CO BARRAGAN B.
POLITECNICA NACIONAL

ING. RODOLFO LOPEZ N.
EMPRESA ELECTRICA PROVINCIAL COTOPAXI.

esente trabajo, se indican las formas minar la sensitividad en un sistema de por variaciones en los parámetros del y por variaciones en el periodo de ación del sistema. Proporcionamos los os para calcular la sensitividad y para de un sistema en lazo cerrado, se na la ley de control mediante el o de ACKERMAN, para posteriormente la sensitividad.

nte tratamos el caso del Control Optimo, varian las matrices del sistema o las s del criterio de ponderación; ficamente en este tema, se obtiene el mo para calcular la sensitividad en el de funcionamiento en el Regulador Lineal tico Discreto.

ACT:

s issue shows some approaches in order to termine the sensitivity in a control system e to variations in system parameters or sampling interval. When the system works in sed loop, we first use Ackerman's algoritm d then determine sensitivity.

is work also treats Optimal Control sensitivity when system matrices or weighing criteon are varying. In this caso, sensitivity referred to the performance index for Discete Quadratic Linear Regulator.

NTRODUCCION.- En el diseño de sistemas de ontrol moderno, es importante conocer las ariaciones admisibles en los parámetros de la lanta para que la respuesta del sistema ermanezca dentro de un rango deseado; y dado ue los parámetros de una planta física no ermanecen constantes en el tiempo, se hace ecesario un estudio de este tópico.

Así mismo, la teoría de control óptimo es importante en el diseño de sistemas modernos, su objetivo es la minimización de tiempo, costos de operación, consumo de energía, etc; dentro de este campo hay una gran cantidad de temas extensos que se han estudiado y que todavía se siguen investigando, uno de ellos es justamente el de la sensitividad en el regulador lineal cuadrático discreto. La solución matemática de estos problemas es compleja, por lo que se ofrece métodos computacionales para obtener las soluciones buscadas.

El artículo se divide en varias partes: en primer lugar se hace el análisis en sistemas de control lineales, luego en sistemas de control óptimo y finalmente se dan los algoritmos para los casos de sistemas lineales y para el regulador lineal cuadrático discreto.

1. SENSITIVIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL.

CASO CONTINUO.

Existen varias técnicas que proveer aproximaciones al problema de tolerancia de especificaciones de componentes o parámetros, pero analizaremos unicamente el método de los coeficientes de sensitividad en parámetros espaciales debido a la facilidad que se tiene para computar las variables de interés en forma recursiva y porque el sistema no debe ser lineal necesariamente, Entonces analicemos el sistema:

$$\dot{x}=f(x(t),p,t)\,;x(t_0)=x \tag{1}$$

Donde $x(t)$, es el vector de estado n-dimensional, y p, es el vector de parámetros m-dimensional.

Derivemos una ecuación de sensitividad para parámetros que no cambien el orden del sistema y las condiciones iniciales. Para cambios pequeños en p, una aproximación de primer orden para el cambio correspondiente en el vector de estado x, se puede deducir de la siguiente manera:

La variación parcial en el vector de estado $(\Delta x)_j$, por el cambio en un solo parámetro p_j, es:

$$(\Delta x)_j=v_j\Delta p_j \tag{2}$$

Donde v_j, es el vector sensitividad:

$$v_j=\frac{\partial x}{\partial p_j}=[\frac{\partial x_1}{\partial p_j},\dots,\frac{\partial x_n}{\partial p_j}]^T$$

$$v_j=[v_{1j},\dots,v_{nj}]^T$$

La variación total en el vector de estado (Δx), es la suma de las variaciones parciales:

$$\Delta x=\sum_{j=1}^{m} v_j\Delta p_j \tag{4}$$

La matriz sensitividad y la componente i-ésima de v_j, quedan determinadas así:

$$v=[v_1,v_2,\dots,v_m]\,;v_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \tag{5}$$

El coeficiente de sensitividad, v_{ij}, representa la variación en la componente i-ésima del vector de estado x, debido al cambio de la j-ésima componente del vector paramétrico, p; con estas definiciones, podemos deducir la ecuación diferencial de sensitividad, considerando también el sistema de la ecuación (1).

$$\dot{x}(t)=f(x(t),p,t)\,;\dot{x}_k(t)=f_k(x(t),p,t)$$

$$v_{kj}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_j}\right)=\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p_j}$$

Puesto que los parámetros son independientes entre sí, la ecuación nos queda:

$$v_{kj}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}v_{ij}+\frac{\partial f_k}{\partial p_j}$$

(6)

Donde: $k=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$; y las condiciones iniciales son $v_{kj}(t_0) = 0$, ya que el cambio de los parámetros no afecta al estado inicial del sistema.

