DESACOPLAMIENTO PARA SISTEMAS CONTINUOS EN EL TIEMPO

BARRAGAN, MARCO ING.
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GRANIZO, EVELIO

RESUMEN

En general, en los sistemas multivariables con igual número de entradas y de salidas, cada entrada controla más de una salida y cada salida es controlada por más de una entrada. Por éste fenómeno, el cual se denomina acoplamiento, es muy difícil controlar un sistema multivariable.

Por lo tanto, en este trabajo se realiza el estudio de las tres técnicas para desacoplar un sistema multivariable: por matriz función de transferencia, por realimentación de estado, y por realimentación de salida. Los mismos que consisten en determinar un compensador de acuerdo a cada técnica, de tal forma que el sistema acoplado multivariable pueda convertirse en un desacoplado, permitiendo que cada entrada controle solamente una salida y que cada salida pueda ser controlada por una sola entrada.

INTRODUCCION

El desarrollo de técnicas para el diseño de sistemas de control multivariable es de considerable práctica, siendo un método particular de diseño, aquel que implica el uso de realimentacion para conseguir estabilidad de sistemas de control de lazo cerrado. Conjuntamente con este método es a menudo de interés saber si es o no posible conseguir que las entradas controlen a las salidas independientemente, esto es, que una sola entrada influya en una sola salida; es decir, obtener un sistema "desacoplado".

En un sistema multivariable de orden **n**, con **m** entradas y **m** salidas, en el cual se asume que $m \geq n$, la matriz función de transferencia es $\underline{G}(s)$, que relaciona la entrada $\underline{u}(s)$ y la salida $\underline{y}(s)$ con la siguiente ecuación:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}(s) * \underline{u}(s), \qquad (1)$$

se tiene que cada entrada controla más de una salida. Por este fenómeno, el cual se denomina "acoplamiento", es generalmente muy difícil de controlar un sistema multivariable. Por lo tanto, en algunos casos para obtener un sistema multivariable desacoplado, la idea es diseñar un controlador, el cual permita que el sistema acoplado multivariable pueda convertirse en un sistema desacoplado.

Para que un sistema multivariable sea desacoplado, la matriz función de transferencia debe ser diagonal y no singular.

Ya conseguido el desacoplamiento de un sistema multivariable, puede obviamente ser analizado usando las técnicas clásicas para sistemas de una entrada - una salida.

Una de las maneras para determinar las condiciones necesarias y suficientes para el "desacoplamiento" de un sistema lineal invariante en el tiempo, de **m** entradas y **m** salidas, es mediante la realimentación de estado. Se puede determinar la clase Φ de todas las matrices de realimentación que desacoplan el sistema. Además, se determina el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados para el sistema desacoplado y las configuraciones de polos de lazo cerrado deseados, mientras simultáneamente se desacopla el sistema.

Pero como el estado no se puede medir directamente, es deseable conocer si un sistema puede ser descoplado usando realimentación de salida. Si es posible el desacoplamiento y no es estable, para conseguir la estabilidad a la respuesta deseada puede ser necesario construir un compensador o un observador. Por consiguiente, se determinan condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento de sistemas lineales multivariables usando realimentación de salida

1.- TECNICAS DE DESACOPLAMIENTO

Como se ha visto, muchos sistemas de control de procesos tienen entrada multiple y salida múltiple, de las que, por lo general, nos interesa que las modificaciones en cada entrada de referencia afecten solamente a cada salida. Si se pudiera lograr esta ausencia de interacción, sería más fácil mantener cada valor de salida a un nivel constante deseado en ausencia de perturbaciones externas, es decir, sería mas fácil realizar el diseño del sistema de control.

En general, se tienen tres técnicas para desacoplar sistemas multivariables, más empleadas en la práctica de Control Moderno, que son:

- Por matriz función de transferencia.
- Por realimentación de estado.
- Por realimentación de salida.

Cada una de las técnicas mencionadas tienen sus ventajas y sus inconvenientes, las cuales serán analizadas, al determinarse, en la siguiente sección, las condiciones necesarias y suficientes para que se produzca el desacoplamiento de los sistemas multivariables.

1.1.-POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

Desacoplar un sistema significa, desde el punto de vista de matriz función de transferencia, diagonalizar la matriz $\underline{G}(s)$ de lazo cerrado, para poder determinar la respuesta del sistema solamente en función de una sóla entrada, es decir, obtener que una salida dependa de una sóla entrada.

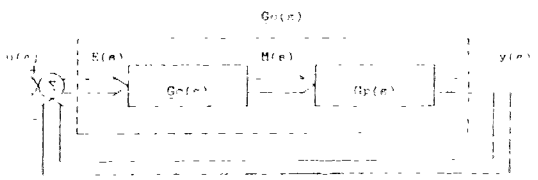

Figura: 1.- Sistema multivariable con realimentación unitaria y compensador serie

donde:
$\underline{u}(s)$ = Vector de entrada n dimensional
$\underline{y}(s)$ = Vector de salida n dimensional.

$G_p(s)$ = Matriz función de transferencia de dimensión (n x n) de una planta.
$H(s)$ = Matriz de lazo de realimentación, de dimensión (n x n).
$E(s)$ = Es el error, de orden n.
$M(s)$ = Es la nueva entrada de la planta $G_p(s)$.

De acuerdo al sistema realimentado de la figura (1), se tiene que:

$$G(s) = [\, I + G_p(s)\, H(s)\,]^{-1} G_p(s) \qquad (2)$$

donde:
$G(s)$ = Matriz función de transferencia de lazo cerrado

Se desea añadir un compensador serie $G_c(s)$, el mismo que se expresa como una matriz de dimensión (n x n), tal que las n entradas y las n salidas estén desacopladas, entonces la matriz función de transferencia de lazo cerrado debe ser diagonal, es decir, existe una matriz $G_d(s)$ tal que:

$$G_d(s) = \mathrm{diag}[g_{d11}(s) \ \ldots \ g_{dnn}(s)] \qquad (3)$$

Por facilidad se considera el caso en que la realimentación $H(s)$ es la matriz identidad, entonces de la ecuación (2):

$$G(s) = [\, I + G_p(s)\,]^{-1} G_p(s) \qquad (4)$$

Para diagonalizar el sistema, añadimos un compensador $G_c(s)$ como se muestra en la figura 1.

