{kds}^{+e} ambos forman para $k > 1$, una serie de juegos balanceados, cada uno de los cuales establece una onda

FMM de amplitud constante al ser aplicados a los devanados d_s^e - q_s^e que rotan a una velocidad angular eléctrica de $(k-1)\omega_e$ (sentido antihorario) con respecto a la estructura de referencia rotando sincronizadamente, ó a una velocidad $k\omega_e$ si es que se toma con respecto al estator. El superescrito + de las expresiones (104) y (105) indica que el sentido de rotación es antihorario.

De una manera similar, v_{kqs}^{-e} y v_{kds}^{-e} forman juntos una serie de juegos balanceados, para $k > 0$, estableciendo cada uno una onda de fMM de amplitud constante que rota a una velocidad angular eléctrica de $-(k+1)\omega_e$ (sentido horario) con respecto a la estructura de referencia rotando sincronizadamente; ó a una velocidad de $-k\omega_e$ con respecto al estator. El superescrito - de las expresiones (106) y (107), indica que el sentido de rotación es horario.

Estos juegos balanceados aparecerán en la estructura de referencia rotando sincronizadamente indiferente de la forma ó relaciones entre los voltajes de fase desbalanceados o no sinusoidales. (1)

(1)

Por ejemplo, si v_{as} es una onda periódica cuadrada; v_{bs} una variación sinusoidal y v_{cs} una onda paso, la expansión en series de Fourier de esos voltajes formarán una serie de juegos balanceados cuando son transformados a la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

C A P I T U L O I I

METODO DEL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE

2.1. CONSIDERACIONES GENERALES: (1, 2, 3)

Si se revisa las ecuaciones generales de voltaje en el sistema de ejes arbitrarios de referencia (ecuaciones (62), (63), (65) y (66)) se observa que existen términos dependientes de la velocidad angular del rotor ω_r. Si dicha velocidad es constante entonces las ecuaciones (62) a (66) serán lineales, caso contrario, se tendrá ecuaciones no lineales. (1)

El mantener la velocidad del rotor constante, es una condición necesaria para el análisis de la operación balanceada o no balanceada, de la máquina de inducción.

Debido a que las ecuaciones de voltaje serán lineales para operación a velocidad constante, entonces el principio de superposición - puede ser aplicado.

Las expresiones para los voltajes v_{qs}^{e} y v_{ds}^{e} (ecuaciones (99) y (101) que son los voltajes q, d, expresados en la estructura de referencia rotando sincronizadamente, contienen términos constantes, así como una serie de sets balanceados que en el caso de ser aplicado el

principio de superposición, se pueden aplicar separadamente cada término constante así como cada conjunto balanceado de voltaje y obtener uuna por una las corrientes resultantes correspondientes y una vez terminado este proceso superponerlas con el fin de obtener una respuesta total de corriente que es la supuesta de la máquina debida a la fase completa de voltaje que se había aplicado.

De las ecuaciones (104) y (105) se tiene que para k = 1 los voltajes v_{1qs}^{+e} y v_{1ds}^{+e} son constantes. Si se aplica dichos voltajes, las corrientes que resulten serán constantes. Pero los voltajes v_{qs}^{+e}, v_{ds}^{-e} están formados además por una serie de términos que ya no son constantes pues son funciones coseno ó seno, así por Ejm., para k = 2, en la ecuación (104) se tiene que:

$$v_{2qs}^{+e} = \frac{1}{2} \{(V_{2q\alpha} - V_{2d\gamma}) \cos(2-1)\omega_e t + (V_{2q\gamma} + V_{2d\alpha}) \operatorname{sen}(2-1)\omega_e t$$

ahora, para k = 2 en la ecuación (105):

$$v_{2ds}^{+e} = \frac{1}{2} \{- (V_{2q\alpha} - V_{2d\gamma}) \operatorname{sen}(2-1)\omega_e t + (V_{2q\gamma} + V_{2d\alpha}) \cos(2-1)\omega_e t\}$$

donde recordando:

v_{2qs}^{+e} es uno de los términos de voltaje de los que está formado v_{qs}^{+e}

v_{2ds}^{+e} = es uno de los términos de voltaje de los que está formado v_{ds}^{+e}

$V_{2q\alpha}$, $V_{2q\gamma}$ = Son los coeficientes para k = 2, de los términos coseno y seno, respectivamente, del voltaje v_{qs}^{s} expresado en se

ries de Fourier (ecuación (90))

$V_{2d\alpha}$. $V_{qd\gamma}$ = Son los coeficientes para k = 2, de los términos coseno y seno, respectivamente, del voltaje v_{ds}^{s} (ecuación (91))

α y γ = son subíndices que indican que es un coeficiente del coseno o del seno respectivamente.

+ = superíndice que indica que el sentido de rotación de ese eje es antihorario.

- = superíndice que indica que el sentido de rotación de ese eje es horario.

e = superíndice que indica que dicha variable está en el sistema de referencia rotando sincronizadamente.

q, d = los subíndices que indican que eje es: eje q o eje d.

s, r = subíndices que indican variable del estator o del rotor respectivamente.

' = variable del rotor referida al estator.

v_{2qs}^{+e} y v_{2ds}^{+e} = Juntos forman un conjunto balanceado que al ser aplicados, cada uno establece una onda de f MM de amplitud constante que rota a una velocidad angular eléctrica $(2 - 1)\omega_e$ en sentido antihorario.

Cada uno de éstos conjuntos balanceados que no son constantes en la estructura de referencia rotando sincronizadamente, lo serán en otra estructura, entonces interesa precisamente encontrar una estructura de referencia adecuada para cada sistema balanceado, de tal manera que éste aparezca en ella como constante.

Terminado este proceso, se tendrá un sistema de referencia múltiple en el cual se tienen estructuras cuyos voltajes van a ser constantes, que al ser aplicados cada uno por separado, van a dar por resultado corrientes que también serán constantes, entonces se hace innecesario el uso de fasores e impedancias complejas y más bien se aplica la teoría de circuitos D.C.

Las corrientes D.C. de una estructura de referencia determinada, pueden luego ser transformadas de dicha estructura a la estructura de referencia rotando sincronizadamente, para luego ser superpuestas y obtener de ésta manera la expresión para las corrientes en la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

De manera similar, se puede obtener las corrientes resultantes expresadas en la estructura de referencia fija en el estator, y a partir de ésta obtener las corrientes de fase i_{as}, i_{bs}, i_{cs}, del estator y las del rotor i'_{ar}, i'_{br} e i'_{cr}.

2.2. DESARROLLO MATEMATICO:

2.2.1. ECUACIONES DE TRANSFORMACION A UN SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE. (1, 3)

2.2.1.a. Ecuaciones de Voltajes.-

El presente desarrollo está orientado a encontrar las expresiones de los voltajes en el sistema de referencia múltiple. Antes de iniciarlo se hace conveniente una nomenclatura adecuada.

NOMENCLATURA:

f = Variable que puede representar: voltaje, corriente o concatenación de flujo.

q = Subíndice que indica que es una variable del eje q.

d = Subíndice que indica que es una variable del eje d.

s = Subíndice que indica variable del estator.

r = Subíndice que indica variable del rotor.

f_r' = Indica variable del rotor referida al estator.

s = Superíndice que indica que una variable está expresada en la estructura de referencia fija en el estator.

e = Superíndice que indica que una variable está expresada en la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

k = Superíndice, factor multiplicativo de la velocidad donde k = 1, 2, 3, ..., ∞.

+ = Signo que acompaña al superíndice k y que identifica sentido de rotación antihorario de una estructura de referencia determinada con respecto al estator.

- = Signo que acompaña al superíndice k que identifica sentido de rotación horario de una estructura de referencia determinada, con respecto al estator.

$\pm$ ke = Superíndices usados para identificar la velocidad y dirección de rotación de una estructura de referencia, con respecto al estator.

ω_e = Velocidad angular eléctrica correspondiente a la componente fundamental de los voltajes de fase aplicados al estator.

t = Es el tiempo.

$\omega_e t$ = Resulta un ángulo en radianes.

$\sum_{k=1}^{\infty}$ = Símbolo para indicar un sumatorio desde k = 1 hasta ∞.

ω_r = Velocidad angular eléctrica del rotor.

$V_{kq\alpha}$, $V_{kq\gamma}$ = Son los coeficientes de los términos coseno y seno respectivamente de la expansión en serie de Fourier de v_{qs}^{s} (ecuación (90)).

$V_{kd\alpha}$ y $V_{kd\gamma}$ = Son los coeficientes de los términos coseno y seno respectivamente de la expansión en serie de Fourier de v_{ds}^{s} (ecuación (91)).

DESARROLLO MATEMATICO:

Para éste desarrollo, es conveniente el empleo de un sistema de ecuaciones de transformación, mediante las cuales se puede hallar las expresiones de voltajes, corrientes y torque en el sistema de referencia múltiple.

Son necesarias ecuaciones de transformación tanto para las cantidades +e (ecuaciones (104) y (105), como para las cantidades -e (ecuaciones (106) y (107)).

Se debe recordar que los voltajes v_{kqs}^{+e} y v_{kds}^{+e} (ecuaciones (104) y (105)), juntos forman una serie de conjuntos balanceados, que giran en sentido antihorario con una velocidad $(k+1)\omega_e$ con respecto a la estructura de referencia rotando sincronizadamente, ó a una velocidad $k\omega_e$ si es que se toma con respecto a la estructura de referencia fija en el estator. El porqué de $(k-1)\omega_e$ y de $k\omega_e$ puede ser explicado observando la figura 2.2.1.a.1.

En esta figura se tienen tres sistemas de ejes ortogonales q-d:

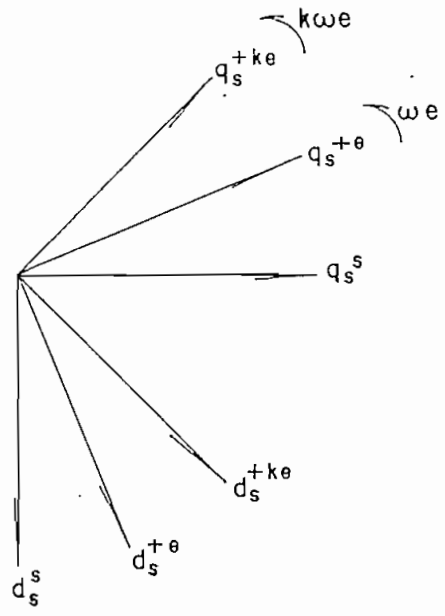


Fig. 2.2.1.a.1.

$q_s^{\ s}$ y $d_s^{\ s}$ forman el sistema de ejes fijos en el estator

$q_s^{\ +e}$ y $d_s^{\ +e}$ forman el sistema de ejes en la estructura de referencia rotando sincronizadamente girando a una velocidad ω_e (sentido antihorario).

$q_s^{\ +ke}$ y $d_s^{\ +ke}$ forman varios sistemas de ejes (dependiendo del valor de k) en el sistema de referencia múltiple, girando a una velocidad $k\omega_e$ (sentido antihorario).

La velocidad del sistema de ejes $q_s^{\ +ke}$ y $d_s^{\ +ke}$ con respecto al sistema de ejes fijo en el estator es $k\omega_e - 0 = k\omega_e$.

La velocidad del sistema de ejes $q_s^{\ +ke}$ y $d_s^{\ +ke}$ con respecto a los ejes $q_s^{\ +e}$ y $d_s^{\ +e}$ de la estructura de referencia rotando sincroniza

damente es $k\omega_e - \omega_e = (k - 1)\omega_e$.

Ayudándose de la figura 2.2.1.a.2. y aplicando las relaciones trigonométricas entre los dos sistemas de ejes, es posible encontrar las ecuaciones de transformación al sistema de referencia múltiple, en función de los sistemas que giran en sentido antihorario (cantidades +e) que están expresadas en el sistema de referencia rotando sincronizadamente.

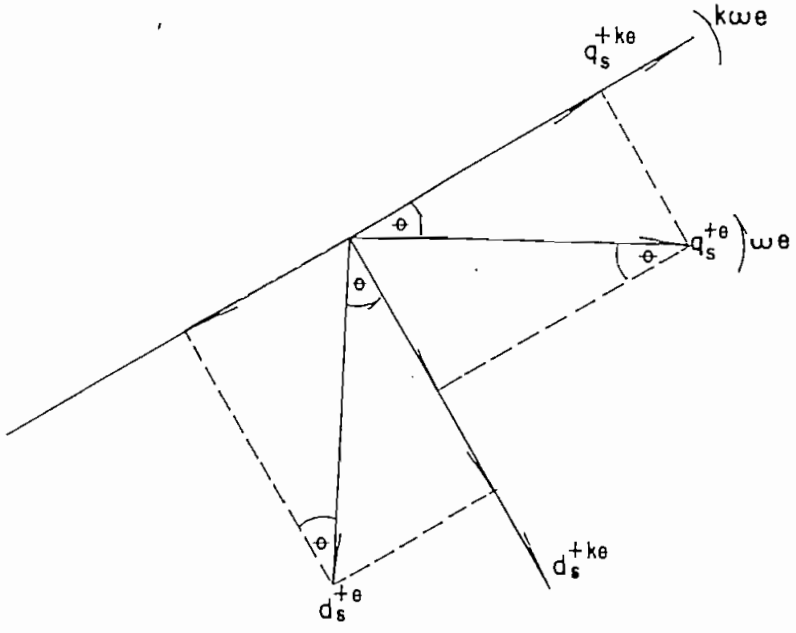


Fig. 2.2.1.a.2.

Entonces, para las variables de estator:

$$f_{qs}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \cos\theta - f_{kds}^{+e} \operatorname{sen}\theta$$

$$f_{ds}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \operatorname{sen}\theta + f_{kds}^{+e} \cos\theta$$

Para las variables del rotor:

$$f_{qr}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \cos\theta - f_{kdr}^{+e} \operatorname{sen}\theta$$

$$f_{dr}^{+ke} = f_{kqr}^{+e} \operatorname{sen}\theta + f_{kdr}^{+e} \cos\theta$$

donde: $\theta = k\omega_e t - \omega_e t$

$$\theta = (k-1)\omega_e t$$

Reemplazando el valor de θ:

$$f_{qs}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t - f_{kds}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \qquad (108)$$

$$f_{ds}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f_{kds}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t \qquad (109)$$

$$f_{qr}^{+ke} = f_{kqr}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t - f_{kdr}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \qquad (110)$$

$$f_{dr}^{+ke} = f_{kqs}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f_{kdr}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t \qquad (111)$$

Por un proceso semejante se hallan las siguientes ecuaciones de transformación al sistema de referencia múltiple, en función de los sistemas que giran en sentido horario (cantidades -e) que están expresados en el sistema de referencia rotando sincronizadamente.

$$f_{qs}^{-ke} = f_{kqs}^{-e} \cos(k-1)\omega_e t + f_{kds}^{-e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \qquad (112)$$

$$f_{ds}^{-ke} = - f_{kqs}^{-e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f_{kds}^{-e} \cos(k-1)\omega_e t \qquad (113)$$

$$f_{qr}^{-ke} = f_{kqr}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t + f_{kdr}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t \qquad (114)$$

$$f_{dr}^{-ke} = - f_{kqr}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + f_{kdr}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t \qquad (115)$$

Donde: (108), (109) y (112), (113) son las ecuaciones de transformación para las cantidades del estator; mientras que (110), (111) y (114), (115) lo son para las cantidades del rotor. Si los devanados del rotor son cortocircuitados se tendrá que $v_{ar} = v_{br} = v_{cr} = 0$.

Puesto que se había dicho que f es una variable que puede representar voltaje, corriente o concatenación de flujo, entonces las ecuaciones (108) y (109) expresadas como voltajes quedarán:

$$v_{qs}^{+ke} = v_{kqs}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t - v_{kds}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \qquad (108)$$

$$v_{ds}^{+ke} = v_{kqs}^{+e} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + v_{kds}^{+e} \cos(k-1)\omega_e t \qquad (109)$$

Pero las expresiones para los voltajes v_{kqs}^{+e} y v_{kds}^{+e} son precisamente las ecuaciones (104) y (105) respectivamente, entonces, sustituyendo (104) y (105) en las ecuaciones (108) y (109) se tiene que:

$$v_{qs}^{+ke} = \{ \frac{1}{2} \Sigma \; ((V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \cos(k-1)\omega_e t -$$

$$- \{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t) \} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t$$

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma})(\cos(k-1)\omega_e t)^2 +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \cos(k-1)\omega_e t -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma})(\operatorname{sen}(k-1)\omega_e t)^2 +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t)$$

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) ((\cos(k-1)\omega_e t)^2 + (\operatorname{sen}(k-1)\omega_e t)^2) +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) (\operatorname{sen}(k-1)\omega_e t. \cos(k-1)\omega_e t - \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t.$$

$$\cos(k-1)\omega_e t) \}$$

quedando finalmente:

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma})$$

Cabe hacer un comentario, sobre éste último resultado: el sistema de referencia múltiple está conformado por $\pm$ k estructuras, donde cada estructura de referencia tiene una velocidad angular $\pm k\omega_e$, recordando que el signo + significa sentido de rotación antihorario, mientras que el signo - significa sentido de rotación horario.

En cada estructura de referencia particular, existirán voltajes aplicados específicos, así por ejemplo: para k = 2 se tendrán los

siguientes voltajes aplicados:

Voltajes estator

v_{qs}^{+2e} , v_{ds}^{+2e}

Voltajes del rotor

v_{qr}^{+2e} , v_{dr}^{+2e}

Esta estructura girará a una velocidad $2\omega_e$ (sentido antihorario), donde recordándo, ω_e es la velocidad angular eléctrica a la cual gira la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

Entonces, la anterior expresión calcula el voltaje en el sistema de referencia múltiple como una sumatoria de cada uno de los voltajes v_{qs} existentes en cada estructura de referencia específica.

$$v_{qs}^{+ke} = v_{qs}^{+1e} + v_{qs}^{+2e} + v_{qs}^{+3e} + \ldots\ldots + v_{qs}^{+ke}$$

Si se desea calcular un voltaje v_{qs}^{+ke} para un valor específico de k, entonces puede ser utilizada la expresión (116)

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \qquad (116)$$

Para hallar el voltaje v_{ds}^{+ke} expresado en el sistema de referencia múltiple, se reemplazan las expresiones v_{kqs}^{+e} y v_{kds}^{+e} (ecuaciones 104 y 105) en la ecuación (109):

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k-1)\omega_e t + \right.$$

$$\left. + (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(- (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + \right.$$

$$\left. + (V_{kq\gamma} + B_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t) \cos(k-1)\omega_e t \right.$$

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) (\cos(k-1)\omega_e t \,.\, \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t +$$

$$+ \cos(k-1)\omega_e t \,.\, \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) (\operatorname{sen}^2(k-1)\omega_e t + \cos^2(k-1)\omega_e t) \}$$

quedando finalmente:

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha})$$

Si se quiere encontrar el valor de v_{ds}^{+ke} para una estructura específica, se utilizará la siguiente expresión:

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \tag{117}$$

Por un proceso similar, las ecuaciones (110) y (111) expresadas como voltajes quedarán como:

$$v_{qs}^{-ke} = v_{kqs}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t + v_{kds}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t \tag{110}$$

$$v_{ds}^{-ke} = - v_{kqs}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + v_{kds}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t \qquad (111)$$

Las expresiones v_{kqs}^{-e} y v_{kds}^{-e} de las ecuaciones (106) y (107) respectivamente pueden ser reemplazadas en (110) y (111) tal como se muestra:

$$v_{qs}^{-ke} = v_{kqs}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t + v_{kds}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t \qquad (110)$$

reemplazando:

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \cos(k+1)\omega_e t + \right.$$

$$\left. + (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t \right) \cos(k+1)\omega_e t +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t - \right.$$

$$\left. - (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \cos(k+1)\omega_e t \right) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t$$

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) (\cos^2(k+1)\omega_e t + \operatorname{sen}^2(k+1)\omega_e t) +$$

$$+ (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) (\operatorname{sen}(k+1)\omega_e t . \cos(k+1)\omega_e t -$$

$$\operatorname{sen}(k+1)\omega_e t \ . \ \cos(k+1)\omega_e t) \}$$

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma})$$

Para una estructura específica:

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \tag{118}$$

Ahora para v_{ds}^{-ke} , reemplazando (106) y (107) en (111):

$$v_{ds}^{-ke} = - v_{kqs}^{-e} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + v_{kds}^{-e} \cos(k+1)\omega_e t \tag{111}$$

reemplazando:

$$v_{ds}^{-ke} = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \cos(k+1)\omega_e t -$$

$$- (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((V_{kq\alpha} + B_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t -$$

$$- (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \cos(k+1)\omega_e t) \cos(k+1)\omega_e t$$

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{(V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) (\cos(k+1)\omega_e t \,.\, \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t -$$

$$- \cos(k+1)\omega_e t \,.\, \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t) - (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha})$$

$$(\operatorname{sen}^2(k+1)\omega_e t + \cos^2(k+1)\omega_e t) \}$$

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha})$$

Era una estructura específica:

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \tag{119}$$

En resumen, se ha llegado a las siguientes ecuaciones:

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \tag{116}$$

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \tag{117}$$

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \tag{118}$$

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \tag{119}$$

En este punto, cabe hacer un comentario sobre las ecuaciones (116) a (119).

Hay que recordar que $V_{kq\alpha}$ y $V_{kq\gamma}$ son los coeficientes de los términos coseno y seno respectivamente de la expansión en serie de Fourier de v_{qs}^{s} (ver ecuación (9)) y que $V_{kd\alpha}$ y $V_{kd\gamma}$ son los coeficientes de los términos coseno y seno respectivamente del voltaje v_{ds}^{s} (ecuación (91)). Así por ejemplo si:

$$v_{qs}^{s} = \frac{1}{3}\cos\omega_e t + \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,\omega_e t - \frac{1}{5}\cos 5\omega_e t - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,5\omega_e t$$

Entonces los coeficientes $V_{kq\alpha}$ y $V_{kq\gamma}$ serán:

$$V_{1q\alpha} = \frac{1}{3} \qquad V_{1q\gamma} = \frac{1}{6} \qquad V_{2q\alpha} = V_{3q\alpha} = V_{4q\alpha} = 0$$

$$V_{5q\alpha} = -\frac{1}{5} \qquad V_{5q\gamma} = -\frac{1}{10} \qquad V_{2q\gamma} = V_{3q\gamma} = V_{4q\gamma} = 0$$

$$V_{ds}^{s} = \frac{1}{2}\cos 2\omega_e t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4\omega_e t + \frac{1}{6}\cos 6\omega_e t$$

Entonces los coeficientes $V_{kd\alpha}$ y $V_{kd\gamma}$ serán:

$$V_{1d\alpha} = V_{3d\alpha} = V_{4d\alpha} = V_{5d\alpha} = 0$$

$$V_{1d\gamma} = V_{2d\gamma} = V_{3d\gamma} = V_{5d\gamma} = V_{6d\gamma} = 0$$

$$V_{2d\alpha} = \frac{1}{2} \qquad V_{4d\gamma} = \frac{1}{4}$$

$$V_{6d\alpha} = \frac{1}{6}$$

Además, ya que $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$ fueron establecidos en base a los voltajes de fase v_{as}, v_{bs}, v_{cs}; entonces, los voltajes $v_{qs}{}^{+ke}$, $v_{ds}{}^{+ke}$, $v_{qs}{}^{=ke}$ y $v_{ds}{}^{-ke}$ que están para ser aplicadas a cada una de las estructuras de referencia, pueden ser determinados directamente de las ecuaciones (116) a (119), esto es, si bien fue conveniente para el desarrollo del método del sistema de referencia múltiple, el llegar a las ecuaciones (102) a (107) expresadas en el sistema de referencia rotando sincronizadamente; es innecesario considerarlos, ya que, conocidos $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$ (ecuaciones (90) y (91)), pueden ser directamente hallados los voltajes (116) a (119) expresados en el sistema de referencia múltiple, puesto que éstos últimos están en función de los coeficientes $V_{kq\alpha}$, $V_{kq\gamma}$, $V_{kd\alpha}$, $V_{kd\gamma}$, que ya son datos conocidos una vez encontrado las expresiones $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$.

Hay que recordar además que los superíndices +ke y -ke identifican la velocidad y el sentido de rotación de las estructuras de referencia. Así por ejemplo: +1e: El signo + significa sentido antihorario y puesto que k = 1, denota la estructura de referencia rotando

a la velocidad sincrónica ω_e.

-5e: El signo - denota sentido de rotación horario de una estructura cuya velocidad angular es 5 veces la velocidad sincrónica (k=5).

ECUACIONES GENERALES DE VOLTAJE EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE:

En la ecuación matricial (61) del capítulo I, se tienen las ecuaciones generales de voltaje en el sistema de ejes arbitrarios de referencia.

También, anteriormente se obtuvo las ecuaciones de transformación (108) a (111) y (112) a (115), que sirvieron para hallar las expresiones para los voltajes a ser aplicados en el sistema de referencia múltiple.

Ahora, se hace indispensable encontrar las ecuaciones generales de voltaje en el sistema de referencia múltiple, para ésto sería necesario utilizar las ecuaciones de transformación (108) a (115) en las ecuaciones de voltaje de la máquina de inducción para obtener las ecuaciones de voltaje para cada una de las estructuras de referencia - que componen el sistema de referencia múltiple; en realidad, no es necesario realizar esta larga tarea, sino que simplemente se puede utilizar la ecuación matricial (61) ajustando en ésta la velocidad de la estructura de referencia arbitraria ω a la velocidad de la estructura de referencia deseada.

(1)

Entonces, la siguiente ecuación matricial puede ser utilizada para determinar las ecuaciones de voltaje de la máquina de inducción en todas las estructuras de referencia:

$$\begin{vmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}^{ne} = \begin{vmatrix} r_s+L_{ss}p & n\omega_e L_{ss} & Mp & n\omega_e M \\ -n\omega_e L_{ss} & r_s+L_{ss}p & -n\omega_e M & Mp \\ Mp & (n\omega_e-\omega_r)M & r'_r+L'_{rr}p & (n\omega_e-\omega_r)L'_{rr} \\ -(n\omega_e-\omega_r)M & Mp & -(n\omega_e-\omega_r)L'_{rr} & r'_r+L'_{rr}p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{vmatrix}^{ne} \qquad (120)$$

Donde n es utilizado para denotar $\pm k$. Los demás parámetros de la máquina de inducción ya fueron descritos en el capítulo I.

Cada valor de k, da por resultado dos estructuras de referencia: + ke y -ke, de las cuales deben ser consideradas aquellas estructuras cuyos voltajes aplicados sean diferentes de cero.

En la expresión (120), no aparecen las componentes de eje cero, pues en el capítulo I se mencionó que para el caso de sistemas que tienen conexión de tres alambres, dichas componentes desaparecen. Tampoco aparecen los voltajes v'_{qr} y v'_{dr} a ser aplicados en el rotor, debido a que anteriormente se mencionó que si los devanados del rotor son cortocircuitados, entonces los voltajes $v_{ar} = v_{br} = v_{cr} = 0$, lo que implica que los voltajes $v'_{qr} = v'_{dr} = 0$.

La ecuación matricial (120), permite el estudio a velocidad constante de los transitorios eléctricos y del trabajo en estado estable de una máquina de inducción simétrica.

2.2.1.b. Ecuaciones de las Corrientes

Puesto que las velocidades de las diferentes estructuras de referencia que conforman el sistema de referencia múltiple, han sido seleccionadas de tal manera que los voltajes a ser aplicados en ellas (ecuaciones (116) a (119)) sean constantes, entonces las corrientes de estado estable debidas a ellos, también serán constantes.

Como se había dicho, la ecuación matricial (120) puede ser utilizada para el análisis en estado estable, resolviendo (120) para hallar las corrientes de estado estable, se llega a las siguientes expresiones:

$$i_{qs}^{ne} = \left(\frac{A}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{qs}^{ne} + \left(\frac{B}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{ds}^{ne} \qquad (121)$$

$$i_{ds}^{ne} = - \left(\frac{B}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{qs}^{ne} + \left(\frac{A}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{ds}^{ne} \qquad (122)$$

$$i'^{ne}_{qr} = \left(\frac{C}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{qs}^{ne} + \left(\frac{D}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{ds}^{ne} \qquad (123)$$

$$i'^{ne}_{dr} = - \left(\frac{D}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{qs}^{ne} + \left(\frac{C}{E}^{ne}_{ne} \right) v_{ds}^{ne} \qquad (124)$$

Donde:

$$A^{ne} = r_s \left[r_r'^2 + \left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right)^2 f_R^2 X_{rr}'^2\right] + n\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) r_r' f_R^2 X_m^2 \qquad (125)$$

$$B^{ne} = n\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right)^2 f_R^3 X_{rr}' (X_m^2 - X_{ss} X_{rr}') - n\, r_r'^2 f_R X_{ss} \qquad (126)$$

$$C^{ne} = -\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) f_R^2 X_m \left[n\, r_r' X_{ss} + \left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) r_s X_{rr}'\right] \qquad (127)$$

$$D^{ne} = -\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) f_R X_m \left[r_s r_r' + n\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) f_R^2 (X_m^2 - X_{ss} X_{rr}')\right] \qquad (128)$$

$$E^{ne} = \left[r_s r_r' + n\left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) f_R (X_m^2 - X_{ss} X_{rr}')\right]^2 +$$

$$+ \left[n\, r_r' f_R X_{ss} + \left(n - \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) r_s f_R X_{rr}'\right]^2 \qquad (129)$$

Donde, todos los valores estan en "por unidad" (p.u.), se ha introducido la ω_b = velocidad angular base, y se hace uso de las reactancias inductivas X_{ss}, X_{rr}', X_m en lugar de sus respectivas inductancias.

además: $f_R = \dfrac{\omega_e}{\omega_b}$

Las ecuaciones (121) a (124) son las corrientes expresadas en el sistema de referencia múltiple para el trabajo en estado estable.

Conviene hacer un ejemplo, que clarifique como calcular las corrientes mediante las ecuaciones (121) a (124):

Sean v_{qs}^{-2e} y v_{ds}^{-2e} los voltajes aplicados en una estructura de referencia que gira en sentido horario y que gira a una velocidad $2\omega_e$.

Entonces las corrientes resultantes serán i_{qs}^{-2e}, i_{ds}^{-2e}, i'^{-2e}_{qr} e i_{dr}^{-2e}. (pues n = - 2).

Para calcular i_{qs}^{-2e}, se utiliza la ecuación (121) quedando:

$$i_{qs}^{-2e} = \left(\frac{A^{-2e}}{E^{-2e}}\right) v_{qs}^{-2e} + \left(\frac{B^{-2e}}{E^{-2e}}\right) v_{ds}^{-2e}$$

donde los valores de A^{-2e}, B^{-2e}, E^{-2e} pueden ser hallados utilizando las expresiones (125), (126) y (127), en base a los datos de la máquina expresados en "por unidad".

De una manera semejante se pueden hallar i_{ds}^{-2e}, i'^{-2e}_{qr} e i'^{-2e}_{dr}.

TRANSFORMACION DE LAS CORRIENTES EXPRESADAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE A LA ESTRUCTURA DE REFERENCIA ROTANDO SINCRONIZADAMENTE.

Para transformar las corrientes qs y ds del sistema de referencia múltiple a la estructura de referencia rotando sincronizadamente, se puede hacer uso de las figuras 2.2.1.b.1. y 2.2.1.b.2, la prime

ra para transformar las cantidades + ke y las segunda para las - ke.

Pues hay que recordar que el sistema de referencia múltiple hay dos grupos de estructuras: las + ke que giran en sentido antihorario y las - ke que lo hacen en sentido horario.

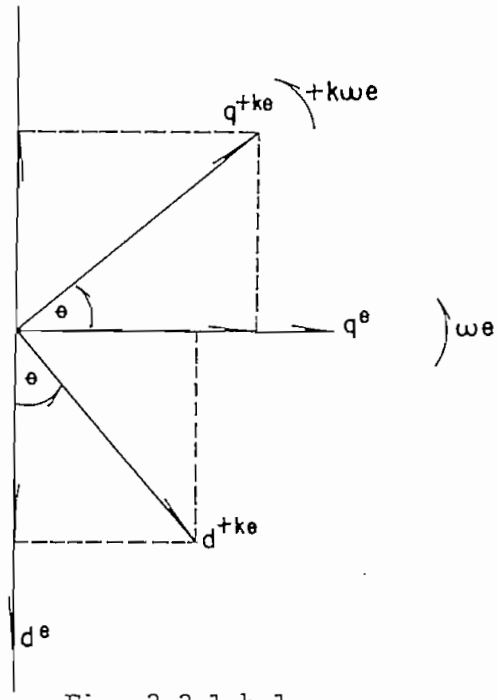


Fig. 2.2.1.b.1.

De la figura 2.2.1.b.1. y de las relaciones trigonométricas entre los dos pares de ejes se tiene que:

$$f_{lqs}^{\ e} = f_{qs}^{\ +ke} \cos\theta + f_{ds}^{\ ke} \operatorname{sen}\theta$$

donde: $\theta = (k\omega_e - \omega_e)t = (k-1)\omega_e t$

reemplazando el valor de θ:

$$f_{lqs}^{\ e} = f_{qs}^{\ +ke} \cos(k-1)\omega_e t + f_{ds}^{\ ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t$$

ahora $f_{1ds}{}^{e}$:

$$f_{1ds}{}^{e} = - f_{ds}{}^{+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f_{ds}{}^{+ke} \cos(k-1)\omega_e t$$

La figura 2.2.1.b.2. servirá para encontrar las ecuaciones de transformación del sistema de referencia múltiple a la estructura de referencia estacionaria.

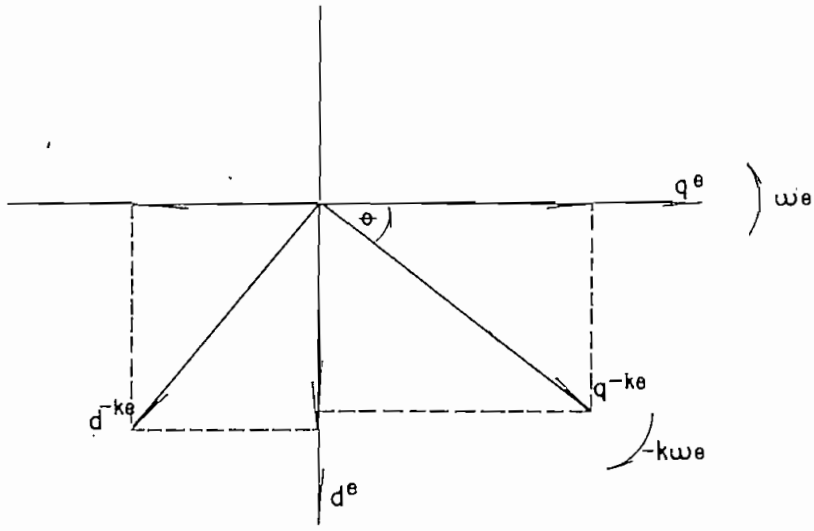


Fig. 2.2.1.b.2.

De la figura, se tiene que:

$$f_{2qs}{}^{e} = f_{qs}{}^{-ke} \cos\theta - f_{ds}{}^{-ke} \operatorname{sen}\theta$$

donde $\theta = \omega_e t - (- k\omega_e t) = (k+1)\omega_e t$

$$f_{2qs}{}^{e} = f_{qs}{}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t - f_{ds}{}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t$$

$$f_{2ds}{}^{e} = f_{qs}{}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + f_{ds}{}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t$$

Aplicando el principio de superposición:

$$f_{qs}^{e} = f_{1qs}^{e} + f_{2qs}^{e}$$

$$f_{ds}^{e} = f_{1ds}^{e} + f_{2ds}^{e}$$

Entonces

$$f_{qs}^{e} = (f_{qs}^{ke} \cos(k-1)\omega_e t + f_{ds}^{ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) +$$

$$+ (f_{qs}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t - f_{ds}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t)$$

reemplazando el valor de f por corriente y aplicando el principio de superposición, la corriente total i_{qs}^{e} será la suma de cada una de las corrientes i_{qs}^{+ke}, i_{ds}^{+ke}, i_{qs}^{-ke}, i_{ds}^{-ke} pero transformadas a la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

La expresión anterior quedará:

$$i_{qs}^{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (i_{qs}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t - i_{ds}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ i_{qs}^{+ke} \cos(k-1)\omega_e t + i_{ds}^{+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (130)$$

De manera similar para i_{ds}^{e}:

$$f_{ds}^{e} = (f_{qs}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + f_{ds}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t) +$$

$$+ (- f_{qs}^{ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f_{ds}^{ke} \cos(k-1)\omega_e t)$$

Por un razonamiento similar al desarrollado para hallar i_{qs}^{e}, se puede hallar la expresión para i_{ds}^{e}:

$$i_{ds}^{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (i_{ds}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t + i_{qs}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ i_{ds}^{+ke} \cos(k-1)\omega_e t - i_{qs}^{+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (131)$$

En resumen, se tienen las ecuaciones (130) y (131), que son las corrientes i_{qs}^{e} e i_{ds}^{e} expresadas en la estructura de referencia - rotando sincronizadamente sincronizadamente, en función de las corrientes i_{qs}^{+ke}, i_{ds}^{+ke}, i_{qs}^{-ke}, i_{ds}^{-ke} del sistema de referencia múltiple.

TRANSFORMACION DE LAS CORRIENTES EXPRESADAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE A LA ESTRUCTURA DE REFERENCIA ESTACIONARIA. (1)

Para hallar las corrientes i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} (estator) e $i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$ (rotor) expresadas en la estructura de referencia estacionaria, es necesario encontrar las ecuaciones de transformación que permitan transformar las corrientes i_{qs}^{+ke}, i_{ds}^{+ke}, i_{qs}^{-ke}, i_{ds}^{-ke} (estator) e $i_{qr}^{'+ke}$, $i_{dr}^{'+ke}$, $i_{qr}^{'-ek}$, $i_{dr}^{'-ke}$ (rotor) del sistema de referencia múltiple.

Entonces, para encontrar las corrientes de estator i_{qs}^{s} e i_{ds}^{s} expresadas en la estructura de referencia estacionaria, se hará uso de las figuras 2.2.1.b.3 y 2.2.1.b.4.

En la figura 2.2.1.b.3. se ha dibujado los dos pares de ejes

q - d, el uno que gira a una velocidad $+k\omega_e$ representado por los ejes q_s^{+ke} y d_s^{+ke}, y el otro estacionario, representado por los ejes q^s y d^s.

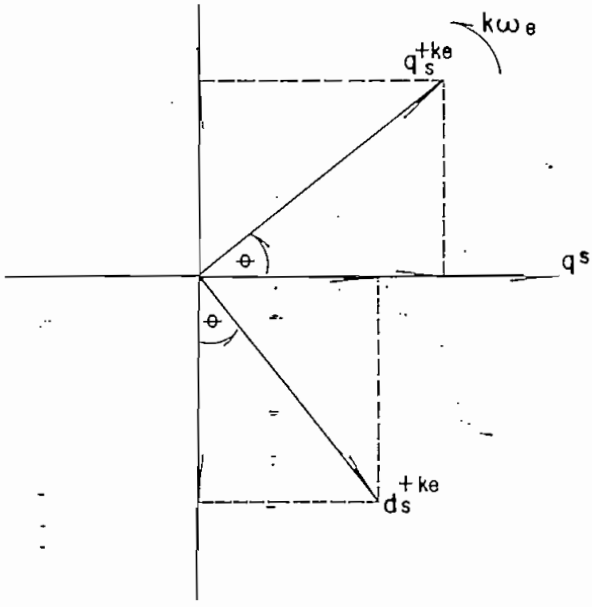


Fig. 2.2.1.b.3.

De la figura se tiene que:

$$\theta = k\omega_e t$$

$$f_{1qs}{}^{s} = f_{qs}{}^{ke} \cos k\omega_e t + f_{ds}{}^{ke} \operatorname{sen} k\omega_e t$$

$$f_{1ds}{}^{s} = - f_{qs}{}^{ke} \operatorname{sen} k\omega_e t + f_{ds}{}^{ke} \cos k\omega_e t$$

En la figura 2.2.1.b.4. se tienen los ejes $q_s{}^{-ke}$ y $d_s{}^{-ke}$ que gira a la velocidad $k\omega_e$ pero en sentido horario; y q^s y d^s estacionario.

De la figura:

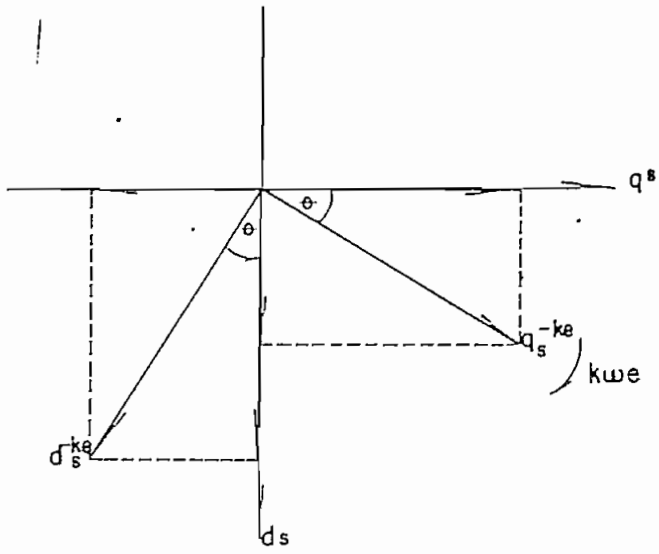


Fig. 2.2.1.b.4.

$$f_{2qs}{}^{s} = - f_{qs}{}^{-ke} \cos k\omega_e t - f_{ds}{}^{-ke} \operatorname{sen} k\omega_e t$$

$$f_{2ds}{}^{s} = f_{qs}{}^{-ke} \operatorname{sen} k\omega_e t + f_{ds}{}^{-ke} \cos k\omega_e t$$

Donde $f_{1qs}{}^{s}$, $f_{1ds}{}^{s}$, $f_{2qs}{}^{s}$, $f_{2ds}{}^{s}$ son variables q - d expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

Las variables $f_{1qs}{}^{s}$, $f_{1ds}{}^{s}$ y $f_{2qs}{}^{s}$, $f_{2ds}{}^{s}$ fueron producto de los aportes de las cantidades +ke y -ke respectivamente. Pero en la estructura de referencia estacionaria existe una sola $f_{qs}{}^{s}$ y una $f_{ds}{}^{s}$, por lo que $f_{qs}{}^{s}$ será el resultado del aporte en el eje q de las cantidades +k (que es $f_{1qs}{}^{s}$) y de las -k cuyo aporte es $f_{2qs}{}^{s}$; $f_{ds}{}^{s}$ es el resultado del aporte en el eje d de las cantidades +k (que es $f_{1ds}{}^{s}$) y de las -k cuyo aporte es $f_{2ds}{}^{s}$.

