

UM PROCEDIMENTO VERSÁTIL PARA O CÁLCULO DE
MALHAS DE TERRA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

GAMBIRASIO, G.
RIBEIRO, F.S.
Dept^a Eng^a Eletricidade
Escola Politécnica - USP

CARDOSO, J.R.
Dept^a Eng^a Eletricidade
Escola Politécnica - USP
Faculdade Eng^a Industrial - UNICEB

São Paulo, BRASIL

RESUMO

Neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos para estudar a distribuição de potencial elétrico na área de influência da malha de terra de uma subestação. A formulação é tridimensional, mas são também admitidos elementos bidimensionais e unidimensionais, que são úteis para representar tubulações ou caminhos metálicos da instalação. O método de solução descrito tem a vantagem de utilizar uma técnica de manipulação de matrizes esparsas, que não obriga à obtenção de matrizes de banda, como é tradicional no Método dos Elementos Finitos. É apresentado um exemplo, de caso real, onde são mostradas as curvas equipotenciais calculadas.

LISTA DE SÍMBOLOS

Grandezas Vetoriais

\vec{E} : vetor campo elétrico (V/m)
 \vec{J} : vetor densidade de corrente (A/m²)
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$: operador gradiente

Matrizes

K^e : matriz do elemento (k x k)
 K : matriz global (NN x NN)
 K : matriz global modificada (NN x NN)
 P : vetor coluna dos termos conhecidos (NN x 1)
 Φ : vetor dos potenciais dos nós (NN x 1)

Grandezas Escalares

A : área do elemento bidimensional triangular (m²)
 G : condutância do elemento unidimensional (S)
 L : comprimento do elemento unidimensional (m)
 NE : número do elemento
 N_i : função de forma do elemento
 NN : número de nós
 P^e : potência dissipada no elemento (W)
 R_0, R_1 e R_2 : resíduos de aproximação
 R_{at} : resistência de aterramento (ohm)
 $S_{at} = S_1 + S_2$: fronteira do domínio Δ
 V : volume do elemento tetraédrico (m³)
 w_0^m, w_1^m, w_2^m : funções peso; $m = 1, 2, \dots, NN$
 a_1, b_1, c_1, d_1 : coeficientes genéricos
 e : número do e-ésimo elemento
 g : condutividade superficial (S)
 k : número de nós (ou vértices) do elemento
 Δ : domínio em estudo
 a_i : coeficientes genéricos
 ϕ_i^r : potencial do vértice (ou nó) i (V)
 ϕ_i^m : potencial do ponto de defeito (V)
 ϕ_i^n : função potencial (V)

1. INTRODUÇÃO

A rede de apoio, constituída por uma linha de tubulações metálicas ("pipe-rack") que percorre a planta industrial, estará sujeita a potenciais adversos quando da ocorrência de um defeito para a terra em uma subestação próxima, bem como em um cabo cujo leito está na própria rede.

A obtenção da distribuição de potenciais em toda a extensão da rede de apoio, e na região que a circunda, não terá valor confiável se não forem consideradas as peculiaridades inerentes de um aterramento elétrico, quais sejam:

- não uniformidade do solo;
- efeito de malhas de aterramento próximos.

Os métodos analíticos de análise de sistemas de aterramento não são suficientemente precisos para assegurar um resultado confiável, devido à complexidade do sistema de aterramento em questão. Há a necessidade, portanto, de lançar-se mão de métodos numéricos que permitam levar em consideração todas as propriedades já citadas, sendo que o Método dos Elementos Finitos se apresenta, no momento, como a ferramenta mais poderosa, em vista da sua precisão, e facilidade de implantá-la em computador.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - Delimitação da Região a ser Estudada

A análise dos sistemas de aterramento pelo Método dos Elementos Finitos inicia-se delimitando a região a ser estudada, que é função das dimensões do sistema de aterramento em questão. A figura 1 mostra um domínio típico, onde as dimensões do mesmo estão indicadas em função das dimensões do sistema de aterramento.

