

Diseño y operación racional de engranajes cilíndricos orientado a aumentar la eficiencia y disminuir pérdidas por fricción.

González Rey, Gonzalo (cidim@mecanica.cujae.edu.cu)
García Toll, Alejandra (agarciat@ceim.cujae.edu.cu)
García Domínguez, María E. (megarcia@mecanica.cujae.edu.cu)

Facultad de Ingeniería Mecánica
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría" (ISPJAE)
Calle 114 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de La Habana, Cuba.

Resumen:

Los engranes cilíndricos constituyen transmisiones mecánicas de elevada eficiencia pero los actuales requerimientos de lograr aún una eficiencia mayor hacen necesario una precisión en los procedimientos de cálculo de pérdidas de potencia. En este sentido, los Reportes Técnicos ISO/TR 14179-1:2001 e ISO/TR 14179-2:2001 ofrecen importantes relaciones empíricas y teóricas para evaluar la eficiencia de los engranes considerando pérdidas por rozamiento en el contacto diente-diente, por batimiento del aceite por las ruedas y por rozamiento en cojinetes y sellos. Este estado del arte y el conocimiento en condiciones de trabajo de los engranajes industriales, permite establecer nuevas relaciones que vinculen los parámetros de diseño y explotación de los engranajes cilíndricos con la eficiencia esperada en las aplicaciones.

Resultados derivados del estudio de ISO/TR 14179-1:2001 y del coeficiente de fricción en engranajes, con empleo de modelos matemáticos interrelacionando la eficiencia con la geometría del engranaje y los parámetros de explotación y su eficiencia, ha permitido establecer soluciones al problema de aumentar la eficiencia de los engranajes mediante el establecimiento de una relación carga y velocidad conveniente y un diseño racional de la geometría del dentado de las ruedas. Finalmente, se establece una interrelación directa en base a un análisis de regresión múltiple que permite orientar una nueva formulación de la eficiencia del engranaje en función de la densidad de carga en el engranaje, el módulo, la velocidad de trabajo, la razón de transmisión y la cantidad de dientes en el piñón.

Palabras Claves: Coeficiente de fricción, Eficiencia, Engranaje cilíndrico, ISO/TR 14179.

I – INTRODUCCIÓN.

En la actualidad, nuevas regulaciones gubernamentales y ramales promueven la reducción del gasto energético con el empleo equipos más eficientes. Este hecho, ha renovado el creciente interés y demanda de máquinas con mayores eficiencias para enfrentar una reducción de los costos de explotación y mantenimiento, en base a disminuir las pérdidas de potencia disponible.

Dentro de las variadas formas de transferir la energía en los equipamientos actuales son destacables las transmisiones mecánicas, con una amplia divulgación en la técnica contemporánea. Múltiples pueden ser las formas

de transmitir la energía mecánica, pero indiscutiblemente que las de mayor generalización y actualidad son los accionamientos con engranajes, debido a la combinación de soluciones disponibles para transmitir el movimiento con eficiencia y diversidad geométrica. Por consiguiente, una formulación correcta y más precisa de la determinación de las pérdidas por rozamiento permitiría realizar diseños de engranajes más eficientes y recomendar procedimientos de explotación más efectivos.

Desde los últimos años de la década del 90 se trabaja en la elaboración de nuevas y mejores

normativas dirigidas a mejorar la efectividad en explotación de los reductores de velocidad, por varias de las asociaciones responsabilizadas con la edición de normas de engranajes. En particular, se distingue la aprobación de los Reportes Técnicos: ISO/TR 14179-1:2001 [1] e ISO/TR 14179-2:2001 [2]. Los mencionados Reportes Técnicos ISO incluyen fórmulas para evaluar las pérdidas de potencia del sistema de engranajes, considerando las pérdidas por rozamiento y rodadura en el contacto diente-diente, entre otros.

En particular, se pretende presentar en este trabajo un resumen de algunos resultados derivados de la comparación de los procedimientos de cálculo de las pérdidas de potencia en el engranaje de ruedas dentadas cilíndricas con dientes de evolvente con contacto exterior y ejes paralelos. Los comentarios emitidos pueden ser útiles en la determinación de los parámetros de uso y diseño adecuados para obtener engranajes cilíndricos más eficientes durante su explotación. Además, el estudio permite demostrar que, a pesar de los avanzados resultados aceptados para evaluar la eficiencia de los engranajes, aún existen discrepancias importantes entre los diferentes procedimientos para la determinación del coeficiente de fricción en el contacto entre los dientes durante el engranaje.

II - PÉRDIDAS DE POTENCIA POR FRICCIÓN EN ENGRANAJE CILÍNDRICOS SEGÚN ISO.

Las ecuaciones declaradas en el Reporte Técnico ISO/TR 14179-1 para evaluar las pérdidas por fricción en engranajes cilíndricos están basadas en el estudio y experimentación de 251 reductores de velocidad con engranajes de ruedas cementadas y rectificadas [3] que permitió establecer una fórmula empírica para el coeficiente de fricción en dependencia de la velocidad circunferencial de las ruedas, la intensidad de la carga en el contacto y la viscosidad cinemática del aceite. El cálculo de las pérdidas de potencia considera el engranaje entre los dientes con una película de lubricante entre los flancos activos mediante las ecuaciones de la (1) a la (6):

$$P_{roz} = \frac{f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta}{9549 \cdot M} \quad [\text{kW}] \quad (1)$$

$$f_m = \frac{v^{-0,223} \cdot K^{-0,4}}{3,239 \cdot v^{0,7}} \quad (2)$$

$$K = \frac{1000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot b_w \cdot (d_1/2)^2 \cdot z_2} \quad [\text{MPa}] \quad (3)$$

$$M = \frac{2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t)}{H_s^2 + H_t^2} \quad (4)$$

$$H_s = (u + 1) \cdot \left[\left(\frac{d_{a2}^2}{d_2^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \text{sen} \alpha_t \right] \quad (5)$$

$$H_t = \frac{(u + 1)}{u} \cdot \left[\left(\frac{d_{a1}^2}{d_1^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \text{sen} \alpha_t \right] \quad (6)$$

Donde:

P_{roz} = pérdidas por fricción en engranajes [kW]

f_m = coeficiente de fricción

K = Factor por intensidad de carga [MPa]

M = Factor por velocidades de deslizamiento.