CASO DISCRETO.

La representación más general de un sistema discreto está dada por:

$$x(k)=f(x(k-1),u(k-1),p,t_{k-1},t_k)=f(k-1)$$

(7)

Donde $x(k)$, es el vector de estado n-dimensional; $u(k)$ es un vector de control r-dimensional; p es un vector paramétrico constante m-dimensional y t_k, representa el tiempo al k-ésimo instante, el intervalo de muestreo T_k, es el tiempo entre dos instantes contiguos de muestreo: $T_k = t_{k+1} - t_k$.

Por notación consideraremos a t_k como k, por ejemplo $x(t_k)= x(k)$.

Una aproximación para la sensitividad de sistemas discretos es similar a los vectores sensitividad y funciones sensitividad de sistemas continuos. En este método no requerimos que el sistema sea lineal. Definimos el vector sensitividad como:

$$v_j(k)=\frac{\partial x(k)}{\partial p_j}=\left[\frac{\partial x_1(k)}{\partial p_j},\ldots,\frac{\partial x_n(k)}{\partial p_j}\right]^T$$

(8)

En este caso, la matriz sensitividad y los coeficientes de sensitividad son los siguientes:

$$v=[v_1,v_2,\ldots,v_m]^T;\; v_{ij}(k)=\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

(9)

Tendremos un vector sensitividad para cada uno de los m parámetros del vector p, que para el caso de sistemas lineales puede estar constituido por elementos de la matriz de la planta A_D o de la matriz de control B_D.

Usando los vectores sensitividad, obtenemos la aproximación de primer orden del cambio en $x(k)$, en la misma forma que para el caso continuo.

$$\Delta x(k)=\sum_{j=1}^{m}v_j(k)\,\Delta p_j$$

(10)

Para formular la ecuación de diferencias de sensitividad, tomemos la derivada parcial de la ecuación (7) con respecto a p_j, lo cual nos

$$\frac{\partial x(k)}{\partial p_j}=\left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)}\right]^T\frac{\partial x(k-1)}{\partial p_j}+\frac{\partial f(k-1)}{\partial p_j}$$

(11)

Los términos involucrados con la ley de co[...] no aparecen en la ecuación anterior, pues asumimos para este desarrollo que el contr[...] depende de los cambios en los paráme[...] Combinando las ecuaciones (8) y (1[...] obtenemos la ecuación de diferencias par[...] vectores sensitividad del sistema discre[...]

$$v_j(k)=\left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)}\right]^T v_j(k-1)+\frac{\partial f(k-1)}{\partial p_j}$$

(12)

Donde $v_j(0) = 0$, asumiendo que el e[...] inicial es el mismo tanto para el si[...] original como para el perturbado. Las func[...] sensitividad son determinadas a partir [...] ecuación (12), sabiendo además que:

$$x_j(k)=f_j(x(k-1),u(k-1),p,t_{k-1},t_k)=f_j(k-1)$$

Resultando:

$$v_{ij}(k)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_i(k-1)}{\partial x_s(k-1)}v_{sj}(k-1)+\frac{\partial f_i(k-1)}{\partial p_j}$$

(13)

Donde $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$; y $v_{ij}(0)$ [...]

SENSITIVIDAD EN EL INTERVALO DE MUESTREO [...] SISTEMAS DISCRETOS.

El comportamiento de los sistemas discretos [...] muy sensitivo ante cambios en el periodo [...] muestreo. Se puede usar la sensitividad en [...] intervalo de muestreo para seleccionar [...] intervalo de muestreo universal o [...] seleccionar los intervalos de mues[...] individualmente, estas dos aplicaciones ilus[...] dos funciones sensitividad distintas para el intervalo de muestreo.

SENSITIVIDAD GLOBAL EN EL INTERVALO [...] MUESTREO.

Si un sistema tiene un intervalo de muestreo fijo, podemos definir la función sensitividad global en el intervalo de muestreo como:

$$W_T(k)=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{x[k(T+\Delta T)]-x[kT]}{\Delta T}=\frac{\partial x(k)}{\partial T}$$

(14)

La cual es una expresión que nos permite distinguir cambios en el estado al k-ésimo instante de muestreo si todo intervalo de muestreo cambia en ΔT.

