

ESCUELA PÓLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

"TURBULENCIA"

Tesis previa a la obtención del Título  
de Ingeniero en la especialización de  
Electrónica y Telecomunicaciones

STERLING E. McBRIDE Z.



Quito, Noviembre de 1984

Certifico que este trabajo  
ha sido realizado en su  
totalidad por el señor:  
Sterling McBride Zuñiga.

Bruce Hoeneisen

Dr. BRUCE HOENEISEN

Director de Tesis

## DEDICATORIA

A mis Padres  
y Hermanos

## A G R A D E C I M I E N T O

Agradezco a todas las personas que de una u otra manera participaron en la culminación del presente trabajo de tesis, y en particular al Dr. Bruce Hoeneisen, por la asistencia y ayuda brindadas durante su realización.

# INDICE

## CAPITULO I

|              |   |
|--------------|---|
| INTRODUCCION | 1 |
|--------------|---|

## CAPITULO II

ANALISIS DE  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$  EN REGIMEN LAMINAR O DETERMINISTA Y TURBULENTO O CAOTICO.

|  |     |
|--|-----|
| 2.1 Descripción del Modelo   | 10  |
| 2.2 Análisis del Modelo en función del parámetro $j$ .<br>Gráficos de $X_j = f(j)$ .             | 16  |
| 2.3 Análisis del Modelo en función del parámetro $r$ .<br>Gráficos de $X_j = f(r)$ .             | 39  |
| 2.4 Errores. Propagación de errores.   | 56  |
| 2.5 Análisis del sistema dinámico con aumento del parámetro $n$ . $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)^n$ . | 72  |
| 2.6 Transformadas de FOURIER. Régimen laminar, oscilatorio y turbulento.                         | 94  |
| 2.7 Análisis del régimen intermitente de período $3T$ .  | 101 |
| 2.8 Análisis de la ecuación $X_{j+1} = r \sin^2 2\pi X_j$ .                                      | 108 |

## CAPITULO III

ANALISIS DE UN OSCILADOR ELECTRONICO: TRANSICION AL REGIMEN CAOTICO.

|   |     |
|---|-----|
| 3.1 Descripción del circuito básico.                                      | 123 |
| 3.2 Características corriente - voltaje de las conductancias no lineales. | 124 |
| 3.3 Modelo matemático del circuito electrónico                            |     |

|  |     |
|--|-----|
| y ecuaciones de estado.  | 134 |
| 3.4 Análisis experimental del circuito en función<br>de tiempo.                      | 147 |
| 3.5 Análisis en el plano de fase.  | 151 |
| 3.6 Método de la transformada de FOURIER.  | 161 |
| 3.7 Régimen oscilatorio de período $3T$ .  | 167 |
| 3.8 Influencia de otros parámetros en el<br>comportamiento del circuito electrónico. | 170 |

#### CAPITULO IV

##### UN MODELO DE DINAMICA DE POBLACIONES.

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 Dinámica de Poblaciones.   | 171 |
| 4.2 Modelo de Población.   | 172 |
| 4.3 Demostración de la independencia de la distribución<br>en régimen permanente normalizada de la distribu-<br>ción inicial. Medio ilimitado. | 177 |
| 4.4 Análisis del Modelo en régimen permanente.<br>Medio ilimitado.   | 192 |
| 4.5 Aplicación del Modelo a la población del mundo.  | 199 |
| 4.6 Población en un medio limitado.  | 212 |
| 4.7 <u>b</u> Concentrado para población en medio limitado.   | 213 |
| 4.8 <u>b</u> Distribuido para población en medio limitado.   | 225 |

#### CAPITULO V

|              |     |
|--------------|-----|
| CONCLUSIONES | 234 |
|--------------|-----|

#### REFERENCIAS.

# C A P I T U L O I

## INTRODUCCION

Los sistemas dinámicos no lineales pueden exhibir una gran variedad de comportamientos, muchos de los cuales son de naturaleza muy complejos.

Los circuitos electrónicos que incluyen elementos no lineales, pueden mostrar respuestas complicadas, a pesar de su estructura simple.

Un sistema dinámico no lineal puede ser un circuito electrónico no lineal, como el caso de un oscilador electrónico, mostrado en la figura 1.1. Analizando el circuito electrónico, se observa un régimen determinista en el cual se tiene oscilaciones estables y también a un régimen caótico o turbulento.

El oscilador electrónico se puede describir por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas no lineales de derivadas totales. Para este caso, el sistema está determinado por tres variables de estado. El análisis analítico de estas ecuaciones no ha sido aún posible y la simulación en computador es factible.

Las ecuaciones que describen el circuito de la figura 1.1, son las siguientes:

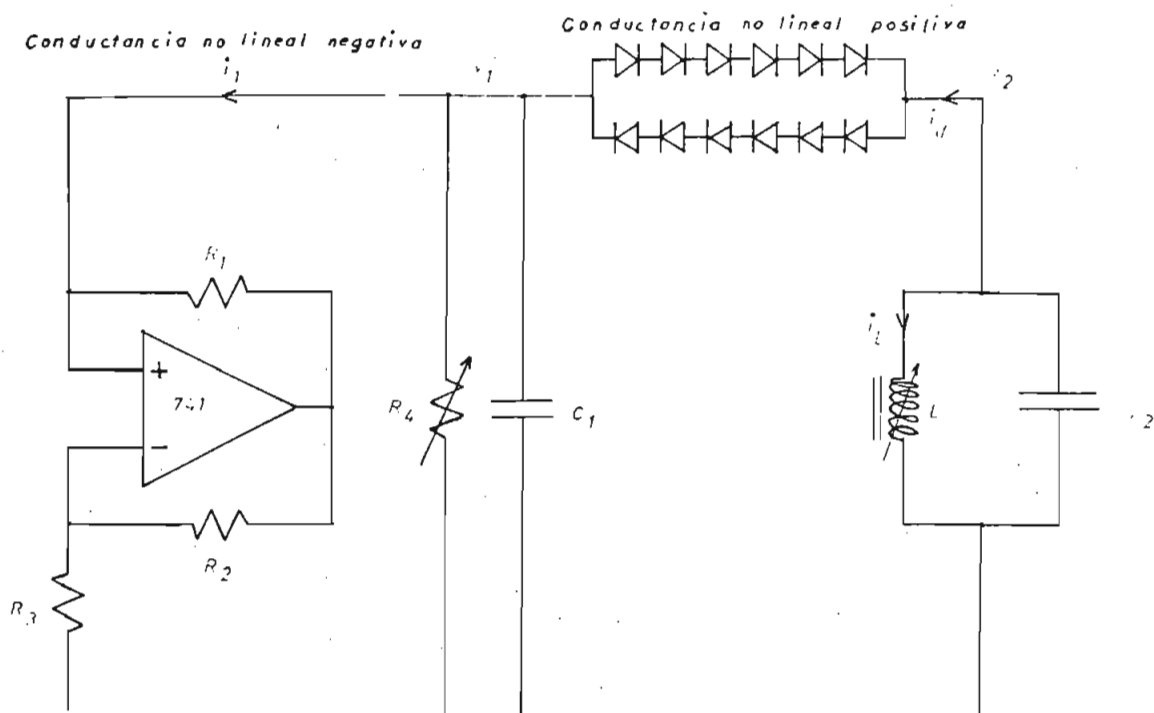


Fig. 1.1.- Circuito electrónico no lineal.

$$\dot{x} = \left[ \left( a_1 - \frac{1}{R_4} \right) x - a_3 x^3 + b_1 (y - x) + b_3 (y - x)^3 \right] / C_1 \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = \left[ -z - b_1 (y - x) - b_3 (y - x)^3 \right] / C_2 \quad (1.2)$$

$$\dot{z} = y / L \quad (1.3)$$



en donde

$$x \rightarrow v_1$$

$$y \rightarrow v_2$$

$$z \rightarrow i_L$$

Los sistemas hidrodinámicos son más complejos que el circuito electrónico, en donde existe un régimen laminar, luego un régimen ondulatorio y finalmente un régimen turbulento, cuya transición está determinada por el número de Reynolds. El número de Reynolds se define por medio de la ecuación:

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (1.4)$$

en donde  $\rho \rightarrow$  densidad del fluido

$v \rightarrow$  su velocidad media

$D \rightarrow$  diámetro del tubo

$\eta \rightarrow$  coeficiente de viscosidad

Se considera un flujo laminar para  $0 \leq N_R \leq 2000$ , turbulento para  $N_R > 3000$  y una zona intermedia para  $2000 \leq N_R \leq 3000$ .

El comportamiento de los fluidos, tanto líquidos como gases, está determinado por las ecuaciones de Navier - Stokes.

Las ecuaciones de Navier - Stokes son un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales no lineales de derivadas parciales, cuyo análisis analítico no ha sido aún posible y una simulación numérica es compleja.

Las ecuaciones de Navier - Stokes son las siguientes: [7]

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_i}{\partial t} = - \frac{\partial (\tilde{\mu}_i \tilde{\mu}_K)}{\partial X_K} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X_i} + \gamma \frac{\partial^2 \tilde{\mu}_i}{\partial X_K \partial X_K} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_K}{\partial X_K} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial X_\ell \partial X_\ell} = - \frac{\partial^2 (\tilde{\mu}_\ell \tilde{\mu}_K)}{\partial X_\ell \partial X_K} \quad (1.7)$$

en donde:

$\tilde{\mu}_i \rightarrow$  componente instantánea de velocidad

$X_i \rightarrow$  coordenada de espacio

$t \rightarrow$  tiempo

$\rho \rightarrow$  densidad

$\gamma \rightarrow$  viscosidad

$\tilde{p} \rightarrow$  presión instantánea

$i = 1, 2, 3$

La transición de un flujo laminar a un flujo turbulento se puede ver en la figura 1.2, en donde se muestra el campo de velocidades y la transformada de Fourier del campo de velocidad. [1].

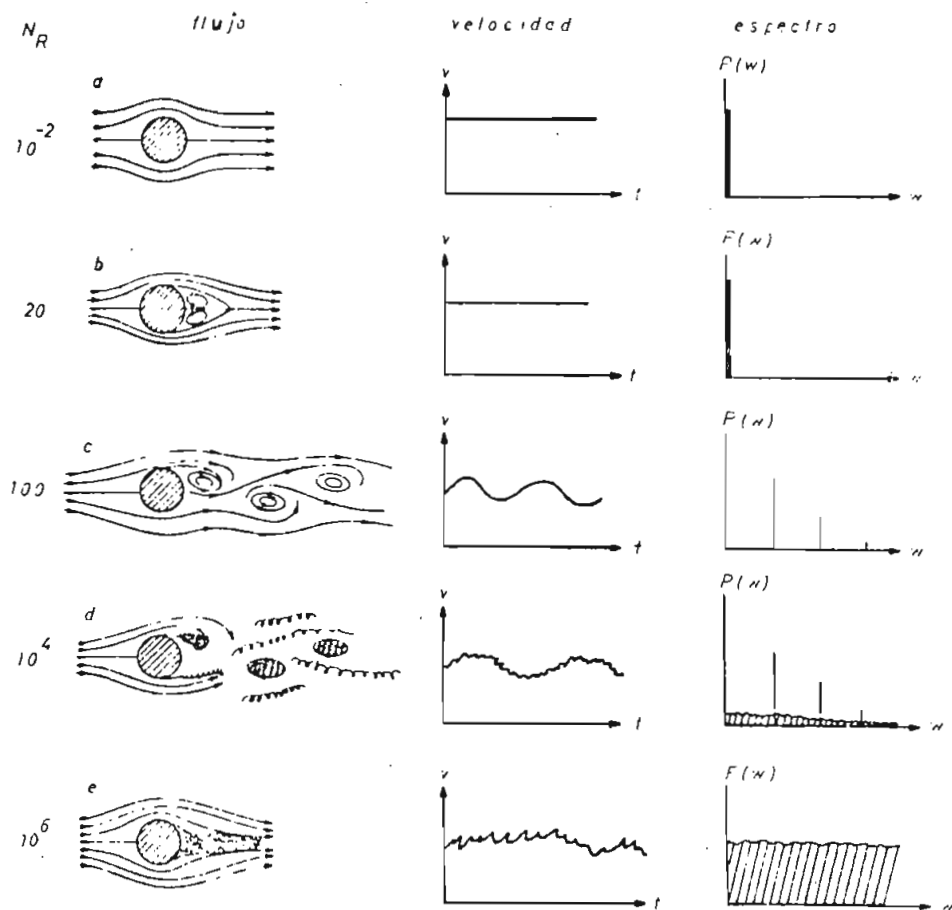


Fig. 1.2.- Patrones de comportamiento de un flujo hidrodinámico para varios números de Reynolds  $N_R$ . Para valores pequeños de  $N_R$ , el flujo es laminar (a); si se incrementa  $N_R$ , el flujo llega a ser primeramente oscilatorio (c), y finalmente turbulento (e). Para cada número de Reynolds, se muestra la variación en el tiempo de una componente de velocidad y su respectivo espectro de Fourier [1].

Un tercer sistema, todavía más simple, es el determinado por una ecuación de diferencias, con una sola variable de estado, del tipo  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$ . En este sistema también se observa un régimen laminar y un régimen turbulento.

Esta ecuación de diferencias es de fácil simulación en un computador y es posible realizar un análisis analítico para ciertas condiciones, pero no se ha podido obtener una solución general todavía.

En esta tesis realizamos un estudio del modelo de población de insectos, determinado por la ecuación de diferencias  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$  para varias condiciones iniciales y variación de varios parámetros, para tratar de entender claramente la transición de un régimen determinista a un régimen caótico por medio de una ecuación de fácil simulación en un computador.

Después realizaremos un análisis experimental del circuito electrónico para observar el comportamiento con la variación de los diferentes parámetros del circuito.

También se ha estudiado un modelo diferente a los anteriores, en el cual se observa comportamientos caóticos, que son de naturaleza distinta al del modelo de población de insectos, circuito electrónico y flujo de fluido viscoso.

Varias ramas de la física tienen fenómenos turbulentos. La mayoría de los flujos que ocurren en la naturaleza, así como también los que son realizados por el hombre, son turbulentos. Por ejemplo el límite en-

tre una columna de humo de un cigarrillo y la atmósfera circundante es generalmente irregular, produciéndose un comportamiento caótico.

La atmósfera es usualmente turbulenta, como se puede observar por la forma irregular de cúmulos que aparecen.

Los flujos sobre superficies son comunmente turbulentos, como se pueden observar en tuneles de viento y en caídas de agua tanto naturales como creadas por el hombre.

En general, el flujo turbulento es la regla y el flujo laminar resulta ser la excepción. [7].

Los circuitos eléctricos y electrónicos también presentan comportamientos caóticos o turbulentos que se debe a las no linealidades que presentan los dispositivos electrónicos.

En mecánica cuántica también se presentan fenómenos aleatorios similares a un régimen turbulento. Se puede mencionar el caso de un átomo en el cual se tienen niveles discretos de energía, cuando este se encuentra solo. Al acercar dos átomos, se observa un desdoblamiento de niveles. En el límite de muchos átomos, se tienen bandas de energía como en el caso de un semiconductor.

Otros campos de aplicación de esta investigación son: la evolución de poblaciones; cambios de estado (fusión, ebullición,...); en estudios de clima; en Mecánica estadística, para poder entender el comportamiento de gases con variación de presión, temperatura y otros pará

metros.

La transición del régimen laminar a un régimen caótico o turbulento, se caracteriza por un desdoblamiento del período, que ha sido ya observado en varios experimentos físicos. Tenemos el caso de osciladores ruidos, sean estos mecánicos, eléctricos o químicos; poblaciones biológicas; determinados por sistemas simultáneos de ecuaciones diferenciales. En el presente trabajo de tesis, se tiene el análisis en un oscilador electrónico.

También se observa el desdoblamiento del período en flujos de gases de Rayleigh - Bernard, en juntas ruidosas de Josephson.

Se tiene un desdoblamiento del período y turbulencia óptica en dispositivos ópticos híbridos, como el caso de cavidades ópticas. [16].

Entonces el propósito de este trabajo de tesis es contribuir a entender la transición de un régimen laminar a un régimen turbulento, entender los aspectos universales y entender que es un régimen caótico o turbulento.

El estudio analítico de sistemas no lineales es difícil y en el caso de soluciones caóticas es además de escasa utilidad por la naturaleza aleatoria de la solución. Por este motivo se utiliza en el presente trabajo de tesis el método experimental.

Con la ayuda de este estudio, se podrá comprender mejor el comportamiento en sistemas cada vez más complejos como los de circuitos elec-

trónicos no lineales y sistemas hidrodinámicos.

En el caso particular de la Ingeniería Electrónica, los circuitos electrónicos han sido estudiados ampliamente en un régimen determinista. La respuesta caótica no ha sido estudiada ya que obtener un resultado analítico de algo aleatorio, debido a las no linealidades, no ha sido posible.

El entender el mecanismo de la transición de un régimen laminar a un régimen turbulento es de gran interés para el estudio de los circuitos eléctricos no lineales, para poder entender su comportamiento. Además, los circuitos que se diseñan tienen elementos no lineales (transistores, diodos,...), por lo cual puede presentarse este tipo de comportamientos turbulentos como en el caso del circuito a ser analizado.

Como un dato histórico, en 1973 Nicholas Metropolis, Myron Stein y Paul Stein (Los Alamos) descubren una respuesta universal de desdoblamiento del período en sistemas dinámicos de una sola dimensión. Relacionado con el estudio de poblaciones biológicas, Robert May (Princeton) y George Oster (Berkeley) en 1974, descubre que el desdoblamiento del período conduce el caos. [16].

El estudio del tema tratado en el presente trabajo de tesis tiene su inicio por el año 1974, por lo cual es un campo de estudio nuevo en el cual existe todavía mucho por investigar.

Espero que esta tesis ayude en el avance del conocimiento en este tema y que sea el inicio de un estudio más profundo.

## C A P I T U L O      I I

ANALISIS DE  $X_{j+1} = r X_j(1-X_j)$  EN REGIMEN LAMINAR O DETERMINISTA Y TURBULENTO O CAOTICO.

Con este modelo se trata de mostrar un tipo de transición al caos y de esta manera tratar de entender la transición.

Muchas de estas características pueden ser observadas en otros tipos de sistemas como los hidrodinámicos, de ahí la importancia del estudio detallado de este modelo simplificado.

### 2.1. DESCRIPCION DEL MODELO.

Se considera un sistema dinámico caracterizado por la variable  $X$ . A un tiempo cero, el valor de esta variable es  $X_0$ ; a tiempos discretos más grandes se tiene los valores  $X_j$ . Se asume que el valor de la variable en un paso  $X_j$  determina el valor al paso siguiente  $X_{j+1}$ .

Esto se puede escribir:

$$X_{j+1} = f(X_j) \quad (2.1)$$

donde  $f(x)$  es una función que describe la dinámica del sistema. Se inicia con el valor de la variable a un tiempo cero,  $X_0$ , luego se encuentra  $X_1 = f(X_0)$ ,  $X_2 = f(X_1)$  y así sucesivamente, para luego hallar los patrones de la secuencia de los  $X$  ( $X_0, X_1, X_2, \dots$ ) donde  $j = 0, 1, 2, \dots$



Ahora vamos a obtener una función  $f$  que describa la población de insectos en una isla. Se considera que cada año se reproducen, por lo cual la variable  $X_j$  va a representar la población en el año  $j$ , respecto a la población inicial de referencia.

Si la población a un año  $j$  es  $X_j$ , al año siguiente se tendrá una población  $X_{j+1}$ , y se puede determinar a partir de la siguiente relación.

$$X_{j+1} = rX_j - sX_j^2 \quad (2.2)$$

El término  $rX_j$  representa un crecimiento natural de la población y es un término lineal.

El término  $sX_j^2$  representa una reducción en el crecimiento natural de la población causado por una sobrepoblación de insectos.

Cuando se tiene un  $r$  mayor que 1, el primer término significa el crecimiento de la población por un factor  $r$  por cada año. Si se mantiene solo el término lineal, se tendrá un crecimiento exponencial cuya solución es:

$$X_j = r^j X_0 \quad (2.3)$$

La existencia del segundo término no lineal, se debe a una reducción de la población causada por el agotamiento de sus fuentes de supervivencia, como puede ser el alimento, cuando la población es demasiado grande.

La ecuación (2.2) se puede reescalar para obtener una ecuación depen-

diente de un solo parámetro  $r$  en lugar de  $r, s$ .

Se puede escribir (2.2) de la siguiente manera:

$$X_{j+1} = r(X_j - \frac{s}{r} X_j^2) \quad (2.4)$$

o

$$X_{j+1} = rX_j (1 - \frac{s}{r} X_j) \quad (2.5)$$

Escalando la variable  $X$  como  $\frac{r}{s} X_j$  en la ecuación (2.5) se tiene:

$$\frac{r}{s} X_{j+1} = r \frac{r}{s} X_j (1 - \frac{s}{r} \frac{r}{s} X_j) \quad (2.6)$$

o

$$X_{j+1} = rX_j (1 - X_j) \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) será la expresión a ser analizada, su dependencia del factor  $r$  como de la variable  $j$  y condición inicial  $X_0$ .

En la figura 2.1, se ha graficado la función  $X_{j+1} = f(X_j)$  para la ecuación del modelo (2.7).

Vamos a analizar la primera y segunda derivadas de la función de la ecuación (2.7).

Sea  $\frac{d X_{j+1}}{d X_j}$  la primera derivada, que es igual a:

$$\frac{d X_{j+1}}{d X_j} = r (1 - 2 X_j) \quad (2.8)$$

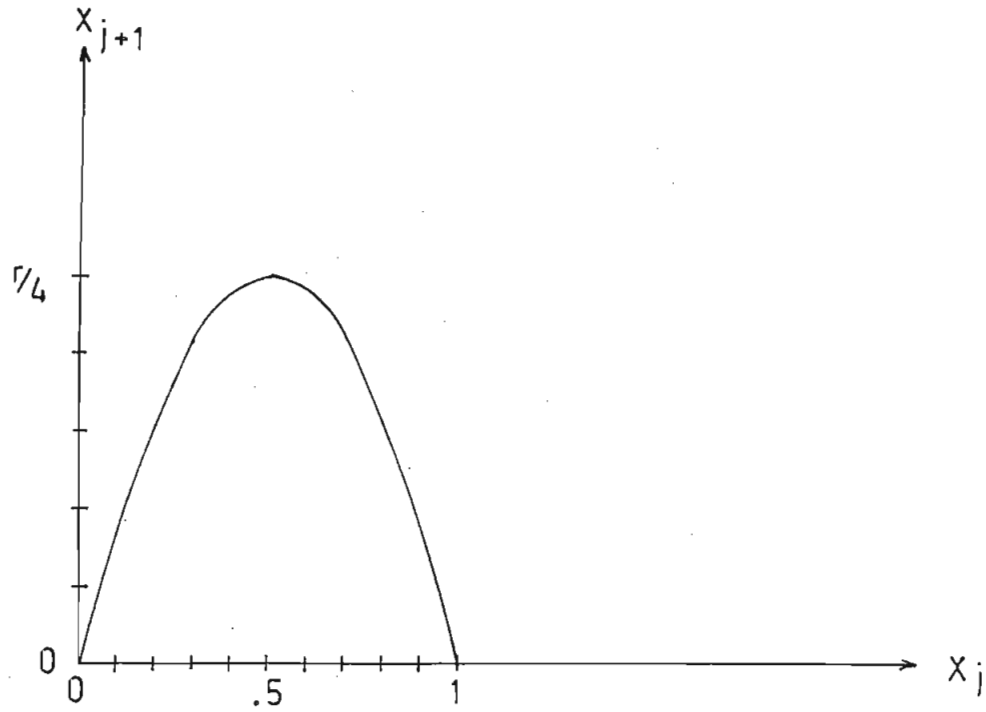


Figura 2.1.- Gráfico de  $X_{j+1}$  en función de  $X_j$  para la ecuación  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$ .

Igualando a cero para obtener el punto donde se encuentra el máximo se tiene:

$$0 = r (1 - 2 X_j) \quad (2.9)$$

ó

$$1 - 2 X_j = 0 \quad (2.10)$$

$$X_j = 0.5 \quad (2.11)$$

Sea  $\frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2}$  la segunda derivada que es igual a:

$$\frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} = r (-2) \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} = -2r \quad (2.13)$$

En la figura 2.2, se muestra el gráfico de la primera derivada en función de  $X_j$  y en la figura 2.3, se muestra el gráfico de la segunda derivada en función de  $X_j$ .

Entonces se puede decir que la función  $f(X_j)$  que describe la dinámica de la ecuación (2.7) tiene un solo máximo en el intervalo  $(0,1)$ , además la segunda derivada es negativa en el máximo.

Se puede escribir la ecuación (2.7) como:

$$X_{j+1} = r g(X_j) \quad (2.14)$$

donde  $g(X_j)$  es igual a  $X_j (1 - X_j)$  que es la ecuación que describe la población de insectos.

$$g(X_j) = X_j (1 - X_j) \quad (2.15)$$

En conclusión se tiene las siguientes propiedades:

- La función  $g(X_j)$  evaluada en cero es igual a la función evaluada en uno y tiene un valor de cero.

$$g(0) = g(1) = 0 \quad (2.16)$$

- La ecuación tiene un solo máximo en el intervalo  $(0,1)$ .

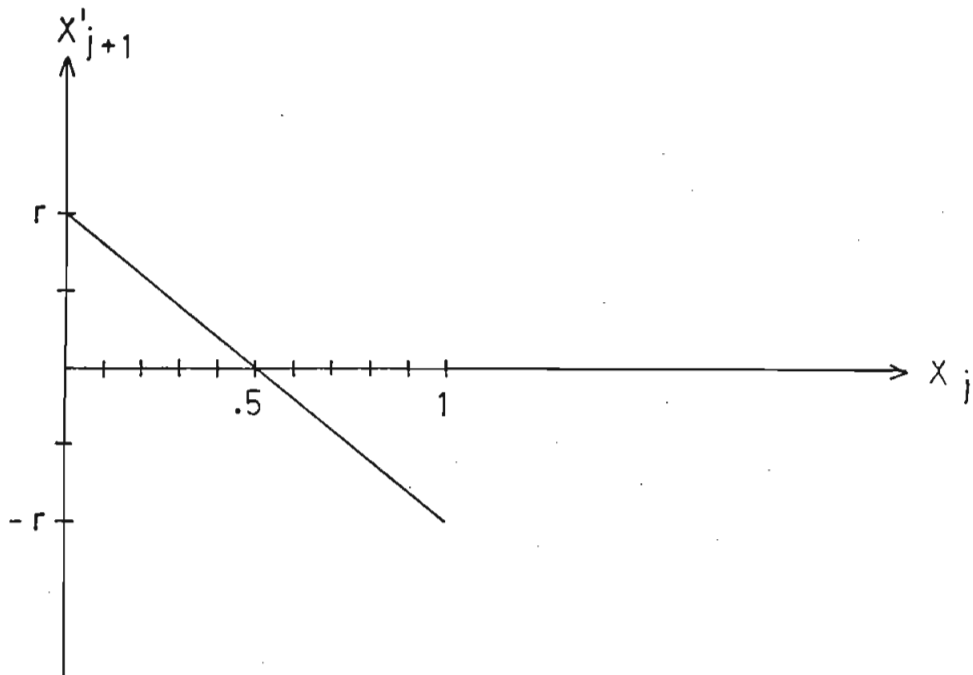


Figura 2.2.- Gráfico de  $\frac{d x_{j+1}}{d x_j}$  en función de  $x_j$  para la ecuación  $x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)$ .

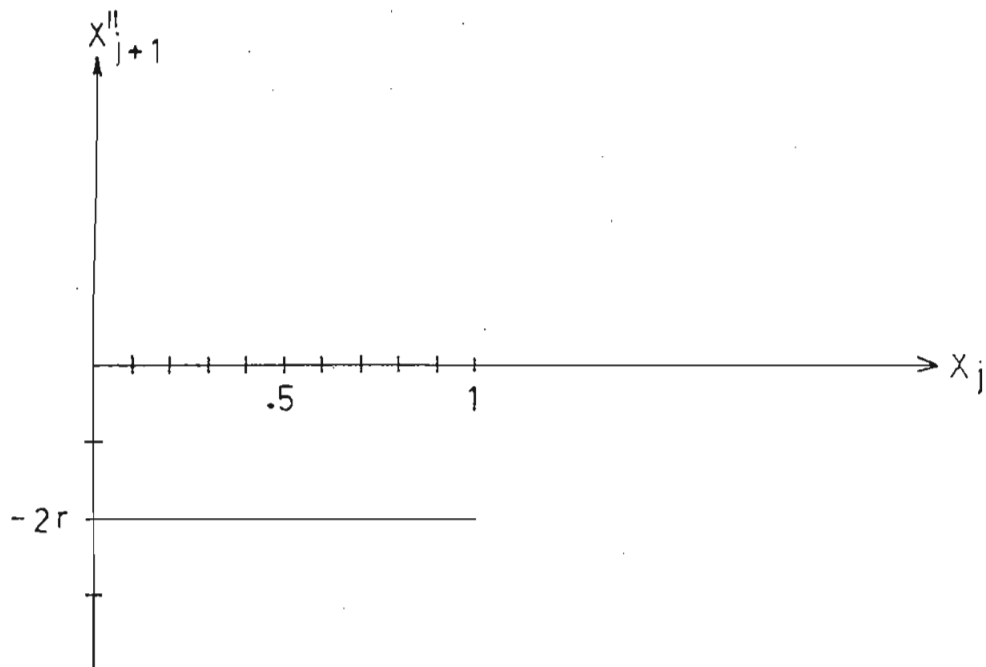


Figura 2.3.- Gráfico de  $\frac{d^2 x_{j+1}}{d x_j^2}$  en función de  $x_j$  para la ecuación  $x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)$ .

- La segunda derivada es negativa en el máximo.

$$g''(X) < 0 \quad (2.17)$$

Si  $X$  es el punto donde se encuentra el máximo.

## 2.2. ANALISIS DEL MODELO EN FUNCION DEL PARAMETRO $j$ . GRAFICOS DE $X_j = f(j)$ .

En esta parte se va a analizar el modelo en función del parámetro  $j$  para varios valores de  $r$ .

Si  $r$  tiene un valor menor a 1, para un  $j$  suficientemente grande, el valor final de  $X$  tiende a cero. Esto quiere decir para el modelo de población, que ésta desaparece después de un número determinado de años, debido a que los insectos viven en un medio inhóspito.

Esto se puede observar en la figura 2.4, para un valor de  $X_0 = 0.9$  y  $r = 0.7$ .

Cambiando la condición inicial  $X_0 = 0.7$ , se observa en la figura 2.5, que tiende a cero, el valor de  $X$ , de una manera más lenta.

Vamos a resolver en forma analítica el caso en el cual  $r = \frac{1}{2}$  y la condición inicial  $X_0 = \frac{1}{2}$ .

La ecuación (2.7) queda de la forma:

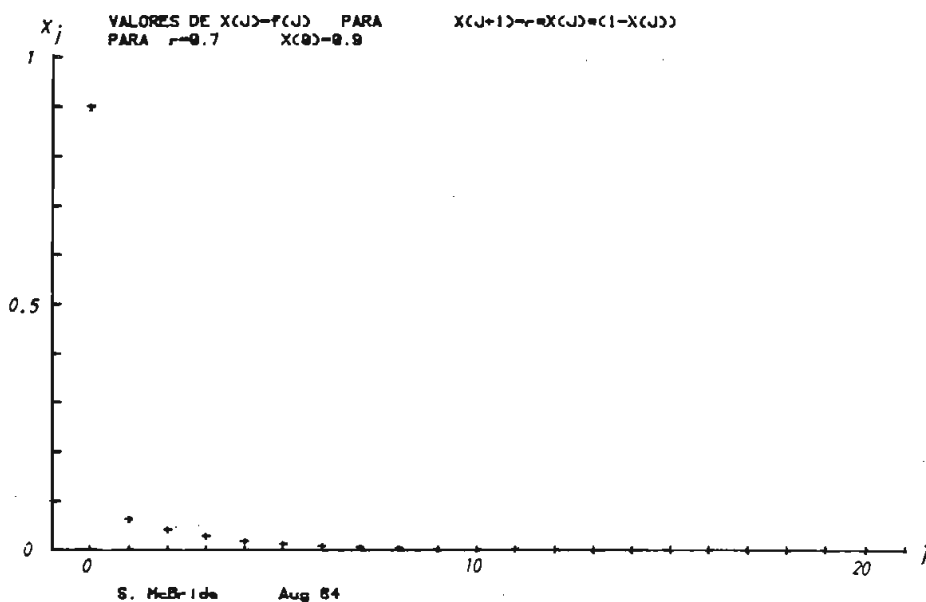


Figura 2.4.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ con } r = 0.7 \text{ y } X_0 = 0.9.$$

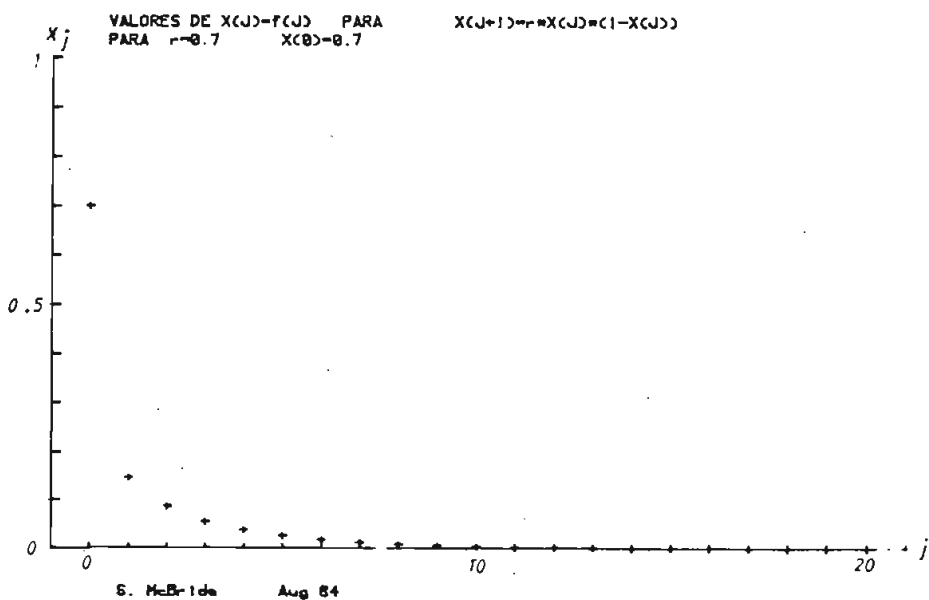


Figura 2.5.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } r = 0.7 \text{ y } X_0 = 0.7.$$

$$x_{j+1} = \frac{1}{2} x_j (1 - x_j) \quad (2.18)$$

computando los valores de  $x_j$  se tiene:

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{8}$$

$$x_2 = \frac{7}{8} \frac{1}{16} \quad (2.19)$$

$$x_3 = \frac{889}{1024} \frac{1}{32}$$

De esta serie de números se puede concluir que el valor de  $x_j$  es menor a  $\frac{1}{2^{j+2}}$  ó sea:

$$x_j < \frac{1}{2^{j+2}} \quad (2.20)$$

Para valores de  $r$  comprendidos entre 1 y 3, el valor de  $x_j$ , para cualquier condición inicial entre 0 y 1, tiende a un valor constante que va a depender del valor de  $r$  como veremos a continuación.

El valor al cual tiende la población se podrá calcular reemplazando tanto el valor de  $x_{j+1}$  como el de  $x_j$  por una constante que la llamaremos  $K$  en la ecuación (2.7).

$$x_{j+1} = K \quad (2.21)$$

$$x_j = K$$



reemplazando (2.21) en (2.7) se tiene

$$K = r K(1 - K) \quad (2.22)$$

Esta ecuación (2.22) tiene 2 soluciones: primera  $K = 0$  y una segunda solución,

$$1 = r (1 - K) \quad (2.23)$$

de donde:

$$K = 1 - \frac{1}{r} \quad (2.24)$$

en donde  $K$  es el valor al cual tiende el valor de  $X$  después de un tiempo suficientemente grande.

En la figura 2.6, se muestra un gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 2$  y  $X_0 = 0.7$  en el cual tiende, en un tiempo suficientemente grande, al valor  $X = 0.5$  según la ecuación (2.24).

Para  $r = 2$  se puede obtener una solución analítica de la ecuación (2.7)

La ecuación será:

$$X_{j+1} = 2 X_j (1 - X_j) \quad (2.25)$$

Para resolver sustituimos la variable  $X_j$  de la siguiente manera:

$$X_j = (1 - b_j) / 2 \quad (2.26)$$

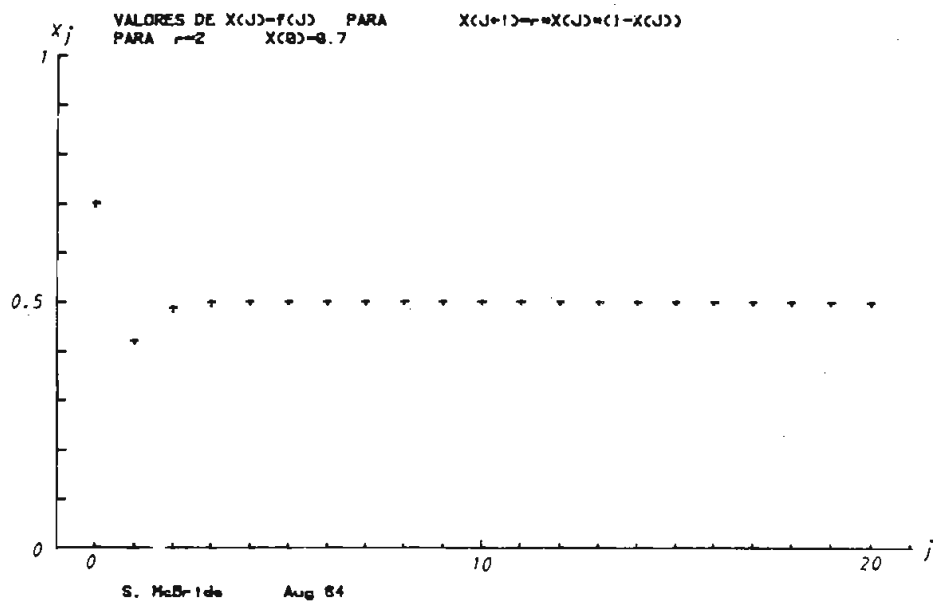


Figura 2.6.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } X_0 = 0.7 \text{ y } r = 2.$$

Substituyendo (2.26) en (2.25) se tiene:

$$\frac{1 - b_{j+1}}{2} = 2 \left( \frac{1 - b_j}{2} \right) \left( 1 - \frac{1 - b_j}{2} \right) \quad (2.27)$$

de donde:

$$1 - b_{j+1} = (1 - b_j)(1 + b_j) \quad (2.28)$$

ó

$$1 - b_{j+1} = 1 - b_j^2 \quad (2.29)$$

ó

$$b_{j+1} = b_j^2 \quad (2.30)$$

Entonces tenemos que resolver la ecuación de diferencias (2.30) que es  $b_{j+1} = b_j^2$ . Esta ecuación tiene la siguiente solución.

Para resolver la ecuación tomamos el logaritmo a los dos lados de la ecuación como sigue:

$$\ln b_{j+1} = 2 \ln b_j \quad (2.31)$$

La solución de la ecuación (2.31) es fácil de encontrar, ya que es una ecuación lineal para el  $\ln b_j$ . La solución es:

$$\ln b_j = 2^j \ln b_0 \quad (2.32)$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots$

de donde

$$b_j = b_0^{2^j} \quad (2.33)$$

De la ecuación (2.26) se puede obtener el valor de  $b_j$  en función de  $X_j$  para obtener la solución final.

$$b_j = 1 - 2 X_j \quad (2.34)$$

Substituyendo la ecuación (2.34) en la ecuación (2.33) se tiene:

$$1 - 2 X_j = (1 - 2 X_0)^{2^j} \quad (2.35)$$

de donde

$$X_j = [1 - (1 - 2 X_0)^{2^j}] / 2 \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) es la solución para cualquier valor de  $j$  para  $r=2$ .

Para comprobar la solución, según la ecuación (2.24), el valor al cual tiende  $X$  para  $j$  suficientemente grande será:

$$K = 1 - \frac{1}{2}$$

$$K = 0.5 \quad (2.37)$$

Ahora aplicando la solución de la ecuación (2.36) se tiene

$$K = \lim_{j \rightarrow \infty} X_j \quad (2.38)$$

de donde

$$K = \lim_{j \rightarrow \infty} [1 - (1 - 2 X_0)^{2^j}] / 2 \quad (2.39)$$

o

$$K = \frac{1}{2} - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2 X_0)^{2^j}}{2} \quad (2.40)$$

En la ecuación anterior la expresión  $|1 - 2 X_0|$  es siempre menor que 1 ya que el  $X_0$  puede estar comprendido entre  $0 < X_0 < 1$ .

$$|1 - 2 X_0| < 1 \quad (2.41)$$

$$\text{Si } 0 < X_0 < 1$$

Ahora si la expresión  $1 - 2 X_0$  lo elevamos a una potencia que tiende a infinito, y por ser menor que 1, la expresión

$$(1 - 2 X_0)^{2^j} \quad (2.42)$$

tiende a cero. Además para cualquier valor de  $j$ , la expresión (2.42) será mayor que cero, ya que siempre está elevada a una potencia par.

Entonces de la expresión (2.40) se tiene que  $K = 0.5$ , lo cual es igual a la solución obtenida en la ecuación (2.37).

Para valores de  $r$  superiores a 3, se observa una oscilación en la cual la población tiene valores altos y bajos en una forma cíclica.

Para esto observemos la figura 2.7, en la cual se tiene graficada la función (2.7) para  $r = 3.3$  y  $X_0 = 0.4$ . En esta figura los valores de  $X_j$  para un  $j$  suficientemente grande toma valores altos y bajos en el rango de  $0 < X_j < 1$ .

Si consideramos que  $\Delta j = T$ , donde  $T$  es el período y además  $\Delta j = 1$ , para el caso  $r = 3.3$  se tiene que se repite el ciclo cada  $2T$ ; por lo cual diremos que se trata de un ciclo de 2. Entonces en el caso  $r = 3.3$  se tiene una oscilación de período  $2 T$ .

También se ha graficado para el caso  $r = 3.3$ , para varios valores de la condición inicial  $X_0$ .

En la figura 2.8, se tiene el gráfico  $X_j = f(j)$  para la condición ini

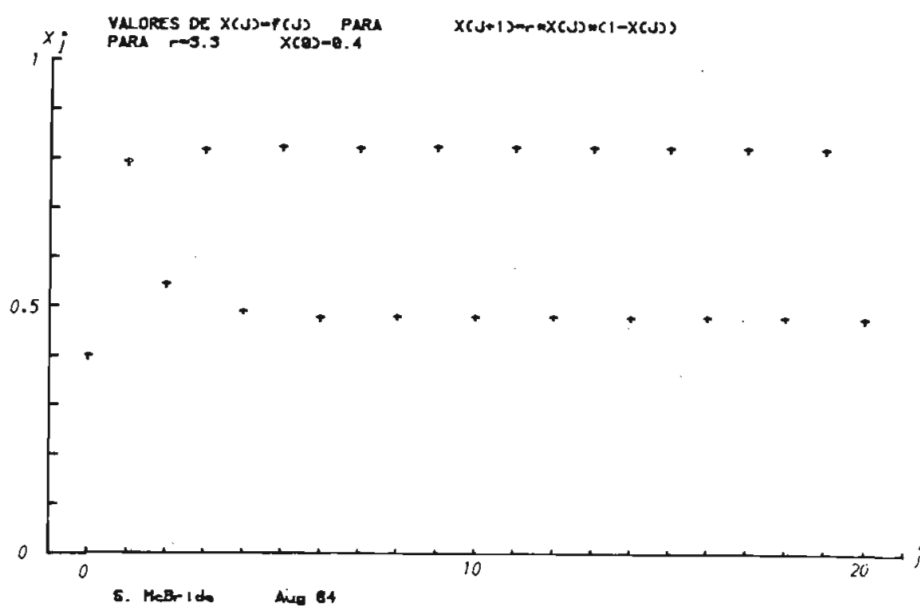


Figura 2.7.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ con } r = 3.3 \text{ y } X_0 = 0.4.$$

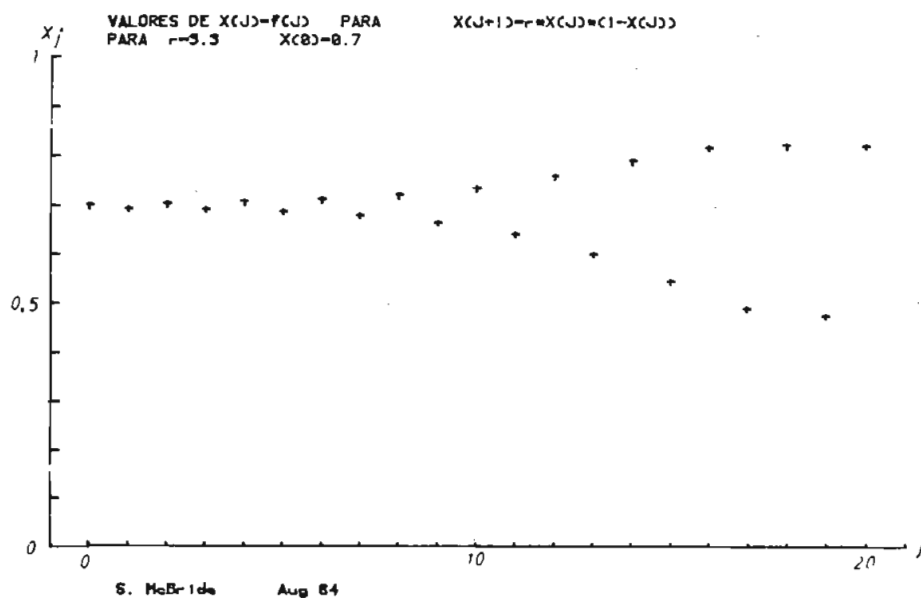


Figura 2.8.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$

$$\text{Si } r = 3.3 \text{ y } X_0 = 0.7.$$

cial  $X_0 = 0.7$  y en la figura 2.9, se tiene el mismo gráfico para la condición inicial  $X_0 = 0.6$ .

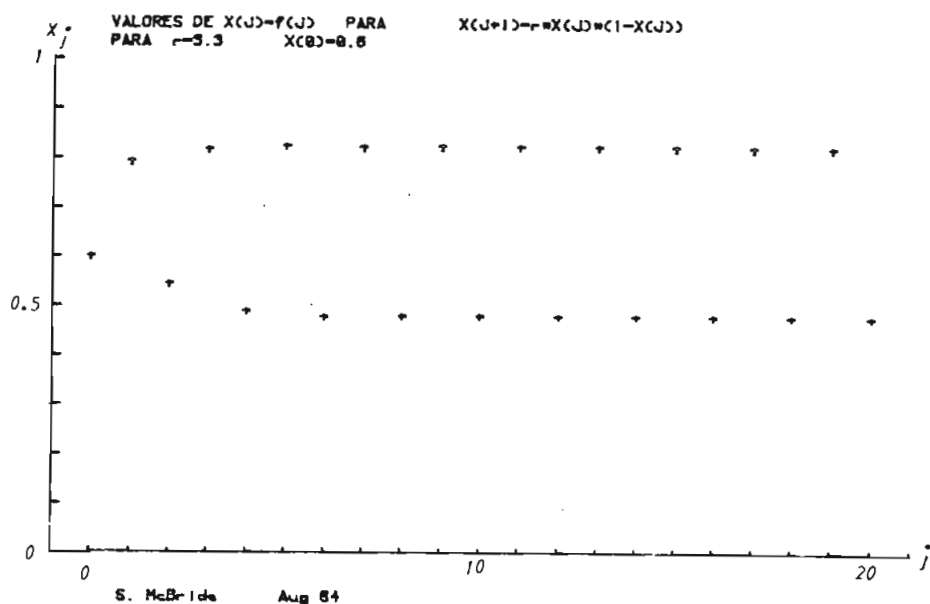


Fig. 2.9.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$   
Si  $r = 3.3$  y  $X_0 = 0.6$ .

En las figuras 2.7, 2.8 y 2.9, se tiene los gráficos de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.3$  y para diferentes valores de  $X_0$ , en los cuales se puede observar que dependiendo del valor de  $X_0$ , se tiene un  $j$  diferente en el cual la oscilación es estable y de período  $2T$ .

Esto quiere decir que existe una zona de transición antes de llegar al estado permanente en el cual se tiene una oscilación periódica de la misma amplitud para los diferentes  $X_0$ . Esta zona transitoria entonces depende del valor de la condición inicial y para cualquier  $X_0$ , se tendrá un estado permanente cuando  $j$  tiende a infinito.

Analizando la ecuación para  $r = 3.45$ , se tiene una oscilación de período



do  $4T$ , es decir para un incremento de  $j$  de cuatro, se repite el mismo valor de  $X_j$ .

En la figura 2.10 se tiene el gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.45$  y un valor inicial de  $X_0 = 0.4$ , en donde se puede observar la oscilación de período  $4T$ .

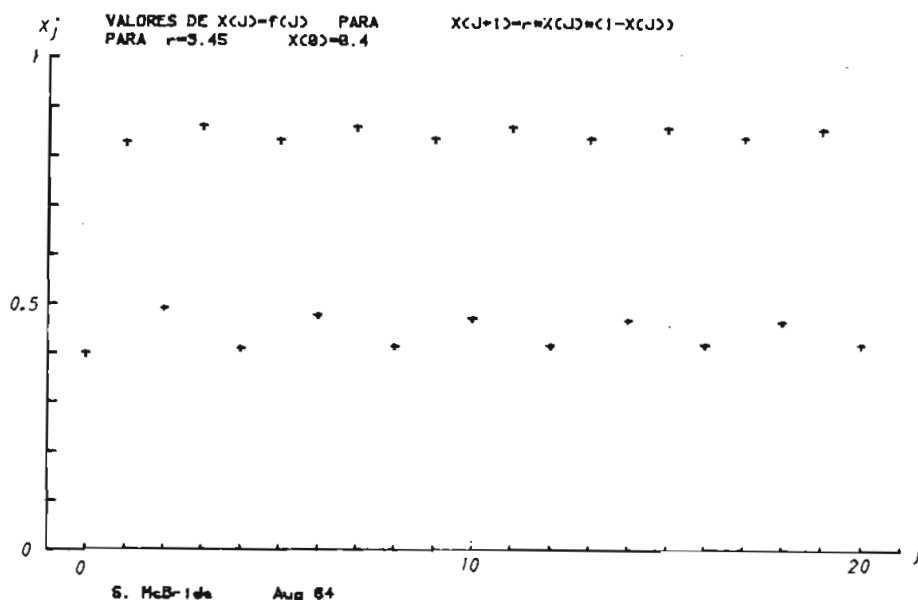


Fig. 2.10.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  de la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ con } r = 3.45 \text{ y } X_0 = 0.4.$$

Para el valor de  $r = 3.55$  se obtiene una oscilación de período  $8T$ . Esto se muestra en la figura 2.11 para una condición inicial de  $X_0 = 0.4$ .

También se observa oscilaciones de período  $16T$ , como se muestra en la figura 2.12 con un valor de  $r = 3.5668$  y una condición inicial  $X_0 = 0.5$ . Como se indicó anteriormente, la condición inicial afecta en el valor de  $j$  al cual se obtiene una oscilación en régimen permanente. Como se puede ver las oscilaciones van aumentando su período como  $2^q T$ , don



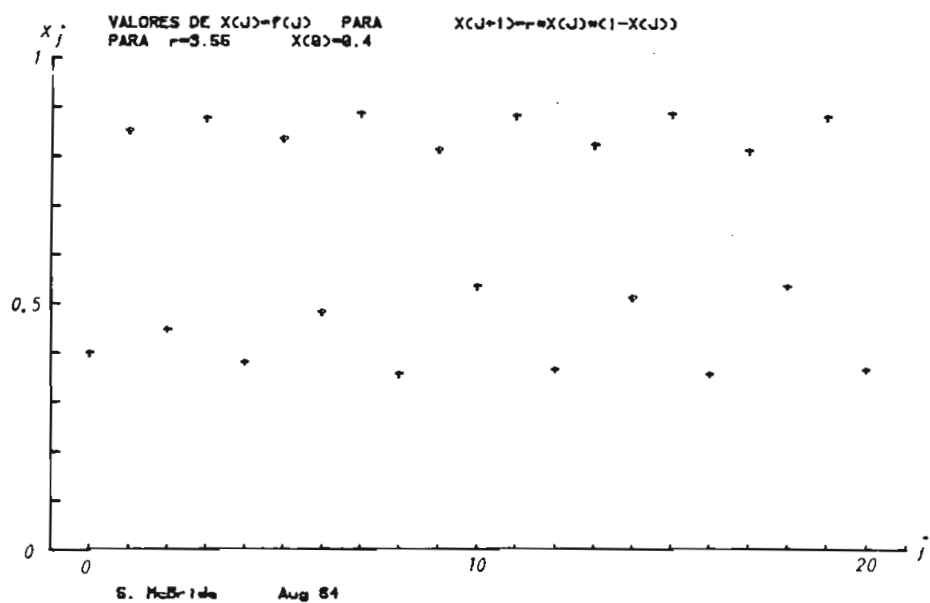


Fig. 2.11.- Gráfico  $X_j = f(j)$  de la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ con } r = 3.55 \text{ y } X_0 = 0.4.$$

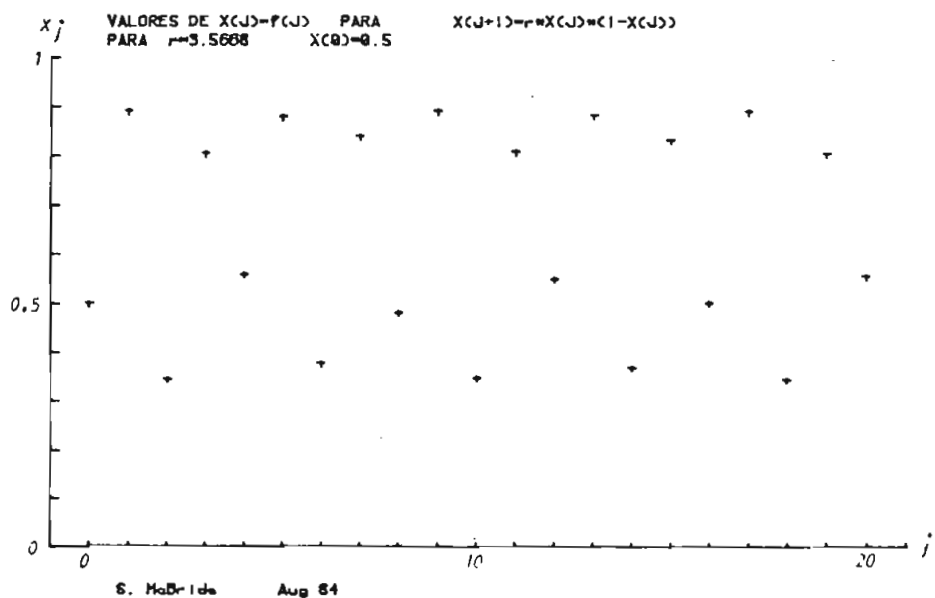


Fig. 2.12.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  de la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } r = 3.5668 \text{ y } X_0 = 0.5.$$

de  $q$  es un número entero ( $q = 1, 2, 3, \dots$ ). Esto quiere decir que un valor de  $X_j$  se repite para cada incremento de  $j$  de  $2^q$ , donde  $q$  va a depender el valor del coeficiente  $r$  de la expresión.

Además, se puede notar que cada vez que aumenta el período, los incrementos de  $r$  son cada vez más pequeños. De lo cual se concluye que el período de la oscilación no es lineal respecto al parámetro.

De la observación de todos los gráficos anteriores de  $X_j = f(j)$ , se ve que cada vez nos acercamos al caos y que ésta transición tiene su mecanismo.

Si seguimos aumentando el valor de  $r$  para valores superiores a 3.57, se observa un comportamiento un tanto aleatorio, como se puede ver en la figura 2.13. En esta figura se puede notar 2 bandas (2 intervalos)

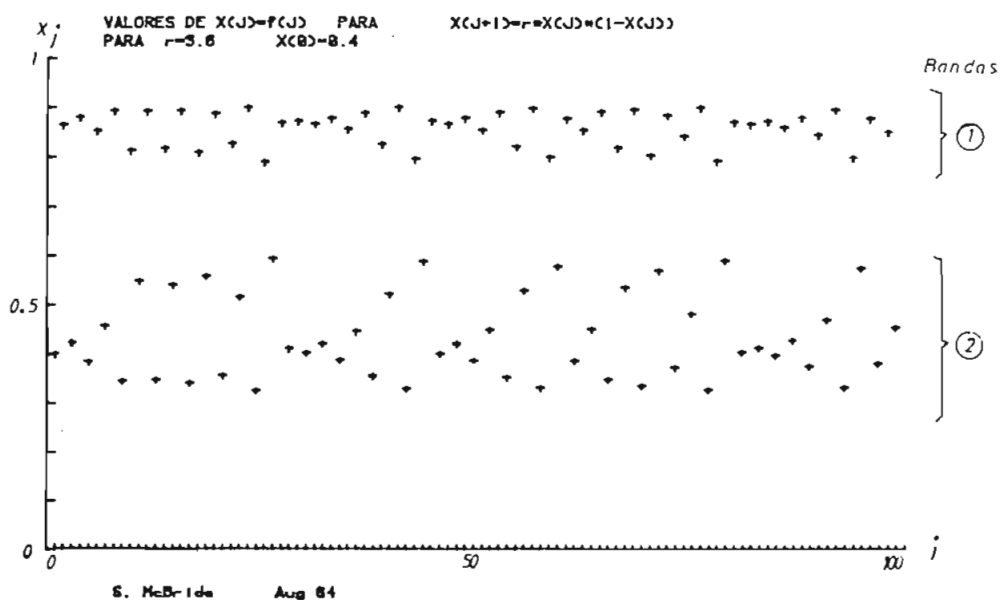


Fig. 2.13.- Gráfico  $X_j = f(j)$  de la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } r = 3.6 \text{ y } X_0 = 0.4.$$

en los cuales se encuentran los valores de  $X_j$ , pero en cada uno de los intervalos, estos valores de  $X_j$  se encuentran repartidos en forma aleatoria.

Entonces podemos decir que para  $r = 3.6$ , los valores de  $X_j$  se encuentran en 2 intervalos definidos; pero no podemos definir en qué parte exacta del intervalo caerá el próximo valor de  $X_j$ . Esto quiere decir que sólo podemos definir los intervalos donde existen valores de  $X_j$  y donde no existen. En la figura 2.13, se han señalado los intervalos en los cuales se tiene valores de  $X_j$  como 1 y 2.

Para  $r = 3.7$ , se tiene un solo intervalo en el cual se tiene los valores de  $X_j$ . Estos valores se encuentran repartidos en forma aleatoria dentro de este intervalo.

Existen dos intervalos, denominados 1 y 2 en la figura 2.14, en los cuales no tenemos valores de  $X_j$ . El intervalo 1 está comprendido entre  $0.92 < X_j < 1$  y el intervalo 2 entre  $0 < X_j < 2.5$ , siendo estos intervalos aproximados.

Para  $r = 4$ , se tiene el caos, debido a que los valores de  $X_j$  están comprendidos en el intervalo  $0 < X_j < 1$ , es decir un valor de  $X_j$  puede encontrarse en cualquier lugar de este intervalo. Para este caso los valores de  $X_j$  se encuentran repartidos en forma aleatoria en el intervalo (0.1). En la figura 2.15, se encuentra el comportamiento de la función para  $r = 4$ .

Vamos a realizar un análisis para  $r = 4$ .

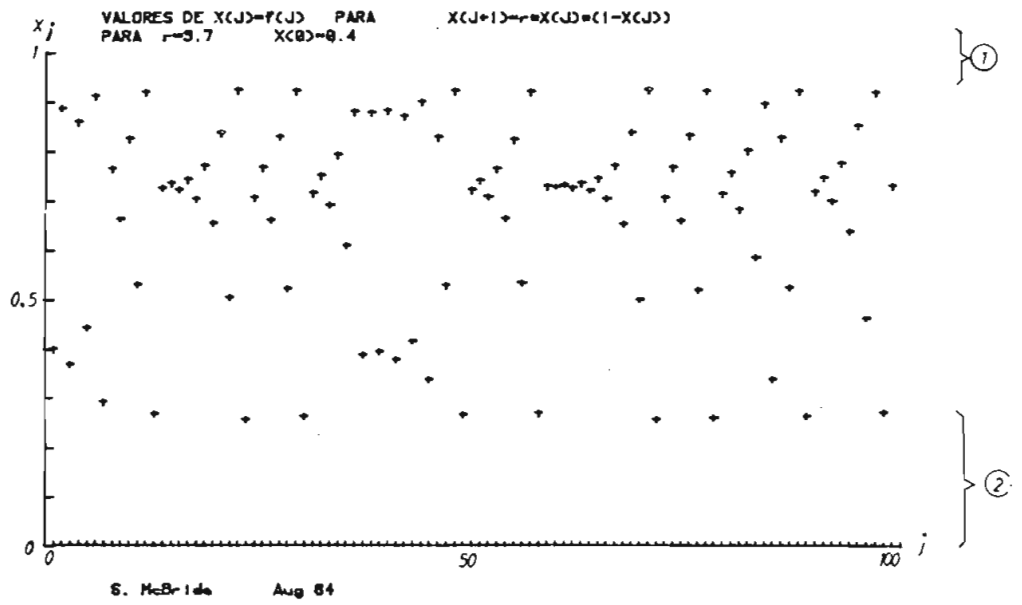


Fig. 2.14.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r=3.7$  y  $X_0=0.4$ .

1 y 2 intervalos donde no existen  
valores de  $X_j$ .

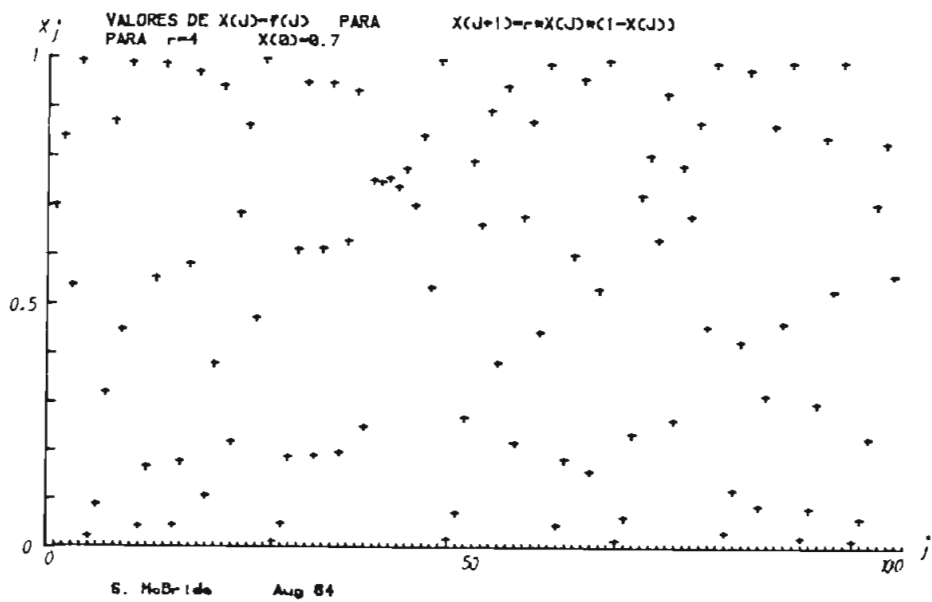


Fig. 2.15.- Caos, gráfico  $X_j = f(j)$   
para  $r = 4$  y  $X_0 = 0.7$ .