Entonces, por lo anteriormente expresado se puede escribir:

$$f_{qs}^{s} = f_{1qs}^{s} + f_{2qs}^{s}$$

$$f_{ds}^{s} = f_{1ds}^{s} + f_{2ds}^{s}$$

que reemplazando los respectivos valores queda:

$$f_{qs}^{s} = (f_{qs}^{ke} \cos k\omega_e t + f_{ds}^{ke} \operatorname{sen} k\omega_e t) +$$

$$+ (f_{qs}^{-ke} \cos k\omega_e t - f_{ds}^{-ke} \operatorname{sen} k\omega_e t)$$

$$f_{ds}^{s} = (- f_{qs}^{ke} \operatorname{sen} k\omega_e t + f_{ds}^{ke} \cos k\omega_e t) +$$

$$+ (f_{qs}^{-ke} \operatorname{sen} k\omega_e t + f_{ds}^{-ke} \cos k\omega_e t)$$

finalmente, si las anteriores ecuaciones se expresan como corrientes, y además se considera que el aporte individual de corriente de cada una de las estructuras de referencia del sistema de referencia múltiple transformadas a la estructura de referencia estacionaria deben ser superpuestas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$i_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} ((i_{qs}^{ke} + i_{qs}^{-ke}) \cos k\omega_e t + (i_{ds}^{ke} - i_{ds}^{-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{132}$$

$$i_{ds}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} ((i_{ds}^{ke} + i_{ds}^{-ke}) \cos k\omega_e t - (i_{qs}^{ke} - i_{qs}^{-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{133}$$

Donde:

i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} Son las corrientes en la estructura de referencia estacionaria.

s = Es un superíndice que denota variable en la estructura de referencia estacionaria.

Para encontrar las corrientes de rotor $i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$ expresadas en la estructura de referencia estacionaria, se sigue un procedimiento similar, obteniéndose:

$$i_{qr}^{'s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i_{qr}^{'ke} + i_{qr}^{'-ke}) \cos k\omega_e t + (i_{dr}^{'ke} - i_{dr}^{'-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{134}$$

$$i_{dr}^{'s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i_{dr}^{'ke} + i_{dr}^{'-ke}) \cos k\omega_e t - (i_{qr}^{'ke} - i_{qr}^{'-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{135}$$

2.2.1.c. Ecuación del Torque

Para obtener la ecuación del torque electromagnético expresado en función de las corrientes del sistema de referencia múltiple, se puede partir de la ecuación (81):

$$T = M \left(\frac{m}{2} \right) \left(\frac{P}{2} \right) (i_{qs}^{s} \cdot i_{dr}^{'s} - i_{ds}^{s} \cdot i_{qr}^{'s}) \tag{136}$$

Recordando que

m = número de fases.

P = número de polos de la máquina

i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} = corrientes q - d de estator, en la estructura de referencia estacionaria.

i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{dr} = corrientes q - d del rotor, expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

Las corrientes i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} e i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{dr} fueron ya determinadas y son las ecuaciones (132), (133) y (134), (135) respectivamente. Con el fin de facilitar los cálculos, se han hecho los siguientes reemplazos en (132) a (135):

$$a = i_{qs}^{+ke} \qquad e = i'^{+ke}_{qr}$$

$$b = i_{qs}^{-ke} \qquad f = i'^{-ke}_{qr}$$

$$c = i_{ds}^{+ke} \qquad g = i'^{+ke}_{dr}$$

$$d = i_{ds}^{-ke} \qquad h = i'^{-ke}_{dr}$$

$$\theta = k\omega_e t$$

Entonces, se tendrá:

$$i_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((a + b) \cos\theta + (c - d) \operatorname{sen}\theta \right)$$

$$i_{ds}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((c + d) \cos\theta - (a - b) \operatorname{sen}\theta \right)$$

$$i_{qr}^{'s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((e + f) \cos\theta + (g - h) \operatorname{sen}\theta \right)$$

$$i_{dr}^{'s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((g + h) \cos\theta - (e + f) \operatorname{sen}\theta \right)$$

Reemplazando éstas expresiones en (136) y dejando en el lado derecho de la ecuación lo que es el sumatorio:

$$\frac{4T}{Mmp} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \left((a+b)\cos\theta + (c-d)\operatorname{sen}\theta \right)\left((g+h)\cos\theta - (e-f)\operatorname{sen}\theta\right) -$$

$$- \left((c+d)\cos\theta - (a-b)\operatorname{sen}\theta \right)\left((e+f)\cos\theta + (g-h)\operatorname{sen}\theta \right) \}$$

llamando:

$$\alpha = \frac{4T}{Mmp}$$

Desarrollando el contenido del sumatorio:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{(a+b)(g+h)\cos^2\theta - (a+b)(e-f)\cos\theta \operatorname{sen}\theta +$$

$$+ (c-d)(g+h)\cos\theta \operatorname{sen}\theta - (c-d)(e-f)\operatorname{sen}^2\theta -$$

$$- \left((c+d)(e+f)\cos^2\theta + (c+d)(g-h)\cos\theta \operatorname{sen}\theta - \right.$$

$$\left. - (a-b)(e+f)\cos\theta \operatorname{sen}\theta - (a-b)(g-h)\operatorname{sen}^2\theta \right) \}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{(a+b)(g+h)\cos^2\theta - (a+b)(e-f)\cos\theta \operatorname{sen}\theta + (c-d)(g+h)\cos\theta \operatorname{sen}\theta -$$

$$- (c-d)(e-f)\operatorname{sen}^2\theta - (c-d)(e+f)\cos^2\theta - (c+d)(g-h)\cos\theta \operatorname{sen}\theta +$$

$$+ (a-b)(e+f)\cos\theta \ \mathrm{sen}\theta + (a-b)(g-h)\mathrm{sen}^2\theta \}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ ((a+b)(g+h) - (c+d)(e+f)) \cos^2\theta +$$

$$+ (- (a+b)(e-f) + (c-d)(g+h) - (c+d)(g-h) +$$

$$+ (a-b)(e+f)) \cos\theta \ \mathrm{sen}\theta +$$

$$+ ((a-b)(g-h) - (c-d)(e-f)) \ \mathrm{sen}^2\theta \}$$

llamando:

$$'\{1\} = ((a+b)(g+h) - (c+d)(e+f))$$

$$'\{1\} = (ag + ah + bg + bh - ce - cf - de - df)$$

$$'\{2\} = ((a-b)(g-h) - (c-d)(e-f))$$

$$'\{2\} = (ag - ah - bg + bh - ce + df + de - df)$$

Entonces:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ '\{1\} \cos^2\theta + '\{2\} \ \mathrm{sen}^2\theta + (-ae + af - be + bf + cg + ch +$$

$$+ dg - dh - cg + ch - dg + dh + ae + af - be - bf) \cos\theta \ \mathrm{sen}\theta \}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ '\{1\} \cos^2\theta + '\{2\} \ \mathrm{sen}^2\theta + (2af - 2be + 2ch - 2dg) \cos\theta \ \mathrm{sen}\theta \}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{}\{1\} \cos^2\theta + \dot{}\{2\} \operatorname{sen}^2\theta + ((af + ch) - (be + dg)) \, 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta \}$$

Pero: $2\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2\theta$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{}\{1\} \cos^2\theta + \dot{}\{2\} \operatorname{sen}^2\theta + ((af + ch) - (be + dg)) \operatorname{sen} 2\theta \}$$

como $\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - \cos 2\theta$

haciendo:

$$\dot{}\{3\} = ((af + ch) - (be + dg))$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{}\{ \dot{}\{1\} \cos^2\theta + \dot{}\{2\} (\cos^2\theta - \cos 2\theta) + \dot{}\{3\} \operatorname{sen} 2\theta \}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{}\{ (\dot{}\{1\} + \dot{}\{2\}) \cos^2\theta - \dot{}\{2\} \cos 2\theta + \dot{}\{3\} \operatorname{sen} 2\theta \}$$

desarrollando:

$$(\dot{}\{1\} + \dot{}\{2\}) = (ag + ah + bg + bh - ce - cf - de - df + ag -$$

$$- ah - bg + bh - ce + cf + de - df)$$

$$(\dot{}\{1\} + \dot{}\{2\}) = (2ag + 2bh - 2ce - 2df)$$

$$(\dot{}\{1\} + \dot{}\{2\}) = 2((ag + bh) - (ce + df))$$

Entonces:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{((ag + bh) - (ce + df)) \, 2 \cos^2\theta - \{2\} \cos 2\theta + \{3\} \operatorname{sen} 2\theta\}$$

haciendo:

$$\{4\} = ((ag + bh) - (ce + df))$$

$$\{4\} = (ag + bh - ce - df)$$

y sabiendo que:

$$2\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)$$

se tiene:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \{4\} \; (1 + \cos 2\theta) - \{2\} \cos 2\theta + \{3\} \operatorname{sen} 2\theta\}$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \{4\} + (\{4\} - \{2\}) \cos 2\theta + \{3\} \operatorname{sen} 2\theta \}$$

desarrollando:

$$(\{4\} - \{2\}) = (ag + bh - ce - df - ag + ah + bg - bh +$$

$$+ ce - cf - de + df)$$

$$(\{4\} - \{2\}) = ((ah + bg) - (cf + de))$$

entonces, reemplazando los valores de $\{4\}$, $\{3\}$ y $(\{4\} - \{2\})$, se tiene:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \{ ((ag + bh) - (ce + df)) + ((ah + bg) - (cf + de)) \cos 2\theta +$$

$$+ ((af + ch) - (dg + be)) \operatorname{sen} 2\theta \}$$

finalmente, reemplazando los valores de a, b, c, d, e, f, g, h y $\theta = k\omega_e t$, se obtiene la ecuación del torque:

$$T = M \left(\frac{m}{2} \right) \left(-\frac{P}{2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \{ (i_{qs}^{+ke} \, i_{dr}^{'+ke} + i_{qs}^{-ke} \, i_{dr}^{'-ke}) -$$

$$- (i_{ds}^{+ke} \, i_{qr}^{'+ke} + i_{ds}^{-ke} \, i_{qr}^{'-ke}) +$$

$$+ ((i_{qs}^{+ke} \, i_{dr}^{'-ke} + i_{qs}^{-ke} \, i_{dr}^{'+ke}) -$$

$$- (i_{ds}^{+ke} \, i_{qr}^{'-ke} + i_{ds}^{-ke} \, i_{qr}^{'+ke})) \cos 2k\omega_e t +$$

$$+ ((i_{qs}^{+ke} \, i_{qr}^{'-ke} + i_{ds}^{+ke} \, i_{dr}^{'-ke}) - (i_{ds}^{-ke} \, i_{dr}^{'+ke} +$$

$$+ i_{qs}^{-ke} \, i_{qr}^{'+ke})) \operatorname{sen} 2k\omega_e t \} \qquad (137)$$

2.3. TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES DE UN SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE A UN SISTEMA DE REFERENCIA: (1,3)

2.3.1. ROTANDO EN SINCRONISMO:

Se había indicado, que una estructura de referencia rotando sincronizadamente es aquella que gira a una velocidad angular eléctrica ω_e que es la componente fundamental de los voltajes aplicados.

Las expresiones para los voltajes en el sistema de referencia múltiple fueron ya obtenidas en el literal 2.2.1.a y son las siguientes:

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \tag{116}$$

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \tag{117}$$

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \tag{118}$$

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2} (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \tag{119}$$

donde se indicó que $V_{kq\alpha}$, $V_{kq\gamma}$ y $V_{kd\alpha}$, $V_{kd\gamma}$ son los coeficientes de Fourier de los voltajes v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} respectivamente.

Precisamente, para encontrar las expresiones (116) a (119) el estudio se encaminó primeramente a obtener los voltajes v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} expresados en la estructura de referencia estacionaria, en función de los voltajes de fase de entrada (ecuaciones (88), (89) del literal

1.4); a partir de $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$ se encontraron las siguientes expresiones para los voltajes en la estructura de referencia rotando sincronizadamente:

$$v_{qs}{}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \cos(k+1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \cos(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t \Big) \qquad (99)$$

$$v_{ds}{}^{e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big((V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t -$$

$$- (V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \cos(k+1)\omega_e t -$$

$$- (V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \cos(k-1)\omega_e t \Big) \qquad (101)$$

Donde el superíndice e denota variables en la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

La aplicación de los voltajes constantes expresados en (116) a (119) en cada una de las estructuras de referencia que conforman el sistema de referencia múltiple, dará por resultado las corrientes también constantes $i_{qs}{}^{ne}$, $i_{ds}{}^{ne}$, $i'_{qr}{}^{ne}$ e $i'_{dr}{}^{ne}$ (ecuaciones (121) a (124) del literal 2.2.1.b).

Estas corrientes, constantes en el sistema de referencia múltiple, fueron transformadas a la estructura de referencia rotando sincronizadamente, por un procedimiento explicado anteriormente en el literal 2.2.1.b, obteniéndose las corrientes i_{qs}^{e} e i_{ds}^{e}.

$$i_{qs}^{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (i_{qs}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t - i_{ds}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + $$

$$+ i_{qs}^{+ke} \cos(k-1)\omega_e t + i_{ds}^{+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (130)$$

$$i_{ds}^{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (i_{ds}^{-ke} \cos(k+1)\omega_e t + i_{qs}^{-ke} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + $$

$$+ i_{ds}^{+ke} \cos(k-1)\omega_e t - i_{qs}^{+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (131)$$

Donde:

i_{qs}^{e} , i_{ds}^{e} = son las corrientes resultantes de estator expresadas en la estructura de referencia rotando en sincronismo.

$i_{qs}^{\pm ke} = i_{qs}^{ne}$ = son las corrientes i_{qs} de estator en el sistema de referencia múltiple.

$i_{ds}^{\pm ke} = i_{ds}^{ne}$ = son las corrientes i_{ds} de estator en el sistema de referencia múltiple.

n denota $\pm$ k

k = toma valores enteros 1, 2, 3, ... , ∞

Para obtener las corrientes de rotor i'^{e}_{qr}, i'^{e}_{dr} expresadas en la estructura de referencia rotando en sincronismo partiendo de las corrientes de rotor i'^{+ke}_{qr}, i'^{+ke}_{dr}, i'^{-ke}_{qr} e i'^{-ke}_{dr} del sistema de referencia múltiple, es necesario utilizar las ecuaciones de transformación obtenidas en base a las figuras 2.2.1.b.1. y 2.2.1.b.2.:

Estas ecuaciones de transformación para las variables del rotor son las siguientes:

$$f'^{e}_{qr} = (f'^{ke}_{qr} \cos(k-1)\omega_e t + f'^{ke}_{dr} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t +$$

$$+ (f'^{-ke}_{qr} \cos(k-1)\omega_e t - f'^{-ke}_{dr} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t)$$

$$f'^{e}_{dr} = (f'^{-ke}_{qr} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t + f'^{-ke}_{dr} \cos(k+1)\omega_e t) +$$

$$+ (- f'^{+ke}_{qr} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t + f'^{+ke}_{dr} \cos(k-1)\omega_e t)$$

Reemplazando la variable f por corriente y tomando en cuenta que las corrientes i'^{e}_{qr} e i'^{e}_{dr} son el resultado del aporte de cada una de las corrientes del sistema de referencia múltiple pero transformadas a la estructura de referencia rotando en sincronismo (esta es la razón del sumatorio $\sum_{k=1}^{\infty}$); se obtienen los siguientes resultados:

$$i'^{e}_{qr} = \sum_{k=1}^{\infty} (i'^{-ke}_{qr} \cos(k+1)\omega_e t - i'^{-ke}_{dr} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ i'^{+ke}_{qr} \cos(k-1)\omega_e t + i'^{+ke}_{dr} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (138)$$

$$i'^{e}_{dr} = \sum_{k=1}^{\infty} (i'^{-ke}_{dr} \cos(k+1)\omega_e t + i'^{-ke}_{qr} \operatorname{sen}(k+1)\omega_e t +$$

$$+ i_{dr}^{'\,+ke} \cos(k-1)\omega_e t - i_{qr}^{'\,+ke} \operatorname{sen}(k-1)\omega_e t) \qquad (139)$$

Donde:

$i_{qr}^{'\,e}$, $i_{dr}^{'\,e}$ = son las corrientes de rotor expresadas en la estructura de referencia rotando en sincronismo.

$i_{qr}^{'\,\pm ke}$ = Son las corrientes $i_{qr}^{'}$ de rotor en el sistema de referencia múltiple.

$i_{dr}^{'\,\pm ke}$ = Son las corrientes $i_{dr}^{'}$ de rotor expresadas en el sistema de referencia múltiple.

2.3.2. FIJA EN EL ESTATOR

Los voltajes $v_{qs}^{\ s}$ y $v_{ds}^{\ s}$, a ser aplicados en la estructura de referencia estacionaria fueron hallados anteriormente en el numeral 1.4, dichas expresiones están en función de los voltajes de entrada v_{as}, v_{bs}, v_{cs} y son:

$$v_{qs}^{\ s} = v_{as} \qquad (88)$$

$$v_{ds}^{\ s} = \frac{1}{\sqrt{3}} (- v_{bs} + v_{cs}) \qquad (89)$$

donde el superíndice s denota variables en la estructura de referencia estacionaria.

Los voltajes $v_{qs}^{\ s}$ y $v_{ds}^{\ s}$ posteriormente fueron descompuestos -

en serie de Fourier, obteniéndose:

$$v_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\omega_e t + V_{kq\gamma} \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{90}$$

$$v_{ds}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\omega_e t + V_{kd\gamma} \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{91}$$

donde:

$V_{kq\alpha}$, $V_{kq\gamma}$ son los coeficientes de Fourier de v_{qs}^{s} correspondientes a los términos coseno y seno respectivamente.

$V_{kd\alpha}$, $V_{kd\gamma}$ son los coeficientes de Fourier de v_{ds}^{s} correspondientes a los términos coseno y seno respectivamente.

ω_e = Velocidad angular eléctrica correspondiente a la componente fundamental de frecuencia de los voltajes de fase aplicados al estator.

En el literal 2.2.1.b. fueron halladas las corrientes i_{qs}^{s} , i_{ds}^{s} de estator e $i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$ de rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria, para obtenerlas se partió de las expresiones de las corrientes $i_{qs}^{\pm ke}$, $i_{ds}^{\pm ke}$, $i_{qr}^{\pm ke}$ e $i_{dr}^{\pm ke}$ en el sistema de referencia múltiple, transformando cada una de ellas directamente a la estructura de referencia estacionaria y luego haciendo el sumatorio de todas ellas; las ecuaciones de transformación fueron halladas en base a las figuras 2.2.1.b.3. y 2.2.1.b.4.

Otra manera de hallar i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s}, $i_{qr}^{'s}$ e $i_{dr}^{'s}$ es partiendo de

las corrientes i_{qs}^{e}, i_{ds}^{e}, i'^{e}_{qr}, i'^{e}_{dr} expresadas en la estructura de referencia rotando sincronizadamente. Para ésto es necesario hallar ecuaciones de transformación que permitan transformar las variables desde la estructura de referencia rotando sincronizadamente a la estructura de referencia estacionaria. (Recordar que en el literal 2.2.1.b. se siguió un método distinto, pues se hallaron ecuaciones de transformación que permitan transformar las variables desde el sistema de referencia múltiple a la estructura de referencia estacionaria).

Entonces, las expresiones para las corrientes i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s}, i'^{s}_{qr} e i'^{s}_{dr} fueron obtenidas en el literal 2.2.1.b. y son las siguientes:

$$i_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i_{qs}^{+ke} + i_{qs}^{-ke}) \cos k\omega_e t + (i_{ds}^{+ke} - i_{ds}^{-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{132}$$

$$i_{ds}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i_{ds}^{+ke} + i_{ds}^{-ke}) \cos k\omega_e t - (i_{qs}^{+ke} - i_{qs}^{-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{133}$$

$$i'^{s}_{qr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i'^{+ke}_{qr} + i'^{-ke}_{qr}) \cos k\omega_e t + (i'^{+ke}_{dr} - i'^{-ke}_{dr}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{134}$$

$$i'^{s}_{dr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i'^{+ke}_{dr} + i'^{-ke}_{dr}) \cos k\omega_e t - (i'^{+ke}_{qr} - i'^{-ke}_{qr}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{135}$$

donde:

s = superíndice que indica que la variable está expresada en la estructura de referencia estacionaria.

i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} = corrientes q - d de estator expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{dr} = corrientes q - d de rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

$i_{qs}^{\pm ke}$, $i_{ds}^{\pm ke}$ = corrientes de estator expresadas en el sistema de referencia múltiple.

$i'^{\pm ke}_{qr}$, $i'^{\pm ke}_{dr}$ = corrientes de rotor expresadas en el sistema de referencia múltiple.

2.3.3. FIJA EN EL ROTOR

En este literal se encontrará las ecuaciones de transformación que permitirán transformar las corrientes $i_{qs}^{\pm ke}$, $i_{ds}^{\pm ke}$, $i'^{\pm ke}_{qr}$ e $i'^{\pm ke}_{dr}$ del sistema de referencia múltiple a la estructura de referencia fija en el rotor, con el fin de hallar las corrientes i_{qs}^{r}, i_{ds}^{r}, i'^{r}_{qr}, i'^{r}_{dr} en dicha estructura.

Partiendo de las estructuras del sistema de referencia múltiple, se pueden hallar las ecuaciones de las corrientes expresadas en la estructura de referencia fija en el rotor, con la ayuda de las figuras 2.3.3.1. y 2.3.3.2, en las cuales se han dibujado las dos estructuras: la del sistema de referencia múltiple que gira a $\pm k\omega_e$, y la estructura de referenciafija en el rotor, que por lo mismo, girará a una velocidad angular $\omega = \omega_r$, donde ω_r es la velocidad del rotor.

En la figura 2.3.3.1. se ha dibujado la estructura + $k\omega_e$ del sistema de referencia múltiple que gira en sentido antihorario a una velocidad $k\omega_e$, y la estructura de referencia fija en el rotor.

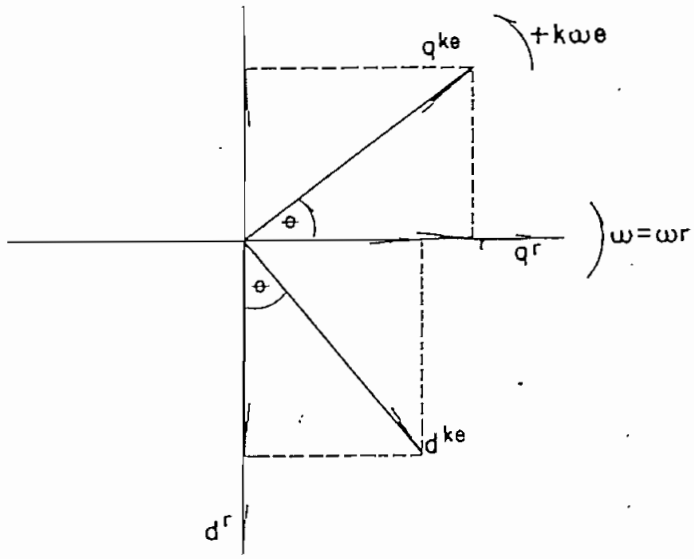


Fig. 2.3.3.1.

De la figura, se pueden obtener las ecuaciones de transformación para las estructuras + $k\omega_e$:

$$f_{1qs}^{\ r} = f_{qs}^{\ +ke} \cos\theta + f_{ds}^{\ +ke} \operatorname{sen}\theta$$

$$f_{1ds}^{\ r} = f_{ds}^{\ +ke} \cos\theta - f_{qs}^{\ +ke} \operatorname{sen}\theta$$

$$\theta = (k\omega_e - \omega_r)\ t$$

donde:

r = superíndice que denota que la variable f está expresada en la estructura de referencia fija en el rotor.

s = subíndice que indica variable del estator.

En la figura 2.3.3.2. se tiene la estructura - $k\omega_e$ del sistema de referencia múltiple que gira en sentido horario a una velocidad $k\omega_e$ y la estructura de referencia fija en el rotor.

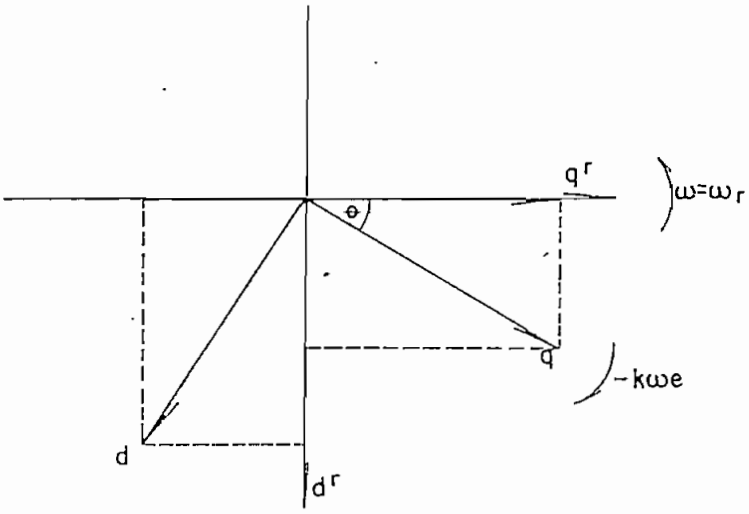


Fig. 2.3.3.2.

Observando la figura 2.3.3.2., se obtienen las ecuaciones de transformación para las estructuras - $k\omega_e$.

$$f_{2qs}^{\ r} = f_{qs}^{\ -ke} \cos\theta - f_{ds}^{\ -ke} \operatorname{sen}\theta$$

$$f_{2ds}^{\ r} = f_{ds}^{\ -ke} \cos\theta + f_{qs}^{\ -ke} \operatorname{sen}\theta$$

$$\theta = (\omega_r - (-k\omega_e)) = (\omega_r + k\omega_e)\ t$$

El aporte de las variables de las dos estructuras (+ $k\omega_e$ y - $k\omega_e$) del sistema de referencia múltiple dará por resultado las siguientes ecuaciones de transformación:

$$f_{qs}^{\ r} = f_{1qs}^{\ r} + f_{2qs}^{\ r}$$

$$f_{ds}^{\ r} = f_{1ds}^{\ r} + f_{2ds}^{\ r}$$

Entonces:

$$f_{qs}^{\ r} = f_{qs}^{\ +ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t + f_{ds}^{\ +ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t +$$

$$+ f_{qs}^{\ -ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t - f_{ds}^{\ -ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \quad (140)$$

$$f_{ds}^{\ r} = f_{ds}^{\ +ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t - f_{qs}^{\ +ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t +$$

$$+ f_{ds}^{\ -ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t + f_{qs}^{\ -ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \quad (141)$$

Si (140) y (141) se expresan como corrientes, y se toma en cuenta que $i_{qs}^{\ r}$, $i_{ds}^{\ r}$ son el resultado de el aporte de cada una de las estructuras del sistema de referencia múltiple:

$$i_{qs}^{\ r} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ i_{qs}^{\ +ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t + i_{ds}^{\ +ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t +$$

$$+ i_{qs}^{\ -ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t - i_{ds}^{\ -ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \} \quad (142)$$

$$i_{ds}^{\ r} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ i_{ds}^{\ +ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t - i_{qs}^{\ +ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t +$$

$$+ i_{ds}^{\ -ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t + i_{qs}^{\ -ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \} \quad (143)$$

Donde:

i_{qs}^{r}, i_{ds}^{r} son las corrientes q, d de estator expresadas en la estructura de referencia fija en el rotor.

Por un procedimiento similar, se obtienen las corrientes $i_{qr}^{'r}$, i_{dr}^{r} de rotor expresadas en la estructura de referencia fija en el rotor:

$$i_{qr}^{r} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ i_{qr}^{'+ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t + i_{dr}^{'+ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t + $$

$$+ i_{qr}^{'-ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t - i_{dr}^{'-ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \} \qquad (144)$$

$$i_{dr}^{r} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ i_{dr}^{'+ke} \cos(k\omega_e - \omega_r)t - i_{qr}^{'+ke} \operatorname{sen}(k\omega_e - \omega_r)t + $$

$$+ i_{dr}^{'-ke} \cos(k\omega_e + \omega_r)t + i_{qr}^{'-ke} \operatorname{sen}(k\omega_e + \omega_r)t \} \qquad (145)$$

2.4. TRANSFORMACION A VARIABLES DE FASE a,b,c.

Las corrientes de fase del estator y del rotor, pueden ser obtenidas partiendo de la estructura de referencia estacionaria.

En la figura 2.4.1. se tienen los ejes q - d de la estructura de referencia estacionaria y, los ejes a, b, c.

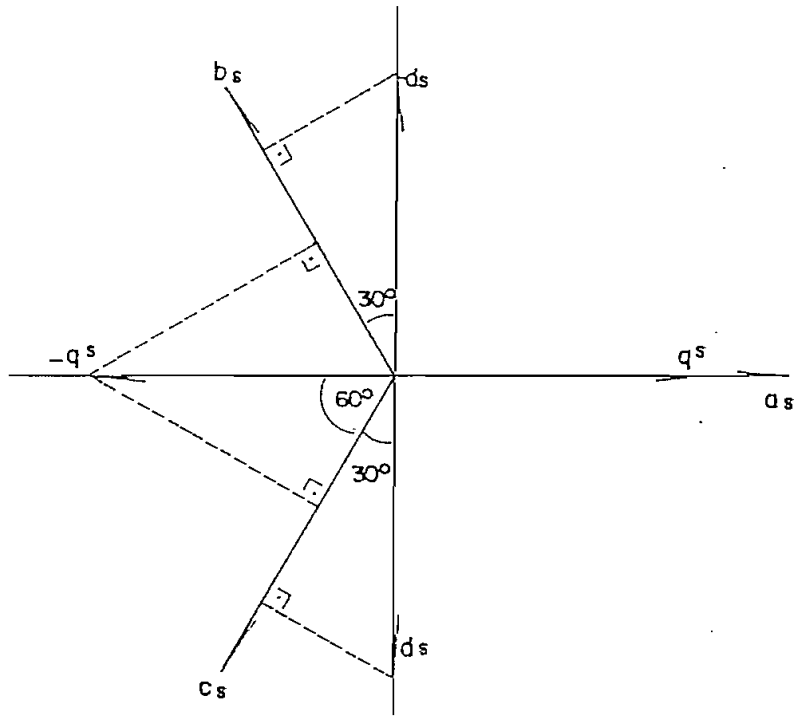


Fig. 2.4.1.

Del gráfico, se obtiene que para las corrientes de estator:

$$i_{as} = i_{qs}^{s} + 0\, i_{ds}^{s} \tag{146}$$

$$i_{bs} = -\, i_{qs}^{s} \cos 60° - i_{ds}^{s} \cos 30°$$

$$i_{bs} = -\frac{1}{2}\, i_{qs}^{s} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i_{ds}^{s} \tag{147}$$

$$i_{cs} = - i_{qs}^{s} \cos 60° + i_{ds}^{s} \cos 30°$$

$$i_{cs} = - \frac{1}{2} i_{qs}^{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{ds}^{s} \qquad (148)$$

Donde:

i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} son las corrientes de estator expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

i_{as}, i_{bs}, i_{cs} son las corrientes de fase de estator.

De una manera similar, las corrientes de fase de rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria, pueden ser obtenidas como sigue:

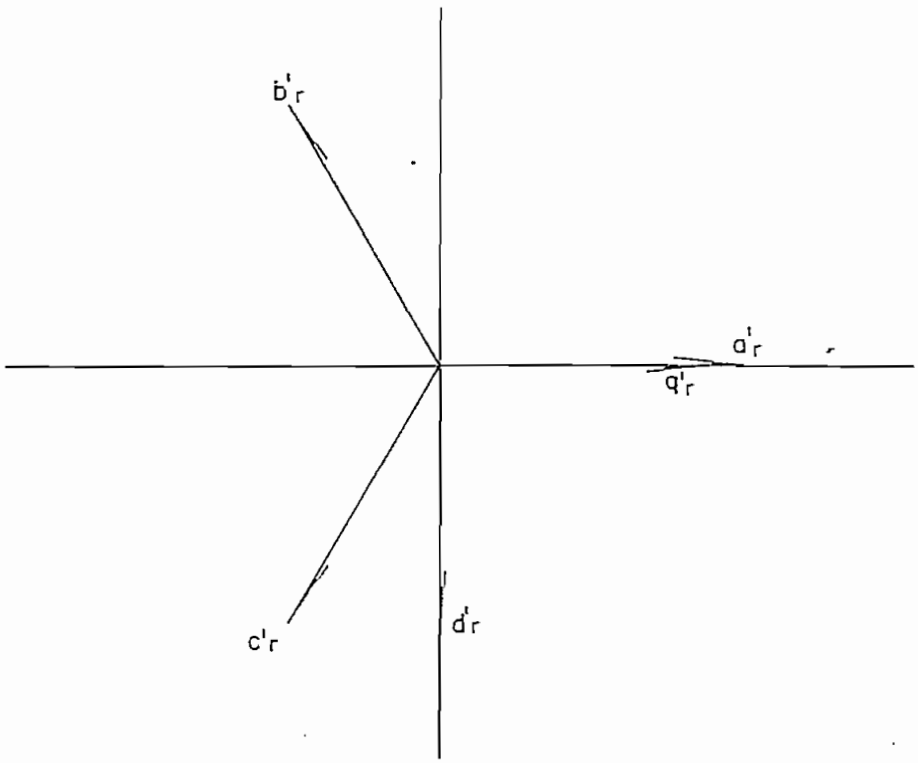


Fig. 2.4.2.

En la figura 2.4.2. se tienen los ejes q - d del rotor expresados en la estructura de referencia estacionaria y los ejes a, b, c, de rotor (pero referidas al estator).

De la figura se tiene:

$$i_{ar}^{'s} = i_{qr}^{'s} \tag{149}$$

$$i_{br}^{'s} = - i_{qr}^{'s} \cos 60° - i_{dr}^{'s} \cos 30°$$

$$i_{br}^{'s} = - \frac{1}{2} i_{qr}^{'s} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}^{'s} \tag{150}$$

$$i_{cr}^{'s} = - i_{qr}^{'s} \cos 60° + i_{dr}^{'s} \cos 30°$$

$$i_{sr}^{'s} = - \frac{1}{2} i_{qr}^{'s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}^{'s} \tag{151}$$

Donde:

's superíndice que indica variable expresada en la estructura de referencia estacionaria.

$i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$ corrientes de rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

$i_{ar}^{'s}$, $i_{br}^{'s}$, $i_{cr}^{'s}$ corrientes de fase de rotor referidas al estator.

2.5. METODOLOGIA GENERAL DE LA APLICACION DEL METODO DEL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE. (1)

Este numeral es una guía práctica para el usuario del método del sistema de referencia múltiple.

En la figura 2.5.1. se muestra el circuito del estator y los voltajes de fuente que lo alimentan.

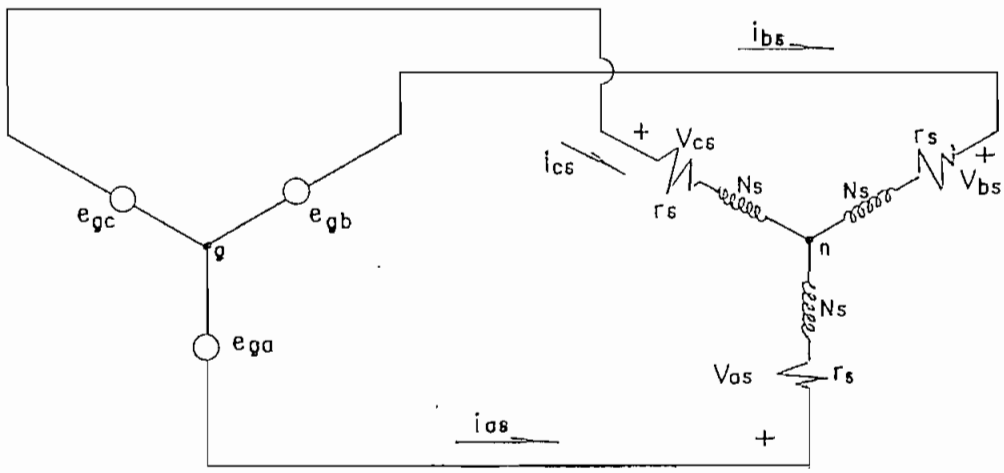


Fig. 2.5.1.

Los voltajes de fase del estator pueden expresarse como:

$$v_{as} = e_{ga} - v_{ng} \tag{152}$$

$$v_{bs} = e_{gb} - v_{ng} \tag{153}$$

$$v_{cs} = e_{gc} - v_{ng} \tag{154}$$

Puesto que se estudia una máquina trifásica simétrica a 3 hi

los, el voltaje de secuencia cero es $v_{os} = 0$, y el voltaje v_{ng} será:

$$v_{ng} - \frac{1}{3}(e_{ga} + e_{gb} + e_{gc}) \tag{155}$$

Entonces, si se sustituye los voltajes de fase v_{as}, v_{bs}, v_{cs} (ecuaciones (152) a (154) en las expresiones de los voltajes $v_{qs}{}^{s}$, $v_{ds}{}^{s}$, (ecuaciones (88) y (89) del numeral 1.4) se obtiene:

$$v_{qs}{}^{s} = \frac{2}{3}(e_{ga} - \frac{1}{2} e_{gb} - \frac{1}{2} e_{gc}) \tag{156}$$

$$v_{ds}{}^{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(- e_{gb} + e_{gc}) \tag{157}$$

Las últimas ecuaciones (156) y (157), servirán en el caso que se tengan como datos los voltajes de fuente; mientras que si los datos son los voltajes de fase v_{as}, v_{bs} y v_{cs}, entonces servirán las expresiones (88) u (89).

Los voltajes $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$ pueden ser expresados en serie de Fourier, obteniéndose las expresiones (90) y (91).

$$v_{qs}{}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kq\alpha} \cos k\omega_e t + V_{kq\gamma} \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{90}$$

$$v_{ds}{}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} (V_{kd\alpha} \cos k\omega_e t + V_{kd\gamma} \operatorname{sen} k\omega_e t) \tag{91}$$

Los coeficientes $V_{kq\alpha}$, $V_{kq\gamma}$, $V_{kd\alpha}$ y $V_{kd\gamma}$ obtenidos en (90) y (91), son entonces sustituídos en las ecuaciones (116), (117), (118), (119).

$$v_{qs}^{+ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\alpha} - V_{kd\gamma}) \tag{116}$$

$$v_{ds}^{+ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\gamma} + V_{kd\alpha}) \tag{117}$$

$$v_{qs}^{-ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\alpha} + V_{kd\gamma}) \tag{118}$$

$$v_{ds}^{-ke} = \frac{1}{2}\,(V_{kq\gamma} - V_{kd\alpha}) \tag{119}$$

Las expresiones (116) a (119) son los voltajes constantes que se van a aplicar a cada estructura de referencia del sistema de referencia múltiple.

Luego de lo cual pueden ser determinadas las corrientes i_{qs}^{ne}, i_{ds}^{ne}, $i_{qr}^{'ne}$, $i_{dr}^{'ne}$ (ecuaciones (121) a (124)) de estado estable, en las estructuras de referencia que estén siendo consideradas.

Las corrientes del sistema de referencia múltiple obtenidas por la aplicación de (121) a (129), pueden ser sustituídas directamente en (132) y (133) y en (134) y (135) para obtener respectivamente, las corrientes I_{qs}^{s}, i_{ds}^{s} de estator e $i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$ de rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

También éstas corrientes pueden ser convertidas a un sistema trifásico, mediante la sustitución directa de (132), (133) en las ecuaciones (146), (147), (148) para obtener las corrientes de fase de estator. Mientras que se deberá sustituir (134) y (135) en (149), (150) y (151) para obtener las corrientes de fase del rotor.

$$i_{as} = i_{qs}^{s} \tag{146}$$

$$i_{bs} = -\frac{1}{2} i_{qs}^{s} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{ds}^{s} \tag{147}$$

$$i_{cs} = -\frac{1}{2} i_{qs}^{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{ds}^{s} \tag{148}$$

$$i_{ar}^{'s} = i_{qr}^{'s} \tag{149}$$

$$i_{br}^{'s} = -\frac{1}{2} i_{qr}^{'s} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}^{'s} \tag{150}$$

$$i_{cr}^{'s} = -\frac{1}{2} i_{qr}^{'s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}^{'s} \tag{151}$$

El torque electromagnético se determina mediante la sustitución de los valores de las corrientes i_{qs}^{ne}, i_{ds}^{ne}, $i_{qr}^{'ne}$, $i_{dr}^{'ne}$ del sistema de referencia múltiple en la ecuación del torque electromagnético (ecuación (137)).