Una ecuación discreta de sensitividad para $W_T(k)$, puede escribirse, si tomamos la primera derivada parcial de la ecuación (7) con respecto a T. Si no son consideradas las variaciones de los parámetros, tenemos:

$$\frac{\partial x(k)}{\partial T}=\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)}\frac{\partial x(k-1)}{\partial T}+\frac{\partial f(k-1)}{\partial u(k-1)}\frac{\partial u(k-1)}{\partial T}+\frac{\partial f(k-1)}{\partial T}$$

(15)

Con las ecuaciones (14) y (15), obtenemos la

...ción general de la sensitividad global.

$$W_T(k)=[\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)}]W_T(k-1)+[\frac{\partial f(k-1)}{\partial u(k-1)}]\frac{\partial u(k-1)}{\partial T}+\frac{\partial f(k-1)}{\partial T}$$

(16)

...tos a las condiciones iniciales $W_T(0)=0$. ...el sistema es lineal, entonces podemos ...ibir esta ecuación de sensitividad como:

$$W_T(k)=A_D(k-1)W_T(k-1)+\frac{\partial A_D(k-1)}{\partial T}x(k-1)$$

$$+\frac{\partial B_D(k-1)}{\partial T}u(k-1)+B_D(k-1)\frac{\partial u(k-1)}{\partial T}$$

(17)

...ITIVIDAD LOCAL EN EL INTERVALO DE MUESTREO

...l intervalo de muestreo no se mantiene ...tante, se requiere una función sensitividad ...l para determinar el efecto de cambio en el ...imo periodo de muestreo sobre el estado al ...ante de muestreo (k+1). Podemos determinar ...función sensitividad local en el intervalo ...uestreo como:

$$W(k)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_k+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\partial x(t_k)}{\partial t_k}$$

(18)

...a derivar una ecuación de sensitividad local ...el intervalo de muestreo, es necesario ...ibir la ecuación del sistema en la forma:

$$x(k)=f[x(k-1),u(k-1),t_{k-1},t_k]$$

...terminemos W(k) diferenciando la ecuación ...terior con respecto a t_k.

$$W(k)=\frac{\partial f[x(k-1),u(k-1),t_{k-1},t_k]}{\partial t_k}$$

(19)

...el sistema en consideración es lineal, esta ...uación resulta:

$$W(k)=\frac{\partial A_D(t_{k-1},t_k)}{\partial t_k}x(k-1)+\frac{\partial B_D(t_{k-1},t_k)}{\partial t_k}u(k-1)$$

(20)

...nde los términos relacionados a las derivadas ...rciales del estado x, y el control u, en el ...tervalo (t_{k-1},t_k) respecto a t_k son cero, ...esto que x(k-1) y u(k-1) no pueden variar en ...l instante t_k, ya que ellos ya han ocurrido.

...- SENSITIVIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL OPTIMO

...n esta sección presentaremos una discusión de ...a sensitividad en el índice de comportamiento, ...or variaciones en los parámetros de la planta ...del criterio de comportamiento; refiriéndonos ...xclusivamente al caso particular del regulador ...ineal cuadrático discreto.

...onsideremos un sistema lineal discreto ...epresentado por:

$$x(k+1)=A_Dx(k)+B_Du(k)=f(k);x(0)=x_0$$

(21)

Donde k=0,1,....,k_f y donde A_D y B_D pueden ser funciones de k. La función índice de comportamiento a ser minimizada es:

$$J(k)=\frac{1}{2}\|x(k_f)\|^2S+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_f-1}[\|x(k)\|^2Q+\|u(k)\|^2R].$$

$$J(k)=\frac{1}{2}\|x(k_f)\|^2S+\varphi(k)$$

(22)

Donde las matrices de ponderación Q y R, pueden ser funciones del periodo k; entonces formamos el Hamiltoniano, el que resulta:

$$H(k)=\frac{1}{2}[\|x(k)\|^2Q+\|u(k)\|^2R]+\lambda^T(k+1)[A_Dx(k)+B_Du(k)]$$

(23)

Y, donde:

$$\lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}$$

(24)

Derivando la ecuación (23) con respecto al vector de estado, tenemos:

$$\lambda(k)=Qx(k)+A_D^T\lambda(k+1)$$

(25)

Vemos que esta ecuación no puede ser resuelta a menos que exista la matriz inversa de A_D; pero como ésta es la matriz de transición de estado, tendremos siempre su inversa; y puesto que el estado final es inespecificado, la condición de borde es la siguiente:

$$\lambda(k_f)=Sx(k_f)$$

(26)

La otra condición de borde para obtener la ley de control óptima está dada por:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=0=Ru(k)+B_D^T\lambda(k+1)$$

Entonces:

$$u(k)=-R^{-1}B_D^T\lambda(k+1)$$

(27)