Se puede resolver la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \quad (2.43)$$

realizando un cambio de variables de la forma

$$X_j = (1 - \cos 2 \pi \theta_j) / 2 \quad (2.44)$$

La ecuación (2.43) puede ser convertida a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \pi \theta_{j+1}) &= 4 \left( \frac{1 - \cos 2 \pi \theta_j}{2} \right) \left( 1 - \frac{1 - \cos 2 \pi \theta_j}{2} \right) \\ &= 4 \left( \frac{1 - \cos 2 \pi \theta_j}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 2 \pi \theta_j}{2} \right) \\ &= (1 - \cos 2 \pi \theta_j) (1 + \cos 2 \pi \theta_j) \\ \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \pi \theta_{j+1}) &= 1 - \cos^2 2 \pi \theta_j \end{aligned} \quad (2.45)$$

Se tiene la siguiente relación trigonométrica

$$\cos 4 \pi \theta_j = 2 \cos^2 2 \pi \theta_j - 1 \quad (2.46)$$

reemplazando en la ecuación (2.45) se tiene

$$\frac{1}{2} (1 - \cos 2 \pi \theta_{j+1}) = 1 - \left( \frac{\cos 4 \pi \theta_j + 1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4 \pi \theta_j$$

$$\frac{1}{2} (1 - \cos 2 \pi \theta_{j+1}) = \frac{1}{2} (1 - \cos 4 \pi \theta_j) \quad (2.47)$$

De la ecuación (2.47) se puede obtener la solución

$$\cos 2 \pi \theta_{j+1} = \cos 4 \pi \theta_j \quad (2.48)$$

de donde  $2 \pi \theta_{j+1} = 4 \pi \theta_j \quad (2.49)$

$$\theta_{j+1} = 2 \theta_j \quad (2.50)$$

Entonces llegamos a obtener una ecuación de diferencias (2.50) cuya solución es la siguiente

$$\theta_j = 2^j \theta_0 \quad (2.51)$$

La solución puede ser más interesante escribiendo el valor inicial de  $\theta_0$  en un número en base 2 (número binario) de la forma

$$\theta_0 = .1011100101110.... \quad (2.52)$$

Desde ahora las iteraciones de la ecuación son generadas simplemente moviendo el punto decimal secuencialmente hacia la derecha. Como se indica a continuación:

$$\theta_1 = .011100101110.... \quad (2.53)$$

$$\theta_2 = .11100101110.... \quad (2.54)$$

$$\theta_3 = .1100101110.... \quad (2.55)$$

$$\theta_4 = .100101110.... \quad (2.56)$$

$$\theta_5 = .00101110.... \quad (2.57)$$

Observando estos resultados, se puede decir, que si iniciamos con un valor inicial  $\theta_0$ , el término  $\theta_j$  de la iteración  $j$ , depende de los dígitos  $j$  y mayores que  $j$  de  $\theta_0$ .

Según el cambio de variable de la ecuación (2.44), la solución de los  $X_j$  está relacionada con el  $\cos 2\pi\theta_j$ , al cual se puede sumar una parte entera a  $\theta_j$  y se obtiene el mismo valor de  $X_j$ .

Entonces se tiene que cualquier incertidumbre en el valor inicial  $\theta_0$ , crecerá exponencialmente con el incremento del número de iteraciones  $j$ . Si se tiene un error inicial  $\Delta\theta_0$  en la especificación del valor inicial  $\theta_0$ , este después de  $j$  iteraciones será

$$\Delta\theta_j = 2^j \Delta\theta_0 \quad (2.58)$$

Si iniciamos dos secuencias con valores iniciales  $X_0$  y  $X'_0$  que difieren en un número pequeño  $\Delta X_0$ .

Es decir:

$$X_0 - X'_0 = \Delta X_0 \quad (2.59)$$

Se generan 2 secuencias de población  $X_j$  y  $X'_j$  basados en  $X_0$  y  $X'_0$  respectivamente, después de  $j$  iteraciones la diferencia crece al valor  $2^j \epsilon$ , creando dos secuencias completamente diferentes y aleatorias.

Entonces la secuencia calculada de los  $X_j$  en la figura (2.15), es de alguna manera incorrecta. Si se calcula con una computadora con un número finito de cifras decimales, después de unas cuantas iteraciones, el error inicial llegará a ser de orden 1.

Por lo tanto todos los puntos después de unas pocas iteraciones son erróneos y representan algún efecto aleatorio dentro del computador.

Para observar los períodos  $T, 2T, 4T, 8T, \dots$ , vamos a analizar algunos gráficos de la función

$$X_{j+1} = f(X_j).$$

Para la obtención de estos gráficos se ha realizado primero cientos de iteraciones hasta tener un régimen estable y se ha graficado los últimos valores obtenidos.

Los puntos que se obtengan en estos gráficos de  $X_{j+1} = f(X_j)$  estarán dentro de una parábola como en la figura 2.16, en la cual el punto máximo es  $r/4$  y este punto máximo es para un valor de  $X_j = 0.5$ .

En la figura 2.16, se muestra el gráfico de  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 2$ , en el cual se tiene un solo punto por lo tanto tenemos que  $X_j$  tiende a un valor constante y podemos decir que se trata de una oscilación de período  $T$ .



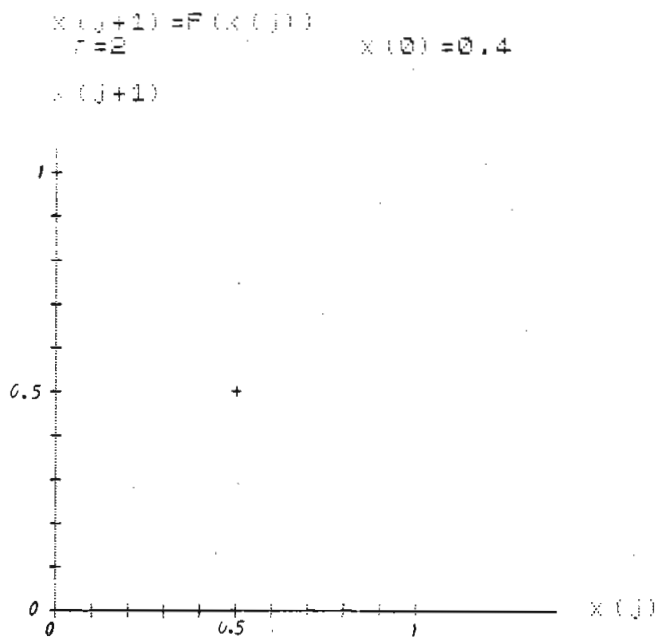


Fig. 2.16.- Gráfico de  $x_{j+1} = f(x_j)$  en régimen permanente para  $r=2$ , se tiene una oscilación de período  $T$ .

Para un valor de  $r=3.3$ , se tiene una oscilación de período  $2T$ . En la figura 2.17 se encuentra el gráfico de  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r = 3.3$  en el cual se observa dos puntos que corresponden a los 2 valores en régimen permanente ( $j \rightarrow \infty$ ). Estos valores se han denominado 1 y 2 en el gráfico.

Una oscilación de período  $4T$  se tiene para un valor de  $r = 3.46$  como se puede observar en la figura 2.18, en la cual se tienen 4 valores dentro de la parábola de la función  $x_{j+1} = f(x_j)$ . Esto confirma que en régimen permanente ( $j \rightarrow \infty$ ) tiende a 4 valores que dependen del valor de  $r$ .

Una oscilación de período  $8T$  se ilustra en la figura 2.19. En este gráfico para  $j \rightarrow \infty$ ,  $x_j$  tiende a 8 valores estables dentro de la parábola

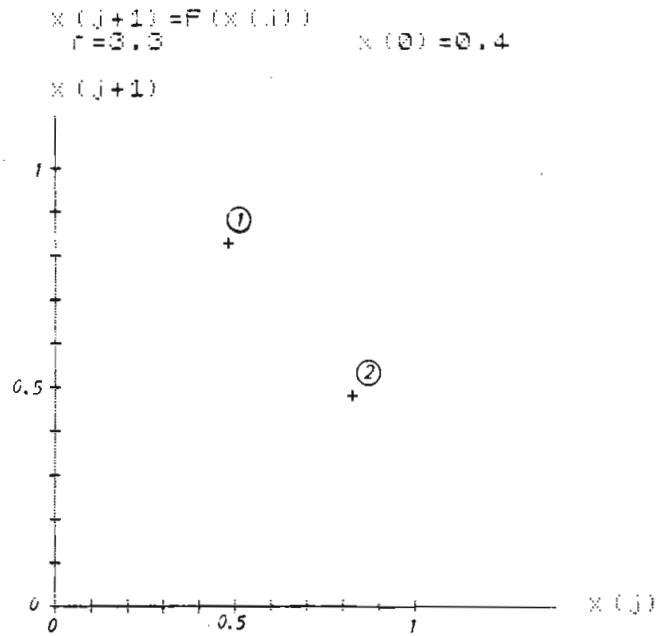


Fig. 2.17.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  en régimen permanente para  $r = 3.3$  y oscilación de período  $2T$ .

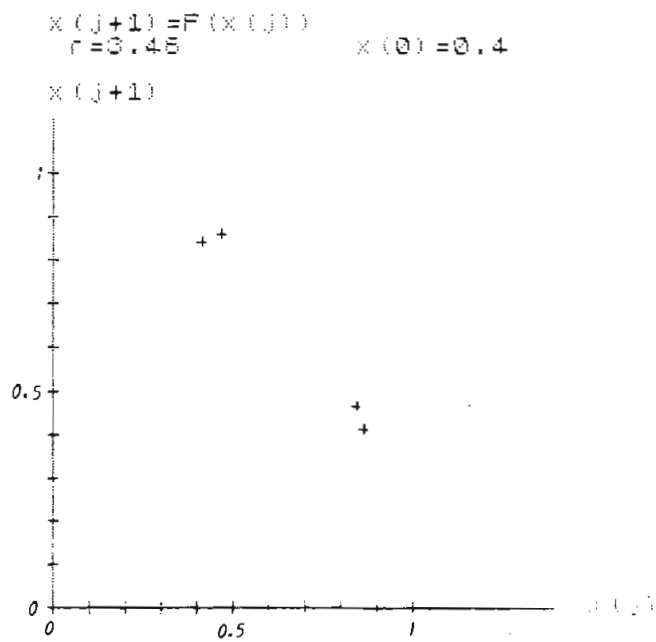


Fig. 2.18.- Gráfico de  $x_{j+1} = f(x_j)$  en régimen permanente para  $r = 3.46$  es una oscilación de período  $4T$ .

1a. Este gráfico se lo ha realizado para  $r = 3.55$ .

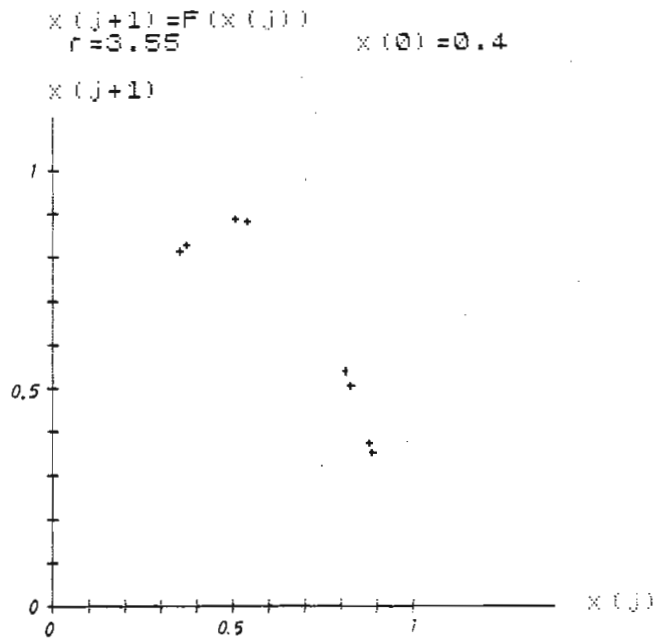


Fig. 2.19.- Gráfico  $X_{j+1} = f(X_j)$  en régimen permanente para  $r = 3.55$  es una oscilación de período  $8T$ .

Si se grafica la función  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 4$ , se observa que toda la parábola se llena con puntos y esto indica que un valor de  $X_j$  puede encontrarse en cualquier punto de esta parábola en forma aleatoria. Este gráfico se encuentra en la figura 2.20.

Si graficamos  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 3.6$ , se observa en la figura 2.21, que se forman dentro de la parábola 2 bandas en las cuales caen los valores de  $X_j$ . En el gráfico se indica estas bandas con 1 y 2. Este es un estado más en la ruta hacia el caos que se tiene con  $r = 4$ . En este estado  $r = 3.6$ , se puede todavía afirmar con certeza que valores de  $X_j$  no tomará la función en régimen permanente y estos valores serán los que se encuentran fuera de las bandas 1 y 2.

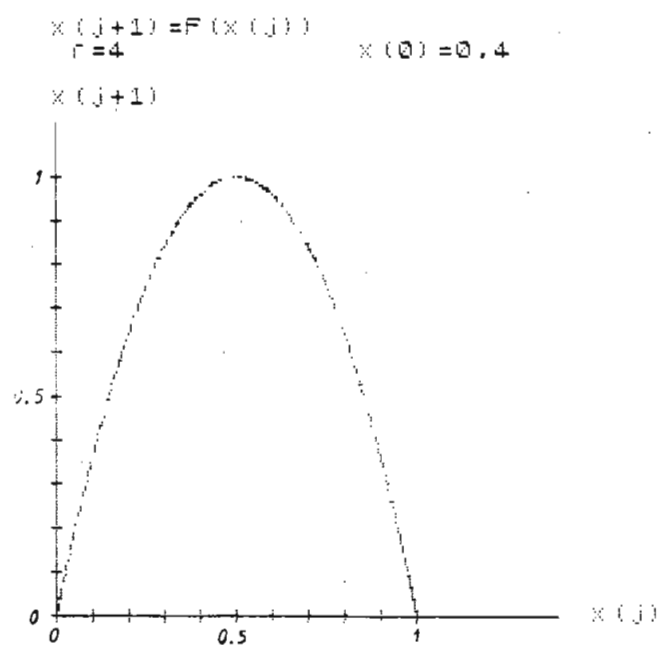


Fig. 2.20.- Gráfico de  $x_{j+1} = f(x_j)$  en régimen permanente para  $r = 4$ . se observa el caos.

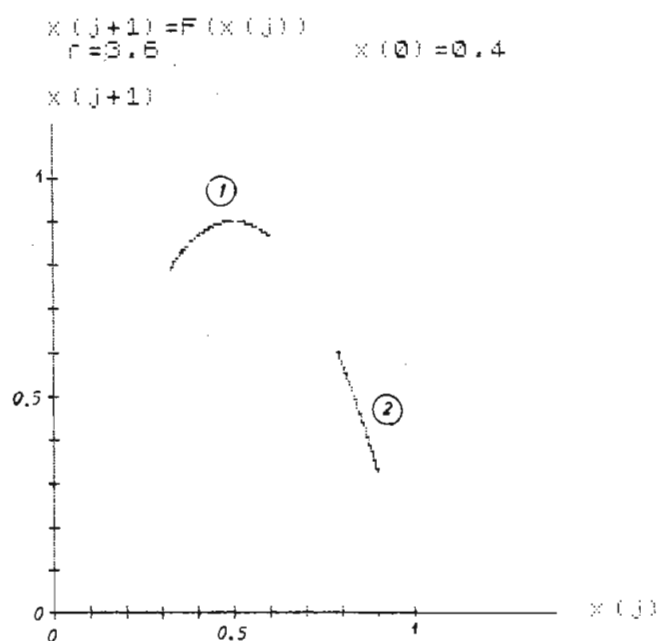


Fig. 2.21.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  en régimen permanente para  $r = 3.6$ . Se observa 2 bandas denominadas 1 y 2 .

De estos gráficos se puede decir que dependiendo del valor de  $r$ , toma diferentes configuraciones, sean estas periódicas en puntos discretos o en bandas.

Los valores van a estar dentro de una parábola cuyo valor máximo va a depender del valor de  $r$ .

### 2.3. ANALISIS DEL MODELO EN FUNCION DEL PARAMETRO $r$ . GRAFICOS DE $X_j = f(r)$ .

Del estudio anterior se ha observado que existe un mecanismo en la transición de un régimen laminar a un régimen turbulento a medida que aumenta  $r$ . Este mecanismo está basado en un aumento en el período de las oscilaciones como  $2^q$  en donde  $q$  es un entero que toma valores  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Esta periodicidad depende del valor de  $r$ . También se ha observado de los gráficos de  $X_{j+1} = f(X_j)$  que dependiendo del valor de  $r$  existen puntos discretos o bandas de período  $2^q$  en donde se tiene los valores  $X_j$  para un valor de  $j$  lo suficientemente grande para tener un régimen permanente.

Para analizar más estrictamente esta transición vamos a trabajar con el modelo en función del parámetro  $r$  y explicar detalladamente el mecanismo.

En la figura 2.22 se ha graficado la función  $X_j = f(r)$ , la cual se ha obtenido calculando, para cada valor de  $r$ , un número de puntos grande y graficando unicamente los últimos puntos. Esto para asegurar que se

tiene el gráfico en un régimen permanente.

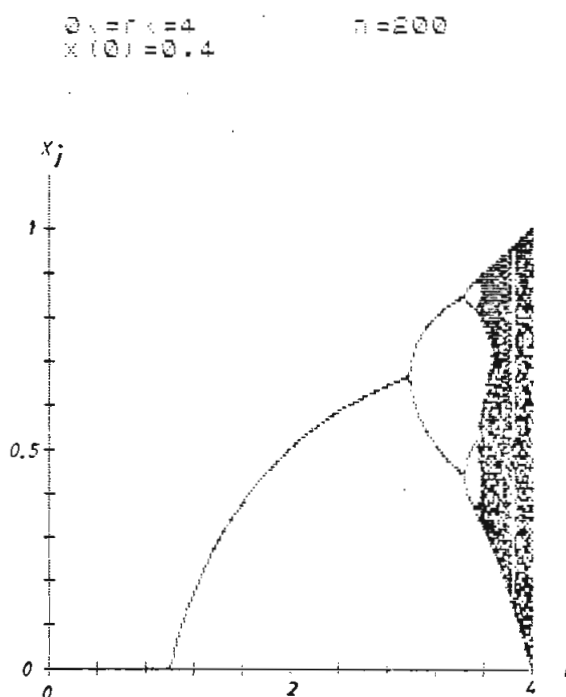


Fig. 2.22.- Gráfico de  $X_j = f(r)$  para la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } r \text{ en el intervalo}$$

$$0 \leq r \leq 4, X_0 = 0.4. \text{ En régimen permanente.}$$

En la figura 2.22, se observa como para diferentes valores de  $r$ , el valor de  $X_j$  toma diferentes periodicidades; como por ejemplo para  $1 \leq r \leq 3$ , el valor de  $X_j$ , tiende a un valor constante cuando  $j$  tiende a infinito. Se observa que existe una transición de niveles discretos a bandas en donde se encuentran los valores de  $X_j$ .

Para observar más en detalle la transición, vamos a analizar la división periódica primeramente en niveles discretos, dependiendo del valor de  $r$  y en donde tendremos oscilaciones de período  $T, 2T, 4T, 8T, 16T, \dots$

En la figura 2.23, tenemos el gráfico  $X_j = f(r)$ , en donde se ha grafi

cado los valores de  $X_j$  estables. En este gráfico la escala  $r$  no es lineal para observar la división periódica de mejor forma.

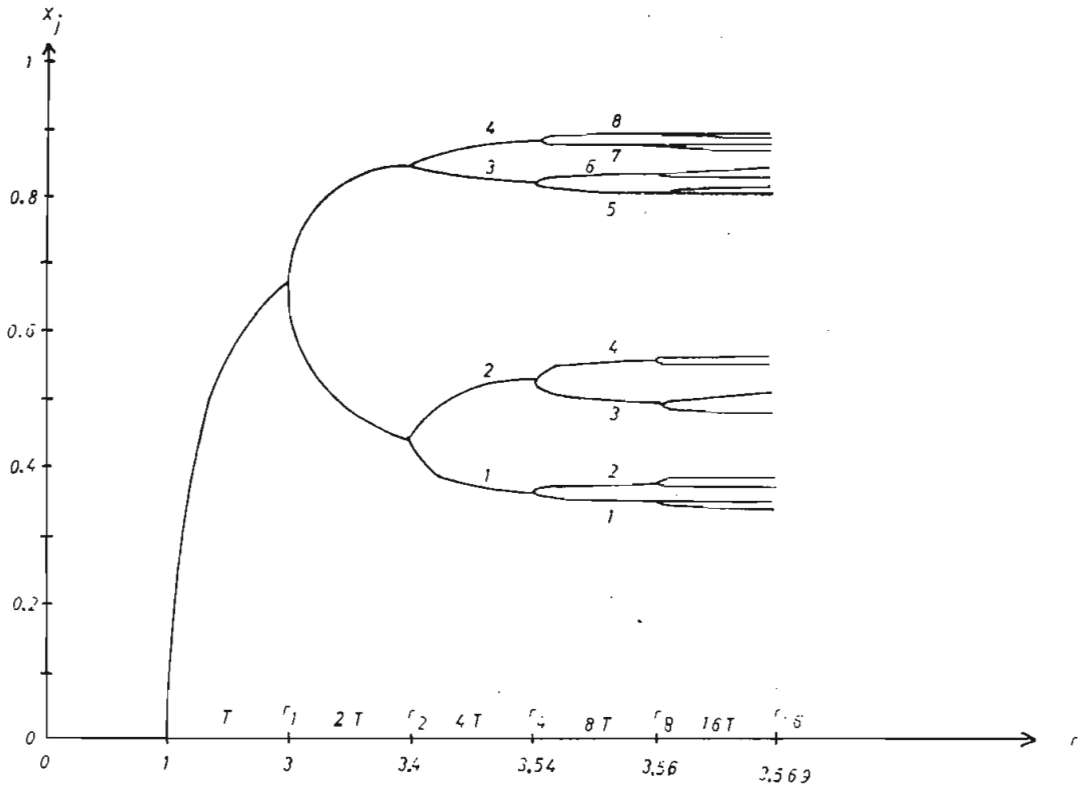


Fig. 2.23.- Gráfico de  $X_j = f(r)$ , para oscilaciones de período  $T$ ,  $2T$ ,  $4T$ ,  $8T$ ,  $16T$ , en régimen permanente.

En la figura 2.23, cuando  $r$  toma valores inferiores a 1, el valor de  $X_j$  para  $j \rightarrow \infty$  tiende a cero. Para  $1 \leq r \leq 3$ , el valor de  $X_j$  tiene un valor constante que depende del  $r$ .

Para un valor de  $r$  mayor que 3 e inferior a 3.4, el valor de  $X_j$  toma dos valores en forma alternada.

Para  $3.4 \leq r \leq 3.54$ , el valor de  $X_j$  se encuentra oscilando entre 4 valores estables o niveles. En este intervalo de  $r$  nos encontramos en el caso de la oscilación de período  $4T$ . Para analizar la secuencia de

llenado de los niveles, hemos denominado a estos 1, 2, 3, 4, desde abajo hacia arriba. Luego se ha calculado valores de  $X_j$  para  $j$  suficientemente grande para tener valores en un régimen permanente.

Estos valores se encuentran en la Tabla 2.1.

|          |               |   |
|----------|---------------|---|
| $X(184)$ | $=0.38281958$ |   |
| $X(185)$ | $=0.82694071$ |   |
| $X(186)$ | $=0.50088421$ |   |
| $X(187)$ | $=0.87499726$ |   |
| $X(188)$ | $=0.38281958$ |   |
| $X(189)$ | $=0.82694071$ |   |
| $X(190)$ | $=0.50088421$ |   |
| $X(191)$ | $=0.87499726$ |   |
| $X(192)$ | $=0.38281958$ |   |
| $X(193)$ | $=0.82694071$ |   |
| $X(194)$ | $=0.50088421$ |   |
| $X(195)$ | $=0.87499726$ |   |
| $X(196)$ | $=0.38281958$ | 1 |
| $X(197)$ | $=0.82694071$ | 3 |
| $X(198)$ | $=0.50088421$ | 2 |
| $X(199)$ | $=0.87499726$ | 4 |

Tabla 2.1.- Valores de  $X_j$  obtenidos de la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para las condiciones}$$

$$\text{iniciales } X_0 = 0.4 \text{ y } r = 3.5.$$

De la Tabla 2.1, se ve que la secuencia de llenado de los niveles es de 1 a 3 a 2 a 4.

Ahora si tomamos un  $r$  comprendido entre 3.54 y 3.56, se tiene una oscilación de período  $8T$ , en la cual el valor de  $X_j$  tiende a 8 valores posibles. Hemos tenido nuevamente un desdoblamiento en el período. En este caso también vamos a analizar la secuencia de llenado de los niveles discretos. Para esto denominamos de arriba hacia abajo como: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



Calculamos los valores que toma  $X_j$  para  $j$  suficientemente grande y se encuentran en la tabla 2.2.

|          |               |   |
|----------|---------------|---|
| $X(179)$ | $=0.88168435$ |   |
| $X(180)$ | $=0.37032556$ |   |
| $X(181)$ | $=0.82780512$ |   |
| $X(182)$ | $=0.50503051$ |   |
| $X(183)$ | $=0.8873709$  |   |
| $X(184)$ | $=0.35480045$ |   |
| $X(185)$ | $=0.81265567$ |   |
| $X(186)$ | $=0.54047483$ |   |
| $X(187)$ | $=0.88168435$ |   |
| $X(188)$ | $=0.37032556$ |   |
| $X(189)$ | $=0.82780512$ |   |
| $X(190)$ | $=0.50503051$ |   |
| $X(191)$ | $=0.8873709$  |   |
| $X(192)$ | $=0.35480045$ | 1 |
| $X(193)$ | $=0.81265567$ | 5 |
| $X(194)$ | $=0.54047483$ | 4 |
| $X(195)$ | $=0.88168435$ | 7 |
| $X(196)$ | $=0.37032556$ | 2 |
| $X(197)$ | $=0.82780512$ | 6 |
| $X(198)$ | $=0.50503051$ | 3 |
| $X(199)$ | $=0.8873709$  | 8 |

Tabla 2.2.- Valores que toma  $X_j$  según la ecuación

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j) \text{ para } X_0 = 0.4 \text{ y } r = 3.55.$$

De la tabla 2.2, se observa que la secuencia de llenado es la siguiente: 1, 5, 4, 7, 2, 6, 3, 8.

Si calculamos el valor de  $X_j$  en régimen permanente ( $j \rightarrow \infty$ ), con  $r$  en el intervalo  $3.56 \leq r \leq 3.569$ , tenemos una oscilación de período 16T, o sea que el valor de  $X_j$  oscila entre 16 valores.

De este proceso se puede decir que existe un desdoblamiento que depende del valor de  $r$ .

Llamemos  $r_q$ , al valor  $r$ , en el cual ocurre el desdoblamiento de  $q$  valores a  $2q$  valores.

Entonces llamaremos al valor de  $r$  al cual los dos valores llegan a ser inestables como  $r_2$ .

Para  $r$  ligeramente mayor a  $r_2$ , la respuesta estable es cuatro valores. El período de la respuesta se ha desdoblado una vez más.

Esta respuesta o comportamiento es estable hasta  $r_4$ . Sobre  $r_4$  aparecen 8 valores que permanecen estables entre  $r_4$  y  $r_8$ . Para  $r$  mayores a  $r_8$  se tienen 16 valores.

Este proceso de desdoblamiento continúa hasta infinito y se tiene  $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$  valores. El punto donde se tiene infinitos valores lo vamos a llamar  $r$  crítico [ $r_c$ ].

Ahora vamos a estudiar el comportamiento cuando  $r$  varía entre  $r_c$  y 4. Para esto se ha graficado  $X_j = f(r)$  en el intervalo de  $3 \leq r \leq 4$ , en la figura 2.24.

Iniciamos el estudio para  $r = 4$ , en donde para cualquier condición inicial  $X_0$ , los valores de  $X_j$  se encuentran repartidos, en el intervalo  $0 \leq X_j \leq 1$ , en una forma aleatoria; formando una sola banda. Los valores de  $X_j$  se mueven en forma errática a lo largo de la banda y tendremos un caos. Llamaremos a este punto  $r = 4$  como  $r'_1$ .

Bajo el valor de  $r$  llamado  $r'_2$ , el comportamiento del sistema varía y se observa que la banda única que se tenía, se divide en dos bandas. Para un  $r$  entre  $r'_2$  y  $r'_4$ , los valores de  $X_j$  oscilan entre estas dos bandas en forma alternada. En este caso es posible predecir en que banda

se tendrá un valor determinado de  $x_j$ , aunque este valor se encuentre en forma aleatoria en el interior de esta banda. Por lo tanto se puede dar los límites de variación de un valor  $x_j$ .

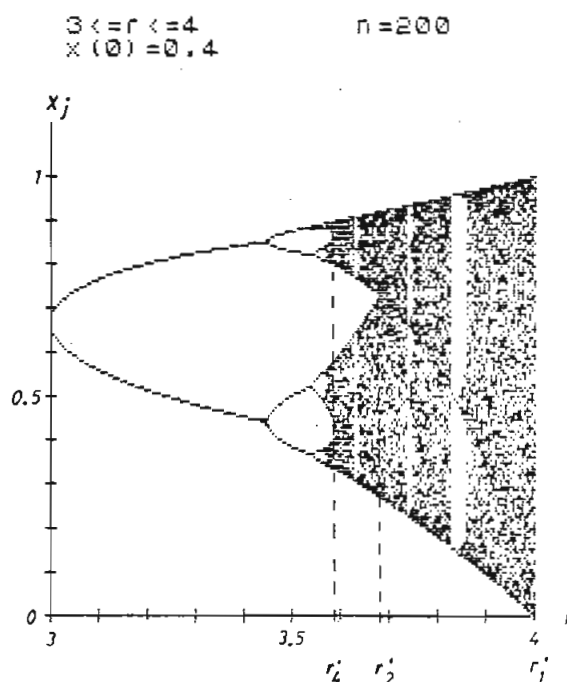


Fig. 2.24.- Gráfico de  $x_j = f(r)$  para el intervalo  $3 \leq r \leq 4$ .

La población oscila entre  $2, 4, 8, \dots, 2^n$  valores dependiendo del valor de  $r$ , en régimen permanente.

Para valores de  $r$  inferiores a  $r'_4$ , el comportamiento del sistema cambia una vez más y se tiene un nuevo desdoblamiento. En este caso se tienen 4 bandas.

A medida que  $r$  decrece bajo  $r'_8$ , se tienen 8 bandas; si decrece de  $r'_{16}$ , se tendrán 16 bandas y esto continúa hasta tener  $2^n$  bandas, en donde la población  $x_j$  regresa a una misma banda después de  $2^n$  pasos de  $j$ ; pero el punto al cual regresa en el interior de la banda es tan caótico como en  $r = 4$ .

Puede parecer que este comportamiento caótico es el mismo que  $r = 4$ . La diferencia es que en el caso de  $2^n$  bandas, el movimiento errático de los valores de  $x_j$  está confinado a un grupo de regiones, en cada banda. Además un valor de  $x_j$  retoma a una misma banda después de  $2^n$  pasos así se cambie el valor de  $r$ .

En la figura 2.25, se tiene una ampliación de la transición entre niveles discretos y bandas.

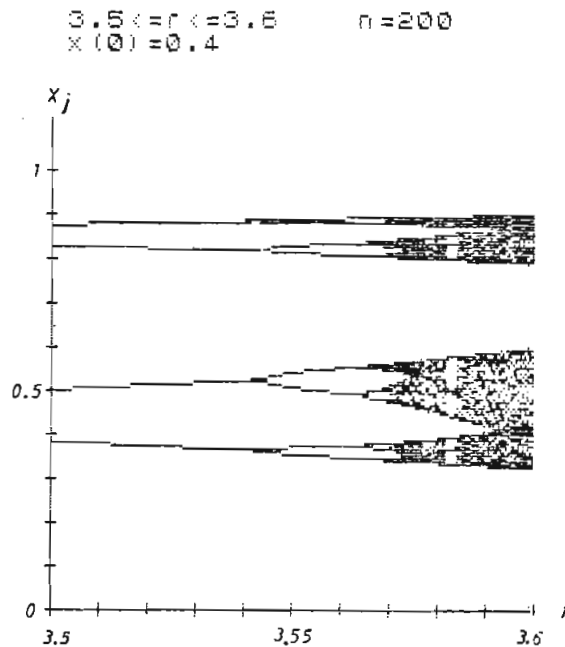


Fig. 2.25.- Detalle de la transición de niveles discretos a bandas  $3.5 \leq r \leq 3.6$ , en régimen permanente.

De esta manera, cuando  $r$  se aproxima a  $r_c$  por valores inferiores se tiene un desdoblamiento de niveles discretos hasta tener infinitos niveles para el valor de  $r_c$ .

Cuando  $r$  se aproxima a  $r_c$  por valores superiores, cada vez se obtienen más bandas como  $2^n$ , hasta tener  $2^\infty$  bandas cuando se tiene  $r_c$ . Esto sig

nifica que para  $r_c$ , existe una transición entre infinitos niveles discretos e infinitas bandas.

Este proceso de desdoblamiento sucesivo de bandas permite al sistema interpolar entre el caos a  $r = 4$  y  $2^\infty$  ciclos o niveles discretos a  $r_c$ .

Para demostrar una vez más la independencia de la condición inicial del sistema para  $j$  tendiendo a infinito, se ha graficado  $X_j = f(r)$  para otra condición inicial  $X_0$ , diferente a la del gráfico de la figura 2.24.

En la figura 2.26 se tiene el gráfico de  $X_j = f(r)$  para la condición inicial  $X_0 = 0.9$ .

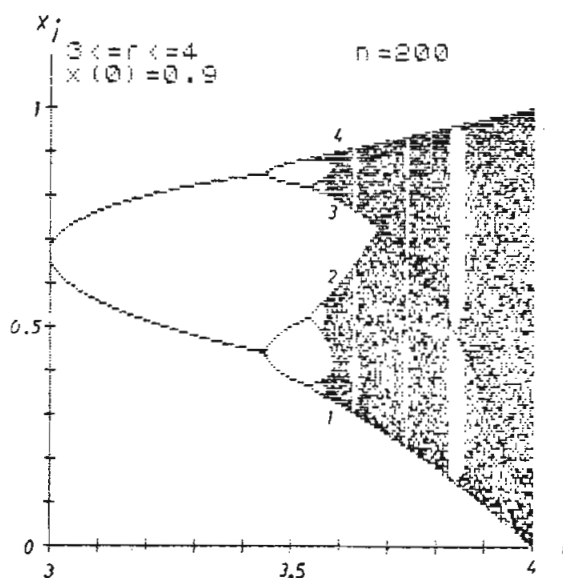


Fig. 2.26.- Gráfico de  $X_j = f(r)$  para la ecuación

$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$  con  $X_0 = 0.9$ . Se demuestra la independencia de la condición inicial  $X_0$ , en régimen permanente.

Comparando las figuras 2.24 y 2.26, se observa que no existe diferencia, debido a que es independiente de la condición inicial  $X_0$ . Entonces existe inicialmente una zona de transición hasta llegar a un estado permanente independiente de la condición inicial. La zona de transición depende de la condición inicial y es en el tiempo necesario para alcanzar el estado permanente.

Hay que aclarar que la independencia de la condición inicial para  $r > r_c$  se refiere a los intervalos en los cuales se tiene valores de  $X_j$ . A estos intervalos los hemos llamado bandas. El movimiento de los valores de  $X_j$  en el interior de las bandas no es independiente de la condición inicial.

Para la zona donde existe 4 bandas, vamos a analizar la secuencia de llenado de estas bandas. Se ha calculado los valores de  $X_j$  para el valor de  $r = 3.58$  y se han tabulado en la Tabla 2.3.

|          |                |   |
|----------|----------------|---|
| $X(179)$ | $=0.894888309$ |   |
| $X(180)$ | $=0.3387611$   |   |
| $X(181)$ | $=0.79950396$  |   |
| $X(182)$ | $=0.57385013$  |   |
| $X(183)$ | $=0.87558088$  |   |
| $X(184)$ | $=0.39000189$  |   |
| $X(185)$ | $=0.85168333$  |   |
| $X(186)$ | $=0.45222144$  |   |
| $X(187)$ | $=0.88682781$  |   |
| $X(188)$ | $=0.35930486$  |   |
| $X(189)$ | $=0.82413318$  |   |
| $X(190)$ | $=0.51887895$  |   |
| $X(191)$ | $=0.89372431$  |   |
| $X(192)$ | $=0.34003259$  | 1 |
| $X(193)$ | $=0.80338933$  | 3 |
| $X(194)$ | $=0.56547859$  | 2 |
| $X(195)$ | $=0.87965096$  | 4 |
| $X(196)$ | $=0.37899707$  | 1 |
| $X(197)$ | $=0.84258285$  | 3 |
| $X(198)$ | $=0.47484042$  | 2 |
| $X(199)$ | $=0.89273384$  | 4 |

Tabla 2.3.- Valores de  $X_j$  para  $r = 3.58$ , calculados por medio de la ecuación  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$ .

Hay cuatro bandas, que vamos a numerar de abajo hacia arriba como 1,2, 3,4, (figura 2.26). Según los valores de la tabla 2.3, la secuencia de llenado de los niveles es 1 a 3 a 2 a 4, que es la misma secuencia de llenado de los niveles discretos en el caso de una oscilación periódica de  $4T$ .

Los gráficos 2.24 y 2.26, han sido realizados con valores de  $X_j$ , calculados de la ecuación  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$ , utilizando toda la precisión del computador.

El computador representa internamente un valor numérico con un número finito de bits y también realiza las operaciones aritméticas con finitos bits y en el caso de utilizar toda la precisión del computador se ha utilizado el número máximo de bits posibles tanto para representar un número, como para realizar operaciones aritméticas. Como los valores de  $X_j$  son inferiores a uno, se ha realizado las operaciones con 9 cifras decimales en el caso de usar la máxima precisión.

Esto significa que todas las cifras decimales más allá de las 9, después de una operación aritmética se pierden, debido a que no se puede representar internamente en el computador por tener memoria finita.

Para observar el efecto de la precisión del computador, se han realizado varios experimentos, variando la precisión por medio de la disminución de las cifras decimales.

Esto se ha simulado en los programas, quitando las cifras decimales más allá de las establecidas para una precisión dada. Esto se ha rea

lizado después de cada cálculo de un  $X_j$ .

Los experimentos se realizaron para 7,5,3,2 y 1, cifras decimales. Es decir consideramos que un número puede ser representado máximo por las cifras decimales antes indicadas, después de realizar una iteración de un  $X_j$ .

Para el caso de 7 y 5 cifras decimales, no se observó diferencia con los resultados obtenidos en las figuras 2.24 y 2.26, por lo cual no lo presentamos en este trabajo.

En las figuras 2.27, 2.28 y 2.29, se muestran los gráficos de  $X_j = f(r)$  para las precisiones de 3, 2 y 1 cifras respectivamente. La precisión de 3 cifras significa que después del cálculo de un  $X_j$ , eliminamos las cifras decimales más allá de las milésimas.

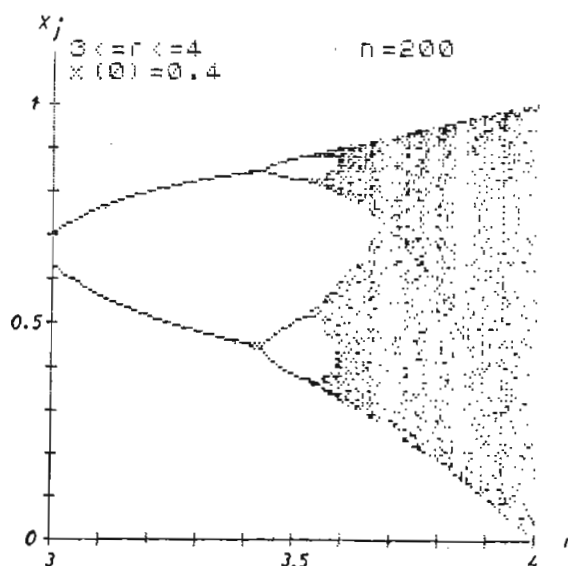


Fig. 2.27.- Gráfico de  $X_j = f(r)$ , considerando que después del cálculo de un  $X_j$ , se elimina las cifras decimales más allá de las milésimas.



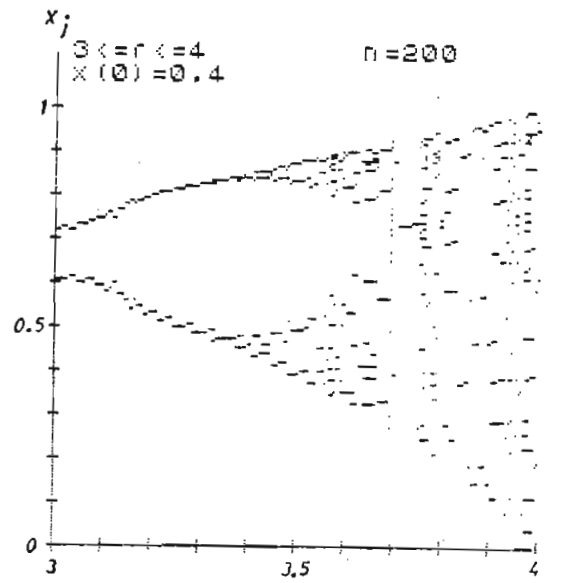


Fig. 2.28.- Gráfico de  $X_j = f(r)$ , considerando que después del cálculo de un  $X_j$ , se elimina las cifras decimales más allá de las centésimas.

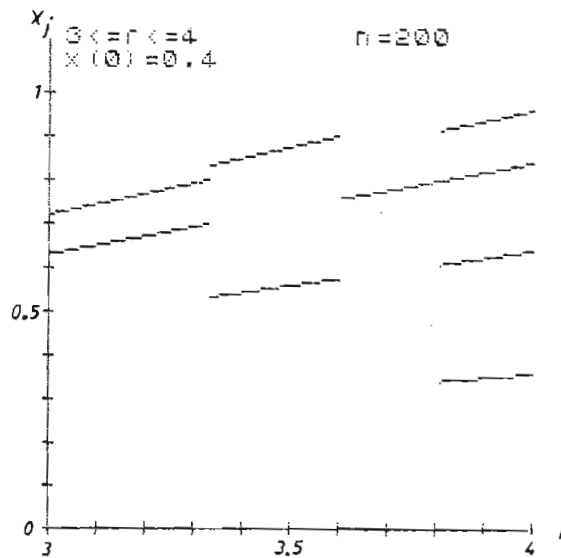


Fig. 2.29.- Gráfico de  $X_j = f(r)$ , considerando que después del cálculo de un  $X_j$ , se elimina las cifras decimales más allá de las décimas.

Primeramente se observa en la figura 2.28, que los puntos de desdoblamiento de los niveles varían y se nota especialmente en la figura 2.29 que el caos desaparece.

Esto quiere decir que si perdemos precisión durante el cálculo de los  $X_j$ , eliminamos el caos y tendremos un sistema determinista.

Esto se debe a que en un instante  $j$  tenemos un error, y al eliminar cifras decimales, estamos redondeando el error y por lo tanto tendremos un régimen determinista. Como el error es pequeño, se encuentra en las últimas cifras decimales y al ser redondeadas estas cifras decimales, el error se atenúa.

Para observar más claramente el cambio de los puntos de desdoblamiento vamos a observar un detalle del gráfico de  $X_j = f(r)$  para el intervalo  $3.4 \leq r \leq 3.6$ .

En la figura 2.30, se muestra el gráfico  $X_j = f(r)$  con toda la precisión del computador.

Comparando el gráfico de la figura 2.30 con el gráfico de la figura 2.31, en el cual se tiene una precisión de 3 cifras decimales, se observa claramente un desplazamiento de los puntos de desdoblamiento, pero se observa una patrón de comportamiento todavía igual.

En el caso de 1 cifra decimal, el patrón de comportamiento ya es completamente diferente, teniéndose 2 niveles discretos a lo largo de todo el intervalo  $3.4 \leq r \leq 3.6$ . En este caso la respuesta del sistema

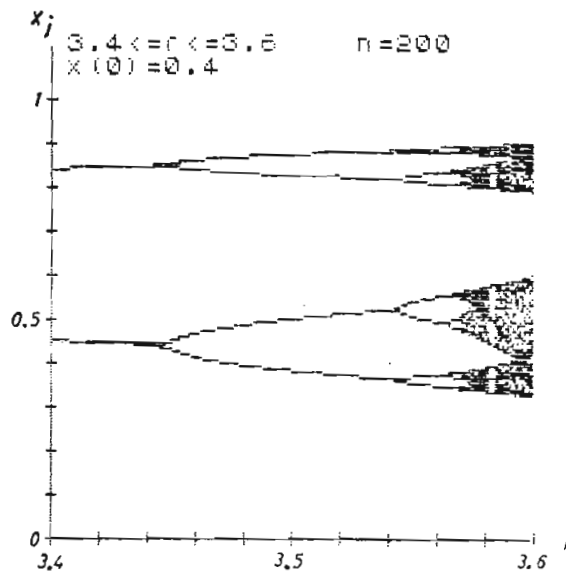


Fig. 2.30.- Gráfico  $X_j = f(r)$  para  $3.4 \leq r \leq 3.6$ .

Utilizando toda la precisión del computador.

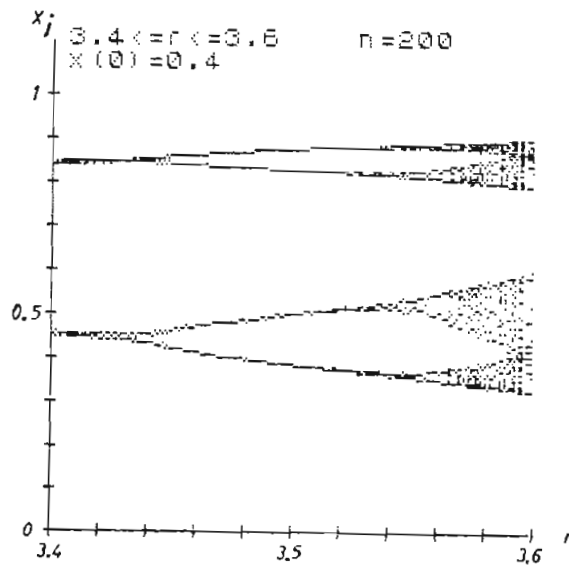


Fig. 2.31.- Gráfico de  $X_j = f(r)$  para  $3.4 \leq r \leq 3.6$ .

Utilizando 3 cifras decimales.

es completamente determinista. Esto se muestra en la figura 2.32.

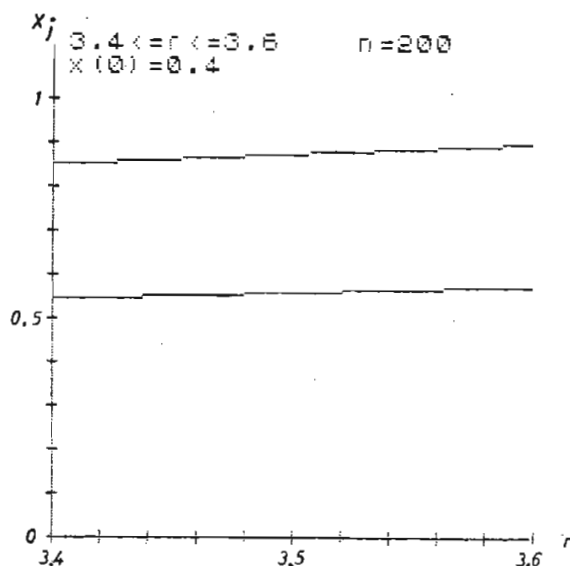


Fig. 2.32.- Gráfico  $X_j = f(r)$  para  $3.4 \leq r \leq 3.6$ .

Cálculos con 1 cifra decimal.

Para observar el determinismo al variar la precisión, en la figura 2.33, se ha graficado  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.6$ , en el cual se tiene movimiento caótico de 2 bandas, en el cual no se puede predecir en que punto de cada banda caerá el próximo valor de  $X_j$ .

Ahora para  $r = 3.6$  y variando la precisión a 3 cifras, en la figura 2.34, se observa como se llega a una oscilación de período  $4T$  en un régimen permanente. Esto quiere decir que hemos variado los puntos de desdoblamiento al introducir un error en cada iteración.

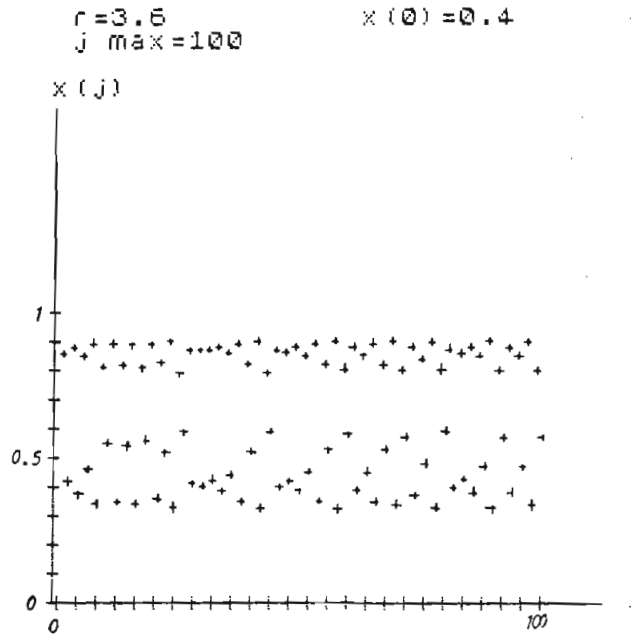


Fig. 2.33.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.6$ .

Toda la precisión del computador.

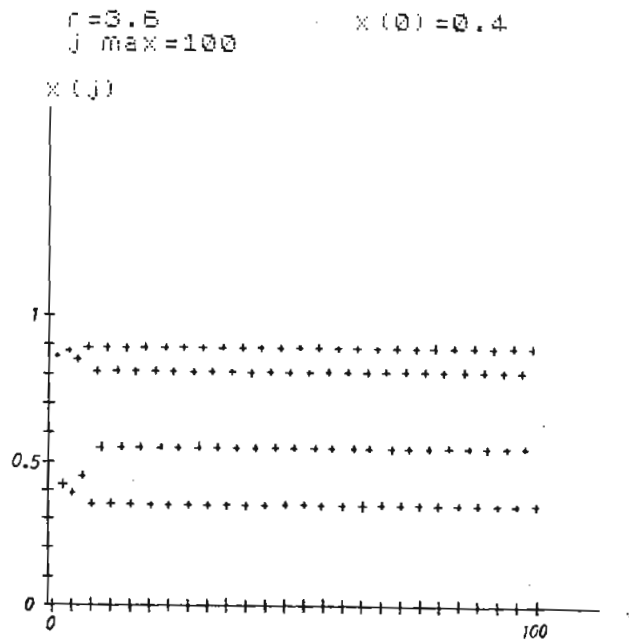


Fig. 2.34.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.6$ .

Precisión de 3 cifras decimales.

## 2.4. ERRORES. PROPAGACION DE ERRORES.

En la parte 2.2, de este capítulo se realizó un análisis para el caso de  $r = 4$ , en el cual se demostraba que el caos total se debía a que los errores crecen en forma exponencial.

Partiendo de esto, se considera necesario realizar un estudio de como se comporta el error para diferentes valores de  $r$  y así demostrar por que el sistema se comporta en forma laminar y turbulenta.

Vamos a realizar varios experimentos en los cuales vamos a introducir un error inicial en la condición inicial  $X_0$  y observar como se propaga el error con el aumento de  $j$ .

Primeramente vamos a tomar un valor de  $r$  en el intervalo en el cual para régimen permanente el valor de  $X_j$  tiende a cero. Tomamos un valor de  $r = 0.5$  y graficamos la secuencia de los  $X_j$  para 3 condiciones iniciales  $X_0 : 0.9, 0.6$  y  $0.2$ . Esto se muestra en la figura 2.35. De este gráfico se observa que si existe un error inicial, éste se atenúa con el aumento de  $j$ , tendiendo, para los 3 valores de  $X_0$ , a cero.

Ahora tomamos un valor de  $r$  en el intervalo en el cual el valor de  $X_j$ , cuando  $j$  tiende a infinito, tiende a un valor estable diferente de cero e igual a  $1 - \frac{1}{r}$ .

En la figura 2.36 tenemos dibujado los valores de  $X_j$  para  $r = 2$  y para 3 condiciones iniciales  $X_0 : 0.9, 0.6$  y  $0.2$ . Para  $r = 2$  el valor de  $X_j$  en régimen permanente es igual a  $0.5$ . En el gráfico se observa co

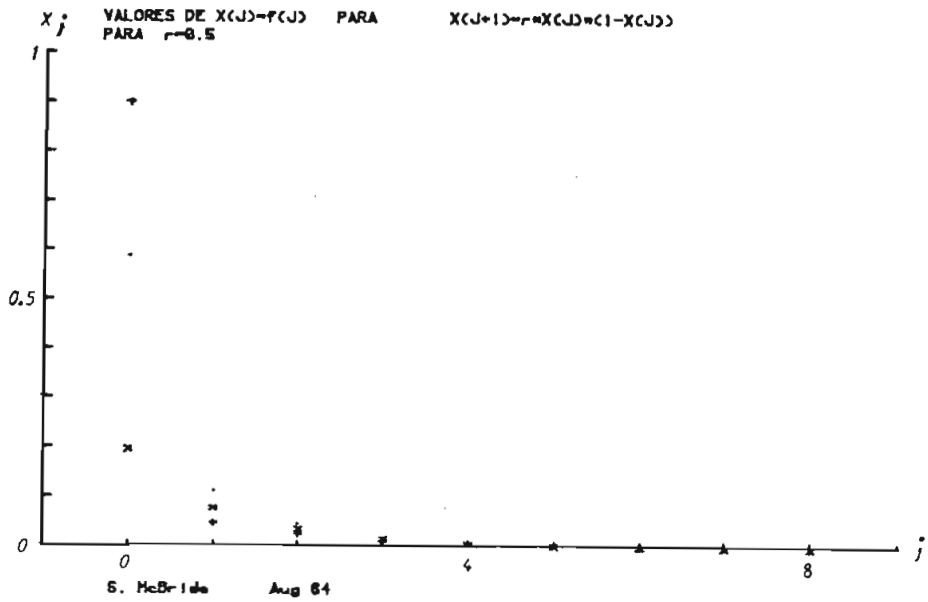


Fig. 2.35.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para 3 condiciones  
iniciales  $X_0$ : 0.9, 0.6 y 0.2.  
Se observa como se propaga el error.

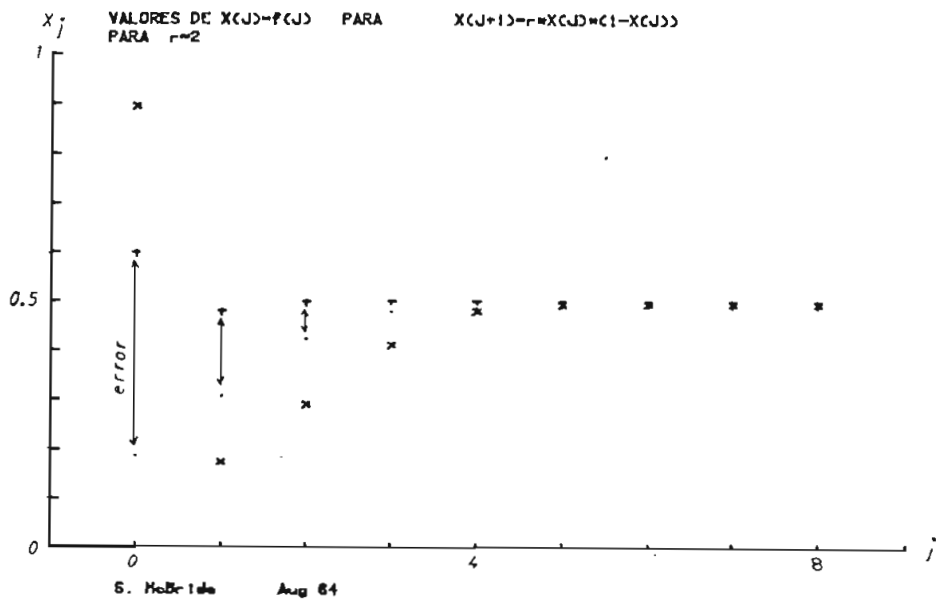


Fig. 2.36.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 2$  y 3 condiciones  
iniciales  $X_0$ : 0.9, 0.6 y 0.2. Para las condi-  
ciones iniciales, se tiende a un valor de  $X_j =$   
0.5 en régimen permanente.

mo para las 3 condiciones iniciales después de un  $j$  suficientemente grande se llega al mismo valor de  $X_j$  final de 0.5. Una vez más se observa una atenuación de errores con el aumento de  $j$ .

En los dos casos anteriores se ha considerado errores grandes y se observa que estos pueden ser atenuados. Existe un error adicional que se introduce en cada iteración y es el debido al cálculo aritmético que se realiza en el computador. Entonces este error adicional también es atenuado con el aumento de  $j$ .

Tomamos ahora un valor de  $r$  en el intervalo en el cual se tienen 2 ciclos o una oscilación periódica de  $2T$ . Esto se muestra en la figura 2.37 en donde se tiene la secuencia de los  $X_j$  para dos condiciones iniciales  $X_0$ : 0.6 y 0.55. Al igual que en los dos casos anteriores, después de un número de iteraciones, se llega a la misma periodicidad de  $2T$ , o sea existe la atenuación de errores.

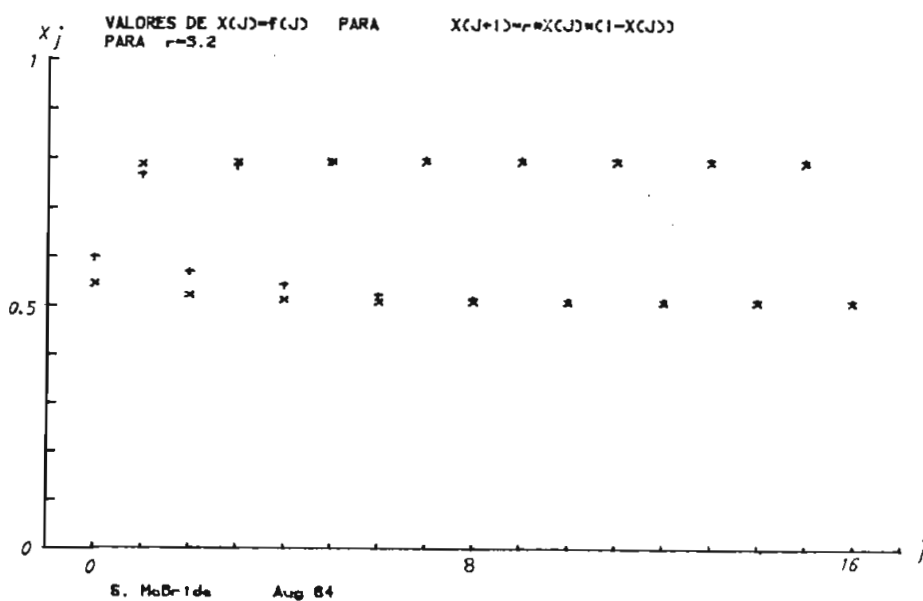


Fig. 2.37.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r=3.2$  y condiciones iniciales  $X_0$ : 0.6 y 0.55.



Para  $r = 3.2$  se ha tomado un error inicial más pequeño que en los casos anteriores ya que se observó en experimentos realizados que con errores mayores, se llegaba a la misma atenuación de errores, pero existía un cambio de fase de la oscilación periódica en régimen permanente. Por lo cual se utiliza un error inicial más pequeño para evitar el cambio de fase y así poder observar graficamente la atenuación de errores más objetivamente.

Vamos a indicar un experimento más de atenuación de errores para una oscilación de 16 ciclos, en el cual por las razones antes indicadas, tomaremos un error inicial muy pequeño. Para este caso se ha graficado para  $r = 3.5668$  y condiciones iniciales  $X_0: 0.5$  y  $0.51$ . Esto se encuentra graficado en la figura 2.38.

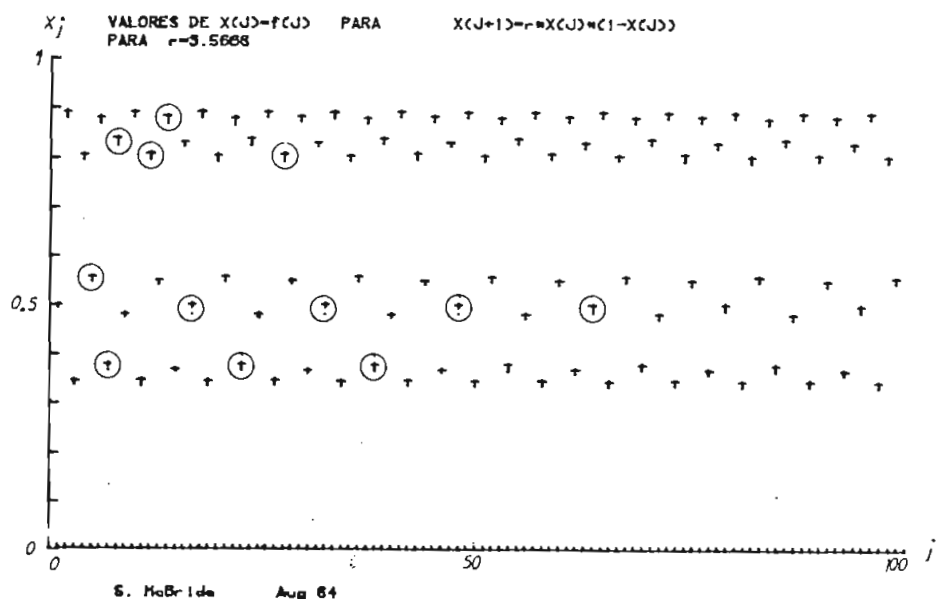


Fig. 2.38.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.5668$  y condiciones iniciales  $X_0: 0.5$  y  $0.51$ . En círculos se destaca el error que es muy pequeño.

En la figura 2.38, se ha tomado un error pequeño para evitar el cambio de fase, por lo cual el error es muy pequeño y no se destaca en el gráfico; para esto se ha señalado con círculos los puntos en los cuales se aprecia el error más claramente. Para valores de  $j$  grandes, el error se atenúa y los puntos y cruces se confunden en un solo punto.

Para observar de mejor forma la atenuación de los errores hemos graficado el error en función de  $j$  para varios valores de  $r$ .

Para el valor de  $r = 2$  se ha graficado el error en función de  $j$  para un error inicial del 25% y  $X_0 = 0.4$ . Esto se tiene en la figura 2.39, en donde se observa claramente como el error se atenúa en los primeros 2 valores de  $j$  hasta llegar a ser cero.

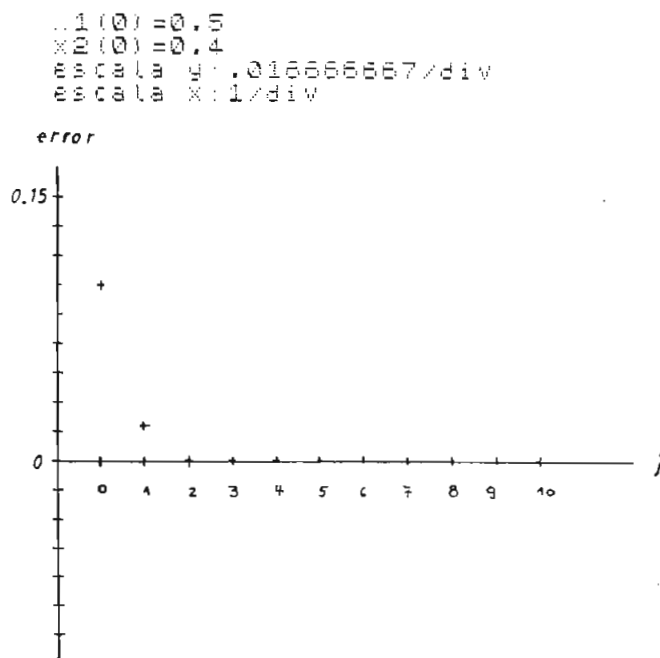


Fig. 2.39.- Gráfico del error en función de  $j$  para un  $r = 2$  y error inicial del 25%,  $X_0 = 0.4$ .

Ahora vamos a observar el error para la oscilación periódica de  $16T$  en función del parámetro  $j$ . Se tiene un error inicial del 2% para  $X_0 = 0.5$  y en la figura 2.40 se observa que este se atenúa hasta llegar a cero en más o menos 100 iteraciones de  $j$ .

Esto da la idea de que los errores se atenúan en mayor número de iteraciones cuando aumenta el valor de  $r$  y nos vamos acercando a una situación caótica.

Comparando los gráficos del error de las figuras 2.40 y 2.39, se observa que para la oscilación de 16 ciclos, la atenuación se realiza en forma irregular formando aparentemente varias curvas de atenuación del error.