H_s = Razón de deslizamiento a inicio del engranaje.

H_t = Razón de deslizamiento a final del engranaje.

T_1 = Momento torsor en el piñón [Nm]

n_1 = Frecuencia de rotación del piñón [min^{-1}]

β = Ángulo de la hélice [°]

ν = Viscosidad cinemática del lubricante [mm^2/s]

v = Velocidad en circunferencia primitiva [m/s]

z_1 y z_2 = Números de dientes en el piñón y la rueda

b_w = Ancho de engranaje [mm]

d_1 = Diámetro primitivo en piñón [mm]

d_2 = Diámetro primitivo en rueda [mm]

α_t = Ángulo transversal de engranaje I [°]

d_{a1} = Diámetro de cresta del piñón [mm]

d_{a2} = Diámetro de cresta en rueda [mm]

u = Razón de engranaje (z_2/z_1)

m : módulo (mm)

a : Distancia interaxial (mm)

d_{b1} = Diámetro básico del piñón [mm]

d_{f2} = Diámetro básico en rueda [mm]

d_{f1} = Diámetro de fondo del piñón [mm]

d_{f2} = Diámetro de fondo en rueda [mm]

α : Ángulo de presión en la cuchilla (°)

ha^* : Factor de altura de la cabeza de cuchilla

c^* : Factor constante de holgura radial.

ε : Coeficiente de recurrimiento.

Pot : Potencia a transmitir (kW)

η : Eficiencia del engranaje.

La ecuación (2) es válida para velocidades tangenciales entre 2m/s y 25m/s y factores por intensidad de carga entre 1,4N/mm y 14,2N/mm, fuera de estos límites el coeficiente de fricción debe ser determinado experimentalmente.

Con el objetivo de realizar una comparación de los procedimientos de cálculo de las pérdidas de potencia en el engranaje de ruedas dentadas cilíndricas con dientes de evolvente con contacto exterior y ejes paralelos según los Reportes Técnicos: ISO/TR 14179-1 y 2: 2001 con

resultados experimentales [5] fue realizado un estudio que permite afirmar que los valores de perdidas de potencia son próximos a resultados experimentales según ISO/TR 14179-1.

III - PARÁMETROS DE DISEÑO Y EXPLOTACIÓN CON INFLUENCIA EN LA EFICIENCIA DE LOS ENGRANAJES SEGÚN ISO/TR 14179-1

Aceptando que la comparación de los resultados experimentales y teóricos permite afirmar que los valores de perdidas de potencia según ISO/TR 14179-1 son más próximos a los resultados experimentales, se ha creído conveniente realizar un análisis de la influencia de algunos parámetros de la geometría de engranajes con influencia en la eficiencia de la transmisión.

Empleando las ecuaciones declaradas en ISO/TR 14179-1 para evaluar la eficiencia del engranaje y analizando una interrelación con la geometría del dentado de las ruedas, la carga y velocidad de trabajo fue elaborado un modelo matemático de 21 relaciones entre 32 variables con 11 grados de libertad.

A continuación se declaran las relaciones del modelo matemático desde la relación (R1) hasta (R21), cuyas variables han sido identificadas en la anterior página.

$$(R1) z_2 - u \cdot z_1 = 0$$

$$(R2) m \cdot z_1 - d_1 \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R3) m \cdot z_2 - d_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R4) m \cdot (z_1 + z_2) - 2 \cdot a \cdot \cos \beta = 0$$

$$(R5) \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} - \tan \alpha_t = 0$$

$$(R6) d_1 \cdot \cos \alpha_t - d_{b1} = 0$$

$$(R7) d_2 \cdot \cos \alpha_t - d_{b2} = 0$$

$$(R8) d_1 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) - d_{f1} = 0$$

$$(R9) d_2 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) - d_{f2} = 0$$

$$(R10) 2 \cdot a - d_{f2} - 2 \cdot c^* \cdot m - d_{a1} = 0$$

$$(R11) 2 \cdot a - d_{f1} - 2 \cdot c^* \cdot m - d_{a2} = 0$$

$$(R12) \left[\begin{array}{l} 0,5 \cdot \sqrt{(d_{a1}^2 - d_{b1}^2)} + 0,5 \cdot \sqrt{(d_{a2}^2 - d_{b2}^2)} - \\ - a \cdot \sin \alpha_t - \varepsilon_\alpha \cdot m \cdot \pi \cdot \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \right) = 0 \end{array} \right]$$

$$(R13) 30000 \cdot \text{Pot} - T_1 \cdot \pi \cdot n_1 = 0$$

$$(R14) n_1 \cdot \pi \cdot d_1 - 60000 \cdot V = 0$$

$$(R15) 1000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2) - K \cdot 2 \cdot b_w \cdot \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 \cdot z_2 = 0$$

$$(R16) v^{-0,223} \cdot K^{-0,4} - f_m \cdot 3.239 \cdot v^{0,7} = 0$$

$$(R17) (u+1) \cdot \left[\left[\left(\frac{d_{a2}}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right]^{0,5} - \sin \alpha_t \right] - H_s = 0$$

$$(R18) H_t = \frac{(u+1)}{u} \cdot \left[\left[\left(\frac{d_{a1}}{2} \right)^2 - \cos^2 \alpha_t \right]^{0,5} - \sin \alpha_t \right] - H_t = 0$$

$$(R19) 2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t) - M \cdot (H_s^2 + H_t^2) = 0$$

$$(R20) f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta - P_{roz} \cdot 9549 \cdot M$$

$$(R21) (\text{Pot} - P_{roz}) - \eta \cdot \text{Pot} = 0$$

El anterior modelo matemático fue analizado con técnicas de grafos para un mejor análisis de la interrelación entre las variables y las relaciones que posteriormente pudieran ser incorporadas a la soluciones de los problemas. La Figura 1 muestra un grafo del modelo matemático.

