

HOENEISEN, BRUCE DR.  
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

### RESUMEN

Se desarrollan varios modelos del electrón utilizando únicamente la física al alcance de un estudiante de ingeniería eléctrica. Este estudio sugiere que el electrón tiene una estructura interna que puede entenderse en forma semi-clásica.

### INTRODUCCION

En el semestre pasado envié un deber de teoría electromagnética al tercer curso de ingeniería eléctrica que consistía en calcular un modelo del electrón (el modelo 3 de este artículo). El modelo resultó no ser satisfactorio. Decidí mejorar el modelo para ver hasta donde es posible entender ¿Qué es un electrón? utilizando únicamente la física al alcance de un estudiante de ingeniería eléctrica. He aquí los resultados de este estudio. ¿Qué es un electrón? Comencemos describiendo sus propiedades.

### PROPIEDADES DEL ELECTRON

Se conocen cinco partículas elementales que en apariencia son absolutamente estables (dos tipos de neutrino, el fotón, el electrón y el positón), 19 partículas elementales relativamente estables (vida media entre  $\approx 10^{-13}$  y  $10^3$  segundos) y alrededor de 200 partículas elementales inestables (vida media entre  $\approx 10^{-22}$  y  $10^{-24}$  segundos)<sup>1</sup>. Además a cada una de estas partículas le corresponde una anti-partícula. Al anti-electrón se le ha dado el nombre "positrón". Las partículas elementales se han clasificado en dos grandes grupos: las de spin entero que satisfacen estadísticas de Bose-Einstein (los bosones) y las de spin semi-entero ( $1/2, 3/2, 5/2, \text{etc.}$ ) que satisfacen el principio de exclusión de Pauli (estadísticas de Fermi-Dirac; los fermiones). La mayoría de las partículas elementales tienen interacciones fuertes. Solo el fotón entre los bosones, y el electrón, el muón, la partícula tau y dos tipos de neutrino entre los fermiones no tienen interacciones fuertes. A este grupo de fermiones se les llama leptones. Hay quienes creen que el muón y la partícula tau son estados excitados del electrón<sup>2</sup>. También hay quienes creen que los leptones y los quarks son los elementos constitutivos de las partículas elementales<sup>3</sup>.

En resumen el electrón es absolutamente estable (por ser la partícula cargada de menor masa), tiene spin  $1/2$ , tiene estadísticas de Fermi-Dirac, no tiene interacciones fuertes (sólo tiene interacciones electromagnéticas, débiles y gravitacionales), tiene masa, carga eléctrica, momento dipolar magnético y momento angular. Hasta donde se sabe, un electrón en reposo no tiene momento dipolar eléctrico ni momentos cuadrupolares eléctrico o magnético.

Los átomos tienen un núcleo pequeño de carga positiva rodeado de una "nube" de electrones. Estos electrones permiten entender la estructura de los átomos, moléculas y materiales. Los electrones son los portadores de carga de la corriente eléctrica en metales, en rayos catódicos, en algunos semiconductores y aislantes (tanto cristalinos como amorfos), y en los plasmas (junto con una contribución normalmente pequeña de los iones). En la degradación radioactiva de los materiales un neutrón del núcleo se transforma en un protón emitiendo un electrón (radiación  $\beta$ ) y un anti-neutrino.

Las interacciones electromagnéticas de electrones y positrones están muy bien descritas por la electrodinámica cuántica. Recientemente Abdus Salam, Steven Weinberg y Sheldon Glashow unificaron en una teoría las interacciones electromagnéticas y débiles. En este artículo no haremos referencia a estas teorías ya que nuestro propósito es explorar las consecuencias y limitaciones de la teoría electromagnética clásica. Vale la pena mencionar que ninguna de las teorías modernas permite calcular la carga o la masa del electrón.

Las propiedades del electrón son<sup>1</sup>:

Spin:  $1/2$

Número leptónico: 1

Carga eléctrica:  $-e = -1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masa:  $m = 9,109534(47) \cdot 10^{-31} \text{ Kg.}$

Componente z del momento angular:

$L = \pm \hbar/2 = \pm 0,5272943(29) \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$

Componente z del momento dipolar magnético:

$\mu = \mp 1,00115965241(20) \cdot \mu_B$   
 $= \mp 9,28483(3) \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2,$

donde  $\mu_B \equiv e \hbar/2m$  es el magnetón de Bohr. Note que  $-Le/\mu m \approx 1$ . (No sé si se ha medido el signo de  $Le/\mu m$ ).