$G_o(s)$ es la matriz función de transferencia de paso directo, cuando se añade un compensador, siendo:

$$G_o(s) = G_d(s)\ [\, I - G_d(s)\,]^{-1} \qquad (5)$$

El compensador serie $G_c(s)$ que diagonaliza el sistema, está dado por:

$$G_c(s) = G_p^{-1}(s)\ G_o(s) \qquad (6)$$

La determinación de $G_c(s)$ es bastante fácil. Porque $G_d(s)$ es conocida por imposición de diseño para desacoplamiento, y además debe satisfacer cada término de la diagonal de $G_d(s)$ con las especificaciones de funcionamiento dadas por el diseñador para que cumpla el sistema con: exactitud, estabilidad relativa y velocidad de respuesta. Entonces, se debe calcular $G_o(s)$ con la ecuación (5), y a partir de $G_o(s)$ calcular $G_c(s)$ con la ecuación (6), ya que se conoce también $G_p(s)$.

1.2.- POR REALIMENTACION DE ESTADO.

Los sistemas de control multivariables, en general, exhiben interacción o acoplamiento entre varios pares entrada-salida. Lo no deseable de esta interacción nos lleva a determinar las condiciones necesarias y suficientes para su desacoplamiento, usando realimentación de estado.

El sistema considerado es lineal e invariante en el tiempo de **m** entradas y **m** salidas, y puede ser descrito por el conjunto familiar de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \qquad (7\ a)$$

$$y = C\,x \qquad (7\ b)$$

donde:
x = Es un vector de estado de orden n.
u = Es un vector de entrada (o control) de orden **m**.
y = Es un vector de salida de orden **m**.
A, B, C, son matrices constantes de orden (n x n), (n x m) y (m x n).

Se asume que $m \le n$.

La configuración del controlador que se usará, es el que se muestra en la figura 2:

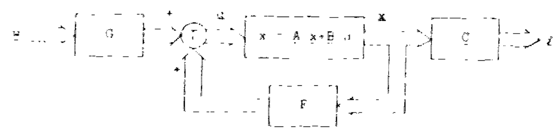

Figura: 2 .- Sistema multivariable de realimentación de estado.

Y consiste de una matriz F de orden (**m x n**) operando sobre las variables de estado que son realimentadas, y una matriz G de orden (**m x m**) operando sobre las entradas del sistema en lazo cerrado. Esto es equivalente a usar la ley de control:

$$u = F\,x + G\,w \qquad (8)$$

donde w representa el nuevo vector de control de orden **m**.

Con esta ley de control, el sistema de lazo cerrado es desacoplado si su función de transferencia:

$$G_c(s) = C\,(\, s\,I - A - B\,F\,)^{-1} B\,G \qquad (9)$$

es diagonal e invertible.

Ahora bien, desacoplar una salida de un sistema por realimentación de variables de estado, quiere decir, diseñar el controlador tal que en el sistema de lazo cerrado solo una entrada afecta a esa salida específica y esta entrada no afecta a ninguna otra salida en el sistema. Este diseño se realiza con el requerimiento de que la matriz de entrada G sea no singular.

El sistema de lazo cerrado por realimentación de variables de estado se consigue sustituyendo la ley de control (8) en (7).

Entonces el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{x} = (\, A + B\,F\,)\,x + B\,G\,w \qquad (10\ a)$$

$$y = C\,x \qquad (10\ b)$$

se llama **realimentación lineal de variables de estado.**

Por otro lado, sea $d_1, d_2, \ \ldots \ , d_m$ los enterosdados por:

$$d_i = \min\{\, j : C_i A^j B \neq 0 \ , j = 0, \ldots, n-1 \,\} \qquad (11\ a)$$
o
$$d_i = n - 1 \ \text{ si } C_i A^j B = 0 \ , \text{ para todo } j. \qquad (11\ b)$$

donde C_i significa la i-ésima fila de C.

Entonces un simple cálculo muestra que:

$$C_i(A + BF)^k = C_i A^k \quad k=0,1,\ldots,d_i \tag{12 a}$$

$$C_i(A + BF)^k = C_i A^{d_i}(A + BF)^{k-d_i}$$

$$,k = d_i + 1,\ldots, n \tag{12 b}$$

Para $i = 1,2,\ldots,m$. La aplicación de la realimentación de estado (10) y una diferenciación repetida junto a las ecuaciones (12), se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} y_i^{(n)} = {} & C_i(A + BF)^n x + C_i(A + BF)^{n-1}BGw \\ & + C_i(A + BF)^{n-2}BG\dot{w} + \ldots + \\ & + C_i(A + BF)^{d_i}BGw^{(n-d_i-1)}, \end{aligned} \tag{13}$$

donde:
y_i, $i=1,2,\ldots,m$, es la i-ésima componente de y.

En vista del teorema de Cayley - Hamilton,

$$(A + BF)^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(F)(A + BF)^k \tag{14}$$

Donde $p_k(F)$ son escalares dependientes de F.

Entonces, x puede ser eliminado de la relacion (13) para dar:

$$y_i(n) - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(F)\, y_i(k) = tr\, L^i\{F,G\}\Omega \tag{15}$$

donde $tr(.)$ denota el trazo de una matriz.