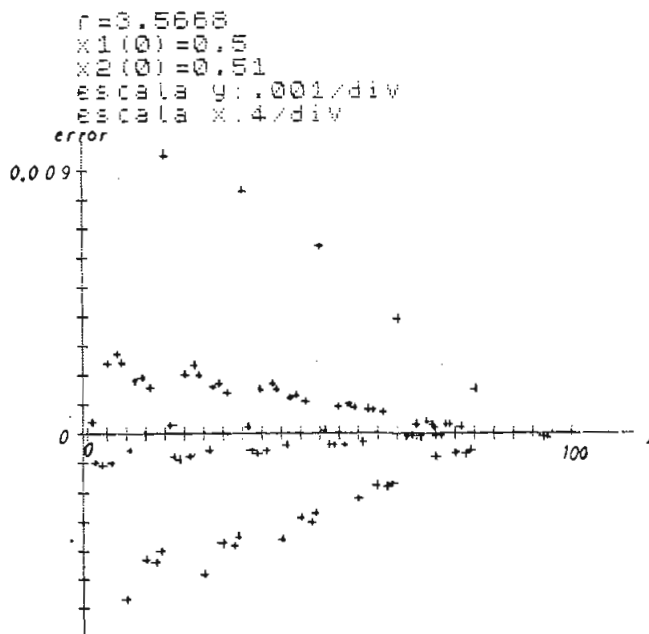


Fig. 2.40.- Gráfico del error en función de  $j$ ,  
para  $r = 3.5668$  y un error inicial  
del 2% para  $X_0 = 0.5$ .

Anteriormente se introdujo la idea de que el valor de  $j$  para atenuar un error dependía del valor de  $r$ .

Para demostrar esta afirmación se ha realizado un gráfico del  $j$  para reducir el error inicial de 1% en un factor de 100, es decir reducir el error a 0.01%, en función del parámetro  $r$ .

Para la realización del gráfico se ha tomado un  $X_0 = 0.5$  y el error  $i$  inicial de 1%. Para cada valor de  $r$  se calcula el error para cada  $j$  y se compara hasta que este sea inferior o igual al error del 0.01% y de esta manera se encuentra el valor de  $j$  que reduce el error en el factor de 100.

En la figura 2.41, se tiene este gráfico, en el cual se observa claramente como el valor de  $j$  que reduce el error en el factor de 100, aumenta en función del parámetro  $j$ . El valor de  $j$  tiende a infinito justamente cuando  $r$  tiende al valor crítico de  $r$  llamado  $r_c$  que es igual a  $r_c = 3.5699$ .

Entonces se puede afirmar que para valores inferiores a  $r_c$  el error  $i$  inicial se atenua, en incluso el error de cálculo es atenuado. También puede comentar que el tiempo en el cual el error se atenúa depende del valor de  $r$ , siendo el tiempo de atenuación infinito cuando el valor de  $r$  tiende a  $r_c$ . En este caso estamos considerando a la variable  $j$  como la variable tiempo, ya que en el modelo de población, significa la población para cada año.

En esta parte se ha hablado de que el error de cálculo en cada itera-

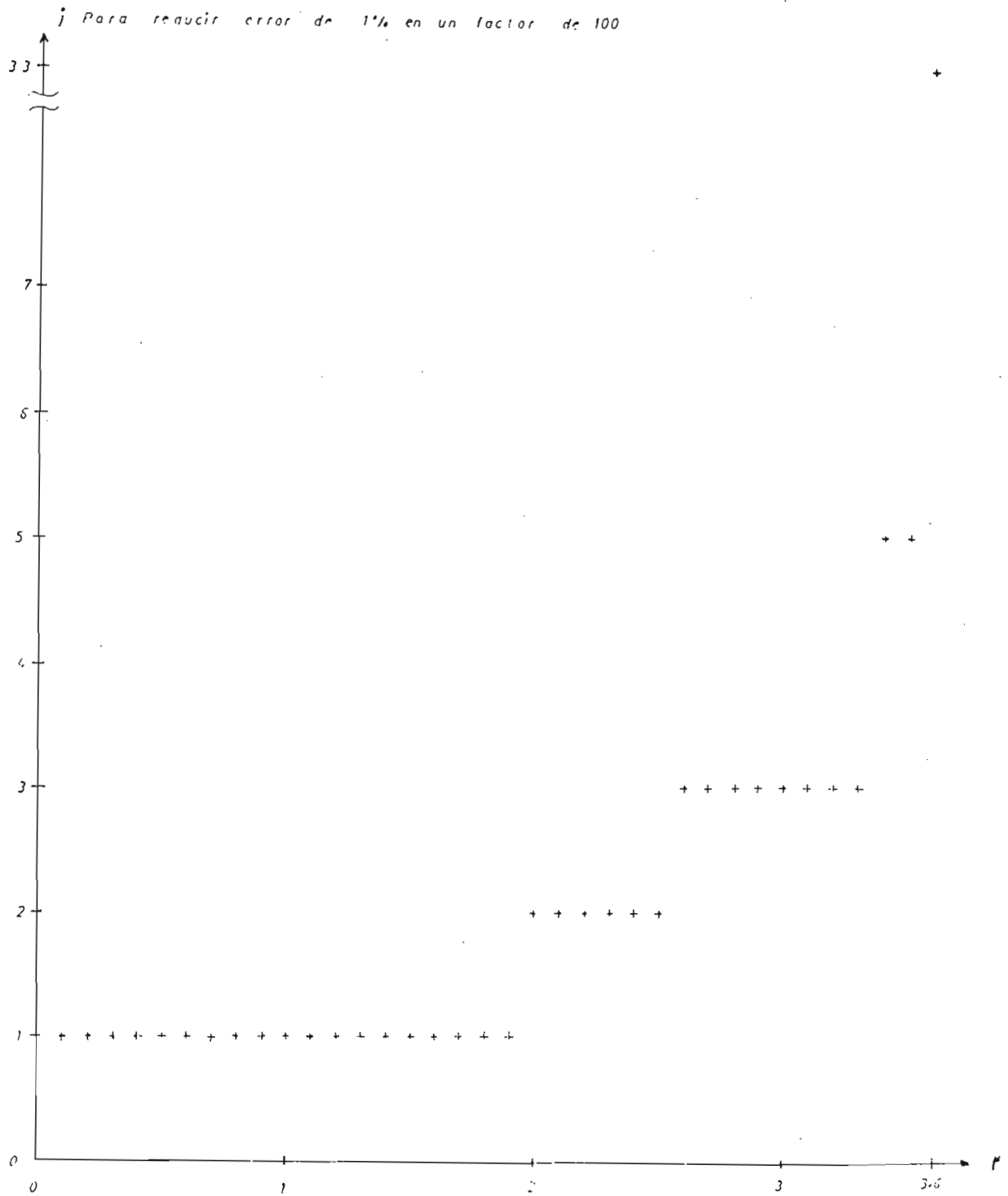


Fig. 2.41.- Gráfico del  $j$  para reducir el error de 1 % en un factor de 100 en función del parámetro  $r$ .  $X_0$ : 0.5, 0.505.

ción de  $j$  es atenuado como se ha demostrado.

En la parte 2.3, de este capítulo se trabajó con diferentes precisiones de computación, eliminando las cifras decimales y se observó que se cambiaban los puntos de desdoblamiento. Esto se explica porque el error que se introduce es demasiado grande como para ser atenuado por el sistema dinámico descrito por la ecuación  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$ . Por esta razón se cambia su comportamiento. El error es demasiado grande porque se introduce después de cada iteración de  $j$ . Además se observó que el comportamiento cambiaba cuando se eliminaban las cifras de cimales más allá se las milésimas.

Ahora vamos a analizar que sucede para valores mayores a  $r_c$ .

Primeramente graficamos la función  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.58$  e introduciendo un error inicial del 0.1% para la condición inicial  $X_0 = 0.5$ . Entonces tenemos en la figura 2.42, los gráficos de  $X_j = f(j)$  para  $X_0 = 0.5$  y 0.5005 que corresponde al error del 0.1%.

Inicialmente se confunden los puntos y cruces por ser el error demasiado pequeño; pero después de unas cuantas iteraciones de  $j$ , el error comienza a crecer de una manera rápida como se observa en la figura.

Para observar más claramente el crecimiento del error, se ha graficado el error en función del parámetro  $j$  para  $r = 3.58$  en la figura 2.43. En este gráfico se ve como el error para valores pequeños de  $j$  es cero y sigue creciendo a medida que aumenta  $j$ .

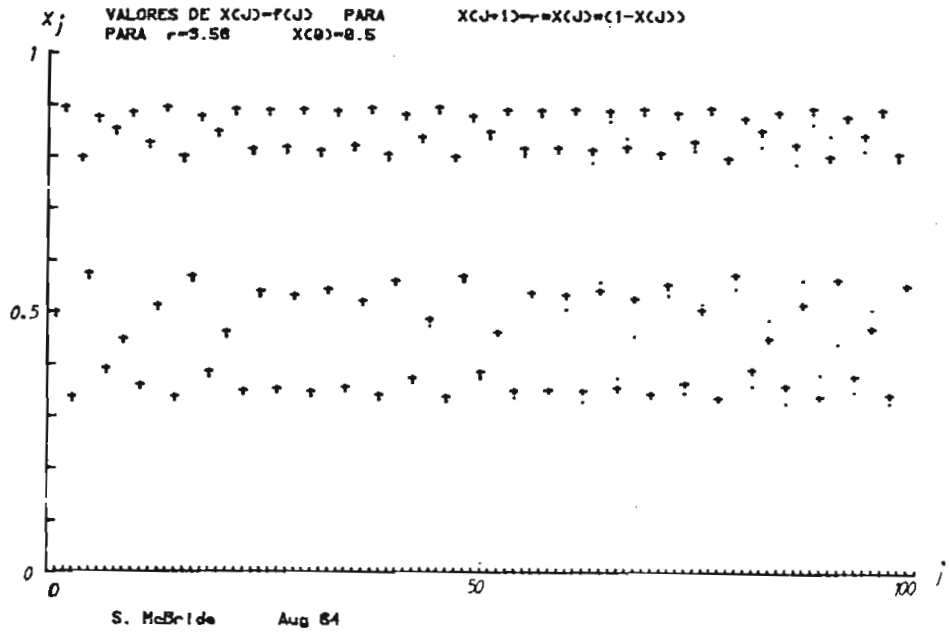


Fig. 2.42.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.58$  y condiciones iniciales  $X_0$ : 0.5 y 0.5005. Se observa un crecimiento del error.

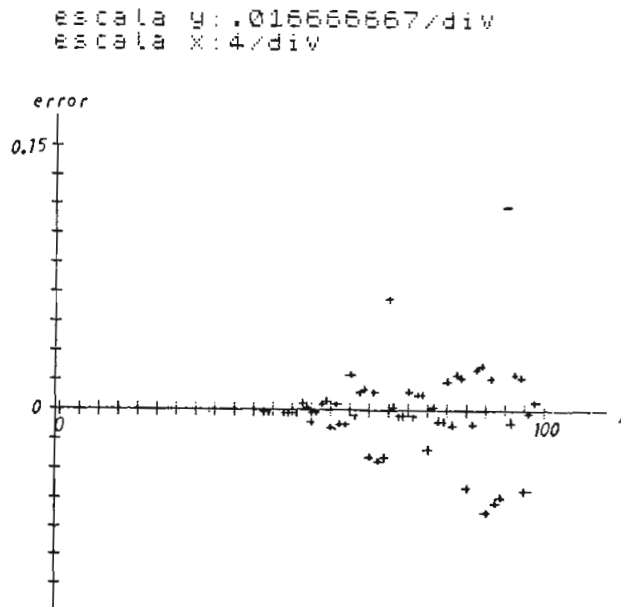


Fig. 2.43.- Gráfico del error en función de  $j$ . Para  $r = 3.58$  y error inicial de 0.1%.  $X_0$ : 0.5, 0.5005.

Ahora observamos el error para el valor de  $r = 3.7$  y condiciones iniciales  $X_0$ : 0.5 y 0.5005, que equivale a un error inicial del 0.1%. En este caso el error crece más rápidamente con valores inferiores de  $j$  que en relación al caso anterior. Esto se observa en la figura 2.44.

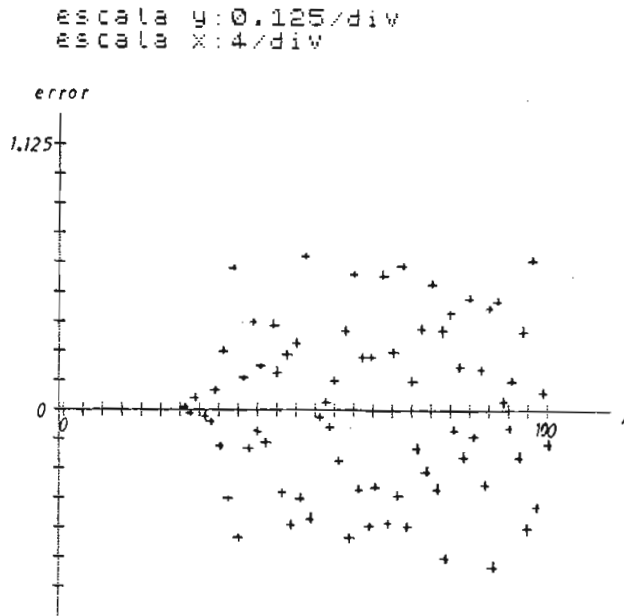


Fig. 2.44.- Gráfico del error en función de  $j$ .

Para  $r = 3.7$  y un error inicial del 0.1%.

Condiciones iniciales 0.5 y 0.5005.

De esto se puede decir que el error crece más rápidamente mientras mayor es el valor de  $r$ .

Se quiere saber ahora el efecto que tiene la condición inicial, manteniendo el mismo porcentaje de error inicial del 0.1%.

Se ha realizado para esto experimentos para  $r = 3.7$  con varias condiciones iniciales. Primeramente se tiene en la figura 2.45.a el gráfico del error en función de  $j$  para las condiciones iniciales  $X_0$ : 0.6



y 0.6006, que corresponden a un error inicial del 0.1%.

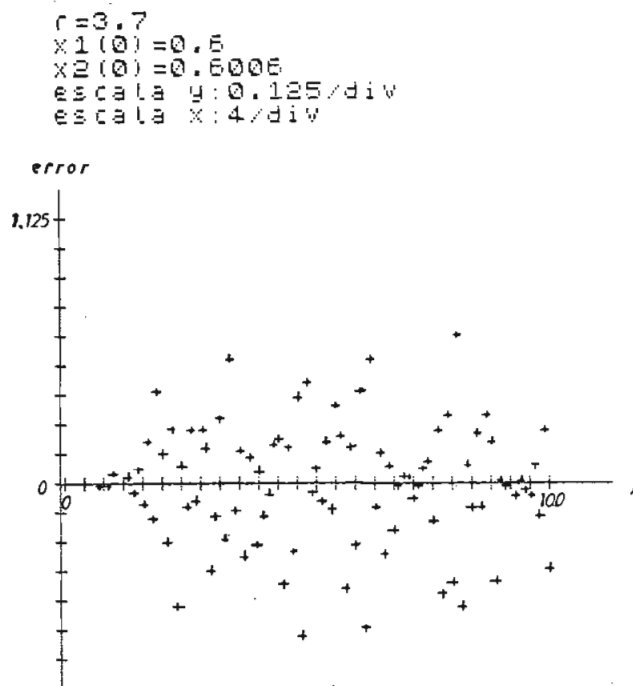


Fig. 2.45.a.- Gráfico del error en función de  $j$ .

$r = 3.7$ . condiciones iniciales

0.6 y 0.6006, error de 0.1 %.

Ahora en la figura 2.45.b, se tiene el gráfico del error en función de  $j$  para las condiciones iniciales  $X_0$ : 0.7 y 0.7007.

Comparando los resultados de las figuras 2.44, 2.45.a y 2.45.b, se observa en cada caso que varía el punto en el cual el error crece en forma rápida. Para la condición inicial de 0.5, el valor de  $j$  en el cual el error crece rápidamente es más o menos 24, mientras que para la condición inicial 0.7 el valor de  $j$  es 8. Esto es manteniendo el mismo error inicial del 0.1%.

De esto se observa que existe un comportamiento diferente de los erro-

res dependiendo de la condición inicial.

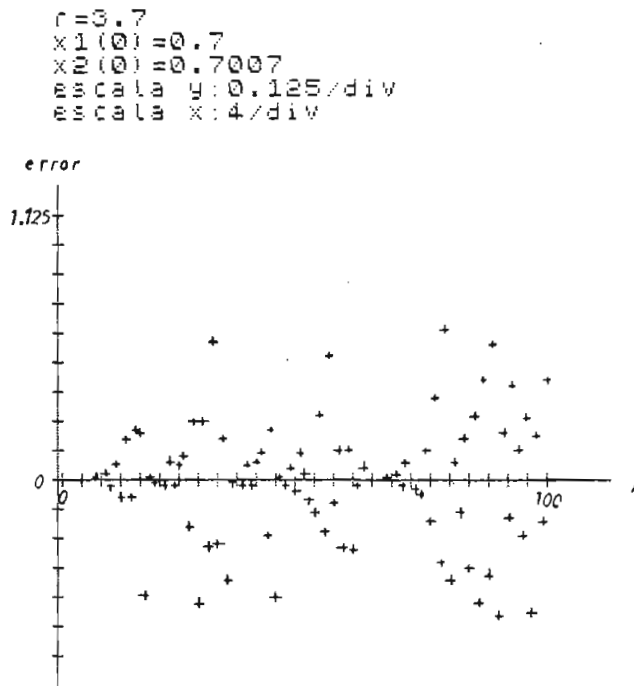


Fig. 2.45.b.- Gráfico del error en función de  $j$ .

Para  $r = 3.7$ , condiciones iniciales

0.7 y 0.7007, error de 0.1 %.

Entonces para valores de  $r$  mayores a  $r$  crítico, los errores crecen y para ver claramente esto se tiene la figura 2.46, en la cual se ha graficado el  $j$  necesario para aumentar el error de 0.0001% a 0.1% en función de  $r$  para lo cual se ha tomado las condiciones iniciales  $X_0$ : 0.5 y 0.5000005. Este gráfico se lo ha realizado calculando para cada valor de  $r$  el error y comparando hasta que el error crece en el porcentaje indicado.

De la observación del gráfico se ve que cuando  $r$  tiende a  $r$  crítico por  $r_c^+$ , el valor de  $j$ , para aumentar el error de 0.0001% a 0.1%, tien

da a infinito.

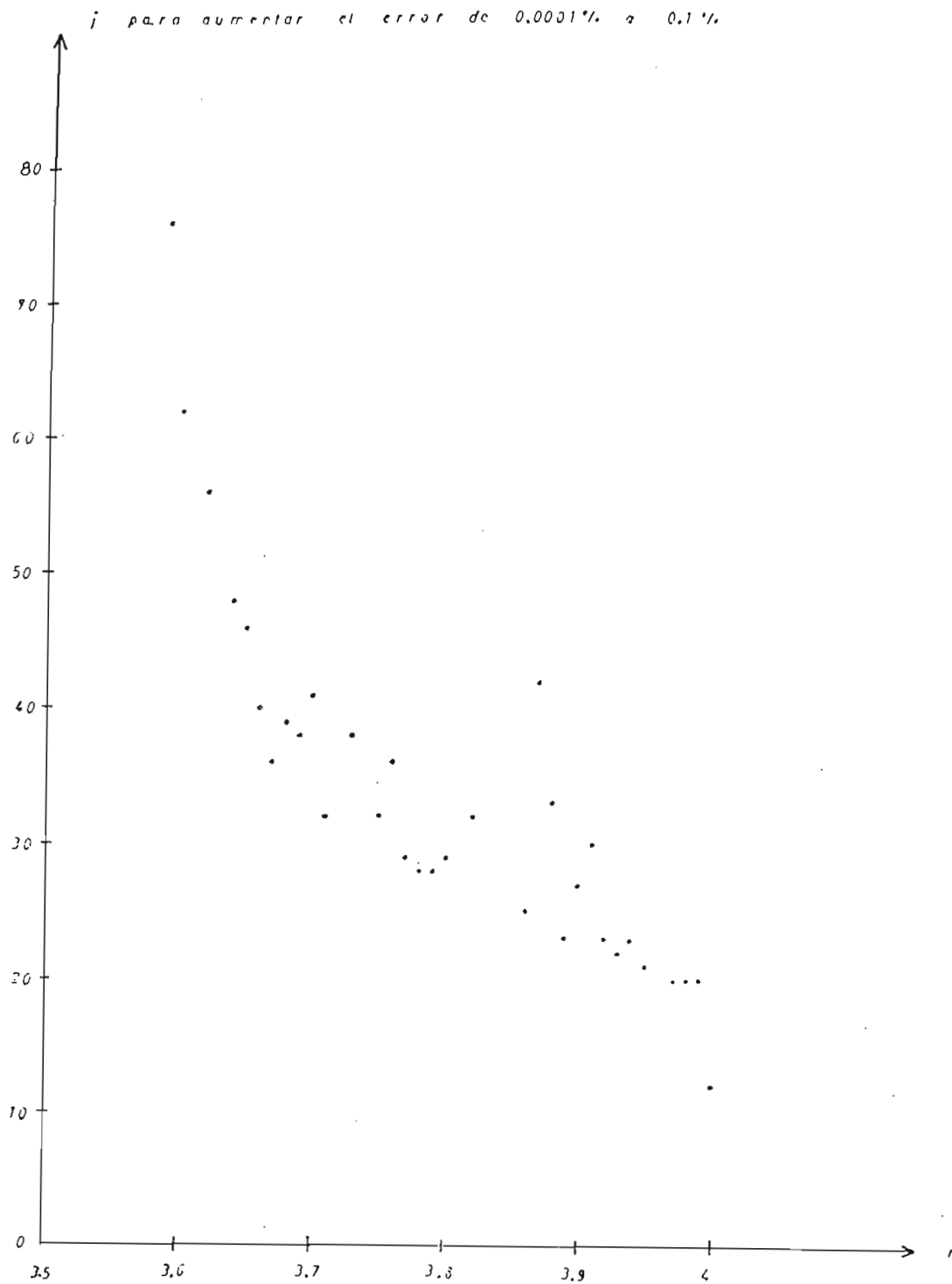


Fig. 2.46.- Gráfico de  $j$  para aumentar el error de 0.0001% a 0.1% en función de  $r$  para  $X_0$ : 0.5 y 0.5000005.

Esto quiere decir que para que el error aumente, se necesita tiempo in finito o lo que es lo mismo infinitas iteraciones de  $j$ . A medida que aumenta el valor de  $r$ , el valor de  $j$  necesario para aumentar el error decrece en forma no muy regular como se indica.

El decrecimiento del  $j$  necesario para aumentar el error significa que mientras aumenta el valor de  $r$ , el error crece en un tiempo cada vez menor o lo que es lo mismo en un menor número de iteraciones de  $j$ .

Entonces como conclusión importante de este análisis es que para  $r$  me nores a  $r_c$ , los errores se atenúan y estamos en presencia de un régi- men determinista. Para  $r$  mayores a  $r_c$ , los errores se amplifican y es tamos en presencia de un régimen caótico o turbulento. Del análisis a nalítico para  $r = 4$  tratado en la parte 2.2 de este capítulo, se ve que es razonable la explicación de que el error crece en forma exponen cial como  $2^j \epsilon$ . Además este error se reduce al intervalo  $(0,1)$  por me dio del coseno trigonométrico.

Entonces sea  $(a, b)$  el intervalo que pueden ocupar los valores de  $X_j$ , vamos a definir lo que se entiende por caos:

Para un valor inicial  $X_0$  que tiene un error  $\pm \Delta X_0$ , existe un  $j$  para el  
cual los valores de  $X_j$  pueden estar en cualquier parte del intervalo  
 $(a,b)$ .

Anteriormente se dijo que para la ecuación de diferencias  $\theta_{j+1} = 2 \theta_j$ , si se tiene un error inicial  $\Delta \theta_0$  en la especificación del valor ini cial  $\theta_0$ , el error después de  $j$  iteraciones tendrá la forma

$$\Delta\theta_j = 2^j \Delta\theta_0$$

Esto quiere decir que existen ecuaciones de diferencias que propagan los errores en forma exponencial como la anteriormente indicada.

Pero también existen ecuaciones de diferencias que no propagan el error en forma exponencial como es por ejemplo

$$\theta_{j+1} = \theta_j + a$$

en donde a es un número irracional.

Su solución será:

$$\theta_j = n a + \theta_0$$

Debido a que a es un número irracional, la iteración j está perfectamente definida.

En este caso si se tiene un error inicial  $\Delta\theta_0$  en la condición inicial  $\theta_0$ , después de j iteraciones se tendrá:

$$\Delta\theta_j = \Delta\theta_0$$

Se puede ver que no existe un crecimiento del error con j.

De esto se puede concluir que existen diversos tipos de ecuaciones de diferencias que propagan los errores en forma diferente.

## 2.5. ANALISIS DEL SISTEMA DINAMICO CON AUMENTO DEL PARAMETRO $n$ .

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)^n.$$

Para generalizar el problema descrito en la ecuación (2.7), vamos a introducir un parámetro adicional y realizar experimentos para observar su respuesta con la variación de los parámetros  $r$  y  $n$ .

La ecuación propuesta para este análisis es la siguiente:

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)^n \quad (2.61)$$

Vamos a analizar la ecuación y obtener el valor de  $X_j$  para el cual se tiene el máximo de la función y además ver el valor de la segunda derivada en el punto del máximo.

La primera derivada de la función de la ecuación (2.61) será igual a:

$$\frac{d X_{j+1}}{d X_j} = r [ - X_j n (1 - X_j)^{n-1} + (1 - X_j)^n ] \quad (2.62)$$

de donde se tiene

$$\frac{d X_{j+1}}{d X_j} = r [ (1 - X_j)^n - n X_j (1 - X_j)^{n-1} ] \quad (2.63)$$

Para obtener el punto donde se encuentra el máximo, igualamos la primera derivada a cero

$$\frac{d X_{j+1}}{d X_j} = 0 \quad (2.64)$$

6

$$r [(1 - X_j)^n - n X_j (1 - X_j)^{n-1}] = 0 \quad (2.65)$$

de donde se tiene

$$(1 - X_j)^n - n X_j (1 - X_j)^{n-1} = 0 \quad (2.66)$$

Se tiene una primera solución para  $X_j = 1$ , pero no es interesante. Para obtener una segunda solución podemos simplificar (2.66) de la siguiente manera:

$$(1 - X_j) - n X_j = 0 \quad (2.67)$$

de donde

$$1 - (1+n) X_j = 0 \quad (2.68)$$

Entonces la solución será:

$$X_{j\text{máx}} = \frac{1}{1+n} \quad (2.69)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

El valor de  $X_{j+1}$  en el máximo será igual a:

$$x_{j+1\text{m}\acute{a}\text{x}} = r \frac{1}{(1+n)} \left(1 - \frac{1}{(1+n)}\right)^n \quad (2.70)$$

Calculando para algunos valores de n los valores del máximo tendremos:

Utilizamos las ecuaciones 2.69 y 2.70.

| n | $x_{j\text{m}\acute{a}\text{x}}$ | $x_{j+1\text{m}\acute{a}\text{x}}$ |
|---|----------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 0.5                              | $\frac{r}{4}$                      |
| 2 | $\frac{1}{3}$                    | $\frac{4}{27} r$                   |
| 3 | $\frac{1}{4}$                    | $\frac{27}{256} r$                 |

Tabla 2.4.- Valores del punto donde ocurre el máximo y su valor máximo. Función  $x_{j+1} = f(x_j)$ .

Ahora analizaremos la segunda derivada de la ecuación (2.61).

La segunda derivada estará dada por la ecuación:

$$\frac{d^2 x_{j+1}}{d x_j^2} = r \left[ -n (1 - x_j)^{n-1} - n (1 - x_j)^{n-1} + n(n-1) x_j (1 - x_j)^{n-2} \right]$$

de donde

$$\frac{d^2 x_{j+1}}{d x_j^2} = r \left[ n(n-1) x_j (1 - x_j)^{n-2} - 2n (1 - x_j)^{n-1} \right] \quad (2.71)$$



Realizando un trabajo algebraico se puede reducir la expresión (2.71)

a:

$$\frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} = r n (1 - X_j)^{n-2} [ (n-1) X_j - 2 (1 - X_j) ] \quad (2.72)$$

de donde se obtiene

$$\frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} = r n (1 - X_j)^{n-2} [ (n+1) X_j - 2 ] \quad (2.73)$$

Evaluando la segunda derivada en el punto donde ocurre el máximo tendremos:

$$\left. \frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} \right|_{X_{j\text{máx}}} = r n \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n-2} \left[ (n+1) \frac{1}{(n+1)} - 2 \right] \quad (2.74)$$

6

$$\left. \frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} \right|_{X_{j\text{máx}}} = r n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-2} (-1) \quad (2.75)$$

De la expresión (2.75) se observa que en el máximo, la segunda derivada es menor que cero para cualquier valor de n.

$$\left. \frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} \right|_{X_{j\text{máx}}} < 0 \quad (2.76)$$

Entonces en relación a la ecuación  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)^n$  podemos obtener las siguientes propiedades:

Podemos escribir la ecuación como  $X_{j+1} = r g(X_j)$  en donde  $g(X_j) = X_j (1 - X_j)^n$ .

- La función  $g(X_j)$  evaluada en cero es igual a la función  $g(X_j)$  evaluada en uno y tiene como valor cero.

$$g(0) = g(1) = 0$$

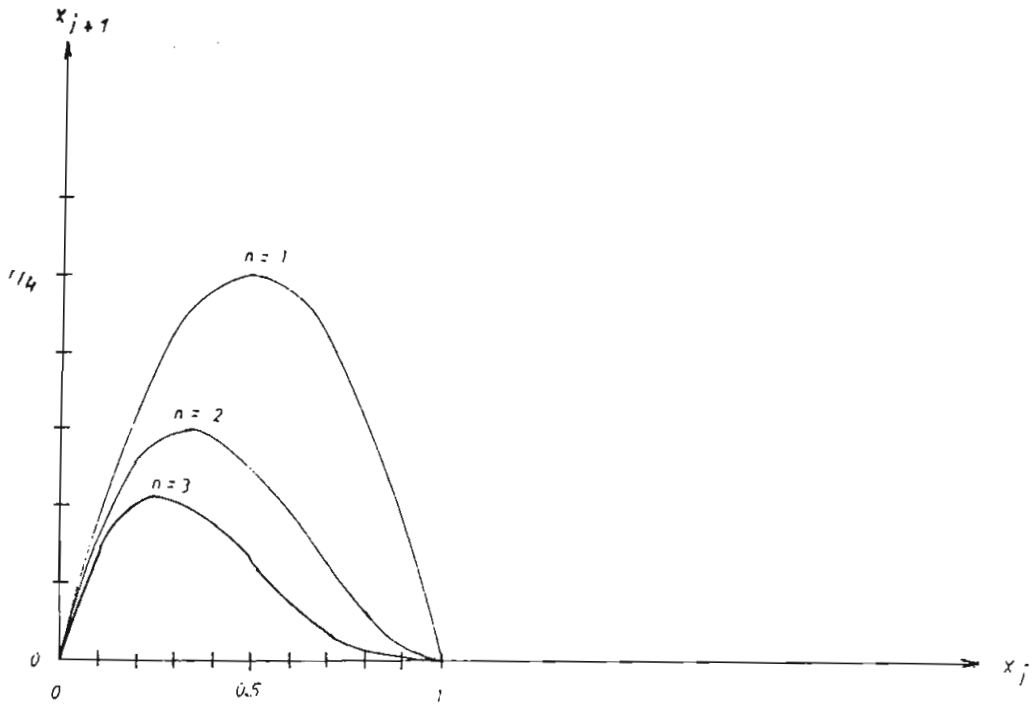
- La función  $g(X_j)$  tiene un solo máximo en el intervalo  $0 < X_j < 1$ . En este caso el parámetro  $n$  produce un desplazamiento del punto donde ocurre el máximo como  $\frac{1}{n+1}$ .
- La segunda derivada evaluada en el máximo es siempre negativa y tiene como valor

$$\left. \frac{d^2 X_{j+1}}{d X_j^2} \right|_{X_{j\text{máx}}} = - r n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-2}$$

Con el análisis de esta ecuación se está tratando un caso un poco más general de lo analizado anteriormente.

Como se puede ver se mantienen las mismas propiedades que el modelo descrito en la parte 2.1, de este capítulo.

En la figura 2.47, se ha graficado la función  $X_{j+1} = f(X_j)$  para 3 valores de  $n$ .



**Fig. 2.47.-** Gráfico de la función  $x_{j+1} = f(x_j)$  para la ecuación  $x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)^n$ , Para 3 valores de  $n$ : 1,2,3.

El comportamiento de la ecuación (2.61) para el valor  $n=1$  ha sido ampliamente analizado en las partes 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, de este capítulo.

Ahora vamos a analizar el comportamiento de la ecuación de diferencias 2.61 para el valor de  $n=2$ , que es una función con el máximo desplazado en relación a la ecuación con  $n=1$ .

Como método de comparación se ha utilizado los gráficos de  $x_j = f(r)$  para los diferentes valores de  $n$ .

En la figura 2.48, se tiene el gráfico  $x_j = f(r)$  para el valor de  $n=2$

en el intervalo  $3.75 \leq r \leq 6.75$ .

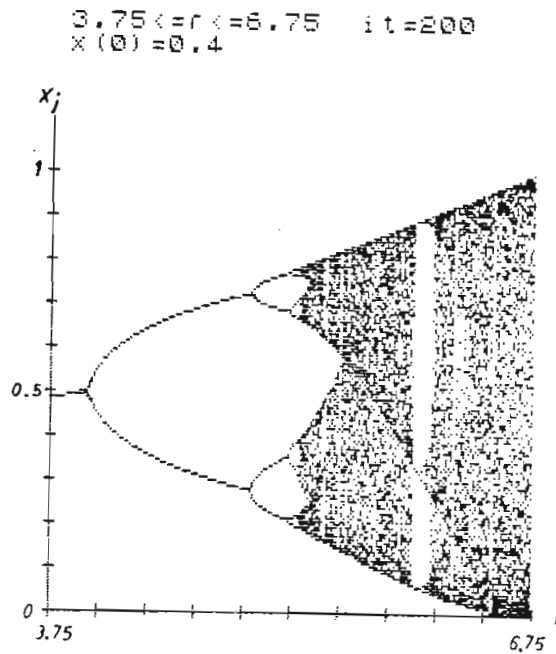


Fig. 2.48.- Gráfico  $x_j = f(r)$  para la ecuación

$$x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)^2. \text{ En el intervalo } 3.75 \leq r \leq 6.75, x_0 = 0.4.$$

Para observar más claramente la transición alrededor de  $r_c$  se ha realizado una ampliación del gráfico de la figura 2.48 para el intervalo  $4.75 \leq r \leq 5.35$ . Esto se encuentra en la figura 2.49.

Realizamos el mismo análisis para  $n=3$ , en donde obtenemos el gráfico  $x_j = f(r)$  en el intervalo  $4.5 \leq r \leq 9.48$ .

Este gráfico se encuentra en la figura 2.50.

De igual forma en la figura 2.51 realizamos una ampliación alrededor de  $r_c$ , en la transición de niveles discretos a bandas.

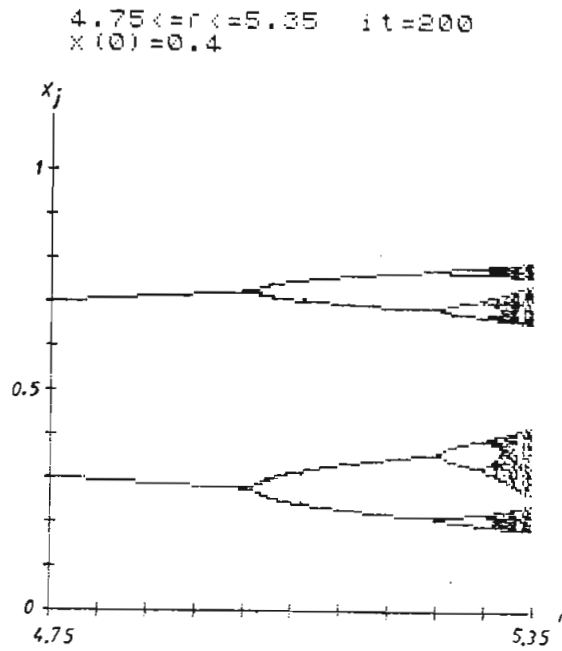


Fig. 2.49.- Ampliación del gráfico de la Fig. 2.48  
alrededor de  $r_c$ .

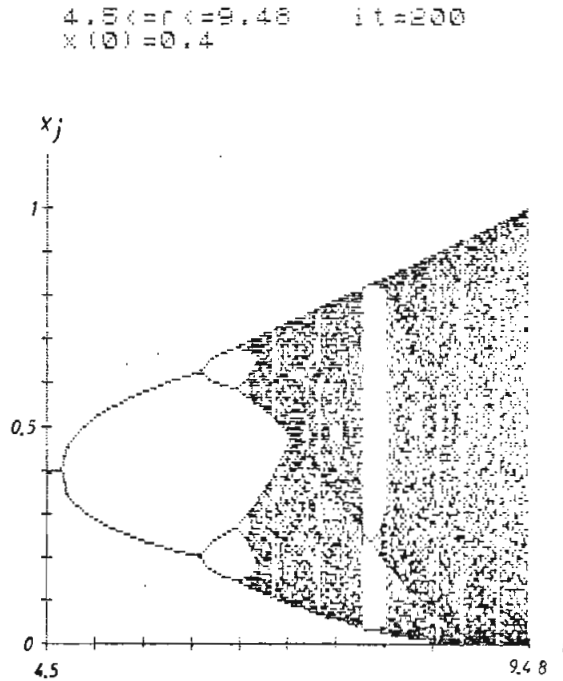


Fig. 2.50.- Gráfico de  $x_j = f(r)$  para la ecuación  
$$x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)^3$$
 en el intervalo  
 $4.5 \leq r \leq 9.48$ .  $x_0 = 0.4$ .

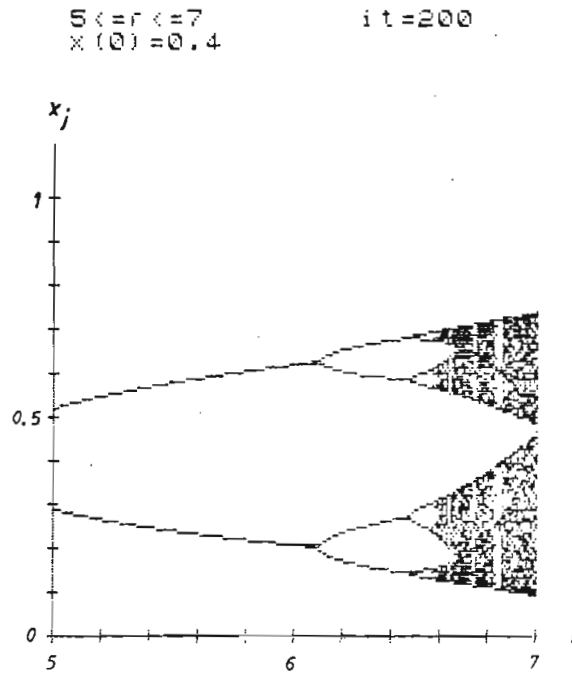


Fig. 2.51.- Ampliación del gráfico de la figura 2.50  
alrededor de  $r$  crítico.

Del análisis de las figuras 2.48 y 2.50 se concluye que el mecanismo de transición, de un régimen laminar a un régimen oscilatorio y luego a un régimen turbulento, es cualitativamente el mismo que se ha descrito anteriormente en todo detalle. Esto da la idea de la universalidad de la transición de un régimen laminar a un régimen turbulento.

La diferencia encontrada es en los puntos de desdoblamiento que tienen diferente valor numérico, dependiendo del valor de  $n$ .

Se ha obtenido experimentalmente los valores de  $r$  para los puntos de desdoblamiento que se detallan en la figura 2.52, para una oscilación periódica de hasta 16 ciclos.

En la Tabla 2.5, se han tabulado los valores de los puntos de desdo-

blamiento para los 3 valores de  $n$  y hasta  $r_{16}$ .

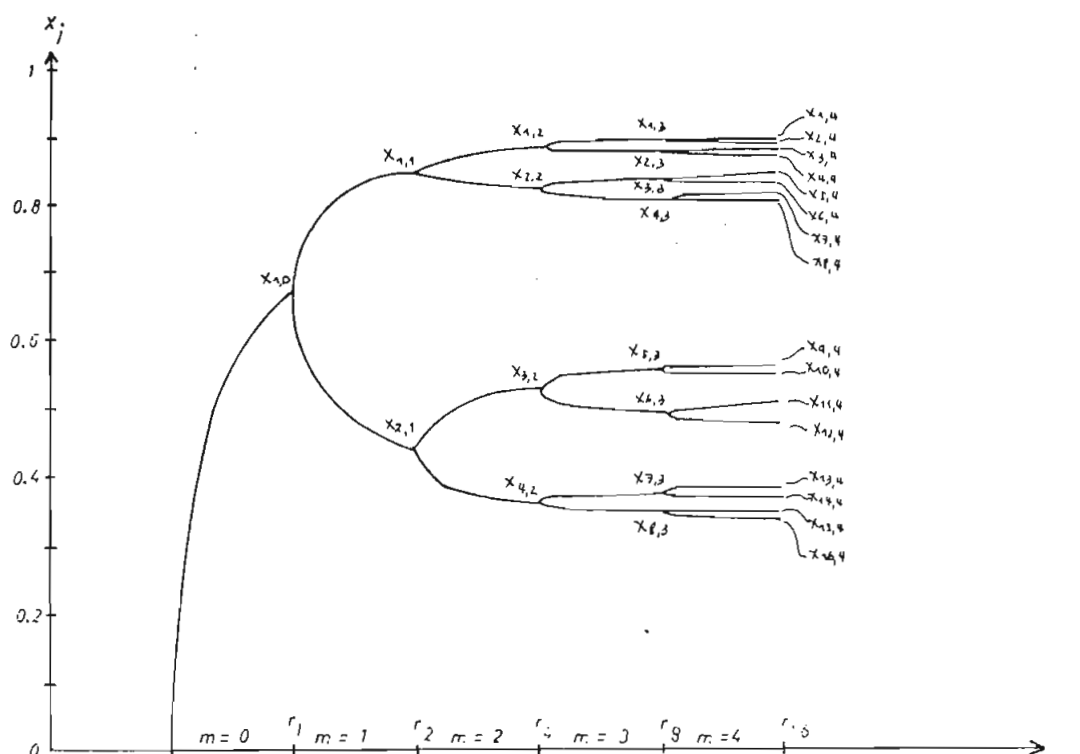


Fig. 2.52.- Gráfico de  $X_j = f(r)$ , para referencia de las tablas de los  $X_j$  para los puntos de desdoblamiento.

Para realizar el análisis comparativo para los tres valores de  $n$ , también se han tabulado los valores que toma la variable  $X$  en cada punto de desdoblamiento según los datos experimentales de la Tabla 2.5.

Se han tomado los puntos de desdoblamiento  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_4$ ,  $r_8$  y  $r_{16}$ , que son los más factibles de calcular y que nos servirán para un análisis posterior en base a estos números.

Los valores han sido tabulados en las Tablas 2.6 y 2.7 que se encuen-

| n         | 1          | 2          | 3          |
|-----------|------------|------------|------------|
| $r_1$     |            |            |            |
| $X_{1,0}$ | 0.67186865 | 0.49843013 | 0.39827819 |
| $r_2$     |            |            |            |
| $X_{1,1}$ | 0.8421544  | 0.7227088  | 0.62393421 |
| $X_{2,1}$ | 0.45196325 | 0.27729119 | 0.20175944 |
| $r_4$     |            |            |            |
| $X_{1,2}$ | 0.88332467 | 0.77221402 | 0.67964275 |
| $X_{2,2}$ | 0.82033066 | 0.68476383 | 0.58551904 |
| $X_{3,2}$ | 0.52175449 | 0.35588902 | 0.26974852 |
| $X_{4,2}$ | 0.36484019 | 0.20955274 | 0.14457348 |
| $r_8$     |            |            |            |
| $X_{1,3}$ | 0.88989192 | 0.78195641 | 0.69148705 |
| $X_{2,3}$ | 0.88078632 | 0.76826016 | 0.67582831 |
| $X_{3,3}$ | 0.83331415 | 0.70366414 | 0.60624077 |
| $X_{4,3}$ | 0.8086392  | 0.66947347 | 0.56907151 |
| $X_{5,3}$ | 0.55088096 | 0.38617125 | 0.29873513 |
| $X_{6,3}$ | 0.49448995 | 0.32626296 | 0.24279583 |
| $X_{7,3}$ | 0.37381366 | 0.21784301 | 0.15103078 |
| $X_{8,3}$ | 0.34882409 | 0.19629224 | 0.13320118 |

Tabla 2.6.- Valores de  $X_j$  para los puntos de  
desdoblamiento para  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_4$  y  $r_8$ .



| n          | 1          | 2          | 3          |
|------------|------------|------------|------------|
| $r_{16}$   |            |            |            |
| $X_{1,4}$  | 0.89224549 | 0.78467983 | 0.69422438 |
| $X_{2,4}$  | 0.89037434 | 0.7839148  | 0.69163942 |
| $X_{3,4}$  | 0.8828804  | 0.77195784 | 0.68011898 |
| $X_{4,4}$  | 0.8787585  | 0.76591881 | 0.67333191 |
| $X_{5,4}$  | 0.84106895 | 0.71219073 | 0.61477099 |
| $X_{6,4}$  | 0.83104341 | 0.69827376 | 0.59970584 |
| $X_{7,4}$  | 0.81018467 | 0.671552   | 0.57175534 |
| $X_{8,4}$  | 0.80443014 | 0.66525309 | 0.56510585 |
| $X_{9,4}$  | 0.56148326 | 0.39486626 | 0.30598798 |
| $X_{10,4}$ | 0.54886034 | 0.38374512 | 0.29560376 |
| $X_{11,4}$ | 0.50112421 | 0.33673004 | 0.25322111 |
| $X_{12,4}$ | 0.47707528 | 0.31248979 | 0.23135265 |
| $X_{13,4}$ | 0.3802484  | 0.22230321 | 0.1545159  |
| $X_{14,4}$ | 0.36904388 | 0.21264435 | 0.14654607 |
| $X_{15,4}$ | 0.34836251 | 0.19624826 | 0.1334966  |
| $X_{16,4}$ | 0.34313607 | 0.19270451 | 0.13065688 |

Tabla 2.7.- Valores de  $X_j$  para los puntos de  
desdoblamiento para  $r_{16}$ .

tran a continuación.

| n        | 1     | 2     | 3     |
|----------|-------|-------|-------|
| $r_0$    | 1     | 1     | 1     |
| $r_1$    | 3     | 3.975 | 4.59  |
| $r_2$    | 3.4   | 4.99  | 6.08  |
| $r_4$    | 3.54  | 5.23  | 6.47  |
| $r_8$    | 3.56  | 5.28  | 6.56  |
| $r_{16}$ | 3.569 | 5.297 | 6.583 |

Tabla 2.5.- Valores de  $r_q$  en los puntos de desdoblamiento de  $q$  a  $2q$  ciclos.

Feigenbaum habla sobre la universalidad de cierto número presente en la transición de régimen laminar a turbulento.

En el gráfico de  $X_j = f(r)$  si escogemos 2 valores vecinos de  $X_j$  que están en un ciclo  $2^m$ , se puede encontrar que la separación entre estos valores disminuye con  $m$  como  $B \alpha^{-m}$ , en donde según Feigenbaum  $\alpha$  es universal e igual a 2.503.

En este trabajo vamos a tratar de generar este número y demostrar para las tres funciones con  $n=1, 2, 3$ , respectivamente su universalidad.

El valor de  $m$  está relacionado al intervalo en donde se tiene  $2^m$  ci-

culos o una oscilación de período  $2^m T$ .

La separación entre dos valores vecinos lo interpretamos como la diferencia entre los valores de  $X_j$  contiguos para los valores de  $r$  donde ocurren los desdoblamientos. Esto lo representamos como

$$X_{j+1,m} - X_{j,m} \quad (2.77)$$

Entonces primeramente hallamos las diferencias de todos los valores vecinos en los puntos de desdoblamiento. La identificación de los puntos a los que se refiere las diferencias se lo puede hacer en la figura 2.52. Los datos están tabulados en la Tabla 2.8.

Las diferencias entre los valores de  $X_j$  en el punto en el  $m=1$ , es decir 2 ciclos ( $2^m$ ), se puede representar como

$$X_{j+1,1} - X_{j,1} = \beta \alpha^{-1} \quad (2.78)$$

Las diferencias entre valores de  $X_j$  en el punto en el cual  $m=2$ ,  $2^2$  ciclos, es:

$$X_{j+1,2} - X_{j,2} = \beta \alpha^{-2} \quad (2.79)$$

Dividiendo la expresión (2.78) por (2.79) se tiene

$$\frac{X_{j+1,1} - X_{j,1}}{X_{j+1,2} - X_{j,2}} = \alpha \quad (2.80)$$

| n                     | 1          | 2           | 3           |
|-----------------------|------------|-------------|-------------|
| $X_{1,1} - X_{2,1}$   | 0.39019115 | 0.44541761  | 0.42217477  |
| $X_{1,2} - X_{2,2}$   | 0.06299401 | 0.08745019  | 0.09412371  |
| $X_{3,2} - X_{4,2}$   | 0.1569443  | 0.14633628  | 0.125175040 |
| $X_{1,3} - X_{2,3}$   | 0.0091083  | 0.01369625  | 0.01565874  |
| $X_{3,3} - X_{4,3}$   | 0.02467495 | 0.03419067  | 0.03716926  |
| $X_{5,3} - X_{6,3}$   | 0.05639101 | 0.05990829  | 0.0559393   |
| $X_{7,3} - X_{8,3}$   | 0.02498957 | 0.02153786  | 0.01782960  |
| $X_{1,4} - X_{2,4}$   | 0.00187115 | 0.002340482 | 0.00258496  |
| $X_{3,4} - X_{4,4}$   | 0.0041219  | 0.00603903  | 0.00678707  |
| $X_{5,4} - X_{6,4}$   | 0.01002554 | 0.01391697  | 0.01506515  |
| $X_{7,4} - X_{8,4}$   | 0.00575453 | 0.00629891  | 0.00664949  |
| $X_{9,4} - X_{10,4}$  | 0.01262292 | 0.01112114  | 0.01038422  |
| $X_{11,4} - X_{12,4}$ | 0.02404893 | 0.02424025  | 0.02186846  |
| $X_{13,4} - X_{14,4}$ | 0.01120452 | 0.00965886  | 0.00796983  |
| $X_{15,4} - X_{16,4}$ | 0.00522644 | 0.00354375  | 0.00283972  |

Tabla 2.8.- Diferencias entre valores vecinos de  $X_j$   
para los puntos de desdoblamiento según  
nomenclatura de la Fig. 2.52.

Entonces si relacionamos las diferencias como en la expresión (2.80), encontramos el número  $\alpha$ .

Para  $m=3$ , la diferencia entre los valores  $X_j$  se puede representar co  
mo:

$$X_{j+1,3} - X_{j,3} = \beta \alpha^{-3} \quad (2.81)$$

Dividiendo la expresión (2.79) para (2.81) se obtiene

$$\frac{X_{j+1,2} - X_{j,2}}{X_{j+1,3} - X_{j,3}} = \alpha \quad (2.82)$$

Que es otra relación donde se obtiene el número  $\alpha$ .

Ahora en la Tabla 2.9 se ha tabulado varias divisiones de las diferen  
cias de los valores de  $X_j$  para las tres funciones con  $n = 1, 2$  y  $3$  res  
pectivamente.

De la Tabla 2.9, se puede observar que existen 2 valores que se aproxi  
man al número propuesto por Feigenbaum.

Estos valores corresponden a las relaciones

$$\frac{X_{1,2} - X_{2,2}}{X_{3,3} - X_{4,3}} \quad y \quad \frac{X_{3,3} - X_{4,3}}{X_{5,4} - X_{6,4}}$$

que se señalan con flechas en la Tabla.

| n   | 1           | 2           | 3           |
|---|-------------|-------------|-------------|
| $\frac{X_{1,1} - X_{2,1}}{X_{1,2} - X_{2,2}}$   | 6.1940972   | 5.0933994   | 4.4853196   |
| $\frac{X_{1,1} - X_{2,1}}{X_{3,2} - X_{4,2}}$   | 2.4866515   | 3.0438027   | 3.372677    |
| $\frac{X_{1,2} - X_{2,2}}{X_{1,3} - X_{2,3}}$   | 6.91611     | 6.3849705   | 6.0109351   |
| $\frac{X_{1,2} - X_{2,2}}{X_{3,3} - X_{4,3}}$   | 2.552954    | 2.5577195   | 2.5322991   |
| $\frac{X_{3,2} - X_{4,2}}{X_{5,3} - X_{6,3}}$   | 2.7826116   | 2.4426696   | 2.2376929   |
| $\frac{X_{3,2} - X_{4,2}}{X_{7,3} - X_{8,3}}$   | 6.2791867   | 6.7902966   | 7.0207277   |
| $\frac{X_{1,3} - X_{2,3}}{X_{1,4} - X_{2,4}}$   | 4.867755124 | 5.851892901 | 6.057633387 |
| $\frac{X_{1,3} - X_{2,3}}{X_{3,4} - X_{4,4}}$   | 2.209733375 | 2.267955284 | 2.307142847 |
| $\frac{X_{3,3} - X_{4,3}}{X_{5,4} - X_{6,4}}$   | 2.461209072 | 2.456761062 | 2.467234644 |
| $\frac{X_{3,3} - X_{4,3}}{X_{7,4} - X_{8,4}}$   | 4.287917519 | 5.428029611 | 5.589791097 |
| $\frac{X_{5,3} - X_{6,3}}{X_{9,4} - X_{10,4}}$  | 4.467350661 | 5.386883899 | 5.386952511 |
| $\frac{X_{5,3} - X_{6,3}}{X_{11,4} - X_{12,4}}$ | 2.344844864 | 2.47143862  | 2.557989909 |
| $\frac{X_{7,3} - X_{8,3}}{X_{13,4} - X_{14,4}}$ | 2.230311517 | 2.229855283 | 2.237136802 |
| $\frac{X_{7,3} - X_{8,3}}{X_{15,4} - X_{16,4}}$ | 4.781375085 | 6.77702998  | 6.278647191 |

Tabla 2.9.- División de diferencias de los valores de  $X_j$   
para  $n = 1, 2, 3$ .



La curva que describe la ecuación (2.84) se encuentra graficada en la figura 2.54. Esta curva representa la disminución de la distancia, mientras aumenta el valor de  $m$  para  $\alpha = 2.503$ .

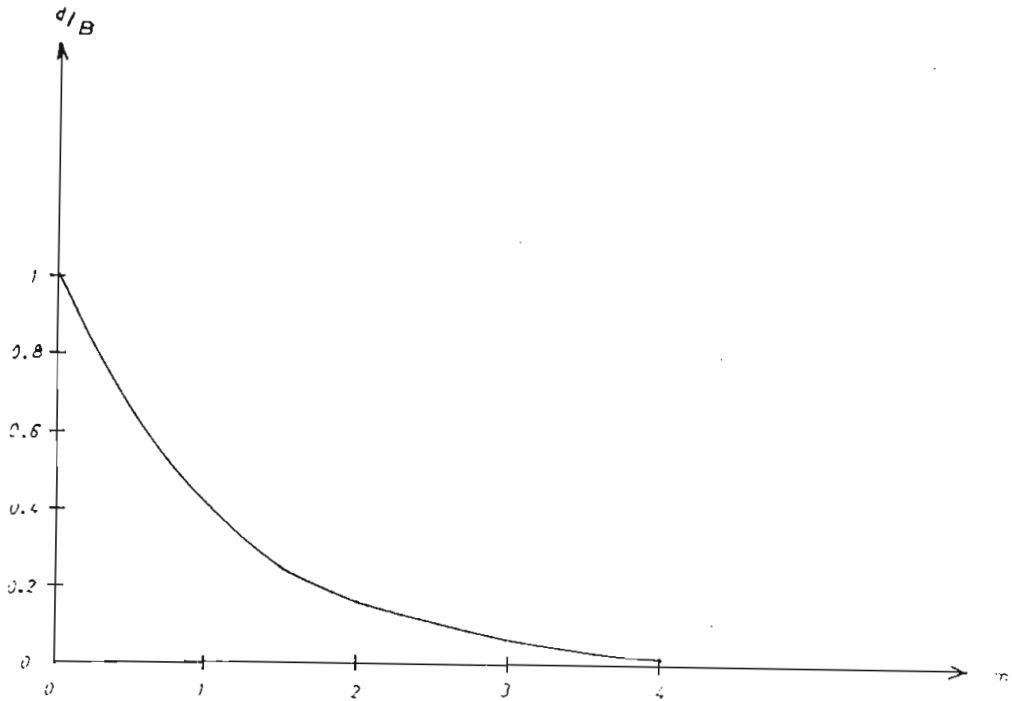


Fig. 2.54.- Gráfico de la función  $\frac{d}{B} = \alpha^{-m}$ ,  
 $\frac{d}{B} = h(m)$  para  $\alpha = 2.503$ .

Según el gráfico 2.54, cuando  $m$  tiende a infinito, es decir cuando existe infinitos ciclos y estamos en  $r$  crítico, la distancia entre valores vecinos tiende a cero.

Ahora vamos a graficar las distancias halladas experimentalmente en este trabajo. Estas distancias, como se observa en la figura 2.53 son:

$$\begin{aligned}
 X_{1,2} - X_{2,2} & \quad \text{para } m = 2 \\
 X_{3,3} - X_{4,3} & \quad m = 3 \\
 X_{5,4} - X_{6,4} & \quad m = 4
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$



Las distancias para  $n = 1$ , se encuentran graficadas en la figura 2.55, como sigue

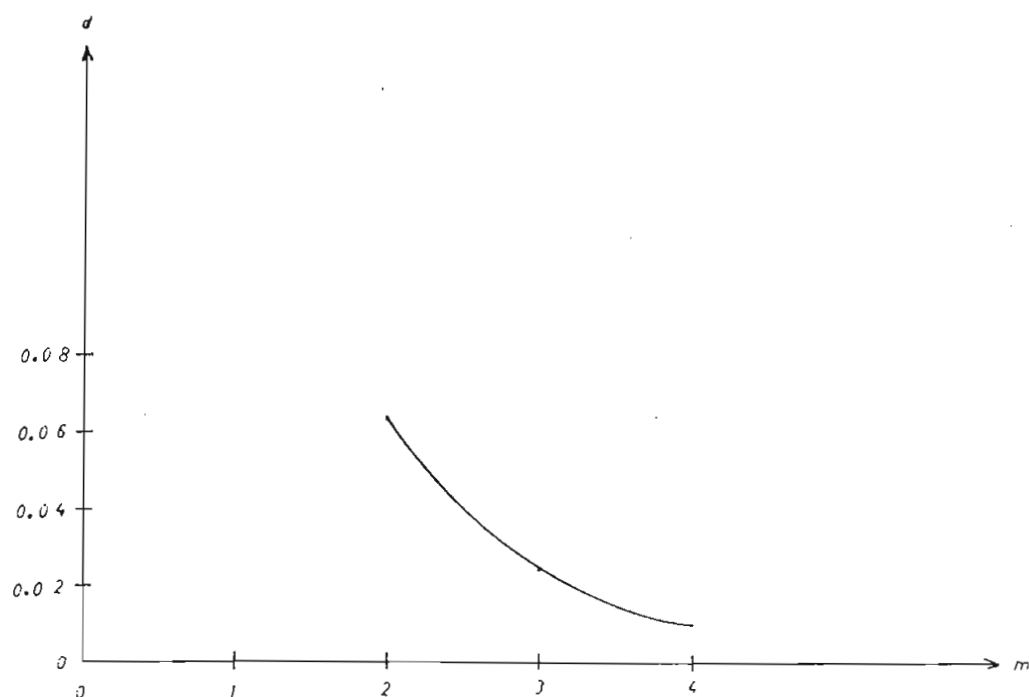


Fig. 2.55.- Gráfico de las distancias de la expresión (2.85) para  $n = 1$ .

Para  $n = 2$ , en la figura 2.56, se encuentran graficadas las distancias de la expresión (2.85)

Por último para  $n = 3$ , las distancias se encuentran en la figura 2.57.

Según los datos graficados en las figuras 2.55, 2.56 y 2.57, se ha realizado una regresión para hallar la ecuación que representa los puntos graficados.

La regresión utilizada es del tipo

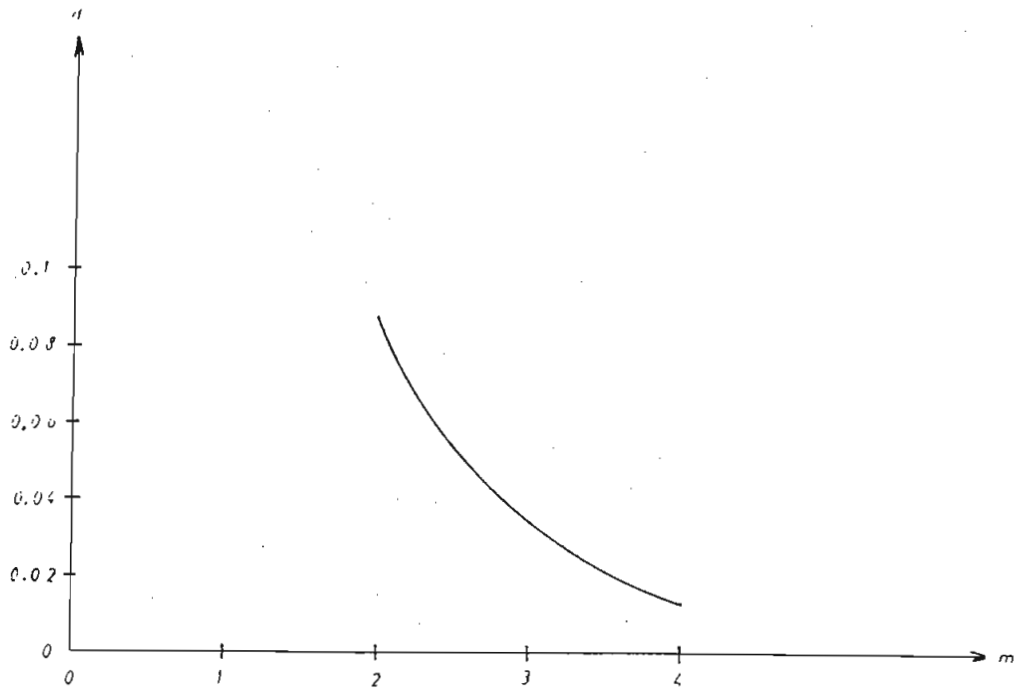


Fig. 2.56.- Gráfico de las distancias de la expresión (2.85) para  $n = 2$ .

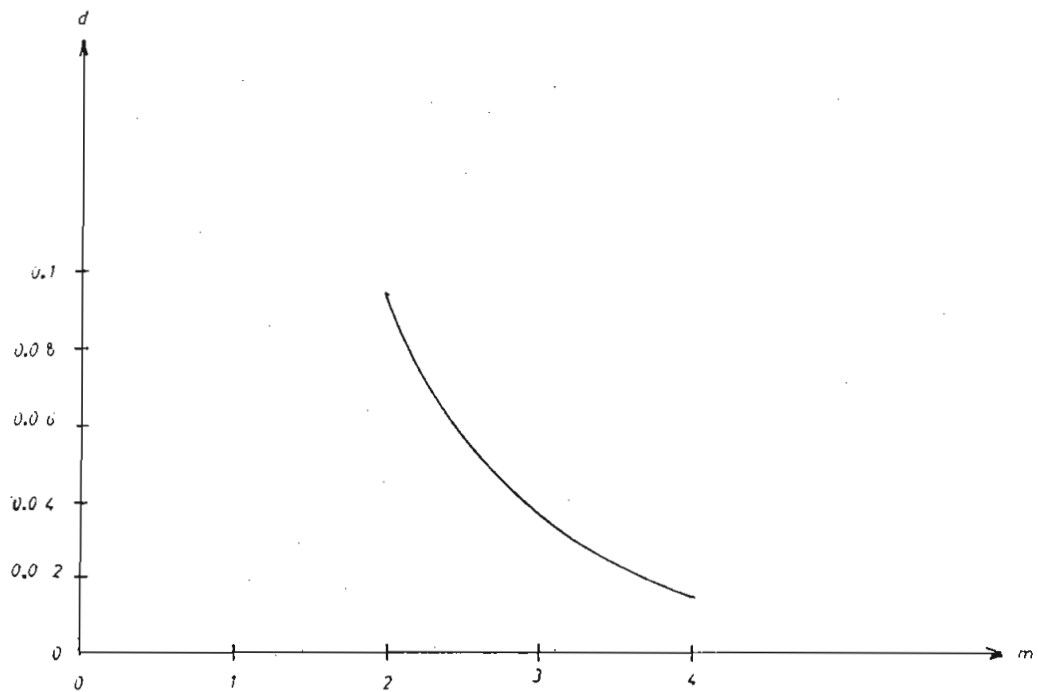


Fig. 2.57.- Gráfico de las distancias de la expresión (2.85) para  $n = 3$ .

$$d = B \alpha^{-m} \quad (2.86)$$

en donde  $d$  es la distancia (diferencia) y las incognitas son  $\beta$  y  $\alpha$ .