Após a delimitação do domínio do problema, o domínio é subdividido em pequenos sub-domínios chamados elementos, sobre os quais são aplicadas as equações de campo. Tais sub-domínios são tridimensionais, tetraédricos, quando é discretizado o sub-solo, bidimensionais, triangulares quando se discretizam tanques metálicos presentes na região do sistema de aterramento, e finalmente elementos unidimensionais quando são discretizadas as hastas constituintes das malhas de terra e tubulações metálicas. A concentração desses elementos no domínio não é uniforme, devendo-se locar uma

quantidade maior de elementos onde se espera uma maior variação do potencial; tais regiões são aquelas próximas às malhas de terra e aterramentos naturais.

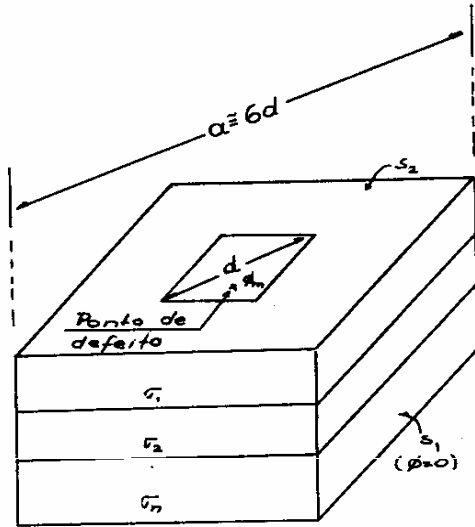


Fig. 1 - Domínio típico de um estudo de aterramento pelo Método dos Elementos Finitos

2.2 - Equações de Campo

A obtenção das distribuições de potenciais é decorrente da equação da continuidade das correntes estacionárias:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.1)$$

Como $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\vec{E} = -\nabla \phi$, a equação (2.1) pode ser escrita como segue:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (2.2)$$

A expressão (2.2) é a equação de Laplace não linear, que deve ser obedecida em todo o domínio do problema.

Na região mais afastada do sistema de aterramento o potencial é tomado como nulo, e no ponto onde ocorre o defeito o potencial atribuído é fixado num valor não nulo, de modo que se pode escrever:

$$\phi = \bar{\phi} \text{ em } S_1 \quad (2.3)$$

onde $\bar{\phi}$ vale zero na região mais afastada, e tem valor conhecido no ponto do defeito.

A outra parte da fronteira (S_2), onde há a interface solo/ar, a derivada de ϕ normal a S_2 é nula, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2 \quad (2.4)$$

O problema consiste em resolver a equação di-

ferencial (2.2), a qual está sujeita às condições de contornos expressas em (2.3) e (2.4).

Como o solo é não homogêneo, e o sistema de aterramento de qualquer simetria, a solução de (2.2) só é possível numericamente.

2.3 - Funções de Interpolação

O sub-solo, como foi citado, é discretizado em elementos tetraédricos. A figura 2 mostra um tetraedro genérico, com seus vértices numerados (localmente) de 1 a 4.

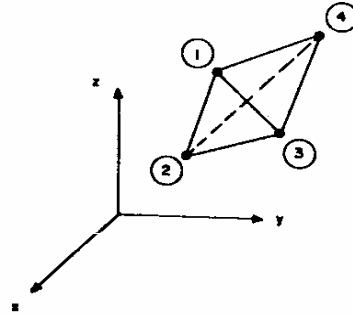


Fig. 2 - Tetraedro genérico

O valor do potencial num ponto qualquer no interior desse tetraedro será expresso em função dos potenciais em seus vértices, através de uma interpolação linear do tipo:

$$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (2.5)$$

Os coeficientes α_r ($r = 1, 2, 3, 4$) são obtidos em função dos potenciais nos quatro vértices do referido tetraedro, a partir da solução do seguinte sistemas de equações:

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (2.6)$$

onde ϕ_i é o potencial do vértice i , cujas coordenadas são:

$$(x_i, y_i, z_i); \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Resulta para os α_r uma expressão do tipo:

$$\alpha_r = \frac{1}{6V} [a_r \phi_1 + b_r \phi_2 + c_r \phi_3 + d_r \phi_4]$$

Por substituição dos α_r 's em (2.5) o potencial num ponto qualquer no interior do tetraedro resulta expresso por:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i \quad (2.7)$$

onde:

$$N_i = \frac{1}{6V} [a_i + b_i x + c_i y + d_i z] \quad (2.8)$$

As expressões dos coeficientes a_i , b_i , c_i , d_i e V são apresentadas no Apêndice.