Vida media: mayor que  $5 \cdot 10^{21}$  años (compare con la edad del universo:  $10^{10}$  años).

En paréntesis se ha indicado la incertidumbre de una desviación estándar en los últimos dígitos del número precedente.

A continuación presentamos varios modelos del electrón. Cada modelo intenta corregir los problemas del modelo anterior. Todos los cálculos se hacen utilizando el sistema internacional de unidades SI.

#### Modelo 1. Carga puntual en reposo.

Según la teoría electromagnética clásica la energía del campo eléctrico de Coulomb de una partícula puntual cargada es infinita. Por lo tanto para obtener la masa  $m$  finita del electrón habría que asignarle a la partícula puntual una masa "mecánica" (de origen no-electromagnético) infinitamente gran

de y negativa. Este modelo no explica el momento angular ni el dipolo magnético del electrón.

Modelo 2. Cáscara esférica cargada.

Consideremos una cáscara esférica en reposo de radio  $a$ , uniformemente cargada con carga  $-e$ . La energía en el campo electrostático de Coulomb es  $\mu_0 e^2 c^2 / 8\pi a$ . Suponiendo que toda la masa del electrón tiene origen electromagnético se obtiene:

$$a = \mu_0 e^2 / 8\pi m = 1,41 \cdot 10^{-15} \text{ metros.} \quad (1)$$

Este modelo tampoco explica el dipolo magnético ni el momento angular del electrón. Para esto tenemos que hacer girar al electrón.

Modelo 3. Cáscara esférica cargada que gira.

Consideramos un modelo clásico no-relativista que consiste en una cáscara esférica uniforme de radio  $a$ , carga  $-e$ , masa "mecánica"  $M$  y velocidad angular  $\omega$ . En este modelo no incluimos el momento angular del campo electromagnético. Este modelo es trivial en el sentido que tiene cuatro parámetros  $e, M, a$  y  $\omega$  que permiten satisfacer las cuatro propiedades  $e, m, \mu$  y  $L$  del electrón. Se obtiene

$$m = M + \frac{\mu_0 e^2}{8\pi a} \left[ 1 + \frac{4}{27} \left( \frac{a\omega}{c} \right)^2 + \frac{2}{27} \left( \frac{a\omega}{c} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\mu = -e a^2 \omega / 3 \quad (3)$$

$$L = 2M a^2 \omega / 3. \quad (4)$$

Los términos en el segundo miembro de (2), son respectivamente la masa "mecánica" y las contribuciones del campo eléctrico de Coulomb, de la inducción magnética interna y de la inducción magnética externa. De (2), (3) y (4) y las propiedades del electrón se obtiene

$$a = 6,04 \cdot 10^{-14} \text{ metros} \quad (5)$$

$$a\omega/c = 9,6 \quad (6)$$

$$M = 0,499 m. \quad (7)$$

Note que la velocidad ecuatorial  $a\omega$  es 9,6 veces la velocidad de la luz de manera que el cálculo no-relativista no se justifica.

Modelo 4. Lo mismo pero incluyendo el momento angular del campo electromagnético.

Repetimos el cálculo no-relativista anterior, pero esta vez incluimos el momento angular del campo electromagnético en (4):

$$\frac{1}{c^2} \left| \int \underline{r} \times (\underline{E} \times \frac{1}{\mu_0} \underline{B}) dV \right| = \mu_0 e^2 a\omega / 18 \cdot \pi. \quad (8)$$

Se obtiene

$$a = 5,98 \cdot 10^{-14} \text{ metros,} \quad (9)$$

$$a\omega/c = 9,70, \quad (10)$$

$$M = 0,484 m. \quad (11)$$

Persiste el problema de la velocidad ecuatorial  $a\omega > c$ . Por lo tanto intentamos un cálculo relativista.

Modelo 5. Lo mismo pero incluyendo relatividad.