Ahora, debemos resolver las ecuaciones de diferencias resultantes, las que nos darán el control óptimo en lazo abierto.

$$x(k+1)=A_Dx(k)-B_DR^{-1}B_D^T\lambda(k+1);x(k_0)=x_0$$

$$\lambda(k)=Qx(k)+A_D^T\lambda(k+1);\lambda(k_f)=Sx(k_f)$$

(28)

Una solución para esas ecuaciones es de la forma:

$$\lambda(k)=P(k)x(k)=\frac{\partial J(k)}{\partial x(k)}\to J(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2P(k)$$

(29)

Sustituyendo esta solución en las dos

...es de diferencias anteriores
...ando matemáticamente, resulta:

$$P(k)=Q+A_D^T P(k+1)\left[I+B_D R^{-1} B_D^T P(k+1)\right]^{-1} A_D$$

$$P(k)=Q+A_D^T\left[P^{-1}(k+1)+B_D R^{-1} B_D^T\right]^{-1} A_D$$

(30)

...dición final $P(k+1)$, se obtiene de las ...ones (26) y (29):

$$\lambda(k_f)=Sx(k_f)=P(k_f)\,x(k_f) \rightarrow P(k_f)=S$$

...ecuación matricial de diferencias, se ...ve hacia atrás en el tiempo, se obtienen ...cenan y después son aplicadas al sistema ...o hacia adelante en el tiempo real.

...cesario que Q y S sean definidas no ...ivas para que la segunda variación sea ...iva, y R debe ser positiva definida, ...o que debe existir su matriz inversa, para ...trar la ley de control óptimo.

...unciones precomputarizadas por este método ...nomina método de la "ganancia de Kalman"

$$u(k)=-R^{-1}B_D^T A_D^{-T}\left[P(k)-Q\right]x(k)$$

$$...=-R^{-1}B_D^T\left[P^{-1}(k+1)+B_D R^{-1} B_D^T\right]^{-1} A_D\,x(k)=-K(k)\,x(k)$$

(31)

...uidamente, se determina la ecuación para el ...ado del sistema, al reemplazar la ecuación ...) en la (21), por lo tanto:

$$x(k+1)=\left[A_D-B_D K(k)\right]x(k)=F(k)\,x(k)=f(k)$$

(32)

...ra, consideraremos que la realimentación ...tá basada en el sistema nominal, es decir la ...y de control está dada por la ecuación (31), ...ro que los parámetros del sistema cambian a ... y $\tilde{B}$, con matrices de ponderación $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$, ...con el vector paramétrico perturbado $\tilde{p}$. ...tonces la ecuación del sistema queda de la ...guiente manera.

$$x(k+1)=\left[\tilde{A}_D-\tilde{B}_D K(k)\right]x(k)=\tilde{F}x(k)=\tilde{f}(k)$$

(33)

...a función de costo para el sistema perturbado ...es:

$$\phi(k)=\frac{1}{2}\left[\|x(k)\|^2_{\tilde{Q}}+\|u(k)\|^2_{\tilde{R}}\right]$$

(34)

...eemplazando la ley de control por la dada en ...a ecuación (31), tenemos:

$$\phi(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2\left[\tilde{Q}+K^T(k)\tilde{R}K(k)\right]=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{Q'(k)}$$

(35)

...onde:

$$Q'(k)=\tilde{Q}+K^T(k)\tilde{R}K(k)$$

...l índice de comportamiento a minimizarse ...ería:

$$J(k)=\frac{1}{2}\|x(k_f)\|^2_S+\frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}\|x(k)\|^2_{Q'(k)}$$

El Hamiltoniano se [illegible] cuenta en la misma forma que para el sistema original, y resulta:

$$H(k)=\phi(k)+\lambda^T(k+1)\left[\tilde{F}(k)\,x(k)\right];\ \lambda(k)=\frac{\partial J(k)}{\partial x(k)}$$

$$H(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{Q'(k)}+\lambda^T(k+1)\tilde{F}x(k)$$

Ahora, procedemos a resolver el problema por el método de la "ganancia de Kalman". El sistema de ecuaciones que resulta es el siguiente:

$$x(k+1)=\tilde{F}(k)\,x(k);\ x(k_0)=x_0$$

$$\lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}=Q'(k)\,x(k)+\tilde{F}^T(k)\,\lambda(k+1)$$

$$\lambda(k_f)=Sx(k_f)$$

(36)

Asumiendo la solución de la forma:

$$\lambda(k)=M(k)\,x(k)\rightarrow J(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{M(k)}$$