En base al primer modelo matemático fue planteado el problema de la determinación de la eficiencia de un engranaje cilíndrico con fundamento en la norma ISO/TR 14179-1 y tomando en consideración una consecuente geometría del engranaje en la etapa de diseño y una posterior explotación en base a la velocidad y carga de trabajo de engranaje. Este problema fue el punto de partida para elaborar un segundo modelo matemático, en que se declaran las relaciones con una orientación lógica para desarrollar un procedimiento de cálculo, que brinda solución al problema planteado con participación de 18 relaciones pertinentes

Las relaciones identificadas en el primer modelo matemático como (R6), (R7) y (R12) no son necesarias en la solución de problema que se plantea.

$$(R1) u = \frac{z_2}{z_1}$$

$$(R2) d_1 = \frac{m \cdot z_1}{\cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R5) \alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \right) (^\circ)$$

$$(R13) T_1 = \frac{30000 \cdot \text{Pot}}{\pi \cdot n_1} \text{ (Nm)}$$

$$(R3) d_2 = \frac{m \cdot z_2}{\cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R4) a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta} \text{ (mm)}$$

$$(R8) d_{f1} = d_1 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) \text{ (mm)}$$

$$(R9) d_{f2} = d_2 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^*) \text{ (mm)}$$

$$(R10) d_{a1} = 2 \cdot a - d_{f2} - 2 \cdot c^* \cdot m \text{ (mm)}$$

$$(R11) d_{a2} = 2 \cdot a - d_{f1} - 2 \cdot c^* \cdot m \text{ (mm)}$$

$$(R14) v = \frac{n_1 \cdot \pi \cdot d_1}{60000} \text{ (m/s)}$$

$$(R15) K = \frac{1000 \cdot T_1 \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot b_w \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot z_2} \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$(R16) f_m = \frac{v^{-0,223} \cdot K^{-0,4}}{3.239 \cdot v^{0,7}}$$

$$(R17) H_s = (u+1) \cdot \left[\left(\frac{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \text{sen} \alpha_t \right]$$

$$(R18) H_t = \frac{(u+1)}{u} \cdot \left[\left(\frac{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2} - \cos^2 \alpha_t \right)^{0,5} - \text{sen} \alpha_t \right]$$

$$(R19) M = \frac{2 \cdot \cos \alpha_t \cdot (H_s + H_t)}{H_s^2 + H_t^2}$$

$$(R20) P_{roz} = \frac{f_m \cdot T_1 \cdot n_1 \cdot \cos^2 \beta}{9549 \cdot M} \text{ (kW)}$$

$$(R21) \eta = \frac{\text{Pot} - P_{roz}}{\text{Pot}}$$

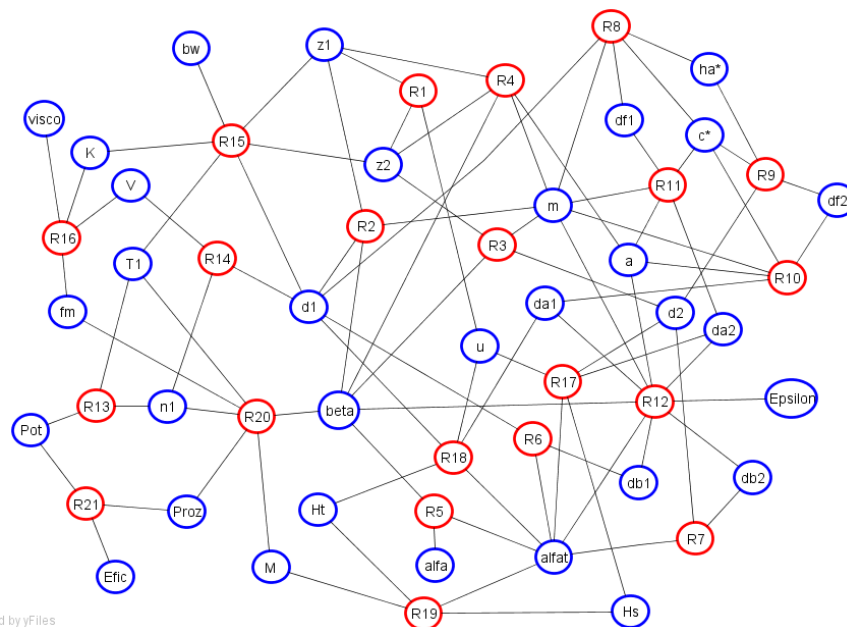


Figura 1 - Grafo del modelo matemático de la interrelación de la eficiencia del engranaje con la geometría del dentado de las ruedas, la carga y velocidad de trabajo.

En base al segundo modelo matemático fue elaborado un procedimiento de cálculo de la eficiencia de un engranaje de ruedas cilíndricas, con dientes rectos sin corrección del perfil, considerando las pérdidas por fricción propias del rozamiento entre los flancos activos de los dientes conjugados. El procedimiento fue organizado en tablas Excel confeccionadas al efecto y permitió evaluar la eficiencia del engranaje con variaciones de parámetros de diseño y de explotación. En las Figuras 2, 3, 4 y 5 son mostrados algunos de los resultados obtenidos con una relación ancho de engranaje y distancia interaxial de $b_w/a_w = 0.3$, aceite con viscosidad cinemática de trabajo de $v = 150$

mm^2/s y ruedas dentadas talladas con herramientas de generación con perfil de referencia según NC-ISO 53-2007.