La ecuación (2.86) representa una regresión lineal de la forma

$$\ln d = \ln B - m \ln \alpha \quad (2.87)$$

que puede reemplazarse por

$$y = c_1 + c_2 m \quad (2.88)$$

en donde

$$\begin{aligned} y &= \ln d \\ c_1 &= \ln B \\ c_2 &= -\ln \alpha \end{aligned} \quad (2.89)$$

De los resultados de la regresión se obtienen los siguientes valores:

| n | $\beta$    | $\alpha$  |
|---|------------|-----------|
| 1 | 0.3929493  | 2.5054126 |
| 2 | 0.5458355  | 2.5067327 |
| 3 | 0.58551834 | 2.499555  |

Tabla 2.10.- Coeficientes de regresión  $d = \beta \alpha^{-m}$

Del análisis de los resultados de la Tabla 2.10, podemos afirmar que

si existe un número universal que no depende de la función, ya que se ha probado para  $n = 1, 2$  y  $3$ .

Entonces es importante notar que de manera general el proceso de desdoblamiento del período y división en bandas son independientes de los detalles del modelo y según los resultados obtenidos puede ocurrir para una ecuación de diferencias que presente la forma:

$$X_{j+1} = r g(X_j)$$

Con  $g(0) = g(1)$  y en donde  $g$  es una función con un sólo máximo en el intervalo  $0$  a  $1$ . También  $g''(X)$  es negativo en el punto en el cual ocurre el máximo.

## 2.6. TRANSFORMADAS DE FOURIER. REGIMEN LAMINAR, OSCILATORIO Y TURBU- LENTO.

Como un método alternativo de análisis de la transición de régimen laminar o turbulento se ha utilizado la transformada de FOURIER de los puntos  $X_j$ .

La transformada de Fourier se define como:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) e^{2\pi i \omega t} dt \quad (2.90)$$

en donde  $\hat{X}(\omega)$  es una función compleja que tiene parte real e imagina-

ria.

El espectro de potencia se define como el cuadrado del módulo de  $\hat{X}(\omega)$

$$p(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (2.91)$$

Para el cálculo de las transformadas se ha utilizado un método numérico que se tiene como subrutina en el computador TEKTRONIX 4051.

Por ser un método numérico, se calcula la transformada discreta de Fourier. El comando utilizado para llamar esta subrutina es FFT. (Fast Fourier Transform).

La transformada discreta de Fourier puede ser expresada matemáticamente por la siguiente sumatoria

$$X_d(K) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (2.92)$$

$$\text{para } K = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

En la ecuación anterior, N se refiere a la longitud del arreglo que se tiene como argumento y K es un número usado para generar los diferentes coeficientes de Fourier.  $X_d(K)$  es el K coeficiente de Fourier y  $X(n)$  se refiere al n+1 elemento de los datos de entrada

El argumento para realizar la transformada debe ser un arreglo de longitud igual a  $2^m$  entre 16 y 1024.

La transformada discreta inversa de Fourier entonces será definida por la expresión matemática

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X_d(K) e^{j2\pi Kn/N} \quad (2.93)$$

Si designamos a  $T$  como el tiempo entre dos valores de  $X_j$  consecutivos, la máxima frecuencia que podemos observar en las transformadas de Fourier será la frecuencia de Nyquist que es igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. La frecuencia de muestreo la designamos como  $f$  y es igual a  $\frac{1}{T}$ . La máxima frecuencia observable será  $\frac{1}{2T} = \frac{f}{2}$ .

Vamos a llamar a  $f$  como frecuencia fundamental, en donde  $f$  es igual a  $\frac{1}{T}$ , siendo  $T$  el tiempo entre dos valores consecutivos de  $X_j$ .

Iniciamos el análisis obteniendo la transformada de Fourier para la oscilación de período  $2T$ . Para esto hemos tomado el valor de  $r = 3.3$  y encontrado la secuencia de los  $X_j$  en régimen permanente. El módulo de la transformada se encuentra graficado en la figura 2.58.

Se observa en esta figura de la presencia de una componente de frecuencia  $f/2$ , además de la componente continua que aparece debido a que la secuencia de los  $X_j$  tiene valor medio diferente de cero.

Ahora tomamos la secuencia de los  $X_j$  para  $r = 3.5$ , en donde se tiene una oscilación de período  $4T$  y obtenemos la transformada de Fourier. Esta transformada se encuentra en la figura 2.59. Ahora se observa

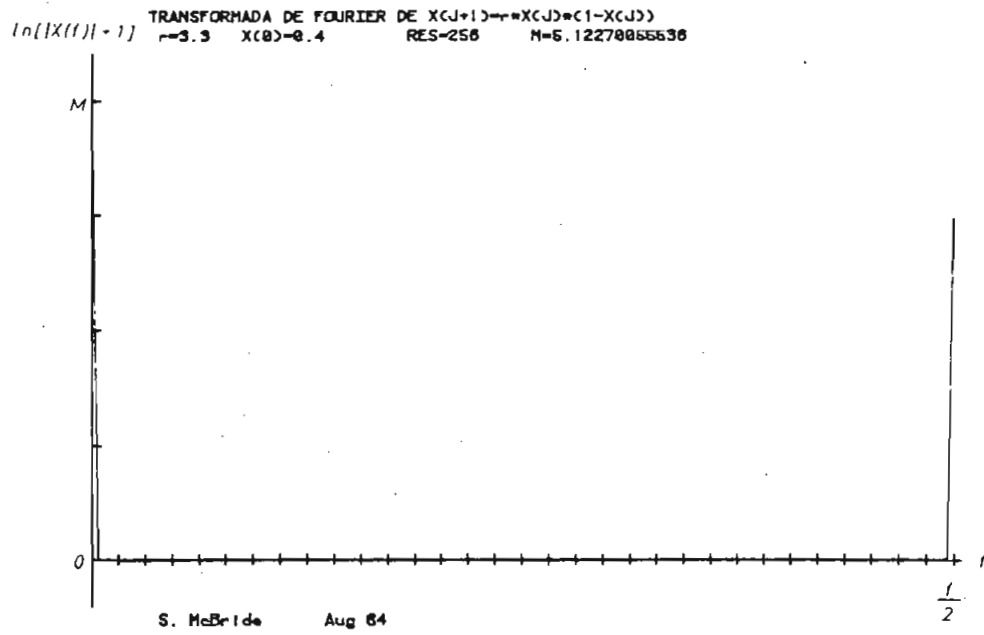


Fig. 2.58.- Módulo de la transformada de Fourier de los  $X_j$  para  $r = 3.3$ . Oscilación de período  $2T$ .

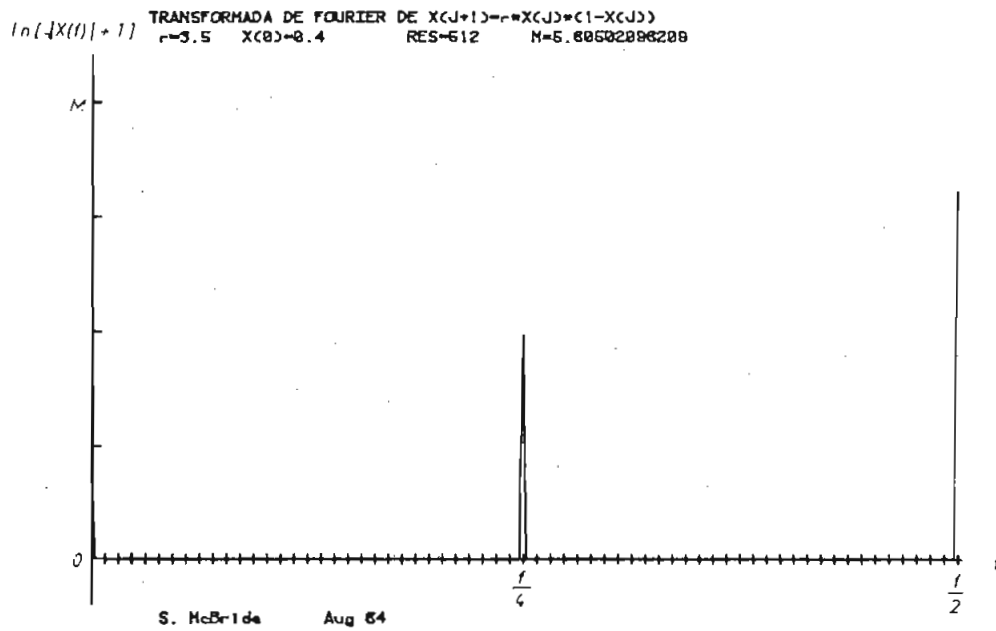


Fig. 2.59.- Módulo de la transformada de Fourier de los  $X_j$  para  $r = 3.5$ . Oscilación de período  $4T$ .

que aparece una nueva componente de frecuencia en relación a la oscilación de período  $2T$ .

Esta nueva componente tiene una frecuencia de  $f/4$ .

Al aumentar el valor de  $r$  para tener una oscilación de período  $8T$ , se tienen nuevas componentes de frecuencia que se van intercalando entre las componentes para menos periodicidad ( $4T$ ). Se ha tomado el caso de  $r = 3.55$  y se encuentra graficada la transformada en la figura 2.60.

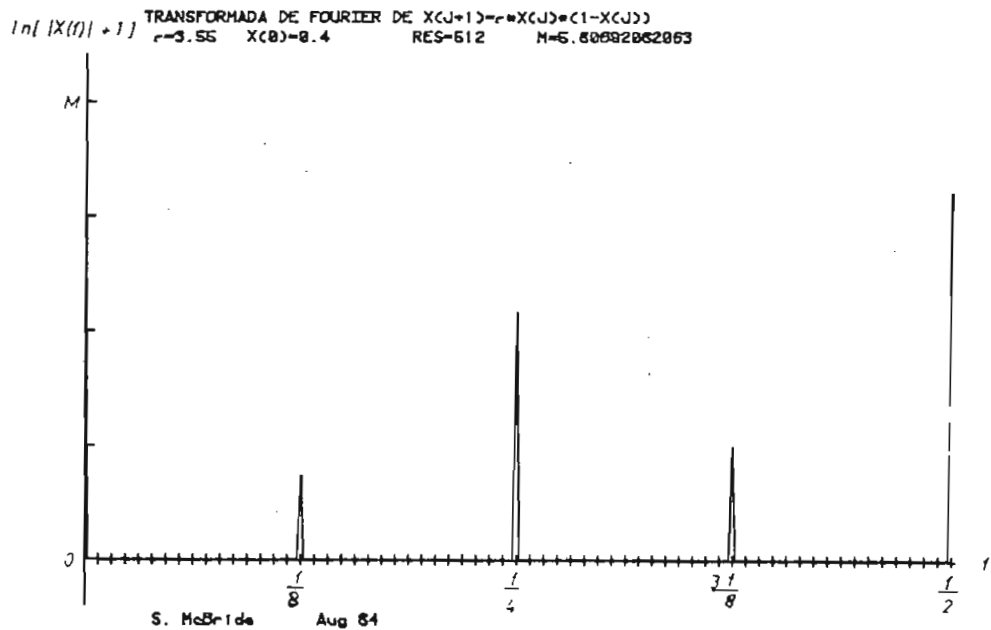


Fig. 2.60.- Módulo de la transformada de Fourier de los  $X_j$  para  $r=3.55$  y oscilación de período  $8T$ .

Las nuevas componentes de frecuencia son  $f/8$  y  $3f/8$ .

Para una oscilación de período  $16T$ , se tienen nuevas componentes de frecuencia que corresponden a:  $\frac{f}{16}$ ,  $\frac{3f}{16}$ ,  $\frac{5f}{16}$  y  $\frac{7f}{16}$ . Esto se representa



en la figura 2.61 para  $r = 3.5668$ .

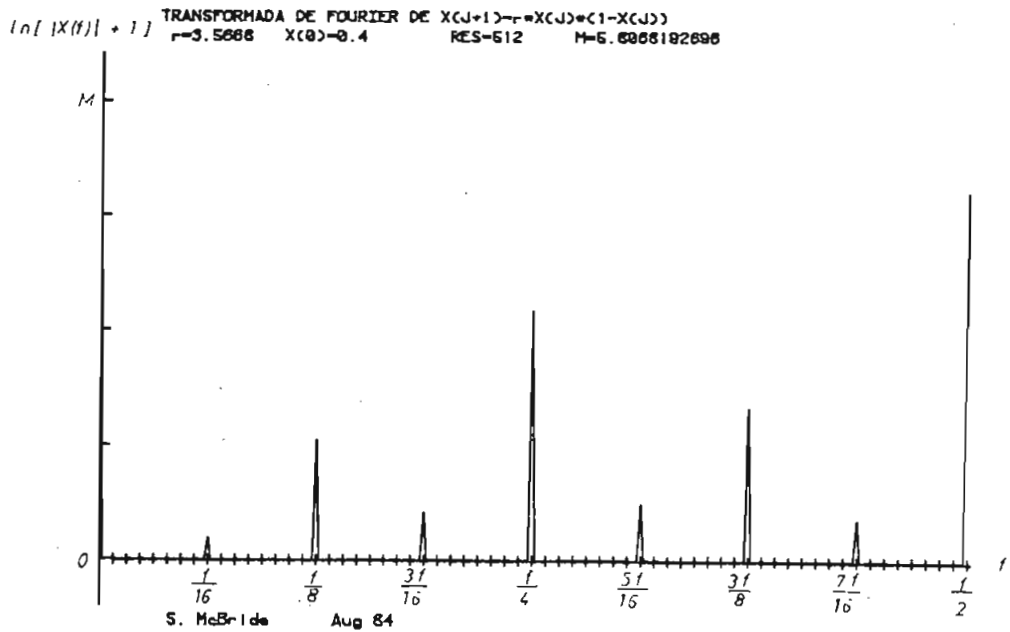


Fig. 2.61.- Módulo de la transformada de Fourier  
de los  $X_j$  para  $r = 3.5668$  y oscilación  
de período  $16T$ .

De esto se observa que el mecanismo de la transición es aumentar el número de componentes de frecuencia a medida que aumenta el período de la oscilación. Estas componentes seguirán aumentando hasta  $r_c$  en donde se tendrán infinitas líneas espectrales.

Ahora analizamos el espectro para  $r = 4$ . Este espectro se encuentra dibujado en la figura 2.62. Aquí si se observa un verdadero caos total ya que tenemos una sola franja de ruido que se aproxima a un espectro continuo.

El espectro será totalmente continuo si el número de puntos  $N$  para la transformada de Fourier tiende a infinito.

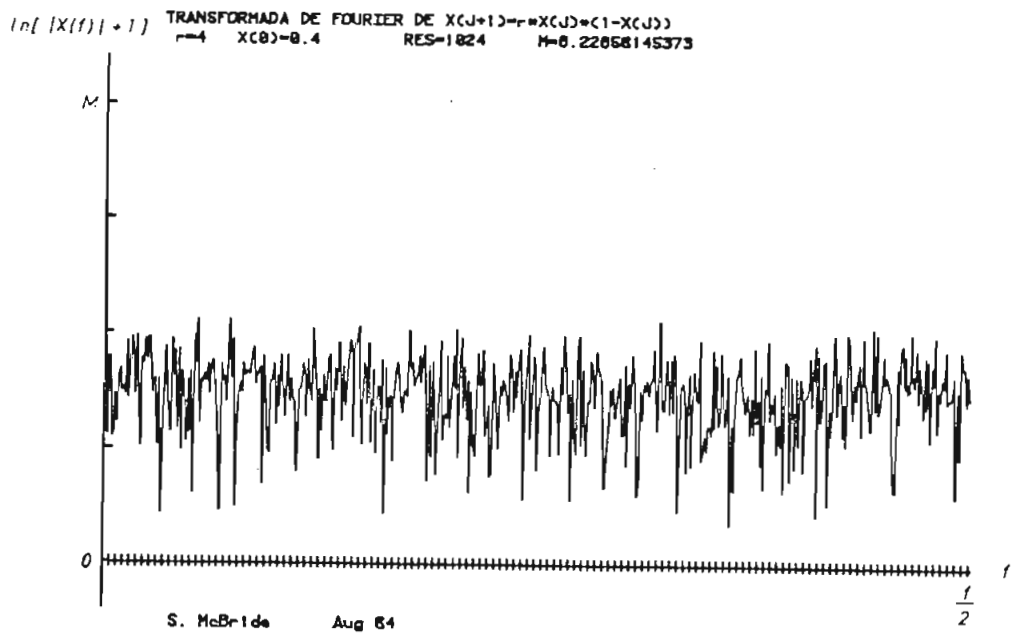


Fig. 2.62.- Espectro de frecuencia para  $r = 4$ ,  
 donde se tiene el caos.

Para completar nuestro análisis vamos a obtener el espectro de frecuencia en una zona donde se tienen 2 bandas. Para esto hemos tomado el valor de  $r = 3.6$  y el espectro se ha graficado en la figura 2.63.

En el espectro de la figura 2.63 se observa una zona de ruido que nos indica que estamos en la ruta hacia el caos. Pero se observa una componente de frecuencia en  $f/2$ , que se debe a que los valores de  $X_j$  alternan entre las dos bandas. El ruido en el resto de la banda del espectro se debe a que los valores de  $X_j$  caen dentro de las bandas en forma aleatoria.

En conclusión la transformada de Fourier es otro método de análisis para determinar cuando se encuentra en un régimen determinista, como el de la figura 2.61, y cuando nos encontramos en un régimen turbulento o

caótico, como se muestra en la figura 2.62.

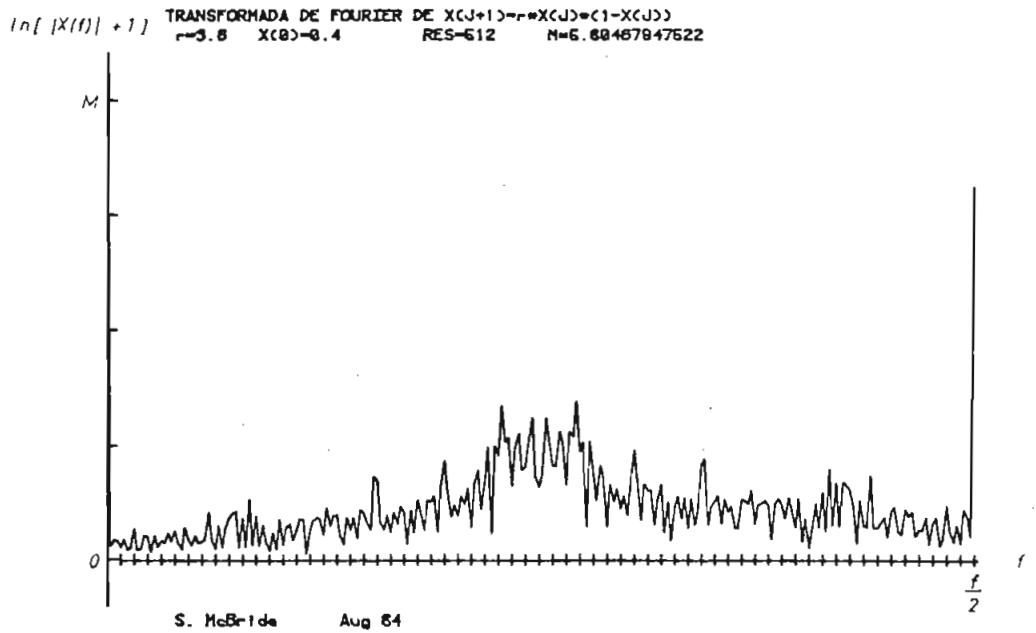


Fig. 2.63.- Espectro de frecuencia de los  $X_j$   
 para  $r = 3.6$ . Zona donde se tienen  
 2 bandas.

## 2.7. ANALISIS DEL REGIMEN INTERMITENTE DE PERIODO $3T$ .

Del gráfico de  $X_j = f(r)$  para la ecuación  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$ , se observa una franja, en donde observamos un comportamiento diferente. Esta zona se encuentra dentro del intervalo  $3.8 \leq r \leq 3.9$  y la hemos denominado  $A_3$ . Esto se encuentra indicado en la figura 2.64.

Para analizar el comportamiento de la zona  $A_3$ , vamos a obtener gráficos  $X_j = f(j)$  para valores de  $r$  en el intervalo o zona  $A_3$ .

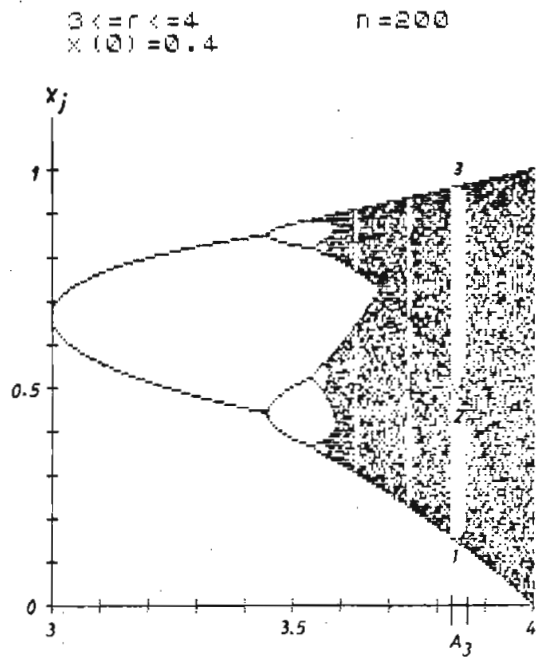


Fig. 2.64.- Gráfico de  $x_j = f(r)$ , donde se muestra una zona de intermitencia denominada  $A_3$ .

En la figura 2.65 se encuentra el gráfico de  $x_j = f(j)$  para  $r = 3.84$  y  $x_0 = 0.4$ . Se observa que en régimen permanente, se tiene una oscilación de período  $3T$ .

Para observar en detalle el comportamiento para los valores iniciales de  $j$ , en la figura 2.66 se ha graficado  $x_j = f(j)$  para valores de  $j$  pequeños. Se observa un régimen transitorio para el intervalo  $0 \leq j \leq 5$ .

Para valores de  $j$  mayores a 5 se llega a un régimen permanente, oscilatorio de período  $3T$ .

También se observa en la figura 2.66 que la secuencia de llenado de los niveles, enumerando de abajo hacia arriba, es en forma secuencial como 1, 2, 3.

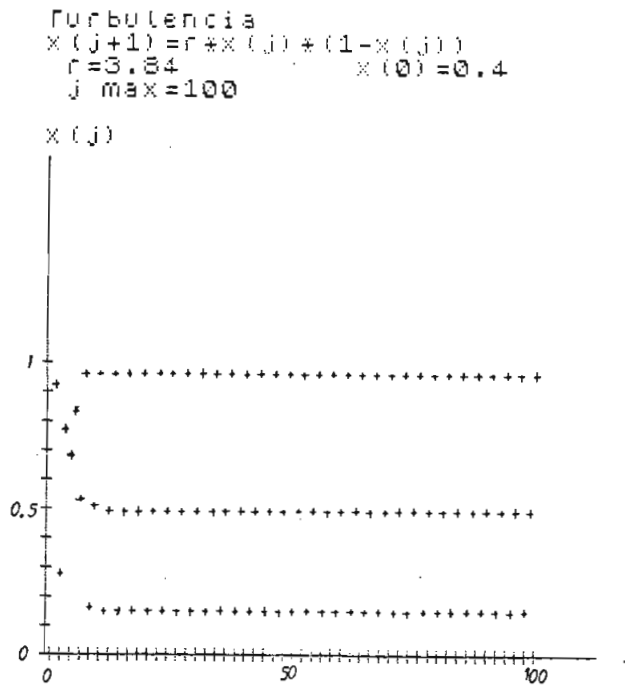


Fig. 2.65.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.84$  y  $X_0 = 0.4$ . Se observa una oscilación de período  $3T$  en régimen permanente.

Para observar la oscilación de período  $3T$ , se ha graficado  $X_{j+1} = f(X_j)$  en la figura 2.67, en donde se puede ver que existen 3 valores dentro de la parábola en régimen permanente.

Al aumentar el valor de  $r$  dentro del intervalo  $A_3$ , se observa otros tipos de comportamiento.

Vamos a analizar el caso  $r = 3.857$ , para  $X_0 = 0.4$  que se encuentra graficado en la figura 2.68. En este gráfico se observa un comportamiento intermitente ya que existe zonas en donde los valores de  $X_j$  se comportan en forma aleatoria y zonas donde se tiene un comportamiento periódico de período  $3T$ .

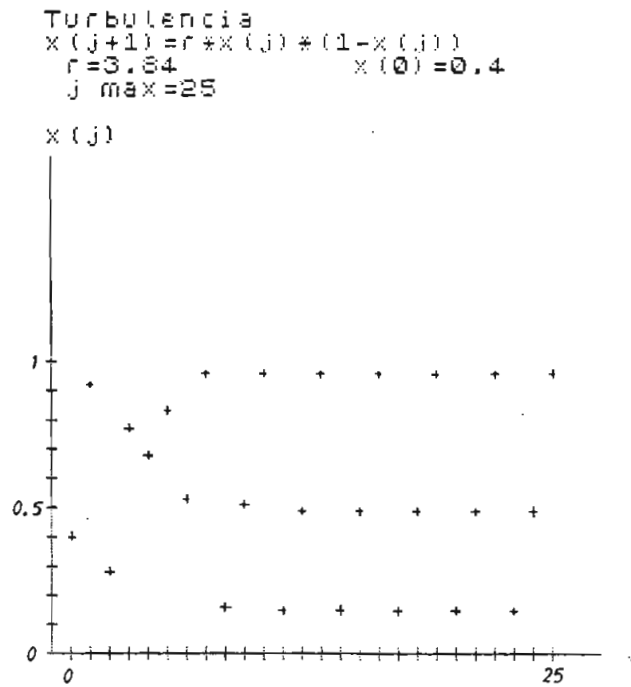


Fig. 2.66.- Gráfico de  $x_j = f(j)$  para observar detalles para  $j$  pequeños,  $r = 3.84$  y  $x_0 = 0.4$ .  
 Se observa una zona de transición.

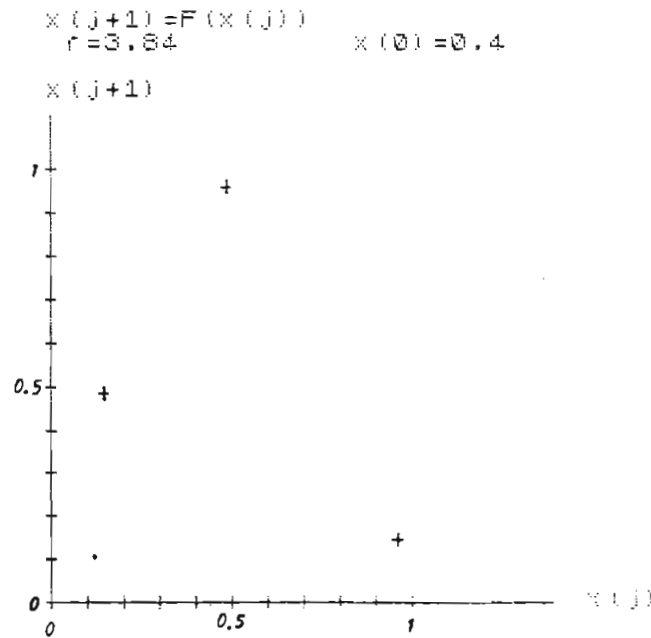


Fig. 2.67.- Gráfico de  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r = 3.84$  y  $x_0 = 0.4$  en régimen permanente.

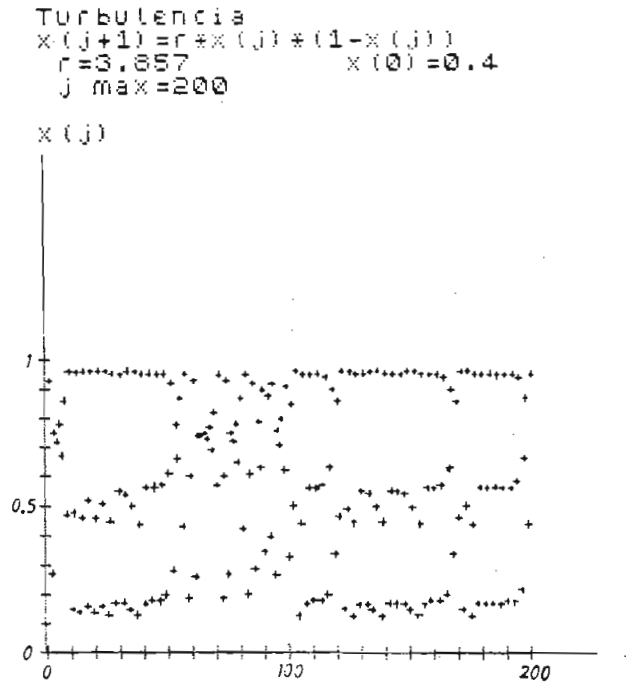


Fig. 2.68.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.857$  y  $X_0 = 0.4$ . Comportamiento intermitente.

Para comprobar que verdaderamente se trata de una oscilación intermitente de período  $3T$ , vamos a graficar lo mismo de la figura 2.68, pero cada tres valores de  $j$ .

En la figura 2.69, se observa claramente las zonas en las cuales se tiene una oscilación de período  $3T$ , porque se tiene un valor constante de  $X_j$  con  $j = 3n$  durante un intervalo.

Para observar el efecto de la condición inicial sobre la zona intermitente, vamos a graficar  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.857$  y  $X_0 = 0.5$ . En la figura 2.70 se encuentra el gráfico  $X_j = f(j)$  para cada  $j$  y en la figura 2.71 se encuentra el gráfico cada 3 valores de  $j$ .

```
Turbulencia
x(j+1)=r*x(j)+(1-x(j))
r=3.857          x(0)=0.4
j max=200
```

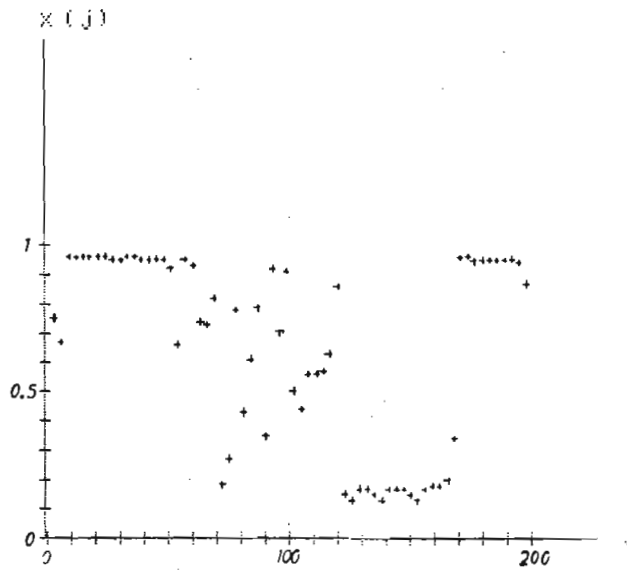


Fig. 2.69.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.857$  y  $X_0 = 0.4$  para cada 3 valores de  $j$ .

```
Turbulencia
x(j+1)=r*x(j)+(1-x(j))
r=3.857          x(0)=0.5
j max=100
```

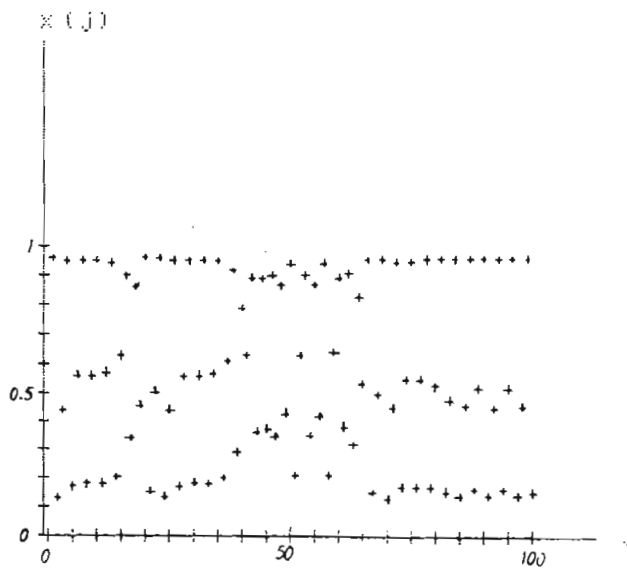


Fig. 2.70.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.857$  y  $X_0 = 0.5$ .



En la figura 2.71, se observa claramente los intervalos en los cuales se tiene una oscilación de período  $3T$ .

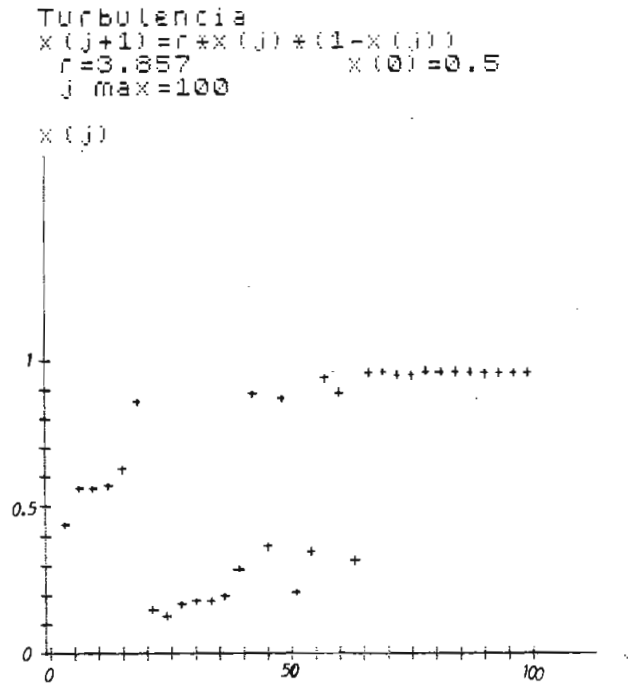


Fig. 2.71.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.857$   
y  $X_0 = 0.5$  para cada 3 valores de  $j$ .

Comparando para las dos condiciones iniciales se observa que existe un comportamiento diferente en la duración de los intervalos en donde se tiene un comportamiento aleatorio y donde se tiene un comportamiento periódico.

Además se puede observar que el inicio de la oscilación y la fase de la oscilación de período  $3T$  son aleatorios, por lo cual podemos decir que a pesar de tener oscilaciones intermitentes de período  $3T$ , estamos en una zona en la cual el comportamiento del sistema dinámico es caótico.

Para reafirmar lo anteriormente dicho vamos a graficar para otro valor de  $r$  dentro del intervalo  $A_3$ . En la figura 2.72 se tiene el gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.861$  y  $X_0 = 0.4$  para cada 3 valores de  $j$ , en donde también se observa el comportamiento intermitente.

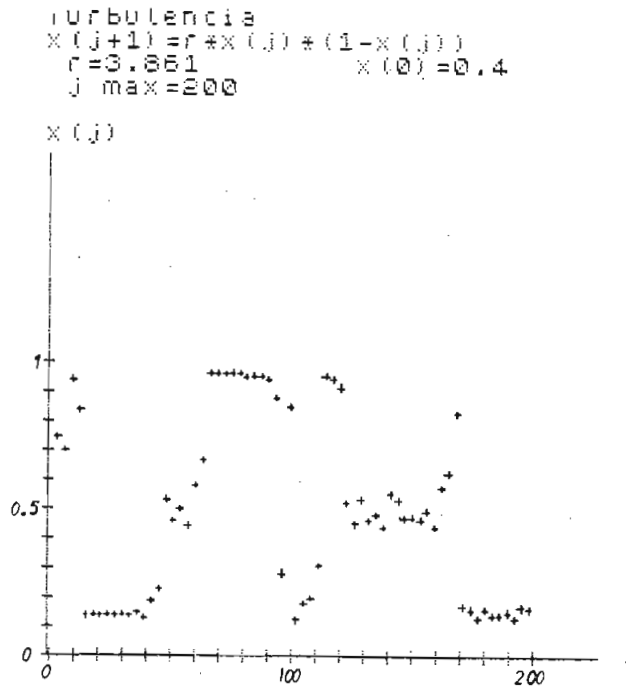


Fig. 2.72.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r = 3.861$  y  $X_0 = 0.4$  para cada 3 valores de  $j$ .

## 2.8. ANALISIS DE LA ECUACION $X_{j+1} = r \sin^2 2\pi X_j$

En las partes anteriores de este capítulo se ha estudiado en detalle las ecuaciones de diferencias del tipo

$$X_{j+1} = r g(X_j)$$

que tienen las siguientes propiedades:

- $g(0) = g(1) = 0$
- tiene un solo máximo en el intervalo  $(0,1)$
- la segunda derivada es negativa en el máximo.

Ahora vamos a observar el comportamiento de una ecuación que tiene las siguientes propiedades:

- $g(0) = g(1) = 0$
- tiene 2 máximos en el intervalo  $(0,1)$

Una ecuación que satisface las condiciones antes mencionadas es la siguiente:

$$X_{j+1} = r \sin^2 2\pi X_j \quad (2.94)$$

Esta ecuación tiene 2 máximos para los valores de  $X_j$  de 0.25 y 0.75. En la figura 2.73 se encuentra el gráfico de  $X_{j+1} = f(X_j)$  para la ecuación (2.94).

Para dar inicio al análisis, vamos a graficar  $X_j = f(r)$  para el intervalo de  $r$  de 0 a 1 y condición inicial  $X_0 = 0.4$ . Este gráfico se encuentra en la figura 2.74.

En la figura 2.74 se observa 2 intervalos de  $r$  en el cual se tiene un comportamiento cualitativamente análogo al observado en el análisis de la ecuación  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$ . Para observar mejor, se ha realizado una ampliación de estos intervalos.

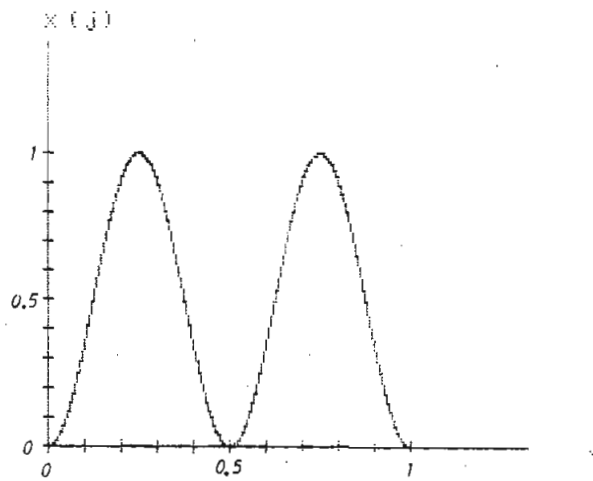


Fig. 2.73.- Gráfico de  $X_{j+1} = f(X_j)$  para la ecuación  
 $X_{j+1} = r \sin^2 2\pi X_j$  para el intervalo  
 $0 \leq X_j \leq 1$ .

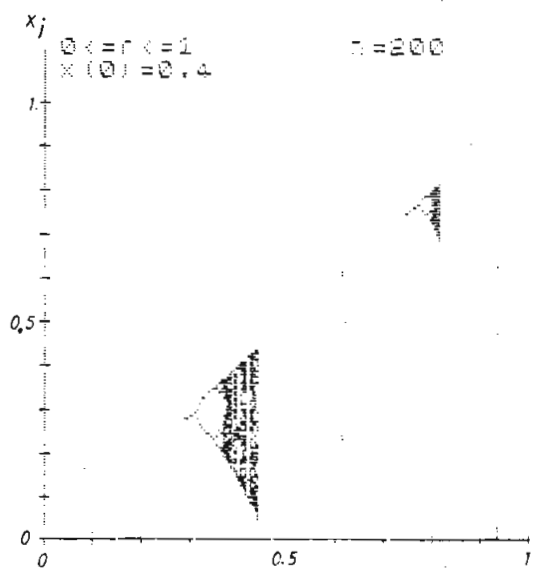


Fig. 2.74.- Gráfico de  $X_j = f(r)$  para la ecuación  
 $X_{j+1} = r \sin^2 2\pi X_j$  para  $0 \leq r \leq 1$  en  
régimen permanente para  $X_0 = 0.4$ .

En la figura 2.75 se encuentra el gráfico de la ampliación del intervalo de  $r$  de  $0.3 \leq r \leq 0.45$ . Para el intervalo  $0.75 \leq r \leq 0.815$  se encuentra la ampliación en la figura 2.76.

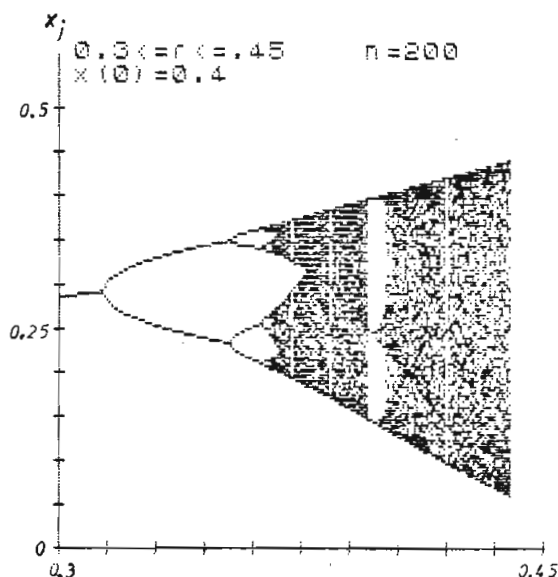


Fig. 2.75.- Gráfico de  $X_j = f(r)$  para el intervalo  $0.3 \leq r \leq 0.45$  en régimen permanente.

Con los gráficos 2.75 y 2.76 se confirma lo anteriormente dicho de que en estos intervalos se tiene un comportamiento cualitativamente igual al analizado en las partes anteriores de este capítulo.

Esto nos indica la posibilidad de analizar sistemas dinámicos más complejos en base a la respuesta que tiene un sistema tan simple como  $X_{j+1} = r X_j(1 - X_j)$ . Se ha observado que el sistema dinámico más complejo tiene un conjunto de intervalos en el cual se observa un comportamiento que ya se puede decir que es universal.

Para observar la influencia de la condición inicial en régimen permanente, vamos a graficar  $X_j = f(r)$  para la condición inicial  $X_0 = 0.7$ ,

en la figura 2.77.

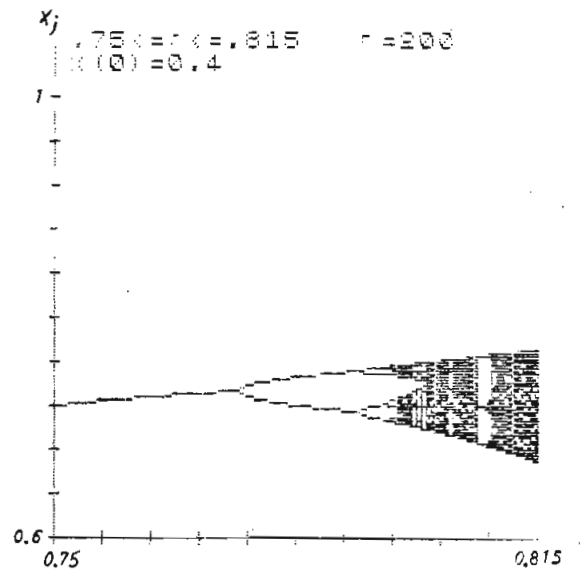


Fig. 2.76.- Gráfico de  $x_j = f(r)$  para el intervalo  $0.75 \leq r \leq 0.815$  en régimen permanente.

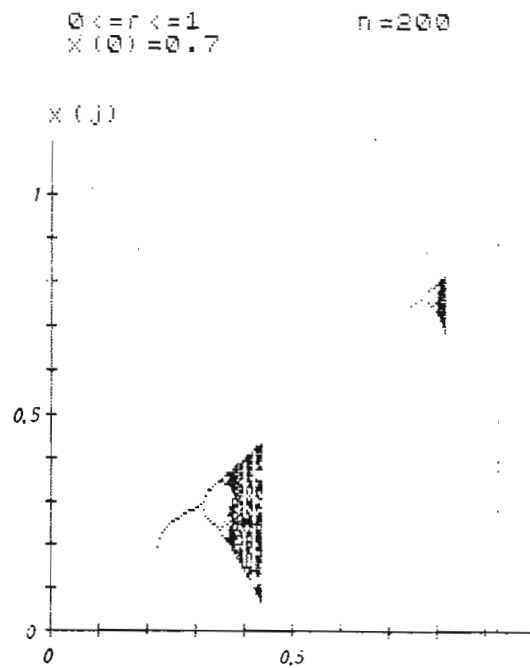


Fig. 2.77.- Gráfico de  $x_j = f(r)$  para  $0 \leq r \leq 1$  y  $x_0 = 0.7$  en régimen permanente.

Observando las figuras 2.74 y 2.77, se observa que la respuesta es cualitativamente igual en ambos casos.

Vamos a observar el comportamiento en función de  $j$ , por lo cual vamos a obtener gráficos de  $X_j = f(j)$  para varios valores de  $r$  en los dos intervalos señalados anteriormente.

Primeramente vamos a observar en el intervalo  $0.3 \leq r \leq 0.45$ . En la figura 2.78, se muestra el gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.3$ , en el cual se observa que en régimen permanente, tiende a un valor constante.

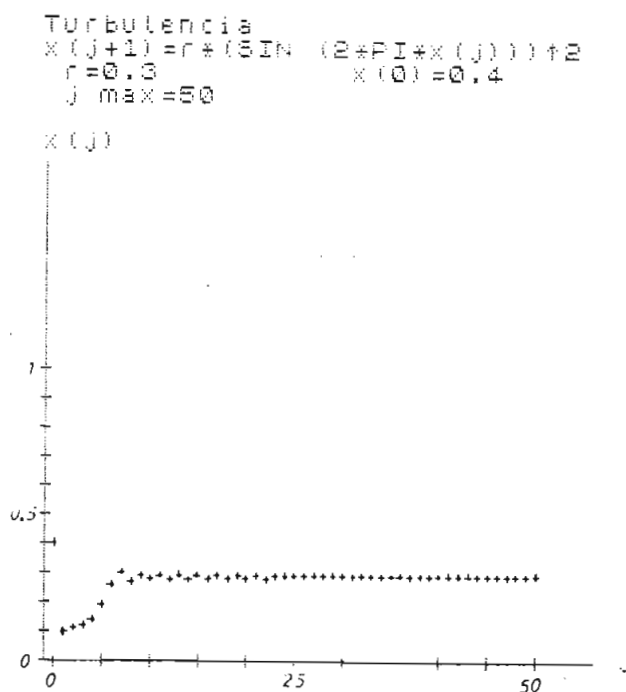


Fig. 2.78.- Gráfico de  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.3$   
y  $X_0 = 0.4$ . En régimen permanente  
tiende a un valor constante.

Ahora aumentamos el valor de  $r$  a 0.33 y en la figura 2.79, se observa como en régimen permanente, tiende a una oscilación de período  $2T$ . Además se ha graficado en la figura 2.80 la función  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 0.33$  y  $X_0 = 0.4$ , en donde se observa que en régimen permanente tiende a dos valores alrededor del primer máximo.

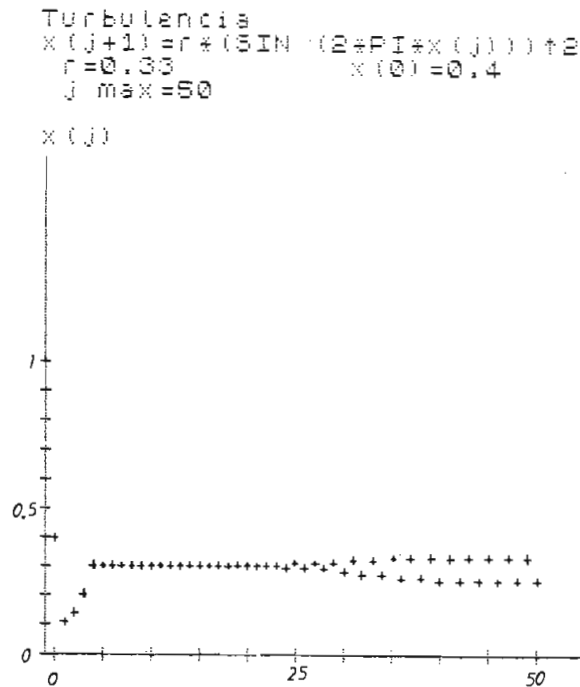


Fig. 2.79.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.33$  y  $X_0 = 0.4$ . Oscilación de período  $2T$ .

Para  $r = 0.36$  se presenta el caso de una oscilación de período  $4T$  para la condición inicial  $X_0 = 0.4$ . En la figura 2.81, se ha graficado  $X_j = f(j)$  y en la figura 2.82, se tiene el gráfico de  $X_{j+1} = f(X_j)$ , en el cual se observa que para régimen permanente, tiende a 4 valores que se encuentran alrededor del primer máximo.

Ahora tenemos la función  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.37$  y  $X_0 = 0.4$  en la cual



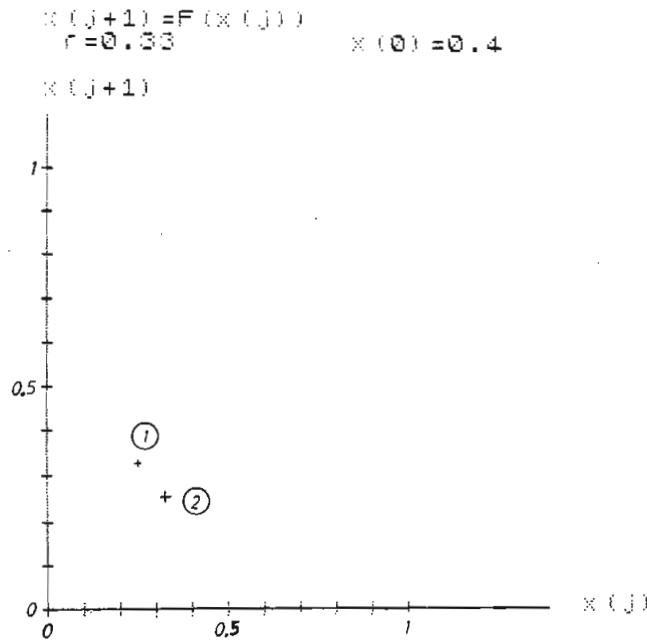


Fig. 2.80.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r=0.33$  y  $x_0=0.4$ .

En régimen permanente tiene 2 valores.

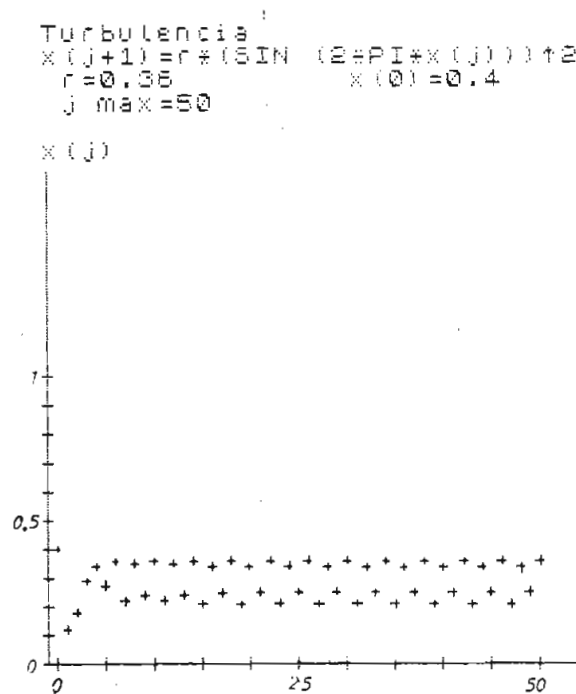


Fig. 2.81.- Gráfico  $x_j = f(j)$  para  $r=0.36$  y  $x_0=0.4$ .

Oscilación de período  $4T$ .

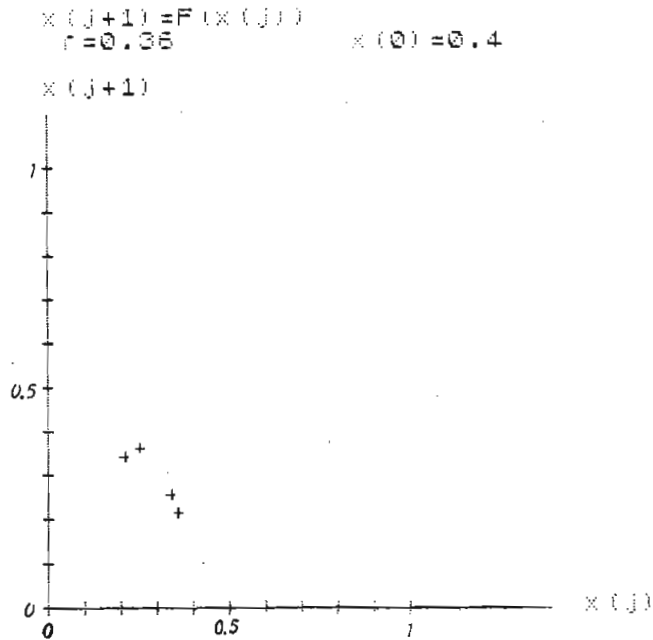


Fig. 2.82.- Gráfico  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 0.36$  y  $X_0 = 0.4$ . En régimen permanente se tiene 4 valores.

en régimen permanente se tienen 2 bandas, en donde los valores de  $X_j$  alternan entre 2 bandas y los valores de  $X_j$  caen en forma aleatoria en el interior de cada banda. Esto se muestra en la figura 2.83. También se ha graficado  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 0.37$  y  $X_0 = 0.4$ , en donde se observa claramente como tienden los valores a 2 bandas en régimen permanente. Esto se muestra en la figura 2.84.

Ahora vamos a observar varias distribuciones  $X_j = f(j)$  para valores de  $r$  en el segundo intervalo que es  $0.75 \leq r \leq 0.815$ .

Para  $r = 0.76$  y  $X_0 = 0.4$ , en régimen permanente tiende a un valor cons

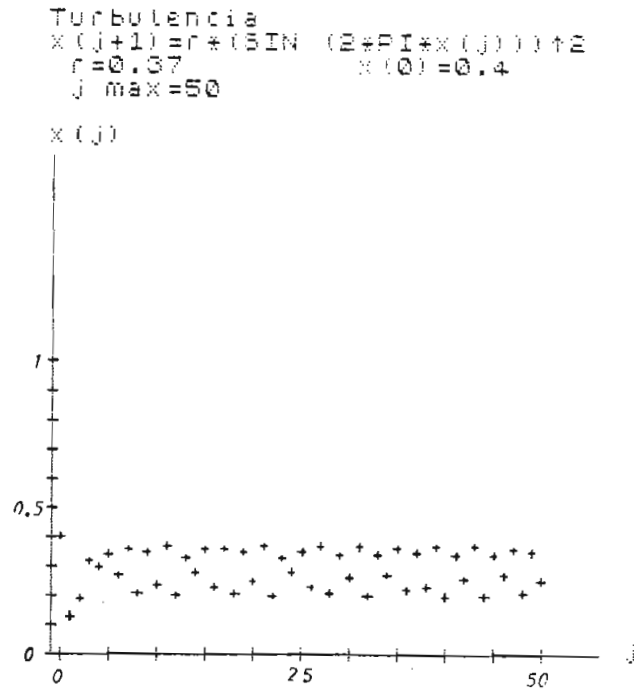


Fig. 2.83.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.37$  y  $X_0 = 0.4$ .

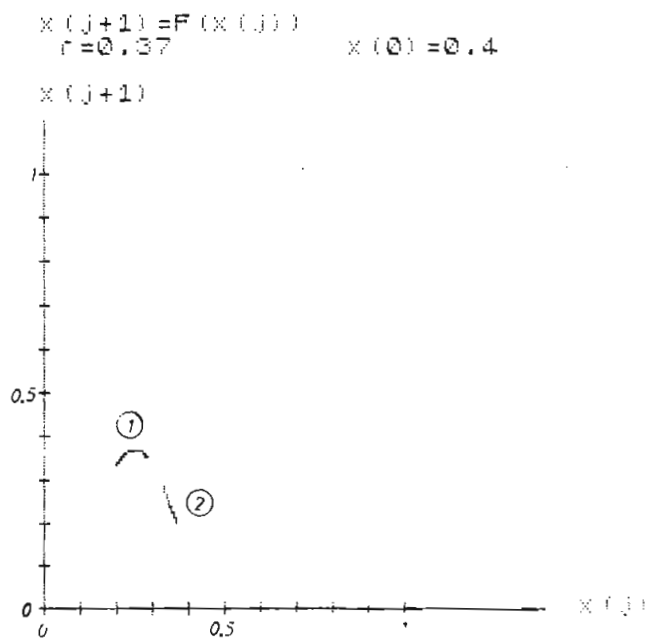


Fig. 2.84.- Gráfico  $X_{j+1} = f(X_j)$  para  $r = 0.37$  y  $X_0 = 0.4$ .  
 En régimen permanente los valores de  $X_j$  tienden a 2 bandas.

tante. Esto se muestra en la figura 2.85.

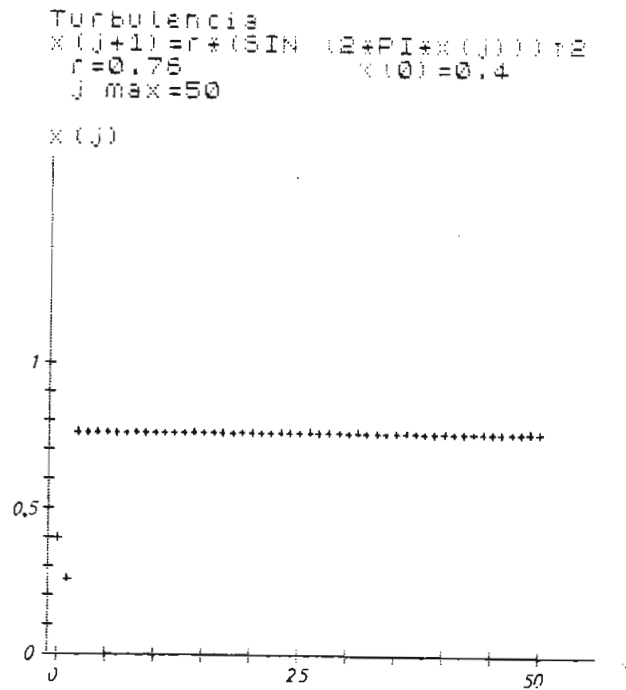


Fig. 2.85.- Gráfico  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.76$  y  $X_0 = 0.4$ . En régimen permanente tiende a un valor constante.

Para observar la oscilación de período  $2T$ , se ha graficado para  $r = 0.79$  y  $X_0 = 0.4$  las funciones  $X_j = f(j)$  y  $X_{j+1} = f(X_j)$  en las figuras 2.86 y 2.87 respectivamente.

En la figura 2.87, se observa que en régimen permanente tiende a 2 valores, alrededor del segundo máximo.

Para  $r = 0.794$ , se tiene una oscilación de período  $4T$  como se muestra en la figura 2.88. Para observar mejor este caso, se ha graficado  $X_{j+1} = f(X_j)$  en régimen permanente, en donde se observa de  $X_j$  toma 4

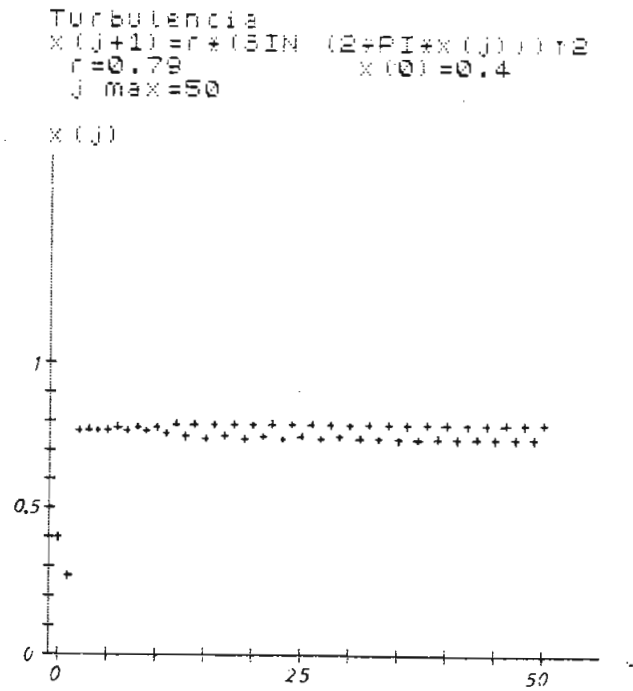


Fig. 2.86.- Gráfico  $x_j = f(j)$  para  $r = 0.79$  y  $x_0 = 0.4$ . Oscilación de período  $2T$ .

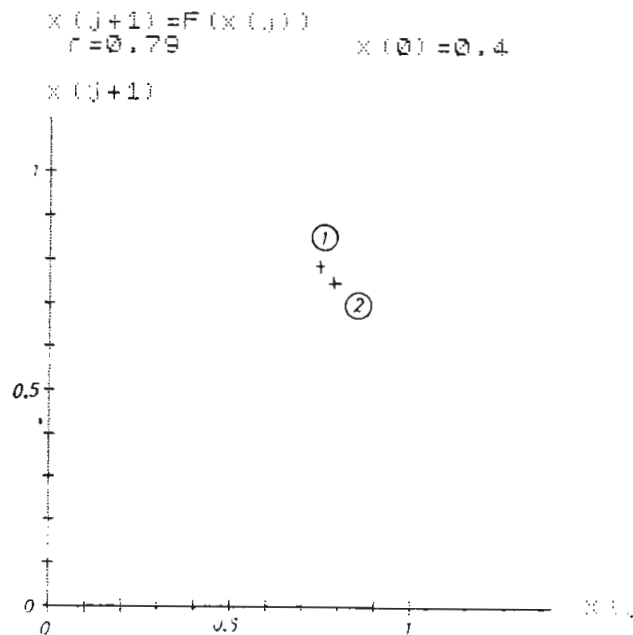


Fig. 2.87.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r = 0.79$  y  $x_0 = 0.4$ , en régimen permanente se tienen 2 valores.

valores. Se muestra en la figura 2.89.

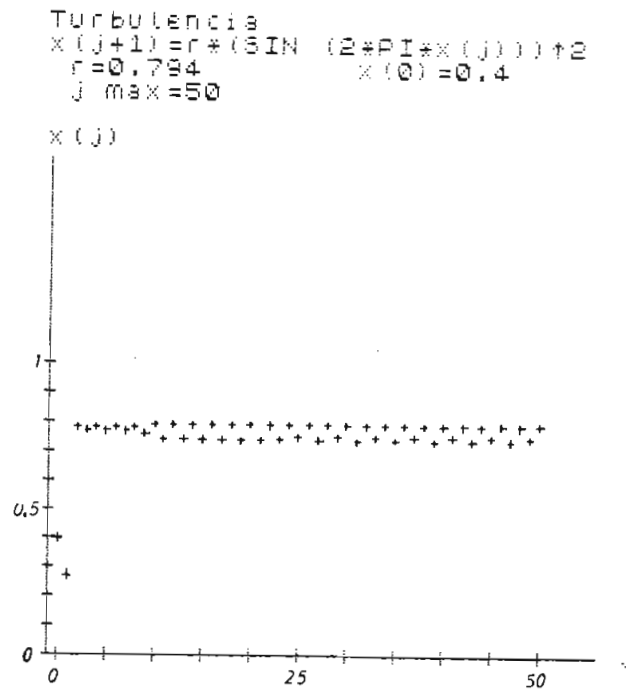


Fig. 2.88.- Gráficos  $X_j = f(j)$  para  $r = 0.794$  y  
 $X_0 = 0.4$ . Oscilación de período  $4T$ .

Para el caso  $r = 0.798$ , se ha graficado  $X_{j+1} = f(X_j)$ , en donde se observa que los valores de  $X_j$  alternan entre dos bandas y además en cada banda, los valores se encuentran en forma aleatoria. Esto se muestra en la figura 2.90.

Como conclusión de esto, se puede observar que el movimiento de los  $X_j$  para el intervalo de  $r$ ,  $0.3 \leq r \leq 0.45$ , es alrededor del primer máximo. Esto quiere decir que toman valores los  $X_j$  en el intervalo  $0 \leq X_j \leq 0.5$ .