Hacemos dos correcciones relativistas al cálculo anterior:

a) En el cálculo del momento angular "mecánico" incluimos el factor correctivo

$$1 / \sqrt{1 - (v/c)^2};$$

$$\frac{Ma^2\omega}{2} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^3 \theta \cdot d\theta}{\sqrt{1 - (a\omega \text{sen} \theta/c)^2}} = \frac{Mac}{4} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \ln \left[ \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right] - \frac{2}{\alpha} \right\} \quad (12)$$

donde

$$\alpha \equiv a\omega/c ; 0 \leq \alpha < 1. \quad (13)$$

b) Al calcular la "masa mecánica" incluimos la contribución de la "energía cinética":

$$\sum_i \frac{\Delta M_i}{\sqrt{1 - (v_i/c)^2}} = \frac{M}{2} \int_0^\pi \frac{\text{sen} \theta \cdot d\theta}{\sqrt{1 - (a\omega \text{sen} \theta/c)^2}} = \frac{M}{2\alpha} \ln \left[ \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right] \quad (14)$$

Por lo tanto en este modelo se tiene

$$m = \frac{M}{2\alpha} \ln \left[ \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right] + \frac{\mu_0 e^2}{8\pi a} \left[ 1 + \frac{4}{27} \alpha^2 + \frac{2}{27} \alpha^2 \right] \quad (15)$$

$$\mu = -e a c \alpha / 3, \quad (16)$$

$$L = \frac{Mac}{4} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \ln \left[ \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right] - \frac{2}{\alpha} \right\} + \frac{\mu_0 e^2 c \alpha}{18 \cdot \pi} \quad (17)$$

Las contribuciones a la masa (15) son respectivamente la masa "mecánica" en reposo  $M$  con corrección relativista, la "masa" del campo electrostático de Coulomb, la "masa" de la inducción magnética interna, y la "masa" de la inducción magnética externa. Las contribuciones al momento angular (17) son el momento angular "mecánico" con corrección relativista y el momento angular del campo electromagnético.

Hemos dicho que en nuestro modelo el electrón es una cáscara esférica con velocidad angular  $\omega$  y con distribuciones superficiales de carga y masa homogéneas. En relatividad estos conceptos no son invariantes: dependen del observador (sistema de referencia). Los cálculos presentados son correctos si las características anotadas del electrón se refieren a un observador inercial (que no "gira") en reposo con respecto al centro del electrón.

Analizando las ecuaciones (15), (16) y (17) conjuntamente con las propiedades del electrón se concluye que las contribuciones del campo electromagnético al momento angular y a la masa del electrón son menores que  $\sim 0,3\%$  para  $0 < \alpha < 1$ . Por lo tanto despreciamos los últimos términos de (15) y (17). Se obtiene entonces:

$$-\frac{Le}{2\mu m} = \frac{3}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha \ln \left[ \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right]} \right\}. \quad (18)$$

Esta función de  $\alpha$  varía entre 1 para  $\alpha = 0$  y  $3/2$  para  $\alpha = 1$ . El valor experimental de  $-Le/2\mu m$  es 0,4994 de manera que este modelo no puede describir correctamente al electrón.

#### Modelo 6. Carga puntual que gira.

Consideramos una partícula puntual de masa  $M$  y carga  $-e$  que tiene movimiento circular uniforme de radio  $a$  y velocidad angular  $\omega$ . No incluimos las contribuciones del campo electromagnético a la masa y al momento angular del electrón. Se obtiene inmediatamente

$$m = M / \sqrt{1 - (a\omega/c)^2}, \quad (19)$$

$$\mu = -e a^2 \omega / 2, \quad (20)$$

$$L = M a^2 \omega / \sqrt{1 - (a\omega/c)^2}. \quad (21)$$

Note que

$$-Le/\mu m = 2 \quad (22)$$

en vez del valor experimental 0,9988.

Un problema adicional de este modelo es que según la teoría electromagnética clásica una carga acelerada radia ondas electromagnéticas. Además, ¿qué fuerza mantiene al electrón en su órbita?

