CAPITULO IV

ANALISIS DE SISTEMAS POLIFASICOS

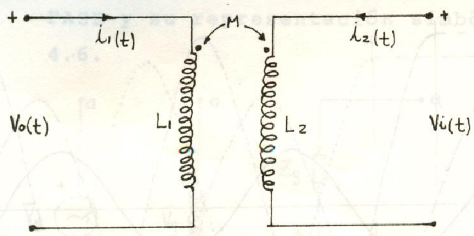


Fig.4.2.- Máquina estática de 2 bobinados (1 primario + 1 secundario)

dónde:

$$v_{i(t)} = \cancelto{0}{L_2\frac{di_2}{dt}} + M\frac{di_1}{dt}$$

Si: $i_{(t)} = I_{máx}\ \text{Sen}\,\omega t$, entonces

$$v_{i(t)} = V_{máx}\text{Cos}\,\omega t \rightarrow \text{f.e.m.}$$

Para el caso de una máquina rotativa, se puede ver en la figura 4.3.

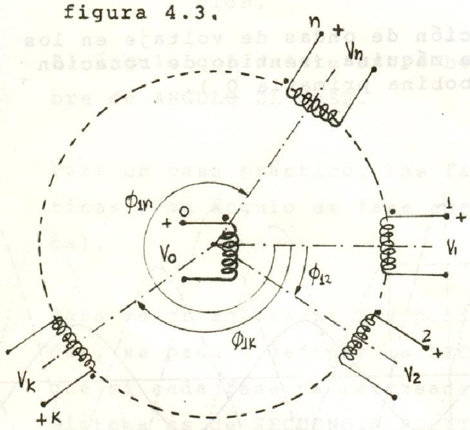


Fig.4.3.- Máquina rotativa de n+1 bobinados (1 primario + n secundarios).

Si se conservan estáticos los bobinados secundarios y gira el bobinado primario (excitación), se inducen f.e.m. en cada uno de los bobinados secundarios. Además, si se considera como referencia el bobinado 1 y gira el bobinado 0 a una misma frecuencia, se tiene:

$$v_1 = V_{máx1}\text{Cos}\,\omega t$$

$$v_2 = V_{máx2}\text{Cos}(\omega t \mp \phi_{12})$$

$$\vdots$$

$$v_K = V_{máxK}\text{Cos}(\omega t \mp \phi_{1K})$$

$$\vdots$$

$$v_n = V_{máxn}\text{Cos}(\omega t \mp \phi_{1n})$$

dónde: $-\ \phi$ indica que la bobina 0 gira en sentido horario.

$+\ \phi$ indica que la bobina 0 gira en sentido antihorario.

La forma de aparición de las ondas de voltajes inducidos, se la ve en las figuras 4.4 y 4.5.

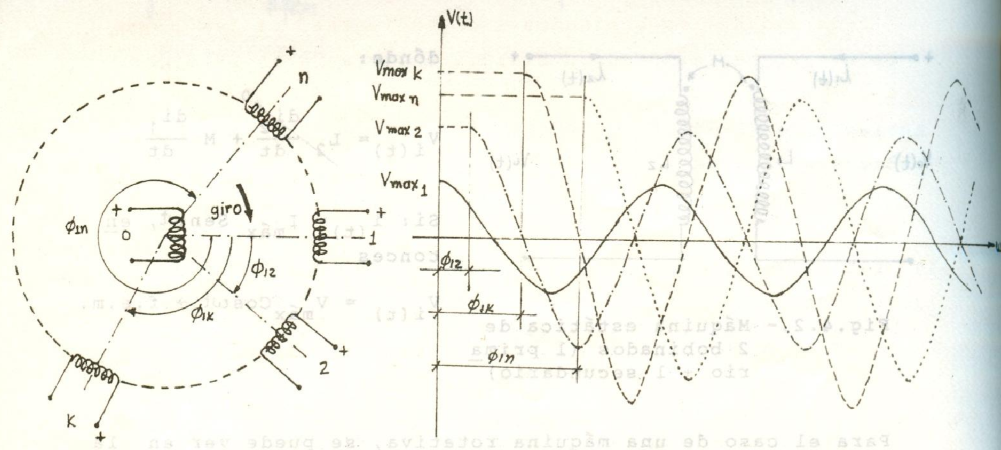


Fig.4.4.- Forma de aparición de ondas de voltaje en los bobinados de la máquina (sentido de rotación horario de la bobina primaria 0).

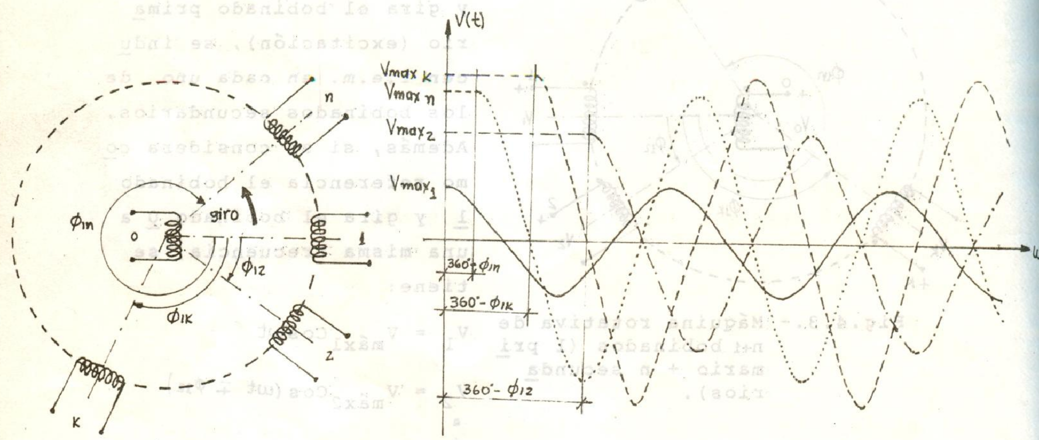


Fig.4.5.- Forma de aparición de ondas de voltaje en los bobinados de la máquina (Sentido de rotación antihorario de la bobina primaria 0).