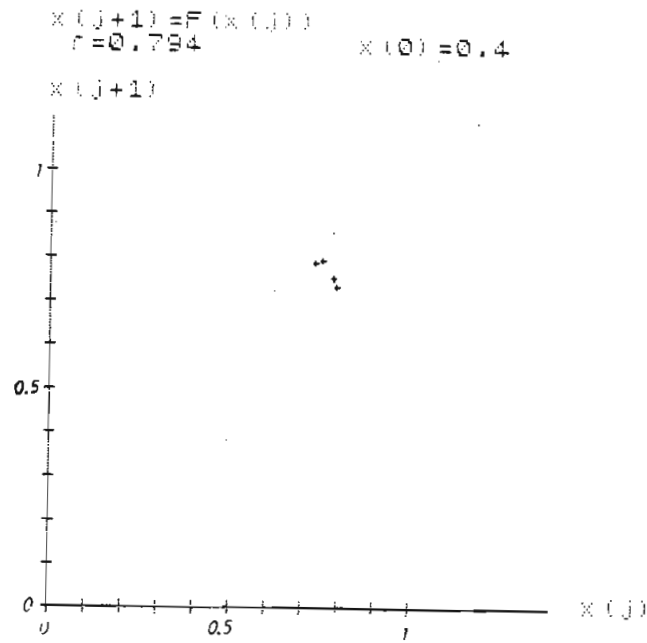


Fig. 2.89.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r = 0.794$  y  $x_0 = 0.4$ ,  
en régimen permanente tiende a 4 valores.

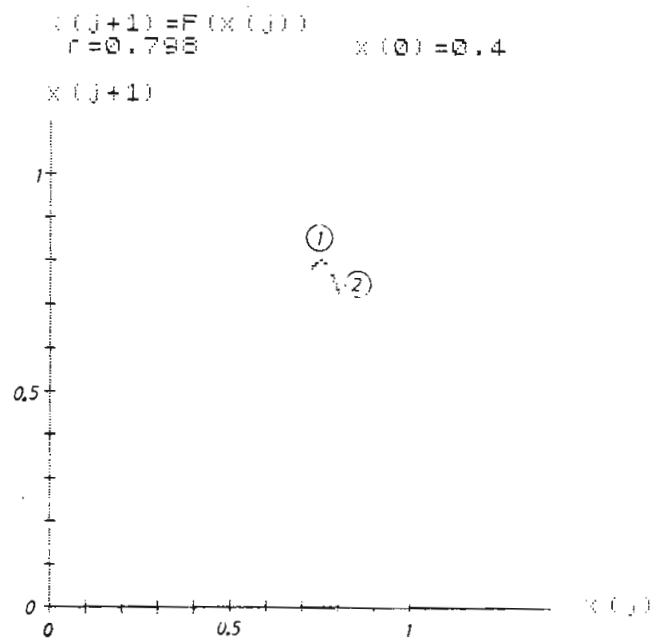


Fig. 2.90.- Gráfico  $x_{j+1} = f(x_j)$  para  $r = 0.798$  y  $x_0 = 0.4$ .  
Los valores  $x_j$  alternan entre 2 bandas.

Para  $r$  en el intervalo  $0.75 \leq r \leq 0.815$ , los valores de  $x_j$  se mueven al rededor del segundo máximo, es decir toman valores los  $x_j$  en el intervalo  $0.5 \leq x_j \leq 1$ .

Se observa que para cada máximo existe el comportamiento descrito anteriormente para la función de un sólo máximo en el intervalo  $0 < x_j < 1$ . Es decir que existe una relación entre el número de máximos de la función y el número de transiciones de régimen determinista a caótico.

Con esto se da un ejemplo más de la universalidad de la transición en una función con 2 máximo en el intervalo  $0 < x_j < 1$ .



## C A P I T U L O     I I I

### ANALISIS DE UN    OSCILADOR    ELECTRONICO: TRANSICION AL REGIMEN CAOTICO

#### 3.1. DESCRIPCION DEL CIRCUITO BASICO.

Los sistemas dinámicos no lineales pueden tener diferentes comportamientos y muchos de los cuales son de naturaleza complejos.

Cuando un circuito eléctrico incluye componentes no lineales , estos pueden mostrar respuestas complicadas, a pesar de ser circuitos sumamente simples.

Estos circuitos pueden presentar diferentes comportamientos como son oscilaciones periódicas, movimientos o respuestas caóticas y muchos comportamientos más.

El conocimiento del mecanismo de una respuesta caótica es de gran interés para quienes tienen que diseñar sistemas que tengan una alta confiabilidad.

Por ejemplo tenemos el ruido que es un caso de respuesta caótica. En muchos casos el ruido externo no es siempre la causa de comportamientos no deseados, sino que se debe a características propias del circuito.

El circuito a ser analizado consiste de dos conductancias no lineales,

una negativa y otra positiva y un circuito resonante. Este circuito se muestra en la figura 3.1.

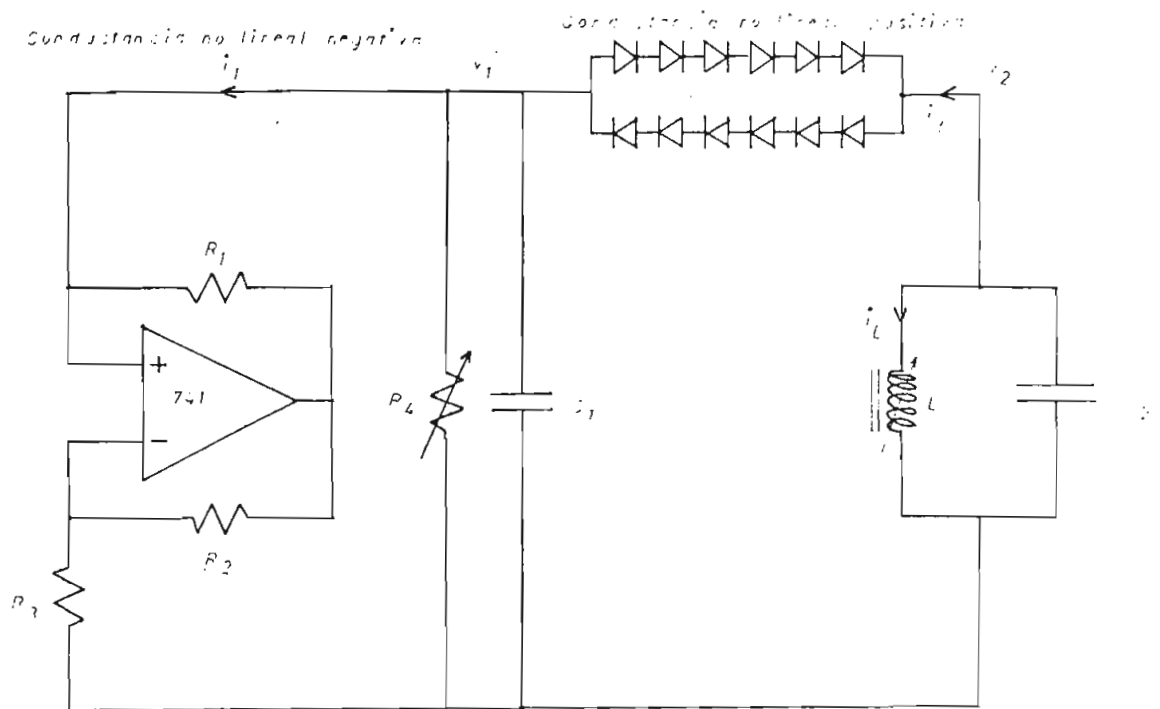


Fig. 3.1.- Circuito electrónico a ser analizado.

Este circuito ha sido propuesto por Shinriki y luego modificado por Van der Pol [3].

Vamos a analizar a este circuito desde un punto de vista cualitativo.

### 3.2. CARACTERISTICA CORRIENTE - VOLTAJE DE LAS CONDUCTANCIAS NO LINEALES.

Primeramente vamos a analizar la conductancia no lineal negativa. Se basa en un amplificador operacional muy común que es el 741.

El circuito básico es el siguiente mostrado en la figura 3.2.

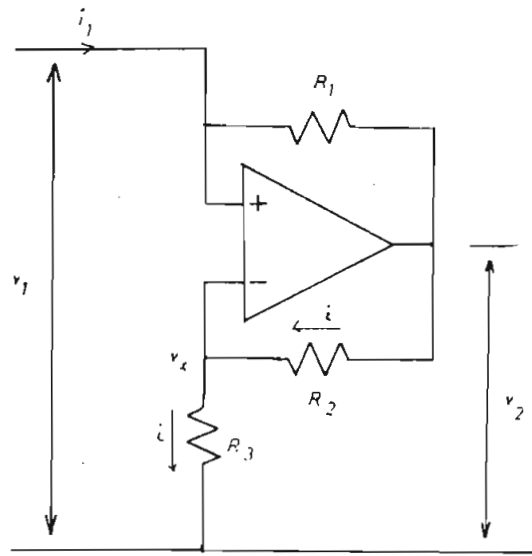


Fig. 3.2.- Circuito de la conductancia negativa no lineal.

Como no ingresa corriente por los terminales positivo y negativo de la entrada del amplificador operacional, por las resistencias  $R_2$  y  $R_3$ , fluye la misma corriente  $i$ . Podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$v_2 - v_X = i R_2 \quad (3.1)$$

$$v_X = i R_3 \quad (3.2)$$

El voltaje entre los terminales de entrada es cero. Esto significa que  $v_X = v_1$  y reemplazando en las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tiene:

$$v_2 - v_1 = i R_2 \quad (3.3)$$

$$v_1 = i R_3 \quad (3.4)$$

Despejando la corriente  $i$  de (3.4) se tiene:

$$i = \frac{v_1}{R_3} \quad (3.5)$$

reemplazando (3.5) en (3.3) se tiene

$$v_2 - v_1 = v_1 \frac{R_2}{R_3} \quad (3.6)$$

Despejando  $\frac{v_2}{v_1}$  de la ecuación (3.6) se tiene

$$\frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad (3.7)$$

Por otra parte se tiene la siguiente ecuación

$$v_1 - v_2 = i_1 R_1 \quad (3.8)$$

de donde se tiene

$$v_2 = v_1 - i_1 R_1 \quad (3.9)$$

Reemplazando (3.9) en (3.7) se obtiene lo siguiente

$$\frac{v_1 - i_1 R_1}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad (3.10)$$

de donde

$$1 - \frac{i_1 R_1}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad (3.11)$$

a partir de la expresión (3.11) se obtiene la función de transferencia de  $\frac{i_1}{v_1}$

$$\frac{i_1}{v_1} = - \frac{R_2}{R_3 R_1} \quad (3.12)$$

De donde se puede observar que se trata de una conductancia negativa.

También hay que notar que en condiciones reales, se va a tener un voltaje máximo de salida debido a la saturación que sufre el amplificador operacional. El voltaje puede variar entonces entre  $\approx \pm V_{CC}$ , en donde  $V_{CC}$  es el voltaje máximo de salida.

Para observar claramente este fenómeno se ha graficado la función  $v_2 = f(v_1)$  en la figura 3.4.

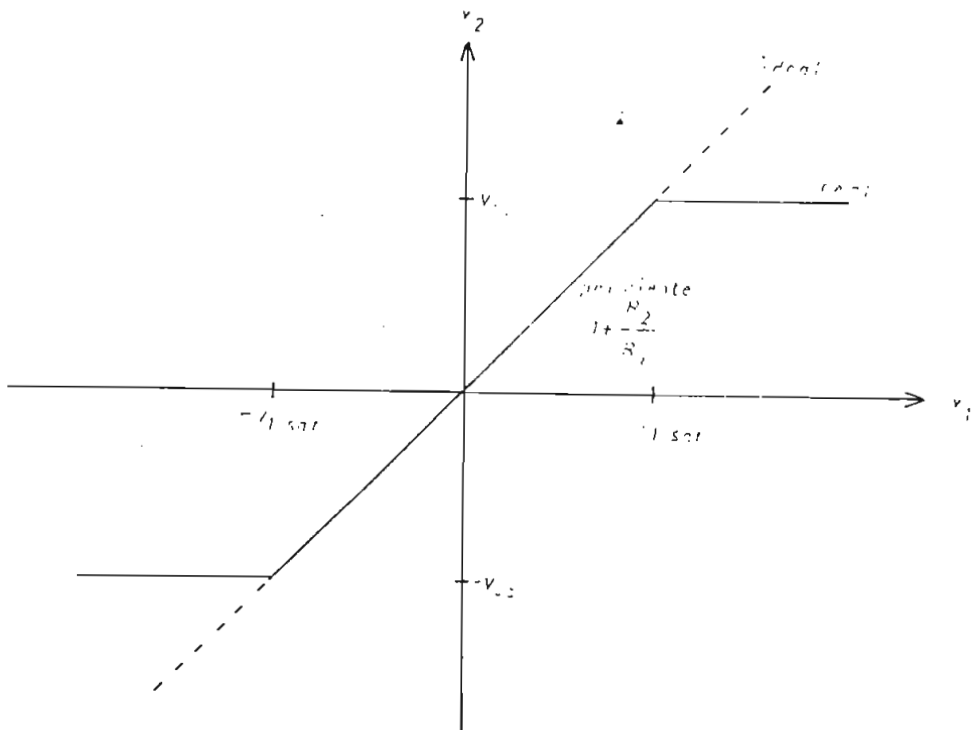


Fig. 3.4.- Gráfico de  $v_2 = f(v_1)$ , curva ideal y curva real.

Entonces el voltaje  $v_2$  puede llegar a ser máximo  $V_{CC}$  por lo cual podemos escribir

$$\frac{V_{CC}}{V_{1sat}} = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad (3.13)$$

de donde

$$V_{1sat} = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_{CC} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) nos da el voltaje  $v_1$  al cual el amplificador se satura.

Entonces la ecuación (3.12) es válida en el intervalo  $-V_{1sat} \leq v_1 \leq V_{1sat}$ . Para  $v_1 > V_{1sat}$  y  $v_1 < -V_{1sat}$  se tiene un comportamiento diferente debido a la saturación del amplificador operacional.

Primeramente analizaremos el caso  $v_1 > V_{1sat}$ .

El voltaje  $v_2$  en este caso es constante e igual a  $V_{CC}$ . Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} v_2 &= V_{CC} = \text{constante} \\ V_{CC} &= v_2 = v_1 - i_1 R_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

de donde

$$i_1 R_1 = v_1 - V_{CC} \quad (3.16)$$

Entonces se tiene la siguiente ecuación

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v_1 - \frac{V_{CC}}{R_1} \quad (3.17)$$

Ahora para el caso  $v_1 < -V_{1sat}$ , se tiene que el voltaje  $v_2$  es constante e igual a  $-V_{CC}$ .

$$v_2 = -V_{CC} = \text{constante}$$

$$-V_{CC} = v_1 - i_1 R_1 \quad (3.18)$$

de donde

$$i_1 R_1 = v_1 + V_{CC} \quad (3.19)$$

Entonces se tiene la siguiente ecuación

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v_1 + \frac{V_{CC}}{R_1} \quad (3.20)$$

En resumen la función  $f$  que relaciona  $i_1 = f(v_1)$  es la siguiente:

para  $-V_{1sat} \leq v_1 \leq V_{1sat}$

$$i_1 = -\frac{R_2}{R_3 R_1} v_1$$

para

$$v_1 > V_{1sat}$$

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v_1 - \frac{V_{CC}}{R_1}$$

para

$$v_1 < -V_{1sat}$$

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v_1 + \frac{V_{CC}}{R_1}$$

en donde

$$V_{1sat} = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_{CC}$$

En la figura 3.5 se muestra el gráfico de  $i_1 = f(v_1)$ , donde se muestra las diferentes rectas que forman la función.

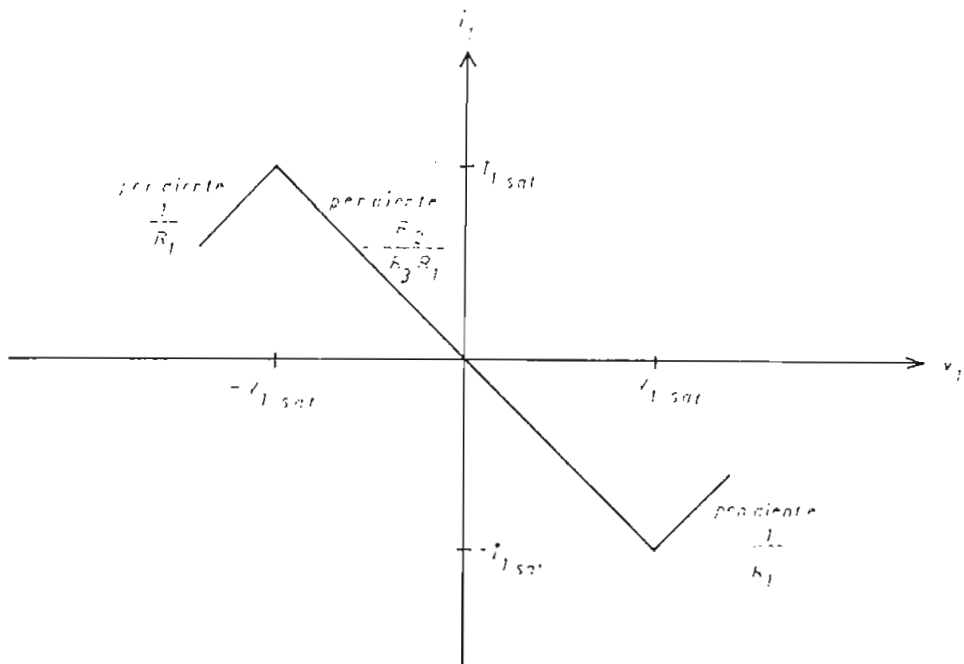


Fig. 3.5.- Gráfico de  $i_1 = f(v_1)$ , resultante del cálculo analítico.

Para medir experimentalmente la característica corriente - voltaje el



circuito utilizado tiene los siguientes valores mostrados en la figura 3.6.

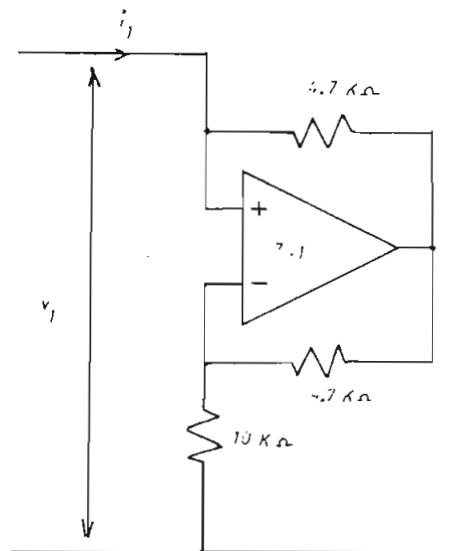


Fig. 3.6.- Diagrama del circuito del cual se midió la característica corriente - voltaje en forma experimental.  $i_1 = f(v_1)$ .

Del circuito de la figura 3.6, se obtuvo la característica corriente - voltaje mostrada en la figura 3.7, para un voltaje de fuente de  $\pm 15$  voltios.

Analizando los resultados teóricos y experimentales (Fig. 3.7 y 3.5), se observa que son cualitativamente iguales.

Ahora vamos a analizar la característica corriente - voltaje para la conductancia positiva.

El circuito de la conductancia positiva se muestra en la figura 3.8, en el cual los diodos son de germanio del tipo 1N276.

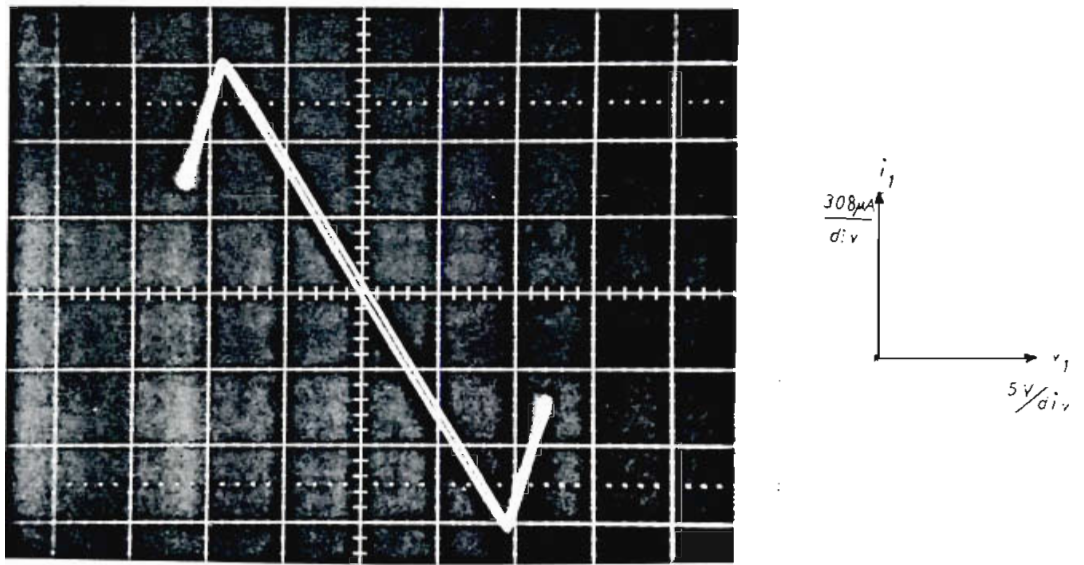


Fig. 3.7.- Característica corriente - voltaje experimental para voltaje de polarización de  $\pm 15$  Voltios.

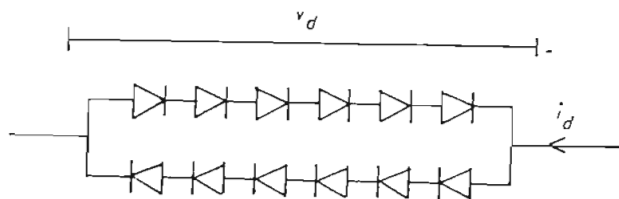


Fig. 3.8.- Conductancia positiva no lineal.

El circuito utilizado para la medición se muestra en la figura 3.9.

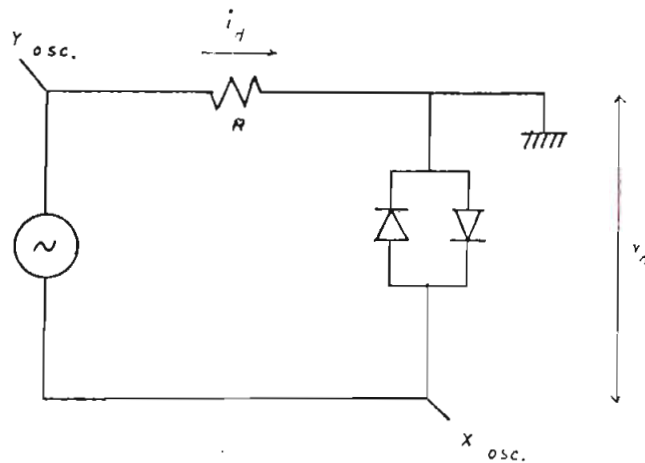


Fig. 3.9.- Circuito utilizado para medir la característica corriente - voltaje de conductancia no lineal positiva.

Teóricamente la corriente que circula por el diodo en función del voltaje en bornes del diodo está dada por:

$$I = I_0 (e^{qV_d/KT\eta} - 1) \quad (3.21)$$

en donde  $q$  = carga de un electrón

$T$  = temperatura en  $^{\circ}K$

$K$  = constante de Boltzmann

$$1 \leq \eta \leq 2$$

Ahora si se tiene diodos en sentidos opuestos, mientras el uno conduce, el otro estará cortado y viceversa.

Para obtener teóricamente la característica corriente - voltaje de dos diodos en sentidos contrarios, basta superponer las características

de 2 diodos, como se muestra en la figura 3.10.

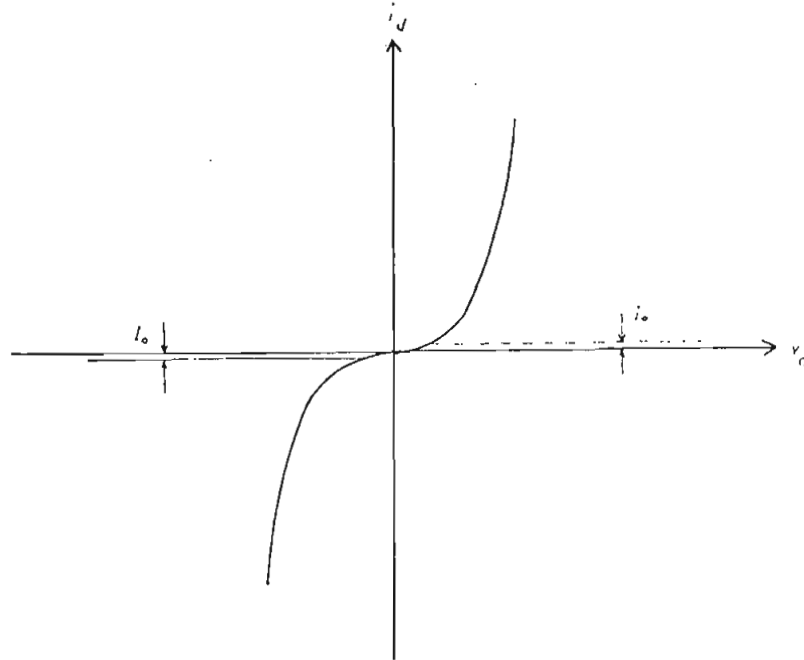


Fig. 3.10.- Características Corriente - Voltaje de 2 diodos conectados en sentidos opuestos. Superposición de dos características.

La diferencia en la característica corriente - voltaje del grupo de diodos de la figura 3.8, es en el voltaje de conducción, que será igual a la suma del voltaje de conducción de cada uno de los diodos.

En la figura 3.11, se muestra la foto de la característica voltaje - corriente, obtenida en forma experimental, que es cualitativamente igual a la característica obtenida teóricamente.

### 3.3. MODELO MATEMATICO DEL CIRCUITO ELECTRONICO. ECUACIONES DE ESTADO.

En esta parte vamos a obtener un modelo matemático que describa la dinámica del sistema.

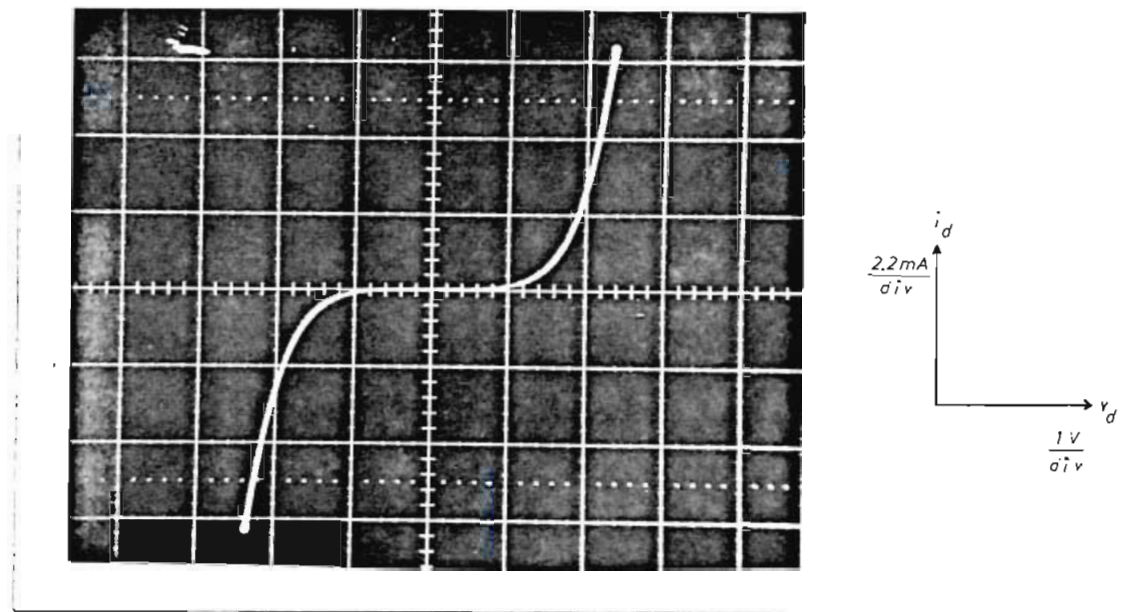


Fig. 3.11.- Característica corriente - voltaje obtenida experimentalmente.

Primeramente vamos a realizar una aproximación de las características corriente - voltaje de los elementos no lineales. [3].

Para la conductancia negativa no lineal podemos aproximar la característica corriente - voltaje a la siguiente ecuación:

$$i_1(v_1) = - a_1 v_1 + a_3 v_1^3 \quad (3.22)$$

en donde  $a_1 > 0$  ,  $a_3 > 0$

en la figura 3.12, se muestran las curvas tanto experimental y aproximada de la conductancia no lineal negativa.

Para valores de  $v_1$  pequeños, existe un predominio del término lineal

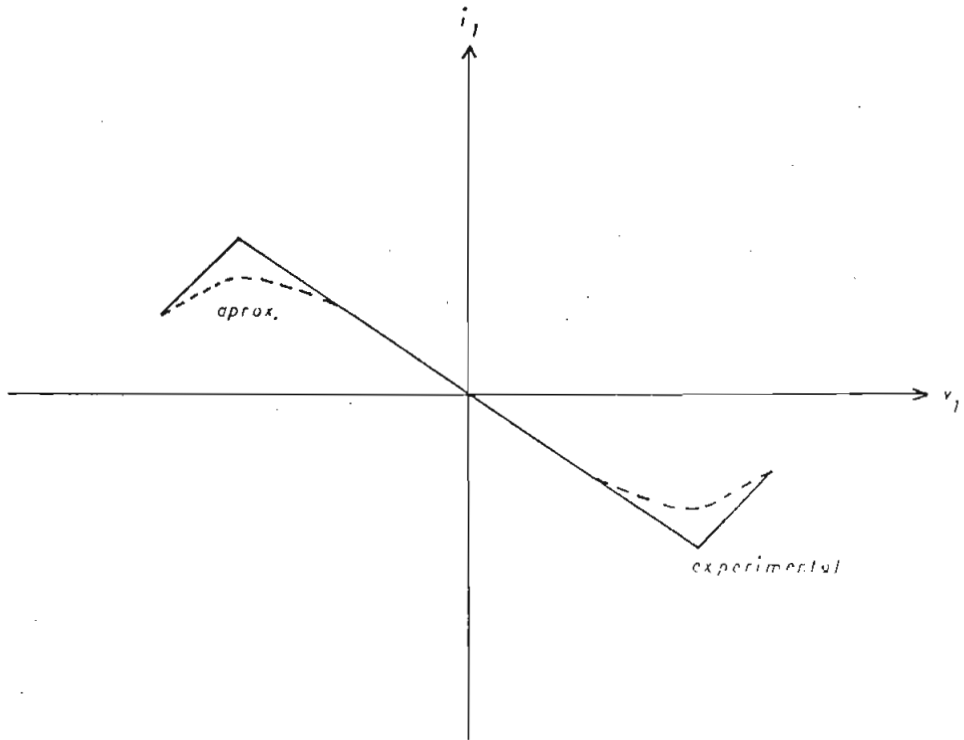


Fig. 3.12.- Características corriente - voltaje, aproximada y experimental.

-  $a_1 v_1$ . A medida que aumenta el valor de  $v_1$ , predomina el término no lineal  $a_3 v_1^3$ .

La conductancia positiva no lineal, se puede aproximar a la siguiente ecuación:

$$i_d(v_d) = b_1 v_d + b_3 v_d^3 \quad (3.23)$$

en donde  $b_1 > 0$  ,  $b_3 > 0$

Para observar la aproximación que se realiza, en la figura 3.13 , se muestran las curvas aproximada y experimental de la conductancia positiva no lineal.

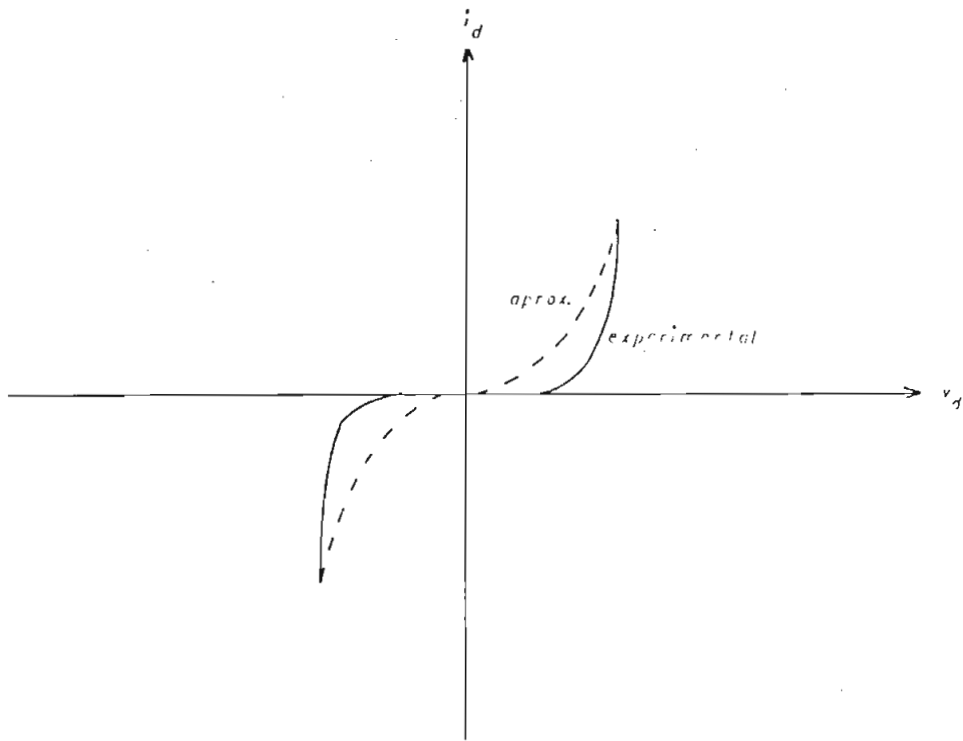


Fig. 3.13.- Características voltaje - corriente,  
experimental y aproximada.

Aplicando la ecuación 3.23 al circuito de la figura 3.1, se tiene la siguiente ecuación

$$i_d = b_1(v_2 - v_1) + b_3 (v_2 - v_1)^3 \quad (3.24)$$

Para un análisis cualitativo, las aproximaciones realizadas en las ca racterísticas corriente voltaje son razonables y representan adecuadamente al circuito.

Vamos a escribir las ecuaciones de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ , por lo cual va mos a dibujar el circuito con las corrientes y sus sentidos. Esto se muestra en la figura 3.14.

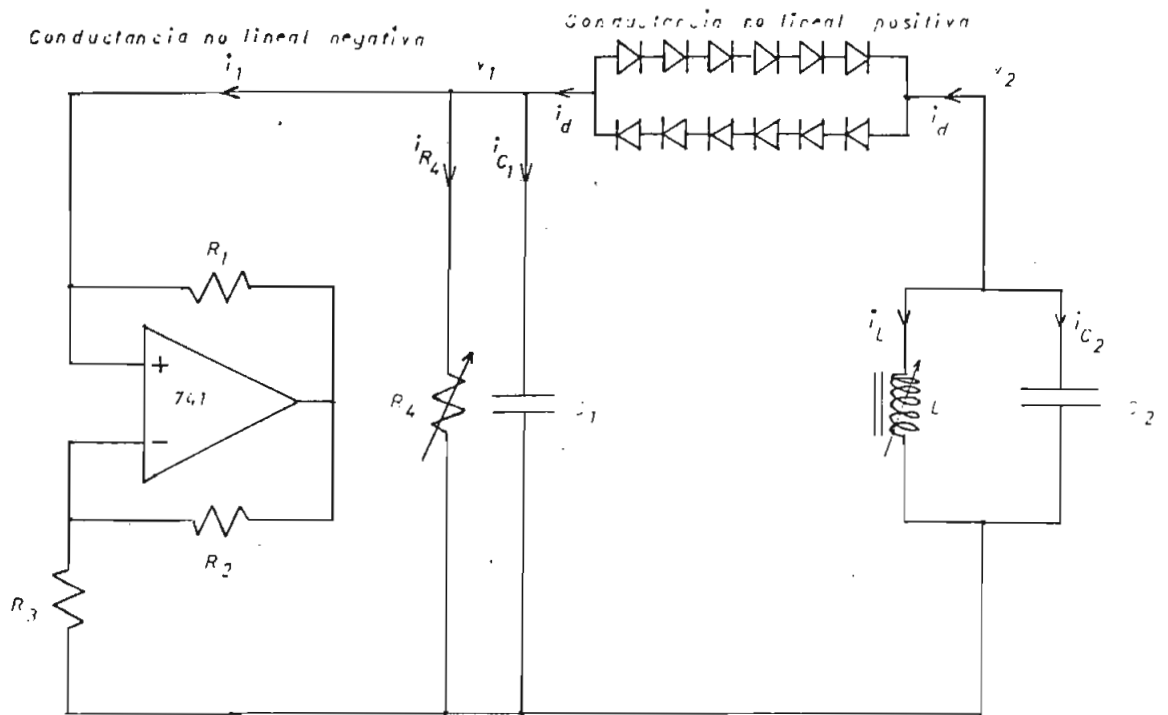


Fig. 3.14.- Sentido de corrientes y voltajes para el circuito electrónico.

Para el nodo 1 se puede escribir la siguiente ecuación:

$$i_{C1} = -i_{R4} - i_1 + i_d \quad (3.25)$$

También se tienen las siguientes relaciones para el condensador  $C_1$  y para la resistencia  $R_4$ :

$$i_{C1} = C_1 \frac{dv_1}{dt} \quad (3.26)$$

y

$$i_{R4} = \frac{v_1}{R_4} \quad (3.27)$$



Reemplazando (3.26), (3.27), (3.24) y (3.22) en la ecuación (3.25) se tiene:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = - \frac{v_1}{R_4} + a_1 v_1 - a_3 v_1^3 + b_1(v_2 - v_1) + b_3(v_2 - v_1)^3 \quad (3.28)$$

Para el nodo 2 se puede escribir la siguiente ecuación de corrientes:

$$i_{c2} = - i_L - i_d \quad (3.29)$$

Se pueden obtener la siguiente relación para  $C_2$

$$i_{c2} = C_2 \frac{d v_2}{dt} \quad (3.30)$$

Reemplazando (3.30) y (3.24) en (3.29) se tiene

$$C_2 \frac{d v_2}{dt} = - i_L - b_1(v_2 - v_1) - b_3(v_2 - v_1)^3 \quad (3.31)$$

Para el inductor L se puede escribir la ecuación que relaciona el voltaje y la corriente como

$$L \frac{d i_L}{dt} = v_2 \quad (3.32)$$

Vamos a realizar un cambio de notación en las ecuaciones (3.28), (3.31)

y (3.32) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x &= v_1 \\y &= v_2 \\z &= i_L\end{aligned}\tag{3.33}$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}C_1 \dot{x} &= \left(a_1 - \frac{1}{R_4}\right) x - a_3 x^3 + b_1(y - x) + b_3(y - x)^3 \\C_2 \dot{y} &= -z - b_1(y - x) - b_3(y - x)^3 \\L \dot{z} &= y\end{aligned}\tag{3.34}$$

Las ecuaciones anteriores, son las ecuaciones de estado del circuito. Se observa que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales si multáneas no lineales.

La solución analítica de este tipo de ecuaciones es muy compleja, por lo cual se utilizan métodos numéricos para resolverlas.

Despejando los valores de  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  en (3.34) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left[\left(a_1 - \frac{1}{R_4}\right) x - a_3 x^3 + b_1(y - x) + b_3(y - x)^3\right] / C_1 \\ \dot{y} &= [-z - b_1(y - x) - b_3(y - x)^3] / C_2 \\ \dot{z} &= y / L\end{aligned}\tag{3.35}$$

En este caso el parámetro que se puede variar para cambiar la respuesta del sistema será  $R_u$ .

Las ecuaciones de estado se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z) \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z)\end{aligned}\tag{3.36}$$

Para obtener los puntos de equilibrio, tenemos que igualar las derivadas a cero, como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 0\tag{3.37}$$

Podemos linealizar el sistema de ecuaciones evaluando la matriz Jacobiana en cada punto de equilibrio.

La matriz Jacobiana o Jacobiano se define como sigue

$$J(\bar{a}) = Df(\bar{a}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\bar{a}) & D_2 f_1(\bar{a}) & \dots & D_n f_1(\bar{a}) \\ D_1 f_2(\bar{a}) & D_2 f_2(\bar{a}) & \dots & D_n f_2(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(\bar{a}) & D_2 f_n(\bar{a}) & \dots & D_n f_n(\bar{a}) \end{bmatrix}$$

en donde  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

y  $D_n f_n(\bar{a})$  significa la derivada de la función  $f_n$  respecto a la variable  $a_n$ .

Sea  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  un punto de equilibrio, podemos evaluar el Jacobiano en este punto de equilibrio y representaremos

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (3.38)$$

Para analizar la estabilidad, es necesario calcular los eigenvalores de la Matriz Jacobiana en el punto de equilibrio.

Un punto de equilibrio es estable si los eigenvalores, del sistema de ecuaciones obtenido por la linealización del sistema no lineal en las cercanías del punto de equilibrio, tienen parte real negativa [4].

El Jacobiano del sistema descrito por la ecuación (3.35), se calcula a continuación

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{(a_1 - \frac{1}{R_4} - 3a_3x^2 - b_1 - 3b_3(y-x)^2)}{C_1} & \frac{(b_1 + 3b_3(y-x)^2)}{C_1} & 0 \\ \frac{(b_1 + 3b_3(y-x)^2)}{C_2} & \frac{(-b_1 - 3b_3(y-x)^2)}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Para la obtención de los eigenvalores, tenemos que resolver la ecuación

$$\det [ J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - I \lambda ] = 0 \quad (3.40)$$

Resolviendo el sistema (3.37), tenemos que la solución trivial es  $(0, 0, 0)$ .

El Jacobiano para el punto de equilibrio  $(0,0,0)$  es igual  $J(x,y,z)$  evaluado en el punto  $(0,0,0)$  es igual a:

$$J(0,0,0) = \begin{bmatrix} \frac{a_1 - \frac{1}{R_4} - b_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 0 \\ \frac{b_1}{c_2} & -\frac{b_1}{c_2} & -\frac{1}{c_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora obtenemos los eigenvalores como

$$\det [ J(0,0,0) - I \lambda ] = 0$$

entonces se tiene :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{a_1 - \frac{1}{R_4} - b_1}{C_1} - \lambda & \frac{b_1}{C_1} & 0 \\ \frac{b_1}{C_2} & -\frac{b_1}{C_2} - \lambda & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\lambda \end{bmatrix}$$

Podemos reemplazar

$$\mu = \frac{1}{R_4} + b_1 - a_1$$

$$\delta = b_1$$

y tenemos

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{C_1} - \lambda & \frac{\delta}{C_1} & 0 \\ \frac{b_1}{C_2} & -\frac{\delta}{C_2} - \lambda & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

De donde se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 + \left( \frac{\mu}{C_1} + \frac{\delta}{C_2} \right) \lambda^2 + \left( \frac{\delta\mu}{C_1 C_2} + \frac{1}{L C_2} - \frac{\delta^2}{C_1 C_2} \right) \lambda + \frac{\mu}{C_1 C_2 L} = 0$$

$$\lambda^3 + \left( \frac{\mu}{C_1} + \frac{\delta}{C_2} \right) \lambda^2 + \left( \frac{\delta\mu}{C_1 C_2} + \frac{1}{LC_2} - \frac{\delta^2}{C_1 C_2} \right) \lambda + \frac{\mu}{C_1 C_2 L} = 0$$

En base a las raíces de la ecuación anterior, se puede saber si es estable o no en el punto de equilibrio (0,0,0).

Una segunda solución del sistema (3.37) se tiene

$$\left( a_1 - \frac{1}{R_4} \right) x - a_3 x^3 + b_1 (y - x) + b_3 (y - x)^3 = 0$$

$$- z - b_1 (y - x) - b_3 (y - x)^3 = 0$$

$$y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior se tiene que el punto de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  es igual a:

$$\bar{x} = \left( - \frac{\mu}{a_3 + b_3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{y} = 0 \tag{3.41}$$

$$\bar{z} = b_1 \bar{x} + b_3 \bar{x}$$

El Jacobiano en el punto de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  de la solución (3.41) se obtiene reemplazando las ecuaciones (3.41) en la matriz (3.39).

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu}{C_1} & (b_1 - \frac{3 b_3 \mu}{a_3 + b_3}) / C_1 & 0 \\ (b_1 - \frac{3 b_3 \mu}{a_3 + b_3}) / C_2 & (-b_1 + \frac{3 b_3 \mu}{a_3 + b_3}) / C_2 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando  $b_1 - \frac{3 b_3 \mu}{a_3 + b_3} = v$

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu}{C_1} & \frac{v}{C_1} & 0 \\ \frac{v}{C_2} & -\frac{v}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Ahora resolvemos el problema

$$\det [ J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - I \lambda ] = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica.

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left( \frac{2\mu}{C_1} - \frac{v}{C_2} \right) - \lambda \left( \frac{2\mu v}{C_1 C_2} - \frac{1}{C_2 L} + \frac{v^2}{C_2 C_1} \right) - \frac{2\mu}{C_2 C_1 L} = 0 \quad (3.43)$$



Obteniendo las raíces de la ecuación (3.43), se puede saber si es estable o no en el punto de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

El análisis de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de 3<sup>er</sup> orden es complejo, y lo que es posible realizar es un estudio de estabilidad en las cercanías de los puntos de equilibrio en los cuales es posible linealizar el sistema de ecuaciones.

### 3.4. ANALISIS EXPERIMENTAL DEL CIRCUITO EN FUNCION DEL TIEMPO.

Para el análisis del circuito, vamos a usar un método experimental. Otros autores han realizado el análisis basados en las ecuaciones de estado, las cuales han sido ya resueltas por métodos numéricos [3].

El circuito experimental usado y los valores de los diferentes componentes se muestra en la figura 3.15.

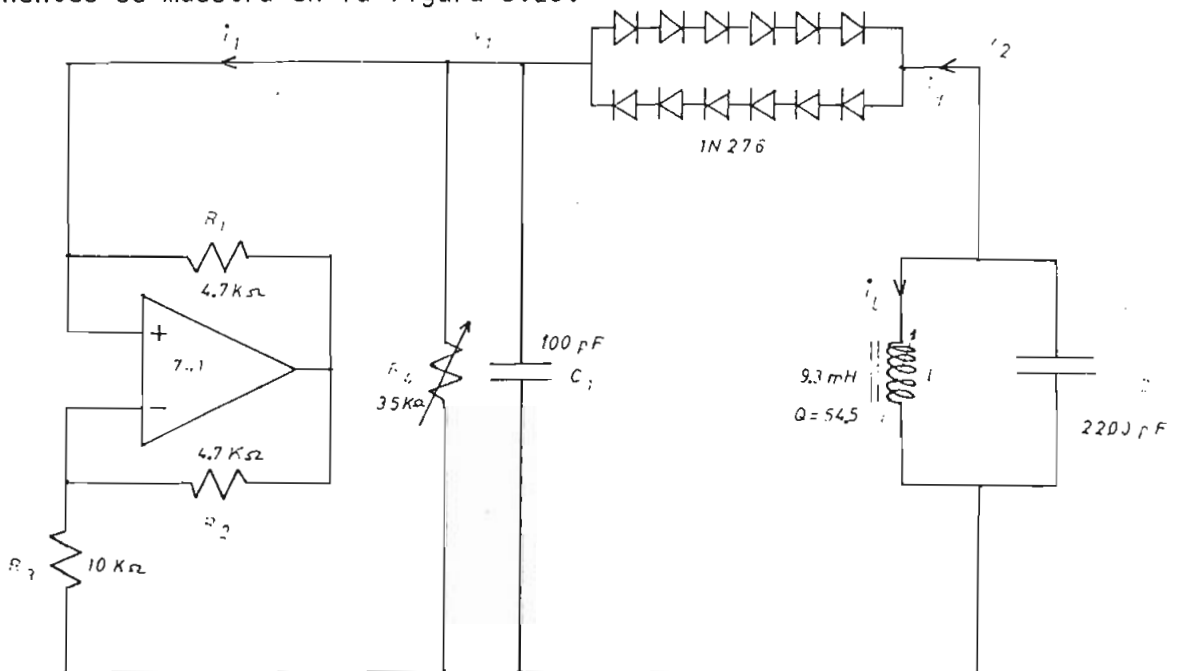


Fig. 3.15.- Circuito experimental y sus valores.

Vamos a calcular la frecuencia de resonancia del circuito LC y va a ser igual a:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.44)$$

de donde la frecuencia de resonancia es:

$$f = 35.18 \text{ KHz} \quad (3.45)$$

El parámetro variable del circuito es la resistencia  $R_4$ . El amplificador operacional lo vamos a polarizar con  $\pm 5$  Voltios.

Si variamos la resistencia  $R_4$  entre  $0 < R_4 < 16.3 \text{ K}\Omega$ , se observa que el voltaje  $v_1$ , figura 3.15, es constante y cuyo valor depende del valor de  $R_4$  en el intervalo señalado anteriormente.

Al tener  $R_4$  en el intervalo  $16.3 \text{ K} \leq R_4 \leq 24.9 \text{ K}\Omega$ , se observa que el circuito oscila. Llamamos  $T$ , al período de la oscilación. La frecuencia de la oscilación será la frecuencia calculada en la ecuación (3.44) y es igual a  $f = 35.18 \text{ KHz}$ . Entonces diremos que para el intervalo de  $R_4$  señalado anteriormente, se tiene una oscilación de período  $T = \frac{1}{35.18} \text{ ms}$ . Esto se muestra en la figura 3.16.

Para  $R_4 = 26 \text{ K}\Omega$ , se tiene una oscilación de período  $2T$ .

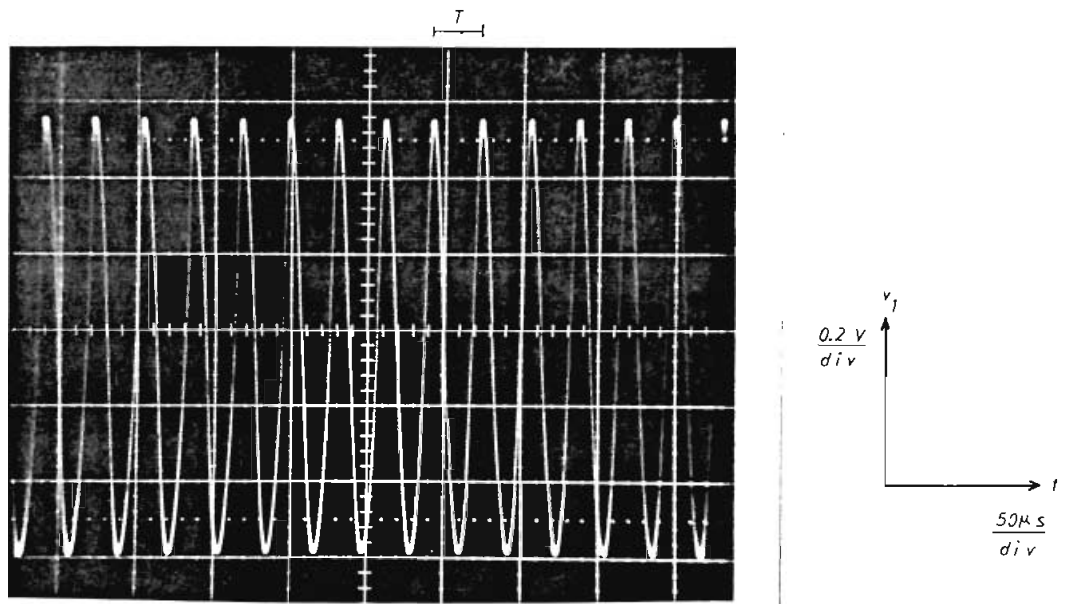


Fig. 3.16.- Voltaje  $v_1 = f(t)$ , en donde se observa una oscilación de período  $T$ , para  $R_4 = 23.7 \text{ K}\Omega$ .

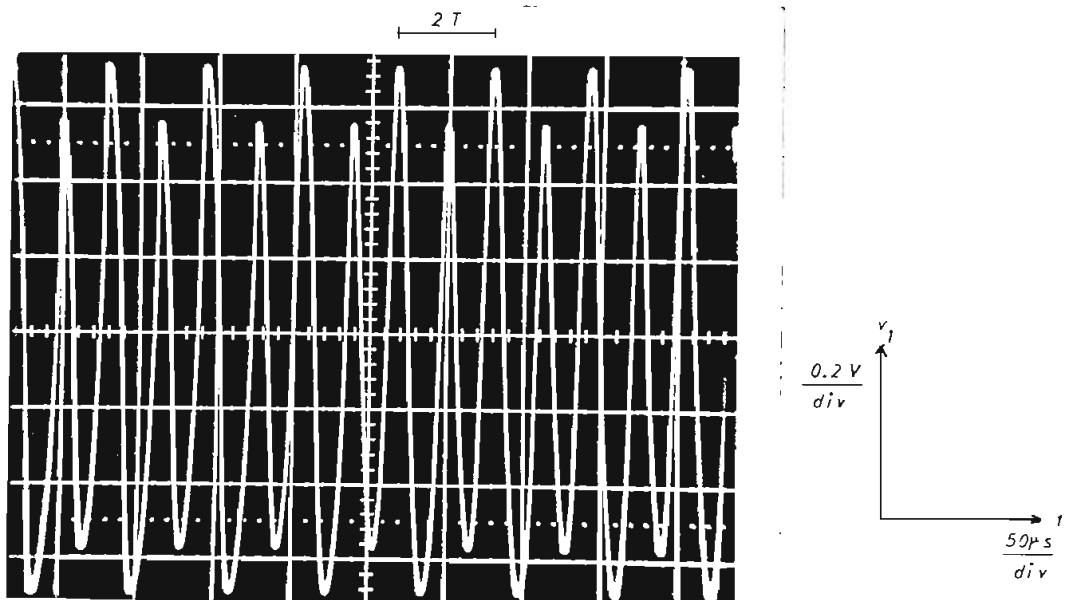


Fig. 3.17.- Voltaje  $v_1 = f(t)$ , en donde se observa una oscilación de período  $2T$ , para  $R_4 = 26 \text{ K}\Omega$ .

Ahora si tenemos en  $R_4$  una resistencia de  $27.4 \text{ K}\Omega$ , se tiene una oscilación de período  $4T$  como se muestra en la figura 3.18.

Se observa una componente de frecuencia  $f = 35.18 \text{ KHz}$  en la oscilación mostrada en la figura 3.18.

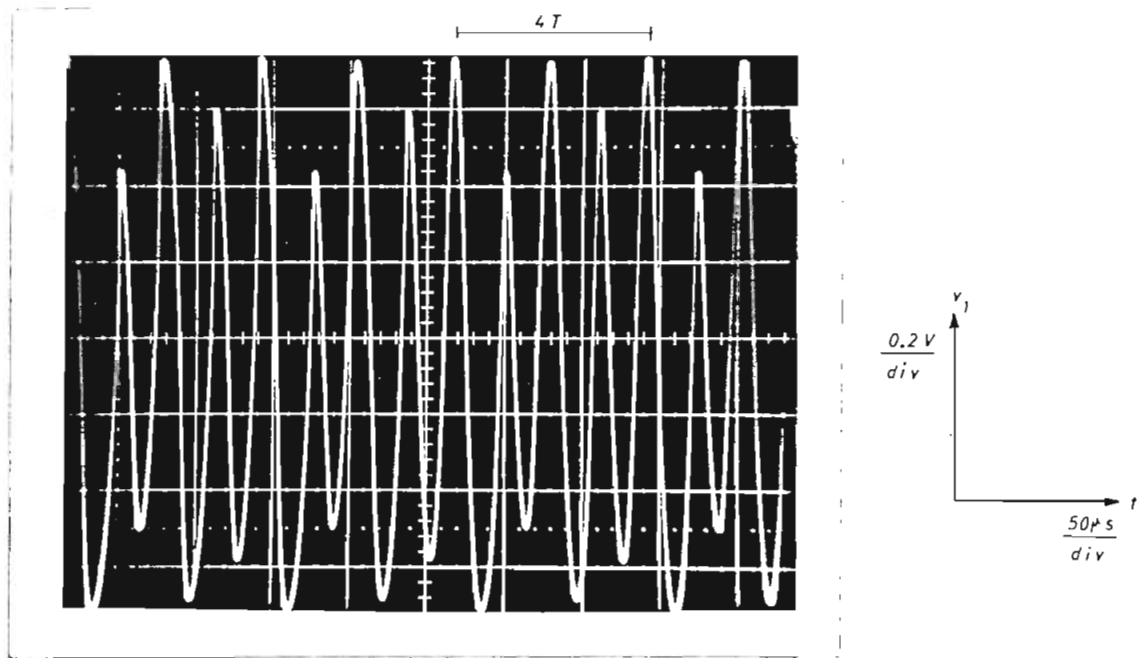


Fig. 3.18.- Voltaje  $v_1 = f(t)$ , se observa una oscilación de período  $4T$  para  $R_4 = 27.4 \text{ K}\Omega$ .

Si seguimos aumentando el valor de  $R_4$  y para  $R_4 = 27.7 \text{ K}\Omega$  se tiene una oscilación de período  $8T$  como se muestra en la figura 3.19.

Entonces se observa que a medida que se aumenta el valor de  $R_4$ , aumenta el período de la oscilación como  $2^n$  donde  $n = 0, 1, 2, \dots, n$ .

- Este proceso es cualitativamente igual al observado en la ecuación de diferencias  $x_{j+1} = r x_j (1 - x_j)$  que describe un modelo de población de insectos.

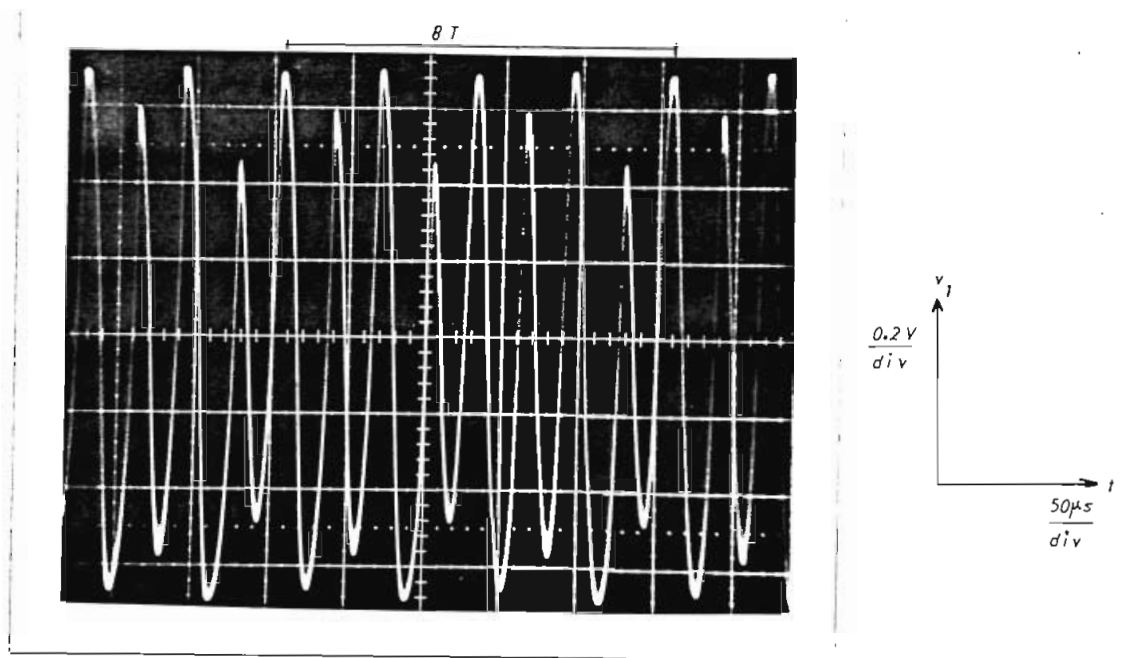


Fig. 3.19.- Voltaje  $v_1 = f(t)$ , se observa una oscilación de período  $8T$ , para  $R_4 = 27.7 K\Omega$

Esto demuestra que existen otros sistemas dinámicos que tienen el mismo mecanismo de desdoblamiento.

Para  $R_4 = 28.6 K\Omega$ , se muestra en la figura 3.20 una oscilación caótica, que ha sido tomada en un instante determinado de tiempo y que indica que el circuito electrónico pasó de un régimen determinista a un régimen caótico que se muestra en esta figura.

### 3.5. ANALISIS EN EL PLANO DE FASE.

Para analizar la transición de un régimen determinista a un régimen turbulento vamos a utilizar otro método de análisis del circuito elec

trónico, llamado plano de fase.

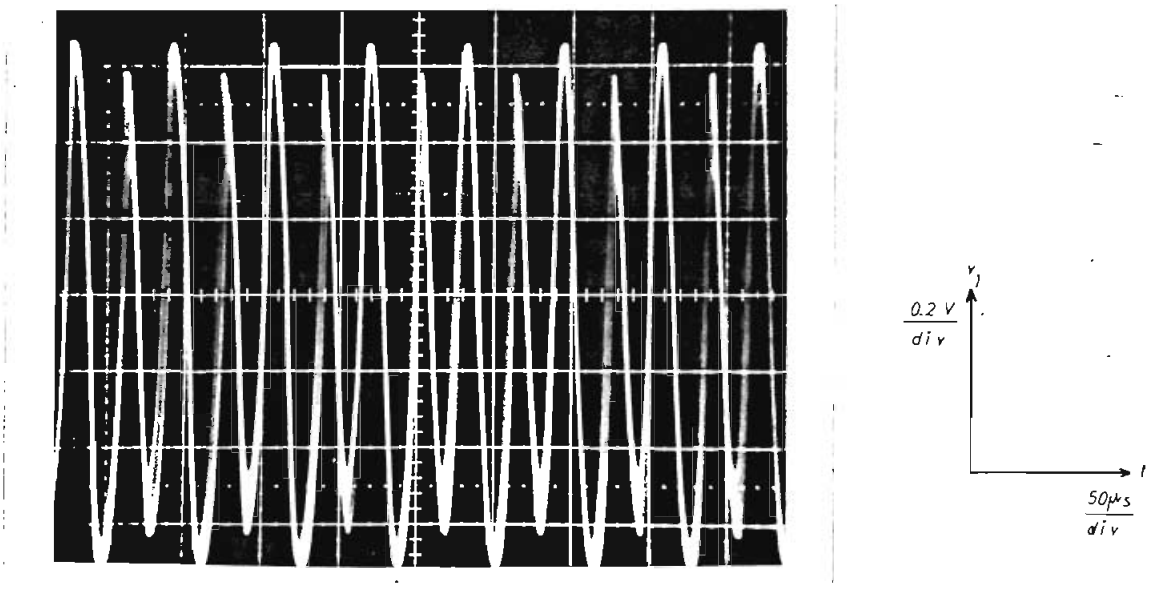


Fig. 3.20.- Voltaje  $v_1 = f(t)$ , se tiene una oscilación caótica para  $R_4 = 28.6 \text{ K}\Omega$ .

El plano de fase se denomina al gráfico de una variable de estado en función de otra variable de estado del sistema dinámico.

Las variables de estado del circuito electrónico son  $x, y, z$ , que representan respectivamente el voltaje  $v_1$ , voltaje  $v_2$  y la corriente  $i_L$ .

Para nuestro análisis utilizamos los gráficos del voltaje  $v_1$  en función del voltaje  $v_2$ .

Para la obtención de los gráficos  $v_1 = f(v_2)$  se ha utilizado un método experimental.

Los datos experimentales se han tomado para un voltaje de polarización del amplificador operacional de  $\pm 5$  voltios y valores de los elementos indicados en la figura 3.15.

Iniciamos el estudio con un valor de  $R_4 = 23.7 \text{ K}\Omega$ , cuyo resultado se muestra en la figura 3.21. Se tiene el gráfico de  $v_1 = f(v_2)$ , en el cual se observa que existe una diferencia de fase entre los voltajes  $v_1$  y  $v_2$ . A la figura formada, que se asemeja a una elipse, la llamaremos órbita. Para este caso veremos que existe una sola órbita y representa el caso en el cual se tiene una oscilación de período  $T$ .