(37)

Sustituyendo esta solución en la ecuación anterior, tenemos:

$$M(k)\,x(k)=Q'(k)\,x(k)+\tilde{F}^T(k)\,M(k+1)\,x(k+1)$$

En la última expresión reemplazamos la ecuación (33), para obtener la ecuación de M(k).

$$M(k)=Q'(k)+\tilde{F}^T(k)\,M(k+1)\,\tilde{F}(k);\ M(k_f)=S$$

(38)

En la misma forma, podemos resolver el problema para el caso de la sensitividad del índice de comportamiento:

$$W[x(k),\tilde{p},p,k]=\frac{\partial V[x(k),\tilde{p},p,k]}{\partial \tilde{p}};\ V=J$$

(39)

Para esta nueva función creamos el Hamiltoniano, tomando solamente la componente W^i del vector sensitividad W.

$$H'(k)=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_i}+\frac{\partial \phi(k)}{\partial \tilde{p}_i}+\left[\frac{\partial W^i(k+1)}{\partial x(k+1)}\right]^T\tilde{f}(k)$$

(40)

y, sabiendo que:

$$\frac{\partial\varphi(k)}{\partial\beta_i}=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{\frac{\partial Q'(k)}{\partial\beta_i}}$$

$$\frac{\partial V(k)}{\partial x(k)}=P(k)\,x(k)\,;\,V(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{P(k)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta_i}=\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left[F(k)\,x(k)\right]=\frac{\partial F(k)}{\partial\beta_i}x(k)$$

a última expresión se cumple, debido a que los rámetros no son elementos del vector de stado. Por las ecuaciones anteriores, podemos scribir:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T\frac{\partial f}{\partial\beta_i}=x^T(k)\,P\frac{\partial F}{\partial\beta_i}x(k)$$

mo el término anterior es escalar, se tiene:

$$x^T(k)\,P\frac{\partial F}{\partial\beta_i}x(k)=x^T(k)\,\frac{\partial F^T}{\partial\beta_i}Px(k)$$

que la matriz P, es simétrica. Por lo tanto, Hamiltoniano resulta:

$$H'(k)=\left[\frac{\partial W^i(k+1)}{\partial x(k+1)}\right]^TF(k)\,x(k)+$$

$$\frac{1}{2}\|x(k)\|^2\left[\frac{\partial Q'(k)}{\partial\beta_i}+P(k)\,\frac{\partial F(k)}{\partial\beta_i}+\frac{\partial F^T(k)}{\partial\beta_i}P(k)\right]$$

(41)

nde:

$$F(k)=A_D(k)-B_D(k)\,K(k)$$

(42)

iendo una solución, para la componente de sensitividad W^i del tipo:

$$W^i(k)=\frac{1}{2}\|x(k)\|^2_{\Gamma_i(k)}$$

(43)

ndo Γ_i una matriz cuadrada simétrica idefinida positiva de orden nxn, y si inimos:

$$\gamma(k)=\frac{\partial W^i(k)}{\partial x(k)}\rightarrow\gamma(k)=\Gamma_i(k)\,x(k)$$

(44)

nemos el Hamiltoniano:

$$H'(k)=\gamma^T(k+1)\,F(k)\,x(k)+$$

$$\frac{1}{2}\|x(k)\|^2\left[\frac{\partial Q'(k)}{\partial\beta_i}+P(k)\,\frac{\partial F(k)}{\partial\beta_i}+\frac{\partial F^T(k)}{\partial\beta_i}P(k)\right]$$

(45)

analogía con la ecuación de Hamilton-obi-Bellman para el índice de portamiento, tenemos:

$$\gamma(k)=\frac{\partial W'(k)}{\partial x(k)}=F^T(k)\,\gamma(k+1)+Q_i''x(k)$$

$$Q_i''(k)=\frac{\partial Q'(k)}{\partial\beta_i}+P(k)\,\frac{\partial F(k)}{\partial\beta_i}+\frac{\partial F^T(k)}{\partial\beta_i}P(k)$$

(47)

Al sustituir la ecuación (44) en la ecuación (46), tenemos:

$$\Gamma_i(k)\,x(k)=F^T(k)\,\Gamma_i(k+1)\,x(k+1)+Q_i''(k)\,x(k)$$

Finalmente, reemplazamos la ecuación (32) en la ecuación anterior para obtener la solución:

$$\Gamma_i(k)=F^T(k)\Gamma_i(k+1)\,F(k)+Q_i''(k)\,;\Gamma_i(k_f)=0$$

(48)

Esta ecuación debe ser resuelta hacia atrás en el tiempo, desde el instante final (k_f) hasta el instante inicial (k=0), posteriormente calcularíamos la sensitividad del índice de comportamiento utilizando la ecuación (43).