Notar que N_1 terá a expressão acima indicada para qualquer ponto pertencente ao tetraedro considerado. Para os pontos fora deste tetraedro, N_1 é sempre nulo.

A presença de chapas metálicas, como aquelas utilizadas na construção de tanques de combustível, são discretizadas em elementos bidimensionais triangulares (outras formas poderão ser utilizadas). A figura 3 mostra um elemento triangular genérico, com seus vértices numerados (localmente) de 1 a 3.

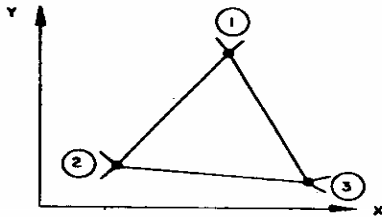


Fig. 3 - Elemento bidimensional triangular

Supondo-se, por simplicidade, que o triângulo está situado no plano xy , o potencial num ponto qualquer no interior desse elemento será expresso em função dos potenciais em seus vértices, através de uma interpolação linear do tipo:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.9)$$

Onde os coeficientes a_i 's são obtidos em função dos potenciais nos três vértices do triângulo, a partir da resolução do seguinte sistema de equação:

$$\phi_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i \quad (2.10)$$

onde ϕ_i é o potencial do vértice i , cujas coordenadas são:

$$(x_i, y_i); \quad i = 1, 2, 3$$

Seguindo-se o mesmo procedimento utilizado no caso tridimensional, resulta para o potencial no interior do elemento a expressão:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i \phi_i$$

com:

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (2.11)$$

Neste caso, também, a função N_i acima indicada é válida apenas para os pontos pertencentes ao elemento, sendo nula para os pontos externos. As expressões para o cálculo de A e dos a_i , b_i e c_i são dados no Apêndice.

As tubulações metálicas enterradas no solo serão representadas por elementos unidimensionais (segmentos de reta), onde o potencial no interior do referido elemento é expresso por uma interpolação linear do tipo:

$$\phi(x) = a_1 + a_2x, \quad (2.12)$$

na hipótese do elemento estar situado paralelamente ao eixo x .

Seguindo procedimento idêntico aos itens anteriores, o potencial no interior desse elemento é expresso em função dos potenciais em seus extremos através da expressão:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 N_i \phi_i \quad (2.13)$$

onde:

$$N_1 = \frac{1}{L}(x_2 - x); \quad N_2 = \frac{1}{L}(-x_1 + x) \quad (2.14)$$

e ϕ_i é o potencial do extremo i de abscissa x_i ($i = 1, 2$).

Aqui também, N_i só é definida para os pontos do elemento, sendo nula para os pontos externos ao mesmo.

2.4 - Método dos Resíduos Pesados

Após a discretização do domínio (sub-divisão em elementos tetraédricos, triangulares e unidimensionais) será procurada uma solução aproximada para os potenciais em todos os vértices de todos os elementos. A diferença entre esta solução aproximada e a exata é chamada Resíduo. É claro que a solução aproximada é tanto melhor quanto menores forem os Resíduos. Para minimizá-los, existem vários critérios. O critério que será aqui utilizado é o Método dos Resíduos Pesados [4], cuja formulação é feita como se segue.

Seja ϕ a solução aproximada procurada, a sua substituição em (2.2), (2.3) e (2.4) fornece os seguintes Resíduos de aproximação:

$$\begin{aligned} R_0 &= v \cdot (\sigma \nabla \phi) \text{ em } \\ R_1 &= \phi - \bar{\phi} \text{ em } S_1 \\ R_2 &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ em } S_2 \end{aligned}$$

No método dos Resíduos Pesados, impõe-se a condição, a ser satisfeita pela aproximação ϕ , que a soma das integrais em Δ , S_1 e S_2 dos Resíduos Pesados por 3M funções convenientemente escolhidas, seja nula, isto é:

$$\int_{\Delta} R_0 W_0^m d\Delta + \int_{S_1} R_1 W_1^m dS + \int_{S_2} R_2 W_2^m dS = 0 \quad (2.15)$$

$m = 1, 2, \dots, M$.