2.6. EVALUACION DE PERDIDAS (1, 3, 5, 6)

El determinar las pérdidas en una máquina es importante pues éstas determinan el rendimiento de ésta, e influyen apreciablemente en el costo del servicio. Estas pérdidas producen calentamiento y por lo tanto permiten determinar la potencia nominal que puede obtenerse de la máquina sin deterioro de los aislamientos.

El rendimiento viene dado por la siguiente fórmula:

$$\text{Rendimiento} = \frac{P_{entrada} - P_{pérdidas}}{P_{entrada}} \qquad (158)$$

o también:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}} \qquad (159)$$

Para el cálculo del rendimiento, generalmente se emplea (158), pues es más conveniente medir las pérdidas por ser más económico y más preciso. Los rendimientos hallados de esta manera, pueden servir para comparar distintas máquinas entre sí (siempre que se empleen en todas ellas los mismos métodos de medición y cálculo).

La "American National Standars Association" ha considerado cuatro tipos de pérdidas: (5)

1.- Pérdidas en el cobre, o RI^2

2.- Pérdidas mecánicas

3.- Pérdidas en el núcleo, en circuito abierto o sin carga.

4.- Pérdidas adicionales $\simeq$ 1 % de la potencia suministrada.

En el presente trabajo, se encontrará una expresión para el cálculo de las pérdidas en el cobre, valiéndose para ello, del teorema de Parceval. (6)

Como se sabe, una función periódica puede ser representada por un conjunto infinito de funciones elementales, al que se denomina serie de Fourier entonces:

$$f(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \operatorname{sen} k\omega t) \qquad (160)$$

que puede expresarse también como:

$$f(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{sen}(k\omega t + \psi_k) \qquad (161)$$

donde:

$$C_k = (A_k^2 + B_k^2)^{1/2} \qquad (162)$$

$$\psi_k = tg^{-1} \left(\frac{A_k}{B_k} \right) \qquad (163)$$

Mientras mayor cantidad de términos sean considerados, mayor será la aproximación a la función original.

El valor RMS para una una función periódica, está definido por:

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T} \int_{o}^{T} f^2(t)\, dt \right)^{1/2} \tag{164}$$

Aplicando (164) en la ecuación (161) se obtiene la expresión conocida como teorema de Parseval:

$$V_{RMS} = \left(A_o^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{1/2} \tag{165}$$

donde la magnitud $\left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)$, es el valor RMS de la componente armónica de orden k.

Interesa, en éste estudio calcular las pérdidas $I_{RMS}{}^2 \cdot R$, por tanto se hallará primeramente el valor I_{RMS}.

En el literal 2.4, se obtuvieron las siguientes expresiones para las corrientes de fase tanto para estator como para rotor:

$$i_{as} = i_{qs}{}^{s} \tag{146}$$

$$i_{bs} = -\frac{1}{2} i_{qs}{}^{s} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{ds}{}^{s} \tag{147}$$

$$i_{cs} = -\frac{1}{2} i_{qs}{}^{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{ds}{}^{s} \tag{148}$$

$$i_{ar}'{}^{s} = i_{qr}'{}^{s} \tag{149}$$

$$i_{br}'{}^{s} = -\frac{1}{2} i_{qr}'{}^{s} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}'{}^{s} \tag{150}$$

$$i_{cr}'{}^{s} = -\frac{1}{2} i_{qr}'{}^{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{dr}'{}^{s} \tag{151}$$

Son precisamente éstas las corrientes vuyos valores RMS interesan.

La corriente $i_{qs}^{s} = i_{as}$ fue expresada ya en (132):

$$i_{qs}^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((i_{qs}^{+ke} + i_{qs}^{-ke}) \cos k\omega_e t + (i_{ds}^{+ke} - i_{ds}^{-ke}) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \tag{132}$$

llamando:

$$A_k = i_{qs}^{+ke} + i_{qs}^{-ke} \tag{152}$$

$$B_k = i_{ds}^{+ke} - i_{ds}^{-ke} \tag{153}$$

$$C_k = (A_k^2 + B_k^2)^{1/2} \tag{154}$$

Entonces el valor RMS de $i_{qs}^{s} = i_{as}$ será:

$$I_{as} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{1/2} \tag{155}$$

Por lo tanto las pérdidas en el cobre para la fase "a" del estator:

$$\text{Pérdidas} = I_{as}^2 \cdot r_{sa}$$

donde: I_{as} = valor RMS de la corriente i_{as}

r_{sa} = valor de la resistencia de la fase a del estator.

entonces:

$$\text{Pérdidas} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) . \; r_{sa} \qquad (156)$$

Ahora, para calcular el valor RMS de la corriente i'^{s}_{ar}; puesto que según (149) $i'^{s}_{ar} = i'^{s}_{qr}$ y la expresión obtenida para i'^{s}_{qr} fué:

$$i'^{s}_{qr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(i'^{+ke}_{qr} + i'^{-ke}_{qr} \right) \cos k\omega_e t + \left(i'^{+ke}_{dr} - i'^{-ke}_{dr} \right) \operatorname{sen} k\omega_e t \right) \qquad (134)$$

llamando:

$$A_k = i'^{+ke}_{qr} + i'^{-ke}_{qr} \qquad (157)$$

$$B_k = i'^{+ke}_{dr} - i'^{-ke}_{dr} \qquad (158)$$

$$C_k = \left(A_k^2 + B_k^2 \right)^{1/2} \qquad (159)$$

por tanto, el valor RMS de $i'^{s}_{ar} = i'^{s}_{qr}$ es:

$$I'^{s}_{ar} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{1/2} \qquad (160)$$

entonces las pérdidas en el cobre para la fase "a" del rotor:

$$\text{Pérdidas} = \left(I'^{s}_{ar} \right)^2 . \; r'^{s}_{r}$$

donde I'^{s}_{ar} = valor RMS de i'^{s}_{ar}

$r_r^{'s}$ = resistencia de la fase "a" del rotor referida al estator.

finalmente:

$$\text{Pérdidas} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \cdot r_r^{'s} \qquad (161)$$

Para el caso balanceado, serían suficientes las ecuaciones(156) y (161) pues se trata de una máquina simétrica ideal, pues simplemente las pérdidas en el estator se calcularían multiplicando por 3 y este resultado sumarlo al valor de (161) multiplicado también por 3.

Mientras que para el caso desbalanceado será necesario calcular las pérdidas en cada fase para el rotor y para estator y finalmente hacer un sumatorio para calcular el total de pérdidas en el cobre.

C A P I T U L O I I I

SIMULACION DIGITAL

3.1. CONSIDERACIONES GENERALES:

El programa está desarrollado en un microcomputador APPLE //c el lenguaje utilizado es el BASIC cuya versión para éste micro es denominada APPLESOFT.

En general, el programa implementado trabaja con series de Fourier, la manera como lo hace, será explicada más adelante.

El programa está estructurado en subrutinas accesibles mediante varios menús de opciones con su debida jerarquía.

El usuario ingresará las funciones de entrada de la forma indicada, en el manual de uso del programa. Así mismo puede ingresar los datos de la máquina, así como el número de armónicos que crea conveniente para trabajar.

Los resultados serán tanto numéricos como gráficos con la opción de escoger el periférico de salida: sea monitor o impresora. Siendo recomendable para gráficos, el monitor por la característica de este microcomputador que posee la opción de gráficos de alta resolución.

3.2. FORMULACION DEL MODELO:

El programa implementado en esta tesis, trabaja con funciones descompuestas en series de Fourier por lo que entonces cabe hacer una introducción matemática sobre series de Fourier que ayudará a explicar la metodología de proceso de este programa.

Una función periódica descompuesta en serie de Fourier tendrá la forma:

$$f(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \operatorname{sen} k\omega t)$$

los coeficientes de Fourier A_o, A_k, B_k son datos conocidos, por lo que, interesa tener la función f(t) almacenada en la memoria del computador, ¿Cuál sería la forma conveniente de hacerlo?

La respuesta es que, basta tener almacenados en memoria los coeficientes de Fourier, y, en el caso que se desee evaluar la función f(t), entonces, mediante un lazo adecuado como:

$F(\phi) = \phi$

FOR WT = ϕ TO 720°

$$WT = \frac{WT * 2 * \pi}{360°}$$

FOR k = ϕ TO N

$F(k) = A(k) \cos k\,WT + B(k) \operatorname{sen} k\,WT$

$F(k) = F(k) + F(k-1)$

NEXT k

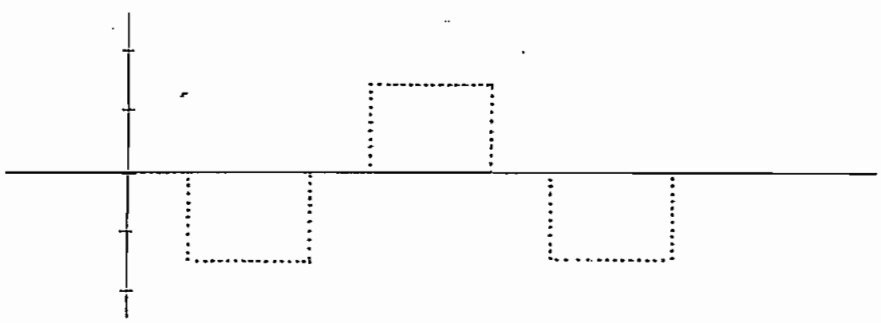
NEXT WT

donde $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, N$

N = número de armónicos escogido

WT = ángulo 0° hasta 720° (que luego son pasados a radianes)

Por cada valor de WT, el computador hace N evaluaciones y terminado ésto, da por resultado el valor F(k) correspondiente al valor WT. Finalmente se obtendrán 721 valores de f(t) que pueden ser graficados; utilizando una subrutina de gráficos:



Una vez explicada la forma de almacenar una función f(t) y como evaluarla, se hace necesario indicar, dadas f(t) y g(t) descompuestas en serie de Fourier, como se hallaría:

$$h(t) = f(t) + g(t)$$

Con la nomenclatura adecuada:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A(k) \cos k\omega t + B(k) \operatorname{sen} k\omega t) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (E(k) \cos k\omega t + F(k) \operatorname{sen} k\omega t)$$

lo que se podría escribir como:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ A(k) \cos k\omega t + B(k) \operatorname{sen} k\omega t + E(k) \cos k\omega t$$

$$+ F(k) \operatorname{sen} k\omega t \}$$

agrupando:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ (A(k) + E(k)) \cos k\omega t + (B(k) + F(k)) \operatorname{sen} k\omega t \}$$

pero: $(A(k) + e(k))$ y $(B(k) + F(k))$ forman los coeficientes coseno y seno respectivamente, de la función $h(t)$; por lo tanto, para sumar/restar dos funciones del tipo descrito, basta sumar/restar sus coeficientes correspondientes a cada armónico formando el nuevo coeficiente que tendrá que ser almacenado en memoria:

$$\text{Si } h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (G(k) \cos k\omega t + J(k) \operatorname{sen} k\omega t)$$

entonces:

$$G(1) = A(1) + E(1)$$

$$J(5) = B(5) + F(5), \text{ etc.}$$

Finalmente, si un factor constante α afecta un sumatorio:

$$X(t) = \alpha \cdot \{ \sum_{k=0}^{\infty} (A(k) \cos k\omega t + B(k) \operatorname{sen} k\omega t) \}$$

Entonces, cada coeficiente A(k) y B(k) del sumatorio original quedará afectado por dicha constante, así: si X(t) es:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \{ J(k) \cos k\omega t + L(k) \operatorname{sen} k\omega t \}$$

donde $J(k) = \alpha A(k)$ y $L(k) = \alpha B(k)$

por ejemplo: $J(2) = \alpha A(2)$

$L(13) = \alpha B(13)$, etc.

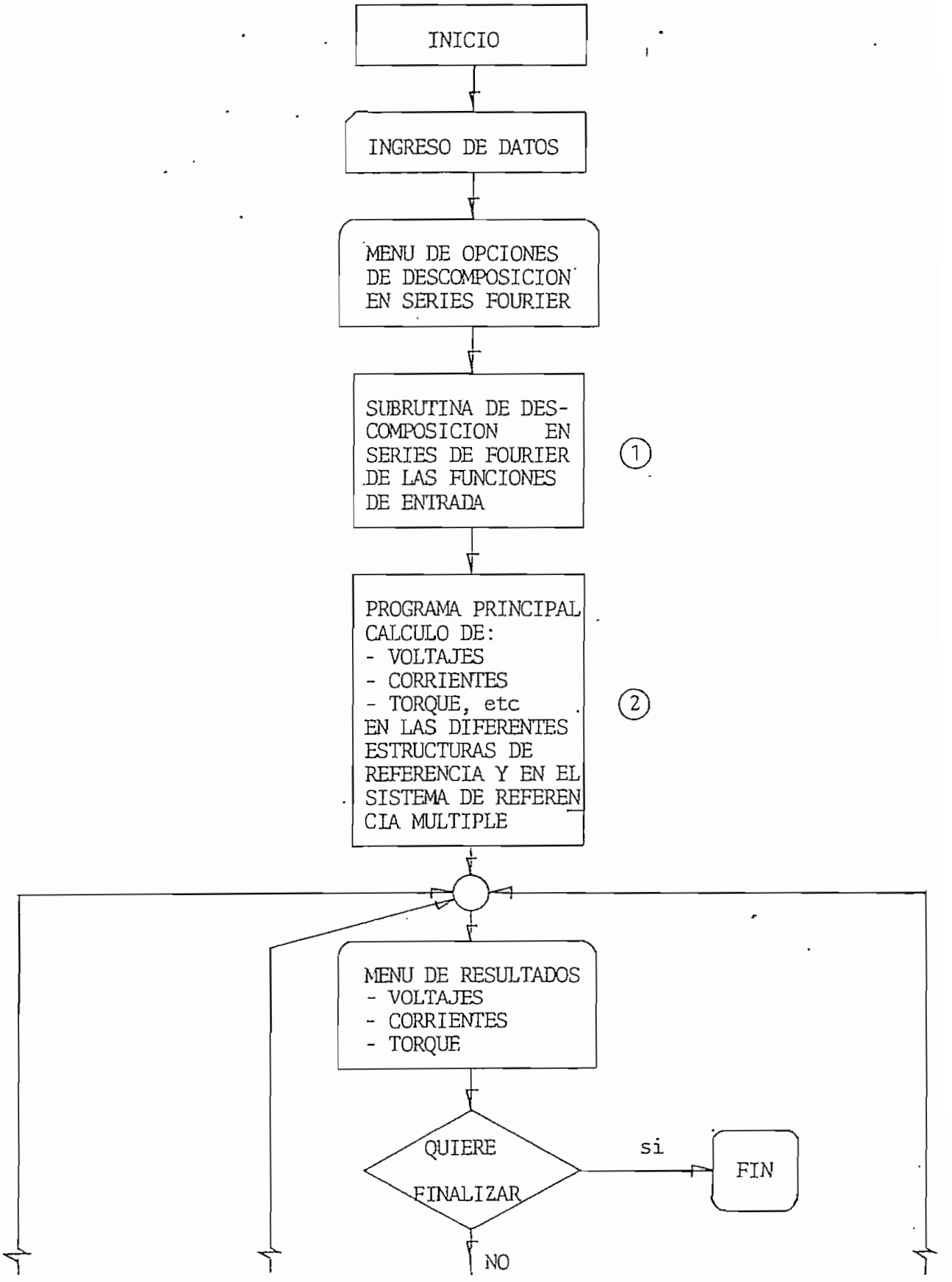
3.3. DIAGRAMAS DE FLUJO: (7,8)

El programa digital está compuesto por cuatro bloques fundamentales, tal como se muestra en el diagrama de flujo de la figura 3.3.1.

Primero, se hace necesario que el usuario ingrese los parámetros de la máquina, así como las tres funciones periódicas de entrada a la máquina.

Entonces se ingresa al menú de descomposición en series de Fourier, y a travéz de él al bloque 1.

BLOQUE 1: Esta es la subrutina de descomposición en serie de Fourier de una función periódica dada, expresada como tal en el rango de 0 a 2π. Esta subrutina existe como subrutina de biblioteca - en el computador IBM de la Escuela Politécnica Nacional, escrita en lenguaje FORTAN IV por lo que fué necesario implementarla a lenguaje BASIC, información disponible sobre ésta subrutina se puede encontrar en la referencia (8)


INICIO
INGRESO DE DATOS
MENU DE OPCIONES DE DESCOMPOSICION EN SERIES FOURIER
SUBRUTINA DE DES-COMPOSICION EN SERIES DE FOURIER DE LAS FUNCIONES DE ENTRADA
1
PROGRAMA PRINCIPAL CALCULO DE:
- VOLTAJES
- CORRIENTES
- TORQUE, etc
EN LAS DIFERENTES ESTRUCTURAS DE REFERENCIA Y EN EL SISTEMA DE REFEREN CIA MULTIPLE
2
MENU DE RESULTADOS
- VOLTAJES
- CORRIENTES
- TORQUE
QUIERE FINALIZAR
si
FIN
NO

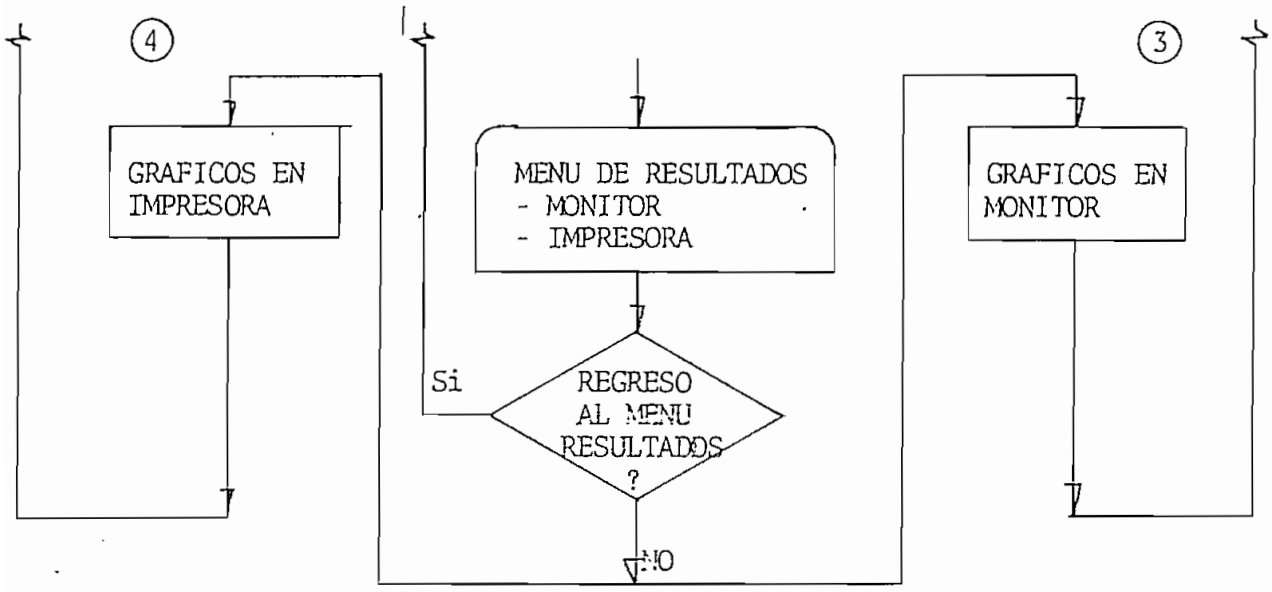

4
GRAFICOS EN IMPRESORA
MENU DE RESULTADOS
- MONITOR
- IMPRESORA
Si
REGRESO AL MENU RESULTADOS ?
NO
3
GRAFICOS EN MONITOR

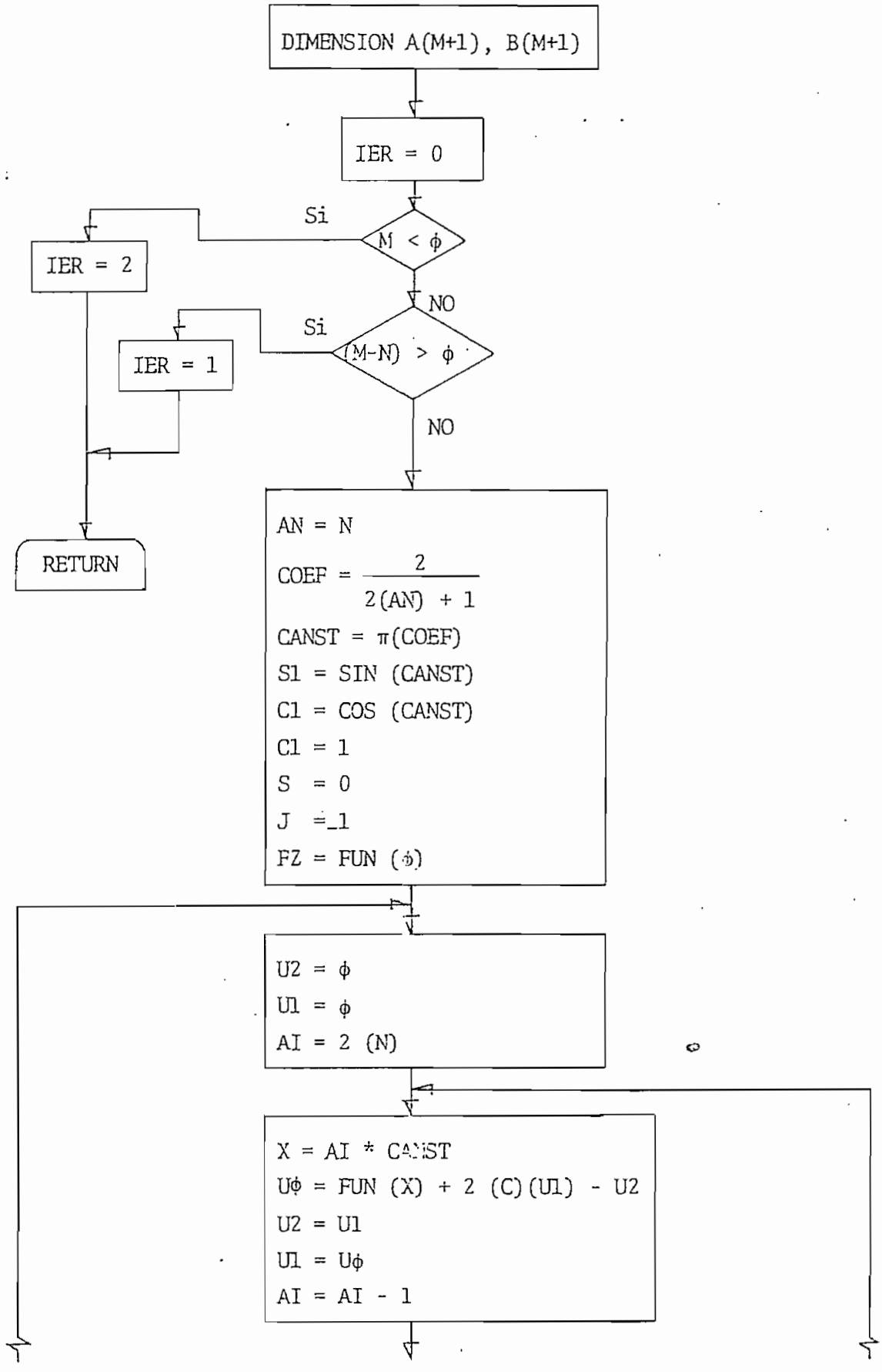
Fig. 3.3.1.

El diagrama de flujo del BLOQUE 1, puede ser observado en la figura 3.3.2.

BLOQUE 2: Es el programa principal, donde se hace uso de los coeficientes de Fourier dados por la subrutina de descomposición en series de Fourier. Utilizando dichos coeficientes y con la ayuda de las expresiones obtenidas anteriormente en el capítulo II, se calcula los voltajes, corrientes, torque resultantes, en los diferentes sistemas de referencia y en especial en el sistema de referencia múltiple. Todos los resultados son almacenados en memoria, para que en el momento requerido, sirvan la representación gráfica. En la figura 3.3.3. se muestra el diagrama de flujo del programa principal.

BLOQUE 3 y 4: Los bloques 3 y 4 pueden ser considerados como uno solo pues ambos son para entregar los resultados en una forma gráfica.

El bloque 3, entrega los resultados en el monitor mientras que el bloque 4 en la impresora, siendo dos programas diferentes e independientes por las diferentes características de éstos dos dispositivos - periféricos de salida. Los diagramas de flujo correspondientes, constan en las figuras 3.3.4; 3.3.5 (en monitor) y 3.3.6 (en impresora).


DIMENSION A(M+1), B(M+1)
IER = 0
Si
M < ϕ
IER = 2
NO
Si
(M-N) > ϕ
IER = 1
NO
RETURN
AN = N
COEF = 2 / 2(AN) + 1
CANST = π(COEF)
S1 = SIN (CANST)
C1 = COS (CANST)
C1 = 1
S = 0
J = 1
FZ = FUN (ϕ)
U2 = ϕ
U1 = ϕ
AI = 2 (N)
X = AI * CANST
Uϕ = FUN (X) + 2 (C)(U1) - U2
U2 = U1
U1 = Uϕ
AI = AI - 1

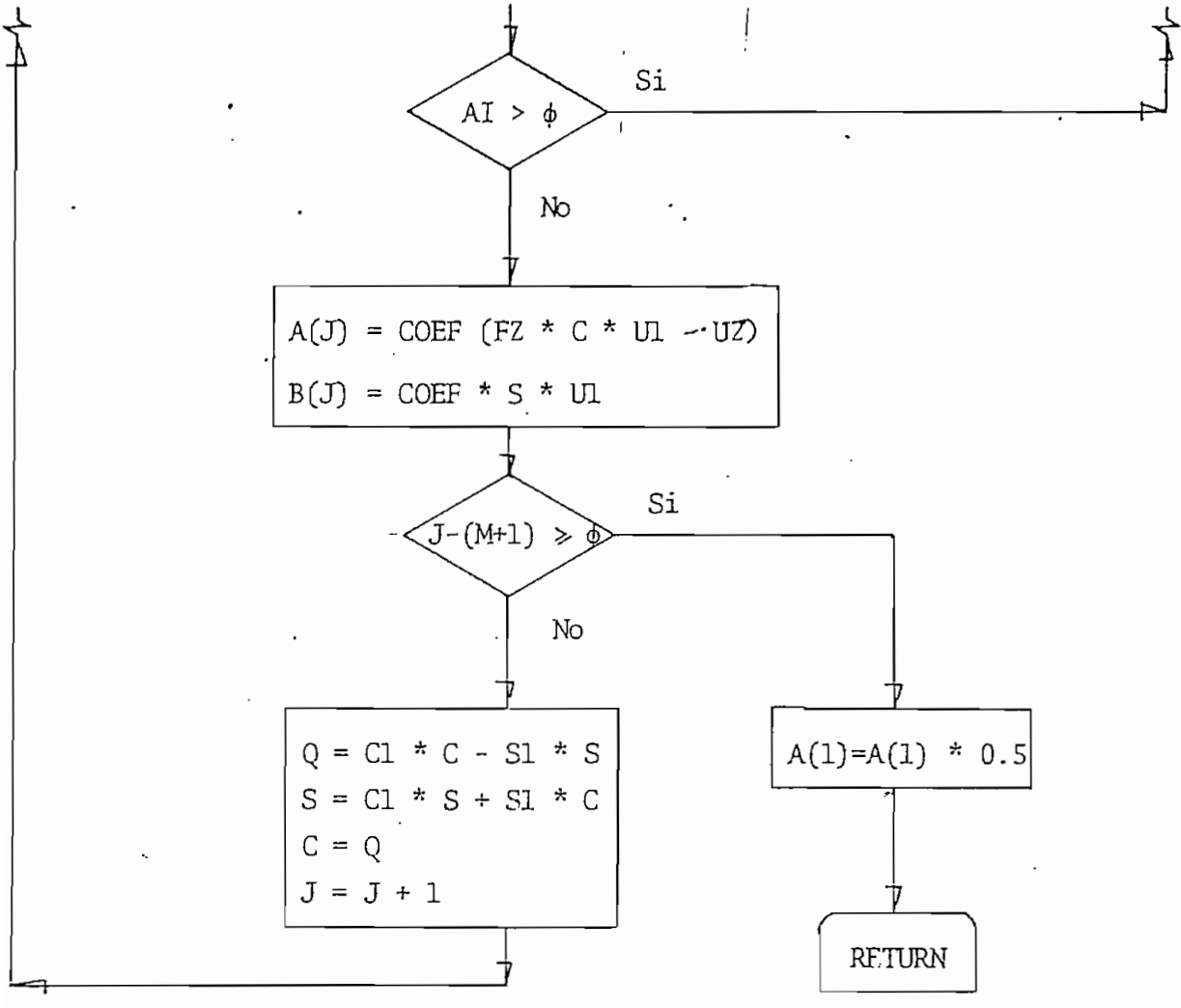

AI > ϕ
Si
No
A(J) = COEF (FZ * C * U1 - UZ)
B(J) = COEF * S * U1
J-(M+1) ≥ ϕ
Si
No
Q = C1 * C - S1 * S
S = C1 * S + S1 * C
C = Q
J = J + 1
A(1)=A(1) * 0.5
RETURN

Fig. 3.3.2.

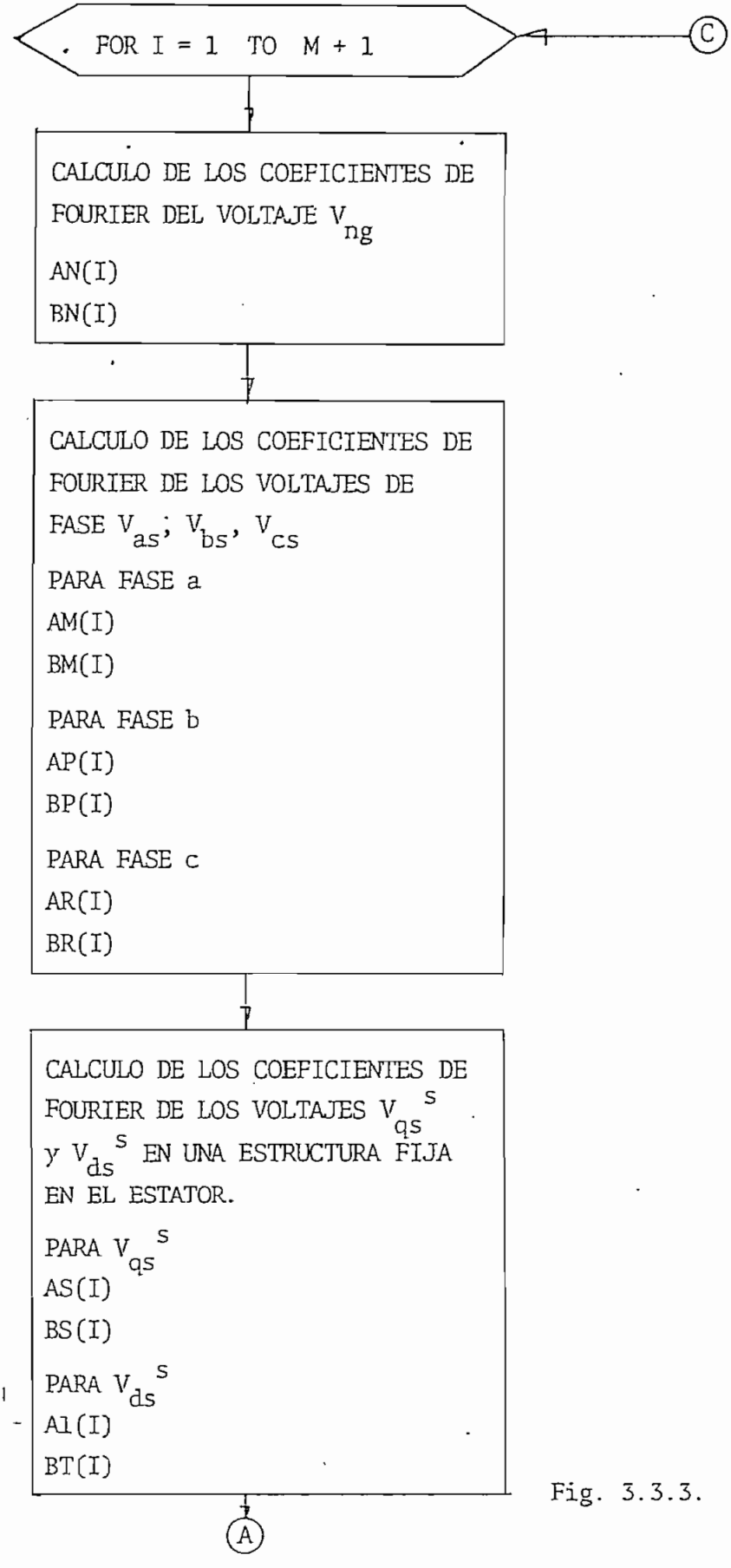

FOR I = 1 TO M + 1
C
CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DEL VOLTAJE V_{ng}
AN(I)
BN(I)
CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LOS VOLTAJES DE FASE V_{as}; V_{bs}, V_{cs}
PARA FASE a
AM(I)
BM(I)
PARA FASE b
AP(I)
BP(I)
PARA FASE c
AR(I)
BR(I)
CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LOS VOLTAJES V_{qs}^{s} y V_{ds}^{s} EN UNA ESTRUCTURA FIJA EN EL ESTATOR.
PARA V_{qs}^{s}
AS(I)
BS(I)
PARA V_{ds}^{s}
A1(I)
BT(I)
A

Fig. 3.3.3.

Continuación

(A)

CALCULO DE LOS VOLTAJES EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE:

V_{qs}^{+ke}, V_{ds}^{+ke}, V_{qs}^{-ke}, V_{ds}^{-ke}

PARA V_{qs}^{+ke} y V_{ds}^{+ke}

VQSME(I)

VDSME(I)

PARA V_{qs}^{-ke} y V_{ds}^{-ke}

MQSE(I)

MDSE(I)

CALCULO DE LOS COEFICIENTES NECESARIOS PARA CALCULAR LAS CORRIENTES EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE:

FOE(I) y F1(I) ; GNE(I) y G1(I)

HNE(I) y H1(I) ; INE(I) y I1(I)

JNE(I) y J1(I)

CALCULO DE LAS CORRIENTES EXPRESADAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA MULTIPLE:

CALCULO DE I_{qs}^{+ke} e I_{qs}^{-ke}

IQSME(I)

ISQSE(I)

CALCULO DE I_{ds}^{+ke} e I_{ds}^{-ke}

IDSME(I)

IPDSE(I)

CALCULO DE $I_{q'r}^{+ke}$ e $I_{q'r}^{-ke}$

IRQME(I)

ITRSE(I)

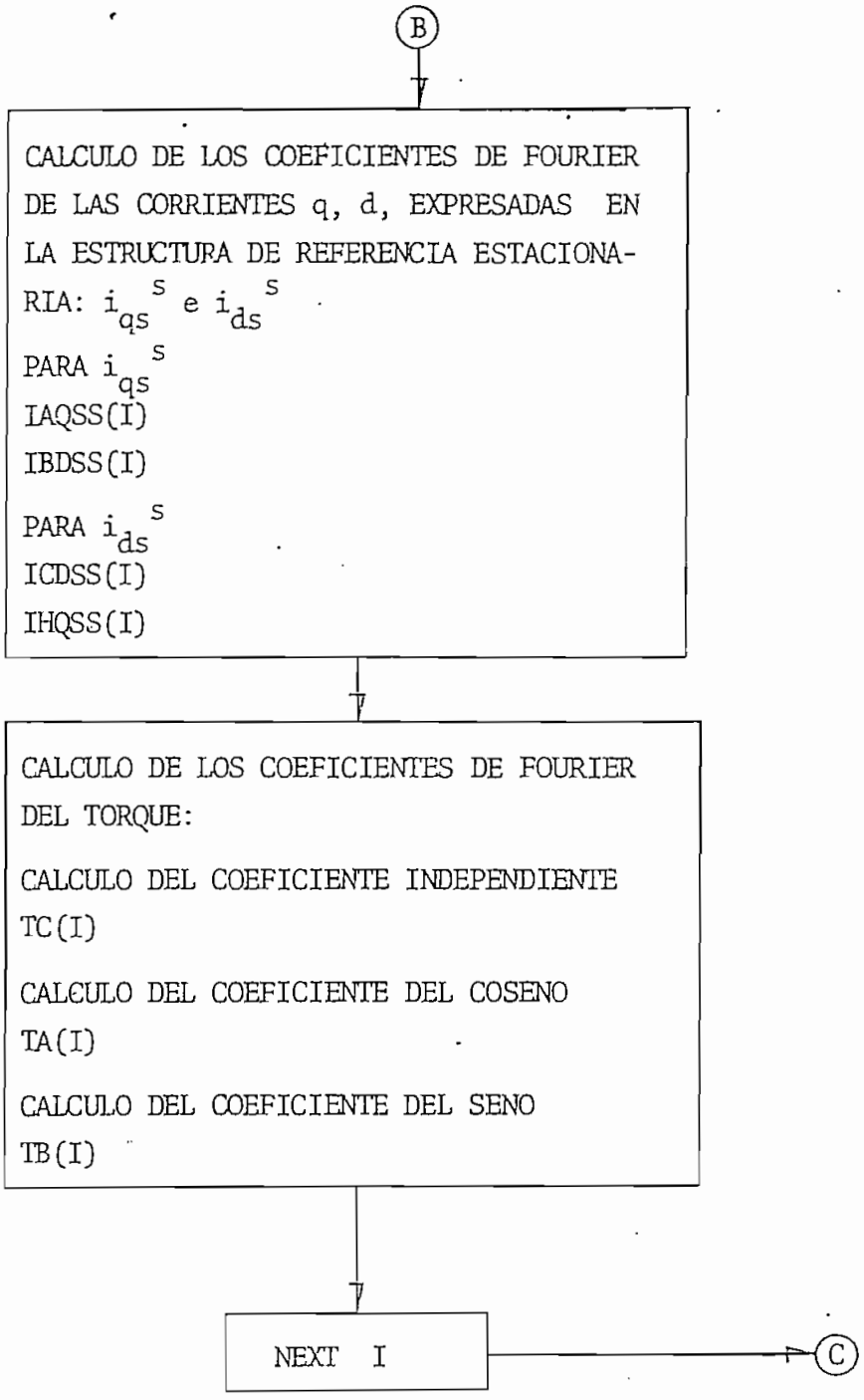
CALCULO DE $I_{d'r}^{+ke}$ e $I_{d'r}^{-ke}$

IUDRE(I)

IVDRE(I)

(B)

Continuación



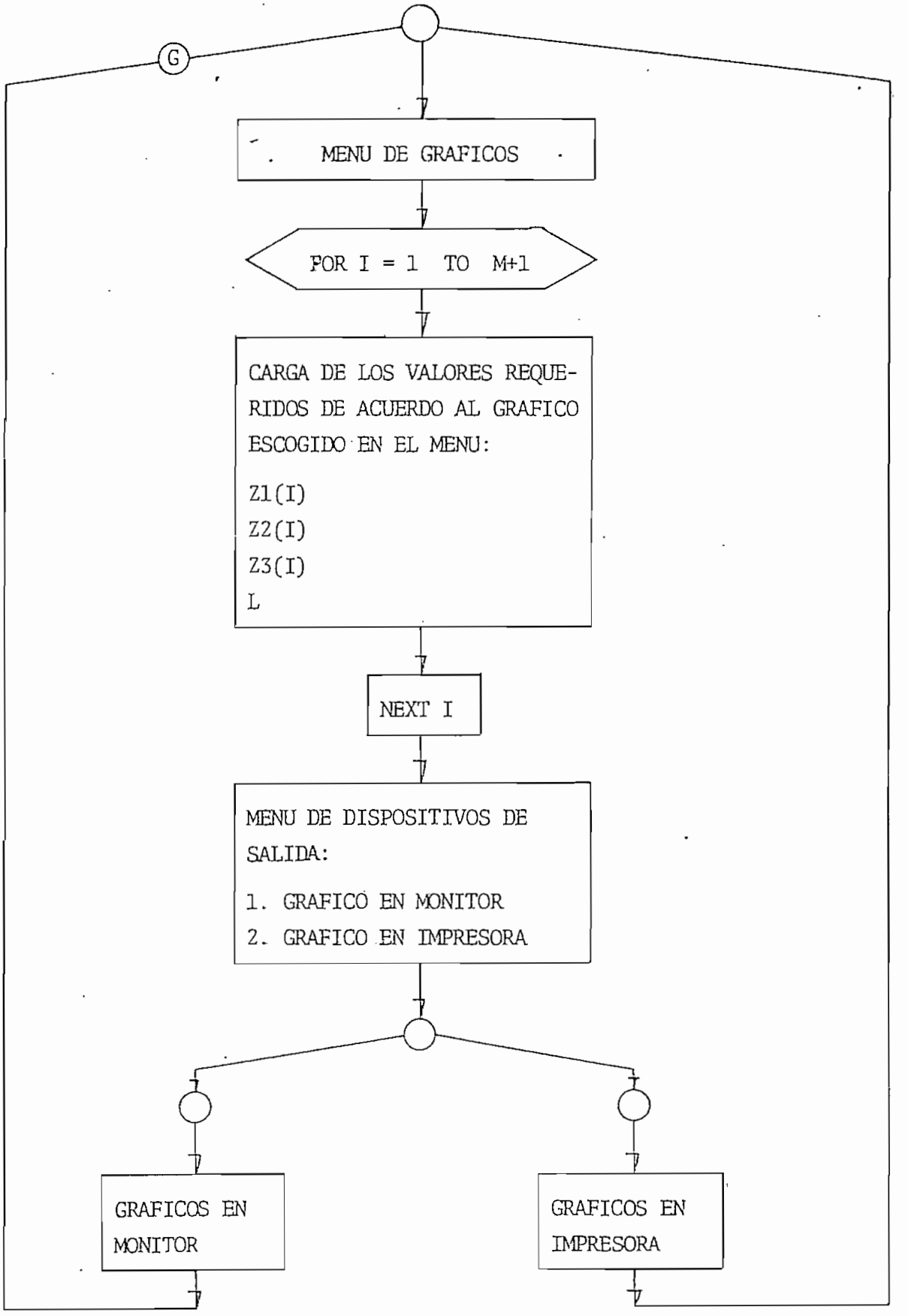

G
MENU DE GRAFICOS
FOR I = 1 TO M+1
CARGA DE LOS VALORES REQUE-
RIDOS DE ACUERDO AL GRAFICO
ESCOGIDO EN EL MENU:
Z1(I)
Z2(I)
Z3(I)
L
NEXT I
MENU DE DISPOSITIVOS DE
SALIDA:
1. GRAFICO EN MONITOR
2. GRAFICO EN IMPRESORA
GRAFICOS EN
MONITOR
GRAFICOS EN
IMPRESORA

Fig. 3.3.4.