Sea Ω la matriz $(m \times n)$ dado por:

$$\Omega = [\, w \mid w^{(1)} \mid \ldots \mid w^{(n-1)} \,]. \tag{16}$$

y sea $L^i\{F,G\}$ la matriz $(n \times m)$ dada por:

$$L^i\{F,G\} = \begin{bmatrix} C_i[(A+BF)^{n-1} - p_{n-1}(F)(A+BF)^{n-2} - \ldots - p_{d_i+1}(F)(A+BF)^{d_i+1} - p_{d_i}(F)(A+BF)^{d_i}]BG \\ C_i[(A+BF)^{n-2} - p_{n-1}(F)(A+BF)^{n-3} - \ldots - p_{d_i+2}(F)(A+BF)^{d_i}]BG \\ \vdots \\ C_i[(A+BF)^{d_i}]BG \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

donde 0 es una matriz cero consistente con el orden de $L^i\{F,G\}$.

Si E_{ij} denota la matriz $(m \times m)$ con 1 en la ij-ésima posición y ceros en otro lado, entonces $E_{ii}\,\Omega$ es una matriz $(m \times n)$ en la que la i-ésima fila es idéntica a la i-ésima fila de Ω y las demás filas son cero. La matriz $E_{ii}\,\Omega$ será denotada por Ω^i. La siguiente definición puede ser ahora hecha.

Definición.- Las matrices F y G, con G no singular, desacopla el sistema (7) si

$$1.-\ y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(F)\, y_i^{(k)} = tr(L^i\{F,G\}\Omega) = $$
$$= tr(L^i\{F,G\}\Omega^i)$$
$$,i = 1,2,\ldots,m \tag{18 a}$$

$$2.-\ tr(L^i\{F,G\}\Omega) \neq 0 \quad ,i = 1,\ldots,m \tag{18 b}$$

1.2.1.- Teorema Principal.

Con la teoría anterior, es posible establecer y probar un teorema que dé las condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento.

1.2.1.1.- Teorema 1.-

Sea B^* la matriz $(m \times m)$ dado por:

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1}B \\ C_2 A^{d_2}B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m}B \end{bmatrix} \tag{19}$$

Entonces hay un par de matrices F y G que desacoplan el sistema (7) si y sólo si

$$\det B^* \neq 0 \quad , \tag{20}$$

es decir, si y sólo si B^* es no singular.

" Prueba 1 ": Supóngase que B^* es no singular. Entonces se afirma que el par

$$F^* = -B^{*-1}A^* \tag{21 a}$$

$$G^* = B^{*-1} \tag{21 b}$$

donde:

$$A^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

desacopla (7).

"Prueba 1":En vista de (12),

$$C_i(A + BF^*)^{d_i+1} = C_i A^{d_i+1} + C_i A^{d_i} BF^*$$

Pero $C_i A^{d_i}B$ es simplemente la i-ésima fila de B^* y resulta que:

$$C_i A^{d_i} BF^* = -B_i^* B^{*-1} A^* = -A_i^* = -C_i A^{d_i+1}$$

donde B_i^* y A_i^* son las i-ésimas filas de B^* y A^*, respectivamente. Entonces,

$$C_i\,(A + BF^*)^{d_i+k} = 0 \ .$$

Para cualquier entero positivo k. De forma similar resulta que

$$C_i\,(A + BF^*)^{d_i}B\,B^{*-1} = B_i^* B^{*-1}$$

Y entonces,

$$L^i\{F^*,G^*\} = \begin{bmatrix} -p_{d_i+1}(F^*)\,B_i^* B^{*-1} \\ -p_{d_i+2}(F^*)\,B_i^* B^{*-1} \\ \vdots \\ B_i\, B^{*-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

No obstante, $B_i^* B^{*-1} = I_i$,es un vector fila con 1 en el i-ésimo lugar y ceros en cualquier otro, y así

$$tr(L^i\{F^*,G^*\}\Omega^i) = -p_{d_i+1}(F^*)w_i - $$
$$-p_{d_i+2}(F^*)w_i^{(1)} - \ldots + w_i^{(n-d_i-1)} \tag{23 a}$$

$$tr(L^i\{F^*,G^*\}\Omega) = tr(L^i\{F^*,G^*\}\Omega^i) \neq 0 \tag{23 b}$$

En otras palabras, F^*, G^* desacoplan (7).

" Prueba 2 ": Ahora supóngase que hay un par de matrices F , G que desacoplan (7). Entonces de (12 a), sigue que:

$$C_i(A + B F)^{d_i} B G = B_i^* G \qquad ,i = 1,\ldots,m$$

Puesto que, si el producto $C_i A^j B=0$ para todo j implicaría que $tr(L^i\{F,G\}\Omega)=0$, contradiría el hecho que F y G desacoplan (7); es claro que para $j=d_i$ se tiene que $C_i A^{d_i} B \neq 0$, y por lo tanto $B_i^* = C_i A^{d_i} B \neq 0$ para $i = 1,\ldots,m$. Además, como G es no singular, se cumple que $B_i^* G \neq 0$ para todo i. Puesto que (18 a) se satisface, $B_i^* G$ es un vector fila de orden **m** de la forma $\alpha_i I_i$ con $\alpha_i \neq 0$, de otra forma habrían $w_j^{(k)}$, $j \neq i$, términos en la $tr(L_i\{F,G\}\,\Omega$, y entonces $B_i^* G = \alpha_i I_i$. Entonces,

$$B^* G = diag[\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_m\ ] \qquad (24)$$

donde:
$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0$$

Entonces, B^* es no **singular** puesto que G lo es.

La base para la selección de F^* y G^* en la prueba del Teorema 1 es la siguiente observación.