Com o processo de discretização, a expressão anterior deve ser escrita como segue:

$$\sum_{e=1}^{NE} \left[\int_{\Delta^e} R_0 W_0^m d\Delta + \int_{S_1^e} R_1 W_1^m dS + \int_{S_2^e} R_2 W_2^m dS \right] = 0 \quad (2.16)$$

$e = 1, 2, \dots, NE$.

No Método dos Elementos Finitos, toma-se M igual ao número de nós (ou vértices) de todo o domínio, ou seja, $M = NN$, e também; exige-se que a equação dos Resíduos Pesados (2.15) seja satisfeita em cada elemento separadamente, de modo que se pode escrever:

$$\int_{\Delta^e} R_0 W_0^m d\Delta + \int_{S_1^e} R_1 W_1^m dS + \int_{S_2^e} R_2 W_2^m dS = 0$$

Impõe-se ainda que a solução ϕ procurada seja exata sobre S_1^e , de modo que $R_1 = 0$ identicamente, resultando:

$$\int_{\Delta^e} v \cdot (\sigma \nabla \phi) W_0^m d\Delta + \int_{S_2^e} \frac{\partial \phi}{\partial n} W_2^m dS = 0 \quad (2.17)$$

Considerando-se as identidades:

$$v \cdot (W_0^m \sigma \nabla \phi) = W_0^m v \cdot (\sigma \nabla \phi) + \sigma \nabla W_0^m \cdot v \phi \quad (2.18)$$

$$\int_{\Delta^e} v \cdot (W_0^m \sigma \nabla \phi) d\Delta = \int_{S_1^e + S_2^e} \sigma W_0^m \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (2.19)$$

e escolhendo ainda $W_2^m = -\sigma W_0^m$ sobre S_2^e e W_0^m tal que seja nula sobre S_1^e , resulta apenas:

$$\int_{\Delta^e} \sigma \nabla W_0^m \cdot v \phi d\Delta = 0 \quad (2.20)$$

A escolha das funções W_0^m é efetuada agora, seguindo o Método de Galerkin, no qual se adota:

$$W_0^m = N_m \quad (2.21)$$

onde N_m são as funções de forma expressa em (2.8), (2.11) e (2.14), as quais satisfazem a condição:

$$W_0^m = 0 \text{ sobre } S_1^e \quad (2.22)$$

Lembrando que:

$$\phi = \sum_{i=1}^k N_i \phi_i \quad (2.23)$$

onde:

$$k = \begin{cases} 4 & \text{para elementos tetraédricos} \\ 3 & \text{para elementos triangulares} \\ 2 & \text{para elementos unidimensionais} \end{cases}$$

substituindo (2.21) e (2.23) em (2.20) resulta:

$$\int_{\Delta} \sigma \nabla N_m \cdot \sum_{i=1}^k \nabla N_i \phi_i d\Delta = 0 \quad m=1, 2, \dots, k \quad (2.24)$$

Nota-se que a expressão (2.24) constitui-se num Sistema de Equações de ordem k , o qual deve ser montado para cada elemento. Teremos portanto NE sistemas de equações (2.24) para todo o domínio.

2.5 - Formulação Matricial

A expressão (2.24) representada matricialmente é escrita como segue:

$$K^e \cdot \phi^e = 0; \quad e = 1, 2, \dots, NE \quad (2.25)$$

onde

$$(K^e)_{ij} = \int_{\Delta^e} \sigma \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Delta \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (2.26)$$

o qual assume diferentes valores para cada tipo de elemento. Note que a referida matriz é simétrica, pois:

$$(K^e)_{ij} = (K^e)_{ji}$$

a.) Elementos Tridimensionais Tetraédricos

$$(K^e)_{ij} = \frac{\sigma}{6V} [b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j]; \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

b.) Elementos Bidimensionais Triangulares

$$(K^e)_{ij} = \frac{\sigma}{4A} [b_i b_j + c_i c_j] \quad i, j = 1, 2, 3$$

Em casos práticos, a condutividade superficial g pode ser obtida pela expressão:

$$g = \sigma h(S)$$

onde σ é a condutividade da chapa condutora, e h é a espessura dessa chapa.

c.) Elementos Unidimensionais

$$(K^e)_{ij} = (-1)^{i+j} G; \quad i, j = 1, 2$$

onde G é a condutância do elemento.