3.-ALGORITMOS

Algoritmo para la sensitividad en sistemas discretos.

- Ingreso de datos:

. Orden del sistema (n), dimensión del vector de control (r), dimensión del vector de parámetros (m).

. Matrices de la planta (A) y del control (B)

. Parámetros, que pueden ser elementos de A y/o B.

.Estado inicial

. Tipo de señal de entrada para el vector de referencia

. Número máximo de iteraciones

Para el sistema en lazo cerrado se requiere también el máximo sobreimpulso y el tiempo de establecimiento.

- Selección del período de discretización.

- Cálculo del vector de realimentación (K), con el algoritmo de Ackerman.

- Discretización del sistema.

- Cálculo de la matriz sensitividad.

Para hallar la sensitividad se debe tomar en cuenta que:

$$\frac{\partial f_j(k-1)}{\partial p_i}=0\,;si,p_i(2)\neq j$$

$$si,p_i(1)=a,y,p_i(2)=j\rightarrow\frac{\partial f_j}{\partial p_i}=x_s(k-1)\,;s=p_i(3)$$

$$si,p_i(1)=b,y,p_i(2)=j\rightarrow\frac{\partial f_j(k-1)}{\partial p_i}=u_s(k-1)\,;s=p_i(3)$$

- Impresión de resultados

Algoritmo para el regulador lineal cuadrático discreto.

- Ingreso de datos.

- Orden del sistema (n), dimensión del vector de control (r).

- Matrices de la planta (A), del control (B), del criterio de ponderación (Q) y (R) y la matriz de Riccati al tiempo final (P).

- Estado inicial

- Parámetro p_i, que debe ser elemento de A, B, Q o R; y el nuevo valor del elemento que se ingresó como parámetro.

- Cálculo de las variables de interés del regulador lineal cuadrático discreto.

- Cálculo de las variables de interés del regulador lineal cuadrático discreto perturbado.

En este punto se debe tomar en cuenta que: Si p_i, no es elemento de las matrices de ponderación, entonces:

$$\left[\frac{\partial Q'(k)}{\partial p_i}\right]_{jl}=0;\ (j=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n)$$

Si p_i, es elemento de $Q^\sim$, entonces:

$$\left[\frac{\partial Q'(k)}{\partial p_i}\right]_{jl}=\begin{cases}1,\ si,\ p_i(3)=l;\ y;\ p_i(2)=j\\ 0,\ caso_{contrario}\end{cases}$$

Si p_i, es elemento de $R^\sim$, por ejemplo si p_i es r_{oo}, entonces:

$$\left[\frac{\partial Q'(k)}{\partial p_i}\right]_{jl}=K_{oj}K_{ol}$$

Además, si p_i no es elemento de $A^\sim$ ni de $B^\sim$, entonces:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial p_i}\right]_{jl}=0;\ (j=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n)$$

Si p_i, es elemento de la matriz $A^\sim$, se tiene:

$$\left[\frac{\partial F(k)}{\partial p_i}\right]_{jl}=\begin{cases}1,\ si,\ p_i(2)=j,\ y,\ p_i(3)=l\\ 0,\ caso_{contrario}\end{cases}$$

Si p_i, es elemento de $B^\sim$, por ejemplo si es b_{oo}, entonces:

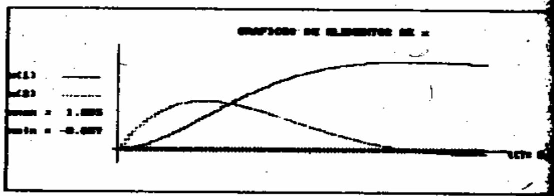
$$\left[\frac{\partial F(k)}{\partial p_i}\right]_{jl}=\begin{cases}-K_{ol};\ si,\ o=j\\ 0,\ caso_{contrario}\end{cases}\quad (j=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n)$$

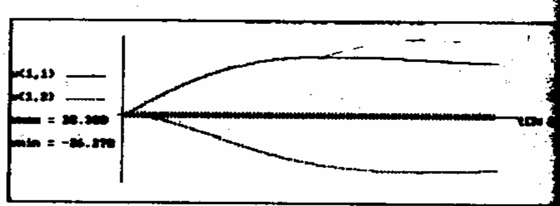
- Impresión de resultados.