Hagamos ahora el siguiente argumento semi-clásico: el electrón que gira tiene cantidad de movimiento

$$p = M a \omega / \sqrt{1 - (a\omega/c)^2} \quad (23)$$

De acuerdo a la relación de De Broglie le corresponde una onda de longitud de onda  $\lambda = h/p$ . Para que haya interferencia constructiva y obtener un estado estacionario

se requiere que el perímetro  $2\pi a$  sea un múltiplo de  $\lambda$ :

$$2\pi a = \ell \lambda \quad (24)$$

donde  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ . Si los observables solo dependen del cuadrado del campo es permisible que el campo tenga un signo indeterminado. En este caso también hay que considerar valores semi-enteros de  $\ell$ . Por ejemplo para  $\ell = 1/2$  se obtiene

$$a^2 \omega = \hbar / 2m \quad (25)$$

y

$$L = \hbar / 2. \quad (26)$$

Este es el valor correcto de la componente  $z$  del momento angular.

Se satisface el principio de incertidumbre ya que  $\Delta p_x \approx p$  y  $\Delta x \approx a = \hbar / 2p$  de manera que  $\Delta p_x \cdot \Delta x \approx \hbar$ . Por lo tanto no es posible medir el itinerario del electrón en su órbita.

Note que además de obtener el valor correcto de  $L$  hemos resuelto el problema de radiación: una onda estacionaria tiene una densidad de carga que no varía en el tiempo y por lo tanto no radia ondas electromagnéticas. Sin embargo subsiste el error de un factor 2 en  $Le/\mu m$ .

#### Modelo 7. Lo mismo pero incluyendo la masa del campo electromagnético.

Según hemos visto en el modelo anterior debemos suponer que la fuente del campo electromagnético es la densidad de carga - corriente correspondiente a la onda estacionaria y no a la carga puntual. De otra forma hay radiación y además la energía en el campo electromagnético diverge. Por lo tanto para estimar la contribución del campo electromagnético a la masa del electrón es justificable utilizar la expresión calculada anteriormente (último término de (2)). Entonces en este modelo se tiene aproximadamente:

$$m = \frac{M}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\mu_0 e^2}{8\pi a} \left[ 1 + \frac{4}{27} \alpha^2 + \frac{2}{27} \alpha^4 \right] \quad (27)$$

$$\mu = -e a c \alpha / 2, \quad (28)$$

$$L = M a c \alpha / \sqrt{1-\alpha^2} \quad (29)$$

donde  $\alpha \equiv a\omega/c$ . El teorema de Poynting de teoría electromagnética clásica no indica si el campo electromagnético estático tiene o no cantidad de movimiento y momento angular. Incluyendo (8) en (29) se modifican los valores numéricos de  $\alpha$ ,  $a$  y  $M / \sqrt{1-\alpha^2}$  en menos de 25%.

Nuevamente supondremos que al electrón en su órbita está asociada una onda estacionaria con  $\ell = 1/2$  de manera que se predice correctamente

$$L = \pm \hbar / 2. \quad (30)$$

De (27) - (30) y los valores numéricos de  $e$ ,  $m$  y  $\mu$  se obtienen dos soluciones dependiendo del signo de  $L/\mu$ :

a) Si  $L/\mu < 0$ ;

$$\alpha = 8,34 \quad (31)$$

$$a = 4,64 \cdot 10^{-14} \text{ metros} \quad (32)$$

$$M/\sqrt{1-\alpha^2} = +0,4994 \cdot m. \quad (33)$$

b) Si  $L/\mu > 0$ :

$$\alpha = 12,16 \quad (34)$$

$$a = 3,18 \cdot 10^{-14} \text{ metros} \quad (35)$$

$$M/\sqrt{1-\alpha^2} = -0,4994 \cdot m. \quad (36)$$

¡Al fin tenemos un modelo compatible con las propiedades del electrón!

Note que ha resultado  $\alpha > 1$  y  $M$  imaginario. Sin embargo no hay contradicción con el principio de causalidad ya que, como hemos visto, no es posible medir el itinerario del electrón en su órbita.

Para que haya movimiento circular uniforme se requiere una fuerza sobre el electrón dirigida hacia el centro de la órbita de valor.

$$F = dp/dt = M a \omega^2 / \sqrt{1-\alpha^2}. \quad (37)$$

Esta fuerza es positiva para la alternativa a) y negativa para la alternativa b).

Antes de especular respecto del origen de la fuerza  $F$  vamos a describir al electrón según el presente modelo.