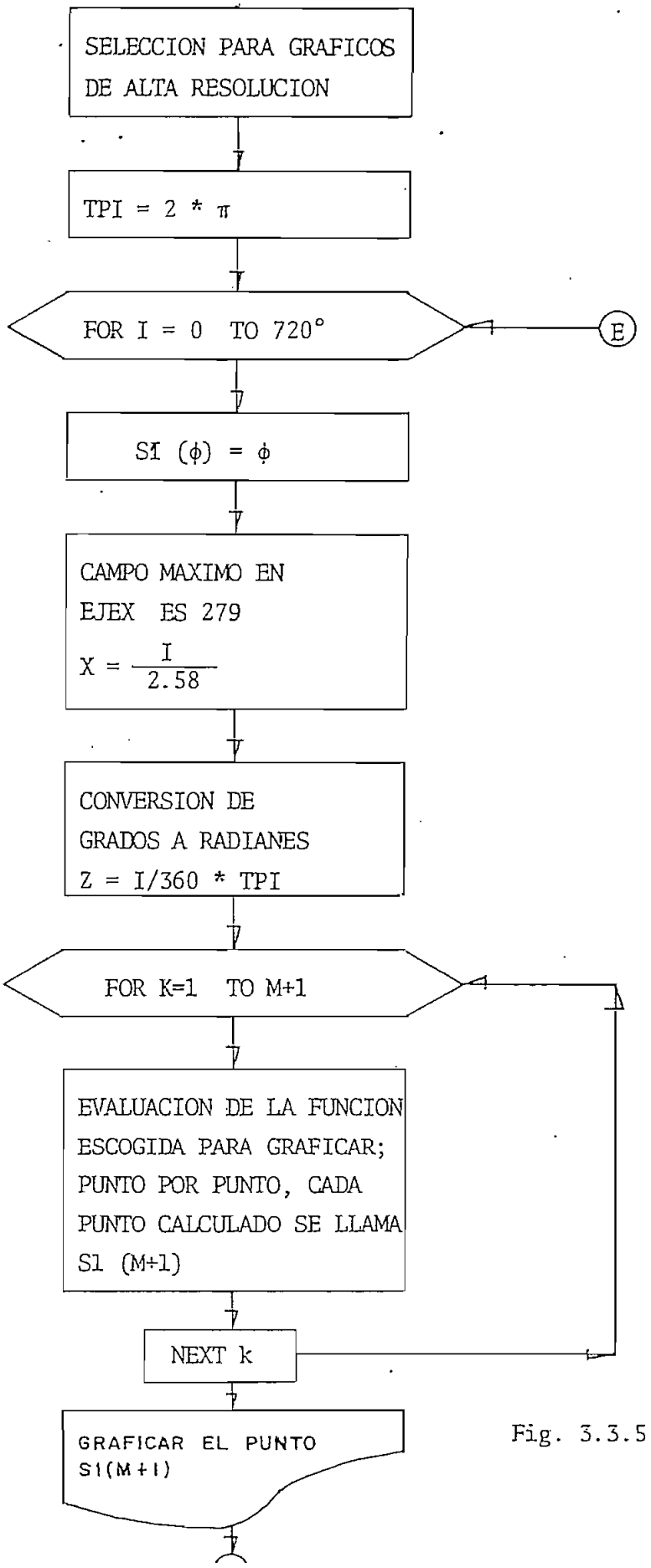
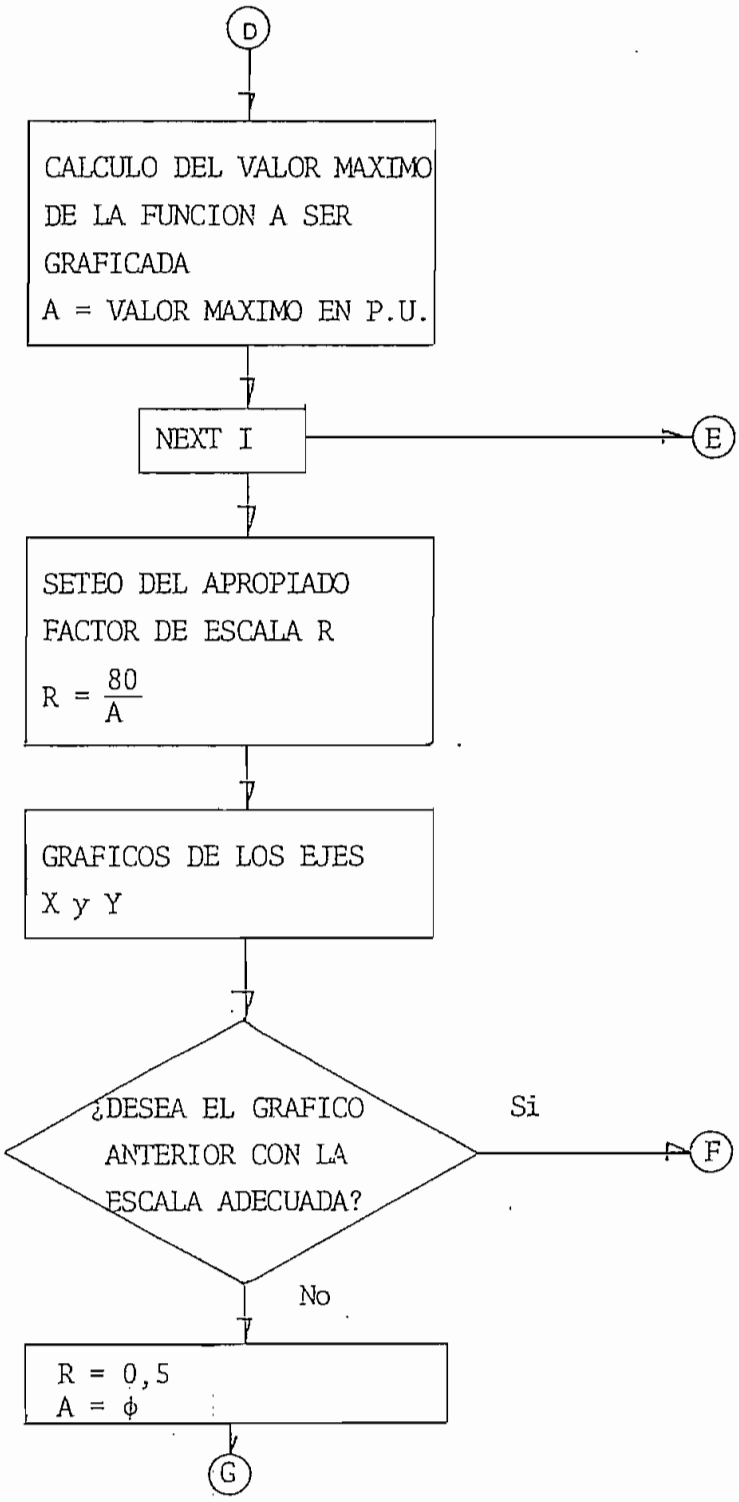

SELECCION PARA GRAFICOS DE ALTA RESOLUCION
TPI = 2 * π
FOR I = 0 TO 720°
E
SI (ϕ) = ϕ
CAMPO MAXIMO EN EJEX ES 279
X = I / 2.58
CONVERSION DE GRADOS A RADIANES
Z = I/360 * TPI
FOR K=1 TO M+1
EVALUACION DE LA FUNCION ESCOGIDA PARA GRAFICAR; PUNTO POR PUNTO, CADA PUNTO CALCULADO SE LLAMA S1 (M+1)
NEXT k
GRAFICAR EL PUNTO S1(M+1)

Fig. 3.3.5.

Continuación



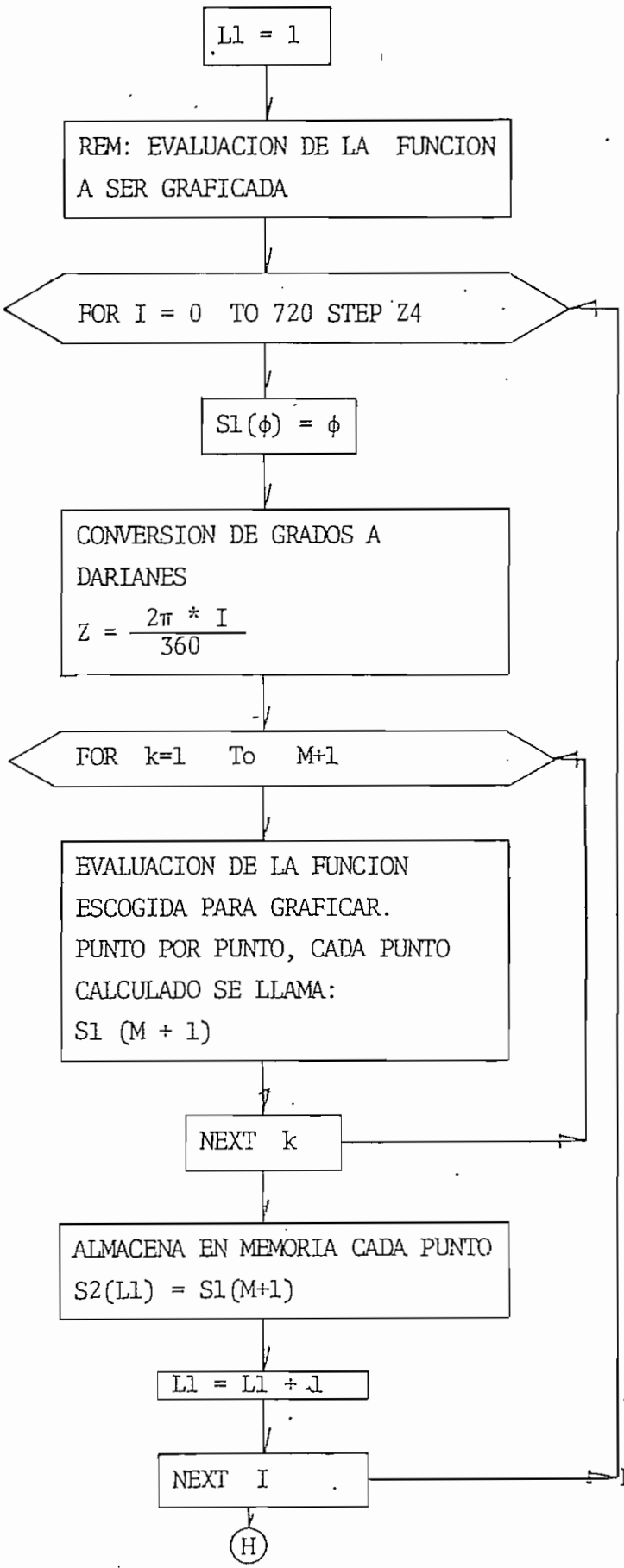
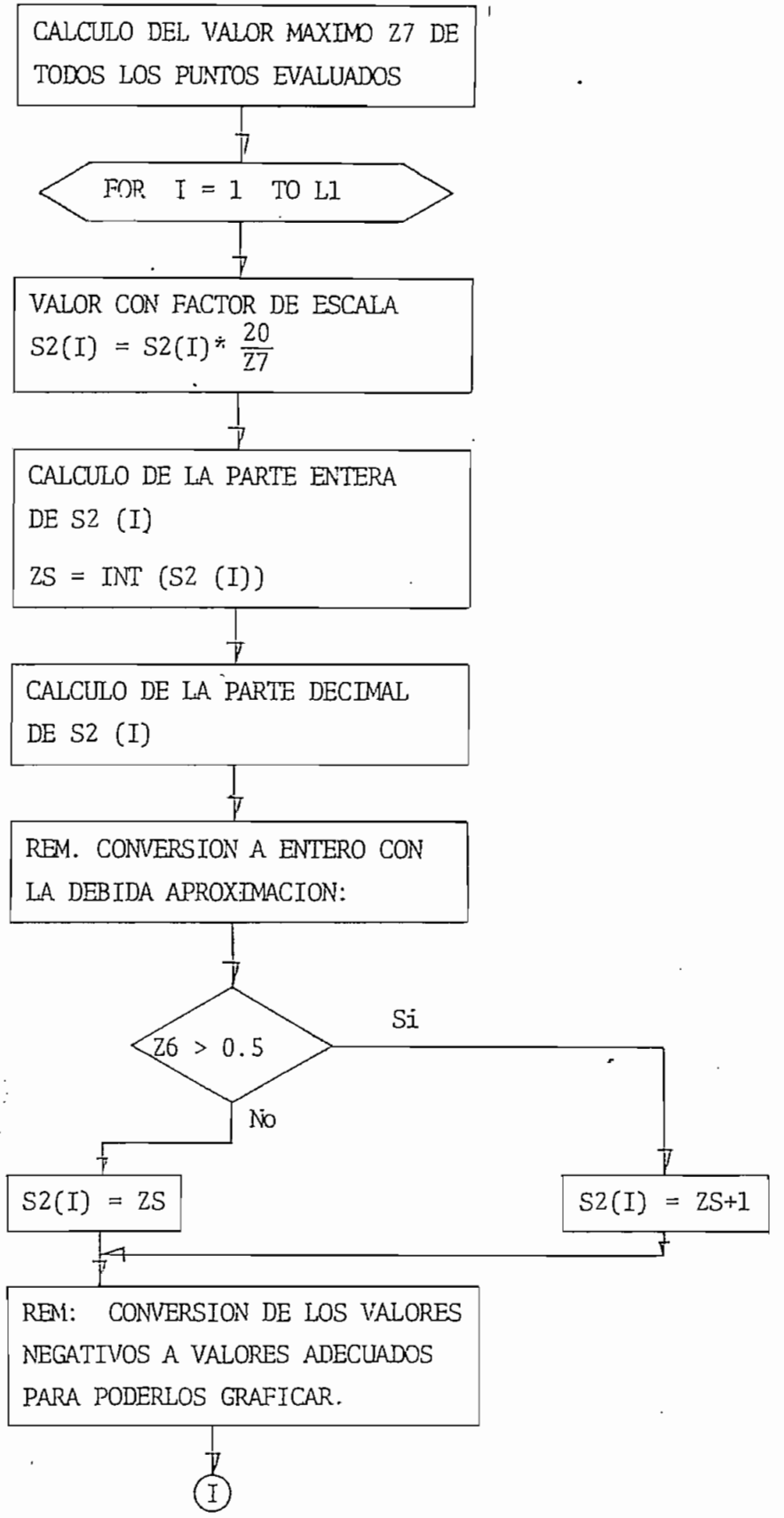
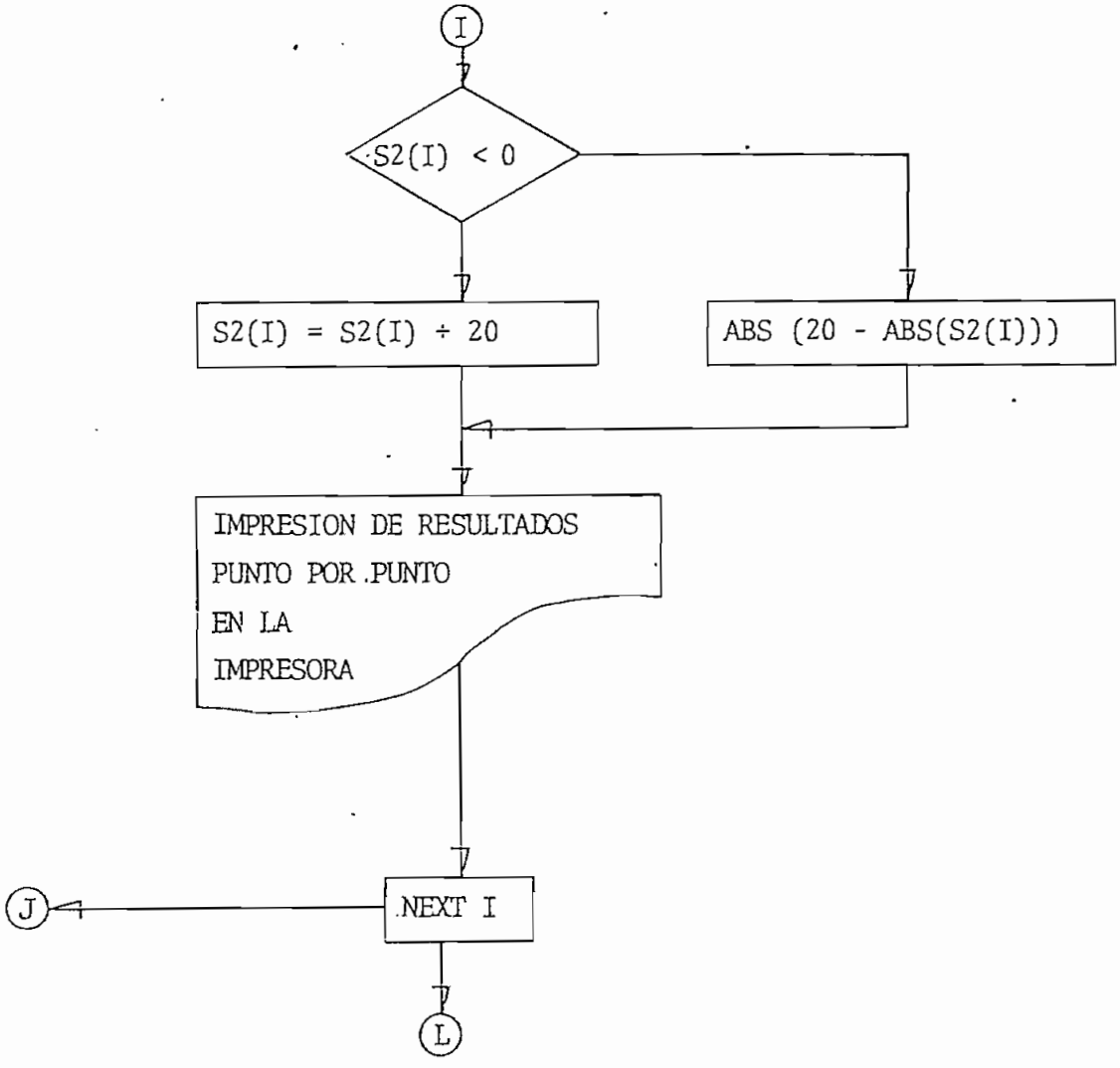

L1 = 1
REM: EVALUACION DE LA FUNCION A SER GRAFICADA
FOR I = 0 TO 720 STEP Z4
S1(ϕ) = ϕ
CONVERSION DE GRADOS A DARIANES
Z = 2π * I / 360
FOR k=1 To M+1
EVALUACION DE LA FUNCION ESCOGIDA PARA GRAFICAR. PUNTO POR PUNTO, CADA PUNTO CALCULADO SE LLAMA:
S1 (M + 1)
NEXT k
ALMACENA EN MEMORIA CADA PUNTO
S2(L1) = S1(M+1)
L1 = L1 + 1
NEXT I
H

Fig. 3.3.6

Continuación



Continuación



3.4. DESCRIPCION DEL PROGRAMA:

A continuación se describirá en una forma completa el programa digital implementado.

Una vez cargados los datos al programa y luego de dar el comando RUN, se accede al menú de descomposición en series de Fourier donde se tiene la opción de escoger que función de entrada desea el usuario descomponerla, así por ejemplo si pulsa la tecla número 1 entonces se descompondrá en series de Fourier a la función dada para la "fase a".

Es precisamente la subrutina de Descomposición en series de Fourier la que se encarga de ello. Una vez terminado el proceso, automáticamente regresa al menú de descomposición. La subrutina mencionada tiene los siguientes parámetros: (8)

M = Máximo orden de armónicas a ser encontradas.

N = Define el intervalo tal que 2N + 1 puntos son hallados sobre el intervalo (0 - 2π). El espacio entre cada punto es 2π/2N + 1.

A(J) = Vector resultante de los coeficientes coseno, cuya longitud es M + 1.

B(J) = Vector resultante de los coeficientes seno, longitud = M + 1.

IER = Código de error resultante, donde:

IER = 0 quiere decir que no existe error

IER = 1 implica que $N \not> M$

IER = 2 implica que $M < 0$

NOTA: 1 - M puede ser: $M > 0$

2 - N puede ser: $N > M$

3 - El primer elemento en el vector B(J) es ϕ en todos los casos.

Esta subrutina primero hace un chequeo de parámetros de error, luego hace un seteo de los valores necesarios para calcular los coeficientes, luego calcula A(J), B(J) y A(1) y entrega los resultados, acumulándolos previamente en memoria en la siguiente manera:

Para "fase a" (e_{ga})

AA(I) = coeficientes coseno

BA(I) = coeficientes seno

Para "fase b" (e_{gb})

AD(I) = coeficientes coseno

BD(I) = coeficientes seno

Para la "fase c" (e_{gc})

AE(I) = coeficientes coseno

BE(I) = coeficientes seno

Una vez calculados y acumulados en memoria los coeficientes coseno y seno para las tres fases, se pulsa la tecla 4 con lo que se ingresa al programa principal, en éste, se inicia un lazo general que a-

yudará a calcular M+1 armónicos, comenzando primeramente por calcular el voltaje entre los neutros de la alimentación y del estator de la máquina de inducción, llamando v_{ng} a éste voltaje, sus coeficientes coseno y seno son AN(I) y BN(I) respectivamente.

A continuación se procede a calcular los coeficientes de los voltajes de fase v_{as}, v_{bs} y v_{cs} en función de los voltajes de alimentación e_{ga}, e_{gb} y e_{gc} y el voltaje v_{ng}.

Para v_{as}:

AM(I) = coeficientes coseno

BM(I) = coeficientes seno

Para v_{bs}

AP(I) = coeficientes coseno

BP(I) = coeficientes seno

Para v_{cs}

AR(I) = coeficientes coseno

BR(I) = coeficientes seno

Luego se calculan los coeficientes de los voltajes q, d expresados en la estructura de referencia fija en el estator.

Estos voltajes $v_{qs}{}^{s}$ y $v_{ds}{}^{s}$, están en función de los voltajes e_{ga}, e_{gb}, e_{gc}.

Entonces para $v_{qs}{}^{s}$:

AS(I) coseno

BS(I) seno

Para v_{ds}^{s}

A1(I) coseno

BT(I) seno

Luego procede a calcular los diferentes voltajes en el sistema de referencia múltiple:

V_{qs}^{+ke} = VQSME(I) V_{qs}^{-ke} = MQSE(I)

V_{ds}^{+ke} = VDSME(I) V_{ds}^{-ke} = MDSE(I)

Posteriormente, realiza el cálculo de los coeficientes necesarios para hallar las corrientes en el sistema de referencia múltiple los cuales son:

FOE(I)	GNE(I)	HNE(I)	INE(I)	JNE(I)
F1(I)	G1(I)	H1(I)	I1(I)	J1(I)

a continuación procede al cálculo de las corrientes en el sistema de referencia múltiple:

Para I_{qs}^{+ke} e I_{qs}^{-ke} Para I_{ds}^{+Ke} e I_{ds}^{-ke}

IQSME(I) IDSME(I)

ISQSE(I) IPDSE(I)

Para $I'_{qr}{}^{+ke}$ e $I'_{qr}{}^{-ke}$	Para $I'_{dr}{}^{+ke}$ e $I'_{dr}{}^{-ke}$
IRQME(I)	IUDRE(I)
ITRSE(I)	IVDRE(I)

Luego, calcula los coeficientes de las corrientes q, d expresadas en la estructura de referencia estacionaria,

Para $i_{qs}{}^{s}$	Para $i_{ds}{}^{s}$
IAQSS(I)	ICDSS(I)
IBDSS(I)	IHQSS(I)

las cuales están en función de las corrientes del sistema de referencia múltiple.

Finalmente, calcula los coeficientes del torque: El término independiente y los coeficientes coseno y seno TC(I), TA(I) y TB(I) respectivamente. Estas expresiones están en función de las corrientes del sistema de referencia múltiple.

Una vez terminado el lazo, es decir, una vez calculados los M + 1 armónicos, automáticamente aparece en pantalla el menú de gráficos, donde por medio de una tecla, el usuario puede obtener el gráfico deseado. Así por ejemplo al pulsar la tecla 6 se selecciona el gráfico de $i_{qs}{}^{s}$ entonces se cargan los coeficientes correspondientes a $i_{qs}{}^{s}$ en tres vectores: Z1(I), Z2(I) y Z3(I) donde:

En Z1(I) se almacenan los coeficientes coseno

Z2(I) se almacenan los coeficientes seno

Z3(I) se almacenan los coeficientes independientes

Una vez cargados Z1(I), Z2(I) y Z3(I), aparece un menú que da opción de gráfico en pantalla (tecla 1) ó en impresora (tecla 2) y la tecla 3 es una opción de regreso al menú de gráficos.

En el menú de gráficos existe la tecla 19 que permite finalizar el programa.

Suponiendo el caso que con la tecla 1 se seleccionó la pantalla, entonces automáticamente entra en modo de alta resolución y comienza dos lazos que permiten ir calculando y graficando punto a punto a la función en el rango de 0 - 720°, mientras al mismo tiempo va buscando el valor máximo con el fin de hallar un factor de escala adecuado. Una vez terminado el gráfico aparece un pequeño menú-información en el que se expresa el valor máximo encontrado en p.u. y el factor de escala adecuado, permitiendo al usuario con la tecla 1 repetir el gráfico pero con el adecuado factor de escala. Mientras que si pulsa la tecla 2 regresa al menú general de gráficos.

Ahora, suponiendo el caso que con la tecla 2 se seleccionó la impresora, entonces mediante dos lazos se comienza la evaluación punto por punto de la función, también al mismo tiempo se calcula el valor máximo con el fin de calcular el valor de escala adecuado; por la naturaleza de la impresora, sólo admite valores enteros, entonces los datos son hechos enteros utilizando aproximación, esto es, aquellos valores cuya parte decimal sea may-r o igual a 0.5 serán aproximados a su entero inmediato superior, mientras que los otros valores serán quita-

dos su parte decimal.

Una vez finalizado este proceso, se requiere programar a la impresora en un lenguaje un poco diferente al conocido, pues sus instrucciones son especiales, para lograr los resultados en forma gráfica. Una vez terminado el gráfico, automáticamente transfiere el control al monitor en cuya pantalla aparece nuevamente el menú general de gráficos.

C A P I T U L O I V

EJEMPLOS DE APLICACION Y RESULTADOS

4.1. EJEMPLOS DE APLICACION

Se analizará dos casos:

4.a. Operación balanceada

4.b. Operación desbalanceada

4.a. OPERACION BALANCEADA: Serán analizados dos ejemplos:

4.a.1. Operación con fuentes sinusoi-ales

$$e_{ga} = V \text{ sen } \omega_e t$$

$$e_{gb} = V \text{ sen}(\omega_e t - \frac{2\pi}{3})$$

$$e_{gc} = V \text{ sen}(\omega_e t + \frac{2\pi}{3})$$

4.a.2. Operación con fuentes no sinusoidales

$$e_{ga} = e_{ga} (\omega_e t)$$

$$e_{gb} = e_{ga} (\omega_e t - \frac{2\pi}{3})$$

$$e_{gc} = e_{ga} \left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

4.b. OPERACION DESBALANCEADA: Serán analizados dos ejemplos:

4.b.1. Operación con fuentes sinusoidales

$$e_{ga} = 0$$

$$e_{gb} = \text{sen} \left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_{gc} = \text{sen} \left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

4.b.2. Operación con fuentes no sinusoidales

Voltaje de fuente $e_{ga} = 0$; e_{gb} y e_{gc} las mismas que para el caso balanceado (literal 4.a.2)

4.a.1. OPERACION BALANCEADA CON FUENTES SINUSOIDALES

En este ejemplo, se analizará la operación balanceada con fuentes sinusoidales, en la figura 4.a.1. se tienen los voltajes de fuente y el circuito del estator de la máquina que será usado en éste y en los ejemplos que preceden.

Donde:

$$e_{ga} = V \text{ sen } (\omega_e t)$$

$$e_{gb} = V \text{ sen } (\omega_e t - \frac{2\pi}{3})$$

$$e_{gc} = V \text{ sen } (\omega_e t - \frac{2\pi}{3})$$

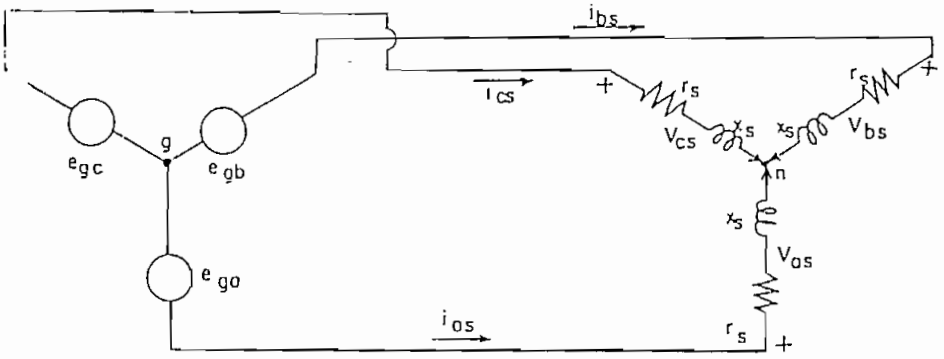


Fig. 4.a.1.

V = amplitud en p.u. del voltaje

V = 1 p.u.

Los parámetros de la máquina de inducción expresados en p.u. son los siguientes:

$X_{ls} = 0,1067$

$X'_{lr} = 0,1067$

$X_m = 1,9242$

$r_s = 0,0276$

$r'_r = 0,0904$

de donde se puede calcular las reactancias X_{ss}, X'_{rr}

$$X_{ss} = X_{ls} + X_m \qquad X'_{rr} = X'_{lr} + X_m$$

$$X_{ss} = 0{,}1067 + 1{,}9242 \qquad X'_{rr} = 2{,}0309 \text{ p.u.}$$

$$X_{ss} = 2{,}0309 \text{ p.u.}$$

Tomando como frecuencia base 60 Hz, se tiene además en p.u.

$$\omega_e = 1$$

$$\omega_r = 0{,}9$$

$$f_R = 1$$

En éste y en los ejemplos que preceden, se tienen disponibles mediante menú de opciones, los siguientes gráficos:

MENU DE VOLTAJES

ESTRUCTURA DE REFERENCIA ESTACIONARIA

1.- $v_{qs}{}^s$

2.- $v_{ds}{}^s$

ESTRUCTURA DE REFERENCIA ROTANDO SINCRONIZADAMENTE

3.- v_{qs}^{e}

4.- v_{ds}^{e}

MENU DE CORRIENTES

ESTRUCTURA DE REFERENCIA ESTACIONARIA

6.- i_{qs}^{s} 8.- i'^{s}_{qr}

7.- i_{ds}^{s} 9.- i'^{s}_{dr}

ESTRUCTURA DE REFERENCIA ROTANTO SINCRONIZADAMENTE

10.- i_{qs}^{e} 12.- i_{qr}^{e}

11.- i_{ds}^{e} 13.- i_{dr}^{e}

CORRIENTES DE FASE (ESTRUCTURA DE REFERENCIA ESTACIONARIA)

14.- i_{as} * 17.- i'^{s}_{ar}

15.- i_{bs} * 18.- i'^{s}_{br}

16.- i_{cs} * 19.- i'^{s}_{br}

TORQUE

20.- TORQUE

* Corrientes de fase del rotor expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

En este ejemplo, se presentan los siguientes gráficos:

VOLTAJES:

v_{qs}^{s}, v_{ds}^{s}, v_{qs}^{e}, v_{ds}^{e}

CORRIENTES:

i_{qs}^{s}, i_{ds}^{s}, $i_{qr}^{'s}$, $i_{dr}^{'s}$

i_{qs}^{e}, i_{ds}^{e}, i_{as}, $i_{ar}^{'s}$

TORQUE

La figura 4.a.1.1. se tiene el voltaje v_{qs}^{s} que según la ecuación (88) también corresponde al voltaje v_{as}, el superíndice s indica que la variable está expresada en la estructura de referencia estacionaria.

La forma de onda es sinusoidal y su amplitud es 1 p.u., con una frecuencia de 60 Hz.

El voltaje v_{ds}^{s} es mostrado en la figura 4.a.1.2, es una onda sinusoidal teniendo un desface de noventa grados con respecto al voltaje v_{qs}^{s}; la amplitud de ésta onda es 1 p.u. y su frecuencia 60 Hz.

La figura 4.a.1.3. muestra el voltaje v_{qs}^{e} donde el superíndice e indica que la variable está expresada en la estructura de referen

cia rotando sincronizadamente.

Se debe recordar que las variables en ejes q - d tienen una frecuencia $(\omega_e - \omega)$ donde ω es la velocidad a la que gira el sistema de ejes escogido. Así si se trata de la estructura de referencia rotando sincronizadamente esto es, $\omega = \omega_e$, entonces la frecuencia de las variables expresadas en dicha estructura es $(\omega_e - \omega_e) = 0$ por lo que, son cantidades constantes.

El voltaje v_{qs}^{e} tiene un valor constante muy próximo a cero. Este valor se puede explicar si se analiza la ecuación (99), que es la expresión para el voltaje v_{qs}^{e}, y se toma en cuenta que $v_{qs}^{s} = 1$ sen $\omega_e t$ (figura 4.a.1.1), si se expresa a v_{qs}^{s} en series de Fourier, se tiene exactamente lo mismo. Entonces, según (90):

$$V_{1q\alpha} = 0 \ , \ V_{1q\gamma} = 1 \quad y \quad V_{kq\alpha} = 0 \ , \ V_{kq\gamma} = 0 \quad \text{para } k=2,\ldots,\infty$$

El voltaje $v_{ds}^{s} = 1 \cos \omega_e t$ (figura 4.a.1.2), por lo que según (91):

$$V_{1d\alpha} = 1, \ V_{1d\gamma} = 0 \quad y \quad V_{kd\alpha} = 0 \ , \ V_{kd\gamma} = 0 \quad \text{para } k=2,\ldots,\infty$$

En base a lo anterior, (99) queda como:

$$v_{qs}^{e} = \frac{1}{2} \{(V_{1q\alpha} + V_{1d\gamma}) \cos 2\,\omega_e t + (V_{1q\gamma} - V_{1d\alpha}) \text{ sen } 2\omega_e t +$$

$$+ (V_{1q\alpha} - V_{1q\gamma}) \cos(0)\omega_e t + (V_{1q\gamma} + V_{1d\alpha}) \text{ sen } (o)\omega_e t \}$$

quedando:

$$v_{qs}^{e} = \frac{1}{2} \cdot \{(0 + 0) \cos 2\omega_e t + (1 - 1) \operatorname{sen} 2\omega_e t +$$

$$+ (0 - 0) . 1 + (1 + 1) . 0 \}$$

$$v_{qs}^{e} = 0$$

Comprobándose este resultado matemático con el gráfico.

Las pequeñas irregularidades de la figura 4.a.1.3. se deben a que, para graficación en la impresora, los valores verdaderos que se presentan en la parte inferior del gráfico, son multiplicados por un factor que para éste ejemplo fue 15.

La figura 4.a.1.4 muestra el voltaje v_{ds}^{e}, como se puede observar, en un valor constante de 1 p.u.

CORRIENTES:

La corriente i_{qs}^{s} que según (146) es la misma que la corriente i_{as}, es mostrada en la figura 4.a.1.5 es una onda sinusoidal cuya amplitud máxima es 1.15 p.u. y su frecuencia 60 Hz. Y en la figura 4.a.1.6. se muestra i_{ds}^{s} que es sinusoidal y tiene la misma amplitud que i_{qs}^{s}, y está 90° defasada de ésta.

Las figuras 4.a.1.7. y 4.a.1.8. muestran las corrientes i_{qs}^{e} e i_{ds}^{e} (expresadas en la estructura de referencia rotando sincronizada-

mente) respectivamente. Se observa que son constantes, la primera con un valor - 0.67 p.u., mientras que i_{ds}^{e} tiene un valor 0.93 p.u.

La corriente $i_{qr}^{'s}$ que es la misma que la corriente $i_{ar}^{'s}$ (ecuación 149), es mostrada en la figura 4.a.1.9; mientras la figura 4.a.1.10, muestra la corriente $i_{dr}^{'s}$, ambas ondas son sinusoidales defasadas 90° entre sí, con una amplitud de 0.99 p.u. y una frecuencia de 60 Hz. Hay que recordar que el superíndice 5 denota que la variable está expresada en la estructura de referencia estacionaria, por lo que las variables expresadas en ella, tendrían una frecuencia de $(\omega_e - \omega)$ donde $\omega = 0$, entonces la frecuencia es $(\omega_e - 0) = \omega_e$.

Finalmente la figura 4.a.1.11 muestra el torque electromagnético, que en éste caso, es constante e igual a + 0.895 p.u., positivo como se esperaba puesto que $\omega_r < \omega_e$ y por lo tanto el deslizamiento es positivo dando un par positivo (efecto motor).

PERDIDAS:

Una vez calculadas, el programa digital entregó los siguientes resultados:

Pérdidas totales en el cobre en el estator: 0.0547 p.u.

Pérdidas totales en el cobre en el rotor: 0.1072 p.u.