Los resultados de este trabajo permiten afirmar que las mayores eficiencias del engranaje cilíndrico de ruedas de con dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos según ISO/TR 14179-1 se logran cuando la explotación se ejecuta a las mayores velocidades y cargas de la transmisión (Figuras 4, 5 y 7). Es conveniente para lograr las máximas eficiencias de las transmisiones por engranajes, con una proporción fija de ancho/distancia entre ejes, ejecutar diseños con valores altos de relación de

transmisiones cinemáticas y ruedas dentadas con gran cantidad de dientes (Figuras 2, 3 y 8).

números de dientes, tal y como se muestra en la Figura 6.

Los anteriores resultados consideran una dependencia del módulo debido a que se ha preferido establecer una relación constante entre ancho de engranaje y distancia entre centros, lo que admite un análisis de engranajes con diferentes distancias entre ejes y por consiguiente con número de dientes y módulos. Los resultados confirman que la mayor eficiencia se logra en los engranajes con mayores

En el presente trabajo y con base en las ecuaciones declaradas en el Reporte Técnico ISO/TR 14179-1 para evaluar las pérdidas por fricción en engranajes cilíndricos, fue determinada la eficiencia de 40 casos-ejemplos considerando las pérdidas por fricción debido al engrane de los dientes.

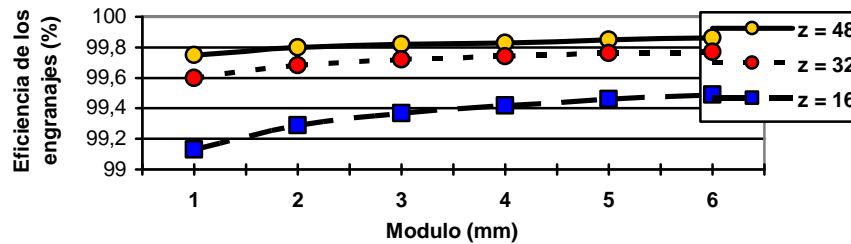


Figura 2 - Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con razón de transmisión $u = 1$, carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm y velocidad de rotación de entrada (piñón) de $n_1 = 1000 \text{min}^{-1}$.

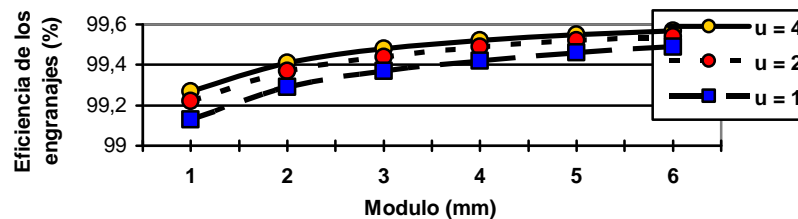


Figura 3 - Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de entrada (piñón) $n_1 = 1000 \text{min}^{-1}$ y número de dientes en piñón $z_1 = 16$.

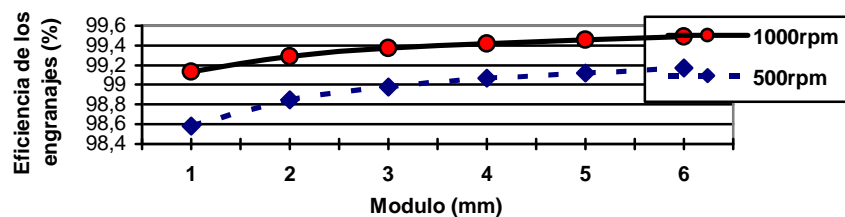


Figura 4 - Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, razón de transmisión $u = 1$ y número de dientes en el piñón $z_1 = 16$.

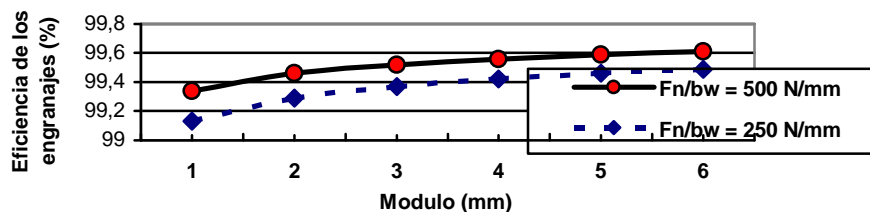


Figura 5 - Eficiencias estimadas según ISO/TR-14179-1. Engranajes con razón de transmisión $u = 1$, velocidad de rotación de entrada (piñón) $n_1 = 1000 \text{min}^{-1}$ y número de dientes en el piñón $z_1 = 16$.

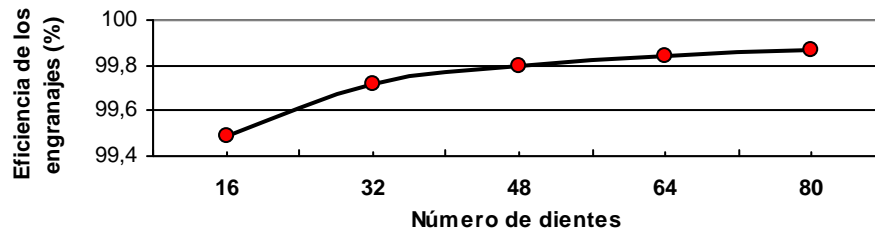


Figura 6 - Eficiencias para engranajes estimadas según ISO/TR-14179-1 con distancia interaxial $a = 96\text{mm}$, módulos 1,2 ($z = 80$) y 6 mm ($z = 16$), razón de transmisión $u = 1$, velocidad de rotación de entrada (piñón) $n_1 = 1000\text{min}^{-1}$ y número de dientes en el piñón $z_1 = 16$.