Con respecto a experimentos con fotones de longitud de onda  $\lambda \gg a$  (y energía  $h c/\lambda \ll h c/a \approx 50 \cdot m c^2$ ) el electrón se comporta como una partícula de masa  $m$ , carga  $-e$ , momento angular  $\hbar/2$  y dipolo magnético  $\mu$ . Con respecto a experimentos con fotones de longitud de onda  $\lambda \ll a$  (y energía  $\gg 50 \cdot m c^2$ ) el electrón se comporta como un punto material cargado sin momento angular ni dipolo magnético. Se puede verificar utilizando el principio de incertidumbre que no hay contradicción con los experimentos ya que una medida de  $L$  o  $\mu$  requiere un tiempo de observación  $\Delta t \gg 2\pi/\omega$ .

El electrón en el vacío es una onda estacionaria; por lo tanto no radia ondas electromagnéticas y es estable. Veamos que ocurre a un electrón que es dispersado por el campo eléctrico de Coulomb del núcleo de un átomo. Este campo "excita" al electrón de tal forma que deja de ser una onda estacionaria. Por lo tanto su densidad de carga oscila y emite ondas electromagnéticas.

Esta oscilación se llama "zitterbewegung" y la emisión se llama "bremsstrahlung". Ambos fenómenos se han observado experimentalmente.

Consideremos ahora el experimento de Stern Gerlach. En este experimento un haz de

electrones es deflexado por una inducción magnética no-homogénea. La deflexión de los electrones es proporcional a  $\mu_z$ . Como resultado de este experimento se obtienen únicamente los valores  $\mu_z = +\mu$  y  $\mu_z = -\mu$ . Este resultado se explica con nuestro modelo si el electrón en el campo magnético no-homogéneo tiene únicamente dos estados estacionarios: uno con  $\mu_z = +\mu$  y uno con  $\mu_z = -\mu$ .

En nuestro modelo se asigna una onda  $\psi$  a la partícula que gira. Se obtiene un estado estacionario (y estable) si el número  $\ell$  de longitudes de onda es entero (0,1,2,...) o semi-entero (1/2,3/2,...).  $\ell$  es el spin. Para  $\ell$  semi-entero la onda  $\psi$  tiene un signo no indeterminado. En efecto al aumentar el ángulo polar  $\phi$  en  $2\pi$  se recorre un número impar de medias longitudes de onda y se obtiene el mismo valor de  $\psi$  pero con signo cambiado. Por lo tanto para spin semi-entero el campo  $\psi$  no es observable (no tiene un valor bien determinado que pueda medirse). Para spin semi-entero las cantidades observables son cuadráticas en  $\psi$  y por lo tanto no dependen del signo de  $\psi$ . Consideremos un observable de la forma

$$\int \psi^* \psi d^3 \underline{x}. \quad (38)$$

Sea  $\psi_1$  la onda correspondiente a una partícula y  $\psi_2$  la onda correspondiente a una segunda partícula.

A la superposición de ambas partículas le corresponde el observable

$$\begin{aligned} & \int (\psi_1 + \psi_2)^* (\psi_1 + \psi_2) d^3 \underline{x} = \\ & = \int \psi_1^* \psi_1 d^3 \underline{x} + \int \psi_2^* \psi_2 d^3 \underline{x} + \\ & + \int \{ \psi_1^* \psi_2 + (\psi_1^* \psi_2)^* \} d^3 \underline{x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Si las partículas 1 y 2 tienen spin semi-entero los campos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  tienen signos indeterminados e independientes, de tal manera que la última integral de (39) tiene un signo indeterminado. Como por hipótesis (39) es observable (y por lo tanto tiene un valor único), se requiere

$$\int \psi_1^* \psi_2 d^3 \underline{x} = 0 \quad (40)$$

si las partículas tienen spin semi-entero. Por lo tanto dos partículas de spin semi-entero son ortogonales entre sí: no pueden estar en el mismo estado  $\psi$ . Esta restricción no se aplica a las partículas de spin entero. Esta es la conexión entre spin y estadísticas.

#### Modelo 7a. ¿Cuál es el origen de la fuerza $F$ ?

Si tomamos en serio el modelo anterior debemos explicar la fuerza (37) que mantiene al electrón en su órbita.