Observación.- Puesto que (15) implica que:

$$y_i^{(d_i+1)} = C_i(A + B F)^{d_i+1} x + C_i A^{d_i} B G w$$

que puede también ser reescrita en la forma:

$$Y^* = (A^* + B^* F) x + B^* G w \qquad (25)$$

donde Y^* es el vector de orden **m** con componentes $y_i^{(d_i+1)}$, está claro que la selección $F = F^*$ y $G = G^*$ lleva a:

$$Y^* = w$$

o equivalente a:

$$y_i^{(d_i+1)} = w_i \qquad (26)$$

Precaución.- La ecuación (26) no representa el sistema desacoplado, ya que en general, envuelve la cancelación de ceros. Las ecuaciones del sistema desacoplado están dadas por (18), o en la forma de estado como,

$$\dot{x} = (A + B F) x + B G w$$

$$y = C x$$

donde F y G son el par de desacoplamiento.

A continuación se determinará: el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados para el sistema desacoplado; qué tan arbitrariamente pueden ser especificados; y qué tan fácilmente puede ser desarrollado un algoritmo para especificar estos polos.

1.2.2.- <u>Clases de matrices de desacoplamiento</u>.

Sea F una matriz (m x n) y sea G una matriz (m x m) no singular. Bajo la suposición de que (7) puede ser desacoplada, se determinarán las condiciones necesarias y suficientes para que F y G sean un par de desacoplamiento. Estas condiciones resultan ser independientes de G de tal forma que tendrá sentido hablar de la clase Φ de matrices F que desacoplen (7).

Definición - Sea $Q^i(F)$ la matriz (**n** x **m**) dada por:

$$Q^i(F) = \begin{bmatrix} C_i\,(A + B F)^{n-1} B \\ C_i\,(A + B F)^{n-2} B \\ \vdots \\ C_i\,(A + B F)^{d_i} B \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ,i = 1,\ \ldots\ ,m \qquad (27)$$

donde 0 es una matriz cero consistente con el orden de $Q^i(F)$.

Sea $P^i(F)$ la matriz (n x n) dado por

$$P^i(F) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -p_{n-1}(F) & \ldots & -p_{d_i+1}(F) & \\ 0 & 1 & \ldots & -p_{d_i+2}(F) & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ \hline & & 0 & & I \end{array}\right] \qquad ,\ i = 1,\ \ldots\ ,m \qquad (28)$$

donde los $p_k(F)$ son los coeficientes del polinomio característico de (A + B F), es decir,

$$(A + B F)^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(F)\,(A + B F)^k\ .$$

I es la matriz identidad consistente con el orden de $P^i(F)$.

Puesto que $P^k(F)$ es no singular, resulta que el producto $P^i(F)\,Q^i(F)$ es la matriz (n x m) que tiene el mismo rango de $Q^i(F)$. Nótese también que:

$$L^i\{F,G\} = P^i(F)\,Q^i(F)\,G$$

donde $L^i\{F,G\}$ es definida por (17), entonces,

$$rango[L^i\{F,G\}]=rango[Q^i(F)],i=1\ldots,m \qquad (29)$$

En vista de la definición de desacoplamiento, puede establecerse el siguiente teorema.

1.2.2.1.- Téorema 2.-

Si el par F , G desacopla (7), entonces el rango de $Q^i(F)$ es uno para cualquier i; inversamente, si el rango de $Q^i(F)$ es uno para todo i y si B^* es no singular, entonces el par F, B^{*-1} desacopla el sistema (7).

" Prueba 1 ".- Supóngase que F , G desacopla (7). Entonces,

$$tr(L^i\{F^*,G^*\}\Omega) = tr(L^i\{F^*,G^*\}\Omega^i) \neq 0$$

para todo i donde Ω es la matriz (m x n) dada por:

$$\Omega = [\ w \mid w^{(1)} \mid \ldots \mid w^{(n-1)}\ ]$$

Puesto que Ω es arbitrario, la i-ésima columna de $L^i\{F,G\}$ es un vector no cero, mientras que toda otra columna de $L^i\{F,G\}$ es vector cero. Por lo tanto, resulta que $L^i\{F,G\}$ tiene rango uno, y entonces, por (28) el **rango**$[Q^i(F)] = 1$.

" Prueba 2 ".- Ahora supóngase que rango $[Q^i(F)] = 1$ para todo i y que B^* es no singular. Puesto que:

$$C_i(A + B F)^{d_i}B = C_iA^{d_i}B = B_i^* \neq 0$$

Por la definición de d_i, donde B_i^* es la i-ésima fila de B^*, resulta que,

$$Q^i(F) = \begin{bmatrix} \alpha_1^i B_i^* \\ \alpha_2^i B_i^* \\ \cdot \\ \cdot \\ B_i^* \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

y entonces que:

$$Q^i(F)\ B^{*-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & \alpha_1^i & & \\ & & \alpha_2^i & & \\ 0 & \ldots & \cdot & \ldots & 0 \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \end{array}\right]$$

i-ésimo lugar

tiene solo una columna i-ésima diferente de cero. Entonces

$$\mathrm{tr}(L^i\{F,B^{*-1}\}Q) = \mathrm{tr}(P^i(F)Q^i(F)B^{*-1}Q) = \mathrm{tr}(P^i(F)Q^i(F)B^{*-1}Q^i) \neq 0$$

y de esta forma el par F, B^{*-1} desacopla (7).

1.2.2.2.- <u>Corolario 1</u>.

Si el par F, G desacoplan (7), entonces hay una matriz diagonal Δ tal que $G = B^{*-1}\Delta$.

" Prueba ": Si F , G desacopla (7), entonces Q^i (F) está dado por (30) y

$$Q^i(F)\ G = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & \tau^i\ \alpha_1^i & & \\ & & \tau^i\ \alpha_2^i & & \\ 0 & \ldots & \cdot & \ldots & 0 \\ & & \tau^i & & \\ & & 0 & & \end{array}\right]$$

donde $\tau^i \neq 0$, $i = 1,\ldots,m$. Por lo tanto resulta que $B^*\ G = \mathrm{diag}[\tau^1,\ldots,\tau^m]$, y el corolario se establece.