Em casos práticos, a condutância G do condutor de seção reta S , comprimento L , e cujo material tem condutividade σ , é dado por $G = \sigma S/L(S)$.

2.6 - Montagem do Sistema Global de Equações

As NE equações matriciais (2.25), de dimensão $k \times k$, são expandidas em NE equações matriciais de dimensão $NN \times NN$ usando-se a tabela de correspondência entre a numeração local e a numeração global, como segue:

Para os elementos tridimensionais tetraédricos (figura 4), seus quatro vértices são numerados de duas formas: na numeração local, seus vértices são numerados de 1 a 4; na numeração global, devido à numeração sequencial

cial de todos os vértices do domínio de 1 a NN, os mesmos vértices terão números p, q, r, s, gerando, por exemplo, a seguinte tabela:

Numeração Local	1	2	3	4
Numeração global	q	p	r	s

Tab. 1 - Correspondência entre a numeração local e global

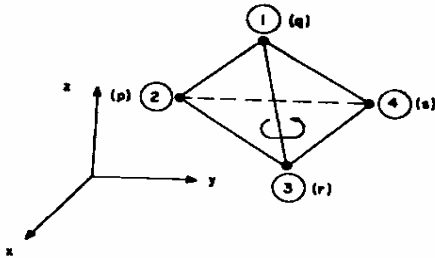


Fig. 4 - Numeração local e global no tetraedro

Dessa forma, a matriz K^e (4 x 4 para elementos tetraédricos), para um e fixado, é expandida numa matriz $NK \times NN$, terá os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
 K_{pp}^e &= K_{22}^e & K_{qq}^e &= K_{11}^e & K_{rr}^e &= K_{33}^e & K_{ss}^e &= K_{44}^e \\
 K_{pq}^e &= K_{qp}^e = K_{12}^e & K_{qr}^e &= K_{rq}^e = K_{13}^e & K_{rs}^e &= K_{sr}^e = K_{34}^e \\
 K_{pr}^e &= K_{rp}^e = K_{23}^e & K_{qs}^e &= K_{sq}^e = K_{14}^e \\
 K_{ps}^e &= K_{sp}^e = K_{24}^e
 \end{aligned}$$

Os demais elementos são nulos.

Para os elementos bidimensionais e unidimensionais, procede-se de forma semelhante. Resulta que nos casos de elementos bidimensionais e unidimensionais, as respectivas matrizes expandidas terão ordem (3 x 3) e (2 x 2) respectivamente, e terão 9 e 4 elementos, respectivamente.

De acordo com (2.16), a Matriz Global resultante K é obtida a partir da somatória em relação do índice e , das Matrizes dos elementos expandidos K^e , resultando numa única equação matricial, que representa um sistema de equações lineares $NN \times NN$, como segue:

$$K \cdot \Phi = P \quad (2.27)$$

Esse sistema é indeterminado (a matriz K é singular), mas é claro que ainda falta introduzir as condições de contorno, o que levará a indeterminação.

De fato, no sistema (2.27) algumas variáveis Φ_i tem valor conhecido, e devem ser

consideradas na solução. Tais variáveis são os potenciais dos vértices dos elementos sobre a fronteira S_1 . Após introduzida esta condição em (2.27), por manipulação algébrica, resulta o sistema de equações de ordem NN :

$$\bar{K} \cdot \Phi = P$$

A solução de (2.28) fornece os potenciais de todos os outros vértices do domínio.

2.7 - Método de Solução do Sistema de Equações

Por sua própria natureza, a matriz global é sempre carregada de elementos nulos. A engenharia tem se valido dessa característica na solução numérica dos sistemas lineares de equações decorrentes da aplicação do método dos elementos finitos. Se os nós do domínio forem adequadamente numerados resulta uma matriz de banda, resolvida por métodos clássicos. Tradicionalmente essa numeração tem exigido certa dose de habilidade, paciência e, não raro, muito tempo das equipes de técnicos: a banda deve ser a mais estreita possível.