En el análisis del comportamiento de la eficiencia del engranaje, fueron aceptadas como variables independientes el número de dientes (z_1) y frecuencia de rotación del piñón (n_1), la razón de engranaje (u), el módulo de las ruedas (m) y la carga unitaria en N/mm sobre el flanco en los dientes (F_n/b).

Los casos ejemplos analizados fueron establecidos con una relación ancho de engranaje y distancia interaxial de $b_w/a_w = 0.3$, aceite con viscosidad cinemática de trabajo de $\nu = 150\text{ mm}^2/\text{s}$ y ruedas dentadas talladas sin corrección ($x_1 = x_2 = 0$) y herramientas con ángulo entre flanco $\alpha = 20^\circ$ y factor de altura de cabeza $h_a^* = 1$. En la Tabla 1 y las Figuras 7 y 8 se muestran resultados del cálculo y su generalización.

Tabla 1 – Algunos valores de eficiencia de engranajes cilíndricos según ISO/TR 14179-1

η %	z_1	u	n_1 (min^{-1})	F_n/b (N/mm)	m
99,80	48	1	1000	250	2
99,82	48	1	1000	250	3
99,83	48	1	1000	250	4
99,85	48	1	1000	250	5
99,86	48	1	1000	250	6
99,27	16	4	1000	250	1
99,41	16	4	1000	250	2
99,48	16	4	1000	250	3
99,55	16	4	1000	250	4
99,57	16	4	1000	250	5
99,22	16	2	1000	250	1
99,37	16	2	1000	250	2
99,44	16	2	1000	250	3
99,49	16		1000	250	4
98,58	16	1	500	250	1
98,85	16	1	500	250	2
98,98	16	1	500	250	3
99,07	16	1	500	250	4
99,12	16	1	500	250	5
99,17	16	1	500	250	6
99,34	16	1	1000	500	1

ser valorada, en base a un análisis de regresión múltiple con empleo de la siguiente fórmula:

$$\eta = 97,9233 + 0,000567737 \cdot \frac{F_n}{b} + 0,0661344 \cdot m + 0,000819465 \cdot n_1 + 0,0415025 \cdot u + 0,0133604 \cdot z_1$$

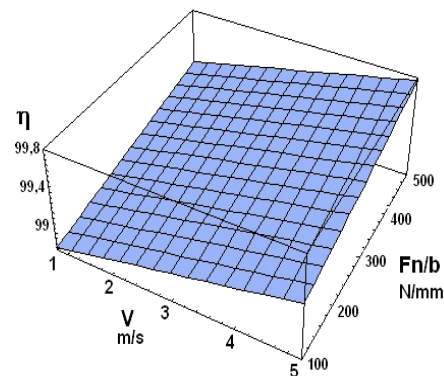


Figura 7 – Gráfico del comportamiento de la eficiencia η de engranajes cilíndricos según ISO/TR 14179-1 en función de la velocidad circunferencial de las ruedas (V) y la carga específica sobre el diente (F_n/b).

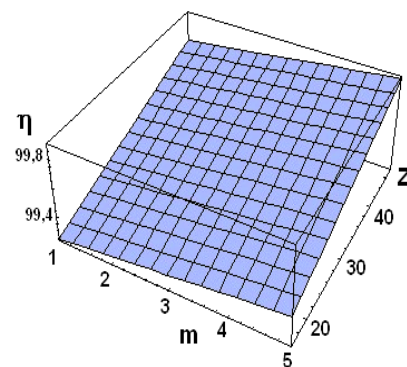


Figura 8 – Gráfico del comportamiento de la eficiencia η de engranajes cilíndricos según ISO/TR 14179-1 en función del módulo (m) y número de dientes de ruedas iguales a 1000 min^{-1} y carga específica de 250 N/mm .

La interrelación directa entre la eficiencia del engranaje y las variables independientes puede

IV - COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS Y CONTACTO EXTERIOR CONVENIENTEMENTE LUBRICADOS.

Un análisis de las formulaciones para evaluar las pérdidas de potencia en los engranajes cilíndricos de ejes paralelos y contacto exterior según ISO/TR-14179-1 y 2 permite afirmar que las disparidades entre los resultados están responsabilizadas con las formulaciones empíricas adoptadas para el coeficiente de fricción. En este sentido, es justificable una comparación de las formulaciones más difundidas para evaluar el coeficiente de fricción en los engranajes en la literatura especializada con las propuestas en ISO/TR 14179.

Varios modelos físico-matemáticos, resultados de ensayos múltiples, han sido propuestos para evaluar el coeficiente de fricción en un

engranaje, pero la realidad es que en la actualidad existen aún imprecisiones en los resultados que se obtienen debido a las simplificaciones que se incluyen para aceptar un coeficiente de fricción promedio cuando en realidad el coeficiente de fricción en el engranaje es un valor instantáneo dependiente de las zonas del flanco de los dientes en donde se localiza el contacto.

En la Figura 9, se aprecian los valores superiores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-2 al ser comparados con los resultados experimentales de Hori [6] en la evaluación del coeficiente de fricción instantáneo en el contacto sobre la línea de engranaje. Los resultados de Hori fueron obtenidos sin considerar distribución de cargas entre dientes y corresponden a un engranaje pequeño casi estacionario.