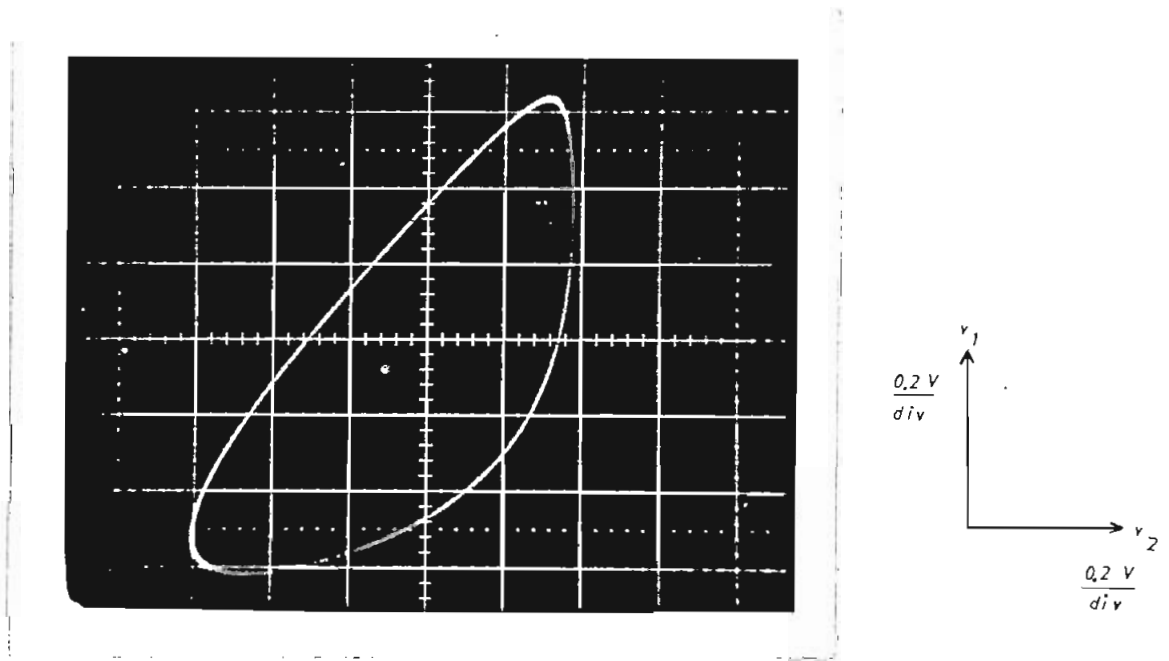


Fig. 3.21.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$ , para  $R_4 = 23.7 \text{ K}\Omega$ .

Este caso corresponde a una oscilación de período  $T$ .

Para continuar el análisis, procedemos a variar el valor de  $R_4$ , para observar los diferentes comportamientos que presenta el circuito elec

trónico.

Ahora para  $R_4 = 26 \text{ K}$  , se obtiene el gráfico mostrado en la figura 3.22. Esta figura corresponde al gráfico  $v_1 = f(v_2)$  para una oscilación de período  $2T$  . Se observa claramente que existe un desdoblamiento de las órbitas, en este caso se tienen 2 órbitas.

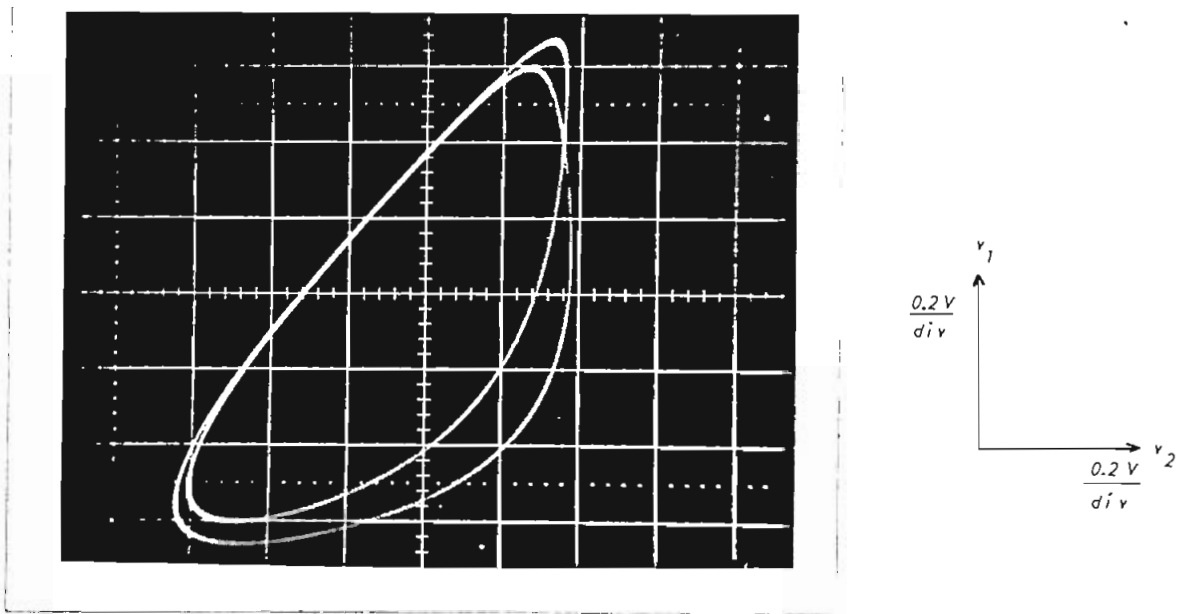


Fig. 3.22.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 26 \text{ K}\Omega$ .

Corresponde al caso de una oscilación de período  $2T$  . Se observa 2 órbitas.

Para  $R_4 = 27.4 \text{ K}\Omega$  se tienen 4 órbitas en el plano de fase. Esto se puede ver en la figura 3.23. Las cuatro órbitas en el plano de fase corresponde a una oscilación de período  $4T$  .

En la figura 3.24 se observa el gráfico  $v_1 = f(v_2)$  en donde se tienen 8 órbitas para una resistencia  $R_4 = 27.7 \text{ K}\Omega$  . En este estado el



circuito oscila con un período  $8T$ .

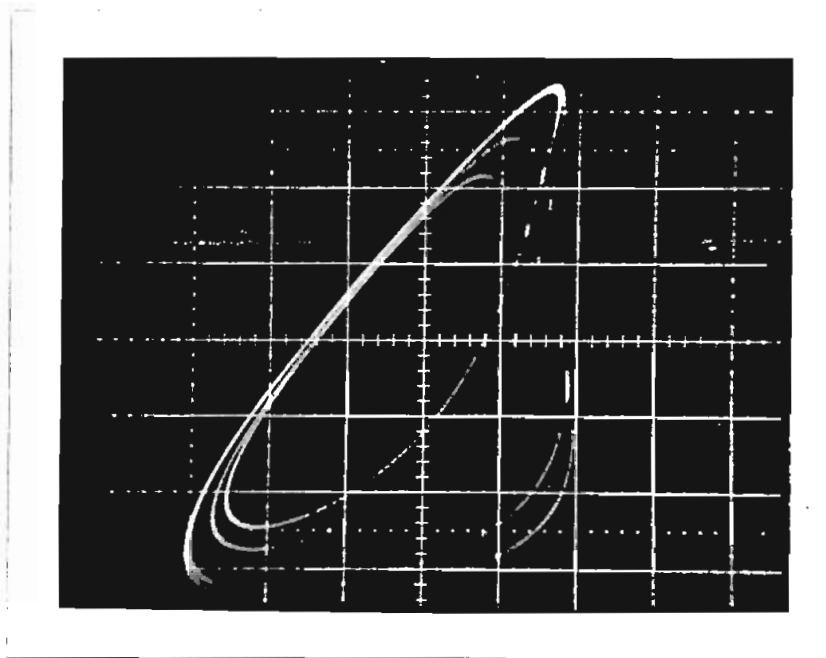


Fig. 3.23.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 27.4 \text{ K}\Omega$ .

Corresponde a una oscilación de período  $4T$ .

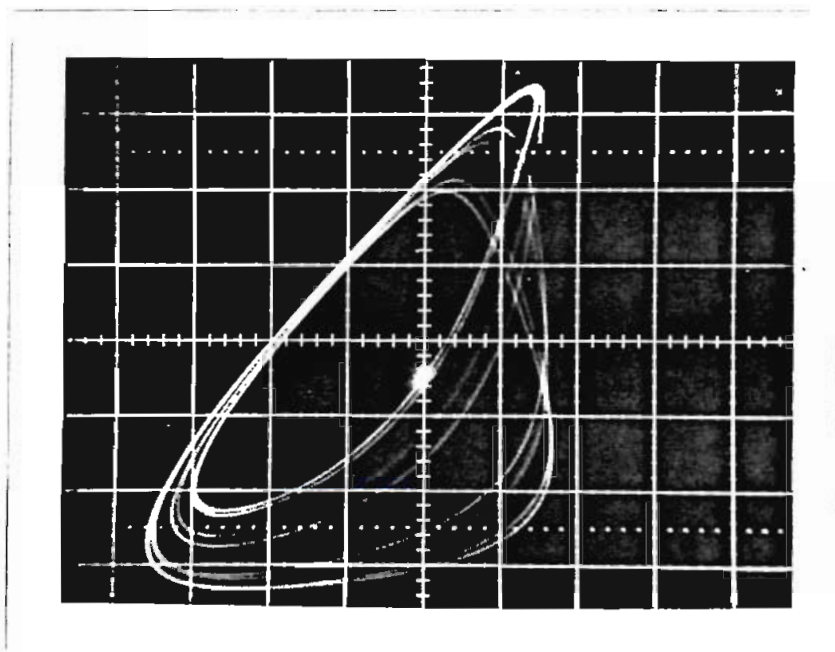


Fig. 3.24.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 27.7 \text{ K}\Omega$ .

Corresponde a una oscilación de período  $8T$ .

Entonces se puede ver que el período de la oscilación está directamente relacionado con el número de órbitas en el plano de fase.

El número de órbitas depende del valor de  $R_4$  y es igual a  $2^n$  donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

El período de la oscilación depende de  $R_4$  pero de una manera no lineal; debido a que para obtener períodos de oscilación mayores, los incrementos de  $R_4$  son cada vez más pequeños.

Por esta razón no ha sido posible obtener experimentalmente períodos mayores a  $8T$ , debido a que los incrementos de resistencia del potenciómetro utilizado eran demasiado grandes y se pasaba a otros estados como es el de bandas que explicaremos a continuación

Pero los ejemplos obtenidos son suficientes para indicar claramente el aumento del período como  $2^n$  hasta tener  $2^\infty$  períodos en donde el valor de  $R_4$  en ese punto lo llamaremos resistencia crítica o  $R_c$ .

Después de observar un desdoblamiento de órbitas, para  $R_4$  menores a  $R_c$ ; se tiene que las órbitas en lugar de tener trayectorias fijas, pueden estar localizadas en bandas cuando  $R_4$  es mayor que  $R_c$ .

Esto se puede ver en la figura 3.25, en la cual se observa 4 bandas en las cuales pueden estar las órbitas del circuito electrónico para  $R_4 = 27.9 \text{ K}\Omega$ .

Al aumentar el valor de  $R_4$  a  $28.2 \text{ K}\Omega$ , se observa que existen 2 bandas

en las cuales se pueden encontrar las órbitas del sistema dinámico.  
Esto se muestra en la figura 3.26.

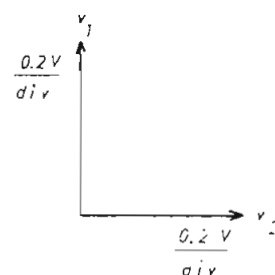
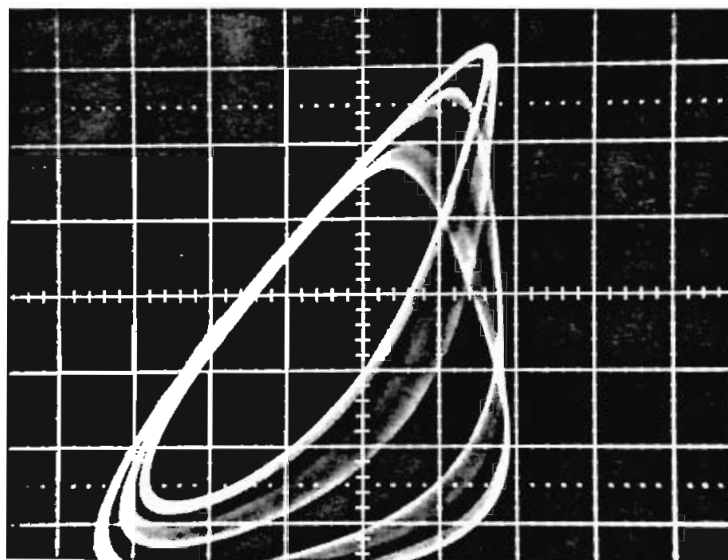


Fig. 3.25.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 27.9 \text{ K}\Omega$ .  
Se tienen 4 bandas donde se localizan  
las órbitas.

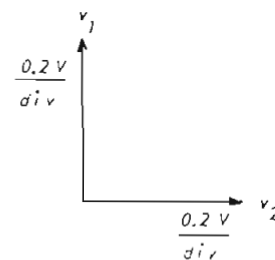
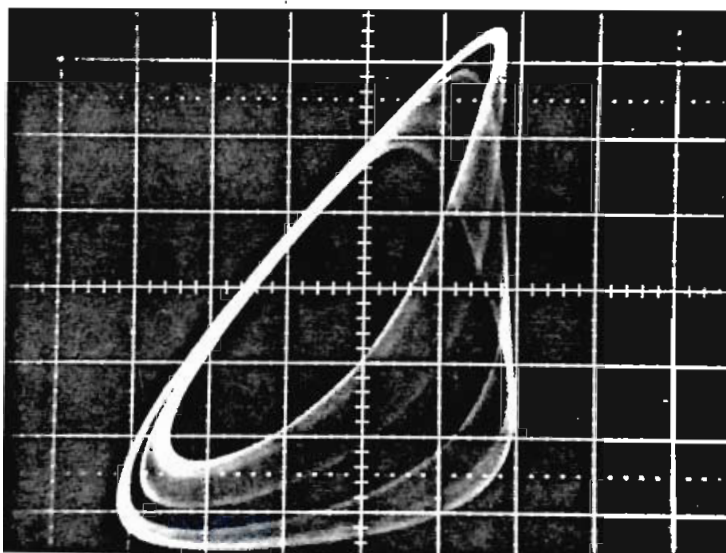


Fig. 3.26.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 28.2 \text{ K}\Omega$ .  
donde se observan 2 bandas, donde se  
tienen órbitas.

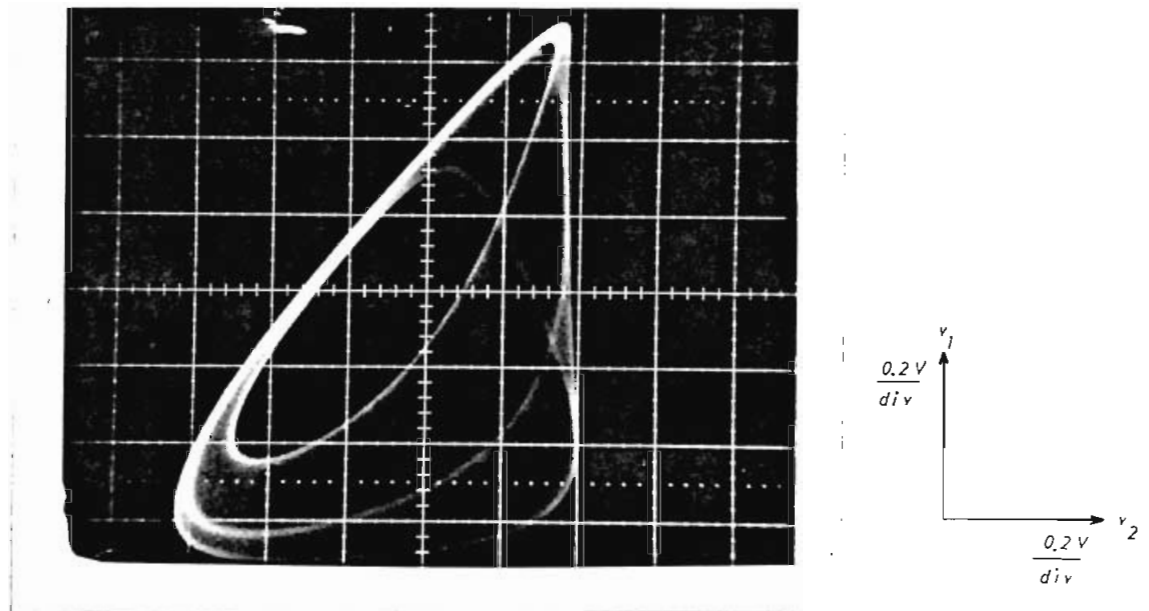


Fig. 3.27.- Gráfico de  $v_1 = f(v_2)$  para  $R_4 = 28.6 \text{ K}\Omega$ .

Se observa el caos.

Para  $R_4 = 28.6 \text{ K}\Omega$ , se obtiene una sola banda en la cual se pueden localizar las órbitas. En este caso tenemos el caos, debido a que una órbita puede estar localizada en cualquier parte de la banda. Esto se muestra en la figura 3.27.

Entonces para  $R_4 > R_C$ , se tiene un desdoblamiento de órbitas, pero en forma de bandas. El número de bandas aumenta con la disminución de  $R_4$  hasta tener infinitas bandas para  $R_4 = R_C$ .

De esto ya se puede decir que el mecanismo de transición de un régimen determinista a un régimen caótico es cualitativamente el mismo que se describió en el Capítulo II para el modelo de población.

Para poder realizar una comparación mejor, vamos a graficar los pun-

tos tomados del plano de fase, para cada valor de  $R_4$ , de la intersección de las órbitas con un eje  $x'$ , como se muestra en la figura 3.28.

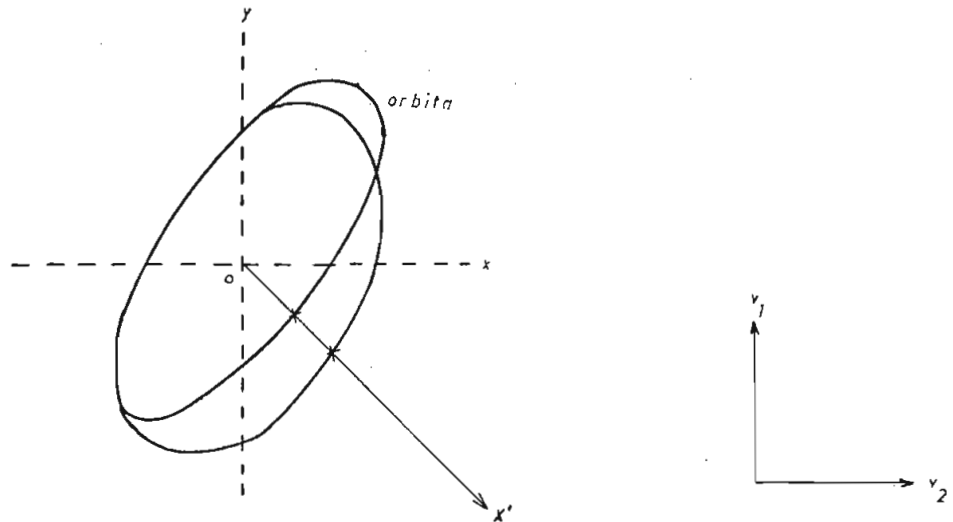


Fig. 3.28.- Intersección de las órbitas con el eje  $x'$ .

Para la obtención de este gráfico se ha tomado varios valores de la distancia en el eje  $x'$  para varios valores de  $R_4$ . En este punto lo más interesante es el análisis cualitativo del fenómeno antes que la precisión con que se midieron estas distancias. También se tomaron los valores de  $R_4$  al cual ocurren los desdoblamientos. Este gráfico muestra la figura 3.29.

La figura 3.29 muestra el mecanismo de la transición, cuando se tienen niveles discretos o valores fijos de la distancia en el eje  $x'$ .

Para mostrar la transición en la zona de bandas, se ha graficado los intervalos que interceptan con el eje  $x'$  en la figura 3.30.

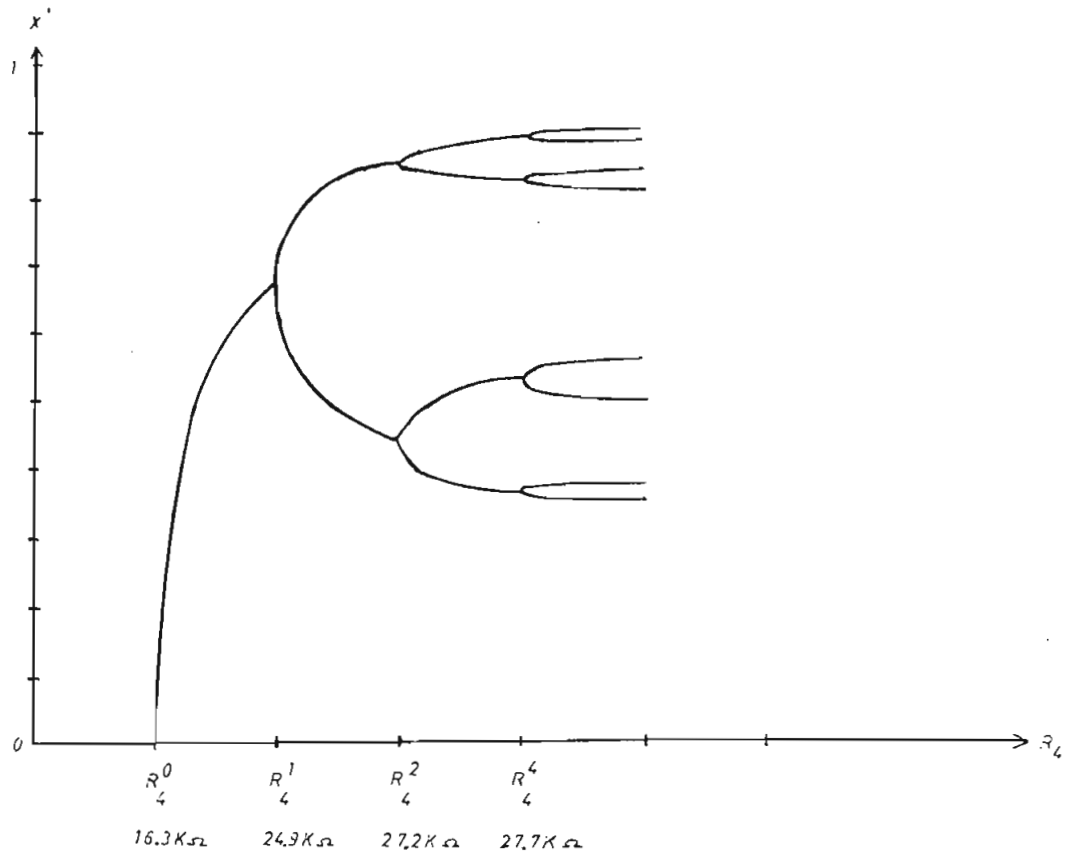


Fig. 3.29.- Gráfico de las distancias en el eje  $x'$  en función de la resistencia  $R_4$ . Se señalan puntos de desdoblamiento.

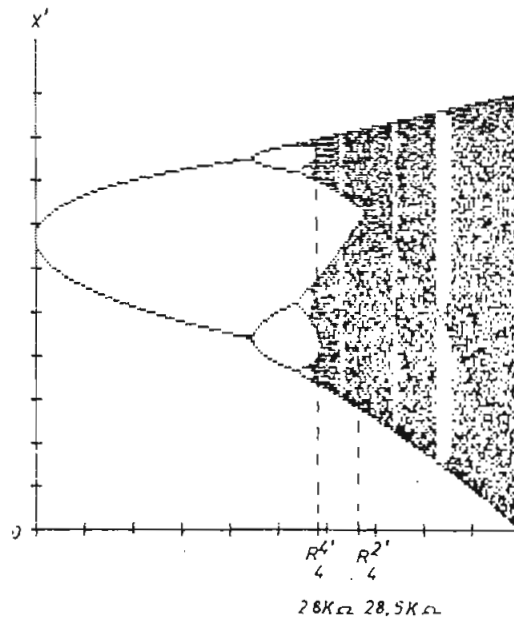


Fig. 3.30.- Gráfico de las distancias en el eje  $x'$  en función de  $R_4$ .

Comparando cualitativamente las figuras 3.30 y 3.29 con los resultados obtenidos en el Capítulo II para la ecuación  $X_{j+1} = r X_j (1 - X_j)$ , se observa que este mecanismo de transición de un régimen determinista a un régimen caótico es el mismo a pesar de ser sistemas dinámicos que describen dos cosas totalmente diferentes como son un modelo de población de insectos (ecuación de diferencias con una variable de estado) y un circuito electrónico (descrita por ecuaciones diferenciales con tres variables de estado).

En conclusión el mecanismo de transición de régimen determinista o caótico estudiado en el Capítulo II es común a varios sistemas.

Para el caso del modelo de población, el parámetro que determina el estado del sistema es  $r$  que es el factor de crecimiento. En el caso del circuito electrónico el parámetro que determina el estado es  $R_4$  y es una resistencia eléctrica.

### 3.6. METODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

El tercer método alternativo para el análisis de la transición de un régimen determinista a un régimen caótico es la transformada de Fourier.

Con este método se obtiene el espectro de frecuencias de una señal en el tiempo. Para el caso del circuito electrónico la señal a ser analizada es el voltaje  $v_1$ .

Sea  $v_1(t)$  la señal en función del tiempo, entonces la transformada de

Fourier será  $\hat{V}_1(\omega)$  que se define como:

$$\hat{V}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{2\pi i \omega t} v(t) dt$$

Para este análisis vamos a obtener el espectro de frecuencias para las señales de período  $T$ ,  $2T$ ,  $4T$  y  $8T$ , y además para señales que presentan 1 y 2 bandas en el plano de fase.

Como se calculó anteriormente la frecuencia fundamental del oscilador es  $f = 35.18$  KHz.

Los espectros de frecuencia se han medido en forma experimental por medio de un analizador de espectros de baja frecuencia.

Primeramente observamos el espectro de la señal del oscilador de período  $T$ . El espectro se muestra en la figura 3.31. Se observa en el espectro una componente de frecuencia  $f$  y otra componente de frecuencia de  $2f$ , que corresponde a la segunda armónica de la frecuencia fundamental  $f$ .

Para el análisis nos interesa lo que ocurre con las componentes para frecuencias menores o iguales a  $f$ , o sea en el intervalo de  $(0, f)$ . En lo posterior no analizaremos el comportamiento de los armónicos de  $f$ .

Entonces para la oscilación de período  $T$ , en el intervalo  $(0, f)$ ; se



tiene una sola componente de frecuencia en  $f$ .

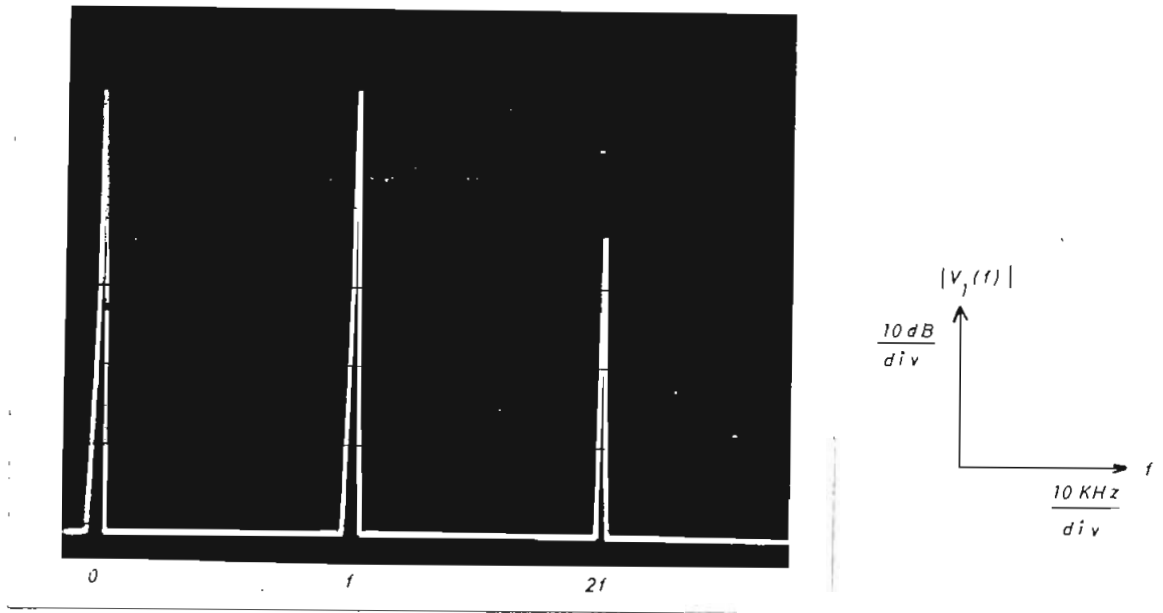


Fig. 3.31.- Espectro de frecuencia para la oscilación de período  $T$ .  $R_4 = 23.7 \text{ K}\Omega$ .

En los espectros de frecuencia se tiene una componente de frecuencia cero.

Para  $R_4 = 26 \text{ K}\Omega$ , se tiene la oscilación de período  $2T$  y en la figura 3.32, se muestra el espectro de frecuencias.

Se observa que se tiene una nueva componente de frecuencia  $\frac{f}{2}$  en relación al espectro anterior.

Para tener una oscilación de período  $4T$ , se tenía una resistencia  $R_4 = 27.4 \text{ K}\Omega$  y su espectro de frecuencia se muestra en la figura 3.33.

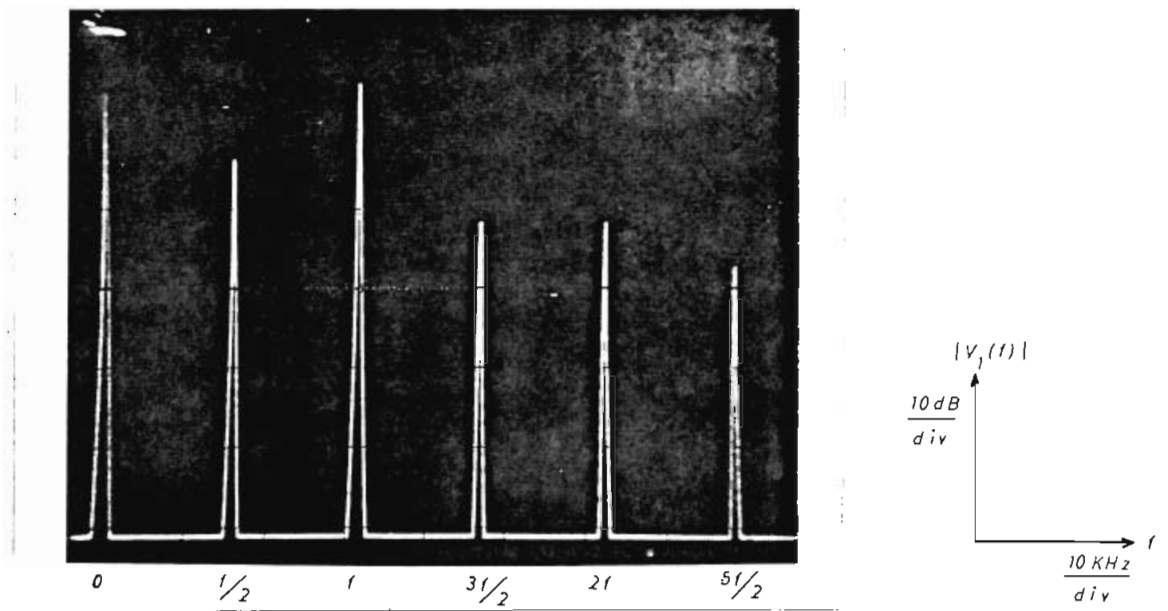


Fig. 3.32.- Espectro de frecuencia para la oscilación de período  $2T$ .  $R_4 = 26 \text{ K}\Omega$ .

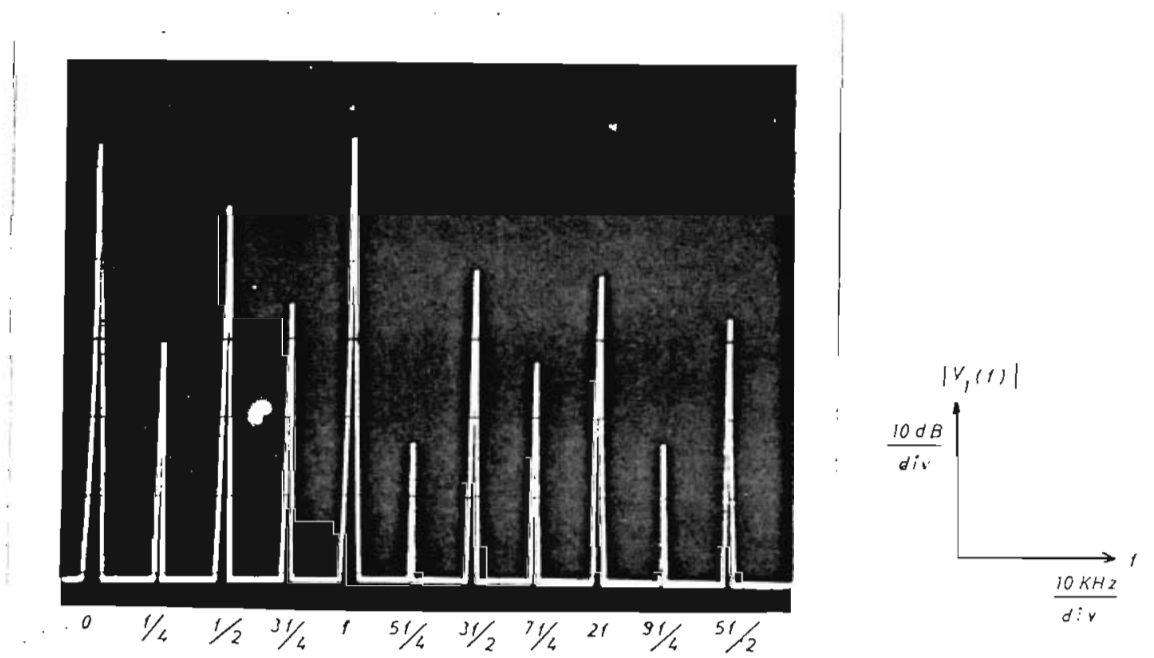


Fig. 3.33.- Espectro de frecuencias para una oscilación de período  $4T$ .  $R_4 = 27.4 \text{ K}\Omega$ .

Aparacen nuevas componentes de frecuencia intercaladas entre las frecuencias del espectro de la oscilación de período  $2T$ .

Estas componentes son de frecuencias  $\frac{f}{4}$  y  $\frac{3}{4}f$  como se señala en la figura 3.33.

En la figura 3.34, se muestra el espectro de frecuencias de una oscilación de período  $8T$  para  $R_4 = 27.7 \text{ K}\Omega$ . Se observa nuevamente que se intercalan nuevas frecuencias en relación al espectro anterior de la oscilación de período  $4T$ . Las nuevas componentes tienen frecuencias  $\frac{f}{8}$ ,  $\frac{3}{8}f$ ,  $\frac{5}{8}f$  y  $\frac{7}{8}f$ .

Entonces se tiene un mecanismo cualitativamente igual al observado en el modelo de población, en el cual se van intercalando nuevas frecuencias hasta que  $R_4$  es igual a  $R_C$ .

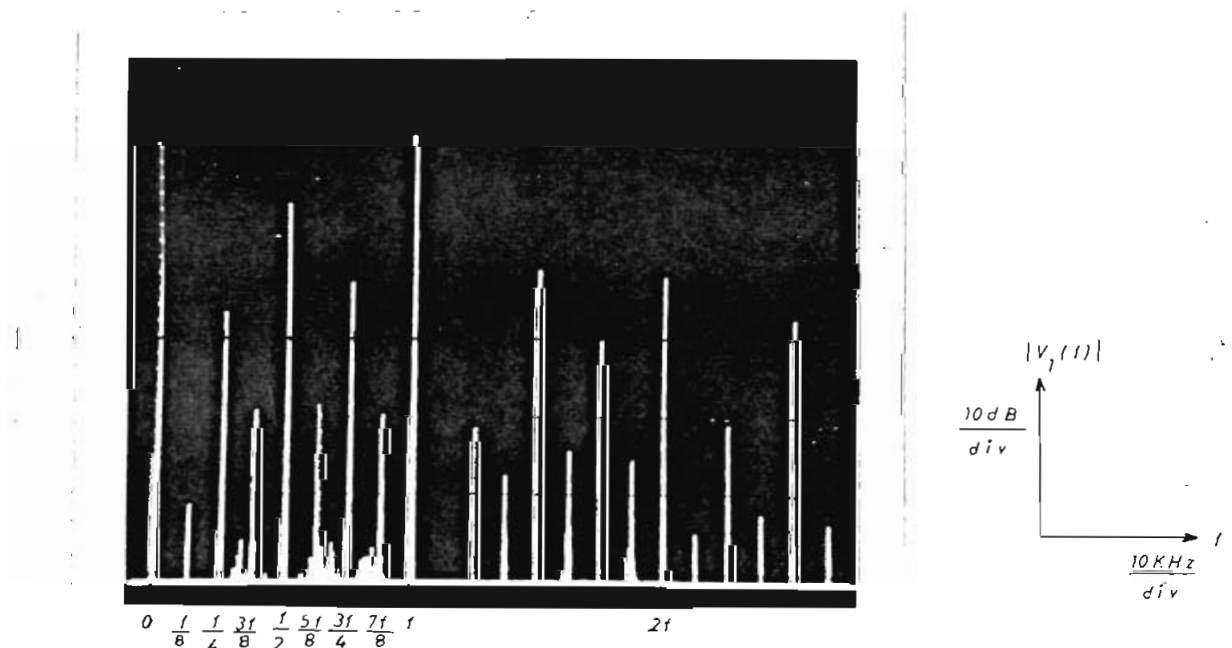


Fig. 3.34.- Espectro de frecuencias para una oscilación de período  $8T$ .  $R_4 = 27.7 \text{ K}\Omega$ .

Para  $R_4 = 28.6 \text{ K}\Omega$ , en el plano de fase se observa una sola banda en la cual se tiene un régimen caótico cuyo espectro se muestra en la figura 3.35.

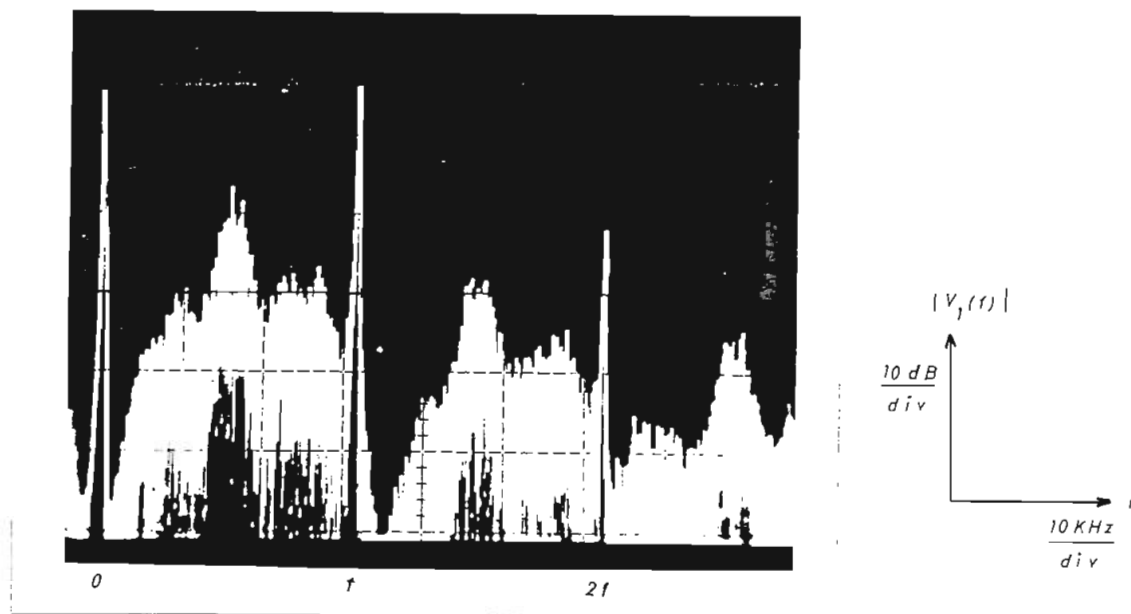


Fig. 3.35.- Espectro de frecuencias de una oscilación caótica para  $R_4 = 28.6 \text{ K}\Omega$ .

En el espectro de la figura 3.35 se observa que existe la componente de frecuencia  $f$  y en el intervalo  $(0, f)$ , se tiene una franja de ruido, la cual nos indica la presencia de un régimen caótico.

En la figura 3.36, se muestra el espectro de frecuencias para  $R_4 = 28.2 \text{ K}\Omega$ , en donde las órbitas del sistema están limitadas a dos bandas. Se observa una componente de frecuencia  $\frac{f}{2}$  además de la componente de frecuencia  $f$  y se debe a que las órbitas del sistema alternan entre las dos bandas.

En conclusión el mecanismo de transición del régimen determinista al

turbulento, analizado por medio de la transformada de Fourier es cualitativamente el mismo que el analizado para la ecuación  $x_{j+1} = r \cdot x_j(1-x_j)$  y por el cual podemos identificar un régimen caótico como es el señalado en la figura 3.35.

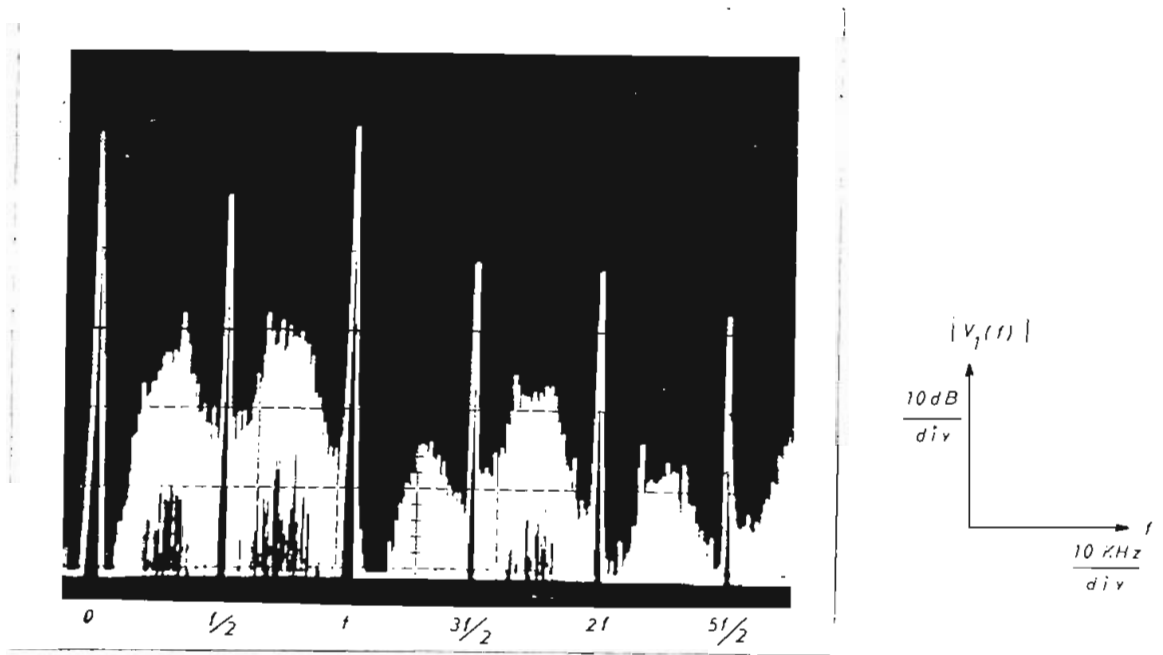


Fig. 3.36.- Gráfico del espectro de frecuencias para  $R_4 = 28.2 \text{ K}\Omega$ . Se trata de una oscilación que alterna entre 2 bandas.

### 3.7. RÉGIMEN OSCILATORIO DE PERÍODO $3T$ .

En el circuito electrónico también se tiene un régimen oscilatorio de período  $3T$ , como se tiene en el modelo de población para el intervalo A de la figura

Para las condiciones y valores de la figura 3.15, el valor de  $R_4$  para

el cual se obtiene la oscilación de período  $3T$  es  $34 \text{ K}\Omega$ . El valor de  $R_4$  es mayor al valor de  $R_C$ .

Para obtener una oscilación más estable, se cambió el valor de  $C_2$  a  $1600 \text{ pF}$  y con un valor de  $R_4 = 40.8 \text{ K}\Omega$ .

Entonces para este nuevo valor de capacitor, la frecuencia de resonancia, según la ecuación (3.44) será

$$f \approx 41.26 \text{ KHz}$$

En la figura 3.37, se muestra una oscilación de período  $3T$  para  $R_4 = 40.8 \text{ K}\Omega$ .

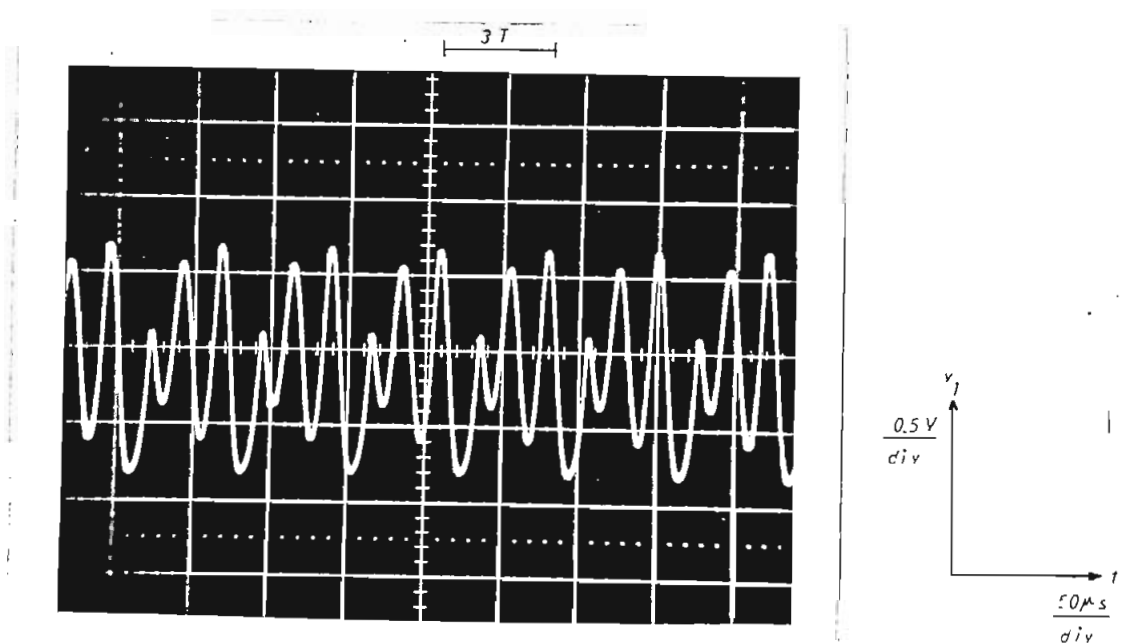


Fig. 3.37.- Gráfico  $v_1 = f(t)$ , en donde se tiene una oscilación de período  $3T$ , para  $R_4 = 40.8 \text{ K}\Omega$ .

Ahora graficando  $v_1 = f(v_2)$ , se tiene en el plano de fase 3 órbitas que están en relación a la oscilación de período  $3T$ . Esto se muestra en la figura 3.38.

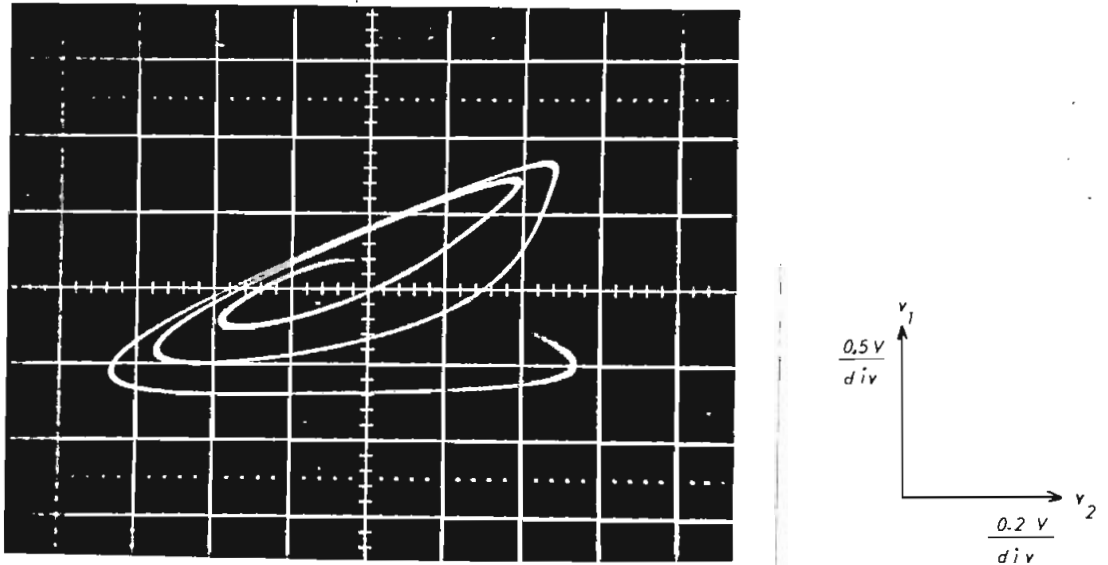


Fig. 3.38.- Gráfico  $v_1 = f(v_2)$  para una oscilación de período  $3T$ .  $R_4 = 40.8 K\Omega$ .

El espectro de frecuencias de la oscilación de período  $3T$  se muestra en la figura 3.39, en donde se observa componentes de frecuencia  $f$ ,  $\frac{1}{3} f$  y  $\frac{2}{3} f$ .

Esta oscilación de período  $3T$ , es otra característica común a varios sistemas dinámicos analizados en este trabajo.

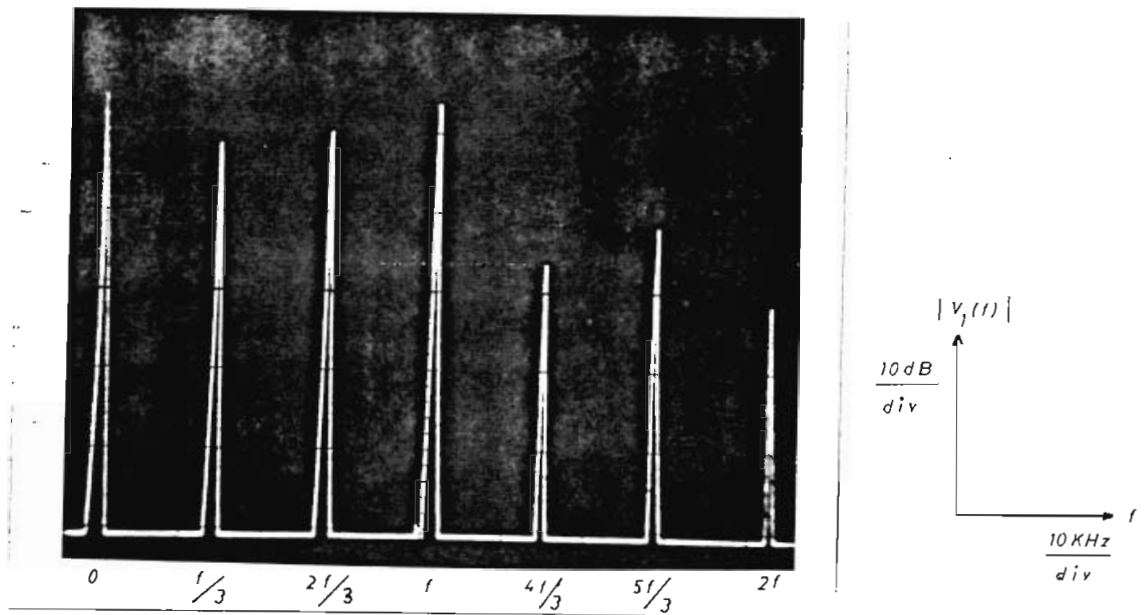


Fig. 3.39.- Espectro de frecuencia de una oscilación de período  $3T$ .

### 3.8. INFLUENCIA DE OTROS PARAMETROS EN EL COMPORTAMIENTO DEL CIRCUITO ELECTRONICO.

Otro parámetro del circuito es el voltaje de polarización del amplificador operacional que los llamaremos  $V_+$  y  $V_-$ .

El voltaje de polarización influye sobre la función de transferencia  $i_1 = f(v_1)$  de la conductancia negativa.

Entonces al variar el voltaje de polarización, se varía el período de las oscilaciones ( $T, 2T, 4T, \dots$ ).



## C A P I T U L O    I V

### UN MODELO DE DINAMICA DE POBLACIONES

Se ha escogido para este trabajo de tesis un modelo de dinámica de poblaciones debido a que este tipo de modelos son susceptibles de comportamientos caóticos o turbulentos.

El modelo descrito a continuación se podía estudiar desde un punto de vista netamente matemático, pero para tener un problema real se lo ha estudiado como un modelo de dinámica de poblaciones, que tiene un interés físico.

El modelo, como ecuaciones matemáticas, puede describir otros fenómenos físicos, que pueden ser completamente diferentes al de dinámica de poblaciones, en el cual se podrá utilizar las conclusiones de este estudio.

#### 4.1. DINAMICA DE POBLACIONES.

La dinámica de poblaciones es el conjunto de procesos que determinan el tamaño y composición de cualquier población. En este sentido la población se considera compuesta por organismos de una misma especie.

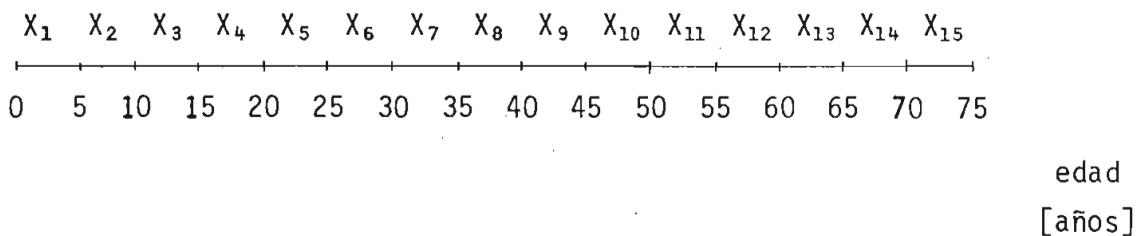
El grupo se caracteriza por una proporción de nacimientos y muertes en un tiempo definido. Frecuentemente se caracteriza la composición por

sexos y por el número de individuos pertenecientes a diferentes edades.

Una población puede aumentar en número sólo por nacimientos y por imigración, y puede disminuir sólo por muerte y emigración. Considerando la dinámica de poblaciones teórica, se acostumbra ignorar los movimientos migratorios y se concentra la atención en el proceso de nacimientos y muertes.

#### 4.2. MODELO DE POBLACION.

Se considera una distribución inicial de individuos entre 0 y 75 años, en intervalos de 5 años.



Se considera que cada 5 años, cada valor de población de un determinado intervalo, se desplaza hacia la derecha un intervalo de 5 años, que significa que estos individuos han envejecido 5 años. Además se considera en nuestro modelo que los individuos mueren a los 75 años. A un tiempo  $j$  se tiene la siguiente distribución:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{15} \quad (4.1)$$

En donde  $X_1$  corresponde a la población comprendida entre 0 y 5 años,  $X_2$  corresponde a la población comprendida entre 5 y 10 años,  $X_3$  corres

ponde a la población comprendida entre 10 y 15 años y así sucesivamente hasta  $X_{15}$  que corresponde a la población comprendida entre 70 y 75 años.

A un tiempo  $j+1$  (después de un intervalo de 5 años) se tiene la siguiente distribución:

$$A, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{14} \quad (4.2)$$

Donde se elimina  $X_{15}$ , debido a que mueren.

Después de cada intervalo de 5 años, se considera que la población de 0 a 5 años ( $A$ ), es el resultado del nacimiento de nuevos individuos.

El modelo considerado contempla 2 alternativas, llamaremos:

- Concentrado y,
- Distribuido.

Cuando se considera concentrado, cada individuo entre 20 y 25 años ( $X_5$ ), aporta con  $\underline{b}$  individuos en el intervalo, en donde  $\underline{b}$  es la fertilidad y se tiene

$$X_{1,j+1} = \underline{b} X_{5,j} \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) significa que los individuos entre 20 y 25 años en un tiempo  $j$ , aportan con  $\underline{b}$  individuos nuevos entre 0 y 5 años al tiempo  $j+1$ .

Entonces al tiempo  $j+1$  se tiene la siguiente distribución:

$$b \ X_{5,j}; X_{1,j}; X_{2,j}; \dots\dots\dots; X_{14,j} \quad (4.4)$$

ó

$$X_{1,j+1}; X_{2,j+1}; \dots\dots\dots; X_{15,j+1} \quad (4.5)$$

Cuando se considera distribuido, cada individuo de diferentes intervalos aportan con nuevos individuos multiplicado por un factor  $a_i$ .

Entonces se tiene:

$$X_{1,j+1} = b ( a_1 X_{5,j} + a_2 X_{6,j} + a_3 X_{7,j} + a_4 X_{8,j} + a_5 X_{9,j} ) \quad (4.6)$$

$$\text{donde:} \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \quad (4.7)$$

La población total  $N$  a un tiempo  $j$  va a ser igual a:

$$N_j = \sum_{i=1}^{15} X_{i,j} \quad (4.8)$$

Para un tiempo  $j+1$ , la población total va a ser igual a:

$$N_{j+1} = \sum_{i=1}^{15} X_{i,j+1} \quad (4.9)$$

Para b concentrado la población a un tiempo  $j+1$  en función de la población a un tiempo  $j$  será igual a:

$$N_{j+1} = N_j - X_{15,j} + b X_{5,j} \quad (4.10)$$

Para b distribuido, la población a un tiempo  $j+1$  en función de la población a un tiempo  $j$  será igual a:

$$N_{j+1} = N_j - X_{15,j} + b(a_1 X_{5,j} + a_2 X_{6,j} + a_3 X_{7,j} + a_4 X_{8,j} + a_5 X_{9,j}) \quad (4.11)$$

Con este modelo matemático de población es posible realizar extrapolaciones del crecimiento de población en intervalo o paso de 5 años, dependiendo del factor de crecimiento o fertilidad  $b$ , la distribución inicial y el valor de los coeficientes  $a_i$ .

También es posible utilizar el modelo en intervalo o paso de 1 año en el cual en lugar de tener 15 intervalos entre 0 y 75 años, se tiene 75 intervalos.

La población total  $N$  a un tiempo  $j$  será igual a:

$$N_j = \sum_{i=1}^{75} X_{i,j} \quad (4.12)$$

y para un tiempo  $j+1$ , la población total será igual a:

$$N_{j+1} = \sum_{i=1}^{75} X_{i,j+1} \quad (4.13)$$

Para b concentrado, la población total a un tiempo  $j+1$  en función de la población total a un tiempo  $j$  será igual a:

$$N_{j+1} = N_j - X_{75,j} + b X_{21,j} \quad (4.14)$$

Para b distribuido, la población total a un tiempo  $j+1$  ( $N_{j+1}$ ) en función de la población a un tiempo  $j$  será igual a:

$$\begin{aligned} N_{j+1} = N_j - X_{75,j} + [ & \frac{a_1}{5} (X_{21,j} + X_{22,j} + X_{23,j} + X_{24,j} + X_{25,j}) + \\ & + \frac{a_2}{5} (X_{26,j} + X_{27,j} + X_{28,j} + X_{29,j} + X_{30,j}) + \\ & + \frac{a_3}{5} (X_{31,j} + X_{32,j} + X_{33,j} + X_{34,j} + X_{35,j}) + \\ & + \frac{a_4}{5} (X_{36,j} + X_{37,j} + X_{38,j} + X_{39,j} + X_{40,j}) + \\ & + \frac{a_5}{5} (X_{41,j} + X_{42,j} + X_{43,j} + X_{44,j} + X_{45,j}) ] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Las ecuaciones (4.14) y (4.15), permite realizar extrapolaciones en pa so de 1 año para b concentrado y b distribuido respectivamente.

Para la obtención de los coeficientes  $a_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , se ha recurrido a valores de fertilidad de la población humana para tener valores reales.

En la figura 4.1, se muestra el gráfico de fertilidad en función de la edad. En el gráfico se tienen dos fertilidades, una natural, típica de los países subdesarrollados y una fertilidad limitada, típica de los países desarrollados [6].

El gráfico de la figura 4.1 está dado en nacimientos por cada 1000 mujeres. Para nuestro caso vamos a obtener los factores  $a_i$  de tal manera que la sumatoria sea igual a 1. Esto se muestra en la Tabla 4.1.

Como se muestra en la Tabla 4.1, denominaremos a la fertilidad natural como  $b$  distribuido A y a la fertilidad limitada como  $b$  distribuido B.

Para el estudio del modelo se ha tomado varios tipos de distribuciones iniciales que se muestran en la figura 4.2. Se tienen 5 tipos de distribuciones iniciales que simulan condiciones intermedias y extremas.

#### 4.3. DEMOSTRACION DE LA INDEPENDENCIA DE LA DISTRIBUCION EN REGIMEN PERMANENTE NORMALIZADA DE LA DISTRIBUCION INICIAL. MEDIO ILIMITADO.

Para demostrar la independencia de la distribución en régimen perma-

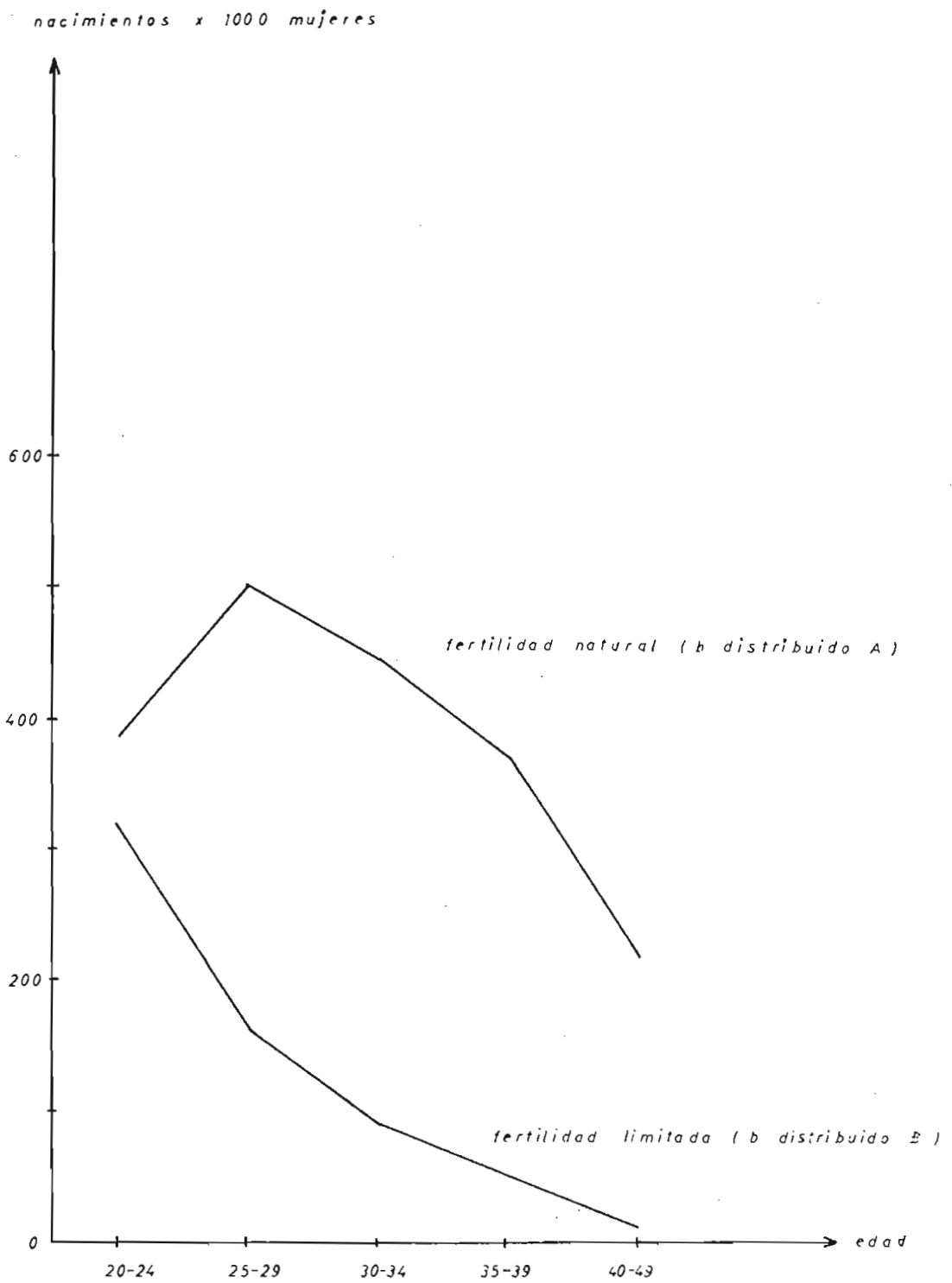


Fig. 4.1.- Gráfico de fertilidad en función de la edad. Fertilidad natural y limitada. [6].