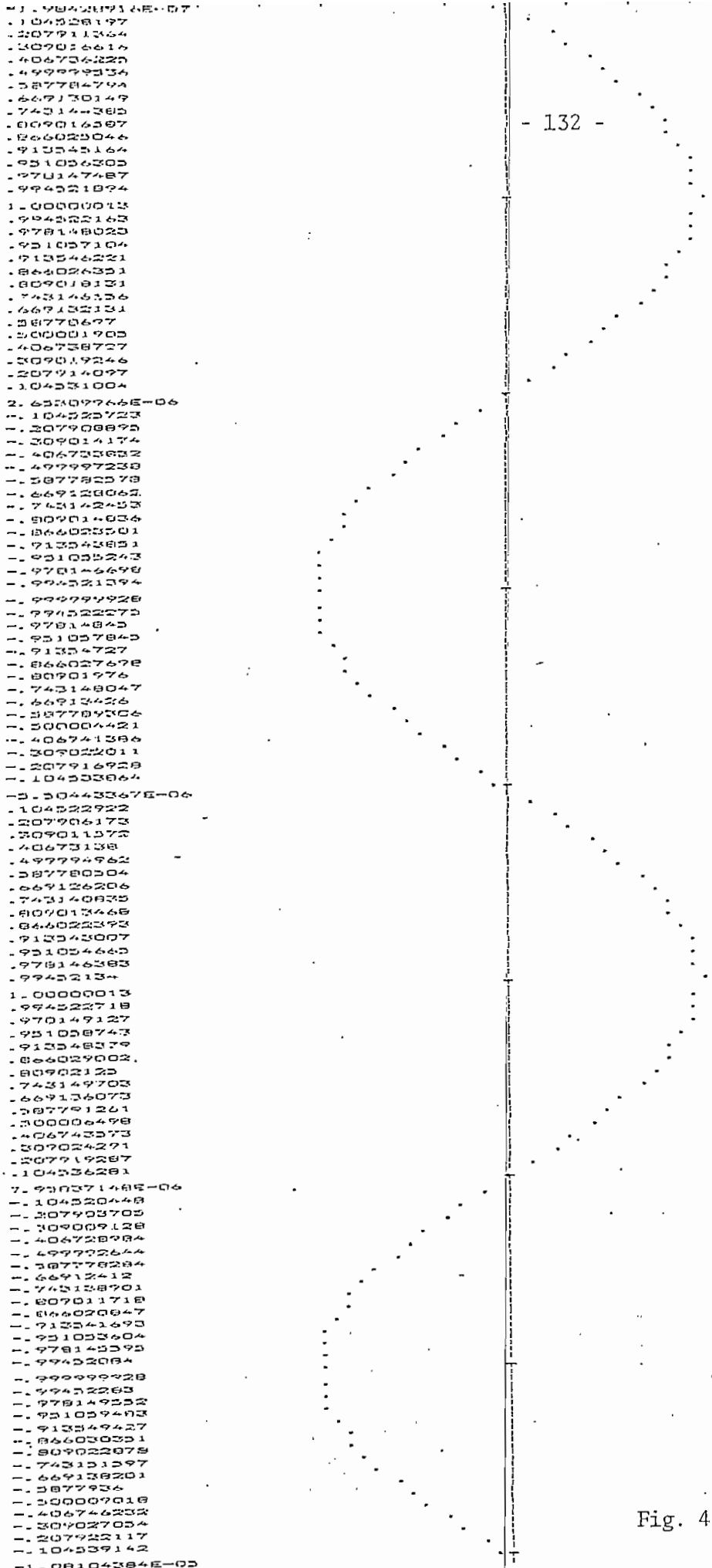


Fig. 4.a.1.1. v_{qs}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

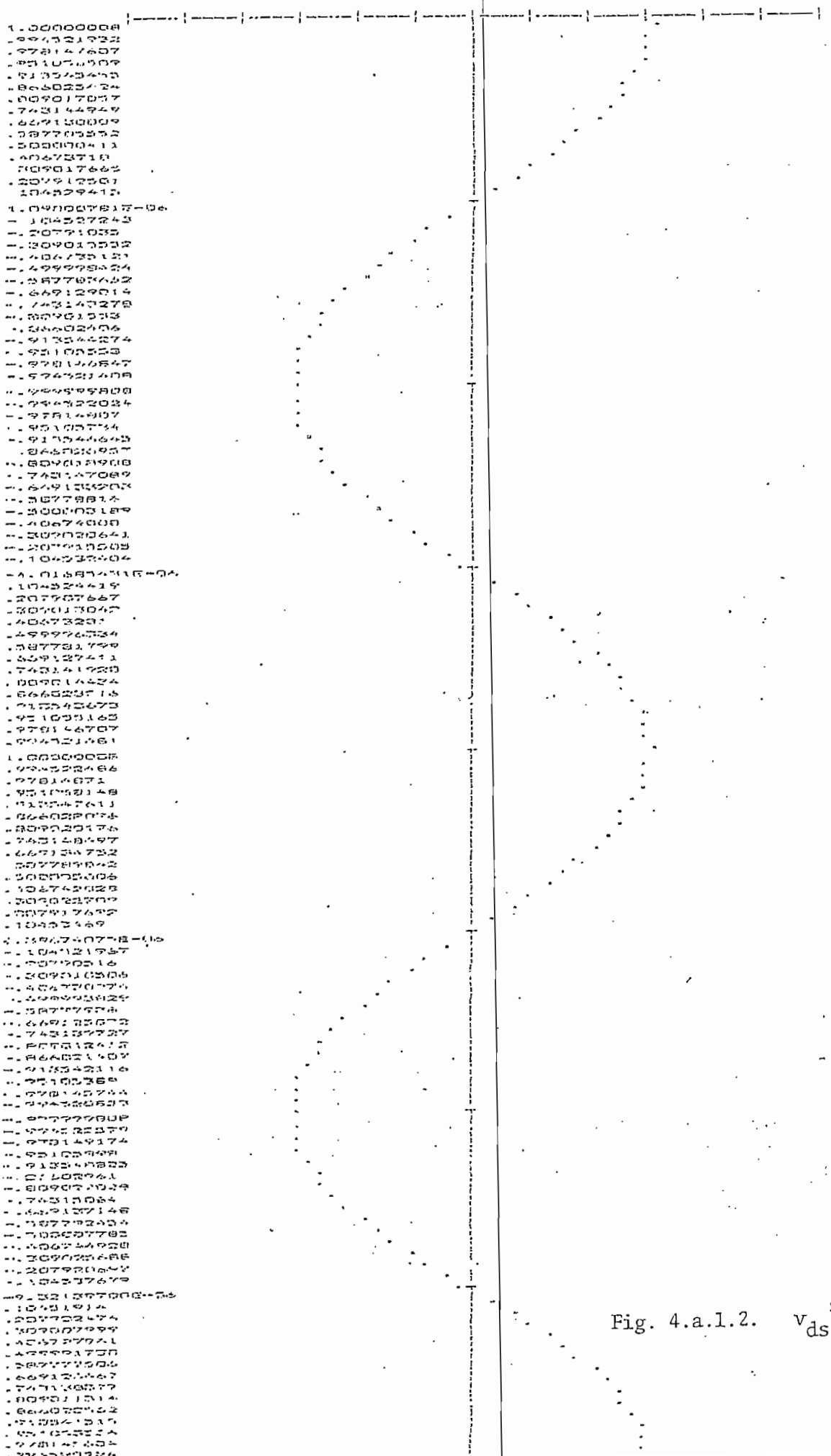


Fig. 4.a.1.2. v_{ds}^{s}

-1.98429916E-07											
-1.80411131E-07											
-1.44298172E-07											
-9.19790287E-08											
-2.68210714E-08											
4.66091916E-08											
1.22937038E-07											
1.96447051E-07											
2.61582351E-07											
3.17437064E-07											
3.48172412E-07											
3.63357315E-07											
3.58162658E-07											
3.33413618E-07											
2.91501946E-07											
2.36127592E-07											
1.71962404E-07											
1.04208316E-07											
3.81094568E-08											
-2.15084087E-08											
-7.06665217E-08											
-1.06367052E-07											
-1.27796246E-07											
-1.34419269E-07											
-1.27092744E-07											
-1.10870408E-07											
-8.68872776E-08											
-5.99652362E-08											
-3.41843019E-08											
-1.32434541E-08											
-9.82282034E-11											
3.35775499E-09											
-3.54594619E-09											
-2.01767962E-08											
-4.47064408E-08											
-7.45214367E-08											
-1.07936682E-07											
-1.35279664E-07											
-1.50925025E-07											
-1.73776699E-07											
-1.77616535E-07											
-1.69364598E-07											
-1.49210077E-07											
-1.18429990E-07											
-8.02923343E-08											
-3.77174149E-08											
4.97321934E-09											
4.35197712E-08											
7.39508756E-08											
9.30009951E-08											
9.84443792E-08											
8.94505464E-08											
6.69149913E-08											
3.16472199E-08											
-1.18814348E-08											
-5.97998045E-08											
-1.07222279E-07											
-1.49101744E-07											
-1.80707286E-07											
-1.98080927E-07											
-1.98429309E-07											
-1.80412511E-07											
-1.44300583E-07											
-9.19820379E-08											
-2.68247241E-08											
4.66053535E-08											
1.22933193E-07											
1.96443494E-07											
2.61580051E-07											
3.17434844E-07											
3.48171134E-07											
3.63357062E-07											
3.58163343E-07											
3.33417333E-07											
2.91504436E-07											
2.36130663E-07											
1.71966989E-07											
1.04211765E-07											
3.81126786E-08											
-2.15056248E-08											
-7.06442494E-08											
-1.06563370E-07											
-1.27775561E-07											
-1.34419504E-07											
-1.27093071E-07											
-1.10871498E-07											
-8.68886024E-08											
-5.99676237E-08											
-3.41847144E-08											
-1.32468305E-08											
-9.86398599E-11											
3.35784252E-09											
-3.54356894E-09											
-2.01957319E-08											
-4.47810638E-08											
-7.45198568E-08											
-1.05935111E-07											
-1.35278314E-07											
-1.58924027E-07											
-1.73776211E-07											
-1.77616638E-07											
-1.69363525E-07											
-1.49211402E-07											
-1.18641712E-07											
-8.02744157E-08											
-3.77196092E-08											
4.97112549E-09											
4.35179333E-08											
7.39495991E-08											
9.30003601E-08											
9.84643807E-08											
8.94513863E-08											
6.65164821E-08											
3.16492364E-08											
-1.18790708E-08											
-5.97973471E-08											
-1.07219774E-07											
-1.49099846E-07											
-1.80706016E-07											
-1.98080461E-07											
-1.98429802E-07											

Fig. 4.a.1.3. VQSE

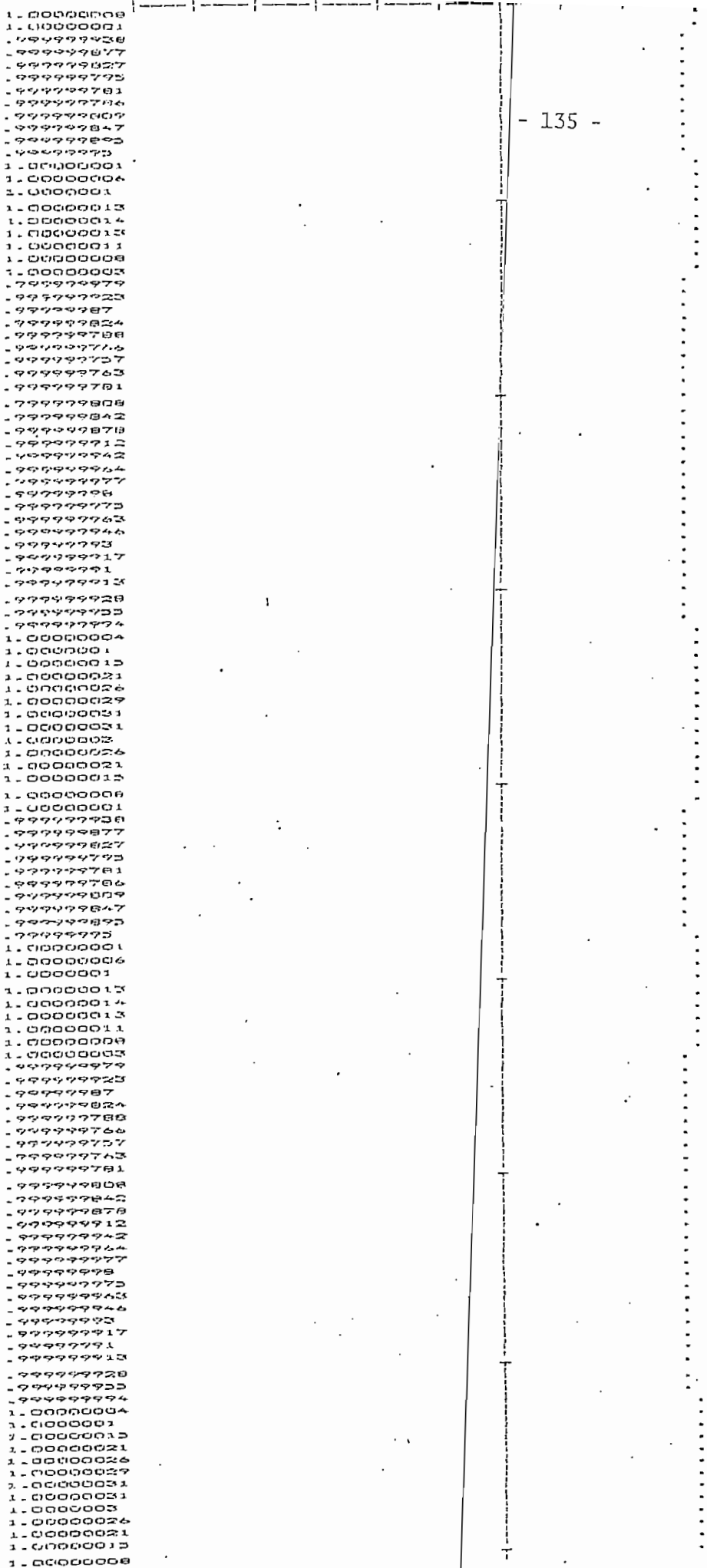


Fig. 4.a.1.4. VDSE

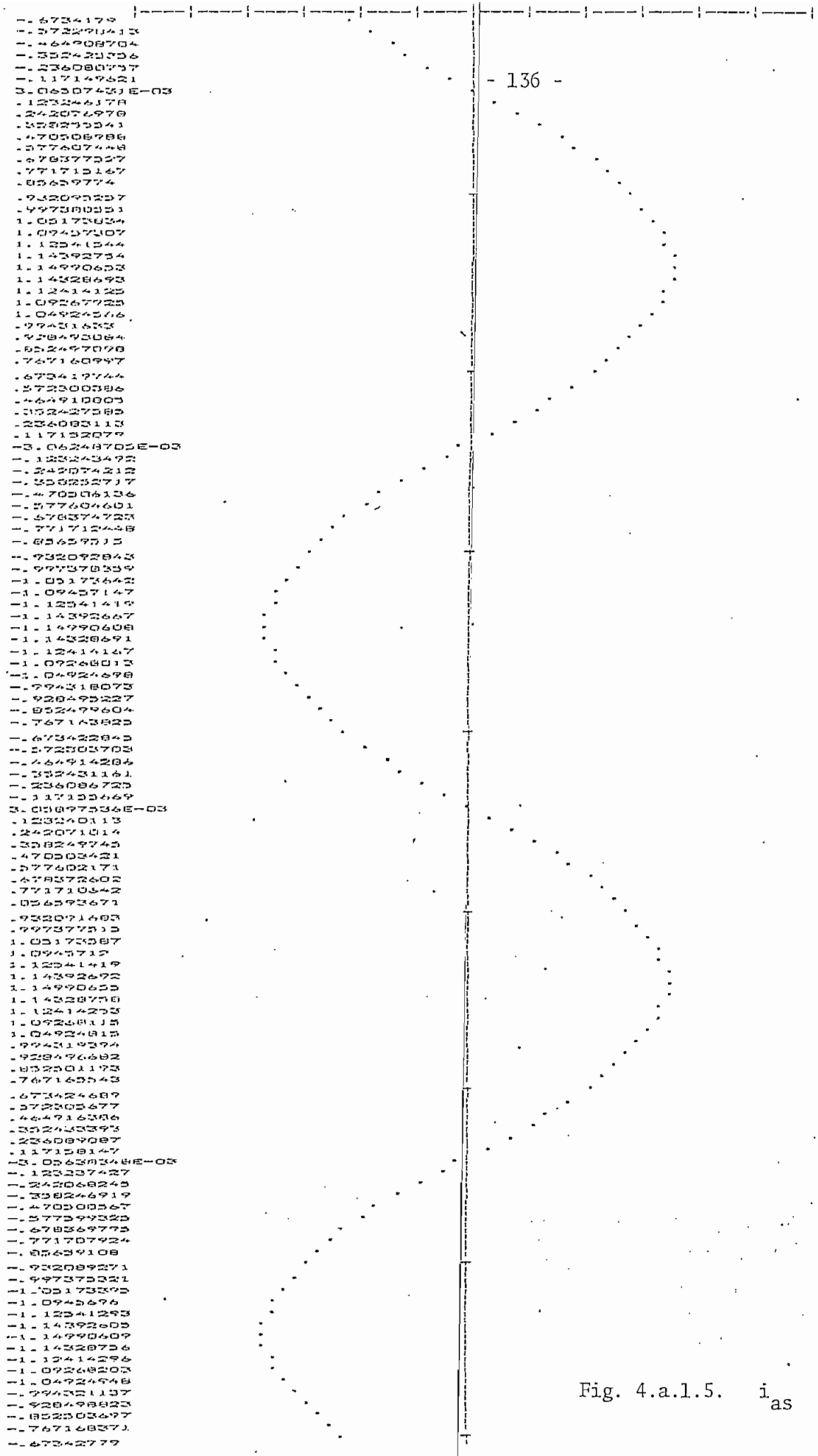


Fig. 4.a.1.5. i_{as} i_{qs}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

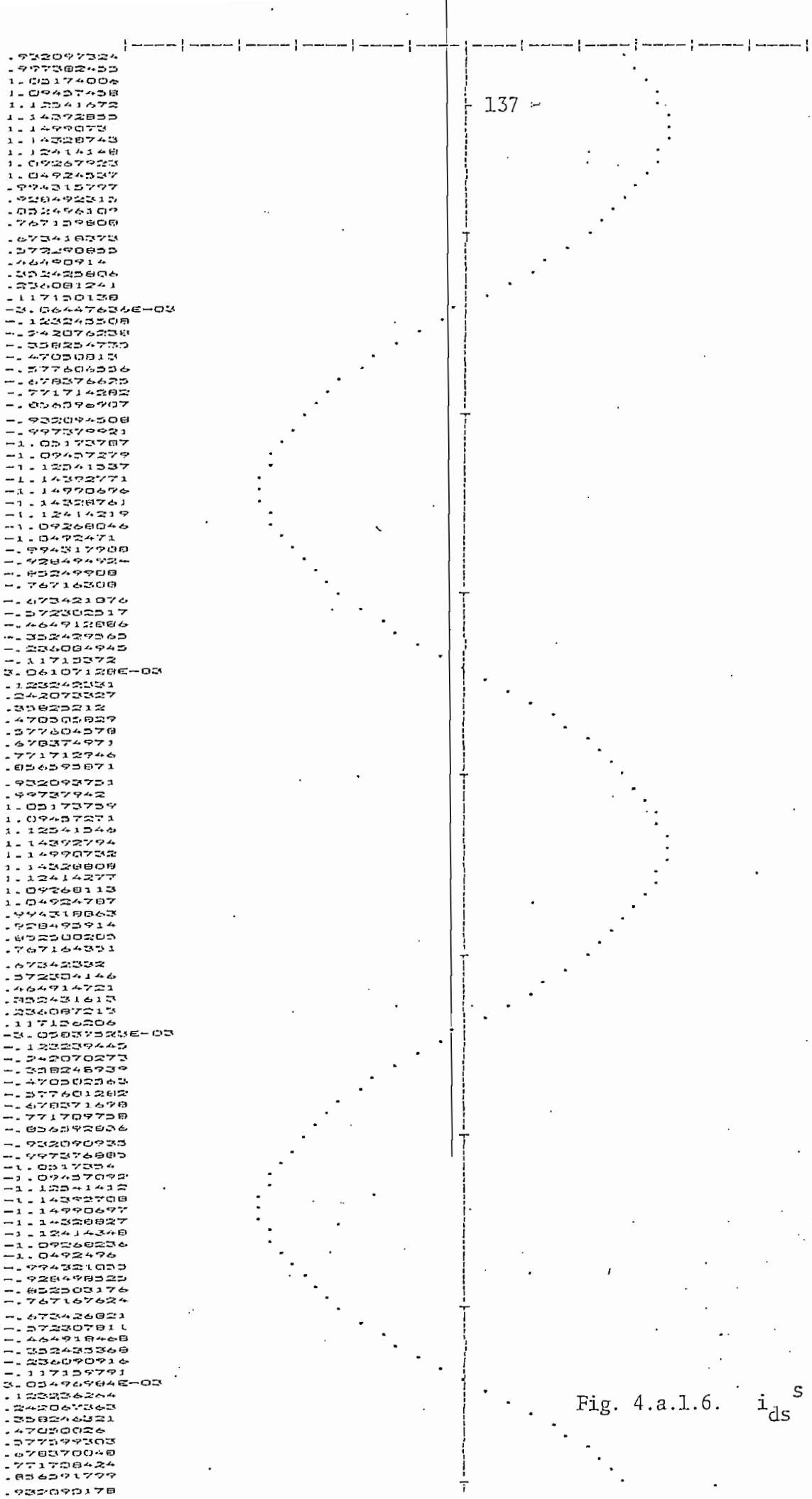


Fig. 4.a.1.6. i_{ds}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

-.673417899
-.673418075
-.673418222
-.673418333
-.673418391
-.673418402
-.673418363
-.673418277
-.673418152
-.673418
-.673417831
-.673417658
-.673417494
-.673417347
-.673417227
-.673417137
-.673417081
-.673417055
-.673417057
-.673417108
-.673417116
-.673417159
-.673417172
-.673417234
-.673417258
-.673417271
-.673417273
-.673417268
-.673417262
-.673417261
-.673417271
-.673417173
-.673417335
-.673417425
-.673417524
-.673417645
-.673417778
-.673417922
-.673418006
-.673418184
-.673418283
-.673418347
-.673418371
-.673418347
-.673418277
-.673418168
-.673418002
-.673417848
-.673417663
-.673417479
-.673417312
-.673417174
-.673417077
-.673417029
-.673417033
-.673417091
-.673417197
-.673417343
-.673417319
-.673417709
-.673417899
-.673418075
-.673418222
-.673418333
-.673418391
-.673418402
-.673418363
-.673418277
-.673418152
-.673418
-.673417831
-.673417658
-.673417494
-.673417347
-.673417227
-.673417137
-.673417081
-.673417055
-.673417057
-.673417108
-.673417116
-.673417159
-.673417172
-.673417234
-.673417258
-.673417271
-.673417273
-.673417268
-.673417262
-.673417261
-.673417271
-.673417173
-.673417335
-.673417425
-.673417524
-.673417645
-.673417778
-.673417922
-.673418006
-.673418184
-.673418283
-.673418347
-.673418371
-.673418347
-.673418277
-.673418168
-.673418002
-.673417848
-.673417663
-.673417479
-.673417312
-.673417174
-.673417077
-.673417029
-.673417033
-.673417091
-.673417197
-.673417343
-.673417319
-.673417709
-.673417899

Fig. 4.a.1.7. $i_{qs}E$

.932097324
.932097241
.932097108
.932096936
.932096738
.932096526
.932096317
.932096123
.932095955
.932095822
.932095573
.932095368
.932095669
.932095694
.932095747
.932095817
.932095896
.932095973
.932096045
.932096102
.932096141
.932096162
.932096160
.932096153
.932096133
.932096144
.932096143
.932096133
.932096184
.932096231
.932096294
.932096371
.932096454
.932096536
.932096609
.932096664
.932096693
.932096692
.932096656
.932096587
.932096487
.932096365
.932096228
.932095609
.932095961
.932095856
.932095784
.932095755
.932095774
.932095843
.932095596
.932096119
.932096309
.932096517
.932096729
.932095693
.932097104
.932097238
.932097323
.932097353
.932097324
.932097241
.932097108
.932096936
.932096738
.932096526
.932096317
.932096123
.932095955
.932095822
.932095573
.932095368
.932095669
.932095694
.932095747
.932095817
.932095896
.932095973
.932096045
.932096102
.932096141
.932096162
.932096168
.932096163
.932096153
.932096144
.932096143
.932096133
.932096184
.932096231
.932096294
.932096371
.932096454
.932096536
.932096609
.932096664
.932096693
.932096692
.932096656
.932096587
.932096407
.932096365
.932096228
.932095609
.932095961
.932095856
.932095784
.932095755
.932095774
.932095843
.932095596
.932096119
.932096309
.932096517
.932096729
.932095693
.932097104
.932097238
.932097323
.932097353
.932097324

Fig. 4.a.1.8. $i_{ds}E$

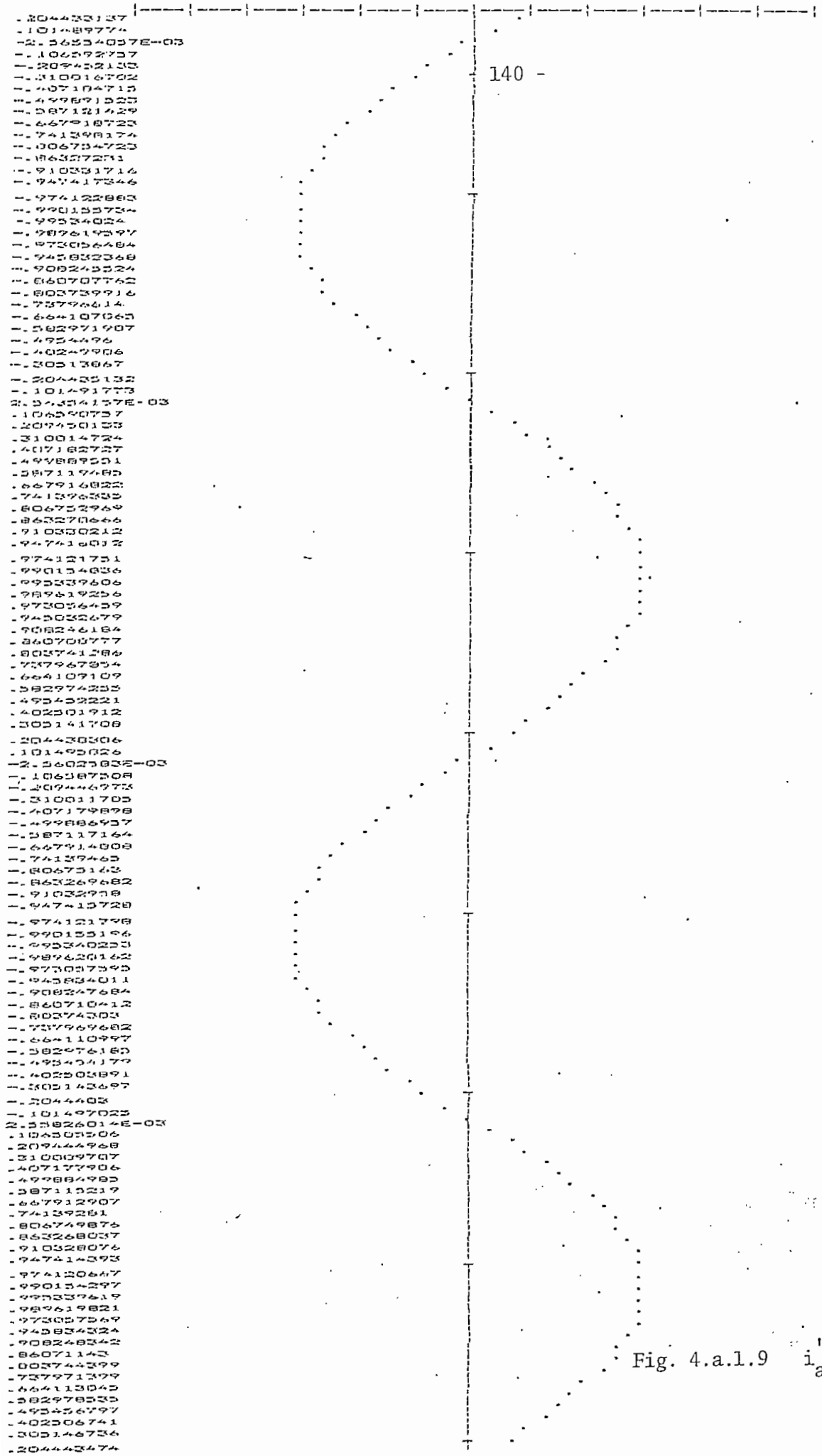


Fig. 4.a.1.9 i'^{s}_{ar} i'^{s}_{qr}

ESCALA HORIZONTAL:

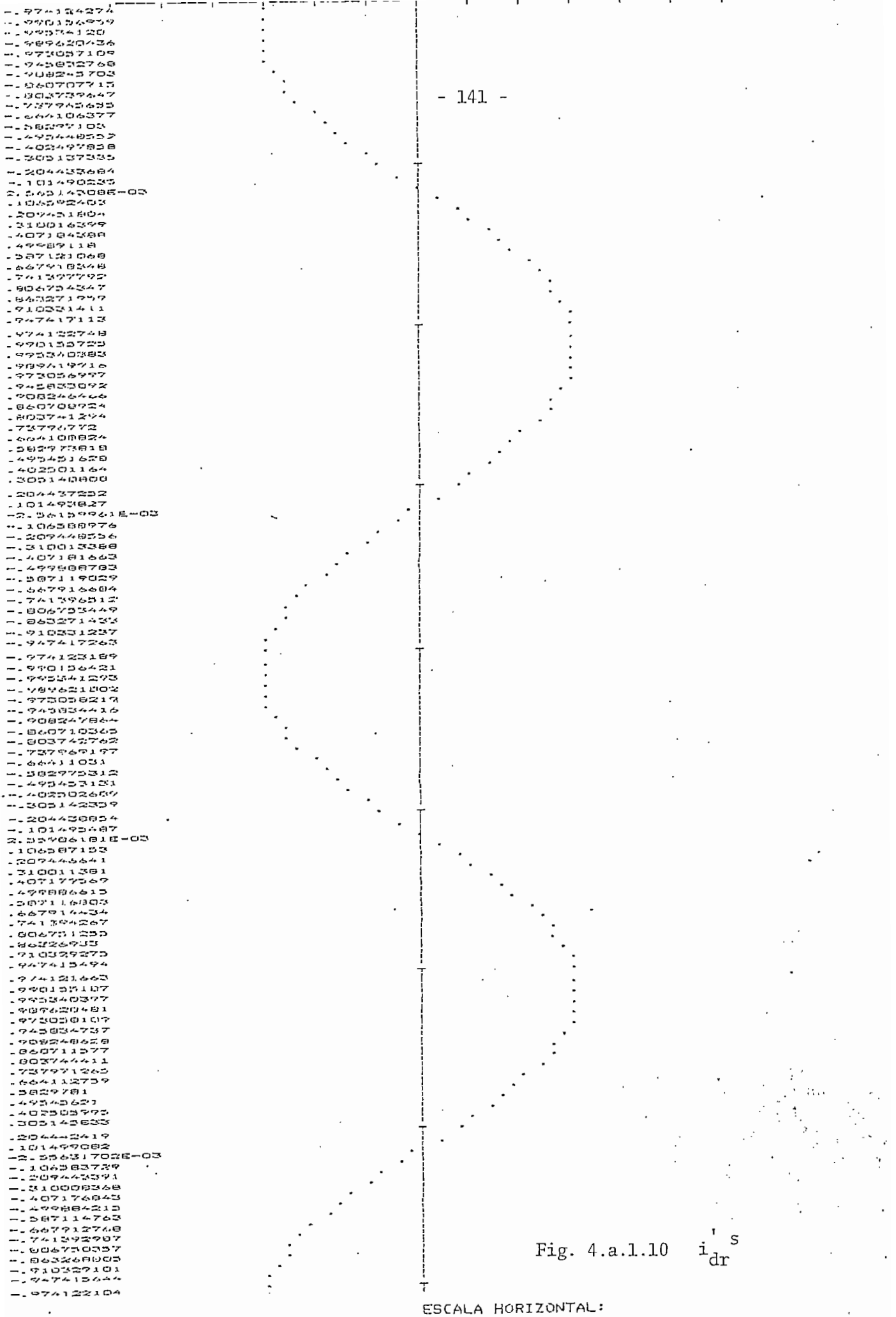


Fig. 4.a.1.10 i'_{dr} s

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

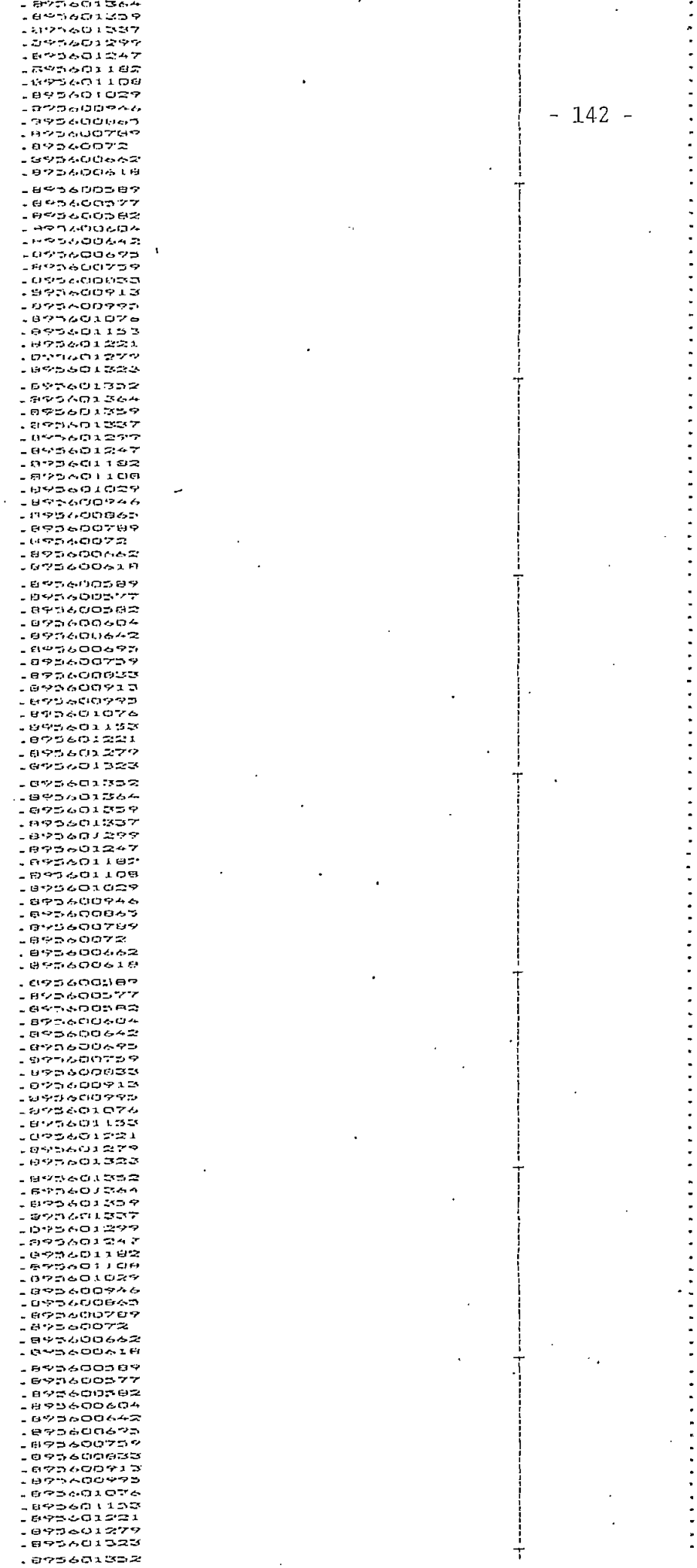


Fig. 4.a.1.11 Torque

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

4.a.2. OPERACION BALANCEADA CON FUENTES NO SINUSOIDALES

En este ejemplo, se analizará en el estado estable la operación balanceada con fuentes no sinusoidales.

Los siguientes voltajes de fuente son la salida de un inversor que forma parte de un sistema empleado para obtener voltajes de salida cuya frecuencia sea ajustable.

Estos voltajes de salida del inversor pueden formar un grupo trifásico que alimentará al estator de la máquina de inducción (FIGURA 4.a.1).

Al descomponer los voltajes de salida de ese inversor, en una expansión en series de Fourier, se ha obtenido lo siguiente:

$$e_{ga} = \frac{4V}{\pi} (\cos \omega_e t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_e t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_e t - \ldots\ldots)$$

$$e_{gb} = \frac{4V}{\pi} (\cos(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{3} \cos 3(\omega_{et} - \frac{2\pi}{3}) +$$

$$+ \frac{1}{5} \cos 5(\omega_{et} - \frac{2\pi}{3}) - \ldots\ldots)$$

$$e_{gc} = \frac{4V}{} (\cos(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{3} \cos 3(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}) +$$

$$+ \frac{1}{5} \cos 5(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}) - \ldots\ldots)$$

Donde V es la amplitud de los voltajes de onda cuadrada y para este ejemplo tiene un valor V = 1 p.u.

La máquina de inducción tiene los siguientes parámetros expresados en p.u.:

$r_s = 0{,}0453$ $\quad X_{1s} = 0{,}0775$ $\quad X_m = 2{,}0420$

$r'_r = 0{,}0222$ $\quad X'_{1r} = 0{,}0322$

Por lo tanto, puesto que: $X_{ss} = X_{1s} + X_m$

$X'_{rr} = X'_{1r} + X_m$

$X_{ss} = 2{,}1195$ $\quad X'_{rr} = 2{,}0742$

Se trebajará con una frecuencia base de 60 Hz., y se analizará la operación a velocidad sincronica ($\omega_e = \omega_r$)

$\omega_e = 1$ $\quad \omega_r = 1$ $\quad f_R = 1$

Se obtendrán los resultados tomando en cuenta la componente fundamental y los pares armónicos hasta el séptimo y hasta el décimo tercero; los gráficos a obtener son los siguientes:

VOLTAJES:

$v_{qs}{}^s$, v_{as}, $v_{ds}{}^s$

CORRIENTES:

$i_{qs}{}^s$, i_{as}, $i'^{\,s}_{qr}$, $i'^{\,s}_{ar}$

TORQUE

Los resultados numéricos y gráficos serán comparados con los resultados obtenidos en el artículo: "METHOD OF MULTIPLE REFERENCE FRAMES APPLIED TO THE ANALYSIS OF SYMMETRICAL INDUCTION MACHINERY (referencia 1) sobre el que se basa el presente trabajo de tesis.

RESULTADOS:

Las expresiones siguientes, son los voltajes v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} obtenidos en el artículo:

$$v_{qs}^{s} = \frac{4V}{\pi} (\cos \omega_e t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_e t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_e t - \frac{1}{11} \cos 11\omega_e t + \frac{1}{13} \cos 13\omega_e t)$$

$$v_{ds}^{s} = \frac{4V}{\pi} (\text{sen}\omega_{e}t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega_e t + \frac{1}{7} \text{sen } 7\omega_e t - \frac{1}{11} \text{sen } 11\omega_e t - \frac{1}{13} \text{sen } 13\omega_e t)$$

y a continuación, se tiene la expresión obtenida en la simulación:

$$v_{qs}^{s} = 1.273239. \cos\omega_e t + 0.254647699 \cos 5\omega_e t - 0.18189128 \cos 7\omega_e t - 0.115748737 \cos 11\omega_e t + 0.0979416986 \cos 13\omega_e t.$$

$$v_{ds}^{s} = -1.27323922 \operatorname{sen}\omega_e t + 0.25464803 \operatorname{sen} 5\omega_e t +$$

$$+ 0.181891142 \operatorname{sen} 7\omega_e t - 0.115749272 \operatorname{sen} 11\omega_e t -$$

$$- 0.01979414391 \operatorname{sen} 13\omega_e t$$

Puesto que V = 1 p.u, comparando los valores que están en p.u. se tiene que coinciden en forma muy satisfactoria.

A continuación, se comparan los voltajes a ser aplicados en cada una de las estructuras de referencia (que conforman el Sistema de referencia múltiple).

En la tabla T. 4.a.2.1. se tienen los valores de los voltajes expresados en p.u., al hacer una comparación se tiene que dichos valores coinciden.

En la tabla T. 4.a.2.2. se tienen las corrientes resultantes (expresadas en p.u.) en cada una de las estructuras de referencia que conforman el sistema de referencia múltiple. En esta tabla:

n = Indice que indica la estructura de referencia, recordando que $n = \pm k$

Examinando la tabla T. 4.a.2.2. se tiene que los resultados son idénticos.

VOLTAJE	VALOR EN p.u.	
	ARTICULO	SIMULACION
v_{qs}^{+1e}	* $\frac{4V}{\pi} = 1.273239$	1.27323953
v_{qs}^{-5e}	$\frac{4V}{5\pi} = 0,254648$	0.254647999
v_{qs}^{+7e}	$-\frac{4V}{7\pi} = -0,18189$	$-0,181891211$
v_{qs}^{-11e}	$-\frac{4V}{11\pi} = -0,115749$	$-0,115749004$
v_{qs}^{+13e}	$\frac{4V}{13\pi} = 0,097941$	0,0979415689
v_{ds}^{+1e}	0	$5,5212 \times 10^{-10}$
v_{ds}^{-5e}	0	-9.5745×10^{-8}
v_{ds}^{+7e}	0	$-9,5532 \times 10^{-8}$
v_{ds}^{-11e}	0	-1.8813×10^{-7}
v_{ds}^{+13e}	0	$-1,9363 \times 10^{-7}$

* V = 1 p.u.

TABLA T.4.a.2.1.

n	i_{qs}^{ne}		i_{ds}^{ne}		i'^{ne}_{qr}		i'^{ne}_{dr}	
	VALOR p.u. (ARTICULO)	VALOR p.u. (SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)
1	0,0128	0,012833	0,6004	0,600452	0	0	0	0
-2	0,0533	0,053289	-0,4601	-0,460189	-0,0533	-0,05327	0,4529	0,452950
+7	-0,0217	-0,021728	-0,2360	0,0235937	0,0218	0,021805	0,2323	0,2322359
-11	-0,0052	0,0052009	0,0960	0,096078	0,0052	0,005204	-0,0945	-0,094582
+13	0,0033	0,003326	0,0688	0,068831	-0,0033	-0,003325	-0,0677	-0,067759

TABLA T.4.a.2.2.

Para las estructuras: n = -1, ±2, ±3, ±4, +5, ±6, -7, ±8, ±9, ±10, +11, ±12 y -13, las corrientes i_{qs}^{ne}, i_{ds}^{ne}, $i_{qr}^{'ne}$, $i_{dr}^{'ne}$ son cero. Esto es debido al hecho de que los únicos voltajes diferentes de cero a ser aplicados, son los correspondientes a las estructuras: n = +1, -5, +7, -11, +13. como puede observarse en la tabla T.4.a.2.1.

La corriente de fase de estator i_{as} obtenida en el artículo, tiene la siguiente expresión:

$$i_{as} = 0.0128 \cos\omega_e t + 0.6004 \operatorname{sen}\omega_e t + 0.0533 \cos 5\omega_e t +$$

$$+ 0.4601 \operatorname{sen} 5\omega_e t - 0.0217 \cos 7\omega_e t - 0.2360 \operatorname{sen} 7\omega_e t -$$

$$- 0.0052 \cos 11\omega_e t - 0.0960 \operatorname{sen} 11\omega_e t + 0.0033 \cos 13\omega_e t +$$

$$+ 0.0688 \operatorname{sen} 13\omega_e t.$$

En la presente simulación se obtuvo para la corriente i_{as}:

$$i_{as} = 0.012834 \cos\omega_e t + 0.600454 \operatorname{sen}\omega_e t + 0.053289 \cos 5\omega_e t +$$

$$+ 0.460189 \operatorname{sen} 5\omega_e t - 0.021729 \cos 7\omega_e t - 0.235937 \operatorname{sen} 7\omega_e t -$$

$$- 0.005201 \cos 11\omega_e t - 0.096077 \operatorname{sen} 11\omega_e t +$$

$$+ 0.003326 \cos 13\omega_e t + 0.068830 \operatorname{sen} 13\omega_e t.$$

Haciendo la comparación, se observa que las dos expresiones co

inciden, comprobándose la validez del modelo.

RESULTADOS GRAFICOS

En la siguiente página, se muestran los resultados gráficos obtenidos en el artículo (referencia 1), la figura 4 muestra los voltajes: v_{qs}^{s}, v_{as}, v_{ds}^{s} y las corrientes i_{as}, i_{qs}^{s}, $i_{qr}^{'s}$, $i_{ar}^{'s}$ y el torque electromagnético obtenidos en un estudio con un computador ANALOGICO.