1.2.2.3.- <u>Corolario 2</u>.

Si el par F , G desacoplan (7), entonces hay una matriz diagonal Γ, tal que:

$$F\ B = B^{*-1}\{\Gamma\ A^{**} - A^*\}\ B \qquad (31)$$

donde: A^{**} y A^* vienen dadas por,

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1\ A^{d_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_m\ A^{d_m} \end{bmatrix} ,A^* = A^{**}A \qquad (32)$$

" Prueba ": El corolario es una consecuencia inmediata de las ecuaciones:

$$C_i(A + B\ F)^{d_i+1}B = C_i(A + B\ F)^{d_i+1}B$$

$$C_i(A + B\ F)^{d_i+1}B = \sigma_i\ C_i\ A^{d_i}B.$$

En resumen, hasta aquí se ha demostrado que la no singularidad de B^* es una condición necesaria para la existencia de un par de desacoplamiento F , G. Además, el conjunto de todos los pares F , G que desacolan (7) consiste de matrices F tales que su rango $[Q^i(F)] = 1$ para todo i, y G tal que $G = B^{*-1}\Delta$, donde Δ es diagonal y no singular.

1.2.3.- <u>Ubicación de polos deseados de lazo cerrado. (Procedimiento de síntesis)</u>

El Teorema 2 provee un procedimiento para determinar Φ, la clase de todas las matrices de realimentación F que desacoplen (7). No obstante, la aplicación directa de la condición, rango$[Q^i(F)]=1$ para todo i, resulta solo en restricciones ubicadas en algunos de los **mn** parámetros de F. Pero todavía se requiere un procedimiento para especificar los polos del sistema de lazo cerrado, mientras se desacopla simultáneamente (7) usando una apropiada matriz de realimentación $F \in \Phi$.

En particular, supóngase que M_k, $k=0,\ldots,\delta$ son matrices $(m \times m)$. Entonces la selección de:

$$F = B^{*-1}[\ \sum_{k=0}^{\delta} M_k\ C\ A^k - A^*\ ]$$

$$G = B^{*-1}$$

será, por (25) llevado a:

$$Y^* = \sum_{k=0}^{\delta} M_k\ C\ A^k x + w$$

Si $\delta = \max d_i$ y los M_k son adecuadamente escogidos, es decir, $M_k=\mathrm{diag}[m_k^1,\ldots,m_k^m]$ $i = 1,\ldots,m$,entonces lo anterior puede ser escrito de la forma:

$$Y^* = \sum_{k=0}^{\delta} M_k\ y_i^{(k)} + w$$

o

$$y_i^{(d_i+1)} = m_0^i\ y_i + m_1^i\ y_i^{(1)} + \ldots + m_{d_i}\ y_i^{(d_i)} + w_i \qquad ,i = 1,\ \ldots,m \qquad (33)$$

indica que F , G desacoplan (7) y que $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de los de lazo cerrado pueden ser variados modificando el M_k. Por ende, otras selecciones de M_k llevarán a otras configuraciones de polos de lazo cerrado.

1.2.3.1.- <u>Lema</u>.-

Sea $\mathbf{K}$ la matriz $([\, m + \sum_{i=1}^{m} d_i \,] \times n)$ dado por:

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1} \\ \mathbf{C}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m} \end{bmatrix} .
$$

Entonces, rango $[\, \mathbf{K} \,] = m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ y, por ende, $m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq n$.

" Prueba ": Sea $\mathbf{K}_i$ que denote la i-ésima fila de $\mathbf{K}$, y sea r_i escalares arbitrarios tales que:

$$
\sum_{i=1}^{\tau} r_i \mathbf{K}_i = 0 \qquad (34)
$$

donde: $\tau = m + \sum_{i=1}^{m} d_i$

Para establecer el Lema, solo se necesita probar que (34) implica que cada $r_i = 0$. Esto resulta directamente de (34) por postmultiplicaciones sucesivas por $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{\delta}\,\mathbf{B}$, y el hecho que $\mathbf{B}^*$ es no singular.

Ahora sea p que denota el número de polos de lazo cerrado que puede ser especificado durante el desacoplamiento, y sea **f** lo que denota el número de parámetros libres (entradas) en una matriz de desacoplamiento $\mathbf{F}$. Entonces el lema y (33) combinan para dar:

$$
m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq p \leq n
$$

$$
m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq f
$$

Asi pues, se tiene las siguientes características:

Si $m + \sum_{i=1}^{m} d_i = n$, entonces cualquier n de los polos de lazo cerrado pueden ser ubicados arbitrariamente, mientras simultáneamente se desacopla el sistema.

También, si $m + \sum_{i=1}^{m} d_i = f$,

entonces (33) dan directamente significado físico a los parámetros libres en $\mathbf{F}$.

Si $f > m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ o $f > n$, por lo que puede ser posible especificar más $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de los polos de lazo cerrado.

En ésta situación, es a menudo ventajoso calcular la Matriz Función de Transferencia en lazo cerrado, sabiendo que $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{*-1}$, entonces,

$$
\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{C}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{F})\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{*-1}
$$

con f entradas en $\mathbf{F}$ mantenidas arbitrariamente.

Por último, el número de polos de lazo cerrado,

$$
m + \sum_{i=1}^{m} d_i
$$

no puede exceder a n, debido a que el orden del sistema está dado por el número de polos, que en este caso es n.

Ejemplo.-

Sea el sistema:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Entonces,

$$
\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Puesto que $\mathbf{B}^*$ es no singular, el sistema puede ser desacoplado. El conjunto Φ de todas las matrices que desacoplan el sistema puede ser obtenido, para todas las matrices $\mathbf{F}$ de orden (2×3) tal que rango$[\mathbf{Q}^i(\mathbf{F})] = 1$.

$$
\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{11} & -f_{12} & -f_{13} \end{bmatrix}
$$

existiendo $f = 3$ parámetros libres en la matriz $\mathbf{F}$.