TABLA 4.1

FERTILIDAD POR EDADES

Fertilidad natural (b distribuido A)

| Edad    | Nacimiento por 1000 mujeres | $a_i$   |
|---------|-----------------------------|---------|
| 20 - 24 | 386                         | 0.2919  |
| 25 - 29 | 498                         | 0.2605  |
| 30 - 34 | 443                         | 0.2317  |
| 35 - 39 | 370                         | 0.1935  |
| 40 - 44 | 215                         | 0.1124  |
|         | <hr/> 1912                  | <hr/> 1 |

Fertilidad limitada (b distribuido B)

| Edad    | Nacimientos por 1000 mujeres | $a_i$   |
|---------|------------------------------|---------|
| 20 - 24 | 320                          | 0.4961  |
| 25 - 29 | 165                          | 0.2558  |
| 30 - 34 | 90                           | 0.1395  |
| 35 - 39 | 50                           | 0.0775  |
| 40 - 44 | 20                           | 0.0311  |
|         | <hr/> 645                    | <hr/> 1 |

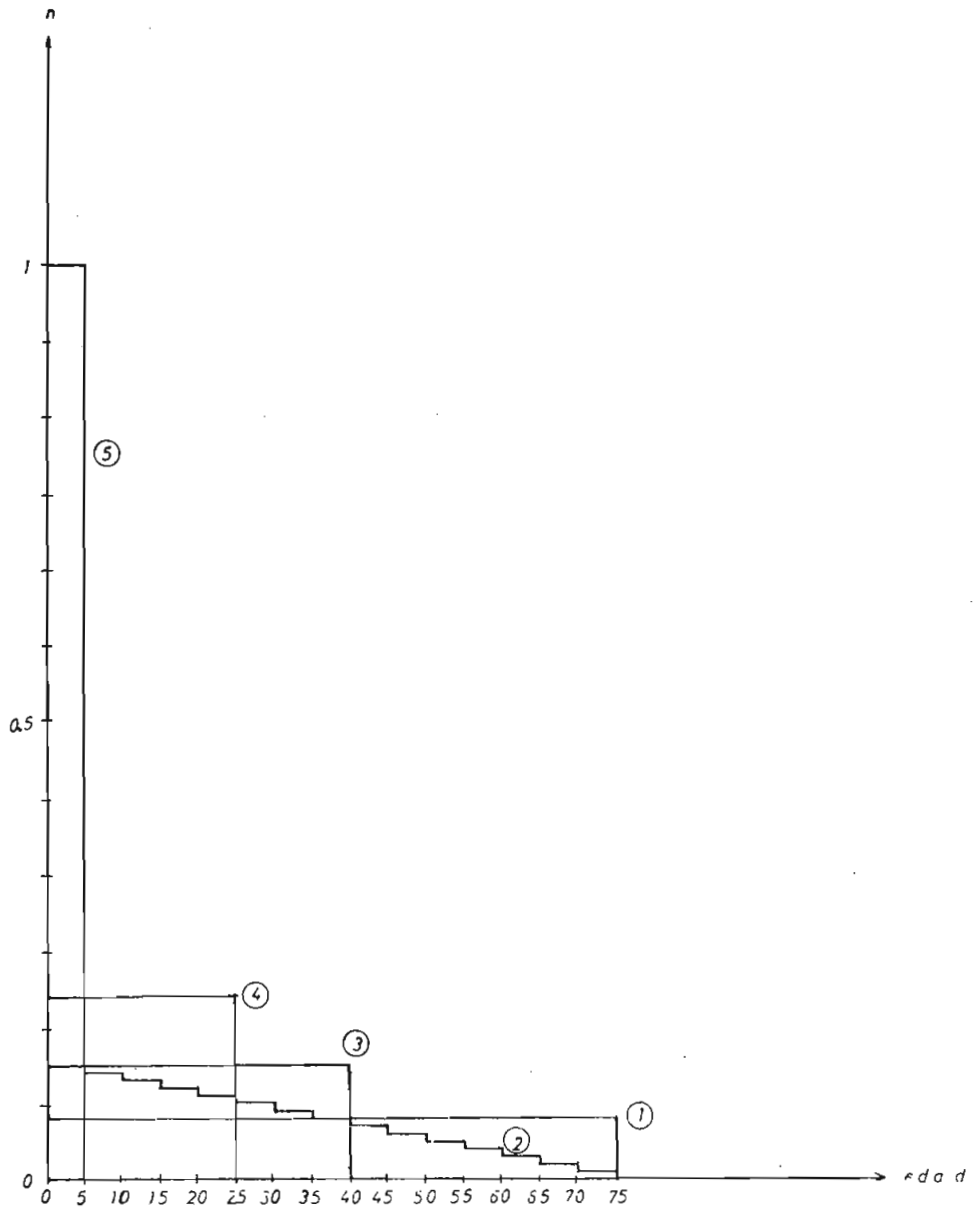


Fig. 4.2.- Tipos de distribuciones iniciales.

nente normalizada, respecto de la distribución inicial, se ha corrido programas con el modelo matemático para tiempos suficientemente largos para las cinco distribuciones iniciales de la figura 4.2.

Este experimento se ha realizado para tres tipos de b: (ver Fig. 4.1).

- b distribuido A
- b distribuido B
- b concentrado .

Los experimentos han sido realizados para  $b = 1, 2, 3$ , y se ha graficado distribuciones para diferentes tiempos, para poder observar la transición de la distribución inicial a una distribución en régimen permanente.

El trabajo experimental se ha realizado para todos los casos posibles, pero en el presente trabajo de tesis, detallamos una pequeña parte, en la cual se puede observar el comportamiento del modelo. Se indicará los resultados finales y conclusiones de este estudio.

Entonces vamos a detallar el caso de  $\underline{b}$  distribuido A y veremos para  $b = 1$  y 2. La distribución inicial será la 2, indicada en la Fig.4.2.

En la figura 4.3, se muestra las distribuciones para 0, 50, 100 , 150 años en función de la edad para  $b = 1$  y  $\underline{b}$  distribuido A, en donde se puede observar el régimen transitorio hasta alcanzar una distribución permanente.

Entonces ahora graficamos las distribuciones para tiempos mayores, en este caso para 150, 200 y 250 años, que se muestra en la figura 4.4. En esta figura se observa como tiende a una distribución plana en régimen permanente.

Para  $b = 2$  y  $\underline{b}$  distribuido A, se muestran las distribuciones para 0, 50, 100 y 150 años en la figura 4.5. Para 150, 200 y 250 años, las distribuciones de población en función de la edad se muestra en la figura 4.6, en la cual se observa que la distribución final en régimen permanente tiende a ser escalonada.

Distribucion despues  
de 150 años  
Para  $b=1$

habitantes/5 años

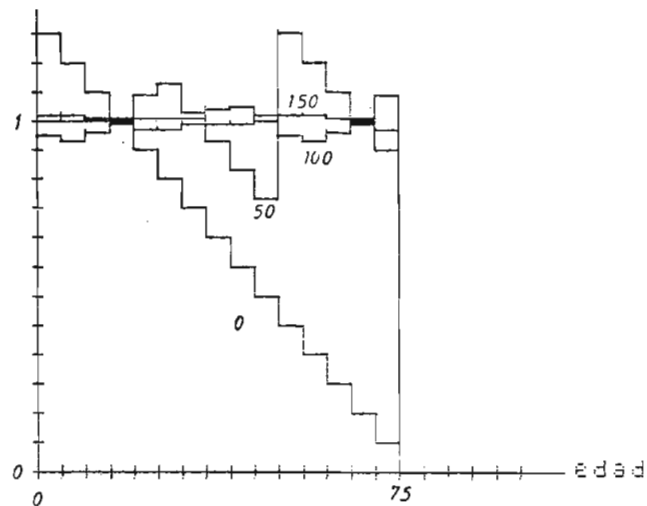


Fig. 4.3.- Distribuciones de población en función de la edad para 0, 50, 100 y 150 años.  $b = 1$ ,  $\underline{b}$  distribuido A. Distribución inicial 2.

Distribucion despues  
de 250 años  
Para  $b=1$

habitantes/5 años

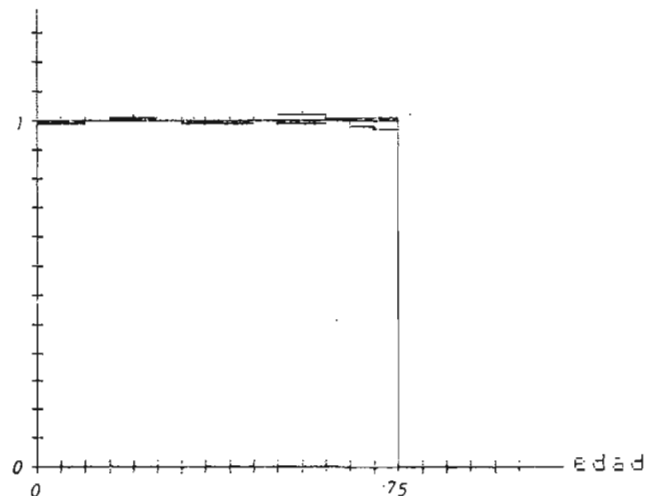


Fig. 4.4.- Distribuciones de población en función de la edad para 150, 200 y 250 años.  $b = 1$ ,  $\underline{b}$  distribuido A. Distribución inicial 2.

Distribucion despues  
de 150 años  
Para  $b=2$

habitantes/5 años

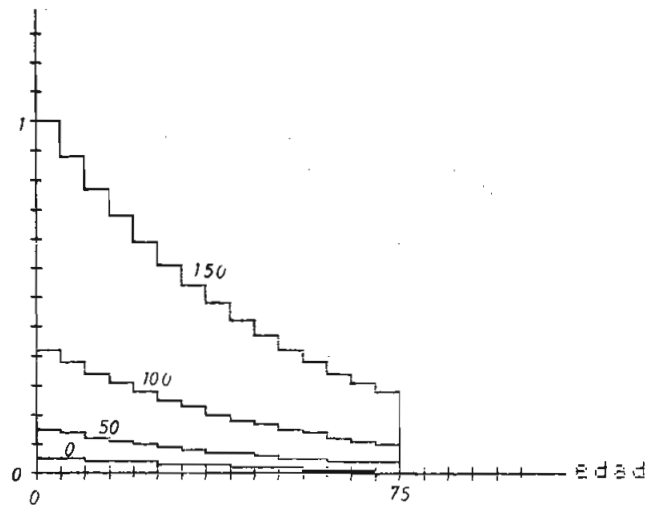


Fig. 4.5.- Distribuciones de población en función de la edad para 0, 50, 100 y 150 años.  $b = 2$ ,  $\underline{b}$  distribuido A. Distribución inicial 2.

Distribucion despues  
de 250 años  
Para  $b=2$

habitantes/5 años

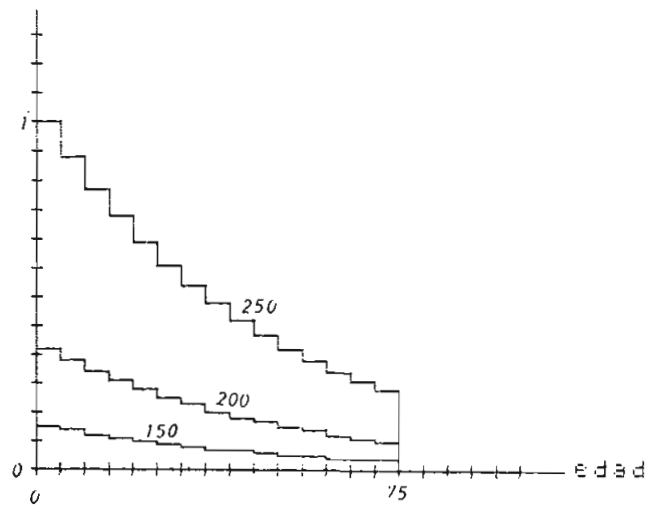


Fig. 4.6.- Distribuciones de población en función de la edad para 150, 200 y 250 años.  $b = 2$ ,  $\underline{b}$  distribuido A. Distribución inicial 2.

Vamos ahora a observar las distribuciones para otra distribución inicial, en este caso será la distribución inicial 5 indicada en la figura 4.2. Esta distribución es extrema, ya que se reparte en un solo intervalo.

En la figura 4.7, se muestra las distribuciones para  $b = 2$ ,  $\underline{b}$  distribuido A y distribución inicial 5 para los tiempos 0, 50, 100 y 150 años.

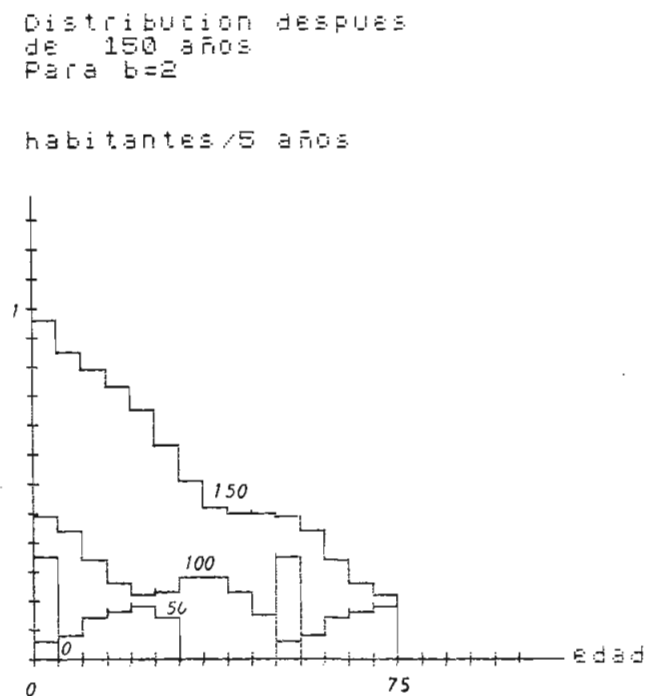


Fig. 4.7.- Distribuciones de población en función de la edad para 0, 50, 100 y 150 años.  $b = 2$ ,  $\underline{b}$  distribuido A. Distribución inicial 5.

Ahora para los años 150, 200 y 250, las distribuciones se muestran en la figura 4.8.

Comparando las figuras 4.6 y 4.8, se observa que la distribución nor

malizada final obtenida es la misma. Esta distribución en régimen permanente.

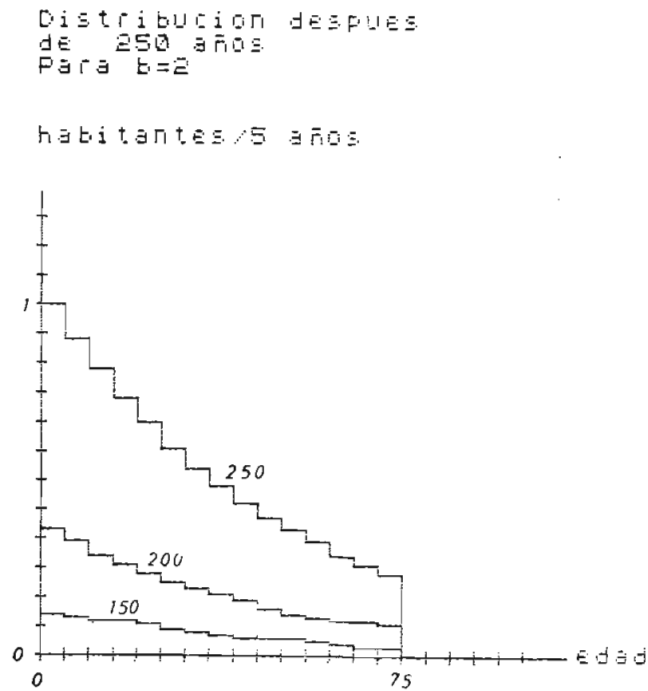


Fig. 4.8.- Distribuciones de población en función de  
la edad para 150, 200 y 250 años.  $b = 2$ ,  
b distribuido A. Distribución inicial 5.

Comparando las figuras 4.5 y 4.6, se puede ver que existe una región de régimen transitorio para los primeros años que depende de la distribución inicial y es más marcada en el caso de tener una distribución extrema como es la distribución inicial 5. Pero al final se llega a una misma distribución normalizada en régimen permanente.

El proceso detallado anteriormente se realiza experimentalmente para  $b = 1, 2$  y  $3$  para cada distribución inicial y para b concentrado, b distribuido A y b distribuido B y se obtuvo los siguientes resultados

detallados a continuación.

Para  $\underline{b}$  distribuido A se obtuvo las distribuciones finales normalizadas mostradas en la figura 4.9. Las distribuciones normalizadas finales son las mismas para cada una de las 5 distribuciones iniciales.

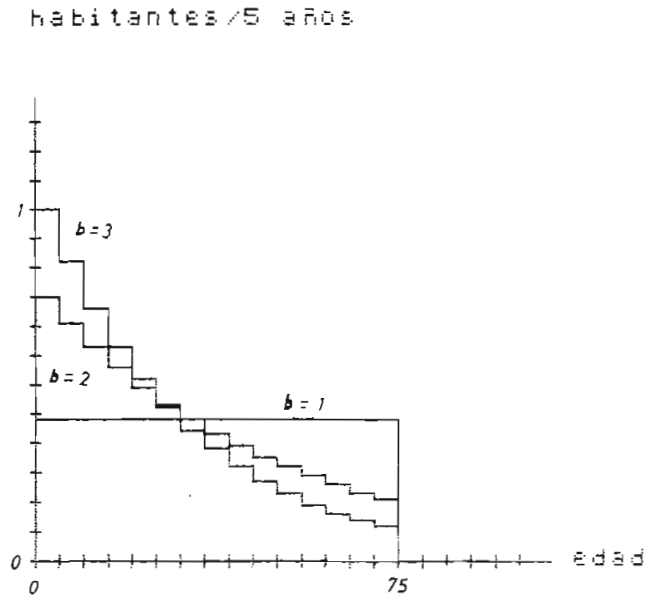


Fig. 4.9.- Distribuciones normalizadas finales para  $b = 1, 2$  y  $3$ .  $\underline{b}$  distribuido A.

Para  $\underline{b}$  distribuido B, las distribuciones finales normalizadas se muestran en la figura 4.10.

Para  $\underline{b}$  concentrado, en la figura 4.11, se muestra las distribuciones normalizadas finales para  $b = 1, 2$  y  $3$ .

Para el caso de  $\underline{b}$  concentrado, se tiene las siguientes particularidades. Cuando se usa la distribución inicial 2, se tiene que no se lle



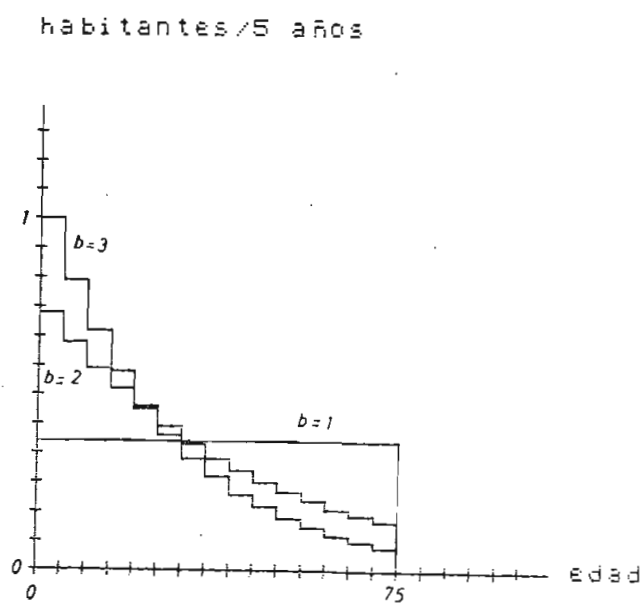


Fig. 4.10.- Distribuciones finales normalizadas para  
 $b = 1, 2$  y  $3$ .  $b$  distribuido B.

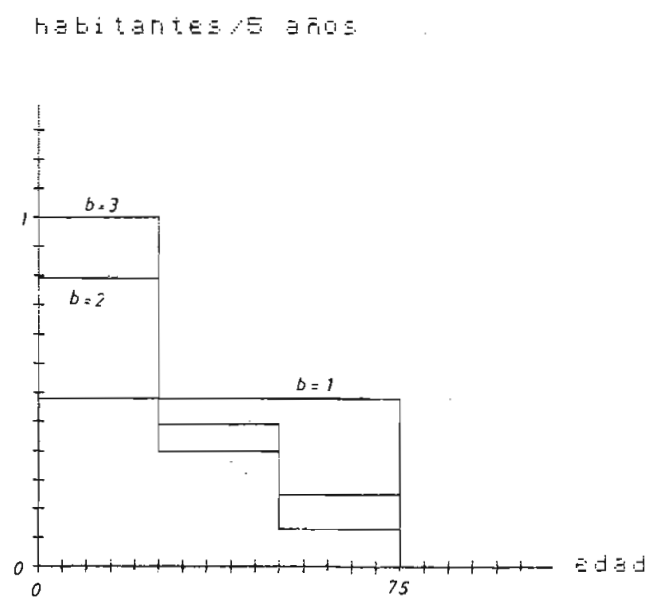


Fig. 4.11.- Distribuciones finales normalizadas para  
 $b = 1, 2$  y  $3$ .  $b$  concentrado.

ga exactamente a la distribución final que se obtiene con las distribuciones 1, 3 y 4.

Esto se puede observar en las figuras 4.12, 4.13 y 4.14.

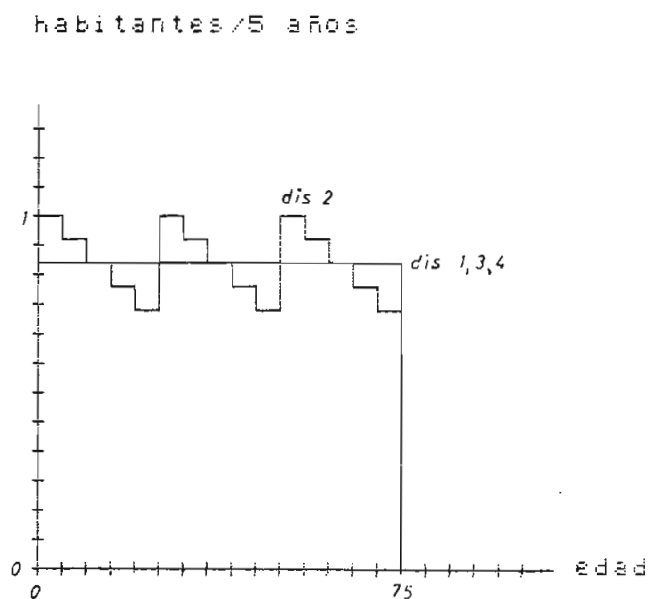


Fig. 4.12.- Distribuciones finales normalizadas para las distribuciones iniciales 2 y 1, 3, 4 b concentrado,  $b = 1$ .

En las figuras 4.12, 4.13 y 4.14, se representa la distribución final normalizada para una distribución inicial 2 y también la distribución final normalizada para las distribuciones iniciales 1, 3 y 4, en la cual se tiene la misma distribución final normalizada para los tres casos. De las figuras se puede decir que a pesar de no ser igual la distribución final, tiende a tener las mismas características.

Esto se explica debido a que el b usado es concentrado, en el cual só

habitantes/5 años

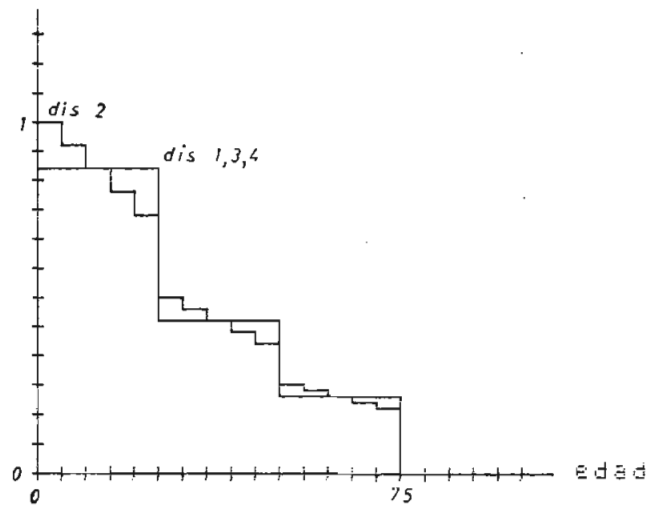


Fig. 4.13.- Distribuciones finales normalizadas  
para las distribuciones iniciales  
2 y 1,3,4.  $\underline{b}$  concentrado,  $b = 2$ .

habitantes/5 años

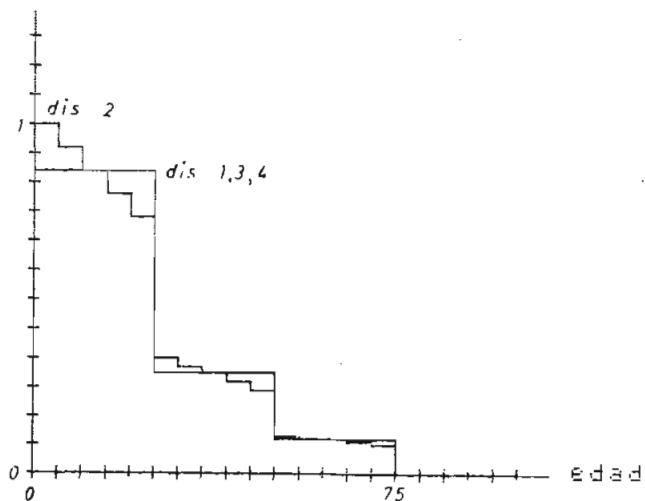


Fig. 4.14.- Distribuciones finales normalizadas  
para distribuciones iniciales 2 y  
1,3,4.  $\underline{b}$  concentrado,  $b = 3$ .

lo los individuos del intervalo 20-25 años aportan con nuevos individuos, siendo en este caso la distribución final más sensible a la forma de la distribución inicial.

La particularidad anterior también se observa con la distribución inicial 5, en la cual también se puede decir que la distribución final tiene las mismas características a pesar de no ser igual.

Esto se muestra en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17, para  $b = 1, 2$  y  $3$  respectivamente.

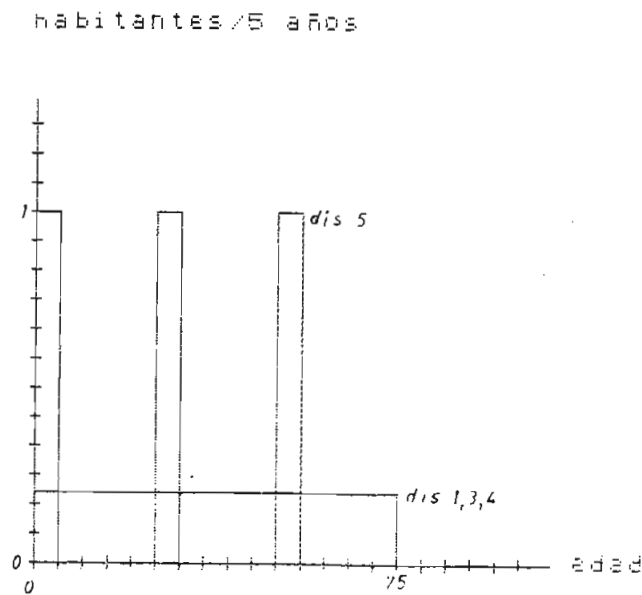


Fig. 4.15.- Distribuciones finales normalizadas para las distribuciones iniciales 5 y 1, 3, 4.  
b concentrado,  $b = 1$ .

Entonces se tiene como conclusión que la distribución final normalizada en régimen permanente ( $t \rightarrow \infty$ ), no depende de la distribución inicial

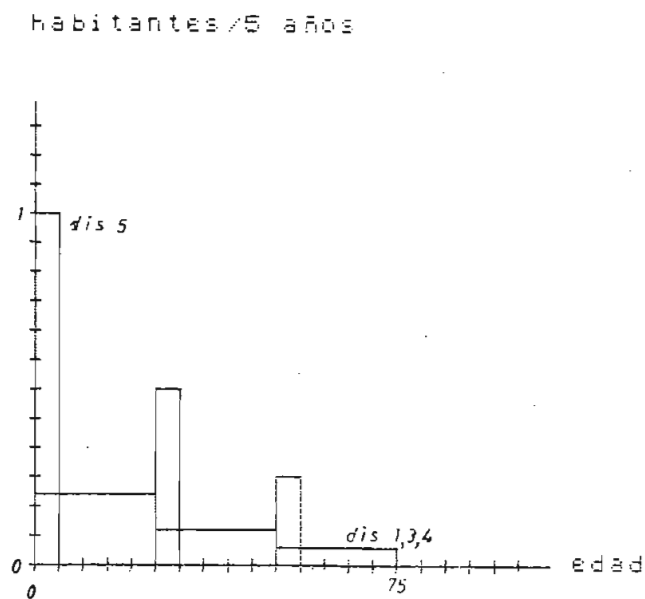


Fig. 4.16.- Distribuciones finales normalizadas  
para las distribuciones iniciales 5  
y 1,3,4. b concentrado,  $b = 2$ .

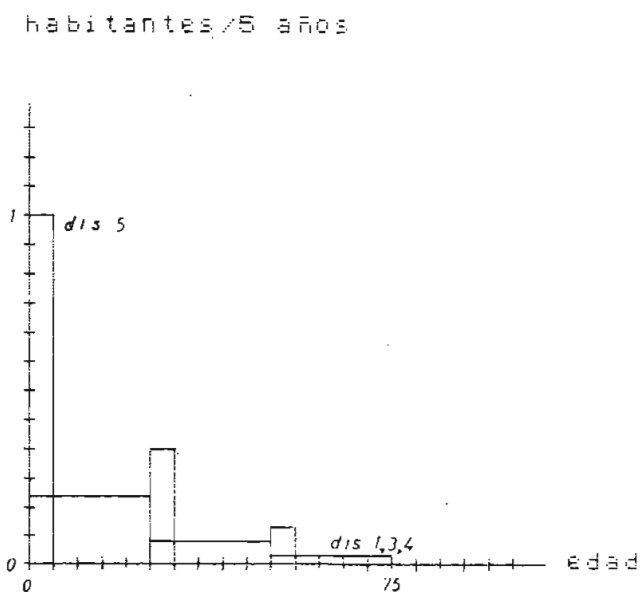


Fig. 4.17.- Distribuciones finales normalizadas  
para las distribuciones iniciales 5  
y 1,3,4. b concentrado,  $b = 3$ .

cial. Esto se ha demostrado para las 5 distribuciones mostradas en la figura 4.2.

La distribución final de población va a depender del factor  $\underline{b}$ , por lo cual se tiene en este experimento 3 distribuciones finales diferentes que corresponden a cada valor de  $\underline{b}$ . Las distribuciones finales dependen del tipo de  $\underline{b}$  usado, es decir, concentrado, distribuido A o B.

También se puede decir que existe régimen transitorio antes de alcanzar el régimen permanente. Este régimen transitorio depende de la condición inicial.

#### 4.4. ANALISIS DEL MODELO EN REGIMEN PERMANENTE. MEDIO ILIMITADO.

Como se indicó en la parte 4.3, de este capítulo, existe una zona de transición antes de llegar al régimen permanente.

Para observar la transición de un régimen transitorio a un régimen permanente, se ha graficado la población en función del tiempo para los primeros años como se muestra en la figura 4.18. Esto se ha realizado para  $b = 2$  y  $\underline{b}$  distribuido B.

Para valores de  $b = 1$ , la población en régimen permanente, tiende a un valor constante, cuyo valor depende de la distribución inicial. Esto se muestra en la figura 4.19.

Entonces para  $b = 1$ , se puede decir que el crecimiento de la población

es cero cuando se tiene un régimen permanente.

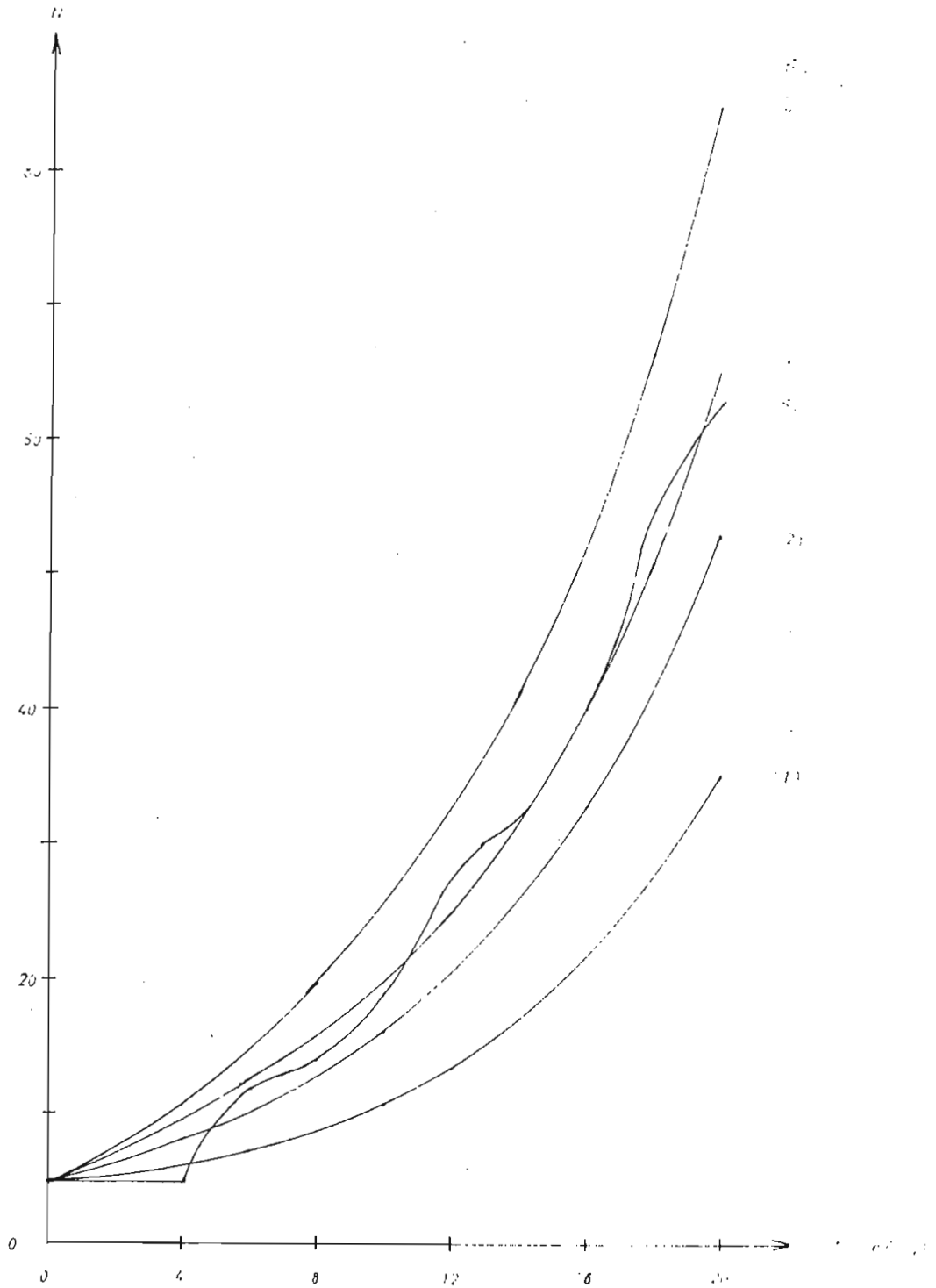


Fig. 4.18.- Gráfico de  $N = f(t)$ . Se identifica un régimen transitorio y un régimen permanente, para  $b = 2$  y  $\underline{b}$  distribuido B...

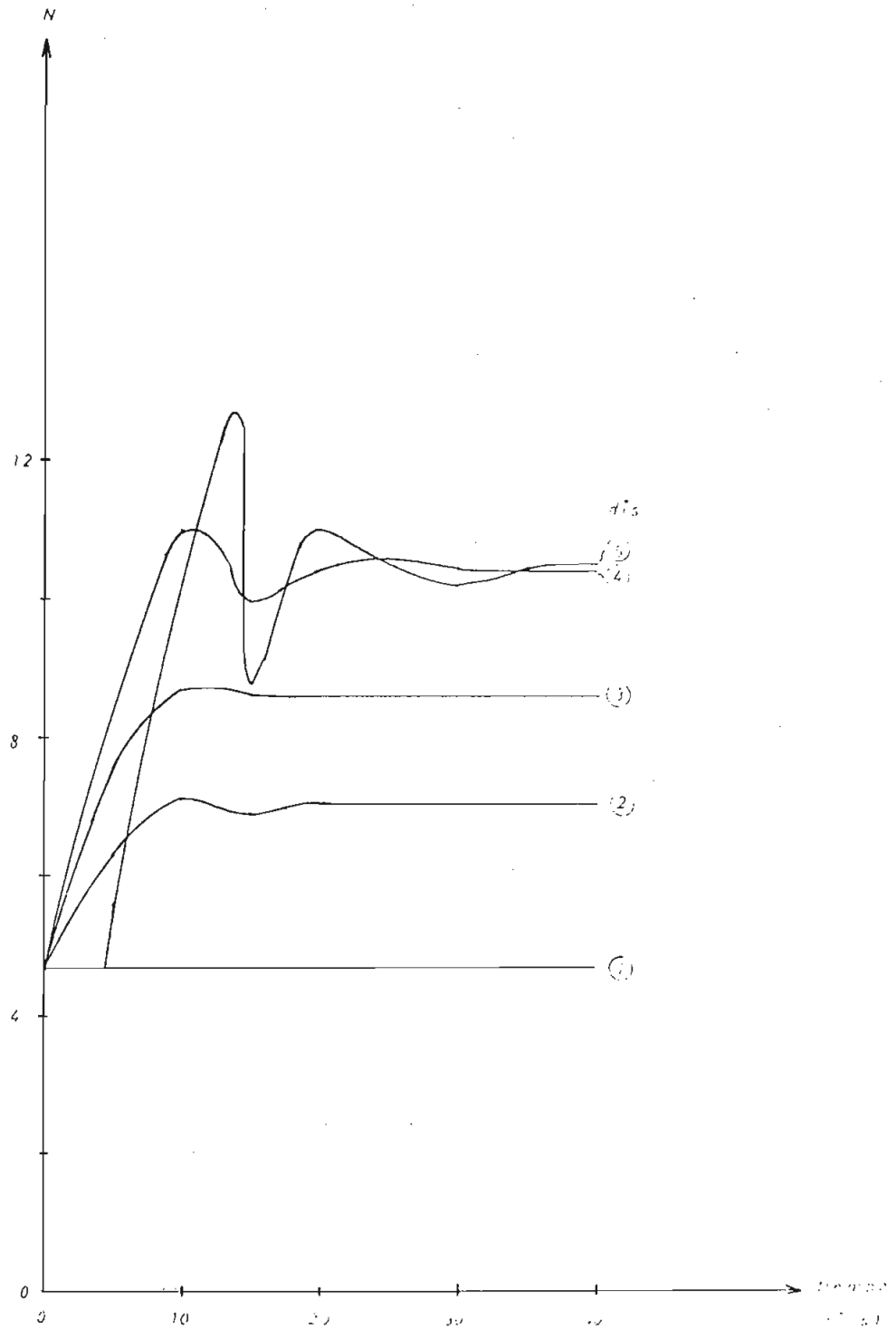


Fig. 4.19.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b = 1$   
y  $b$  distribuido A.



Para observar el crecimiento exponencial en régimen permanente para  $b > 1$ , se ha graficado la función logaritmo natural de la población total en función del tiempo ( $\ln N = f(t)$ ).

En la figura 4.20.a, se muestra el gráfico de  $\ln N = f(t)$  para  $b = 2$ , y  $\underline{b}$  distribuido B para las 5 distribuciones iniciales de la figura 4.2.

Para  $b = 3$  y  $\underline{b}$  distribuido B, en la figura 4.20.b, se muestra el gráfico de  $\ln N = f(t)$ .

De la observación de las figuras 4.20.A y 4.20.B, se concluye que el crecimiento, en un régimen permanente, es exponencial, por tener en el gráfico  $\ln N = f(t)$  rectas, cuya pendiente depende del valor de  $\underline{b}$ .

Entonces el parámetro  $\underline{b}$  determina el crecimiento de la población.

Para  $b > 1$  y en régimen permanente se ha visto que el crecimiento de la población es exponencial, por lo cual es posible realizar una aproximación exponencial de la forma  $N = a e^{\lambda t}$ , en donde los coeficientes a determinarse son  $a$  y  $\lambda$ .

En la figura 4.21, se muestra el gráfico del coeficiente de crecimiento  $\lambda$  en función del coeficiente  $\underline{b}$  para los casos de  $\underline{b}$  concentrado,  $\underline{b}$  distribuido A y  $\underline{b}$  distribuido B. Este gráfico es válido para un régimen permanente, es decir para  $t$  tendiendo a infinito.

De la observación de estos resultados se concluye que para valores de  $\underline{b}$  mayores a 1, en régimen permanente, para los tres tipos de  $\underline{b}$ , el

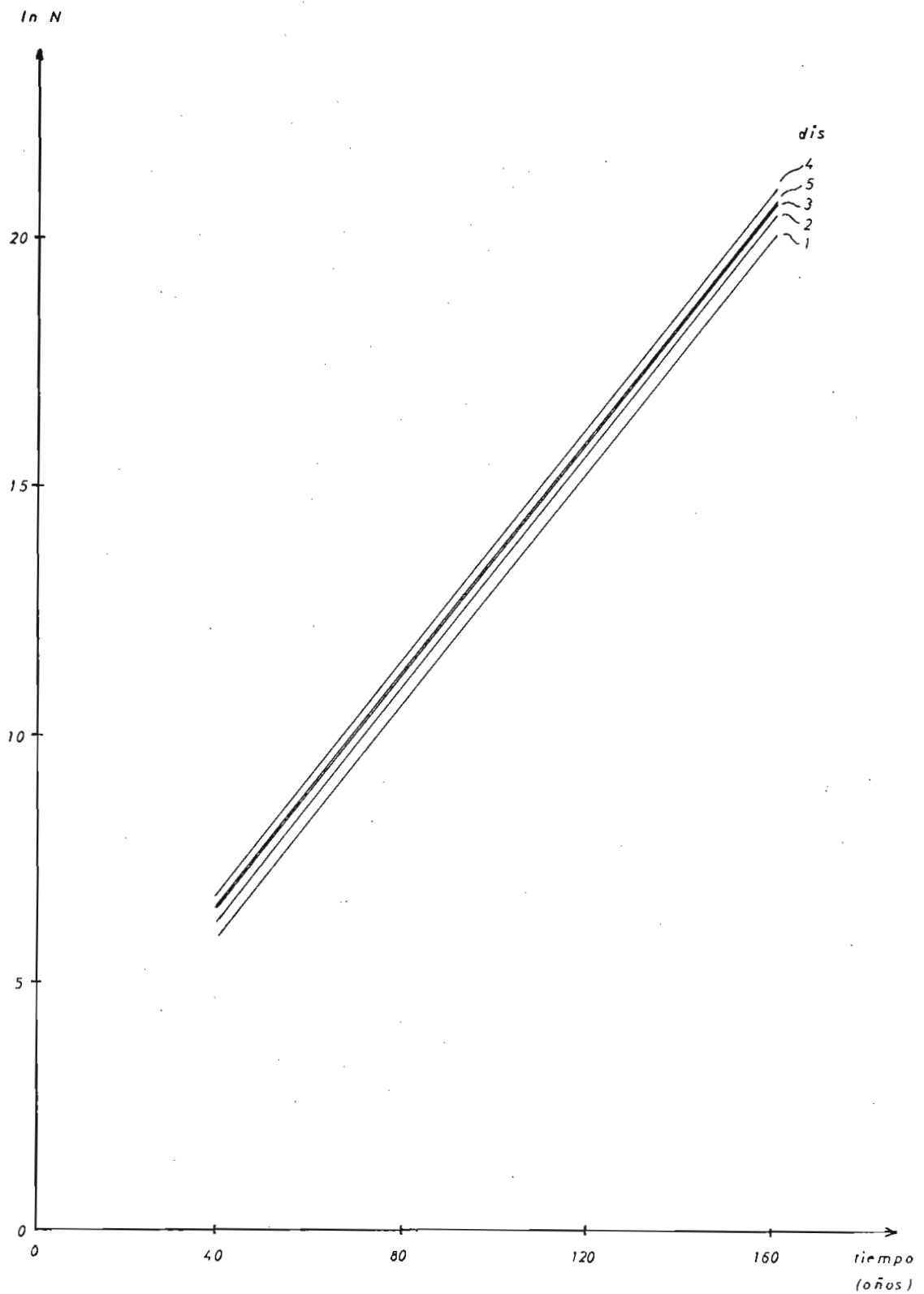


Fig. 4.20.a.- Gráfico de  $\ln N = f(t)$  en régimen permanente.  $b = 2$ ,  
b distribuido B.

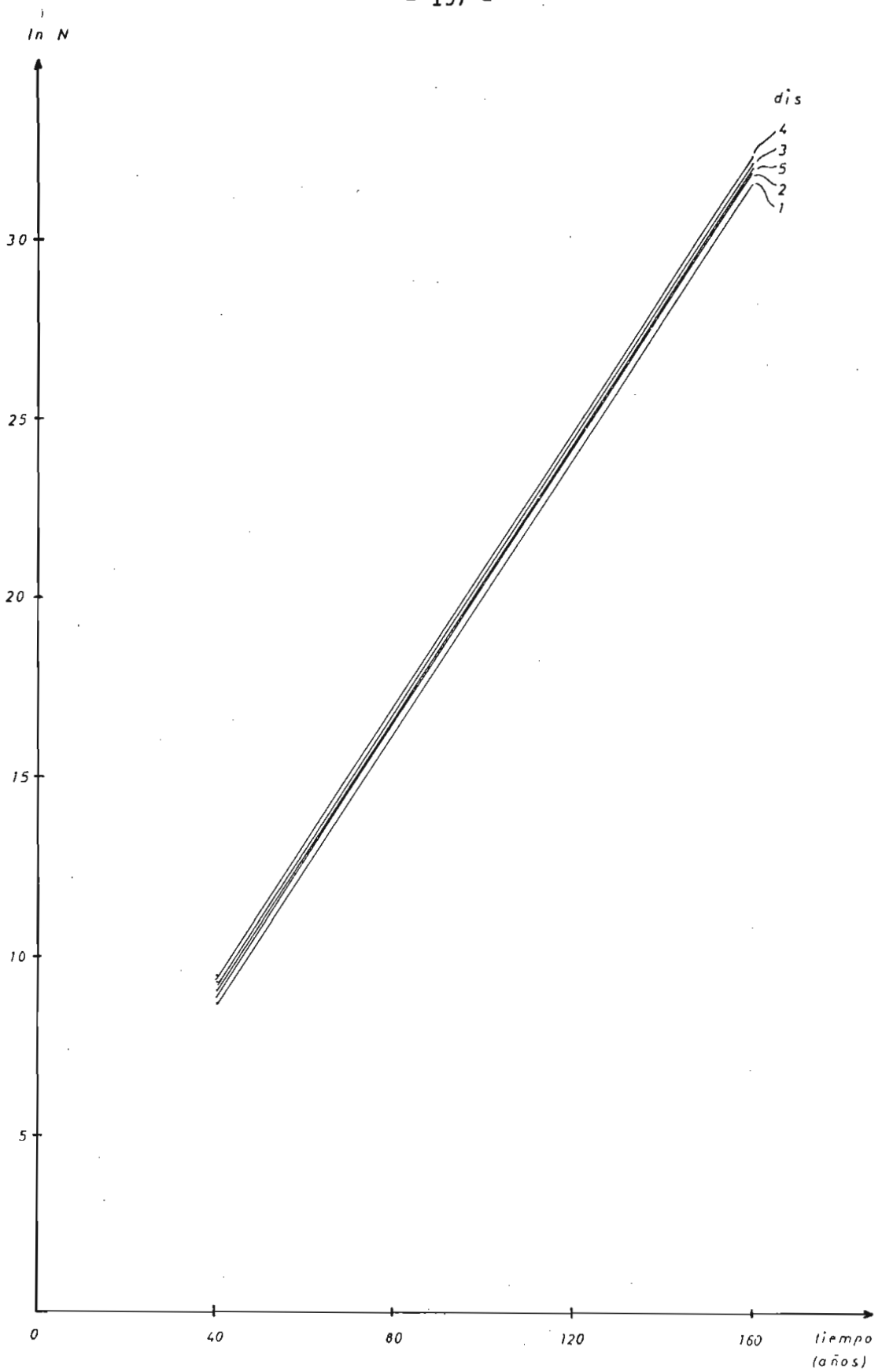


Fig. 4.20.b.- Gráfico de  $\ln N = f(t)$  en régimen permanente.  $b = 3$ ,  $\underline{b}$  distribuido B.

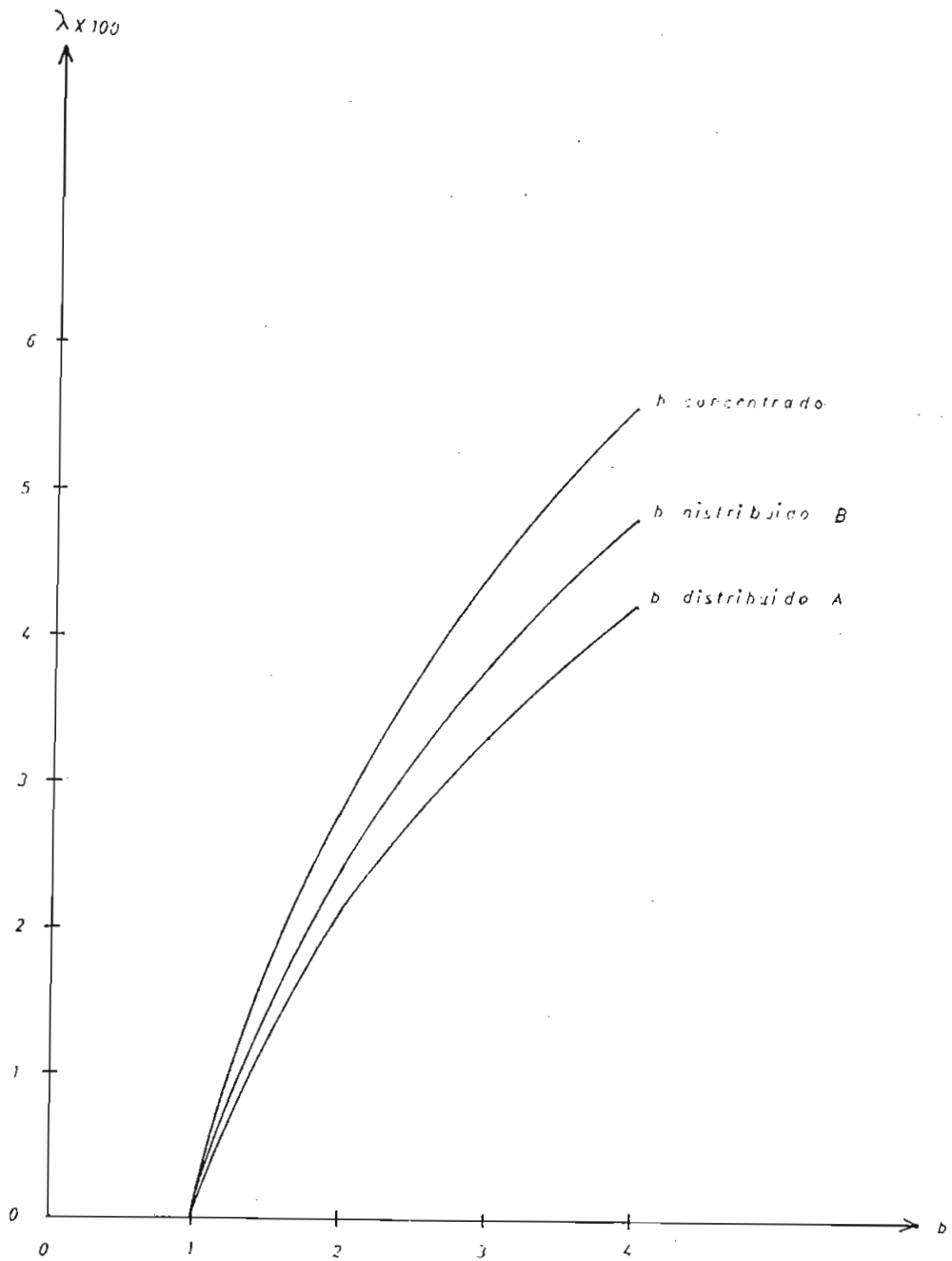


Fig. 4.21.- Gráfico del coeficiente de crecimiento  $\lambda$  en función de  $\underline{b}$ , para  $b$  concentrado,  $\underline{b}$  distribuido A y  $\underline{b}$  distribuido B.

crecimiento de la población es exponencial. Además el exponente  $\lambda$  es independiente de la distribución inicial.

#### 4.5. APLICACION DEL MODELO A LA POBLACION DEL MUNDO.

Para el modelaje de la población mundial se va a tomar 2 casos:

- Países en vías de desarrollo, que lo llamaremos caso A
- Países desarrollados, que llamaremos caso B.

Primeramente vamos a estudiar el caso A, en el cual vamos a obtener el porcentaje de crecimiento en función del parámetro  $\underline{b}$ , para un intervalo de 25 años a partir del año 1975.

Para la obtención de esta curva, se ha utilizado como condición inicial la distribución indicada en la Tabla 4.2 y cuya distribución se ha graficado en la figura 4.22.

En el caso A se ha utilizado un  $\underline{b}$  distribuido A, que es el predominante para este caso.

Para la obtención de éstos resultados se ha utilizado un intervalo de 25 años. Para cada valor de  $\underline{b}$  se ha obtenido el porcentaje de crecimiento para el intervalo de 25 años y que se encuentra graficado en la figura 4.23.

TABLA 4.2.

DISTRIBUCION INICIAL DE POBLACION CASO A [5]

AÑO 1975

|          | <u>Hombres</u> | <u>Mujeres</u> | <u>Total</u> |
|----------|----------------|----------------|--------------|
| $X_1$    | 240            | 230            | 470          |
| $X_2$    | 205            | 200            | 405          |
| $X_3$    | 180            | 175            | 355          |
| $X_4$    | 160            | 150            | 310          |
| $X_5$    | 135            | 135            | 270          |
| $X_6$    | 110            | 110            | 220          |
| $X_7$    | 90             | 90             | 180          |
| $X_8$    | 80             | 80             | 160          |
| $X_9$    | 70             | 70             | 140          |
| $X_{10}$ | 60             | 60             | 120          |
| $X_{11}$ | 50             | 50             | 100          |
| $X_{12}$ | 40             | 40             | 80           |
| $X_{13}$ | 30             | 30             | 60           |
| $X_{14}$ | 20             | 25             | 45           |
| $X_{15}$ | 15             | 15             | 30           |
| $X_{16}$ | 10             | 10             | 20           |

---

2965 millones

NOTA: La población está dada en millones.

Distribucion inicial  
habitantes/5 años  
( en millones )

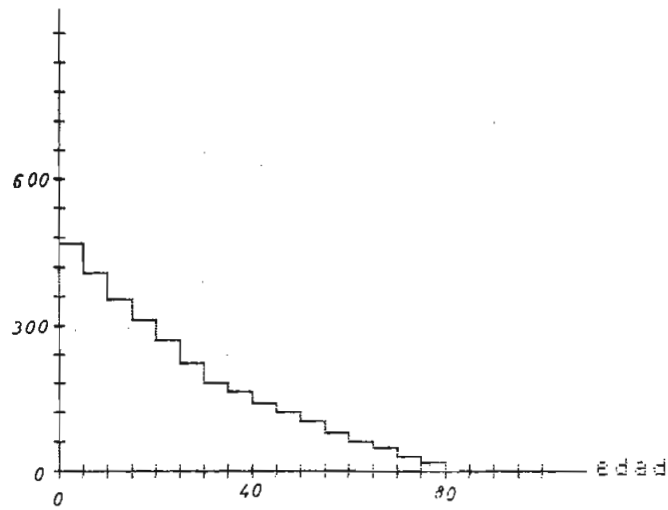


Fig. 4.22.- Distribución inicial caso A, año 1975.

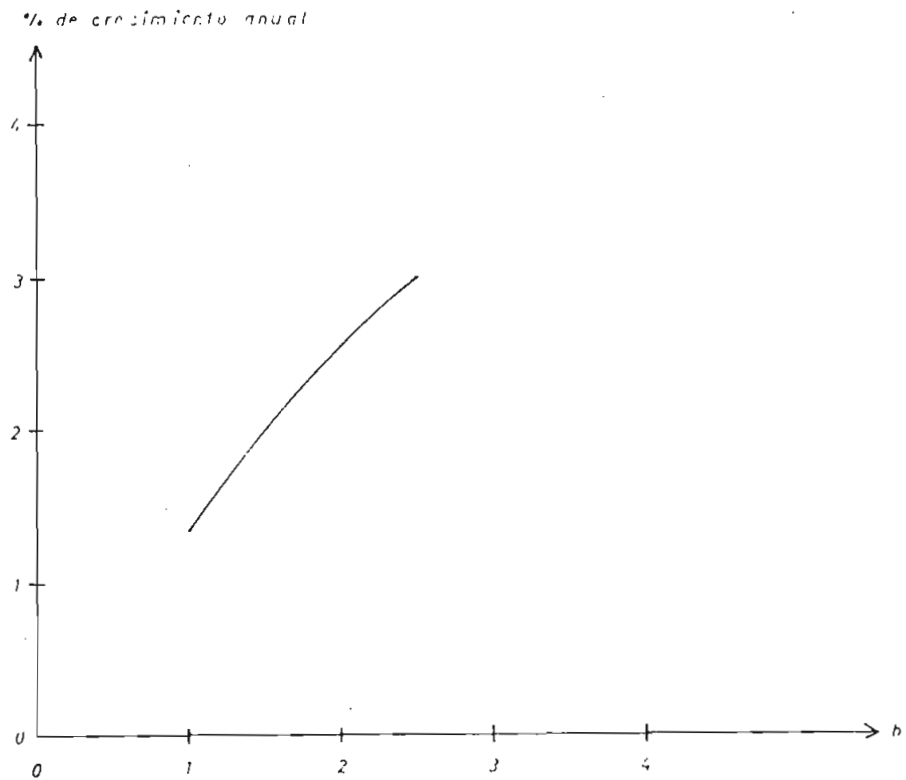


Fig. 4.23.a.- Porcentaje de crecimiento en función  
de b para un intervalo de 25 años caso A.

En base a la curva de la figura 4.23.a, es posible obtener el valor de b, para el cual se tiene el porcentaje de crecimiento indicado en la referencia [5].

El valor obtenido es  $b = 1.64$  que da un crecimiento de la población del 70% para el año 2000 a partir del año 1975.

En este estudio además de reproducir las condiciones para el año 2000, se realiza extrapolaciones hasta el año 2075, manteniéndose la misma tendencia de crecimiento de la población.

En la figura 4.23.b, se tiene la forma de la distribución de población en función de la edad para los años: 1975, 2000, 2025, 2050 y 2075.

Distribucion despues  
de 100 años  
Para  $b=1.64$   
  
habitantes/5 años  
( en millones )

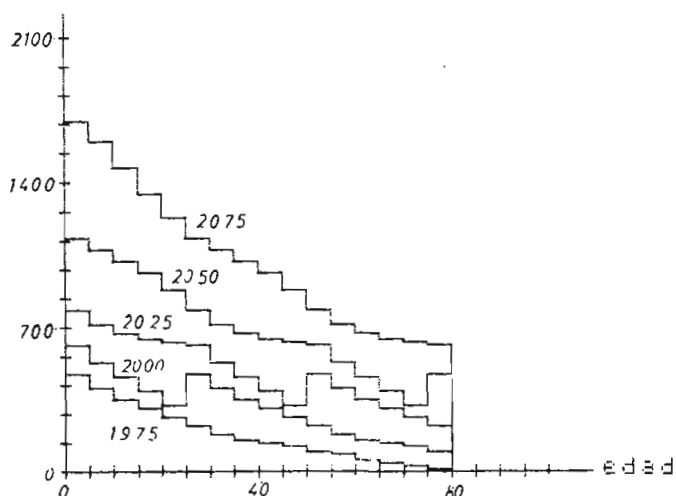


Fig. 4.23.b.- Distribuciones de población en función de la edad, Caso A para los años 1975, 2000, 2025, 2050 y 2075.



Se ha tomado como condición inicial la distribución de población del año 1975 que en total es de 2965 millones.

En la figura 4.24, se muestra la distribución para el año 2075.

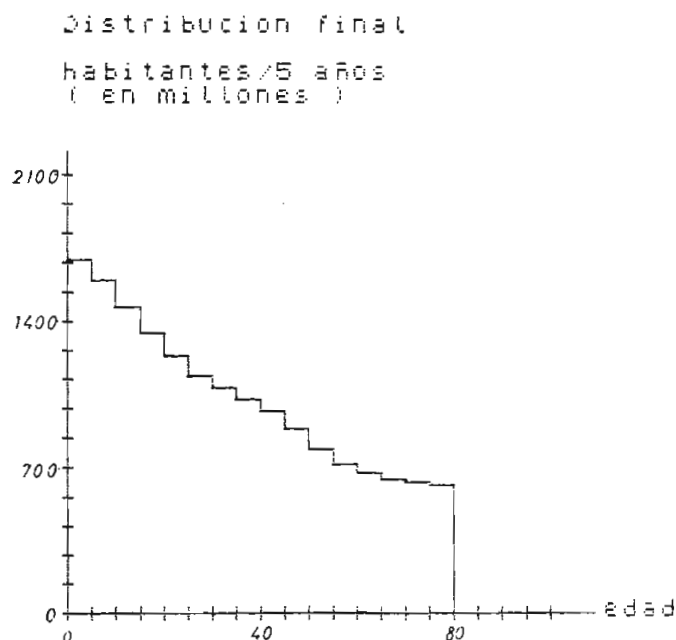


Fig. 4.24.- Distribución de población en función de la edad para el año 2075. Caso A.

En la figura 4.25, se tiene la población total  $N$  en función del año, en donde se observa un crecimiento rápido de la población.

De esto se puede concluir que los países del caso A, tienden a aumentar su población en una forma exponencial, de mantenerse la tendencia en el índice de crecimiento.

En este caso, la población para el año 2000 aumentará en un 70% en relación a la población en el año 1975. Para el año 2075, de mantenerse el índice de crecimiento actual, la población llegaría a ser de

16500 millones, o sea 5.5 veces la población en el año 1975. Esto significa un crecimiento del 456%.

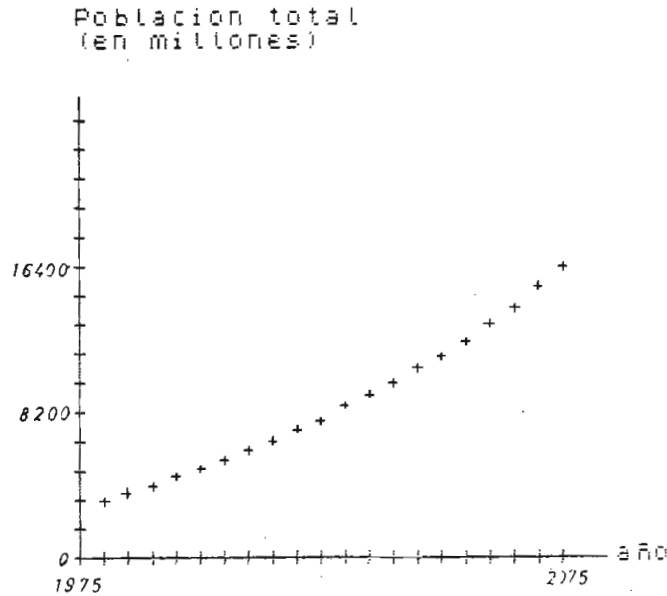


Fig. 4.25.- Población total en función del tiempo.

Caso A.

Ahora vamos a analizar que sucede si en el momento actual b se hace i gual a 1. Para este caso obtenemos la distribución para el año 1985, con el mismo índice de crecimiento anterior.

Esta distribución se muestra en la figura 4.26.

En base a la distribución del año 1985, extrapolamos para los años si guientes y para el año 2075 se obtiene una distribución que tiende a ser plana y que se muestra en la figura 4.27.

El gráfico de la población en función del tiempo se muestra en la fi gura 4.28.