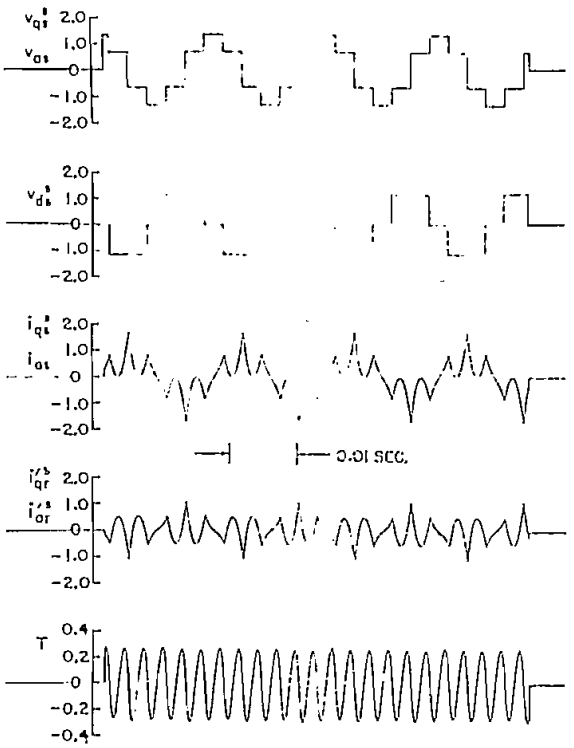


Fig. 4. Synchronous speed operation with squarewave source voltages—analog computer study.

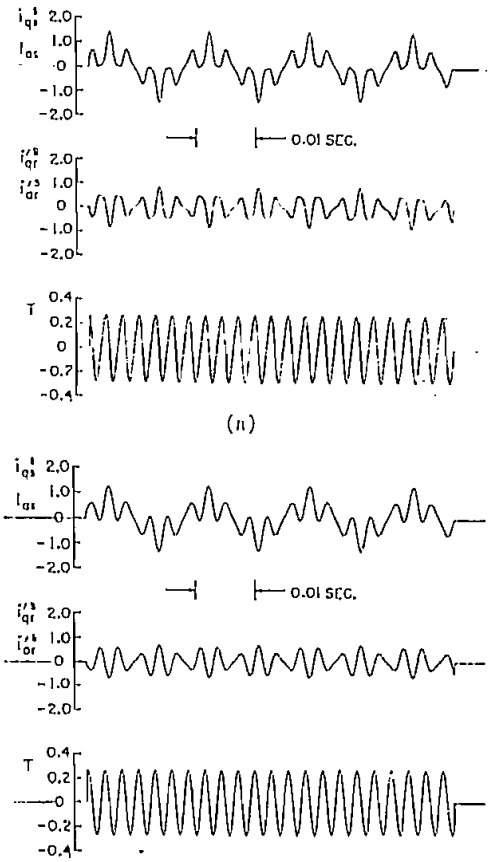
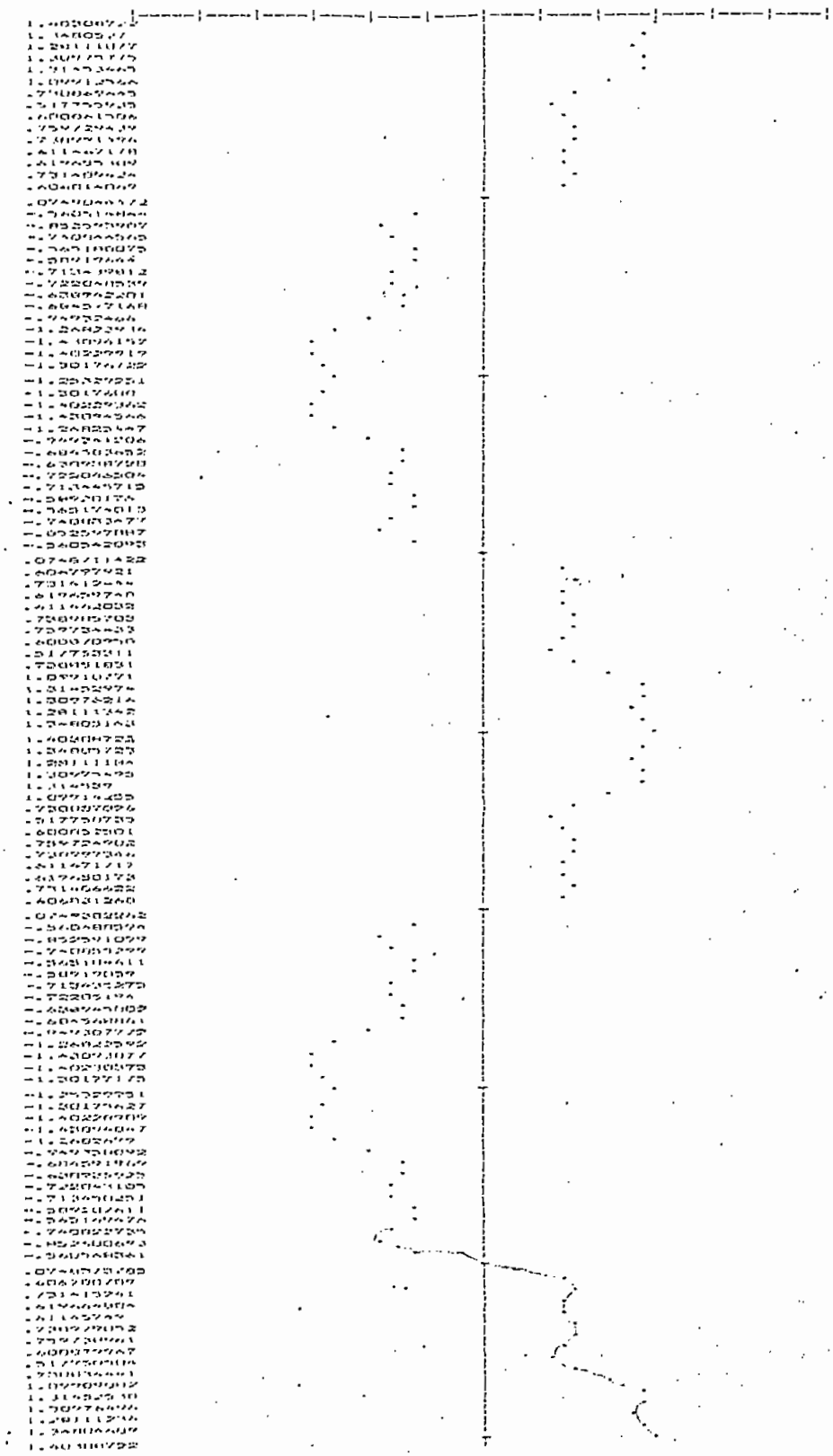


Fig. 5. Synchronous speed operation with squarewave source voltages, calculated using the method of multiple reference frames. (a) Fundamental and odd harmonics through the thirteenth. (b) Fundamental and odd harmonics through the seventh.

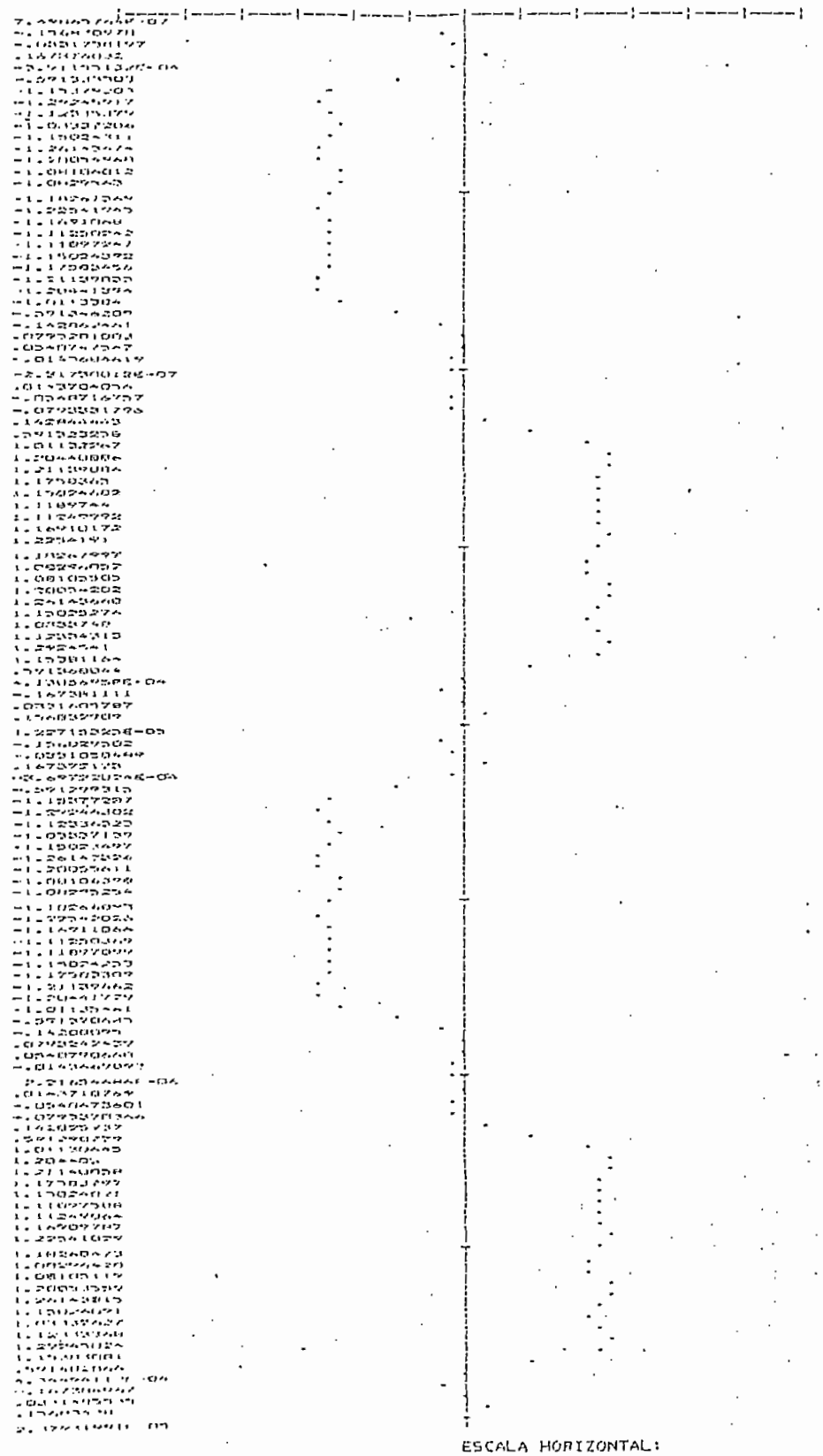
- CASO BALANCEADO -



ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

Fig. 4.a.2.1. v_{qs}^{s}



ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

Fig. 4.a.2.2. v_{ds}^{s}

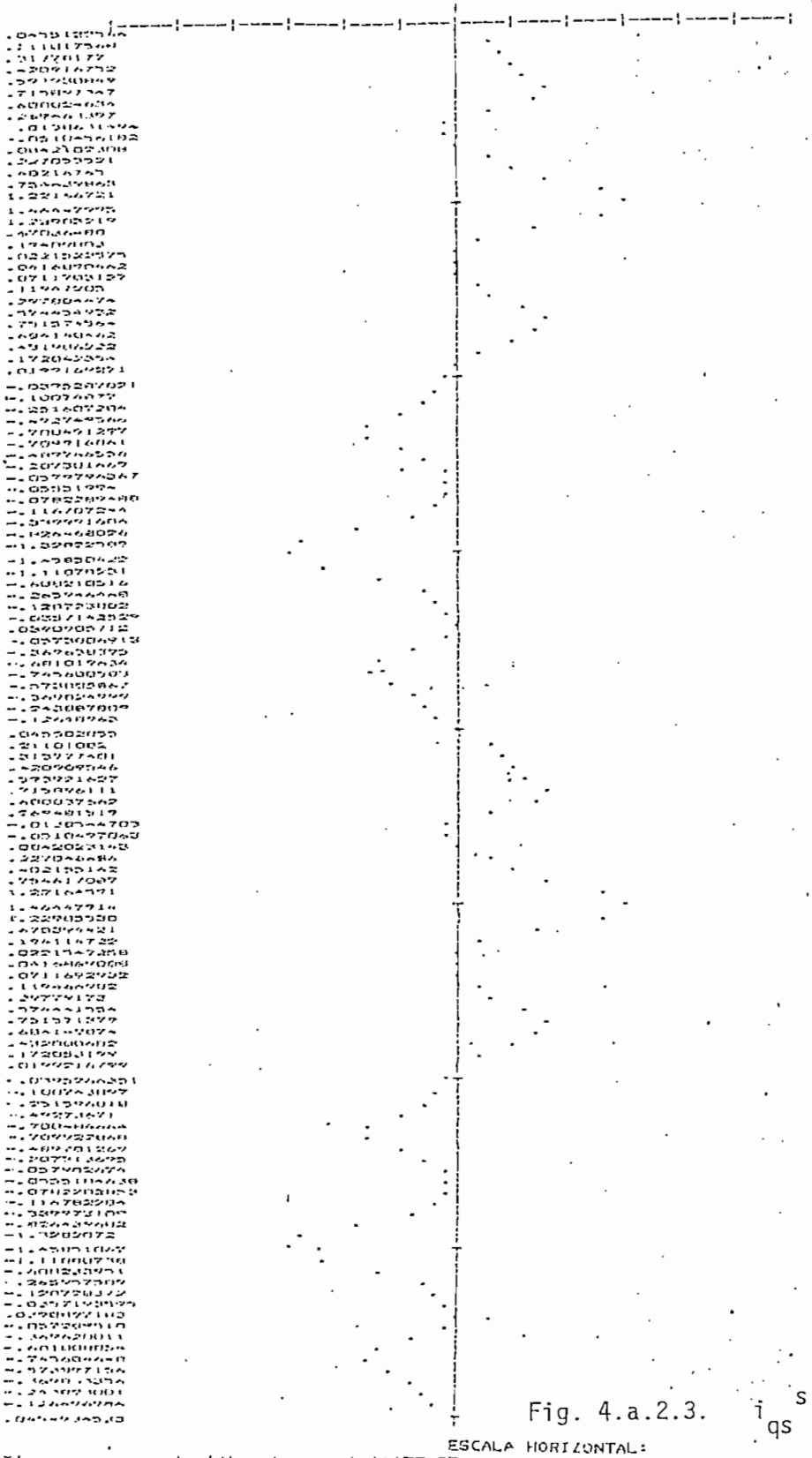


Fig. 4.a.2.3. i_{qs}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

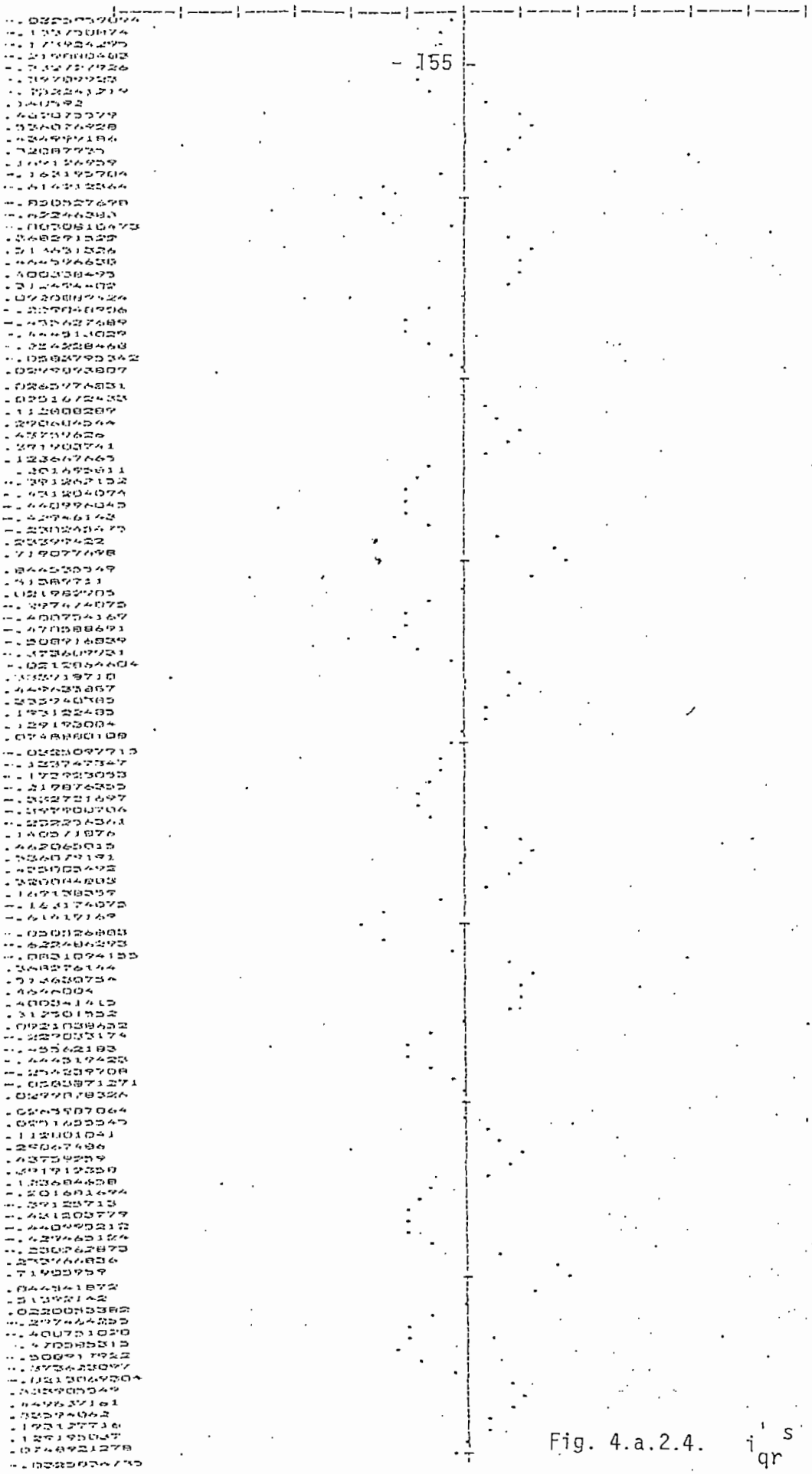


Fig. 4.a.2.4. i'^{s}_{qr}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

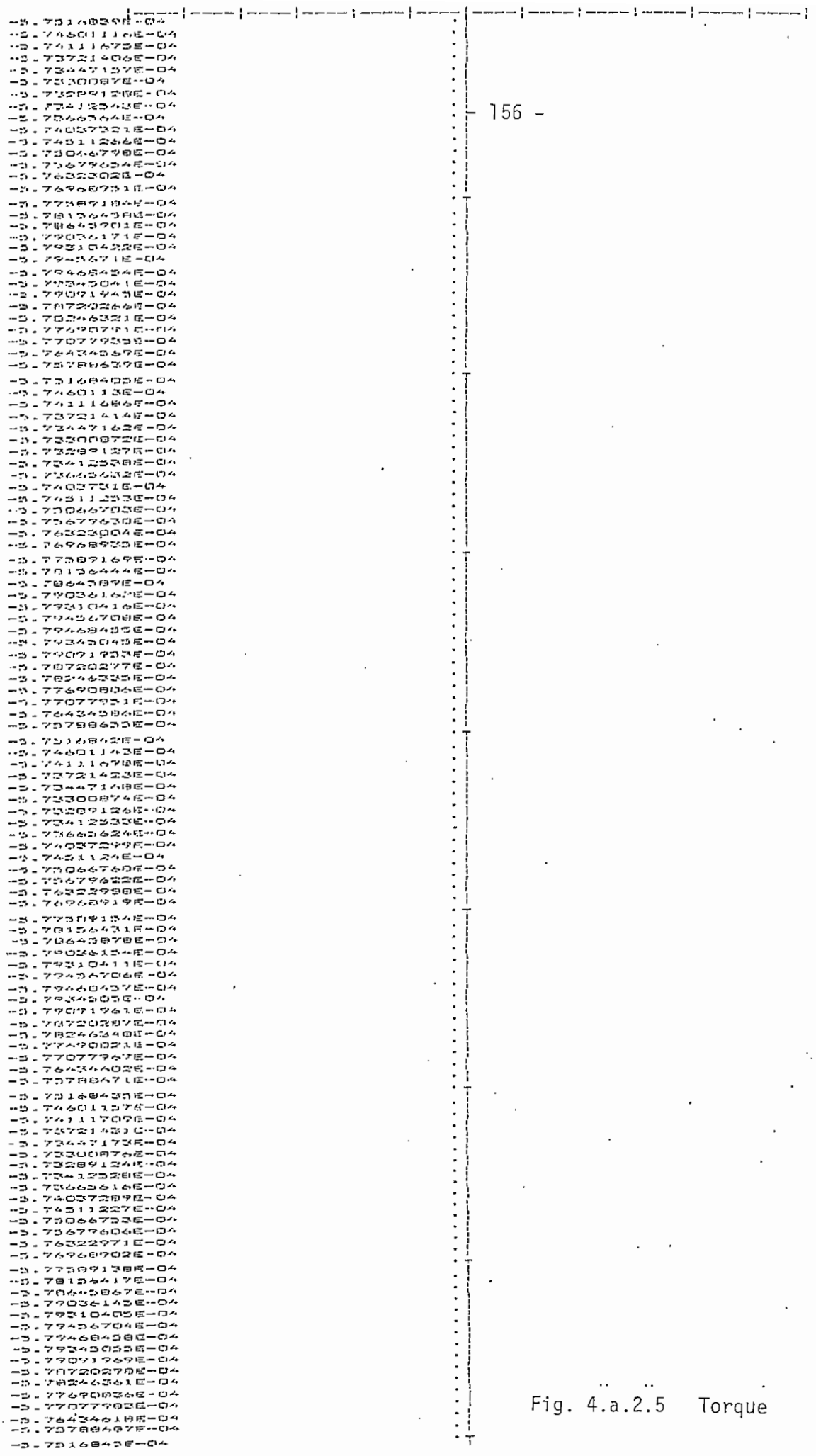


Fig. 4.a.2.5 Torque

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

En la figura 5 se tienen corrientes y torque, pero calculados utilizando el método del sistema de referencia múltiple. La figura 5.a. muestra los resultados obtenidos trabajando con la fundamental y pares armónicos hasta el décimo tercero. En la figura 5.b. se ha tomado la fundamental y los pares armónicos hasta el séptimo.

RESULTADOS GRAFICOS OBTENIDOS EN LA SIMULACION DIGITAL

La presente simulación permite mediante menú de opciones el obtener los gráficos de las variables de voltaje, corriente y torque, una lista de todos los gráficos disponibles se dio anteriormente en el literal 4.a.1.

Se puede seleccionar mediante menú el dispositivo impresora ó monitor en donde se va a realizar la graficación.

A continuación se presentan los gráficos obtenidos en una impresora APPLE SCRIBE. La amplitud de cada uno de los puntos graficados que forman la onda aparecen en la parte inferior y estan en p.u.

En la figura 4.a.2.1. se muestra el voltaje v_{qs}^{s} que según la ecuación (88) es el mismo que el voltaje de fase de estator v_{as}. Comparando la forma de la onda y la amplitud de esta con la correspondiente del artículo, se tiene que los resultados son muy aceptables, así el valor máximo encontrado en la simulación es 1.43 p.u. mientras en el artículo referencia es aproximadamente 1.4. p.u.

El período de la onda graficada es 0,0166 segundos, mientras

que el correspondiente del artículo es aproximadamente 0,0166 segundos como se puede observar, los resultados son satisfactorios.

En la figura 4.a.2.2. se presenta el voltaje v_{ds}^{s}, la amplitud máxima es 1.29 p.u., en el artículo, para v_{ds}^{s} se tiene una amplitud de 1.2 p.u. aproximadamente. El período es el mismo para los dos gráficos y es 0,0166 segundos.

La figura 4.a.2.3. muestra la corriente i_{qs}^{s} que según la ecuación (146) es la mismo que la corriente i_{as}.

La forma de onda coincide con la del artículo, la amplitud máxima es 1.46 p.u., mientras que en el artículo se tiene una amplitud máxima aproximada de 1.5 p.u. La amplitud máxima de los picos secundarios es 0.71 p.u., mientras en el artículo es 0.7 p.u.

El período coindice y es 0.0166 segundos.

La figura 4.a.2.4. muestra el gráfico de $i_{qr}'^{s}$ que según la ecuación (149) es el mismo de $i_{ar}'^{s}$.

Comparando, se tiene que las formas de onda coinciden tanto en amplitud como en frecuencia, así la amplitud máxima de la corriente de fase de rotor expresada en la estructura de referencia estacionaria (figura 4.a.2.4) es 0.85 p.u., mientras que en el artículo tiene un valor aproximado de 0,9 p.u.. El período de las dos ondas coincide y es de 0.0166 segundos.

Puesto que se está analizando el caso balanceado, se tiene que

los voltajes y corrientes de las fases b y c son las mismas que las correspondientes a la fase a, pero desfasados 120° entre uno y otro.

En la figura 4.a.2.5. presenta el gráfico del torque electromagnético. El artículo presenta el gráfico del torque como una función sinusoidal, mientras que la simulación digital da por resultado un torque electromagnético cuyo valor es semejante a cero p.u.

Evidentemente existe una discrepancia entre los dos resultados. A continuación, se demostrará que para este caso, con los voltajes de fuente e_{ga}, e_{gb} y e_{gc} que se han dado para éste ejemplo, el torque electromagnético resulta ser un valor constante muy pequeño.

La ecuación del torque expresado en función de las corrientes que forman el sistema de referencia múltiple es la ecuación (137):

$$
\begin{aligned}
T = M \left(\frac{m}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \{ & (i_{qs}^{+ke}\, i_{dr}^{'\,+ke} + i_{qs}^{-ke}\, i_{dr}^{'\,-ke}) - \\
& - (i_{ds}^{+ke}\, i_{qr}^{'\,+ke} + i_{ds}^{-ke}\, i_{qr}^{'\,-ke}) + \\
& + ((i_{qs}^{+ke}\, i_{dr}^{'\,-ke} + i_{qs}^{-ke}\, i_{dr}^{'\,+ke}) - \\
& - (i_{ds}^{+ke}\, i_{qr}^{'\,-ke} + i_{ds}^{-ke}\, i_{qr}^{'\,+ke})) \cos 2k\omega_e t + \\
& + ((i_{qs}^{+ke}\, i_{qr}^{'\,-ke} + i_{ds}^{+ke}\, i_{dr}^{'\,-ke}) - \\
& - (i_{ds}^{-ke}\, i_{dr}^{'\,+ke} + i_{qs}^{-ke}\, i_{qr}^{'\,+ke})) \operatorname{sen} 2k\omega_e t \}
\end{aligned}
\qquad (137)
$$

En la tabla T.4.a.2.2. se tienen las corrientes resultantes en el sistema de referencia múltiple, se observa que existen corrientes sólo para las estructuras n = +1, -5, +7, -11, +13; siendo las corrientes igual a cero para las demás estructuras, esto es n = -1, ±2. ±3, ±4, +5, ±6, -7, ±8, ±9, ±10, +11 y -13, si se ha tomado en cuenta la fundamental y los pares armónicos hasta el décimo tercero.

Hay que recordar que las corrientes para cada estructura n = ±k son constantes en cada estructura específica.

Analizando el coeficiente del término cos $2\omega_e t$ de la expresión del torque (ecuación (137)), se encuentran los siguientes términos:

a) $i_{qs}^{+ke} \cdot i_{dr}'^{-ke}$

b) $i_{qs}^{-ke} \cdot i_{dr}'^{+ke}$

c) $i_{ds}^{+ke} \cdot i_{qr}'^{-ke}$

d) $i_{ds}^{-ke} \cdot i_{qr}'^{+ke}$

Tomando por ejemplo el término a):

$$i_{qs}^{+ke} \cdot i_{dr}'^{-ke}$$

se tiene que el primer factor es una corriente de una estructura positiva (+ke), mientras que el otro, es una corriente de una estructura negativa (-ke).

Dado que las únicas estructuras energizadas (en este ejemplo - específico) son: +1e, -5e, +7e, -11e, +13e. Entonces, según la tabla T.4.a.2.2:

para la estructura +1e:

$$i_{qs}^{+1e} = 0.0128 \text{ p.u.}$$

Puesto que no está energizada la estructura -1e:

$$i_{dr}^{'\,-1e} = 0$$

Por lo tanto, el término a) tiene un valor cero.

Un análisis similar, da como resultado que los términos b), c) y d) tienen también un valor cero, por tanto el coeficiente del término cos $2k\omega_e t$ es cero. Un caso similar sucede con el coeficiente del término sen $2k\omega_e t$, que para éste ejemplo de aplicación es cero.

En general, se puede concluir que para que el coeficiente del término cos $2k\omega_e t$ ó del término sen $2k\omega_e t$ sea diferente de cero, se hace necesario que al menos para un valor de k se energicen la estructura positiva (+ke) y la negativa(-ke).

Ejemplo: Para k = 5 deberían energizarse la estructura +5e y la estructura -5e. Por lo tanto, existirían las corrientes:

Estructura +5e:

i_{qs}^{+5e}, i_{ds}^{+5e}, i'^{+5e}_{qr}, i'^{+5e}_{dr}

Estructura -5e:

i_{qs}^{-5e}, i_{ds}^{-5e}, i'^{-5e}_{qr}, i'^{-5e}_{dr}

Por tanto el término a) $i_{qs}^{+5e} \cdot i_{dr}^{-5e}$ podría ser diferente de cero, dependiendo de los valores de las corrientes i_{qs}^{+5e} e i'^{-5e}_{dr}.

De lo expuesto en este ejemplo, se concluye que los resultados obtenidos son satisfactorios, demostrandose de esta manera la validez del modelo.

PERDIDAS

Una vez evaluadas, las pérdidas totales en el cobre para el estator son 3.2267×10^{-4} p.u., mientras las pérdidas totales en el cobre en el rotor son 2.051×10^{-4}p.u.

4.b.1. OPERACION DESBALANCEADA CON FUENTES SINUSOIDALES

En este ejemplo se analizará la operación desbalanceada con fuentes sinusoidales. El voltaje de fuente e_{ga} será puesto a cero, mientras e_{gb} y e_{gc} serán los mismos que los usados en el ejemplo 4.a.1 esto es:

$$e_{ga} = 0$$

$$e_{gb} = V \cdot \text{sen}\ (\omega_e t - \frac{2\pi}{3})$$

$$e_{gc} = V \cdot \text{sen}\ (\omega_e t + \frac{2\pi}{3})$$

Donde V = 1 p.u. y los parámetros de la máquina son los mismos expuestos en el ejemplo 4.a.1.

Se tiene también en p.u.:

$$\omega_e = 1$$

$$\omega_r = 0.99$$

$$f_R = 1$$

En este ejemplo se presentarán los siguientes gráficos:

VOLTAJES:

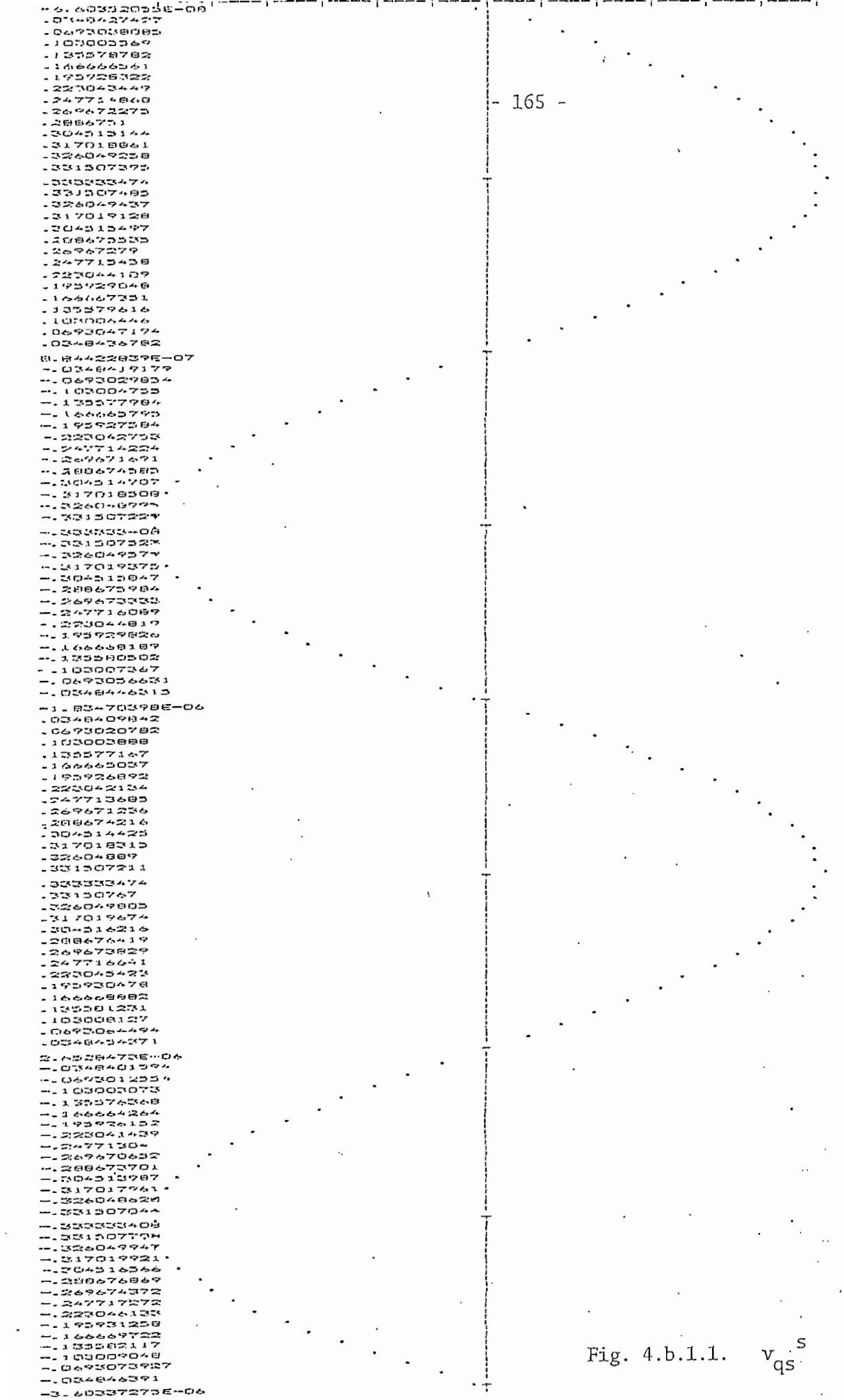


Fig. 4.b.1.1. v_{qs}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

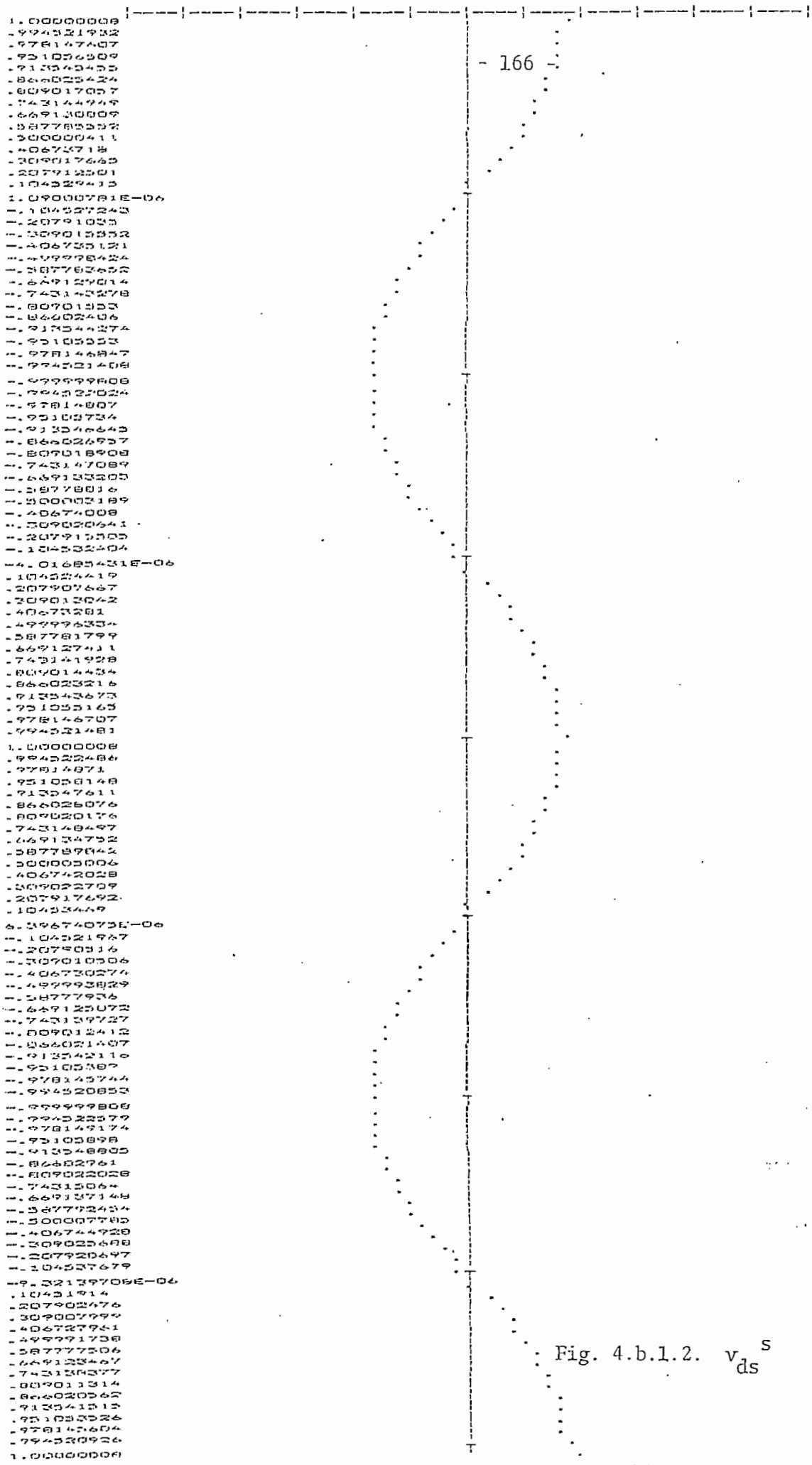


Fig. 4.b.1.2. v_{ds}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

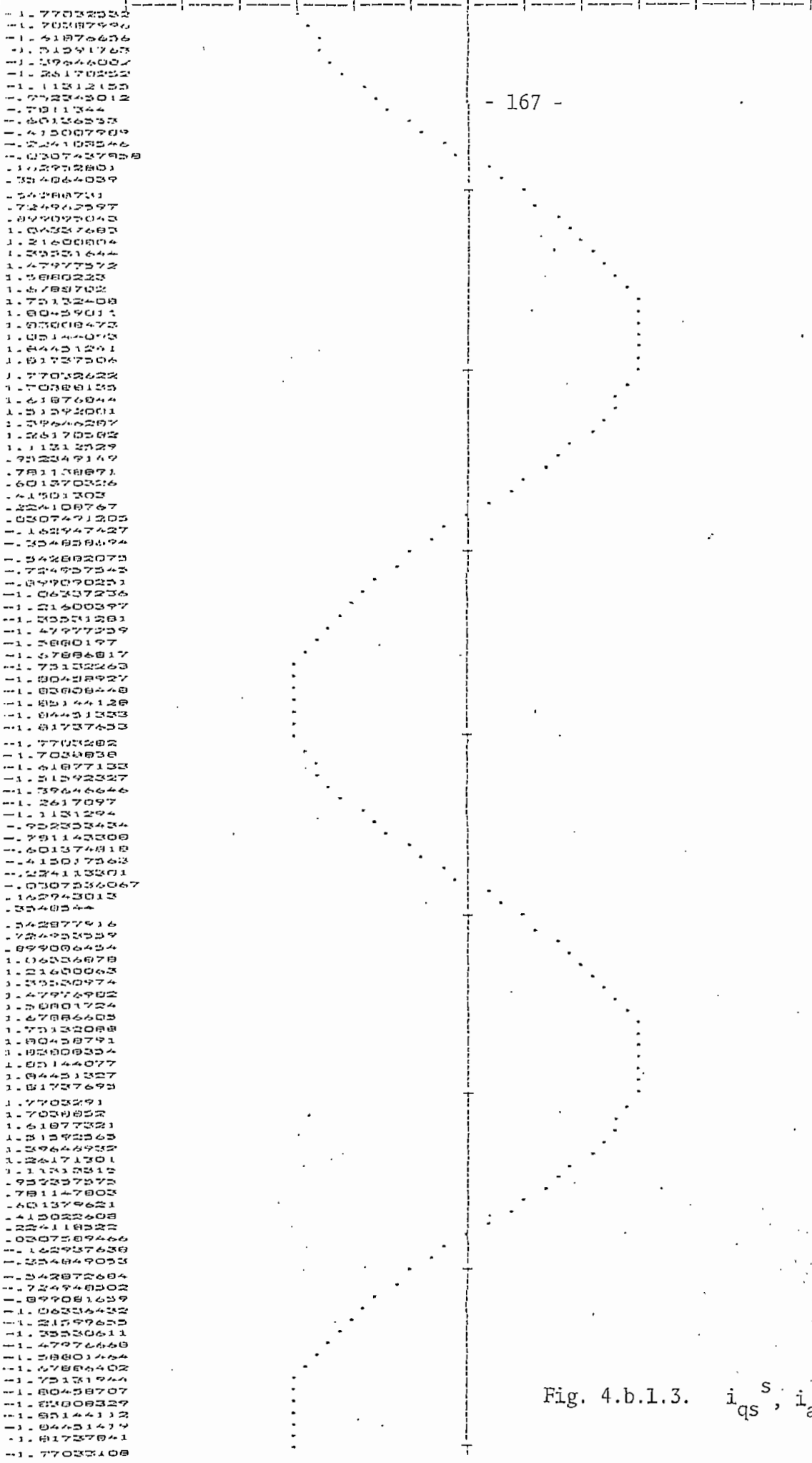


Fig. 4.b.1.3. i_{qs}^{s}, i_{as}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