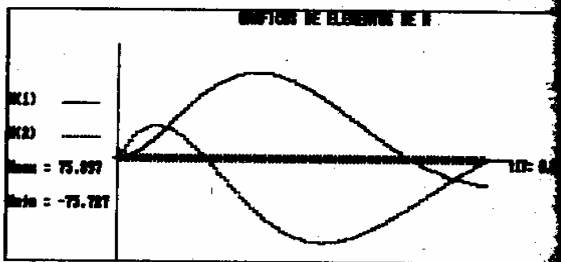
Ejemplos de aplicación. Analicemos el sistema descrito por:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 4.16666\\ -6 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix}u$$

Además ingresamos como parámetro el elemento a11, vector estado inicial cero, entrada paso unitaria, opción para analizar sensitividad global, 100 iteraciones y un período de discretización de 0.01(s). Con estos datos obtenemos los siguientes resultados:







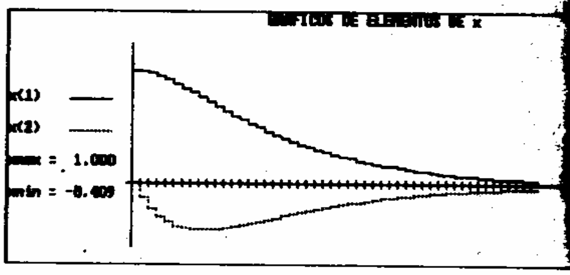
Para el caso del regulador lineal cuadrá discreto, consideremos el siguiente siste

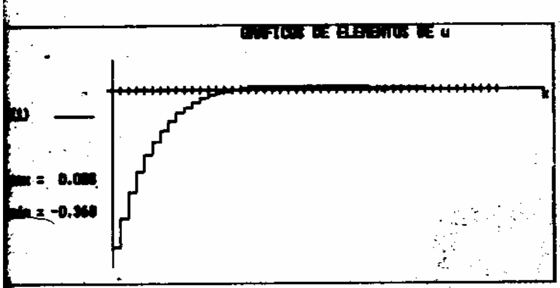
$$x(k)=\begin{bmatrix}0.995 & 0.09048\\ -0.09048 & 0.8143\end{bmatrix}x(k-1)+\begin{bmatrix}0.00468\\ 0.09048\end{bmatrix}u(k-$$

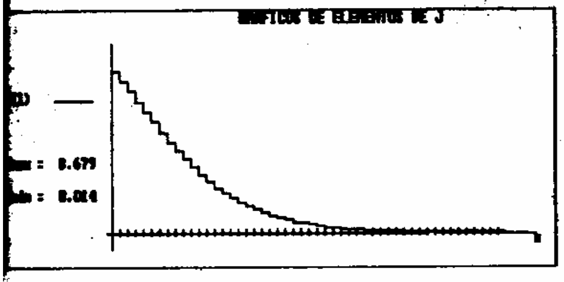
Con las siguientes matrices de ponderació condición final:

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};R=1;P(k_f)=\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

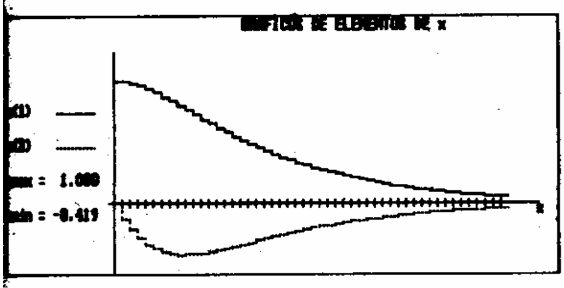
Se considera que el parametro es el ele a11. que el nuevo valor del parámetro es que el número de iteraciones es 49. Entonce obtienen los siguientes resultados.