Este trabalho apresenta um novo enfoque: a matriz global é armazenada e manuseada como matriz esparsa compactada, procedimento familiar aos engenheiros de sistemas de potência. Foi utilizado o método de listas concatenadas: três vetores de dimensão igual ao número de elementos não nulos da matriz (mais o número dos que deixarem de ser nulos no decorrer do processo numérico) armazenam o valor de cada elemento da matriz global e códigos que possibilitam identificar seu posicionamento. Mais três vetores de dimensão igual ao número de nós possibilitam o cálculo numérico, com a seguinte sequência de operações:

- 1.) separação dos nós envolvidos com as condições de contorno;
- 2.) ordenação dos nós;
- 3.) triangularização da matriz;
- 4.) correção dos termos conhecidos;
- 5.) substituição de trás para frente.

Com tal tratamento, elimina-se o problema prévio da numeração dos nós, pois isso torna-se indiferente. Há grande economia de memória, habilitando o uso de microcomputadores. Uma aplicação em um domínio dividido em 720 nós (720 equações a 720 incógnitas) foi realizada em microcomputador tipo PC com 640 KB de memória a custo muito baixo, viabilizando o estudo de muitas alternativas.

3. INFORMAÇÕES OBTIDAS PÓS-PROCESSAMENTOS

3.1 - Traçado das Equipotenciais

Os potenciais de real interesse no estudo dos sistemas de aterramento são aqueles dos nós situados na superfície do solo, a partir dos quais é possível extrair as linhas equipotenciais. O objetivo final é avaliar os valores dos potenciais de passo e de toque na instalação.

Suponhamos que na figura 5 são representados os vértices de um triângulo na superfície do solo, onde são conhecidos os valores dos potenciais.

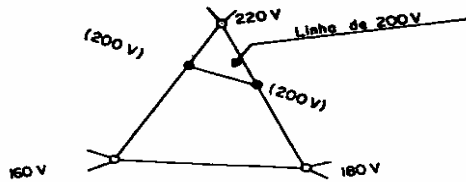


Fig. 5 - Potenciais na superfície do solo

Caso se deseje obter um trecho da equipotencial de 200 V, obtêm-se 2 pontos nas arestas do referido triângulo, por interpolação linear, que são unidos por um segmento de reta. Procurando todos os pontos de 200 V, seguindo o procedimento citado, e ligando-os por segmentos de reta, obtemos a equipotencial de 200 V desejada.

Com o traçado das equipotenciais, deve-se avaliar os potenciais de toque e de passo nas regiões onde há uma maior concentração das referidas linhas, permitindo assim tomar decisões locais para a solução do problema.

3.2 - Determinação da Resistência de Aterramento

A Resistência de Aterramento da Instalação é obtida a partir do cálculo da potência dissipada por efeito Joule em cada elemento constituinte da discretização.

Nos elementos tridimensionais e bidimensionais, calcula-se inicialmente, o campo elétrico no interior do elemento através da expressão:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3.1)$$

Lembrando que, nesses elementos, ϕ é representado através das funções de aproximação:

$$\phi = \sum_{i=1}^k N_i \phi_i \quad (3.2)$$

onde: $k = 4$ para elementos tetraédricos
 $k = 3$ para elementos triangulares,

resulta para os elementos tetraédricos:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 b_i \phi_i \\ E_y &= -\frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 c_i \phi_i \\ E_z &= -\frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 d_i \phi_i \\ E^2 &= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

e para os elementos triangulares:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{4A} \sum_{i=1}^3 b_i \phi_i \\ E_y &= -\frac{1}{4A} \sum_{i=1}^3 c_i \phi_i \\ E^2 &= E_x^2 + E_y^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

A potência dissipada em elemento tridimensional de índice e , de volume V , é dado por:

$$P^e = \sigma E^2 V \quad (W) \quad (3.5)$$

A potência dissipada em elemento bidimensional de índice e , de área A , é dado por:

$$P^e = g E^2 A \quad (W) \quad (3.6)$$

Para os elementos unidimensionais, tal potência é calculada pela expressão:

$$P^e = G(\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (3.7)$$

A somatória das potências dissipadas em todos os elementos fornece a potência total dissipada por efeito Joule no domínio em estudo, a qual se relaciona com a Resistência de Aterramento R_{at} através da expressão:

$$R_{at} = \frac{\phi_m^2}{\sum_{e=1}^N P^e} \quad (3.8)$$

onde ϕ_m é o potencial no ponto de ocorrência do defeito.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO - CONCLUSÃO

Foi preparado um programa auxiliar no estudo de uma situação específica: cálculo dos potenciais de passo e de toque em uma subestação industrial de 88 kV, e em suas vizinhanças. Perto da subestação há uma caldeira elétrica ligada a uma ponte metálica ("pipe-rack") que distribui vapor ao parque industrial. O solo sob as instalações é constituído por três estratos com condutividades diferentes, conforme está mostrado na figura 6.