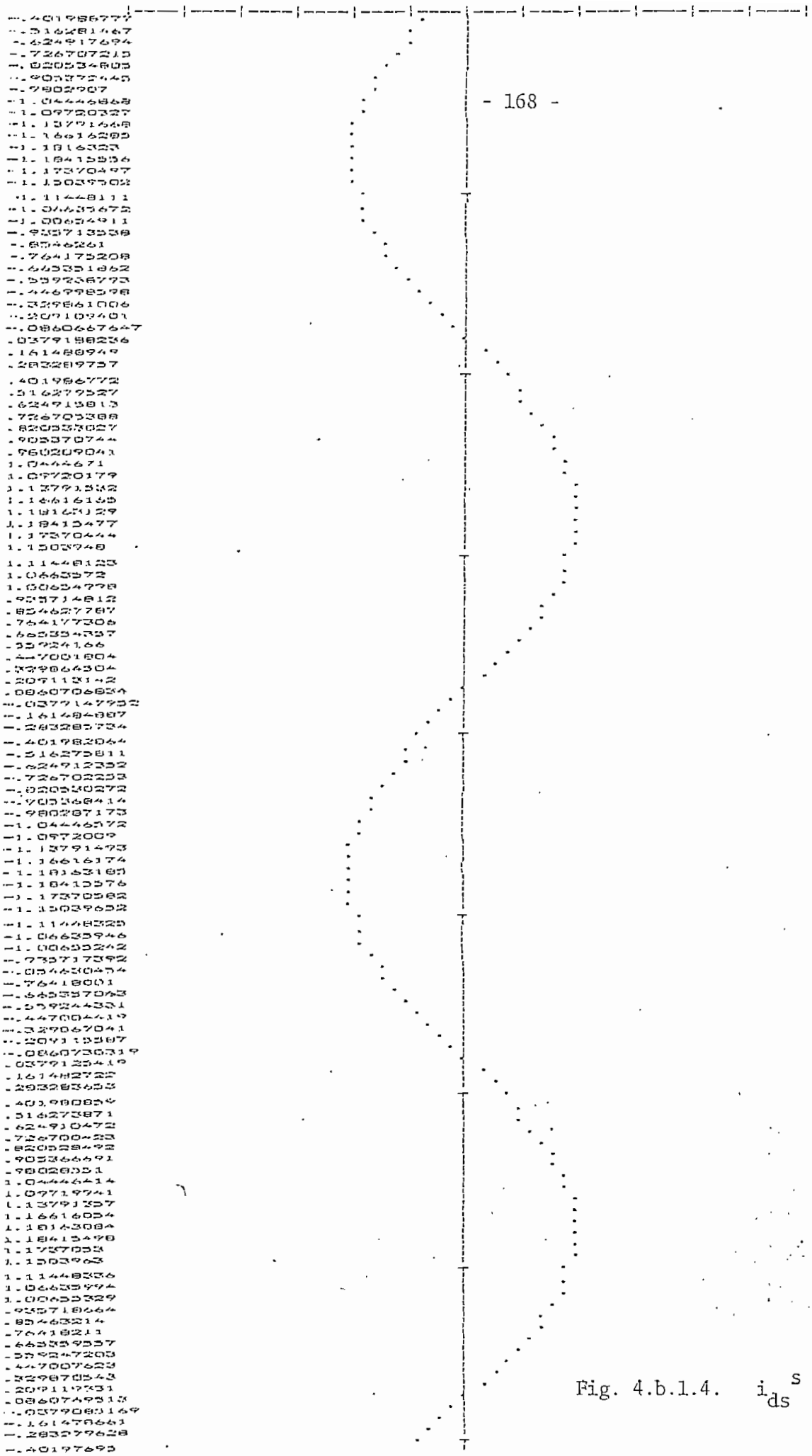


Fig. 4.b.1.4. i_{ds}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

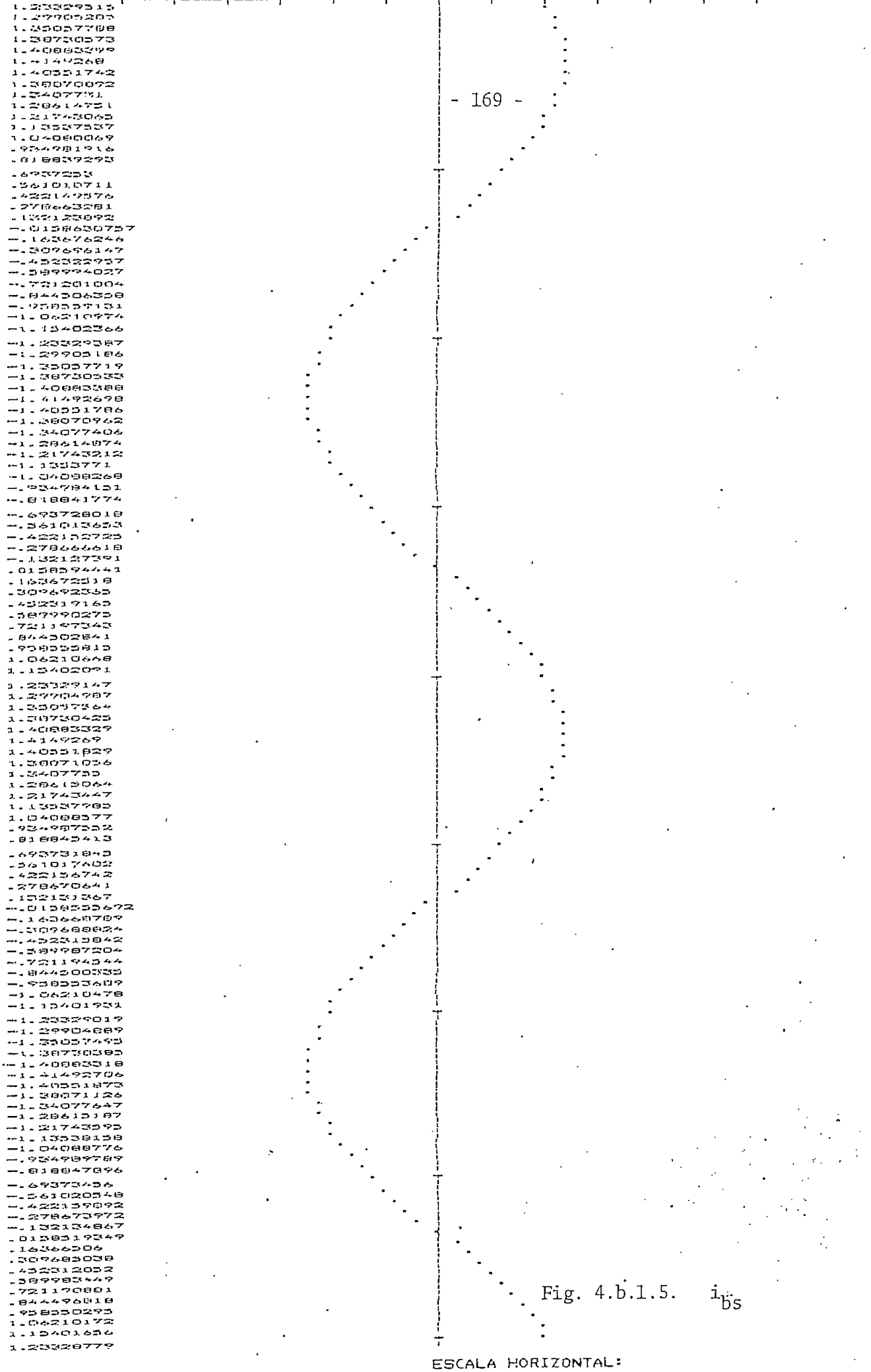


Fig. 4.b.1.5. i_{bs}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

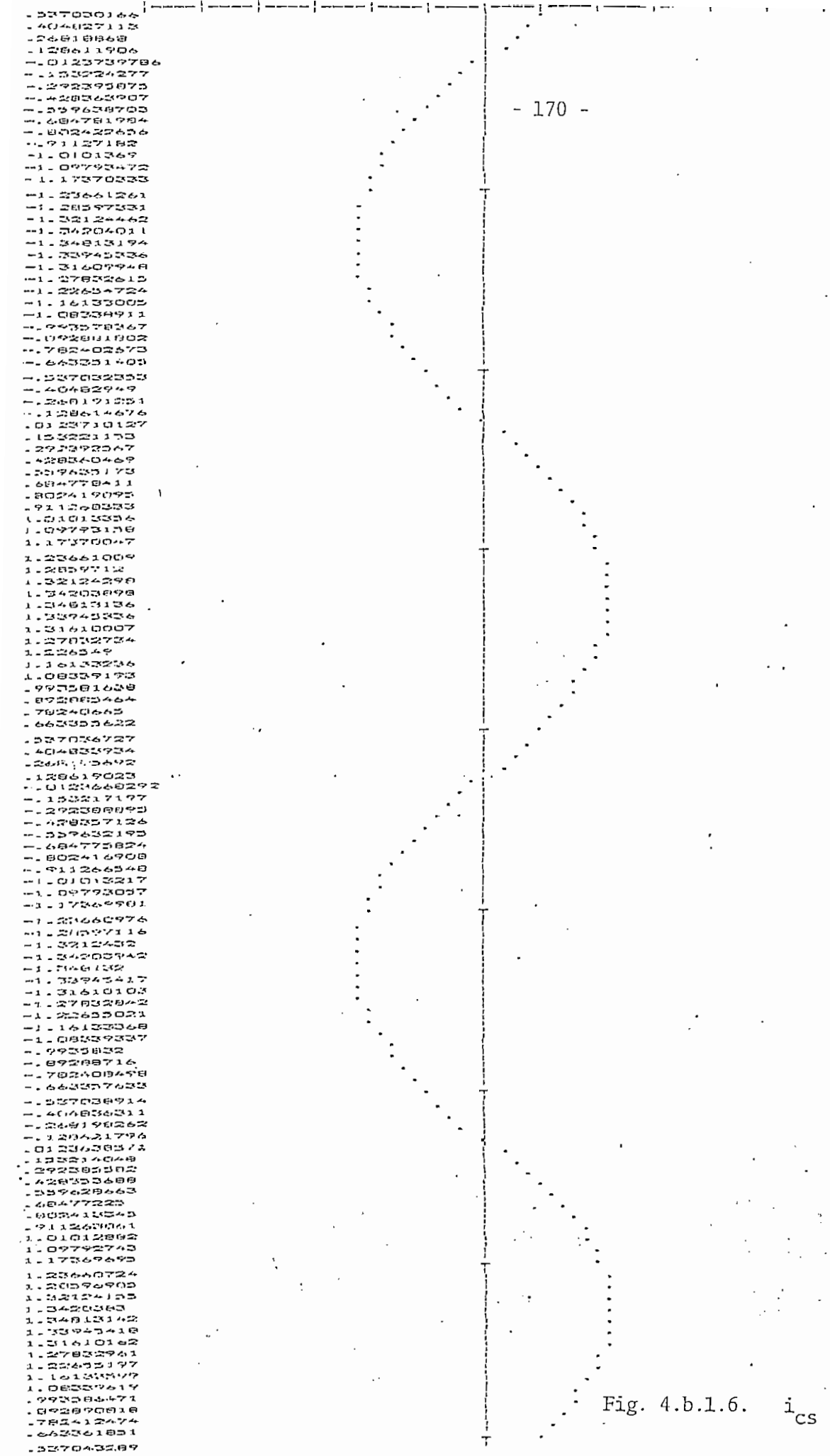


Fig. 4.b.1.6. i_{CS}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

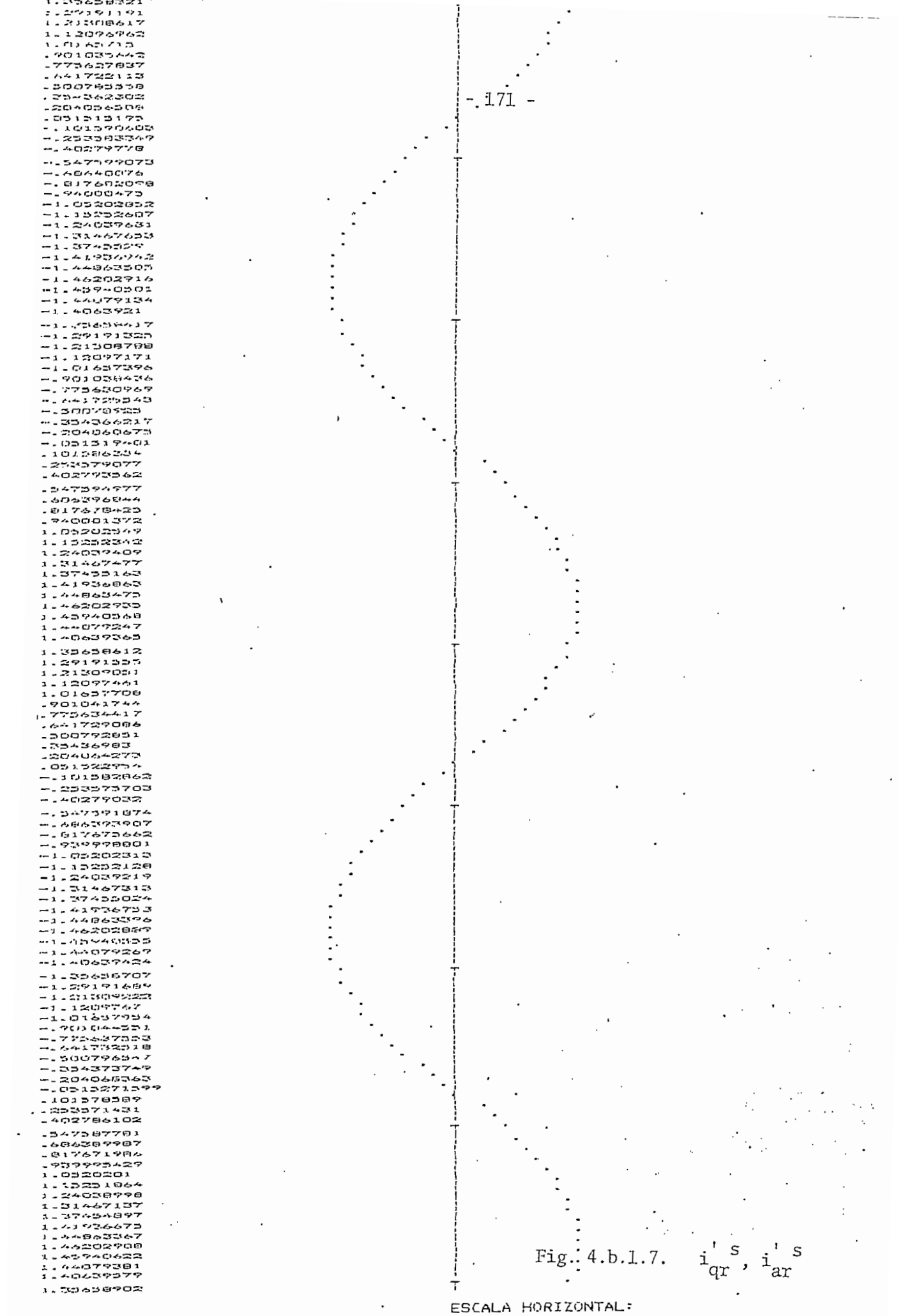


Fig. 4.b.1.7. i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{ar}

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

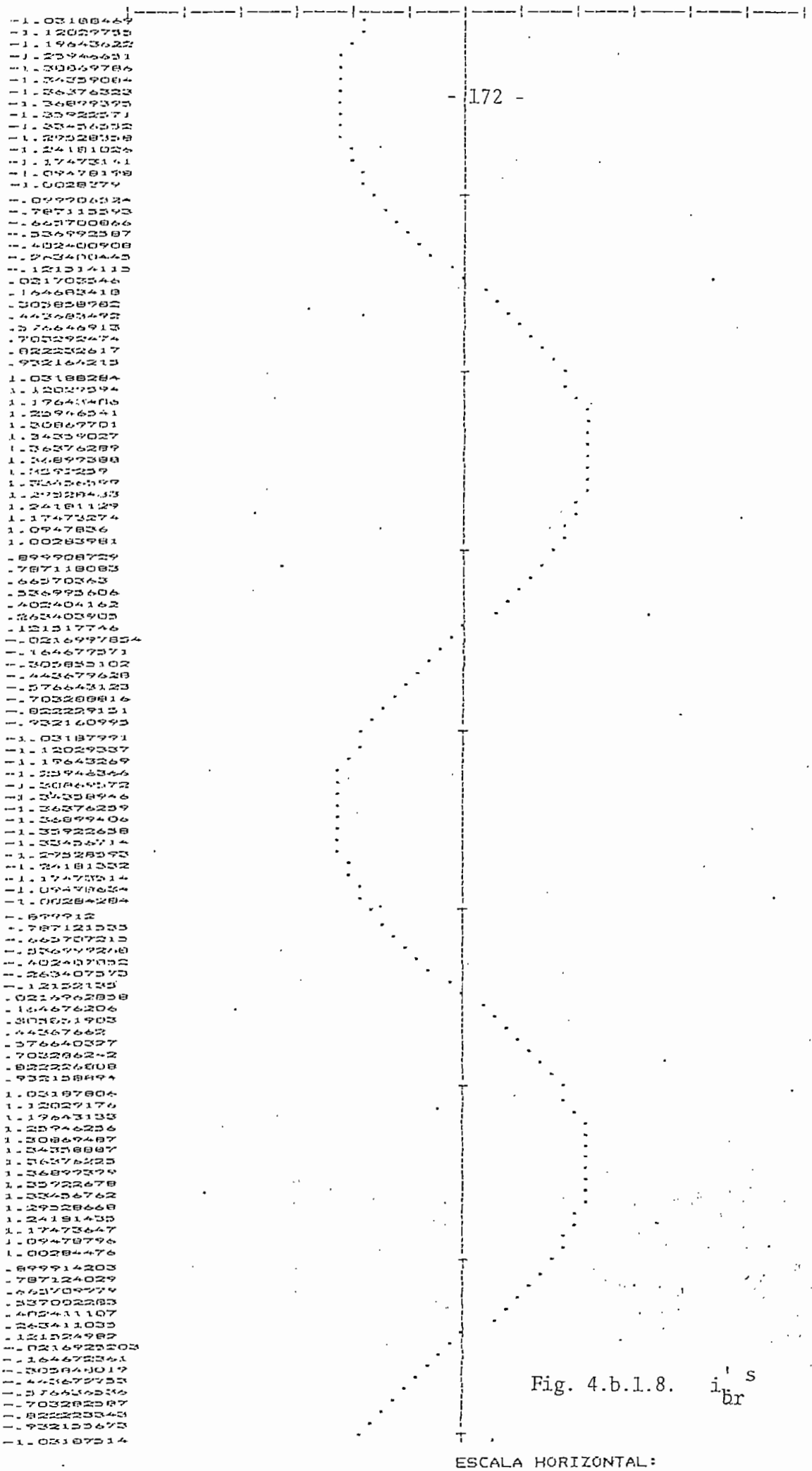


Fig. 4.b.1.8. i'_{br} s

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

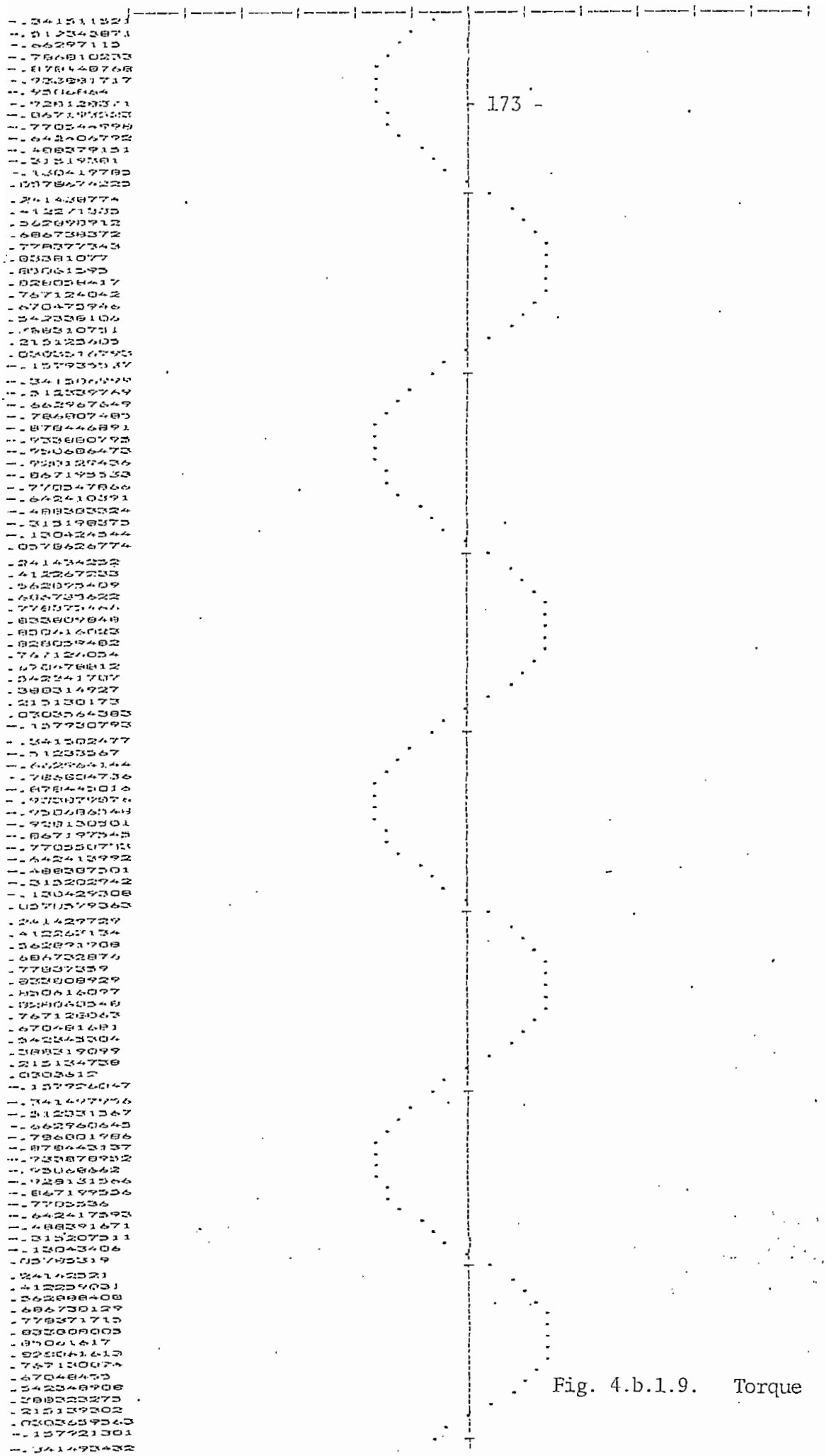


Fig. 4.b.1.9. Torque

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

Las figuras 4.b.1.1. y 4.b.1.2. muestran los voltajes $v_{qs}^{s} = v_{as}$ y v_{ds}^{s} respectivamente. En éste caso, el voltaje v_{qs}^{s} es pequeño, tiene una forma de onda sinusoidal y su amplitud máxima es 0.33 p.u., siendo su frecuencia 60 Hz. La disminución de v_{qs}^{s} se debe a que según la ecuación (156)

$$v_{qs}^{s} = \frac{2}{3}\left(e_{ga} - \frac{1}{2} e_{gb} - \frac{1}{2} e_{gc}\right) \qquad (156)$$

siendo $e_{ga} = 0$, el voltaje v_{qs}^{s} queda:

$$v_{qs}^{s} = \frac{1}{3}\left(- e_{gb} - e_{gc}\right)$$

El voltaje v_{ds}^{s} es una onda sinusoidal defasada 90° con respecto a v_{qs}^{s}, con una amplitud máxima de 1 p.u., esta no ha disminuído en éste caso, puesto que según (157), es independiente del voltaje e_{ga}.

CORRIENTES:

La corriente $i_{qs}^{s} = i_{as}$ y la corriente i_{ds}^{s}, son mostrados en las figuras 4.b.1.3 y 4.b.1.4 respectivamente. Las dos ondas son sinusoidales, i_{qs}^{s} tiene una amplitud máxima de 1.85 p.u., mientras que la corriente i_{ds}^{s} tiene una amplitud de 1.18 p.u. estando defasada 90° con respecto a i_{qs}^{s}.

Las corrientes i_{bs} e i_{cs} son mostradas en las figuras 4.b.1.5. y 4.b.1.6., las dos son ondas sinusoidales, no hay distorsión en las ondas, pero si existe una variación en lo que se refiere a la amplitud

así i_{bs} tiene una amplitud de 1.41 p.u. mientras que i_{cs} tiene 1.35 p.u.

Las figuras 4.b.1.7 y 4.b.1.8 muestran las corrientes i'^{s}_{qr} = i'^{s}_{ar} e i'^{s}_{br}, las dos son sinusoidales y están defasadas 120° entre sí; la amplitud máxima de la corriente i'^{s}_{qr} es 1.46 p.u. mientras la correspondiente a i'^{s}_{br} es 1.37 p.u., siendo 60 Hz la frecuencia de éstas dos ondas que están expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

Finalmente, la figura 4.b.1.9 presenta el torque instantáneo electromagnético, observándose que posee una pequeña componente de continua sobre la que aparece la componente alterna. El valor pequeño de la componente D.C. puede explicarse debido al deslizamiento tomado para éste ejemplo, esto es, s = 0.01 pues ω_r = 0.99 p.u. siendo muy cercana a la velocidad ω_e.

El gráfico del torque presenta una frecuencia de 120 Hz, el doble de la frecuencia de las variables expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

EVALUACION DE LAS PERDIDAS

El método utilizado para evaluar las pérdidas fue expuesto en el literal 2.6. El programa digital proporcionó los siguientes resultados:

Pérdidas totales en el cobre en el estator: 0.10003 p.u.

Pérdidas totales en el cobre en el rotor: 0.2502 p.u.

4.b.2. OPERACION DESBALANCEADA CON FUENTES NO SINUSOIDALES:

En este ejemplo, será considerada en el estado estable la operación desbalanceada con fuentes no sinusoidales.

Los voltajes de fuente a ser aplicados, son los mismos e_{gb} y e_{gc} del literal 4.a.2, pero con $e_{ga} = 0$.

Los datos de la máquina son los mismos que para el ejemplo del literal 4.a.2. Se analizará la operación a velocidad sincrónica, trabajando con la componente fundamental y los pares armónicos hasta el décimo tercero, se imprimirán los siguientes gráficos:

VOLTAJES

v_{qs}^{s}, v_{as}, v_{ds}^{s}

CORRIENTES

i_{qs}^{s}, i_{as}, i_{bs}, i_{cs}, i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{ar}, i'^{s}_{br}

TORQUE

RESULTADOS NUMERICOS

Las expresiones para los voltajes v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} obtenidos en el artículo, trabajando con la fundamental y los pares armónicos hasta el séptimo.

$$v_{qs}^{s} = \frac{4V}{3\pi}\left(\cos\omega_e t + \frac{1}{3}\cos 3\omega_e t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_e t - \frac{1}{7}\cos 7\omega_e t\right)$$

$$v_{ds}^{s} = \frac{4V}{\pi}\left(-\operatorname{sen}\omega_e t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega_e t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7\omega_e t\right)$$

Y los resultados, obtenidos en la simulación son:

$$v_{qs}^{s} = 0.4244134\cos\omega_e t - 0.282942\cos 3\omega_e t$$

$$+ 0.084883\cos 5\omega_e t - 0.0606305\cos 7\omega_e t$$

$$v_{ds}^{s} = -1.273239\operatorname{sen}\omega_e t + 0.254648\operatorname{sen} 5\omega_e t + 0.181891\operatorname{sen} 7\omega_e t$$

Comparando, se tiene que los resultados coinciden.

En la tabla T.4.b.2.1. se presenta una comparación de los valores de los voltajes a ser aplicados en cada una de las estructuras del sistema de referencia múltiple.

Según dicha tabla, los resultados coinciden satisfactoriamente.

La tabla T.4.b.2.2, presenta las corrientes expresadas en p.u. que resultan de la aplicación de los voltajes descritos en la tabla T.4.b.2.1.

Observando la tabla T.4.b.2.2. se concluye que los resultados de la simulación coinciden con los del artículo.

VOLTAJE	VALOR EN p.u. ARTICULO	SIMULACION
v_{qs}^{+1e}	* $\frac{8V}{3\pi} = 0.84882$	0.848826
v_{qs}^{-1e}	$-\frac{4V}{3\pi} = -0.42441$	-0.424413
v_{qs}^{+3e}	$\frac{4V}{9\pi} = 0.14147$	0.1414713
v_{qs}^{-3e}	$\frac{4V}{9\pi} = 0.14147$	0.14147
v_{qs}^{+5e}	$-\frac{4V}{15\pi} = -0.08488$	-0.084883
v_{qs}^{-5e}	$\frac{8V}{15\pi} = 0.169765$	0.1697653
v_{qs}^{+7e}	$-\frac{8V}{21\pi} = -0.12126$	-0.121261
v_{qs}^{-7e}	$\frac{4V}{21\pi} = 0.06063$	0.0606303
v_{ds}^{+1e}	0	0
v_{ds}^{-1e}	0	0
v_{ds}^{+3e}	0	0
v_{ds}^{-3e}	0	0
v_{ds}^{+5e}	0	0
v_{ds}^{-5e}	0	0
v_{ds}^{+7e}	0	0
v_{ds}^{-7e}	0	0

* V = 1 p.u.

TABLA T.4.b.2.1.

n	i_{qs}^{ne}		i_{ds}^{ne}		i'^{ne}_{qr}		i'^{ne}_{dr}	
	VALOR p.u. (ARTICULO)	VALOR p.u. (SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)	(ARTICULO)	(SIMULACION)
+1	0.0086	0.008555	0.4003	0.400301	0	0	0	0
-1	-1.5777	-1.577724	3.0749	3.075016	1.5693	1.569386	-3.0188	-3.018881
+3	0.0968	0.0967305	0.4088	0.408719	-0.0974	-0.097379	-0.4019	-0.401853
-3	0.0782	0.078214	-0.4172	-0.417118	-0.0781	-0.07809	0.4105	0.410434
+5	-0.0202	-0.020197	-0.1528	-0.152772	0.0203	0.020286	0.1504	0.150346
-5	0.0355	0.035526	-0.3069	-0.306793	-0.0355	-0.035513	0.3020	0.301997
+7	-0.0145	-0.014486	-0.1572	-0.157292	0.0145	0.014537	0.1548	0.154824
-7	0.00660	0.006670	-0.0787	-0.078760	-0.0066	-0.006608	0.0775	0.077529

TABLA T.4.b.2.2.

RESULTADOS GRAFICOS:

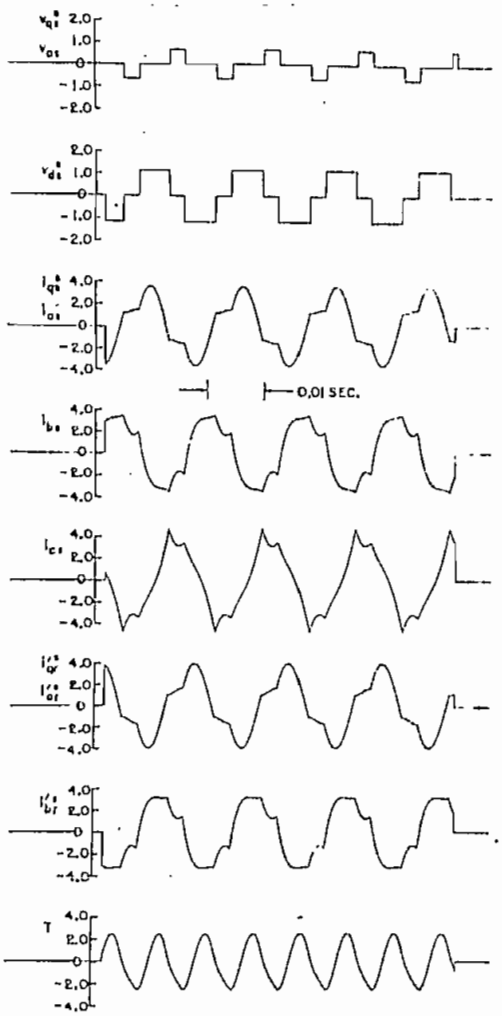
En la página siguiente, se presentan los resultados graficos - del artículo. En la figura 6 se muestran los voltajes v_{qs}^{s}, v_{as}, v_{ds}; las corrientes i_{qs}^{s}, i_{as}, i_{bs}, i_{cs}, i'^{s}_{qr}, i'^{s}_{ar}, i'^{s}_{br}, y el torque electromagnético obtenidos en el computador ANALOGICO. Mientras que en la figura 7 se muestran las corrientes y torque antes mencionados calculados utilizando el método del sistema de referencia múltiple, trabajando con la fundamental y los pares armónicos hasta el séptimo.

RESULTADOS GRAFICOS OBTENIDOS EN LA SIMULACION DIGITAL:

La figura 4.b.2.1. muestra el voltaje v_{qs}^{s} que por (88) es también correspondiente al voltaje de fase v_{as}. Realizando una comparación con el gráfico correspondiente del artículo, se tiene que la forma de onda es muy similar; la amplitud máxima de ésta onda cuadrada es 0,7274 p.u, mientras en el artículo es aproximadamente 0.7 p.u. El período de la onda es 0.016668 seg. que corresponde en frecuencia a 60 Hz; en el artículo se tiene un período o,17 seg. aproximadamente.

La figura 4.b.2.2. se presentan el gráfico del voltaje v_{ds}^{s}, comparado con el correspondiente del artículo, se tiene que la amplitud máxima de la onda cuadrada es 1.2151 p.u.; mientras que en el artículo se tiene una amplitud de 1.2 p.u. aproximadamente. Los períodos de las dos ondas coinciden y es 0.016668 segundos.

En la figura 4.b.2.3. se presenta el gráfico de la corriente i_{qs}^{s} que también es el correspondiente a i_{as} (ecuación 146). La ampli



g. 6. Synchronous speed operation with $e_{qs} = 0$—analog computer study.

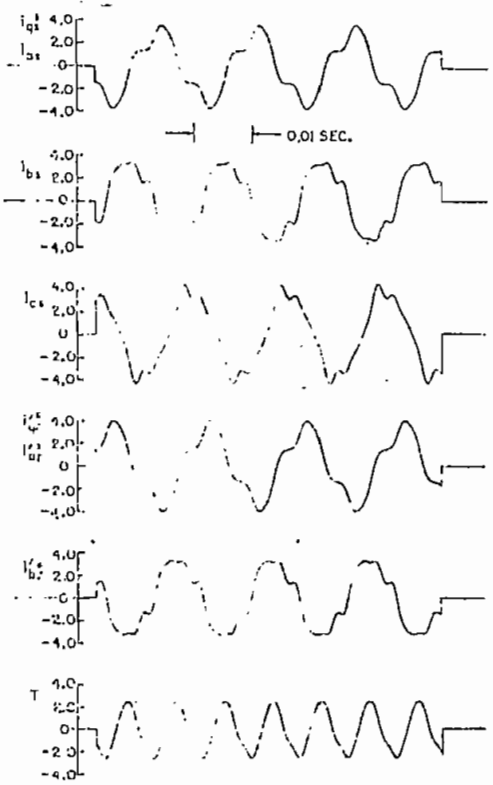


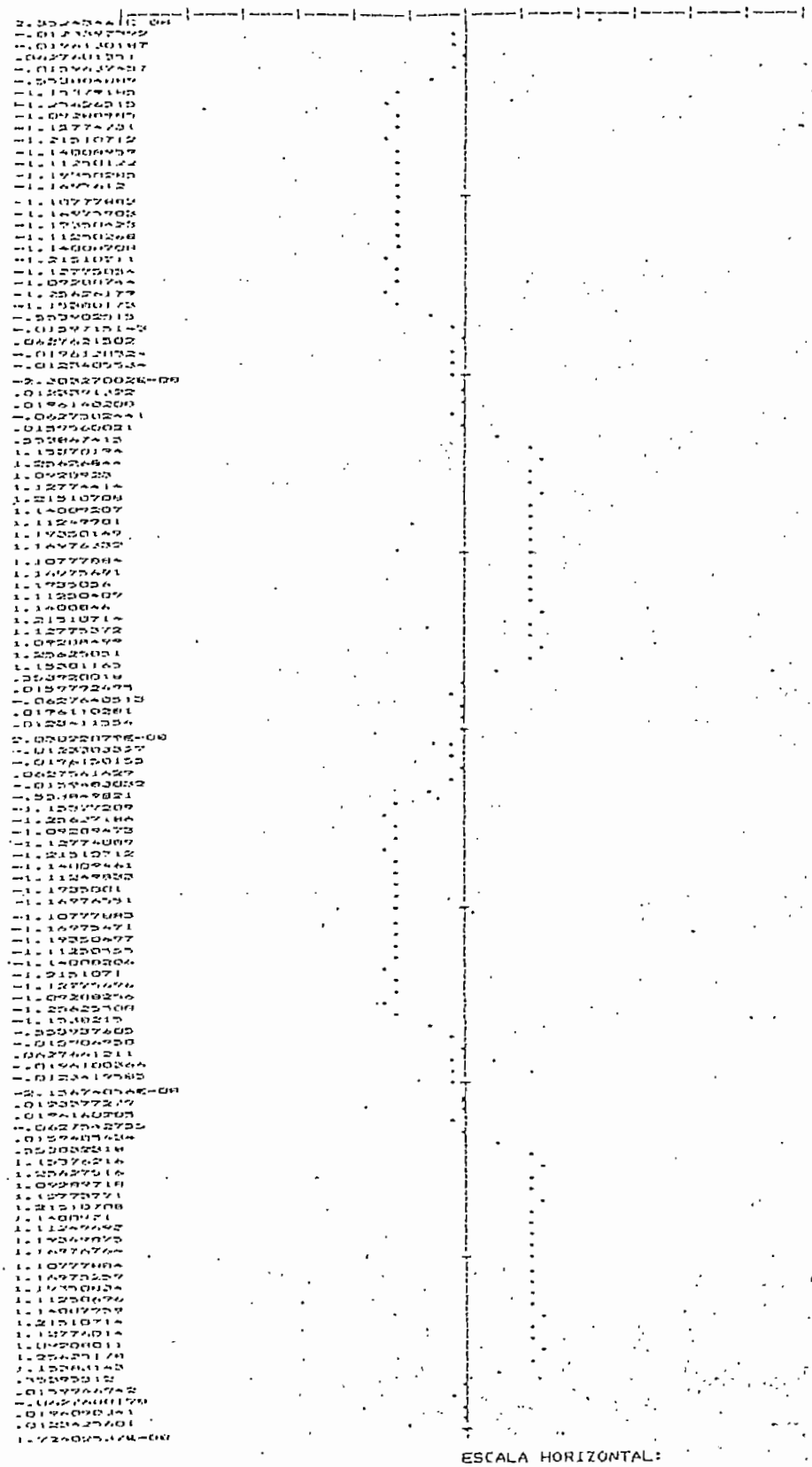
Fig. 7. Synchronous speed operation with $e_{qs} = 0$—calculated using the method of multiple reference frames.