La forma más general de la matriz función de transferencia es:

$$
\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{C}\,[\, s\,\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{F} \,]^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{*-1}
$$

$$
= \frac{\begin{bmatrix} s^2+(-5+2f_{12})\,s + \\ +(6-6f_{12}+2\,f_{13}) & 0 \\ 0 & (s-1-2f_{11}) \end{bmatrix}}{(s - 1 - f_{11})\,[s^2-(5 - 2\,f_{12})\,s + \\ + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13})]}
$$

1.3.- POR REALIMENTACION DE SALIDA.-

Puesto que la realimentación de salida es sólo un caso especial de la realimentación de variables de estado, de acuerdo a la **figura** 3:

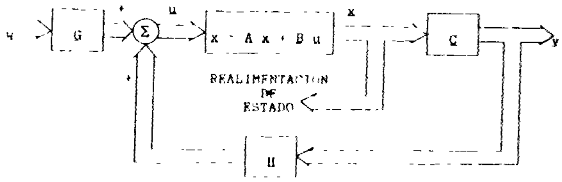

Figura 3 .- Sistema multivariable de realimentación de salida.

Es decir,

$$\underline{u} = \underline{H}\,\underline{y} + \underline{G}\,\underline{w}$$

con $\underline{H}\,\underline{C}$ reemplazando a $\underline{F}$, puede ser desacoplado (7) usando realimentación de salida si y sólo si,

1.- $\underline{B}^*$ es no singular, y
2.- Hay una matriz $\underline{H}$ (m x m) tal que rango$[\underline{Q}(\underline{H}\,\underline{C})] = 1$ para $i = 1,\dots,m$.

Estas condiciones proveen una prueba conveniente para saber si puede o no un sistema ser desacoplado usando realimentación de salida.

Pero en general, el desacoplamiento por realimentación de estado, no necesariamente implica desacoplamiento por realimentación de salida. Si bien un sistema puede ser desacoplado **usando** realimentación de salida, algo de la **flexibilidad** de los polos de lazo cerrado especifi**cados se** perderá. Entonces la realimentación de **estado**, con **realimentación** de salida no es equi**valente** para el desacoplamiento de **sistemas**.

Por lo tanto, se consideran sistemas lineales multivariables invariantes en el tiempo, que pueden ser desacoplados por **realimentación** de variables de salida únicamente, para lo cual, se determina condiciones necesarias y **suficientes**, si un sistema puede ser desacoplado usando **realimentación** de salida. Se puede conseguir el desacoplamiento, pero el **sistema** no obtiene necesariamente "estabilidad" a **la respuesta deseada**. entonces puede ser necesario construir un compensador o un **observador para estabilizar** el sistema.

De esta manera, el sistema bajo consideración para desacoplar **mediante realimentación** de salida, debe ser lineal controlable. **observable**, e invariante en el tiempo.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (35\ a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (35\ b)$$

donde:
$\underline{x}$ = Es el vector de las variables de estado de orden n.
$\underline{u}$ = Es el vector de entrada de orden **m**.
$\underline{y}$ = Es el vector de salida de orden m.
$\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ **son matrices** reales constantes de di**mensiones** (n x n), (n x m) y (m x n) **respectivamente**.

Se **considera** la ley de control para la rea**limentación de** salida, de la forma:

$$\underline{u} = \underline{G}\,\underline{w} + \underline{H}\,\underline{y}$$

donde:
$\underline{w}$ es el nuevo vector de entrada,de orden **m**.
$\underline{H}$ y $\underline{G}$ son matrices reales constantes, de dimensiones (**m** x **m**).

El sistema de lazo cerrado por realimentación de variables de salida. se obtiene reemplazando la ley de control en el sistema (35). Por consiguiente, el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}\,. \qquad (36\ a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (36\ b)$$

se llama **realimentación lineal de variables de salida**.

El objetivo de ésta técnica, es encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia del par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$, para que el sistema (36) sea desacoplado. Es claro que el sistema (36) es desacoplado si y sólo si la matriz función de transferencia del sistema de lazo cerrado es diagonal y no singular.

Se define:

$$\underline{A}^*_j = \begin{bmatrix} \underline{C}_1\,\underline{A}^{d_1+j} \\ \underline{C}_1\,\underline{A}^{d_2+j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}_1\,\underline{A}^{d_m+j} \end{bmatrix} , \; j = 1,2,\ \dots$$

Y sea $\underline{B}^{*-1}{}_k$ que denota la **k**-ésima columna de $\underline{B}^{*-1}$.

Con estas definiciones. es posible establecer el siguiente teorema.

1.3.1.- <u>Teorema.</u>

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$, las cuales desacoplan el sistema (35) son:

1) $\det[\,\underline{B}^*\,] \neq 0$,y (37 a)

2) Las matrices

$$\underline{C}\,(\,\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)^j\underline{B}\,\underline{B}^{*-1} \qquad j = 0,\dots,n-1 \qquad (37\ b)$$

son diagonales, donde

$$\underline{H} = -\,\underline{B}^{*-1}\,[\,\underline{A}^*_{d_1+1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}{}_1 \mid \underline{A}^*_{d_2+1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}{}_2 \mid \dots \mid \underline{A}^*_{d_m+1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}{}_m\,] \qquad (37\ c)$$

"Prueba": Se asume $d_1 < d_2 < \dots < d_m$. Esto se puede conseguir facilmente, rearreglando las salidas y las correspondientes entradas del sistema (35).