El electrón tiene tres tipos de interacción: electromagnética, débil y gravitacional. La fuerza  $F$  correspondiente a la solución (34) - (36) es igual a la fuerza electromagnética con que se repelen dos cargas  $-e$  en reposo separadas una distancia  $r = a/29$ ;

o a la fuerza gravitacional con que se atraen dos masas  $m$  separadas una distancia  $r = 1,7 \cdot 10^{-23} a$ ; o a la fuerza débil que ejercen entre sí dos partículas separadas una distancia  $r < 10^{-14} a$ . Para explicar el modelo del electrón requerimos  $r \approx a$  de manera que la fuerza  $F$  es probablemente de origen electromagnético.

Vamos a considerar la posibilidad de que el electrón se atrae a sí mismo! Seamos más explícitos: supondremos que el electrón "ve" el campo electromagnético producido por el mismo electrón cuando estaba en un punto anterior de la órbita. Esta suposición implica que la velocidad  $a$  del electrón es mayor que la velocidad de la luz  $c$ .

No es posible verificar esta hipótesis utilizando teoría electromagnética clásica debido a las siguientes razones:

a) Para distancias menores que  $\approx 10^{-14}$  metros la teoría electromagnética clásica es internamente contradictoria<sup>4</sup>.

b) Según la teoría electromagnética clásica una carga puntual con movimiento arbitrario genera un campo electromagnético de radiación proporcional a su aceleración y un campo de Coulomb<sup>4</sup>. La deducción de este campo electromagnético supone conocidas con certeza tanto la posición como la cantidad de movimiento de la carga puntual. Esta suposición clásica es incompatible con la mecánica cuántica.

c) Según la teoría electromagnética clásica una carga puntual acelerada radia energía electromagnética en forma continua. En cambio los experimentos indican que la radiación se efectúa en forma discreta: el electrón emite o absorbe fotones.

d) La teoría electromagnética clásica no es directamente válida para cargas cuya velocidad es mayor que  $c$ .

e) En teoría electromagnética clásica no hay fenómenos que son importantes a distancias menores que  $10^{-14}$  m de un electrón: creación y recombinación de pares electrón-positrón, polarización del vacío, fluctuaciones del campo electromagnético en el vacío, etc.

Para hacer plausible la hipótesis de que el electrón se atrae a sí mismo haremos un cálculo semi-clásico sencillo. El modelo se indica en la figura 1. Se utilizará el sistema inercial de referencia que está en reposo respecto al centro de la órbita.

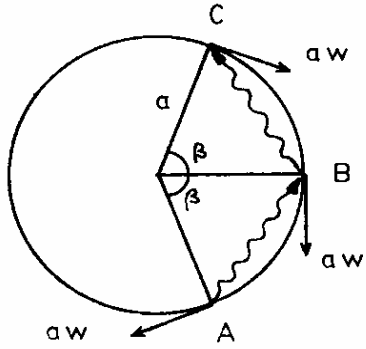


FIG. 1.- Modelo del electrón que se atrae a sí mismo.

El electrón al pasar por B absorbe un fotón que emitió cuando estaba en A y emite un fotón que reabsorberá cuando esté en C. En la emisión de un fotón de cantidad de movimiento  $p$  y energía  $U = pc$  no se conserva ni la cantidad de movimiento ni la energía. Por lo tanto de acuerdo al principio de incertidumbre el fotón deberá reabsorberse cuando recorra una distancia  $\Delta x \approx \hbar/p$  y cuando halla transcurrido un tiempo  $\Delta t \approx \hbar/U = \Delta x/c$ . Supongamos que en cada intervalo  $\Delta t$  el electrón absorbe y emite un fotón. La fuerza correspondiente es aproximadamente

$$F' = \frac{dp}{dt} = \frac{p \cdot 2 \sin(\beta/2)}{\Delta t} = \frac{\hbar c \cdot 2 \sin(\beta/2)}{(\Delta x)^2} = \frac{\hbar c \cdot 2 \sin(\beta/2)}{[2 a \sin(\beta/2)]^2} = \frac{\hbar c}{2 a^2 \sin(\beta/2)} \quad (41)$$

Esta fuerza está dirigida en la dirección radial de manera que nos interesa la solución (34) - (36). Los tiempos que demoran el electrón y el fotón en ir de A a B son iguales de manera que

$$(2\pi - \beta) a/ac = 2 a \sin(\beta/2)/c \quad (42)$$

De (34) y (42) se obtiene  $\beta = 27,6^\circ$ . Calculando las fuerzas (37) y (41) utilizando (34) se obtiene

$$F'/F = 1/\alpha \sin(\beta/2) = 0,345 \quad (43)$$

que es por lo menos del orden de magnitud de 1.