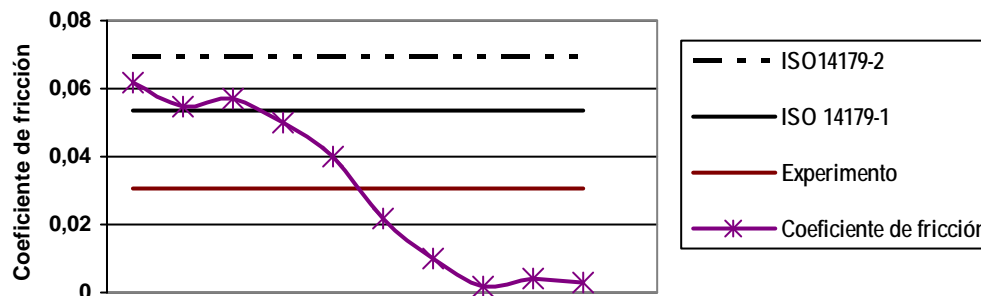


Figura 9 – Coeficiente de fricción a lo largo de la línea de engranaje según ensayos de Hori [6] y los resultados derivados de la aplicación de las formulas de ISO/TR 14179.

Estudiosos del tema, han obtenido empíricamente varias formulaciones para el coeficiente de fricción en engranajes cilíndricos y brindan como resultado un valor promedio experimental. Algunas de las relaciones más conocidas para evaluar el coeficiente de fricción se muestran a continuación.

a) Coeficiente de fricción de Drozdov-Gavrikov [7]:

$$f_m = \frac{1}{0,8 \cdot \sqrt{v_k} \cdot \bar{V}_s + \bar{V}_r \cdot \theta + 13,4} \quad (7)$$

$$\bar{V}_s = 0,0262 \cdot n_1 \cdot \left(\frac{1+u}{u} \right) \cdot g_\alpha \quad [\text{m/s}] \quad (8)$$

$$\bar{V}_r = 0,1047 \cdot n_1 \cdot \left[d_1 \cdot \text{sen} \alpha - \frac{g_\alpha}{4} \cdot \left(\frac{u-1}{u} \right) \right] \quad [\text{m/s}] \quad (9)$$

$$\theta = 0,47 - 0,13 \cdot 10^{-4} \cdot P_{\max} - 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot v \quad (10)$$

$$P_{\max} = \sqrt{\frac{210000 \cdot F_T}{2 \cdot \pi \cdot b_w \cdot \rho_{red}}} \cdot 10 \quad [\text{kg/cm}^2] \quad (11)$$

Donde:

g_α = Longitud de línea de engranaje (mm)

v_k = Viscosidad dinámica lubricante (mm^2/s)

\bar{V}_s = Velocidad media deslizamiento (m/s)

\bar{V}_r = Velocidad media de rodadura (m/s)

b) Coeficiente de fricción de Benedict-Kelly [8]:

$$f_m = 0,0127 \cdot \log_{10} \left(\frac{29,66 \cdot F_T / b_w}{v \cdot \bar{V}_s \cdot (\bar{V}_r)^2} \right) \quad (12)$$

c) Coeficiente de fricción de Misharin [9]:

$$f_m = 0,325 \cdot \left(\bar{V}_s \cdot \bar{V}_r \cdot v_k \right)^{-0,25} \quad (13)$$

d) Coeficiente de fricción de ISO 14179-2:2001.

$$f_m = 0,048 \cdot \left(\frac{F_T}{b_w \cdot V_\Sigma \cdot \rho_{red}} \right)^{0,2} \cdot v^{-0,05} \cdot \left(\frac{R_{a1} + R_{a2}}{2} \right)^{0,25} \cdot X_L \quad (14)$$

Los valores de coeficientes de fricción calculados según las fórmulas (2), (7), (12), (13) y (14) fueron evaluados para engranajes con

diferentes geometrías, cargas y velocidad. Algunos resultados son replicados en forma de gráficos desde la Figura 10 hasta la Figura 14.

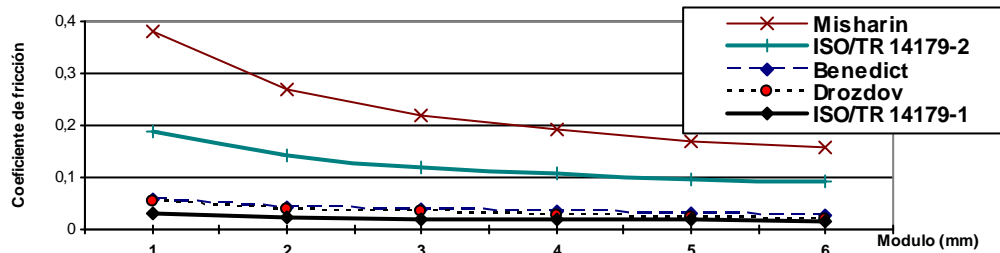


Figura 10 – Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión $u = 1$, carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de rotación de entrada (piñón) de $n_1 = 1000\text{min}^{-1}$ y número de dientes $z = 16$.

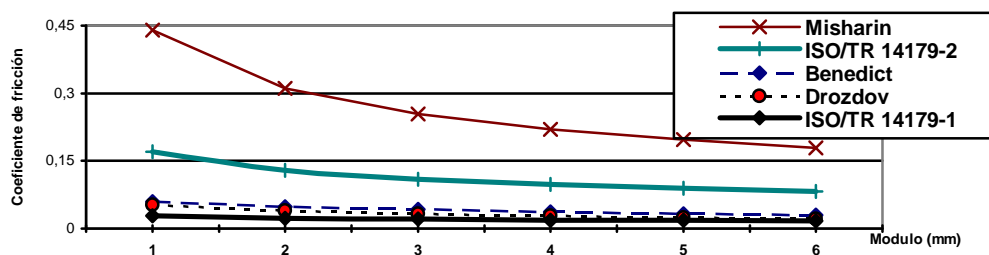


Figura 11 – Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión $u = 4$, carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de rotación de entrada (piñón) de $n_1 = 1000\text{min}^{-1}$ y número de dientes $z = 16$.