Para que el sistema (36) sea desacoplado, es necesario que $\det[\underline{B}^*] \neq 0$. Entonces. al asumir $\det[\underline{B}^*] \neq 0$ se puede hacer

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1}\,,$$

La variación de i es por filas y la variación de **k** es por columnas, entonces.

$$C_i\,(A + B\,H\,C\,)^j B\,B^{*-1}{}_k = \begin{cases} \alpha_{ij} & ,\ i = k \\ 0 & ,\ i \neq k \end{cases}$$

$j=0,\ldots,n-1\ ;\ i,k=1,\ldots,m$ (37)

donde: α_{ij} es algún escalar.

Esto sigue de la definición de d_i que:

$$C_i\,(\,A + B\,H\,C\,)^j B\,B^{*-1}{}_k =$$

$$= \begin{cases} C_i\,A^j B\,B^{*-1}{}_k & ,j=0,\ldots,d_i \qquad (38\ a) \\ C_i A^{d_i}(A + B\,H\,C)^{j-d_i} B\,B^{*-1}{}_k\ , & ,j = d_i+1,\ldots,n \qquad (38\ b) \end{cases}$$

entonces,

$$C_i A^j B\,B^{*-1}{}_k = 0\ ,j=0,\ldots,d_i\ ;i \neq k\ . \qquad (39)$$

La ecuación,

$$(A + B\,H\,C\,)^j = P_0C + P_1C\,A + P_2C\,A^2 + \ldots + P_{j-2}\,C\,A^{j-2} + B\,H\,C\,A^{j-1} + A^j$$

$j = 1,2\ \ldots$,donde P_j es alguna matriz que depende de B, H y C, puede ser facilmente verificada.

Entoces, (38 b) puede expresarse,

$$C_iA^{d_i}(\,P_0C + P_1C\,A + \ldots + j\,B\,H\,C\,A^{j-1} + $$

$$+ A^j\,)\,B\,B^{*-1}{}_k = \begin{cases} \alpha_{ij} & ,\ i=k \qquad (40\ a) \\ 0 & ,\ i\neq k \qquad (40\ b) \end{cases}$$

para, $j = 1,2,\ \ldots$

$$C_iA^{d_i}(P_0C + P_1C\,A + \ldots + j\,B\,H\,C\,A^{j-1} + A^j)\,B\,B^{*-1}{}_k = C_iA^{d_i+j}B\,B^{*-1}{}_k \qquad (41)$$

$$= \begin{cases} \alpha_{ij} & ,\ i=k \qquad (42\ a) \\ 0 & ,\ i\neq k \qquad (42\ b) \end{cases}$$

para, $j = 1,2,\ldots,d_1$. la ecuación (41) sigue de la definición de d_1, y (42) sigue de (40). Sea H_i la i-ésima columna de H , $i = 1,\ldots,m$.

$$C_iA^{d_i}(P_0C + \ldots + jB\,H\,C\,A^{d_1}+A^{d_1+1})B\,B^{*-1}{}_k =$$

$$= \begin{cases} C_iA^{d_i+d_1+1}B\,B^{*-1}{}_1 + C_iA^{d_i}B\,H_1 & ,k=1 \qquad (43\ a) \\ C_iA^{d_i+d_1+1}B\,B^{*-1}{}_k & ,k\neq 1 \qquad (43\ b) \end{cases}$$

De ahí:

$$C_iA^{d_i+d_1+1}B\,B^{*-1}{}_1 + C_iA^{d_i}B\,H_1 =$$

$$= \begin{cases} \alpha_{1,d_1+1} & ,i = 1 \qquad (44\ a) \\ 0 & ,i \neq 1 \qquad (44\ b) \end{cases}$$

y para $k\neq 1$,

$$C_iA^{d_i+d_1+1}B\,B^{*-1}{}_1 = \begin{cases} \alpha_{i,d_1+1} & ,i=k \qquad (45\ a) \\ 0 & i\neq k \qquad (45\ b) \end{cases}$$

Entonces de (44)

$$H_1 = B^{*-1}[\,\delta_1 - A^{*}{}_{d_1+1}B\,B^{*-1}{}_1] \qquad (46)$$

donde: $\delta_1 = [\alpha_{1,d_1+1}\ \ 0\ \ldots\ 0\ ]$ vector de orden m.

Para obtener H_2, se considera la ecuación (40) para $j = d_1 + 2,\ \ldots\ ,d_2$.

Esto sigue de (39), (42) y (45) para $k \in \{\,2,\ \ldots\ ,m\,\}$ se obtiene:

$$C_iA^jB\,B^{*-1}{}_k = 0\ ,j=0,\ldots,d_1+d_2\ ,i\neq k \qquad (47)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que fue realizado para H_1 , con (47), H_2 puede ser obtenida de (40), para $j = d_2+1$ y $k =$

$$C_iA^{d_i}(P_0C + \ldots + jB\,H\,C\,A^{d_2}+A^{d_2+1}\,B\,B^{*-1}{}_k$$

$$= \begin{cases} C_iA^{d_i+d_2+1}B\,B^{*-1}{}_2 + C_iA^{d_i}B\,H_2 & ,k=2 \qquad (48\ a) \\ C_iA^{d_i+d_2+1}B\,B^{*-1}{}_k & ,k\in\{3,\ldots,m\,\} \qquad (48\ b) \end{cases}$$

Entonces,

$$C_iA^{d_i+d_2+1}B\,B^{*-1}{}_2 + C_iA^{d_i}B\,H_2 =$$

$$= \begin{cases} \alpha_{1,d_2+1} & ,i = 2 \qquad (49\ a) \\ 0 & ,i \neq 2 \qquad (49\ b) \end{cases}$$

y para $k \in \{3,\ldots,m\}$

$$C_iA^{d_i+d_2+1}B\,B^{*-1}{}_2 = \begin{cases} \alpha_{i,d_2+1} & ,i=k \qquad (50\ a) \\ 0 & i\neq k \qquad (50\ b) \end{cases}$$

Entonces de (50)

$$H_2 = B^{*-1}[\,\delta_2 - A^{*}{}_{d_2+1}B\,B^{*-1}{}_2] \qquad (51)$$

donde: $\delta_2 = [0\ \ \alpha_{i,d_2+1}\ \ 0\ \ldots\ 0\ ]$ vector de orden m.