- CASO DESBALANCEADO -

Fig. 4.b.2.1. v_{qs}^{s}

ESCALA HORIZONTAL:

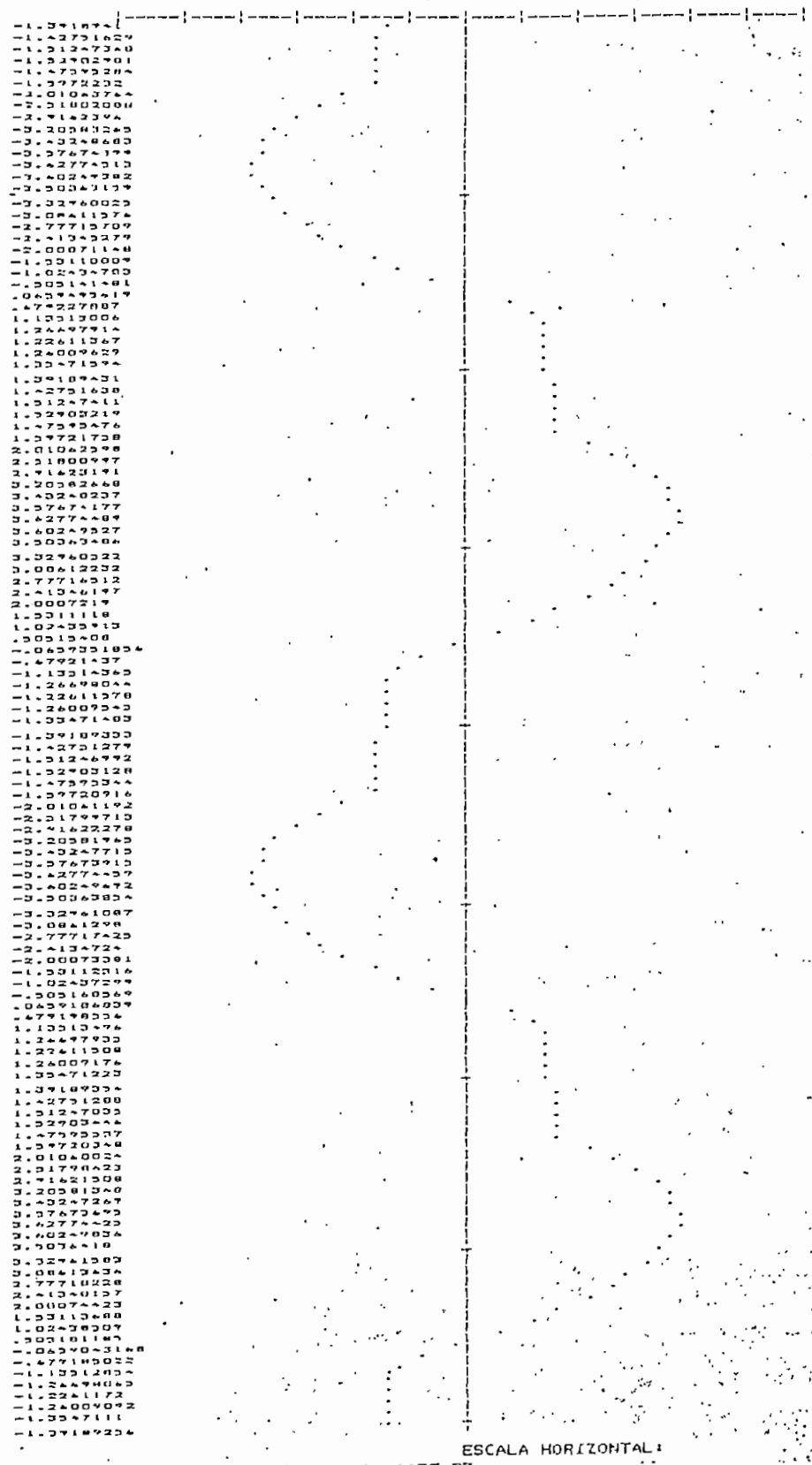
Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03



ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

Fig. 4.b.2.2.



ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

Fig. 4.b.2.3.

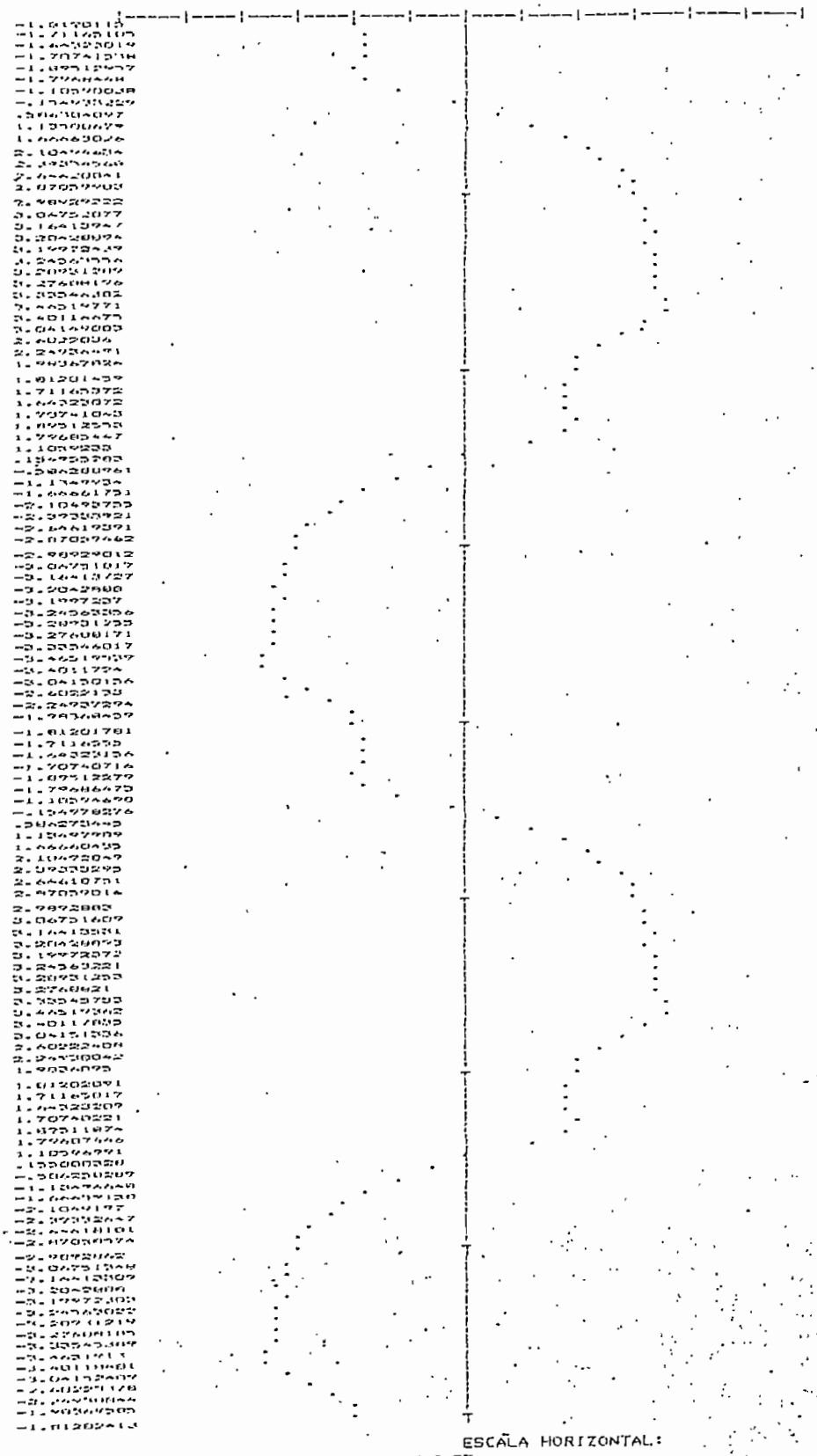


Fig. 4.b.2.4. i_{bs}

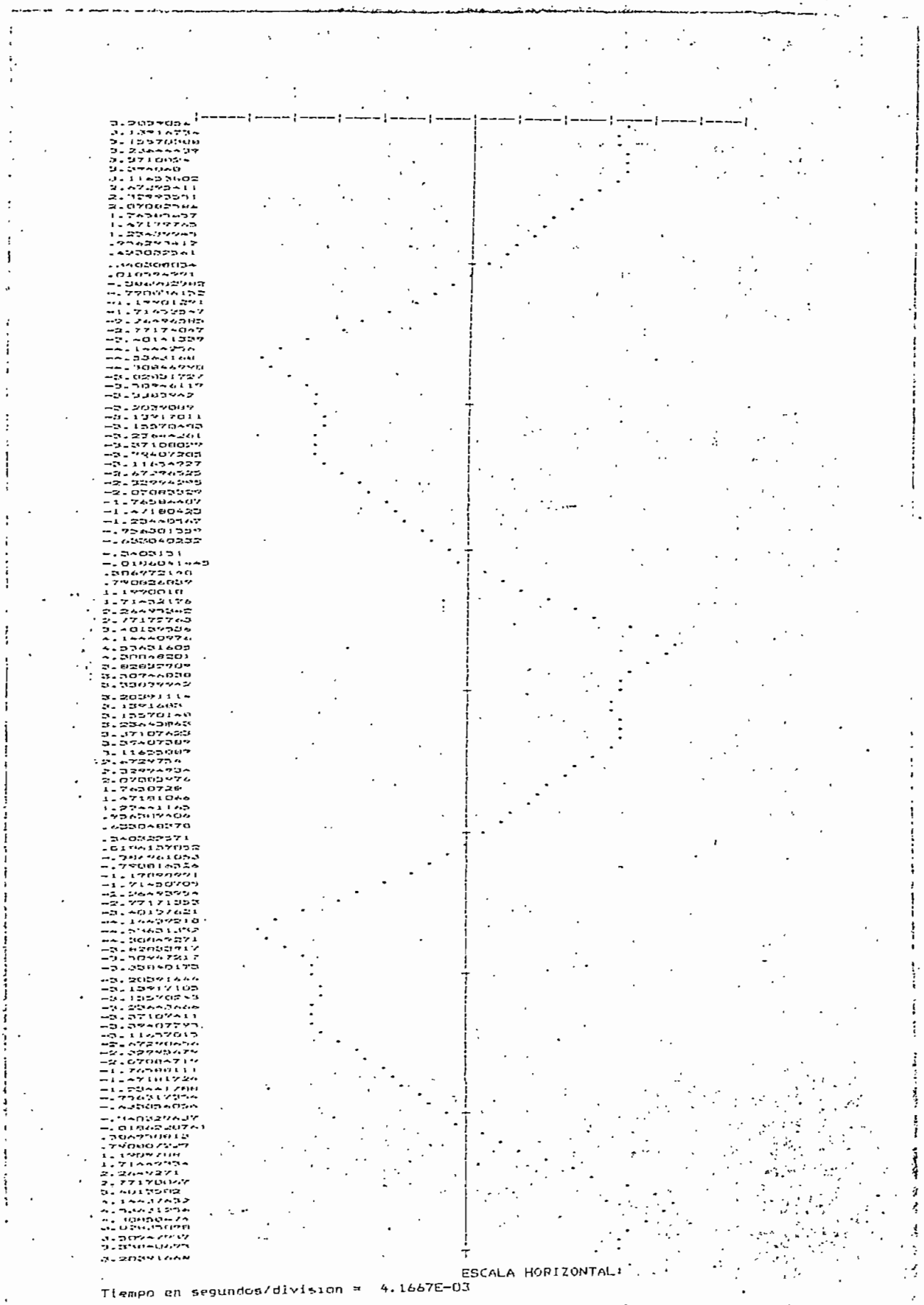


Fig. 4.b,2.5. i_{CS}

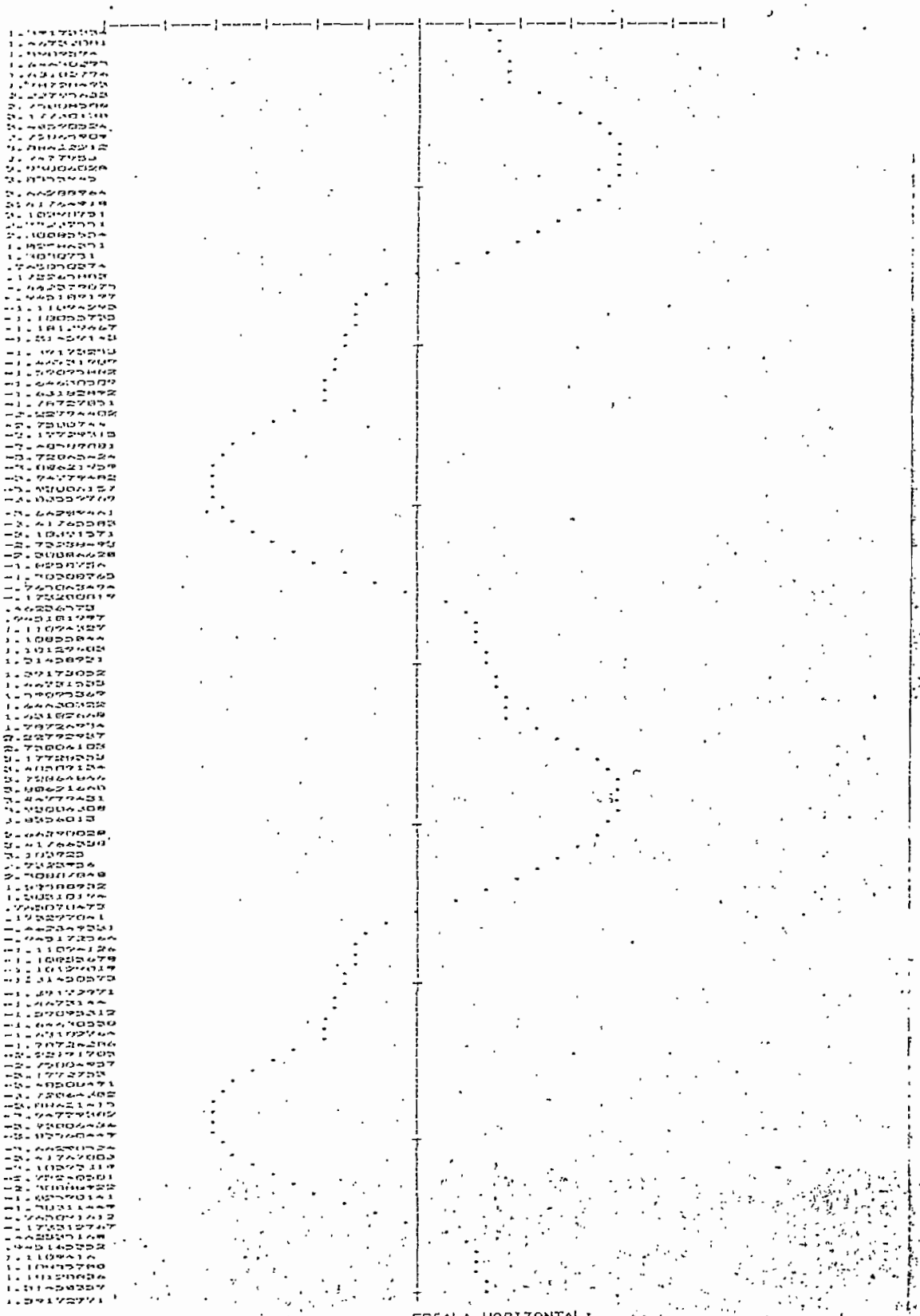


Fig. 4.b.2.6. i'^{s}_{qr}

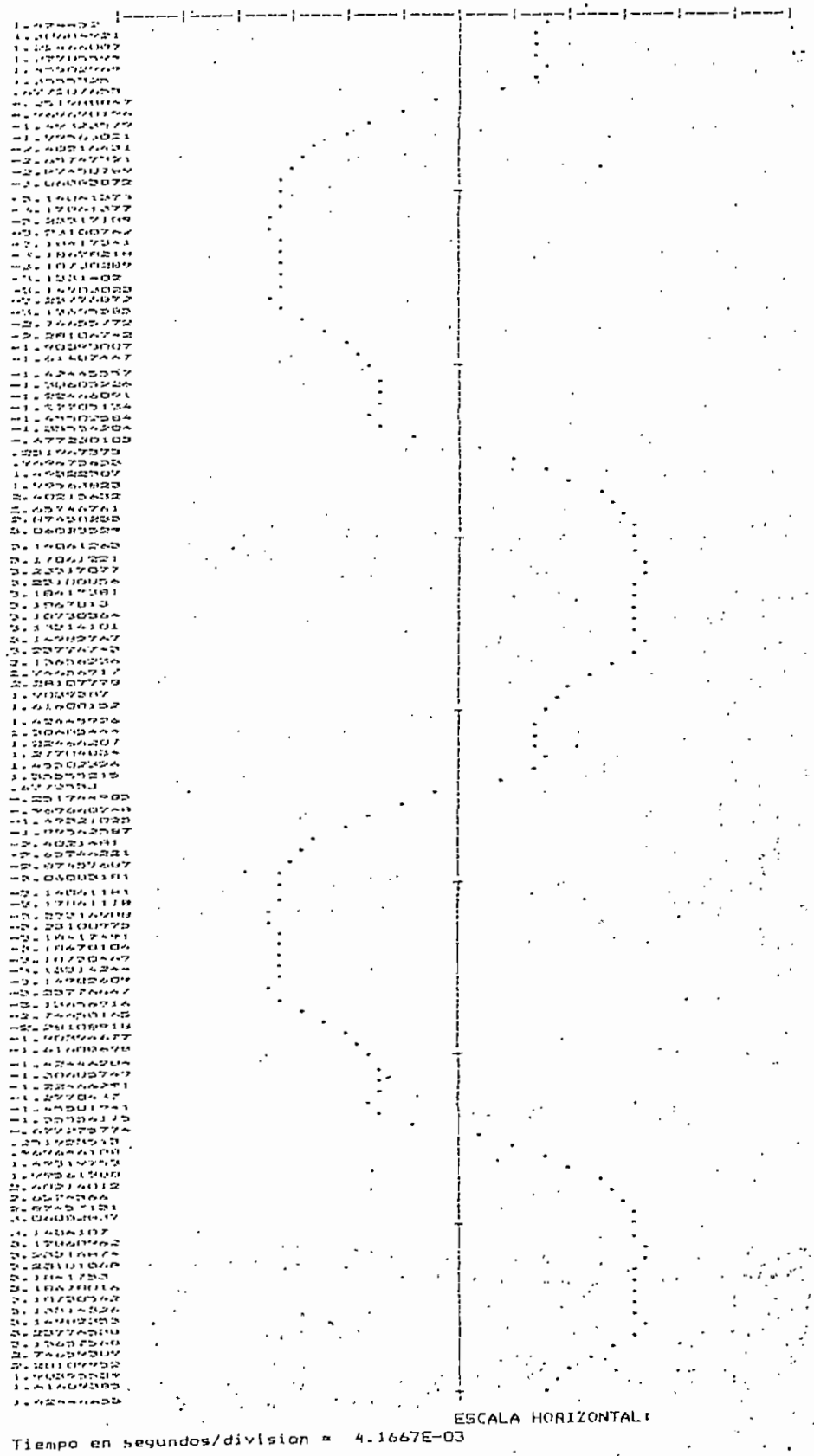


Fig. 4.b.2.7. i'_{br} s

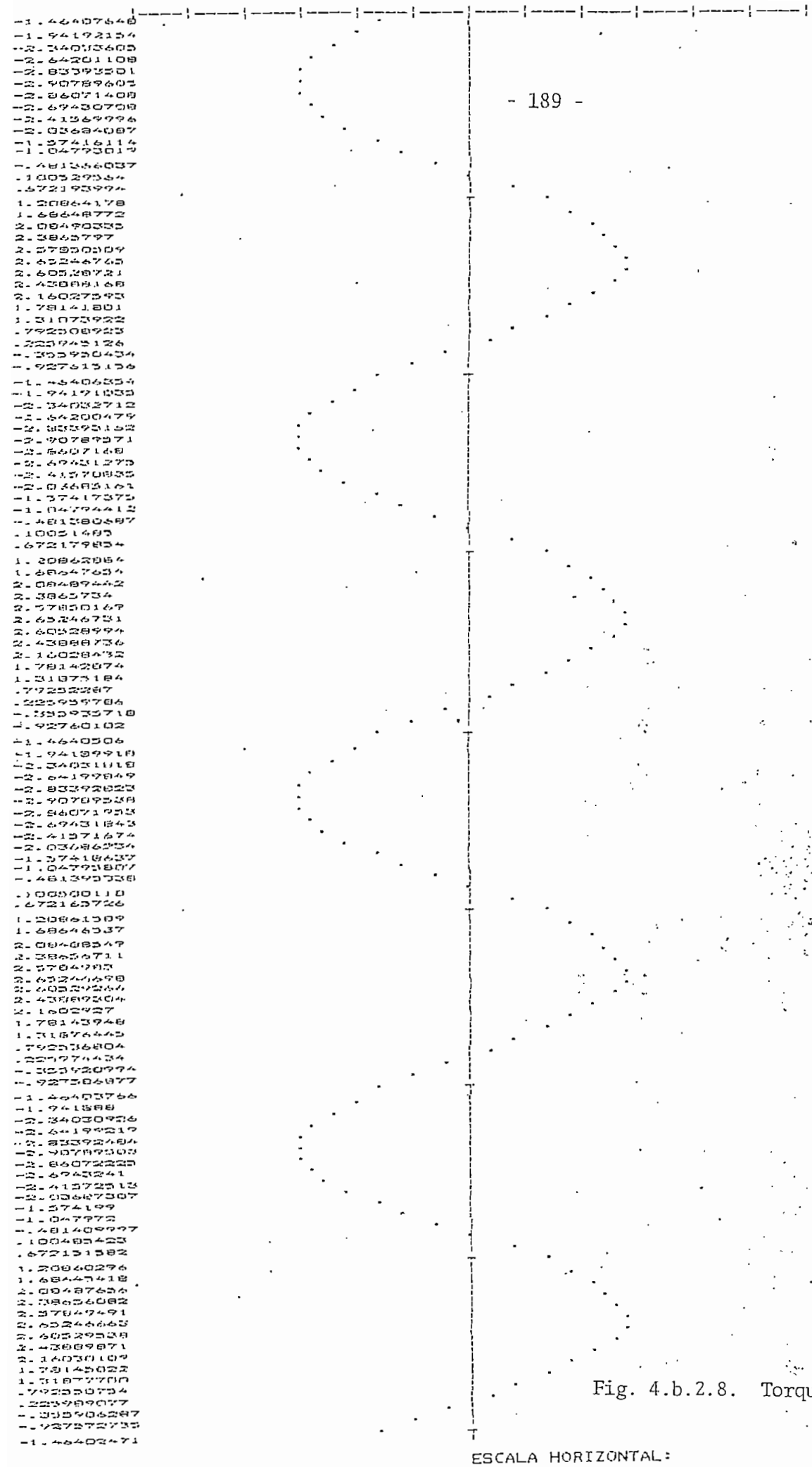


Fig. 4.b.2.8. Torque

ESCALA HORIZONTAL:

Tiempo en segundos/division = 4.1667E-03

tud máxima es 3.627 p.u. y la correspondiente del artículo es 3.8 p.u. Los períodos de las dos ondas coinciden (0.016668 seg).

La corriente de fase i_{bs} expresada en la estructura de referencia estacionaria es graficada en la figura 4.b.2.4. Realizando la comparación con el correspondiente gráfico del artículo, se tiene que la amplitud máxima es 3.465 p.u. mientras en el artículo es 3.5 p. u. aproximadamente. Los períodos de las dos ondas coinciden.

La corriente de fase i_{cs} es mostrada en la figura 4.b.2.5., la la amplitud máxima de ésta onda es 4.536 p.u. mientras que en el artículo es 4.3 p.u. aproximadamente. El período en los dos gráficos es el mismo.

La figura 4.b.2.6. muestra la forma de onda de la corriente de rotor i'^{s}_{qr} expresada en la estructura de referencia estacionaria, ésta corriente es la misma que i'^{s}_{ar} (ecuación 149). La amplitud máxima de esta onda es 3.95 p.u. y dicha amplitud en el artículo es 4.0 p.u. aproximadamente. Ambas tienen un período de 0.016668 segundos.

La corriente de fase de rotor i'^{s}_{br} expresada en la estructura de referencia estacionaria, es graficada en la figura 4.b.2.7. Realizando una comparación se tiene que la amplitud máxima es 3.23 p.u., y en el artículo es 3.3 p.u. aproximadamente. Los períodos coinciden y su valor es 0.016668 segundos que es el período que tienen todas las ondas descritas en éste ejemplo, a excepción del torque.

GRAFICO DEL TORQUE ELECTROMAGNETICO

En el ejemplo 4.a.2. que se refería a la operación balanceada con fuentes no sinusoidales, se trató sobre la ecuación del torque electromagnético, en ella se analizó los coeficientes de los términos cos $2k\omega_e t$ y sen $2k\omega_e t$, expresando que dada la naturaleza de dichos coeficientes era necesario que para un valor de k determinado, se energizaran tanto la estructura +ke como la correspondiente a -ke para que dependiendo de los valores de las corrientes resultantes, los coeficientes mencionados sean diferentes de cero.

En el presente ejemplo de operación desbalanceada con fuentes no sinusoidales, se han energizado las estructuras +1e, -1e; +3e, -3e; +5e, -5e; +7e, -7e cumpliéndose lo que se acaba de mencionar, esto es que por ejemplo para el valor de k = 3 se han energizado las estructuras +3e y la -3e; por lo que ya es posible que el coeficiente del término cos 2(3) $\omega_e t$ y del término sen 2(3) $\omega_e t$ sea diferente de cero y por lo tanto exista una componente A.C. en el torque.

Efectivamente, en la figura 4.b.2.8. se muestra el gráfico del torque en el cual se hace evidente que los coeficientes del término cos 2k $\omega_e t$ y del término sen 2k $\omega_e t$ son diferentes de cero.

Haciendo una comparación con el gráfico del torque del artículo, se tiene que las formas de onda coinciden. Así, el valor máximo de la onda es 2.58 p.u. mientras en el artículo se tiene un valor de 2.4 p.u. paroximadamente.

El período de la onda del torque es 0,008375 segundos que en frecuencia es 120 Hz, es decir que el torque tiene una frecuencia que

es el doble que la frecuencia de las demás variables (60 Hz).

En general se puede afirmar que los resultados de la simulación son muy satisfactorios, demostrándose de ésta manera la validez del modelo.

PERDIDAS

El programa arrojó los siguientes resultados:

Pérdidas totalales en el cobre en el estator: 1.7927×10^{-4} p.u.

Pérdidas totales en el cobre para el rotor: 1.275×10^{-4} p.u.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis se derivan las siguientes conclusiones:

1.- El modelo implementado utiliza un método alternativo confiable y rápido para anlizar en el estado estable a velocidad constante, el comportamiento de la máquina de inducción trifásica simétrica, con voltajes aplicados de cualquier forma de onda periódica.

2.- El método del sistema de referencia múltiple ofrece un procedimiento simple y directo de análisis en el estado estable de los modos de operación balanceado y desbalanceado.

3.- El método del sistema de referencia múltiple ofrece la ventaja del análisis de la operación desbalanceada de la máquina de inducción empleando la teoría de circuitos D.C., reemplazando al método de las componentes simétricas, tradicionalmente utilizado en el análisis de la operación desbalanceada.

4.- Se ha comprobado que la teoría del método del sistema de ejes arbitrarios de referencia q, d, 0, es consistente con la teoría del método del sistema de referencia múltiple, pese a que ambos métodos tienen una teoría diferente. Se puede decir que

el método del sistema de referencia múltiple es un método generalizado, mientras que el sistema de ejes arbitrarios de referencia q, d, 0, es un método particular.

5.- En la operación sinusoidal, se ha comprobado la teoría del sistema de ejes arbitrarios de referencia q, d, 0, que indica que la frecuencia de las variables en los ejes q, d, 0, es $(\omega_e - \omega)$, cumpliéndose ésto también en el método del sistema de referencia múltiple.

También se comprueba que las variables expresadas en la estructura de referencia rotando sincrónicamente, son cantidades constantes.

6.- En la operación desbalanceada, se puede observar que dichos desbalances se reflejan sobre las variables tanto de rotor como de estator. Se puede anotar también que el efecto del desbalance se refleja en el cambio de la amplitud de las variables expresadas en la estructura de referencia estacionaria, mas no en su frecuencia.

Para éste mismo tipo de operación, el torque se presenta en general como la superposición de una componente continua y de una alterna, siendo la frecuencia de ésta última el doble que la frecuencia de las variables expresadas en la estructura de referencia estacionaria.

7.- Con respecto a las funciones de entrada e_{ga}, e_{gb}, e_{gc} se puede

decir que deben ser funciones periódicas que cumplan con las condiciones de Dirichlet para que puedan ser representadas por un conjunto infinito de funciones elementales (SERIE DE FOURIER). Mientras mayor cantidad de términos de la serie infinita sean considerados en la composición, mayor será la aproximación del resultado a la función compleja original.

Es debido a ésto que los voltajes v_{qs}^{s} y v_{ds}^{s} presentan pequeñas irregularidades, mientras que los gráficos de éstos voltajes en el artículo (referencia 1), son perfectas ondas cuadradas que de ninguna manera podrán ser obtenidas con los voltajes e_{ga}, e_{gb}, e_{gc} (dados en los ejemplos A y B de la referencia 1) al trabajar sólo con 13 armónicos.

8.- En el método del Sistema de referencia múltiple es muy importante el número de armónicos que se escoge para trabajar, el criterio es que mientras mayor sea el número de armónicos que se toman en cuenta al descomponer en series de Fourier a una función compleja, mayor será la aproximación de dicha serie, a la función compleja original. En esto, prima el criterio del usuario del modelo, en función del tipo de funciones complejas a aplicarse al estator de la máquina de inducción.

En el modelo se ha realizado pruebas trabajando con 4, 7, 13, 17 armónicos, se observó que con 4 armónicos los resultados fueron muy diferentes a los que se esperaban.

Con 7 armónicos los resultados eran los esperados. Con 13 ar-

mónicos casi no existió cambio con respecto a 7.

Con 17 armónicos practicamente resultó lo mismo que si se trabajara con 13 armónicos.

La diferencia observada al trabajar con 4 armónicos es explicable debido a que los armónicos 5to, 6to, 7mo, ... no han sido tomados en cuenta pese a que para el caso de los ejemplos de aplicación el 5to y 7mo tenían valores apreciables que influían en el resultado.

La poca diferencia entre trabajar con 13 o con 17 armónicos se explica por los valores de los armónicos 14, 15, 16 y 17 ya que tenían un valor muy pequeño que al ser tomados en cuenta no influían en la forma de la función compleja graficada.

9.- La naturaleza del método del sistema de referencia múltiple, hace que el efecto de cada una de las estructuras que conforman el sistema de referencia múltiple sea independiente una con respecto a otra, es decir, lo que suceda en una estructura de referencia determinada del sistema de referencia múltiple, no afecte a las demás estructuras de referencia. Esto llevaría a la conclusión que si por ejemplo se tiene un voltaje de fuente constituído por la fundamental y 3 armónicos se obtendría el mismo resultado final si se ingresa separádamente la fundamental, y cada uno de los resultados. Esta es precisamente la filosofía del método del sistema de referencia múltiple. Es por ésto que se considera la máquina idealizada lo cual en

realidad no es posible en su totalidad, pero lo que si es posible, es trabajar en la zona lineal.

10.- De las comparaciones hechas entre los resultados dados por el computador analógico mediante una simulación analógica y el computador digital (mediante el método del sistema de referencia múltiple) se tiene que los resultados son muy similares.

RECOMENDACIONES

1.- Uno de los sistemas más eficientes para controlar un motor de inducción es mediante la variación de la frecuencia y el voltaje de la fuente que alimenta al estator. Esto se consigue por medio de los conversores estáticos como un Rectificador-inversor ó un ciclo conversor. El presente modelo puede servir como base para el estudio del conjunto control-motor de inducción.

Existe inclusive una aplicación del método del sistema de referencia múltiple y las ecuaciones de transformación del inversor para hallar las variables en un rectificador inversor. (13)

2.- Hay que tomar en cuenta que el número de armónicos con que se trabaja implica un tiempo de computación y un espacio de memoria ocupado en el microcumputador. A mayor número de armónicos el tiempo es mayor, así como el porcentaje de memoria ocupada crece.

Entonces es recomendable hacer un análisis sobre el número de armónicos con el que se va a trabajar, si es o nó indispensable trabajar con un número excesivo.

APENDICE A : MANUAL DE USO DEL PROGRAMA

A.1. OBJETIVOS: El programa implementado tiene por objeto:

a) El descomponer en series de Fourier las funciones continuas periódicas en el rango 0 - 2π e_{ga}, e_{gb}, e_{gc} ingresadas por el usuario, para que el programa principal pueda.

b) Utilizarlas para resolver las ecuaciones que rigen el comportamiento en estado estable de la máquina de inducción trifásica, especialmente cuando los voltajes de fuente son no sinusoidales; utilizando el método del sistema de referencia múltiple.

A.2. FORMA DE PROPORCIONAR LOS DATOS AL PROGRAMA:

El presente programa ha sido desarrollado en un microcomputador APPLE //c utilizando lenguaje BASIC.

A continuación, se describe el procedimiento a seguirse para poder ingresar los datos:

1.- Ponga el microcomputador listo para trabajar en APPLESOFT (lenguaje BASIC).

Si el APPLE //c está listo, aparecerá en el margen izquierdo el

siguiente símbolo y junto a el aparecerá el

cursor centellando

2.- Ingrese el disco TESISCESAR en el drive

3.- Teclee la sentencia NEW y a continuación pulse RETURN, ésto es para borrar cualquier programa anterior y las variables de memoria.

4.- Teclee la sentencia LOAD TESIS y a continuación pulse RETURN. Esto cargará el programa TESIS de disco a memoria.

5.- INGRESO DE LAS FUNCIONES e_{ga}, e_{gb} y e_{gc}.

5.1. INGRESO e_{ga}

- Ingrese la siguiente instrucción:

275 DEF FN P(x) = Espacio donde debe ingresar la función correspondiente a e_{ga}.

Ejemplo: Suponga que Ud. quiere ingresar la siguiente función que corresponde al voltaje e_{ga}

$$e_{ga} = 3 \cdot \text{sen}\ (5 \cdot x)$$

Entonces Ud. debe ingresar:

275 DEF FN P(x) = 3 * SIN (5 * x)

Lo que hace ésta instrucción es definir una función.

La función a ingresarse debe ser función de alguna variable (tiempo, ángulo, etc), entonces, aquella variable deberá cambiarse por la letra X.

Ejemplo:

$$e_{ga} = 3.\ \text{sen}\ (5\omega_e t + \frac{2\pi}{3}) - 5\ \cos\omega_e t$$

Se puede ver que e_{ga} es función de $\omega_e t$, entonces cambio la variable $\omega_e t$ por x, debiendo ingresar:

```
270 DEF FN W(X) = 3 * SIN (5 * X + 2 * π/3) - 5 * cos (X)
```

5.2. INGRESO DE e_{gb}

El procedimiento es el mismo que para e_{ga}, sólo cambia el número de la instrucción.

```
260 DEF FN P(X) = Espacio para la función egb
```

5.3. INGRESO DE e_{gc}

De manera similar:

```
480 DEF FN P(X) = Espacio para la función egc
```

6.- CORRIDA DEL PROGRAMA

Una vez ingresadas las tres funciones defasadas 120° entre sí, Ud. hace correr el programa tecleando:

RUN, y luego presione la tecla return.

Inmediatamente aparecerá el menú de ingreso de datos, donde Ud. tiene que ingresar dato por dato, los parámetros pedidos que deberán estar en p.u.

A partir del paso 6 toda comunicación del usuario con el micro computador es por medio de menú, en el cual se le da las opciones a escoger.

7.- FINALIZACION DEL PROGRAMA

Para finalizar el programa, Ud. deberá escoger la opción 21 del menú general de gráficos. A continuación de escoger ésta opción aparecerán en la pantalla, las pérdidas en el cobre de la máquina: Pérdidas totales en el estator y pérdidas totales en el rotor.

8.- DIFICULTADES: El programa completo, está cargado en memoria RAM, en el caso que hubiese corte momentáneo de luz el usuario deberá comenzar nuevamente desde el paso 1.

Puede suceder el caso que el usuario ingrese (por medio de me-

nú) que el número de armónicos con el que quiere trabajar es 40, con respecto a ésto se tiene que el programa está sideñado para trabajar con cualquier número de armónicos, pero el micro computador tiene una memoria de 128 k, entonces puede darse el caso de que la memoria esté completamente ocupada. El usuario deberá escoger un número razonable de armónicos con el que va a trabajar; el programa ha sido probado trabajando hasta con 17 armónicos.

NOMENCLATURA

VARIABLES Y FUNCIONES DE ENTRADA

RS = Resistencia de estator

RRF = Resistencia de rotor referida al estator

XSS = Reactancia estator

XRRF = Reactancia del rotor referida al estator

XM = Reactancia Mutua

WE = Velocidad angular eléctrica (velocidad sincrónica)

WR = Velocidad angular del rotor

FR = Relación entre WE/W_{base}

V = Amplitud del voltaje

M = Número de armónicos

R = Factor de escala para gráficos en pantalla

R1 = Factor de escala para gráficos en impresora

FN W(X) = Función definida

FN P(X) = Función definida por el usuario

FN Y(X) = Función definida

FN Z(X) = Función definida

BØ, A, Q, QØ, RØ, X1Ø = Variables para comunicación con el usuario

D = Desplazamiento angular en radianes

Z4 = Paso utilizado en el lazo FOR - NEXT para gráficos en impresora

COEFICIENTES DE FOURIER ALMACENADOS EN FORMA DE VECTORES

A(I) = Coeficientes coseno de la función a ser graficada

B(I) = Coeficientes seno de la función a ser graficada

AA(I) = Coeficientes coseno de la función e_{ga}

BA(I) = Coeficientes seno de la función e_{ga}

AD(I) = Coeficiente coseno de e_{gb}

BD(I) = Coeficiente seno de e_{gb}

AE(I) = Coeficiente coseno de e_{gc}

BE(I) = Coeficiente seno de e_{gc}

AN(I) = Coeficiente coseno de v_{ng}

BN(I) = Coeficiente seno de v_{ng}

AM(I) = Coeficiente coseno del voltaje de fase v_{as}

BM(I) = Coeficiente seno del voltaje de fase v_{as}

AP(I) = Coeficiente coseno del voltaje de fase v_{bs}

BP(I) = Coeficiente seno de voltaje de fase v_{bs}

AR(I) = Coeficiente coseno de voltaje de fase v_{cs}

BR(I) = Coeficiente seno del voltaje de fase v_{cs}

AS(I) = Coeficiente coseno del voltaje v_{qs}^{s}

BS(I) = Coeficiente seno del voltaje v_{qs}^{s}

A1(I) = Coeficiente coseno del voltaje v_{ds}^{s}

BT(I) = Coeficiente seno del voltaje v_{ds}^{s}

BQSME(I) = Voltajes v_{qs}^{+ke}

VDSME(I) = Voltajes v_{ds}^{+ke}

MQSE(I) = Voltajes v_{qs}^{-ke}

MDSE(I) = Voltajes v_{ds}^{-ke}

FOE(I) = Es el A^{+ke} de las expresiones para las corrientes en el sistema de referencia múltiple.

F1(I) = Es el A^{-ke}

GNE(I) = Es el B^{+ke}

G1(I) = Es el B^{-ke}

HNE(I) = Es el C^{+ke}

H1(I) = Es el C^{-ke}

INE(I) = Es el D^{+ke}

I1(I) = Es el D^{-ke}

JNE(I) = Es el E^{+ke}

J1(I) = Es el E^{-ke}

IQSME(I) = Corriente i_{qs}^{+ke}

ISQSE(I) = Corriente i_{qs}^{-ke}

IDSME(I) = Corriente i_{ds}^{+ke}

IPDSE(I) = Corriente i_{ds}^{-ke}

IRQME(I) = Corriente $i_{qr}^{'+ke}$

ITRSE(I) = Corriente $i_{qr}^{'-ke}$

IUDRE(I) = Corriente $i_{dr}^{'+ke}$

IVDRE(I) = Corriente $i_{dr}^{'-ke}$

IAQSS(I) = Coeficiente coseno de i_{qs}^{s}

IBDSS(I) = Coeficiente seno de i_{qs}^{s}

ICDSS(I) = Coeficiente coseno de i_{ds}^{s}

IHQSS(I) = Coeficiente seno de i_{ds}^{s}

IGQRS(I) = Coeficiente coseno de $i_{qr}^{'s}$

IJDRS(I) = Coeficiente seno de $i_{qr}^{'s}$

ILDRS(I) = Coeficiente coseno de $i_{dr}^{'s}$

IIQRS(I) = Coeficiente seno de $i_{dr}^{'s}$

TC(I) = Coeficiente independiente del torque

T8A(I) = Coeficiente coseno del torque

TB(I) = Coeficiente seno del torque

S1(k) = Es un punto de la función a ser graficada.

A = Valor máximo de la función a ser graficada

R = Factor de escala para gráficos en pantalla

R1 = Factor de escala para gráficos en impresora

Z1(I) = Coeficiente coseno de la función a ser graficada

Z2(I) = Coeficiente seno de la función a ser graficada

Z3(I) = Coeficiente independiente de la función a ser graficada

B9 = Valor del punto de la función a ser graficada en la impresora

INDICADORES:

k9 = 1 Indica que va a graficarse una función expresada en la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

k9 = 0 Indica que no es un gráfico de una función expresada en la estructura de referencia rotando sincronizadamente.

BIBLIOGRAFIA

1.- KRAUCE P.c., "Method of Multiple Reference Frances Applied to the Análysis of Symetrical Induction Machinery", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-87, p.p. 218 - 227, Jan. 1968

2.- TOAPANTA MILTON, "Estudio Transitorio del Motor de Inducción",EPN Quito, 1977.

3.- PONCE RUBEN, "Operación Asimétrica de la Máquina Trifásica de Inducción", EPN, Quito 1985.

4.- LOZA JORGE, "Simulación de la Máquina de Inducción Trifásica en un Sistema de Coordenadas Arbitrarias de Referencia", EPN, Quito, 1982.

5.- FITZGERALD A.E., KINGSLEY, KUSKO, "Teoría y Análisis de las Máquinas Eléctricas", Ed. Hispano Europa, Barcelona, 1975.

6.- BANDA HUGO, "Fundamentos del Control Electrónico de Potencia",EPN Quito 1985

7.- POOLE LON, Mc NIFF, COOK, "Apple //, Guía del Usuario", Ed. Osborne/ Mc Graw-Hill, 1983.

8.- RALSTON. WILF, "Mathermatical Methods For Digital Computers",

9.- KRAUCE P.C. and THOMAS C.H., "Simulation of Symetrical Induction Machinery", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-84, pp. 1038 - 1053, Nov. 1965.

10.- KOSOW I.L., "Máquinas Eléctricas y Transformadores", Ed. Reverté, Barcelona, 1980.

11.- TOAPANTA MILTON, "Apuntes de Máquinas Eléctricas III", EPN 1984.

12.- POVEDA MENTOR, "Apuntos de Dinámica de Máquinas Eléctricas"

13.- KRAUCE P.C. and HAKE, "Method of Multiple Reference Frames Applied to the Analysis of a Rectifier - Inverter Induction Motor Drive", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, pp. 1635 - 1970, Nov. 1969.