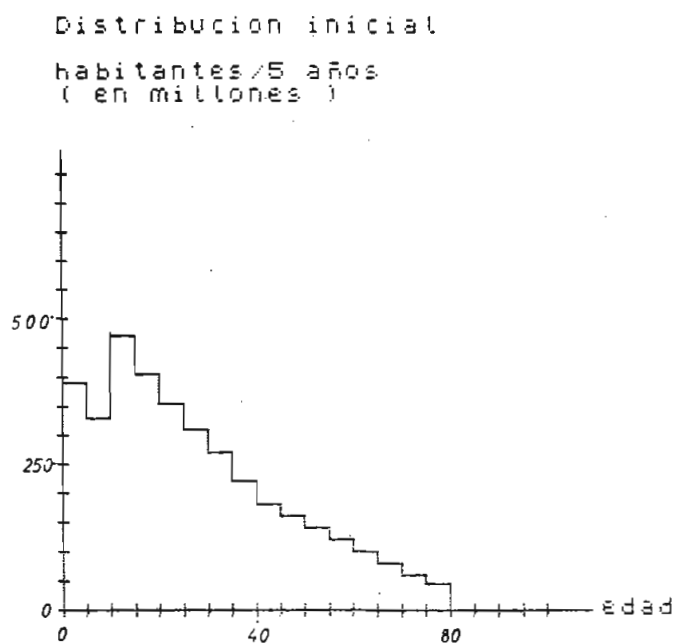


Fig. 4.26.- Distribución para el año 1985.

$$b = 1.64.$$

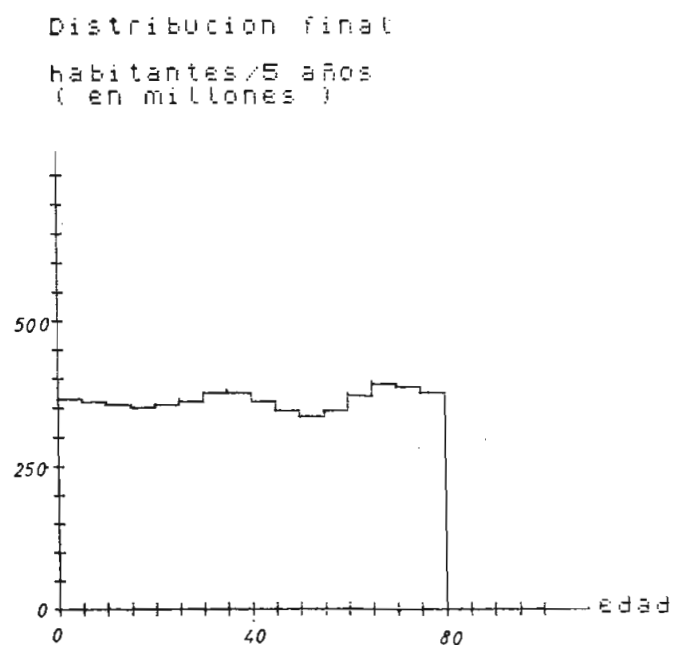


Fig. 4.27.- Distribución para el año 2075

con  $b = 1$  en base a la distribución del año 1985.

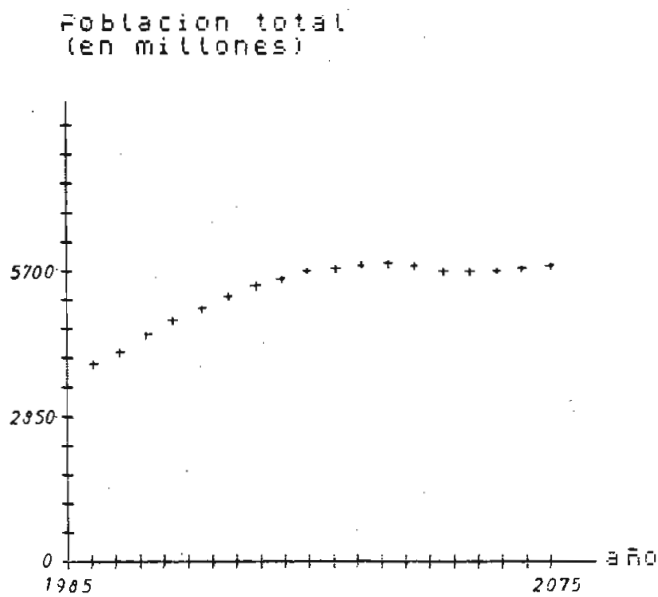


Fig. 4.28.- Gráfico  $N = f(t)$  para  $b = 1$   
en base a la distribución  
del año 1985. Caso A.

En cuanto a la población se observa que esta crece hasta estabilizarse en un valor constante de 5700 millones. La población crecerá entonces hasta el año 2035, y a partir de este año tomará un valor estable.

Ahora vamos a estudiar el caso B, en el cual de la misma manera anterior, vamos a obtener el porcentaje de crecimiento en función del parámetro b para un intervalo de 25 años a partir del año 1975.

Para obtener la curva se ha utilizado como condición inicial la distribución inicial indicada en la Tabla 4.3, y cuya distribución se encuentra graficada en la figura 4.29.

TABLA 4.3

DISTRIBUCION INICIAL DE POBLACION CASO B [5]

AÑO 1975

|          | <u>Hombres</u> | <u>Mujeres</u> | <u>Total</u> |
|----------|----------------|----------------|--------------|
| $X_1$    | 43             | 45             | 88           |
| $X_2$    | 46             | 45             | 91           |
| $X_3$    | 50             | 50             | 100          |
| $X_4$    | 50             | 50             | 100          |
| $X_5$    | 46             | 45             | 91           |
| $X_6$    | 43             | 46             | 99           |
| $X_7$    | 35             | 35             | 70           |
| $X_8$    | 35             | 40             | 75           |
| $X_9$    | 34             | 32             | 66           |
| $X_{10}$ | 34             | 35             | 69           |
| $X_{11}$ | 28             | 32             | 60           |
| $X_{12}$ | 20             | 25             | 45           |
| $X_{13}$ | 22             | 30             | 52           |
| $X_{14}$ | 18             | 27             | 45           |
| $X_{15}$ | 10             | 20             | 30           |
| $X_{16}$ | 15             | 27             | 42           |
|          |                |                | <hr/> 1123   |

NOTA: La población está dada en millones.

Distribucion inicial  
habitantes/5 años  
( en millones )

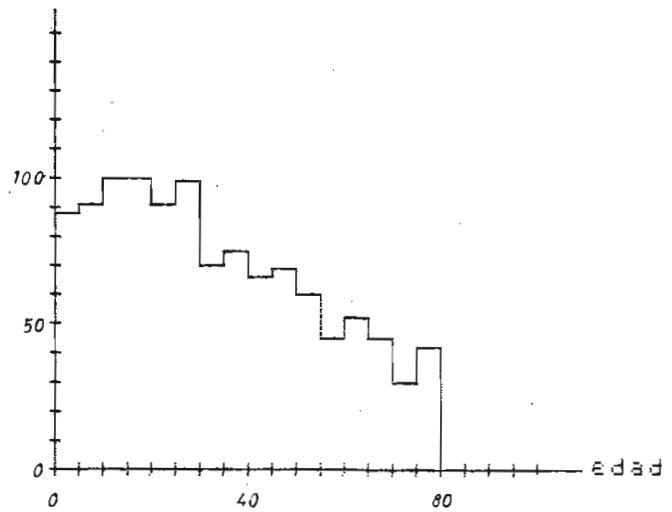


Fig. 4.29.- Distribución inicial caso B,  
año 1975.

En este caso se utiliza un  $\underline{b}$  distribuido B, por ser el predominante en este tipo de casos.

Se ha obtenido el porcentaje de crecimiento en función del parámetro  $\underline{b}$ , para un intervalo de 25 años a partir del año 1975. Esto se muestra en la figura 4.30.

En base a la curva de la figura 4.30, es posible obtener el valor de  $\underline{b}$  que determine el porcentaje de crecimiento de la referencia [5].

Para este caso el valor de  $b$  es 0.87.

Este valor de  $b = 0.87$  da un crecimiento de la población de un 17% para el año 2000 a partir del año 1975.

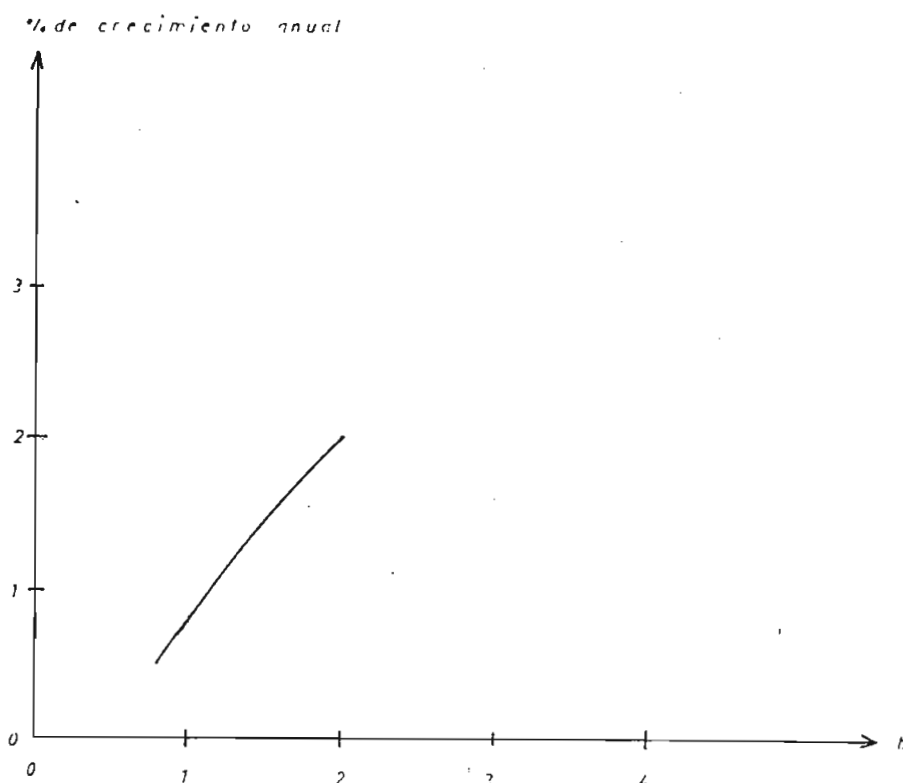


Fig. 4.30.- Porcentaje de crecimiento en función de  $b$  para un intervalo de 25 años.  
Caso B.

Además considerando que se mantiene  $b = 0.87$ , se ha realizado extrapolaciones del crecimiento de la población para el año 2075.

En la figura 4.31, se muestra las distribuciones de población en función de la edad para los años 1975, 2000, 2025, 2050 y 2075, considerando la distribución inicial del año 1975.

También se ha graficado la distribución final para el año 2075, que se muestra en la figura 4.32.

habitantes/5 años  
( en millones )

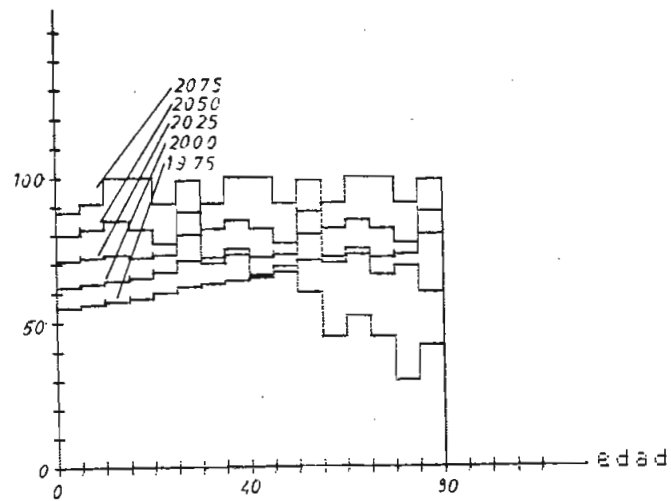


Fig. 4.31.- Distribuciones de población para los  
años 1975, 2000, 2025, 2050 y 2075.

Caso B.

Distribucion final  
habitantes/5 años  
( en millones )

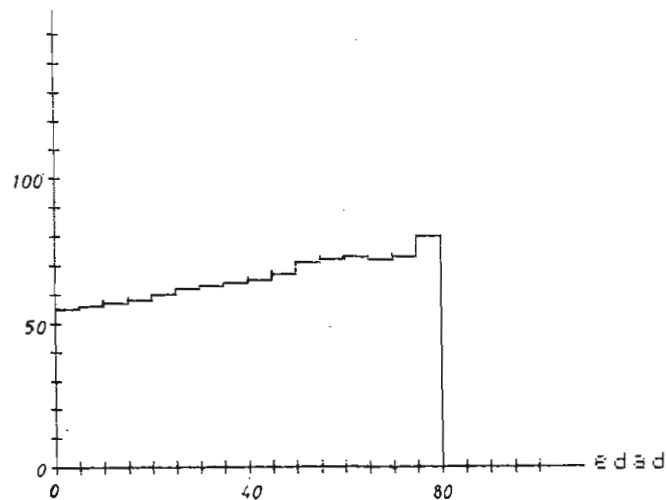


Fig. 4.32.- Distribución de población para  
el año 2075. Caso B.



En la figura 4.33, se tiene el gráfico de la población total  $N$  en función del año, para un intervalo de 100 años a partir de 1975.

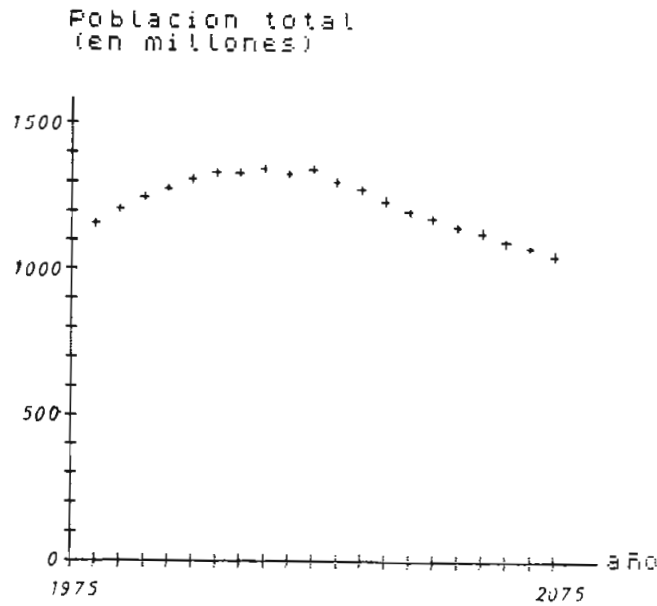


Fig. 4.33.- Población total en función del tiempo.

Caso B.  $b = 0.87$ .

Se puede concluir que los países del caso B, tienden a aumentar su población hasta el año 2025 con un índice de crecimiento bajo, pasando la población de 1123 millones para el año 1979 a 1335 millones para el año 2025.

De mantenerse la tendencia, a partir del año 2025, la población tiende a disminuir como se observa en el gráfico, pudiendo llegar a ser cero para un tiempo mayor.

En cuanto a la distribución final de la figura 4.32, se observa que la población de edades avanzadas aumenta mientras la población joven cada

vez es menor.

Comparando con el crecimiento del Caso A, se tiene que la población de estos en el año 1975 es de 2965 millones y de mantenerse la tendencia de crecimiento, se tendrá en el año 2075 una población de 16500 millones que significa un crecimiento de 456%. Mientras que en el Caso B, se tendrá un decrecimiento del orden del 7%.

#### 4.6. POBLACION EN UN MEDIO LIMITADO.

En las partes anteriores de este capítulo se ha estudiado la población en un medio en el cual pueden crecer sin límite.

Ahora vamos a introducir una realimentación para observar el comportamiento del modelo en un medio limitado. La realimentación será de la forma:

$$b = b_0 - \frac{N}{N_0} (b_0 - 1) \quad (4.22)$$

en donde  $b_0 = \underline{b}$  inicial

$N_0 =$  población límite.

En la figura 4.34, se muestra el gráfico de la función de realimentación.

El proceso seguido es calcular para una iteración la distribución de

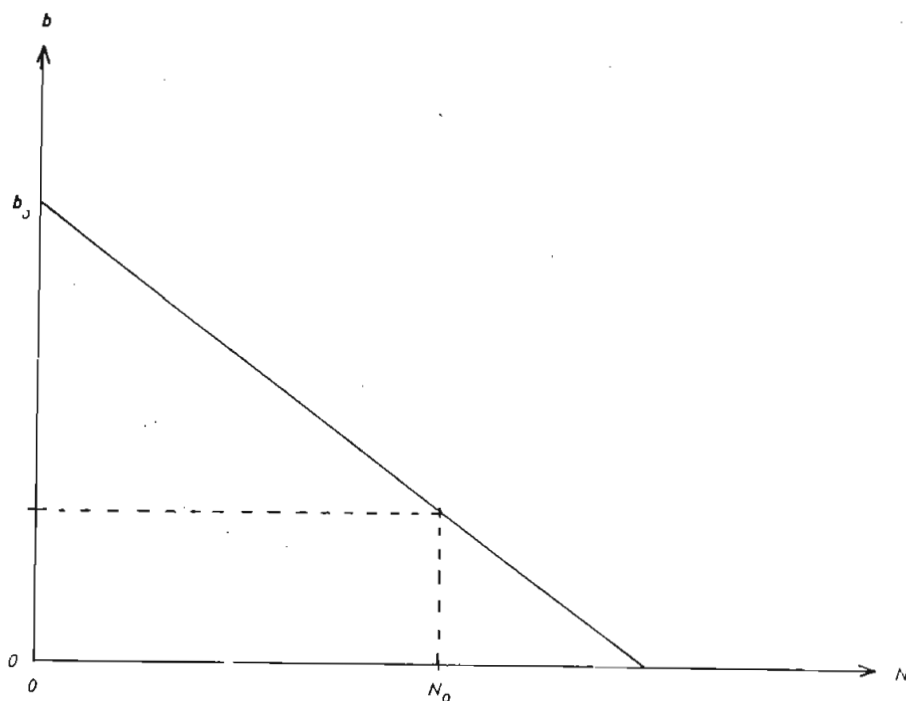


Fig. 4.34.- Gráfico de  $b = b_0 - \frac{N}{N_0} (b_0 - 1)$ .

población y su población total. Luego por medio de la realimentación de la ecuación (4.22), calculamos un nuevo valor de  $\underline{b}$  para la iteración siguiente.

#### 4.7. $\underline{b}$ CONCENTRADO PARA POBLACION EN MEDIO LIMITADO.

Para este estudio utilizaremos un  $\underline{b}$  concentrado y variaremos los pasos para 5 años y 1 año.

Primeramente iniciamos el estudio para pasos de 5 años. En la figura

4.35, se muestra el gráfico de la población en función del tiempo para  $b_0 = 2$ , en el cual se observa que para un tiempo suficientemente grande tiende al valor  $N_0$  que en este caso es igual a 20.

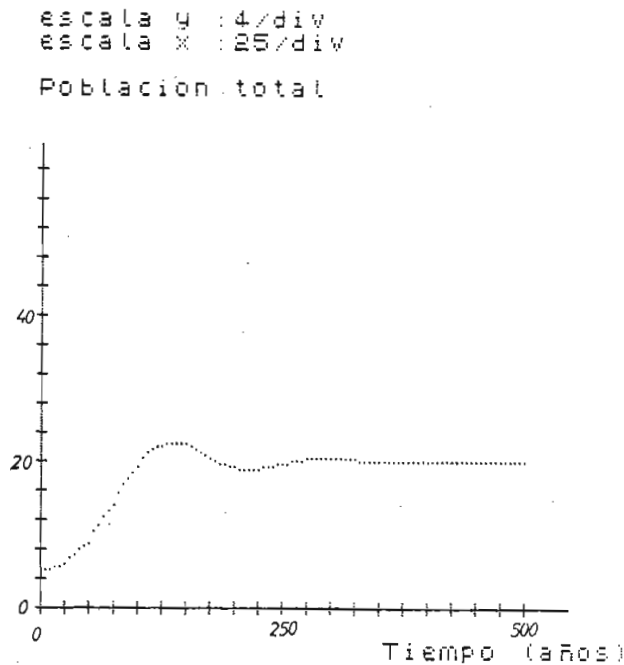


Fig. 4.35.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 2$  y  $N_0 = 20$   
b concentrado, pasos de 5 años,  
Distribución inicial 1.

Ahora graficamos  $N = f(t)$  para  $b_0 = 3$  y las mismas condiciones iniciales anteriores. Esto se muestra en la figura 4.36.

En la figura 4.37, se muestra el gráfico  $N = f(t)$  para  $b_0 = 4$  y  $N_0 = 20$ .

De los gráficos 4.36 y 4.37, se tiene que al aumentar el valor de  $b_0$ , el tiempo al cual se estabiliza la población es mayor. En ambos casos la población tiende al valor  $N_0 = 20$ .

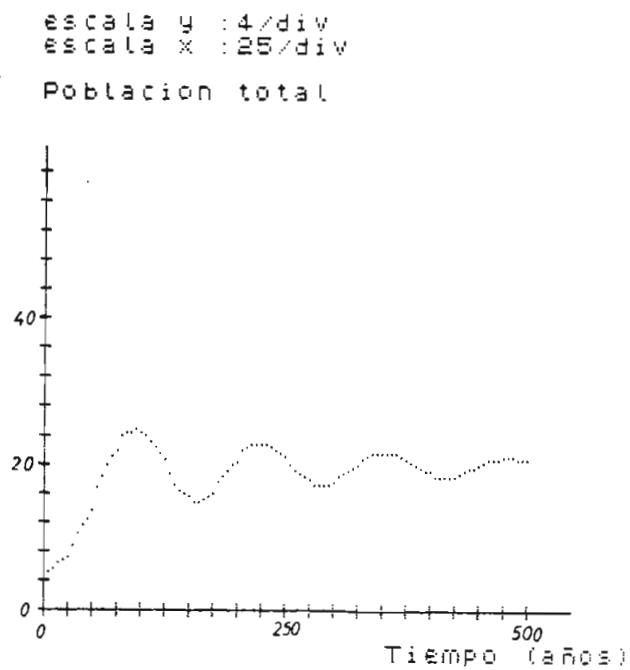


Fig. 4.36.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 3$  y  
 $N_0 = 20$ ,  $b$  concentrado, pasos de  
5 años. Distribución inicial 1.

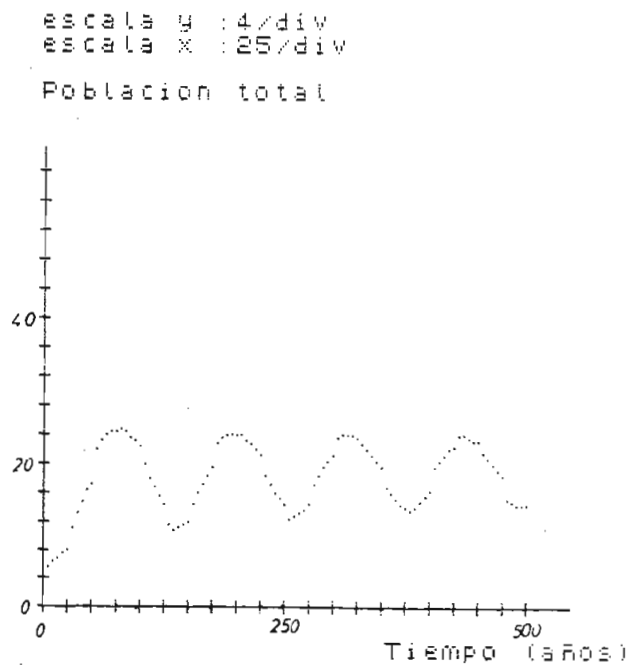


Fig. 4.37.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 4$ ,  
 $N_0 = 20$ ,  $b$  concentrado, pasos de  
5 años. Distribución inicial 1.

Ahora para  $b_0 = 5$ , se observa que la población tiene un movimiento caótico más o menos por los 275 años como se muestra en la figura 4.38.

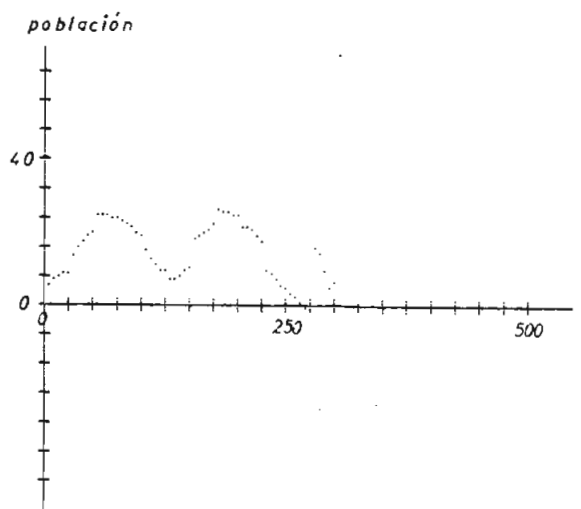


Fig. 4.38.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$  y  $N_0 = 20$ . Se observa un movimiento caótico para  $t \cong 275$  años.

Trataremos ahora de explicar la causa de esta respuesta caótica del sistema.

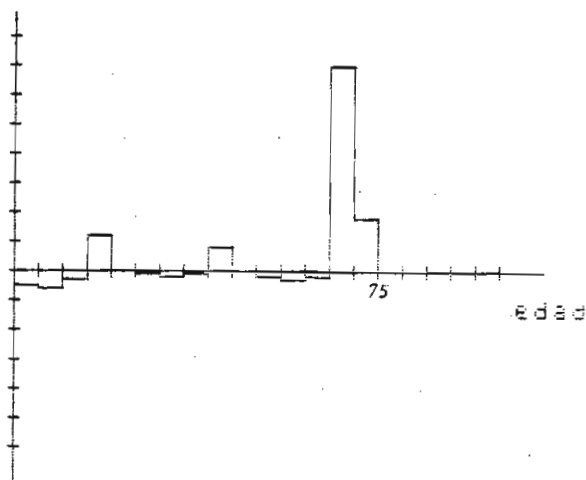
Primeramente se puede ver en la figura 4.38, que antes de presentar el comportamiento caótico, la población toma valores que tienden a ser cero.

Para esclarecer el origen, se ha graficado varias distribuciones de población en función de la edad en diferentes tiempos.

En las figuras 4.39, 4.40, y 4.41, se muestran las distribuciones pa-

escala y: 0.70274317/div  
para 250 años

habitantes / 5 años

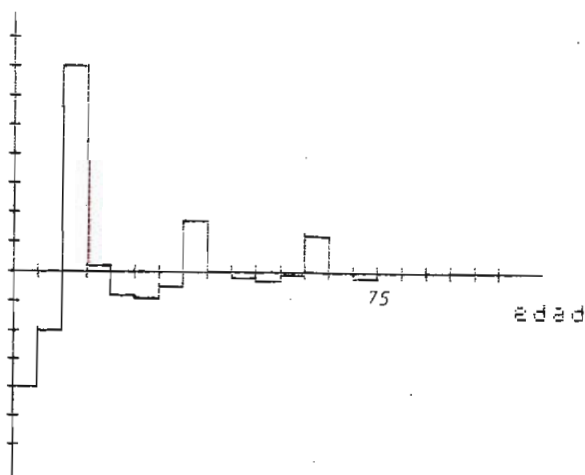


Poblacion total=5.8385938

Fig. 4.39.- Gráfico de la distribución de población  
en función de la edad para  $t = 250$  años,  
 $b_0 = 5$ .  $b$  concentrado.

escala y: 0.47184887/div  
para 270 años

habitantes / 5 años



Poblacion total=0.5138171

Fig. 4.40.- Gráfico de la distribución de población  
en función de la edad para  $t = 270$  años,  
 $b_0 = 5$ .  $b$  concentrado.

ra 250 años, 270 años y 360 años.

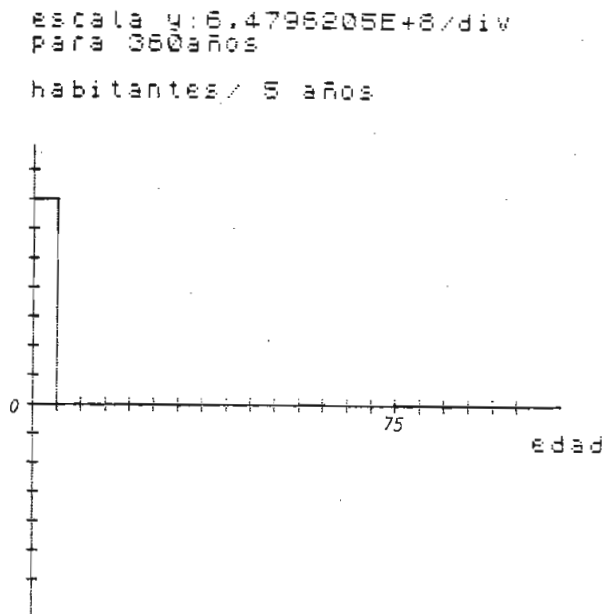


Fig. 4.41.- Gráfico de la distribución de población  
en función de la edad para  $t = 360$  años  
 $b_0 = 5$ ,  $b$  concentrado.

Se tiene que antes de llegar al punto de turbulencia (respuesta caótica) la población total  $N$  llega a tener valores cercanos a cero. Se observa que la distribución en el punto en el cual la población es cercana a cero (para  $\approx 270$  años) tiene intervalos en los cuales la población distribuida por edades, tiene valores positivos y en otros intervalos tiene valores negativos y cuya sumatoria da un valor cercano a cero.

Los valores negativos se explican porque  $b$  toma valores negativos.

Entonces como el valor de población total  $N$  tiende a cero, la realimen



tación  $b = b_0 - \frac{N}{N_0} (b_0 - 1)$  produce un valor de  $b = 5$  (el más alto posible) y como la distribución de población por edades tiene picos en diferentes intervalos, éstos se amplifican por el valor  $\underline{b}$ , aumentando cada vez más el valor de la población total, volviéndose luego en un movimiento caótico.

Como  $N$  se hace mayor a  $N_0$ , el valor de  $\underline{b}$  pasa a ser negativo y  $b$  se hace positivo cuando la población total  $N$  se hace negativa.

Por esta razón se llega a un régimen turbulento con un valor de  $\underline{b}$  que varía entre positivo y negativo y que cada vez aumenta de valor.

En la figura 4.42, se muestra el gráfico de  $b$  en función del tiempo.

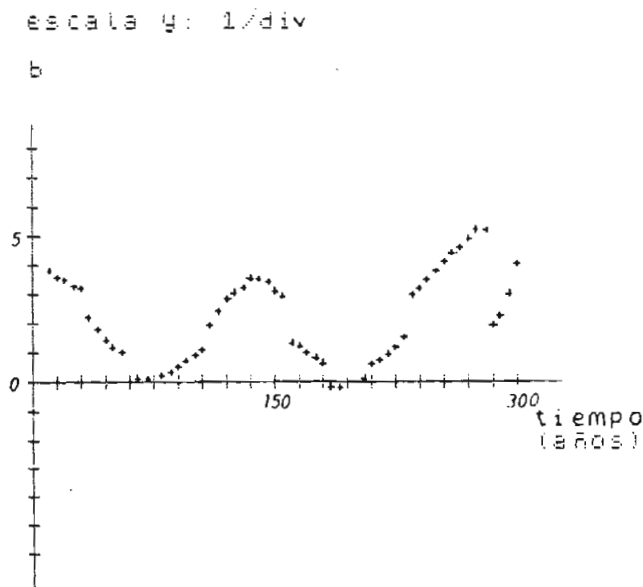


Fig. 4.42.- Gráfico de  $b = f(t)$ , para  $b_0 = 5$ .

Para observar la influencia de la condición inicial, se ha obtenido el gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$  y la distribución inicial 2 de la figura 4.2. Esto se muestra en la figura 4.43.

Se observa que la distribución inicial influye en el punto en el cual se produce la respuesta caótica del sistema.

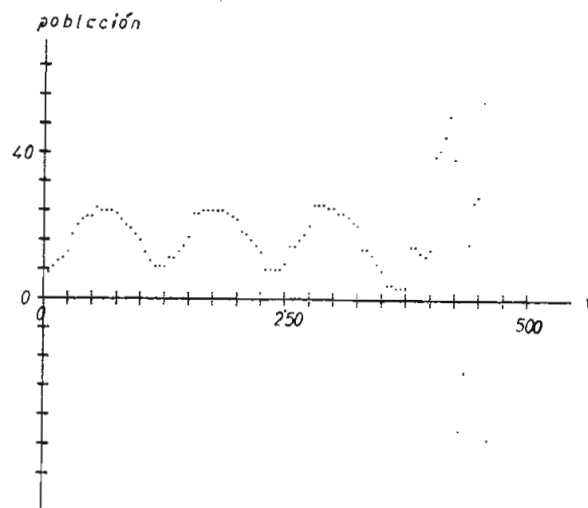


Fig. 4.43.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$ ,  $N_0 = 20$   
distribución inicial 2, b concentrado.

Para ver la influencia de la precisión del computador se ha variado la precisión del cálculo quitando cifras decimales primeramente al calcular la distribución por edades y también al cálculo del valor de b.

En la figura 4.44, se muestra el gráfico  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$  y quitando las cifras decimales más allá de las milésimas, después de cada cálculo de b. Se observa que el punto en donde se tiene la respuesta caótica no varía.

Este experimento se ha realizado con varias precisiones y se puede concluir que la precisión del computador no influye en este comportamiento.

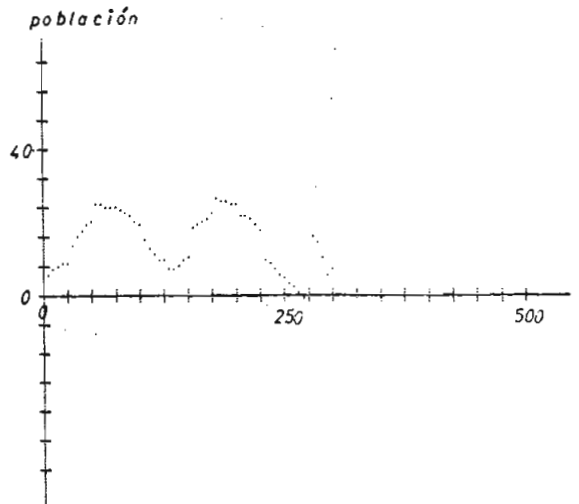


Fig. 4.44.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$   
y precisión de las milésimas.

Se ha realizado otro tipo de experimento, en el cual a un tiempo determinado se introduce un error en el valor de la población total.

En este caso se ha tomado el valor de  $b_0 = 5$  y se ha introducido un error de un 10% para  $t = 175$  años en  $N$ .

Esto se muestra en la figura 4.45, en donde se observa que el sistema deja de ser caótico y tiene una respuesta oscilatoria. Esto se explica porque al introducir el error, estamos cambiando las condiciones iniciales del problema en un cierto tiempo, entonces desde la introducción del error, se trata de un problema con otras condiciones iniciales que tiene el comportamiento de la figura 4.45.

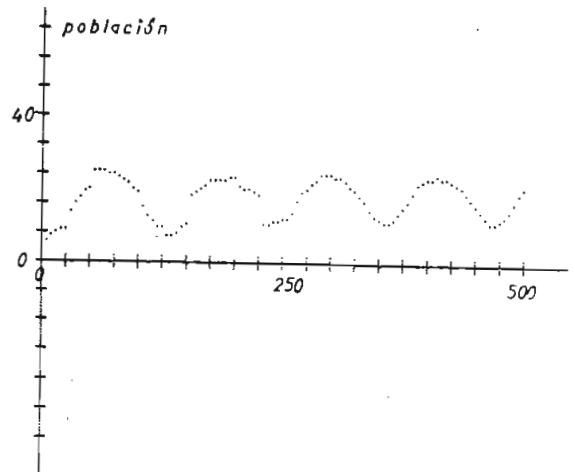


Fig. 4.45.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$ .

Se introduce un error de 10% en  $N$ .

para  $t = 175$  años.

Ahora vamos a tratar el caso de  $\underline{b}$  concentrado, pero en pasos de 1 año.

Primeramente vamos a graficar la población total en función del tiempo para varios valores de  $b_0$ .

En la figura 4.46, se muestra el gráfico  $N = f(t)$  para  $b_0 = 2$  en pasos de 1 año siendo  $\underline{b}$  concentrado.

Para  $b_0 = 3$  y 4, los gráficos de  $N = f(t)$  se muestran en las figuras 4.47 y 4.48. De observar estos gráficos se tiene que para un tiempo suficientemente grande, la población tiende a ser igual a  $N_0$  con una oscilación amortiguada.

El tiempo al cual se estabiliza depende del valor de  $b_0$ .

escala y : 4/div  
escala x : 25/div  
Poblacion total

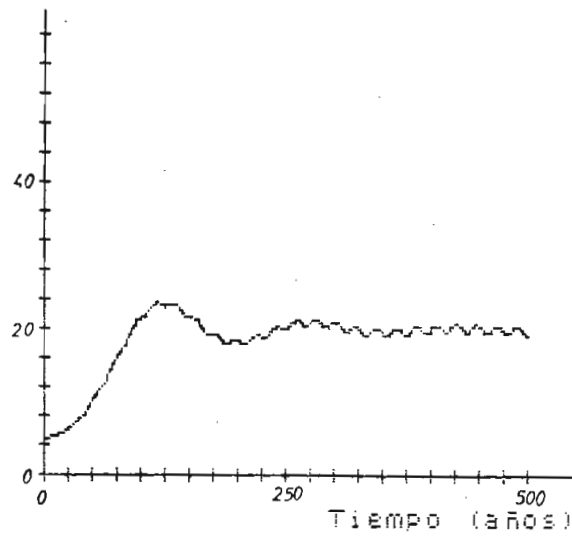


Fig. 4.46.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 2$ ,  
b concentrado y paso de 1 año,  $N_0 = 20$ .

escala y : 4/div  
escala x : 25/div  
Poblacion total

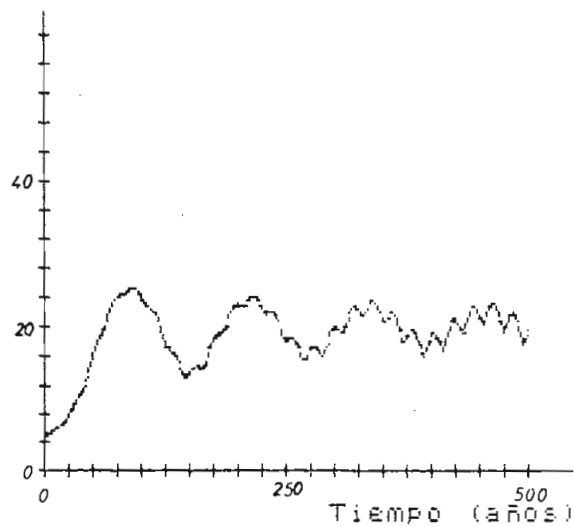


Fig. 4.47.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 3$ ,  
b concentrado, paso de 1 año.

escala y : 4/div  
escala x : 25/div

Poblacion total

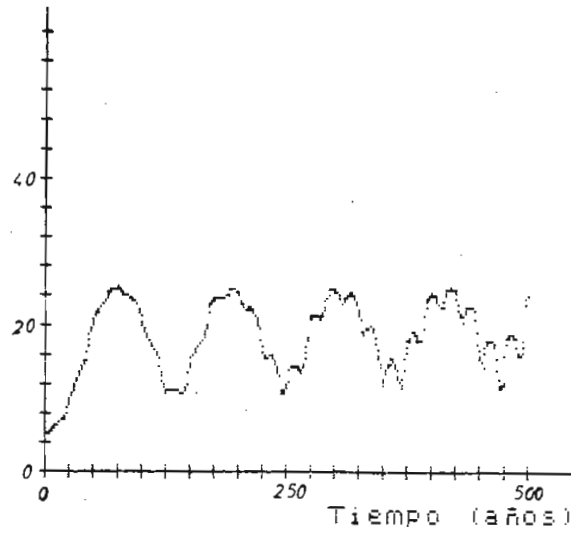


Fig. 4.48.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 4$ ,  
b concentrado y paso de 1 año.

Ahora para  $b_0 = 5$ , se tiene un comportamiento caótico como se muestra en la figura 4.49.

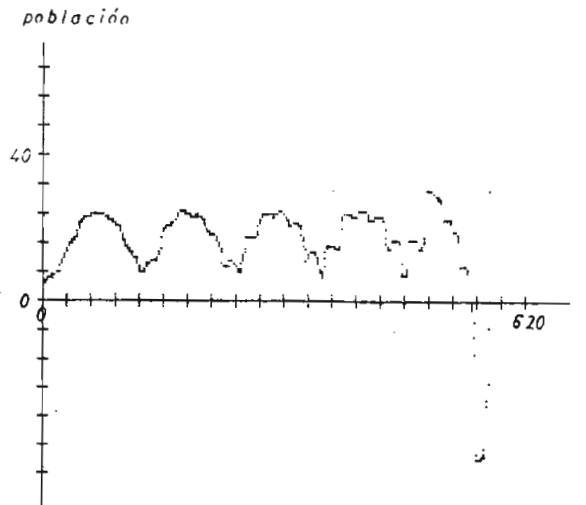


Fig. 4.49.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 5$ .  
Se observa un régimen turbulento.

Comparando con el comportamiento caótico de paso de 5 años, se observa que este aparece a un tiempo mucho mayor en el caso de paso de 1 año.

Esto quiere decir que el paso influye en el comportamiento caótico del sistema.

La transición al caos se explica debido a que la población en un determinado tiempo tiende a cero. Esto se detalla en el caso de paso de 5 años anteriormente en este capítulo.

También se identifica una pequeña oscilación de mayor frecuencia, superpuesta a la oscilación amortiguada.

Para explicar esto observemos una distribución de población en función de la edad para  $t = 325$  años y  $b_0 = 3$ .

En la figura 4.50, se muestra la distribución de población, en donde se observa que existen picos de población en diferentes intervalos.

Si comparamos el tiempo entre 2 picos y el período de la oscilación, vemos que son iguales.

#### 4.8. b DISTRIBUIDO PARA UNA POBLACION EN MEDIO LIMITADO.

Ahora vamos a tratar el caso con b distribuido A y utilizando la misma realimentación de la ecuación (4.22).

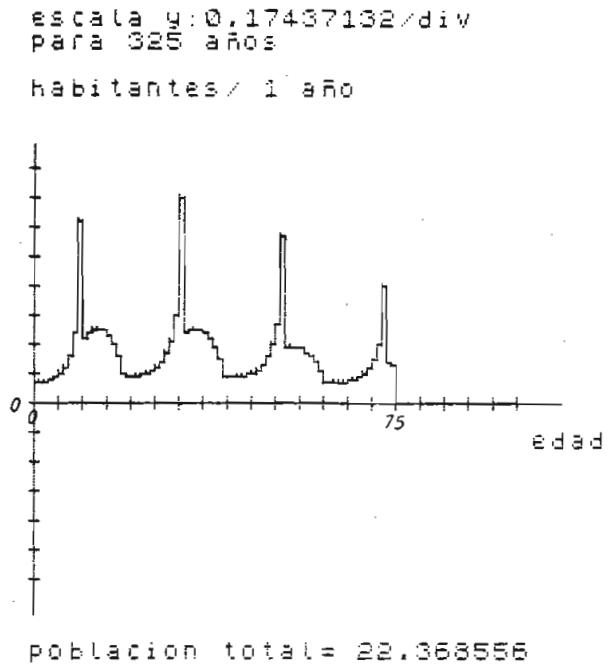


Fig. 4.50.- Distribución de población para  $b_0 = 3$ ,  
 $t = 325$  años,  $\underline{b}$  concentrado, paso de 1 año.

También en este caso utilizamos pasos de 5 y 1 año. Iniciamos el estudio con los gráficos de  $N = f(t)$  y trataremos de observar algún comportamiento caótico.

En la figura 4.51, se muestra el gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 2$  y  $\underline{b}$  distribuido A. El valor de  $N_0$  es igual a 20. De este gráfico se observa que para un tiempo grande, la población se estabiliza en el valor de  $N_0$ .

Para  $b_0 = 3$ , en la figura 4.52 se muestra el gráfico de  $N = f(t)$ . Para todo el estudio, se considerará como condición inicial la 1 indicada en la figura 4.2.



escala y : 4/div  
escala x : 25/div  
Poblacion total

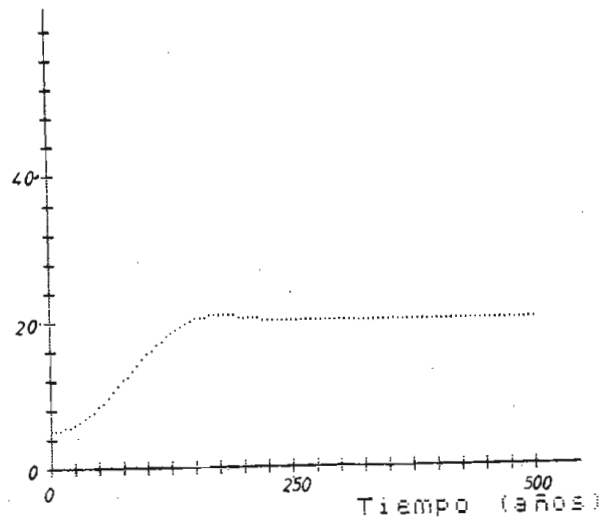


Fig. 4.51.- Gráfico de  $N=f(t)$  para  $b_0=2$ ,  $\underline{b}$  distribuido A, distribución inicial 1,  $N_0=20$ .

escala y : 4/div  
escala x : 25/div  
Poblacion total

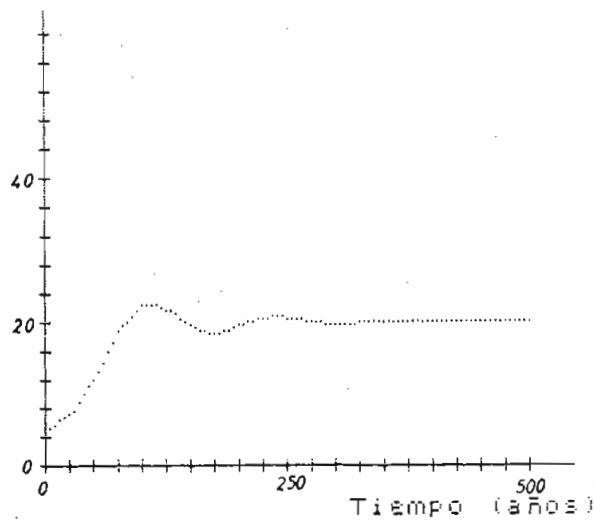


Fig. 4.52.- Gráfico de  $N=f(t)$  para  $b_0=3$ ,  
 $\underline{b}$  distribuido A, distribución inicial 1.  
 $N_0=20$ .

Comparando los resultados para  $b_0 = 2$  y  $3$ , se observa que lo que varía es el tiempo al cual se estabiliza y toma un valor constante igual a  $N_0$ .

Ahora tomamos un valor de  $b_0 = 10$ , en el cual se observa que aumenta la amplitud de la oscilación, pero no se tiene un régimen turbulento. Esto se muestra en la figura 4.53.

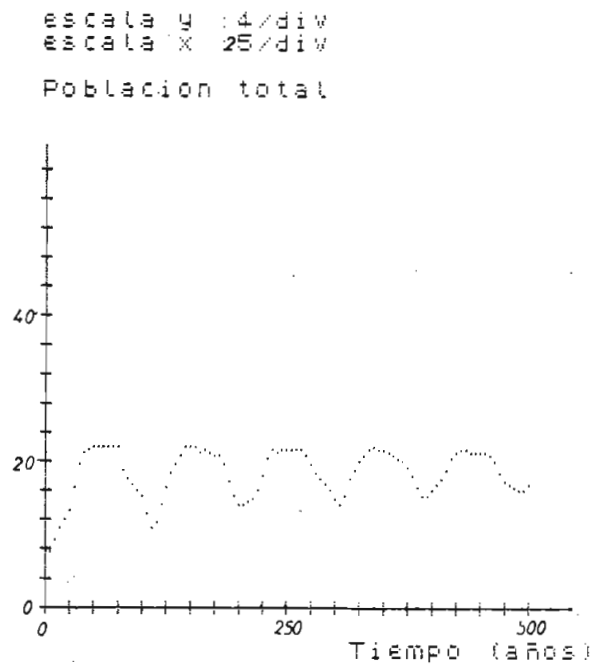


Fig. 4.53.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 10$ ,  
 $b$  distribuido A,  $N_0 = 20$ .

Para el valor de  $b_0 = 15$ , se observa un comportamiento caótico y para observar mejor, vamos a obtener diferentes distribuciones en función de la edad para varios tiempos.

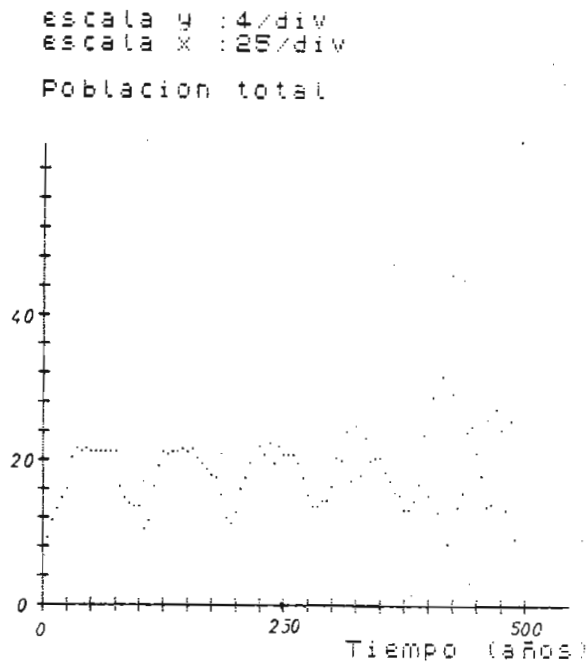


Fig. 4.54.- Gráfico de  $N = f(t)$  para  $b_0 = 15$ .

Se observa un comportamiento caótico.

En las figuras 4.55 y 4.56, se muestran las distribuciones de población en función de la edad para 150 y 175 años respectivamente.

En la figura 4.56, ya se observa indicios de población negativa en ciertos intervalos.

Ahora vamos a graficar la distribución para  $t = 450$  años, en donde se observa claramente la existencia de una población negativa que también se observó en el caso de b concentrado.

Esto se muestra en la figura 4.57.

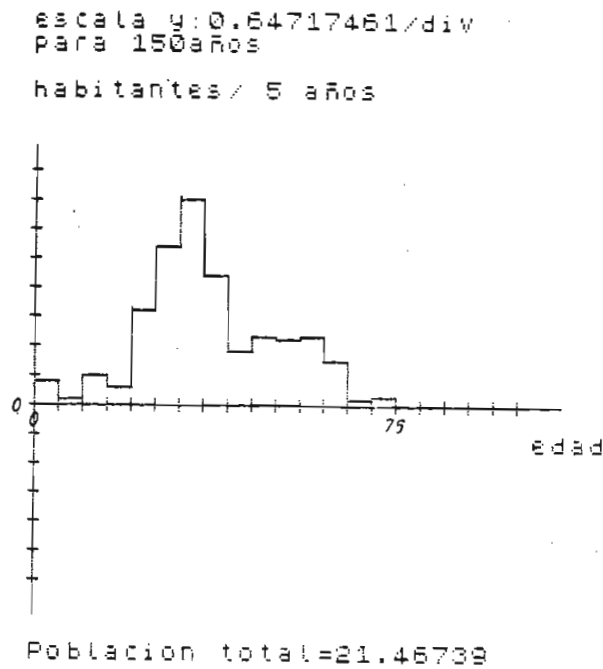


Fig. 4.55.- Distribución de población en función de la edad,  $b_0 = 15$ ,  $b$  distribuido, paso de 5 años,  $t = 150$  años.

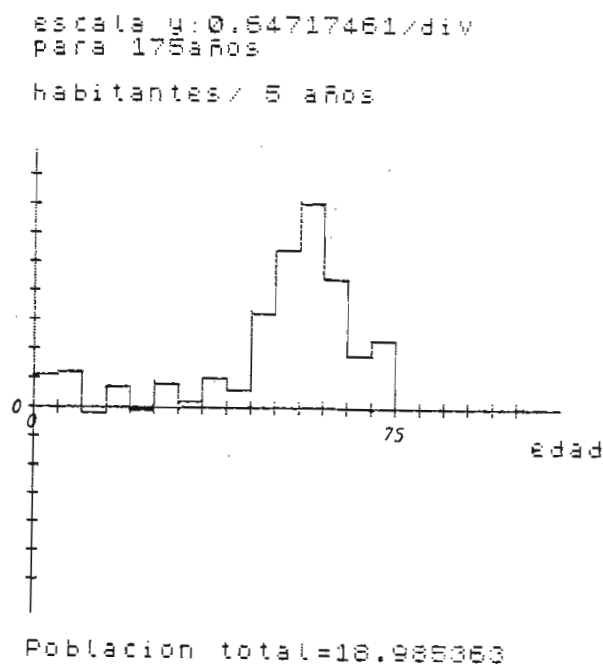
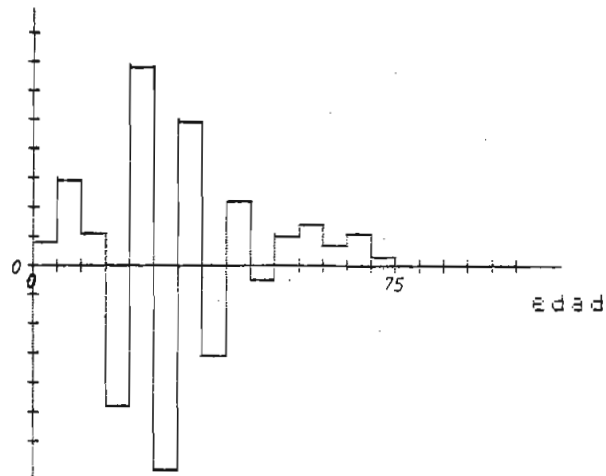


Fig. 4.56.- Distribución de población en función de la edad,  $b_0 = 15$ ,  $b$  distribuido  $t = 175$  años, paso 5 años.

escala y: 3.1680166/div  
para 450 años

habitantes / 5 años

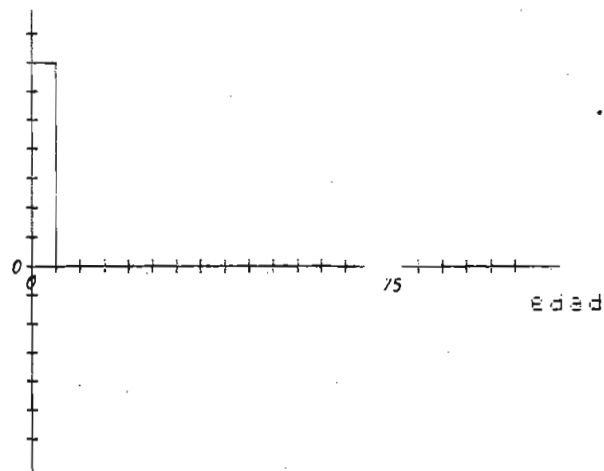


Poblacion total=24.940851

Fig. 4.57.- Distribución en función de la edad  
 $t=450$  años,  $b_0=15$ ,  $\underline{b}$  distribuido.

escala y: 6.7972635E+25/div  
para 575 años

habitantes / 5 años



Poblacion total=4.7580787E+26

Fig. 4.58.- Distribución en función de la edad  
 $t=575$  años,  $b_0=15$ ,  $\underline{b}$  distribuido.

En la figura 4.58, se muestra la distribución de población en función de la edad para  $t = 575$  años, en donde se tiene una población sumamente grande repartida en un solo intervalo.

Entonces se puede ver que la causa de la transición al régimen turbulento es la misma anotada anteriormente, en la cual aparece primeramente intervalos en los cuales la población es negativa y en un cierto valor de  $t$ , la población total tiende a cero, produciéndose la respuesta caótica.

Ahora estudiamos el caso de  $\underline{b}$  distribuido pero ahora en pasos de 1 año, en el cual no se pudo observar una respuesta caótica, por lo cual podemos decir que el paso influye en el comportamiento del modelo.

En la figura 4.59, se muestra un gráfico de la población total en función del tiempo para  $b_0 = 19$  y en donde no se observa comportamientos caóticos.

De todo este estudio se puede concluir que existe otro tipo de transición al régimen turbulento o caótico que depende de una característica del modelo de población descrito ampliamente en este capítulo.

Este punto de transición depende de varios factores. Uno de ellos muy importante es el paso utilizado, el cual mientras menor sea, el modelo se comporta de una manera suave, llegando a desaparecer la respuesta caótica como es el caso de  $\underline{b}$  distribuido y paso de 1 año.

Si se utiliza  $\underline{b}$  concentrado o distribuido también influye en el compor

tamiento del modelo, siendo el modelo con b distribuido más aplicable a la realidad.

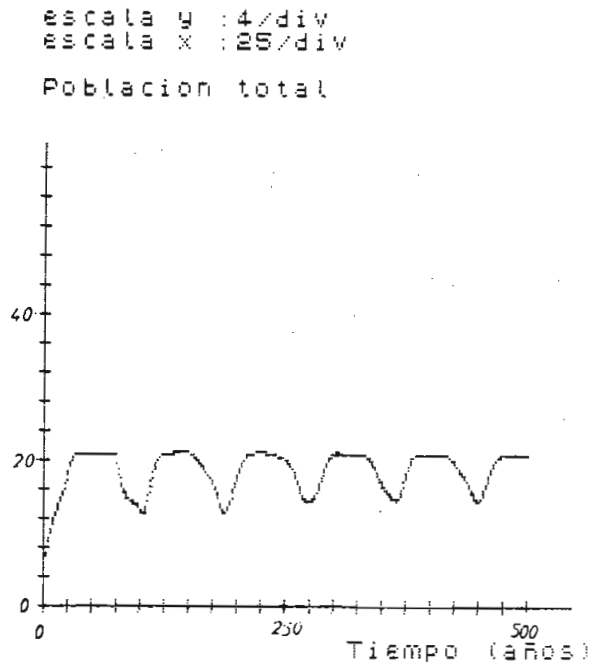


Fig. 4.59.- Gráfico  $N = f(t)$ ,  $b_0 = 19$ , paso de 1 año,  
b distribuido.

El error que introduce el computador en el cálculo no es importante en la transición de régimen determinista a régimen turbulento.

En este estudio se ha hablado de poblaciones negativas y de intervalos negativos en la distribución por edades, en el cual el modelo tiene un interés netamente matemático, en cuyo caso ya no es aplicable a un modelo de población.

## C A P I T U L O   V

### CONCLUSIONES

- Existe un mecanismo de transición de un régimen determinista a un régimen caótico, basado en el desdoblamiento del período.
- El mecanismo de desdoblamiento del período es común a varios sistemas dinámicos totalmente diferentes, como son el modelo de población de insectos, descrito por una variable de estado y un oscilador electrónico, descrito por tres variables de estado.
- Estamos en presencia de un régimen determinista cuando los errores se atenúan, incluso el mismo error de cálculo del computador.

El régimen caótico o turbulento se lo puede definir de varias maneras:

- . Sea  $(a,b)$  el intervalo que pueden ocupar los valores de la variable de estado. Para un valor inicial de la variable de estado  $X_0$  que tiene un error inicial  $\pm \Delta X_0$ , existe un número de iteraciones  $j$  para el cual los valores de la variable de estado en ese instante  $X_j$  puede estar en cualquier parte del intervalo  $(a,b)$ .

Esto significa que el error crece, hasta llegar a ser comparable con el intervalo que pueden ocupar los valores de la variable de estado. Si se tiene un error inicial de  $10^{-16}$ , después de más o menos 50 iteraciones, el error es del orden de 1.



En el régimen caótico, el propio error del computador determina el valor calculado.

. Observando el espectro de FOURIER de la variable de estado, en un régimen caótico o turbulento, se tiene una franja de ruido en todo el ancho de banda.

. El mecanismo de transición está basado en el desdoblamiento del período de oscilación como  $2^n$  en donde  $n$  puede tomar valores desde cero hasta infinito. El período infinito significa que la señal no se vuelve a repetir nunca.

- Para un sistema dinámico no lineal de la forma  $X_{j+1} = r g(X_j)$ , se ha analizado la transición de un régimen determinista a caótico para cada uno de los máximos de la función  $g(X_j)$ .

El número de máximos de la función  $g(X_j)$  está relacionado con el número de transiciones de determinista a caótico.

- Los circuitos eléctricos y electrónicos, debido a las no linealidades de sus componentes, son susceptibles de comportamientos caóticos y turbulentos.

En amplificadores desneutralizados y osciladores electrónicos la transición es relativamente común.

El ruido es un ejemplo de comportamiento caótico; pero la presencia de ruido en un amplificador no es siempre debido a la amplificación

del ruido aplicado al sistema o ruido térmico sino que muchas veces se debe a características inherentes al sistema dinámico, como se de muestra en el modelo de población de insectos, en el cual no es posible tener un ruido térmico o ruido externo.

El conocimiento del mecanismo de la respuesta caótica, ayudará en el diseño de sistemas en los cuales se quiere evitar estos comportamientos no deseados, evitando los máximos en la función de la variable de estado.

El estudio del circuito electrónico en este trabajo de tesis, ilustra la posibilidad del uso de métodos cualitativos para el análisis de sistemas físicos.

- En sistemas no lineales se pueden obtener soluciones analíticas aproximadas; pero en el caso de soluciones caóticas el tratar de obtener soluciones analíticas es de escasa utilidad debido a la naturaleza aleatoria de la solución por el crecimiento de los errores. Por tal razón se deben utilizar métodos de matemática estadística y mecánica cuántica.

Llama la atención el paralelismo que puede establecerse entre un régimen caótico y mecánica cuántica. La característica común es que no es posible predecir con certeza el valor de la variable de estado, sino que sólo se conoce su rango y su densidad de probabilidad. Se observa también tanto en mecánica cuántica como en el régimen caótico bandas permitidas y bandas prohibidas.

- En los fluidos viscosos se han observado varios mecanismos de transión

ción, uno de los cuales es el detallado en este trabajo de tesis.

- En el mecanismo de transición estudiado, se han observado varias características universales como son:

. El desdoblamiento del período como  $2^n$  en donde  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

. La existencia de ciertos números universales. Uno de estos números se obtiene a partir de los valores que toma la variable de estado  $X_j$ . Escogiendo dos valores vecinos de  $X_j$  si se encuentran en el período  $2^n$ , se puede ver que la separación entre estos valores decrece con  $n$  como  $B \alpha^{-n}$ , donde  $\alpha$  es universal e igual a 2.503.....

También ha sido observado a partir de los valores de  $r$  en los puntos de desdoblamiento del período, que la relación  $\frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}}$  en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , tiende al valor universal  $\delta = 4.6692016$ . [16].

. En experimentos de Rayleigh - Bernard con helio líquido, se ha observado el desdoblamiento del período por medio del análisis de FOURIER de la temperatura.

Feigenbaun determinó que en la transición por desdoblamiento del período los nuevos picos, en el espectro de la temperatura, son menores que los anteriores en 8,2 dB [16].

- El tema estudiado en esta tesis es muy nuevo y en el estado actual no es posible preveer los alcances futuros que pueda tener.

- Existe modelos de dinámica de poblaciones, como el descrito en el Capítulo V, que presentan comportamientos caóticos, de naturaleza diferente.

No se puede decir que este comportamiento sea universal, sino que depende de características propias del modelo descrito.

En este modelo se tiene un régimen transitorio y luego se pasa a un régimen permanente. La forma de la distribución final en régimen permanente, depende de la distribución de fertilidad por edades. Si  $b$  es la fertilidad, para  $b > 1$  la población crece exponencialmente, para  $b < 1$  la población decrece exponencialmente y para  $b = 1$ , tiende a una distribución plana por edades y la población se estabiliza en un valor.

## REFERENCIAS

- [1] L.P. Kadanoff, Roads to chaos, Physics Today, pag. 46 - 53, Dec. 1983.
- [2] Joseph Ford, How random is a coin toss?, Physics Today, pag. 40 - 47, April 1983.
- [3] E. Freire, L.G. Franquelo, J. Aracil, Periodicity and chaos in an Autonomous Electronic System, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol CAS - 31, pag. 237 - 247, March 1984.
- [4] Carl M. Bender, Steven A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Mc Graw-Hill, New York, 1978.
- [5] Gerald O. Barney, The Global 2000 Report to the President of the U.S., Pergamon Press Inc., New York, 1980. pag. 9 - 11.
- [6] Alan R. Sweezy, Is the Population Bomb Still Ticking?, Engineering & Science, California Institute of Technology, Vol XLVII, Number 4, pag. 21 - 26, March 1984.
- [7] R.G. Deissler, Turbulent solutions of the equations of fluid motion, The American Physical Society, Vol 56, Number 2, Part I, pag. 223 - 254, April 1984.
- [8] Tektronix, An introduction to the DFT and FFT Algorithms of signal processing ROM Pack Nº 2, Manual de operación computador Tektronix 4051, pag. A-1, A-10.