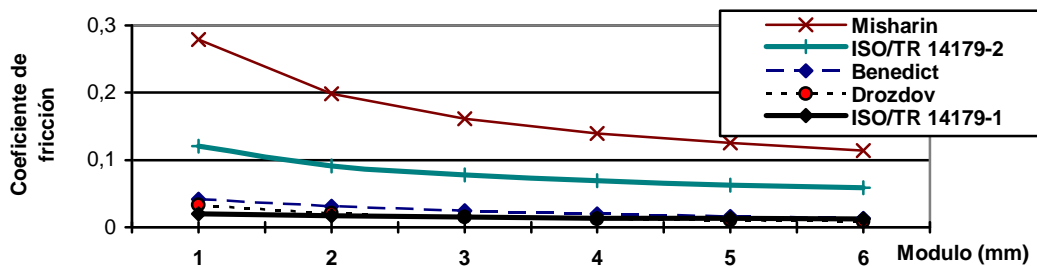


Figura 12 - Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión $u = 1$, carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, velocidad de entrada (piñón) $n_1 = 1000\text{min}^{-1}$ y número de dientes en piñón $z_1 = 48$.

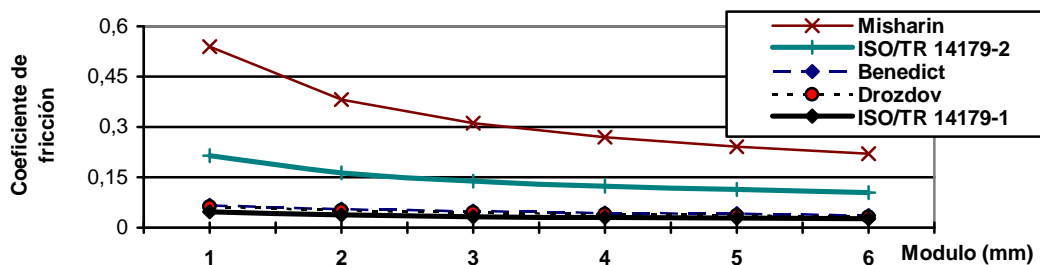


Figura 13 - Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión $u = 1$, con carga unitaria sobre dientes de 250 N/mm, número de dientes en el piñón $z_1 = 16$ y velocidad de entrada (piñón) $n_1 = 500\text{min}^{-1}$.

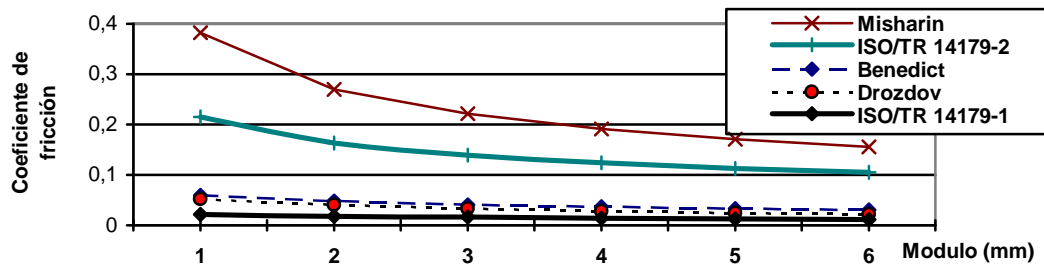


Figura 14 - Valores de coeficientes de fricción para engranajes con razón de transmisión $u = 1$, velocidad de rotación de entrada (piñón) $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$, número de dientes en el piñón $z_1 = 16$ y carga unitaria sobre dientes de 500 N/mm

En general, se observa que los valores del coeficiente de fricción según Misharin [9] e ISO/TR 14179-2:2001 [2] son superiores y mantienen un comportamiento semejante. Los valores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-1:2001 [1] son los menores y muy cercanos en comportamiento a los valores promedios de Benedict [8] y Drozdov [7].

Los resultados demuestran que los valores del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-1:2001 están más próximos a los promedios generalmente aceptados por la práctica de la ingeniería de los engranes.

Otra compilación de los resultados, algunos de ellos reflejados en la Tabla 2, muestra que los menores coeficientes de fricción del engranaje cilíndrico de ruedas con dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos se logran con mayores velocidades de trabajo y mayor número de dientes en las ruedas. Adicionalmente, los resultados demuestran que existe contradicción en los resultados derivados de ISO/TR 14179-2 y Benedict-Kelly que prevén un incremento del coeficiente de fricción ante aumentos de la carga unitaria en los engranajes, en contraposición con ISO/TR 14179-1 que estima una disminución del coeficiente de fricción.

Tabla 2 – Coeficientes de fricción para engranes con razón de transmisión $u = 1$, módulo $m = 3$, viscosidad cinemática del lubricante $\nu = 150 \text{ mm}^2/\text{s}$, rugosidad superficial media $R_a = 6,3 \mu\text{m}$ y $b_w/a_w = 0,3$.

z_1	n_1 rpm	Ft/b N/mm	Coeficiente de fricción fm				
			Misharin	ISO/TR 14179-2	Benedict	Drozdov	ISO/TR 14179-1
16	1000	250	0,221	0,121	0,038	0,033	0,021
48	1000	250	0,161	0,078	0,025	0,016	0,015
16	500	250	0,312	0,139	0,049	0,046	0,034
16	1000	500	0,221	0,139	0,041	0,033	0,016

V – CONCLUSIONES.