Continuando en esta forma para $j = d_2+2\ ,\ldots,d_m+1$, esto sigue que:

$$H = B^{*-1}\{\Delta-[A^{*}{}_{d_1+1}B\,B^{*-1}{}_1\ \vert\ A^{*}{}_{d_2+1}B\,B^{*-1}{}_2\ \vert\ \ldots\ \vert\ A^{*}{}_{d_m+1}B\,B^{*-1}{}_m]\} \qquad (52)$$

donde: $\Delta = \mathrm{diag}\ [\alpha_{1,d_1+1}\ ,\ldots,\ \alpha_{m,d_m+1}\ ]$, de dimensión $(m \times m)$.

1.3.2.- Ubicación de polos de lazo cerrado.

Si el sistema (35) puede ser desacoplado por el par H y G , es posible ubicar los n polos en el sistema desacoplado de lazo cerrado, de tal forma que cada subsistema de una entrada y una salida tenga los polos arbitrarios asignados deseados.

Como se consideró que el sistema (38) es desacoplado, la clase de todas las matrices de desacoplamiento H estan dadas por la ecuación (52).

El cambio de polos del sistema de lazo cerrado, tiene el objetivo de tratar que el sistema se estabilice. Siendo posible conseguir esto, dando los valores adecuados a la matriz

Δ , para que los polos de lazo cerrado o valores ropios tengan partes reales negativas, pero si los valores propios obtenidos no proveen una respuesta aceptable, entonces, un compensador y un observador es requerido.

2.- Conclusiones.-

La técnica de desacoplamiento por matriz función de transferencia, no es óptima para el desacoplamiento, aunque de acuerdo a las ecuaciones descritas para desacoplar un sistema, se tiene que son muy simples, siendo para su aplicación muy teóricas y de fácil resolución a mano para un sistema de 2 entradas y 2 salidas; pero debido a que el proceso analitico es algébrico, el mismo que se alarga y complica, a la vez que se aumente el número de entradas que es igual al número de salidas , y más por supuesto, si se aumenta también el orden del sistema.

Por otro lado, ésta técnica tiene su mayor inconveniente en el cálculo de la inversa de la matriz de la Planta Gp(s), ya que los elementos de dicha matriz son fracciones de polinomios, y por consiguiente los métodos para invertir una matriz, solamente es aplicable para matrices que contengan todos sus elementos como números reales.

En el desacoplamiento por realimentación de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo, se ha establecido la clase Φ de todas las matrices de realimentación que desacoplan el sistema y además se desarrolló una técnica de síntesis para la ubicación de los polos de lazo cerrado deseados, mientras se desacopla el sistema. Obteniéndose el desacoplamiento de un sistema, se puede realizar el control de sistemas multivariables, específicamente en la estabilización.

Para la realimentación de salida se presentan las condiciones necesarias y suficientes, las cuales producen el desacoplamiento de sistemas lineales multivariables. Aun cuando estas condiciones son satisfechas, la respuesta del sistema desacoplado no puede ser aceptable. Cuando esto ocurre es posible añadir dinámica al sistema desacoplado, haciendo un estudio de cada subsistema de una entrada - una salida para obtener la respuesta deseada.

Para diseño de sistemas, el desacoplamiento por realimentación de estado es más aconsejable que el desacoplamiento por realimentación de salida, ya que por medio del primero podemos conseguir simultáneamente el desacoplamiento y estabilidad del sistema, mientras que en la segunda técnica para desacoplar el sistema se necesita prácticamente de un compensador u observador para estabilizar dicho sistema.

Desacoplamiento por realimentación de estado no necesariamente implica desacoplamiento por realimentación de salida, por tal razón, se realizó un estudio separado de las dos técnicas en mención. Sin embargo, si un sistema puede ser desacoplado por realimentación de salida, necesariamente se desacopla por realimentación de estado.

En definitiva, en las técnicas de desacoplamiento por realimentación de estado y realimentación de salida, luego de producirse el desacoplamiento, si el sistema no es estable para algunos pares entrada - salida, se puede añadir un compensador solamente para estabilizar esos pares inestables, ya que sólo se necesita de un estudio de control para sistemas de una entrada - una salida.

Bliblio̲grafía.-

1.- GRANIZO, Evelio; "DESACOPLAMIENTO PARA SISTEMAS CONTINUOS EN EL TIEMPO"; Tesis; E.P.N. ; Quito; 1988.

2.- MONTGOMERIE G. A. and NICHOLSON H.; MODERN APPROACHES TO CONTROL SYSTEM DESING : Edited by MUNRO N., Published by The Institution of Electrical Engineers; London; 1979.

3.- FALB, Peter L. and WOLOVICH, William A. , "DECOUPLING IN THE DESIGN AND SYNTHESIS OF MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS"; IEEE Transactions on Automatic Control; vol. AC-12, No. 6; December, 1967; pp. 651-659.

4.- HOWZE, J. W. AND PEARSON J. B.; ' DECOUPLING AND ARBITRARY POLE PLACEMENT IN LINEAR SYSTEMS USING OUTPUT FEEDBACK : IEEE Transactions on Automatic Control; vol. T-AC; December; 1970; pp. 660-663.

Biografía.- Evelio Alfredo Granizo Montalvo, Egresado de la Escuela Politecnica Nacional Especialización Electrónica y Control, marzo de 1986; ha realizado estudios de Postgrado en Computación e Informática. los periodos marzo/86-agosto/86 y octubre/86-marzo/87. Realiza trabajos de consultoría en Instalaciones Eléctricas e Industriales.