Fig. 6 - Estratificação do solo

Foi selecionado um domínio de 300 x 200 m, com profundidade de 25 m, com a marcação de 720 nós, discretizado em 2310 elementos tetraédricos e 25 elementos unidimensionais. Os elementos unidimensionais representaram o "pipe-rack" e as hastas da malha, somando,

no total, cerca de 14000 dados de entrada. Para auxiliar o trabalho foi desenvolvida uma rotina alternativa que prepara automaticamente a maioria dos dados (geração parcial automática de elementos). O problema recaiu na resolução de um sistema linear de 720 equações a 720 incógnitas. Os cuidados com a compactação da matriz e manutenção de sua esparsidade permitiram o processamento em microcomputador tipo IBM-PC com 640 KB de memória, a custo muito baixo, viabilizando o estudo de várias alternativas.

A figura 7 apresenta as equipotenciais sobre a superfície do solo, obtidas pela aplicação do procedimento aqui exposto. A partir das equipotenciais foi possível estimar-se os potenciais de passo e de toque em toda a área considerada. Tais potências determinam a segurança das pessoas que caminham na região e que tocam em partes metálicas.

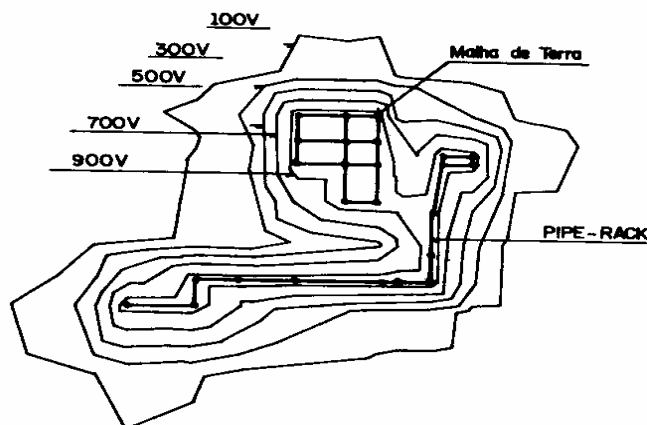


Figura 7 - Mapa das equipotenciais na superfície do solo

5. APÊNDICE

5.1 - Coeficientes da Expressão (2.8)

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad a_2 = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad a_4 = -\det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = -\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = -\det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_4 = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_4 = -\det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = -\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad d_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = -\det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad d_4 = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

5.2 - Coeficientes da Expressão (2.11)

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad a_2 = y_2 - y_3 \quad a_3 = x_3 - x_2$$

$$b_1 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad b_3 = x_1 - x_3$$

$$c_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad c_2 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] BATHE, K.J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1982, 735 p.
- [2] SILVESTER, P.P. & FERRARI, R.L. Finite Element for Electrical Engineers. Cambridge. Cambridge University Press, 1983, 207 p.
- [3] ZIENKIEWICZ, O.C. & MORGAN, K. Finite Element and Approximation. Swansea, Wales U.K., John Wiley & Sons, 1982, 328 p.
- [4] CARDOSO, J.R. Problemas de Campos Eletromagnéticos Estáticos e Dinâmicos: Uma Abordagem pelo Método dos Elementos Finitos. Tese de Doutorado apresentada à Escola Politécnica da USP, 1986, 159 p.
- [5] RIBEIRO, F.S. Microcomputador na Análise de Sistemas Elétricos: Procedimento Conversacional Aplicado a Fluxo de Potência. Tese de Doutorado apresentada à Escola Politécnica da USP, 1985, 109 p.
- [6] CARDOSO, J.R., GAMBIRASIO, G., RIBEIRO, F.S. Análise de Sistema de Aterramento pelo Método dos Elementos Finitos. VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia. São Carlos - SP, 1986.