Si estos argumentos son válidos deberíamos poder deducir la ley de Coulomb. En efecto se obtiene inmediatamente

$$\frac{\mu_0 e^2 c^2}{4\pi r^2} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} \approx \frac{\hbar c}{r^2} \quad (44)$$

de donde se deduce

$$e \approx \pm \sqrt{\frac{4\pi \hbar}{\mu_0 c}} = \pm 1,88 \cdot 10^{-18} \text{ coulomb} \quad (45)$$

lo que es 12 veces el valor observado. Lo interesante de esta estimación es que la carga del electrón resulta independiente de  $m$ ,  $a$  ó  $a$  de manera que otras partículas tienen la misma carga que el electrón ó el positrón.

El modelo 7a predice  $L/\mu > 0$  para el electrón. Los libros dicen que  $L/\mu < 0$ . No sé si se ha medido el signo de  $L/\mu$ .

Especulaciones

Como es bien sabido es posible hacer experimentos de interferencia con electrones. Por lo tanto le asignamos una onda (o campo)  $\psi$  a un electrón.  $|\psi(\underline{r}, t)|^2 d^3 \underline{r}$  se in-

terpreta como la probabilidad de encontrar un electrón en el elemento de volumen  $d^3r$  en el instante  $t$ . El campo  $\psi$  satisface la ecuación de Schrödinger.

Esta descripción del electrón es válida si no hay un campo magnético y en el límite no-relativista. Si deseamos describir en más detalle al electrón le asignamos un campo de cuatro componentes  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ .

Las cuatro componentes del campo corresponden a los cuatro "estados internos" del electrón: electrón con spin hacia arriba, electrón con spin hacia abajo, positrón con spin hacia arriba y positrón con spin hacia abajo. El campo  $\psi$  satisface la ecuación de onda de Dirac. Esta ecuación predice  $Le/\mu m = 1$ .

Es posible (en principio) hacer experimentos de interferencia con átomos de hidrógeno. Por lo tanto asignamos una onda al átomo de hidrógeno. Esta onda tiene infinitas componentes: una para cada "estado interno" ( $n, l, m, m_s$ ) que puede tener el átomo de hidrógeno.

El mismo argumento puede aplicarse a una pelota de tenis. En este caso el número de componentes del campo es mucho mayor aún (si deseamos describir en todo detalle a la pelota de tenis).

El electrón tiene una estructura "interna". En este artículo hemos sugerido que el electrón se compone de una partícula puntual cargada que gira atrayéndose a sí misma con una velocidad mayor que la velocidad de la luz. Llamemos "lectrón" a esta partícula. Al lectrón le asignamos un campo  $\psi$  con menos de cuatro componentes. Como primer ensayo consideramos un campo con una sola componente, o sea un campo escalar. Este campo debe satisfacer una ecuación de onda con cuatro soluciones correspondientes a las cuatro componentes del campo de Dirac. Una posible ecuación de este tipo se considera en el Apéndice.

### CONCLUSION

Hemos intentado entender la estructura "interna" del electrón utilizando física clásica. Algunas de las ideas aquí presentadas son correctas; otras no lo son. El problema es saber cuáles son cuáles.

### APENDICE

Se propone una ecuación de onda para el lectrón.

En este apéndice se omiten los símbolos  $\hbar, c, \mu_0$  y  $\epsilon_0$ . Se hace el reemplazo  $-e\hbar + e$  de manera que en este apéndice  $e < 0$  para el electrón. La métrica tiene componentes diagonales 1, -1, -1, -1.