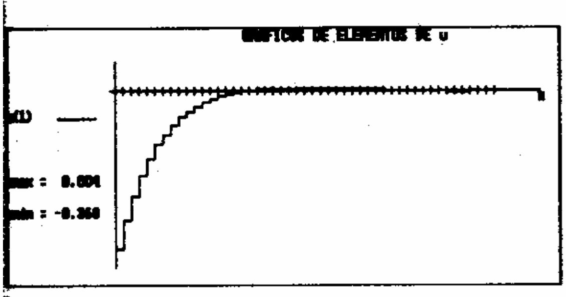


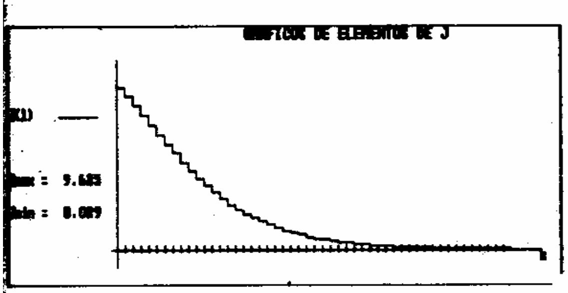


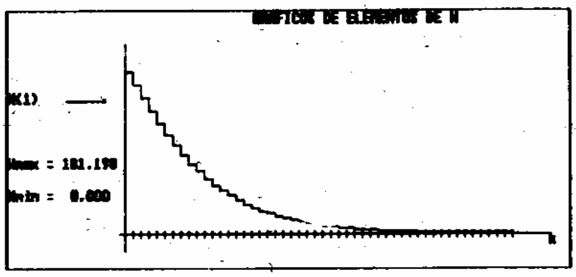


variables del sistema perturbado son:









CONCLUSIONES

Es necesario seleccionar adecuadamente el periodo de muestreo de un sistema discreto, pues de éste depende la respuesta del sistema.

Si el sistema es estable, tanto los elementos del vector de estado como los de la matriz sensitividad tienden a valores finitos en estado estable, mientras que elementos de los vectores sensitividad global y local tienden a cero.

La respuesta transitoria de los elementos de la matriz sensitividad es algo más lenta que la de los elementos del vector de estado,por esta razón se debe incrementar las iteraciones para abarcar todo el rango deseado.

El módulo de la sensitividad global es mayor que el de la local, y además la sensitividad global requiere mayor tiempo para estabilizarse.

La respuesta de la sensitividad local se caracteriza por tener una fuerte variación inicial pero es de poca duración.

Con respecto al regulador lineal cuadrático discreto, se puede decir que:

El vector de estado cambia bruscamente al variar en pequeñas cantidades los parámetros de la planta o del control. la variación es menor ante cambio de las matrices de ponderación. Puede ser que siendo un sistema estable, con variaciones no tan grandes de los parámetros, el sistema se vuelva inestable.

El indice de comportamiento óptimo, tanto para el sistema original como para el sistema perturbado, presenta una respuesta parecida en el tiempo cuando la variación de los parámetros es mínima.

La sensitividad del indice de funcionamiento, incrementa considerablemente cuando los parámetros del sistema cambian en cantidades algo apreciables.

La matriz solución de la ecuación de Riccati mantiene un valor constante para un gran rango de valores de tiempo (si el sistema es estable), unicamente hay gran variación en los instantes cercanos al tiempo final en el que se debe cumplir la condición de borde.

Si el sistema es estable, la parte estable de los elementos de la matriz P, corresponden al caso cuando P(k+1) = P(k) que es equivalente a la ecuación matricial de Riccati del sistema continuo, es decir cuando la derivada de la matriz P respecto al tiempo es cero.

la matriz P, esto es lógico, pues ambas son soluciones de la ecuación de Riccati, solo que los coeficientes de tales ecuaciones son ligeramente diferentes.

BIBLIOGRAFIA.

- Kwakernaak Sivan, "Linear Optimal control Systems" Jhon Wiley & Sons Inc., New York 1972
- Góngora J. "El Problema del Regulador Cuadrático lineal". Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Julio de 1991.
- López R. "Sensitividad en Sistemas de Control Optimo". Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Diciembre de 1992.
- Dorato P., "On Sensitivity in Optimal Control Systems". IEEE, Trns. on. Automatic Control. Vol AC-9, pp 216-223, July 1964.
- Dorato P. and Kestenbaum A., "Application of Game Theory to the Sensitivity design of Optimal Systems". IEEE, Transaction on. Automatic Control, Vol. AC 12, pp 85-87, February 1967.
- Pagurek P. "Sensitivity of the performance of Optimal Control Systems to plant parameter variations". IEEE, Trans. on. Automatic Control, Vol AC-10, pp 178-180, April 1965
- Sage Andrew P. "Optimum Systems Control". Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs N J. 1968.

BIOGRAFIAS

Marco Barragán B.

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaci E.P.N, 1973. Master en Ingeniería de Sist Escuela Politécnica de la Universidad d Paulo, Brasil, 1977. Profesor princip tiempo completo, E.P.N.

Rodolfo López N.

Nació en Quisapi Tungurahua, el 2 de Jul 1965; sus estudios primar secundarios los realizo tierra natal, mientras qu estudios superiores los realizó en la Es Politécnica Nacional, obteniendo el titu Ingeniero en Electrónica y Control en Dici de 1992. Ha trabajado en el Instituto Téc Superior "Guayaquil", y actualmente en Empresa Eléctrica Provincial "Cotopaxi S.