- Empleando las ecuaciones declaradas en ISO/TR 14179-1 para evaluar la eficiencia del engranaje y analizando una interrelación con la geometría del dentado de las ruedas, la carga y velocidad de trabajo fue elaborado un modelo matemático de 21 relaciones entre 32 variables con 11 grados de libertad.
- En base a un modelo matemático general fue desarrollado un modelo matemático orientado a dar solución al problema de la determinación de la eficiencia de un engranaje cilíndrico con fundamento en la norma ISO/TR 14179-1 y tomando en consideración una consecuente geometría del engranaje en la etapa de diseño y una posterior explotación en base a la velocidad y carga de trabajo de engranaje.
- Resultados del trabajo y compilados en las Figuras 4, 5 y 7 muestran que mayores eficiencias del engrane cilíndrico de ruedas con dientes rectos, contacto exterior y ejes paralelos según ISO/TR 14179, se logran cuando la explotación se ejecuta a mayores velocidades y cargas.
- Resultados del trabajo y compilados en las Figuras 2, 3, 6 y 8 confirman que, para una distancia entre ejes determinada, la mayor eficiencia se logra en los engranes con mayores cantidades de dientes y mayores razones de transmisión.
- Según las relaciones declaradas en ISO/TR 14179-1:2001 e ISO/TR 14179-2:2001 se obtienen los menores valores de coeficientes de fricción en los engranes cilíndricos con mayores velocidades de trabajo y mayores cantidades de dientes. Un resumen de algunos resultados se muestran en la Tabla 2.
- La evaluación de varias propuestas para calcular el coeficiente de fricción en los

engranajes (ecuaciones 2, 7, 12, 13 y 14) muestran que un aumento de la carga específica en los engranes provoca un incremento del valor del coeficiente de fricción según ISO/TR 14179-2:2001 y Benedict-Kelly, mientras que produce una disminución según ISO/TR 14179-1:2001. Ver Tabla 2.

- El estudio demuestra que, a pesar de los avanzados resultados para evaluar la eficiencia de los engranes, aún existen discrepancias entre los diferentes procedimientos para la determinación de la eficiencia, atribuibles a la disparidad en las relaciones para evaluar el coeficiente de fricción entre los dientes en contacto.

REFERENCIAS.

- [1] ISO/TR 14179-1:2001: Gears -- Thermal capacity -- Part 1: Rating gear drives with thermal equilibrium at 95 °C sump temperature. 2001
- [2] ISO/TR 14179-2:2001: Gears -- Thermal capacity -- Part 2: Thermal load-carrying capacity. 2001.
- [3] Phillips, Allyn E; The Development of a Practical Thermal Rating Method for Enclosed Gear Drives. AGMA Technical Paper 96FTM9. American Gear Manufacturers Association. Virginia, 1996.
- [5] González Rey, G.; Comentarios Sobre el Cálculo de la Eficiencia de Engranajes Cilíndricos Según Reportes Técnicos ISO/TR 14179 – 1 y 2. Proc. Conf. Int. Energía Renovable y Eficiencia Energética. Ciudad de la Habana. Mayo 2007.
- [6] Hori, Hayashi, Iwattsuki; Determination of the tooth surface friction coefficient of a pair of mating gears based on the distribution along the tooth profile precisely measured with the gravity pendulum method. ASME Paper DETC 2000/PTG-14371. 2000.
- [7] Drozdov, Y. N., Gavrikov, Y.A.; Friction and scoring under the conditions of simultaneous rolling and sliding bodies. Wear pp.291-302, 1967.
- [8] Benedict, G. H., Kelly, B. W.; Instantaneous coefficients of gear tooth friction, Transactions of ASLE, ASLE Lubrication Conference, pp.57-70, October, 1960.
- [9] Misharin, Y. A., "Influence of The Friction Condition on The Magnitude of The Friction Coefficient in The Case of Rollers with Sliding", Proc. Int. Conf. On Gearing, 1958, Inst. Mech. Eng., London, pp. 159-164, 1958.

ACERCA DE LOS AUTORES:

Gonzalo González Rey: Desde 1982 es profesor del Instituto Superior Politécnico " José Antonio Echeverría " y desde 1997 ejerce funciones como Profesor Principal de Elementos de Máquinas de la Facultad de Ingeniería Mecánica. Obtuvo el Doctorado Ciencias Técnicas en 1998. Entre 1992 y 2001 fue Coordinador en Cuba de la Asociación Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME). Desde 1992, es Miembro Académico de la Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes (AGMA) y Miembro Experto en el Comité Técnico de Engranajes de la Organización para la Normalización Internacional (ISO TC60). Es fundador y Vice-Presidente del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquinas. Ha sido profesor invitado de la Universidad de Salamanca, del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey y del Instituto Politécnico Nacional de México. Sus principales investigaciones y trabajos de desarrollo están dirigidos al diseño racional de transmisiones mecánicas, diseño y evaluación de la capacidad de trabajo de elementos de máquinas, normalización de elementos de máquinas, tecnología, diseño y explotación de transmisiones por engranajes y la enseñanza del diseño mecánico.

Alejandra García Toll. Profesora auxiliar del Centro de Estudio de Ingeniería en Mantenimiento en la Facultad de Ingeniería Mecánica del Instituto Superior Politécnico " José Antonio Echeverría". Obtuvo una Maestría en Diseño Mecánico en el 2000. Con más de 15 años de experiencia en la academia y en el área de diseño y mantenimiento de máquinas. Es fundadora del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquina y experta de ISO-TC60. Sus principales investigaciones están orientadas a la tribología, el diseño de elementos de máquinas y la enseñanza del diseño mecánico.

María E. García Domínguez. Profesora auxiliar de la Facultad de Ingeniería Mecánica del Instituto Superior Politécnico " José Antonio Echeverría". Más de 25 años de profesora de la disciplina de Mecánica Aplicada. Obtuvo una Maestría en Diseño Mecánico en el 2000. Es miembro del Comité Técnico de Normalización Cubano de Elementos de Máquinas. Sus principales investigaciones están orientadas al diseño mecánico y la enseñanza de la ingeniería.