Para una partícula de masa  $M$  se tiene  $M^2 = U^2 - p^2 \equiv p_\mu p^\mu$ . Reemplazamos  $U$  por  $i\partial/\partial t$  (relación de Planck) y  $p$  por  $-i\nabla$  (relación de De Broglie) y multiplicamos por el campo escalar  $\psi$ . Obtenemos la ecuación de Klein - Gordon:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + M^2 \psi \equiv \partial_\mu \partial^\mu \psi + M^2 \psi = 0. \quad (1)$$

Mencionamos cuatro soluciones de la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas esféricas:

$$\psi = \pm e^{-iMt} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} = \pm e^{-iMt} e^{i\phi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta} r^{\frac{3}{2}}}$$

que representa un electrón en reposo de masa  $M$ ,

$$L_z = +1/2 \text{ y } (L)^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 3/4 ;$$

$\psi = \pm e^{-iMt} e^{-i\phi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta} r^{\frac{3}{2}}}$  que representa un electrón con  $L_z = -1/2$  ;

$\psi = \pm e^{iMt} e^{-i\phi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta} r^{\frac{3}{2}}}$  que representa un positrón con  $L_z = +1/2$  ; y

$\psi = \pm e^{iMt} e^{+i\phi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta} r^{\frac{3}{2}}}$  que representa un positrón con  $L_z = -1/2$ .

Estas soluciones no satisfacen la ecuación de Klein-Gordon en  $r = 0$  que es el punto singular de las coordenadas esféricas.

Para el lectrón proponemos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = (-i\partial_\mu - eA_\mu)\psi^* \cdot (i\partial^\mu - eA^\mu)\psi - M^2\psi^*\psi - \frac{1}{2} \partial_\mu A^\alpha \partial^\mu A_\alpha \quad (2)$$

que se suplementa con la condición de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

De este lagrangiano se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial^\mu - eA^\mu)\psi - M^2\psi = 0; \quad (3)$$

dos ecuaciones de Maxwell (las otras dos se cumplen idénticamente)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = J^\alpha; \quad (4)$$

la densidad de carga - corriente

$$J^\mu = e\psi^* \cdot (i\partial^\mu - eA^\mu)\psi - e(i\partial^\mu + eA^\mu)\psi^* \cdot \psi; \quad (5)$$

el tensor densidad de energía - cantidad de movimiento

$$T^{\mu\nu} = -i\partial^\nu \psi^* \cdot (i\partial^\mu - eA^\mu)\psi + (-i\partial^\mu - eA^\mu)\psi^* \cdot i\partial^\nu \psi - \partial^\nu A^\alpha \cdot \partial^\mu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}; \quad (6)$$

el vector energía - cantidad de movimiento

$$p^\nu = \int T^{0\nu} d^3x; \quad (7)$$

el momento angular orbital

$$L_{orb}^{\mu\nu} = \int (-T^{C\mu} x^\nu + T^{0\nu} x^\mu) d^3\underline{x} ; \quad (8)$$

y el momento angular intrínseco (spin)

$$S^{\mu\nu} = \int \{A^\mu \cdot \partial^0 A^\nu - A^\nu \cdot \partial^0 A^\mu\} d^3\underline{x} . \quad (9)$$

El problema (que no hemos resuelto) es encontrar soluciones de las ecuaciones de onda acopladas (3) - (4) de la forma

$$\psi = \pm e^{\pm i\omega t} e^{\pm i\phi/2} \sqrt{\sin\theta} R(r) \quad (10)$$

con  $A^\mu$  independiente del tiempo. El problema es no-lineal.

Para la solución  $\propto e^{-i\omega t}$  (si existe) se elige la normalización

$$\int 2(m - eA^0) \psi^* \psi d^3\underline{x} = 1 \quad (11)$$

de manera que la carga es  $+e$ ,  $I_z = L^1{}^2 = \pm 1/2$ ,

$$(L)^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 3/4, \quad S^{\mu\nu} = 0,$$

$$p^0 = m + \int \frac{1}{2} \partial_\mu A^\alpha \cdot \partial^\mu A_\alpha d^3\underline{x} , \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu_z = \pm \frac{e}{4m} \pm \frac{e^2}{2m} \int A^0 \psi^* \psi d^3\underline{x} \\ - e^2 \int \psi^* \psi \{x^1 A^2 - x^2 A^1\} d^3\underline{x} . \end{aligned} \quad (13)$$

Propongo este problema como tema de tesis.

#### Referencias.

- 1 Reviews of modern physics, Vol.52, N°2, Part II, (1980).
- 2 A.O.Barut, Physics Letters, Vol. 73B, N° 3, p.310 (1977).
- 3 H.Georgi and S.Glashow, Physics Today, Vol.33, N°9, p.30. (1980).
- 4 Landau y Lifshitz, "Teoría clásica de los campos", Editorial Reverté S.A., (1966).