Por otro lado, si se mantiene fija la bobina primaria 0 y se rota los bobinados secundarios: 1, 2, ----- K,-----n, se cae en una de las formas de rotación relativa de las figuras 4.4 y 4.5.

Por lo tanto, existen únicamente dos posibilidades de aparición de ondas, debido a la posición arbitraria de los bobinados o al sentido de giro.

A cada uno de los bobinados independientes, se les llama FASE y su representación simbólica se la ve en la figura 4.6.

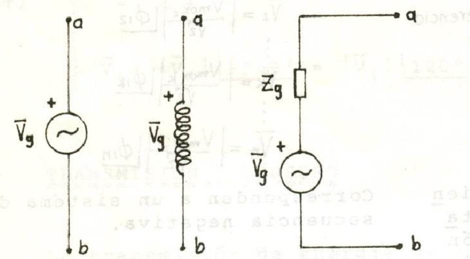


Fig.4.6.- Dipolos que simbolizan una fase en la generación.

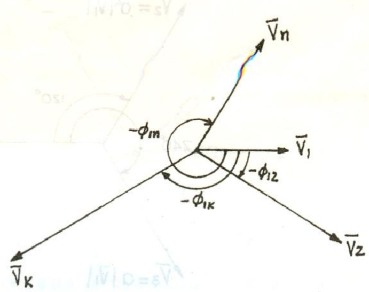
Dependiendo de la construcción de las bobinas y su posición física en la máquina, se obtienen amplitudes de voltaje y ángulo entre cada bobinado diferentes o iguales.

El ángulo que existe entre bobinados (fases) toma el nombre de ANGULO DE FASE.

Para un caso práctico, las fases de generación son idénticas y su ángulo de fase constante. (Generación simétrica).

Para dejar aclaradas las posibilidades de aparición de ondas, se pasa a definir la SECUENCIA DE FASES, y se dice que si cada fase va retrasada respecto a la anterior, el sistema es de SECUENCIA POSITIVA y si por el contrario toda fase adelanta respecto a la anterior, el sistema es de SECUENCIA NEGATIVA.

Pasando del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, se puede representar gráficamente los fasores correspondientes a cada fase y en una determinada secuencia.



dónde:

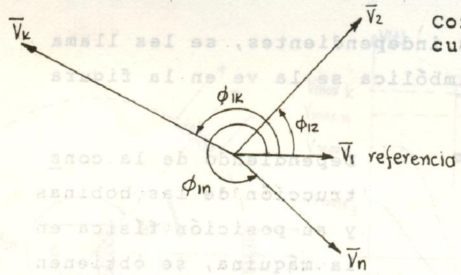
$$\bar{V}_1 = \left|\frac{V_{máx1}}{\sqrt{2}}\right| \angle 0°$$

$$\bar{V}_2 = \left|\frac{V_{máx2}}{\sqrt{2}}\right| \angle -\phi_{12}$$

$$\bar{V}_K = \left|\frac{V_{máxK}}{\sqrt{2}}\right| \angle -\phi_{1K}$$

$$\bar{V}_n = \left|\frac{V_{máxn}}{\sqrt{2}}\right| \angle -\phi_{1n}$$

Fig.4.7.- Fasores correspondientes a ondas de voltaje de una ge



Corresponden a un sistema de secuencia positiva.

donde: $\overline{V}_1 = \left|\frac{V_{max_1}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|0°}$

$\overline{V}_2 = \left|\frac{V_{max_2}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\phi_{12}}$

$\vdots$

$\overline{V}_K = \left|\frac{V_{max_K}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\phi_{1K}}$

$\vdots$

$\overline{V}_n = \left|\frac{V_{max_n}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\phi_{1n}}$

Fig.4.8.- Fasores correspondientes a ondas de voltaje de una generación asimétrica-secuencia negativa.

Corresponden a un sistema de secuencia negativa.

Para una generación simétrica, se tiene que:

$$|\overline{V}_1| = |\overline{V}_2| = \ldots\ldots\ldots = |\overline{V}_K| = \ldots\ldots\ldots = |\overline{V}_n| = |\overline{V}|$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta &= \mp \frac{2\pi}{n} \text{ rad} \\ &= \mp \frac{360°}{n} \text{ grados}\end{aligned}\right\} \text{donde } \underline{n} \text{ es el número de fases}$$

Además, el signo del ángulo de fase determina la secuencia de fases.

Signo (-) → secuencia positiva

(+) → secuencia negativa

Utilizando el vector unitario: $a \triangleq e^{\mp j\theta}$, se puede tener la siguiente notación:

$$\overline{V}_1 = \left|\frac{V_{max_1}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|0°} = |\overline{V}| \quad \text{referencia}$$

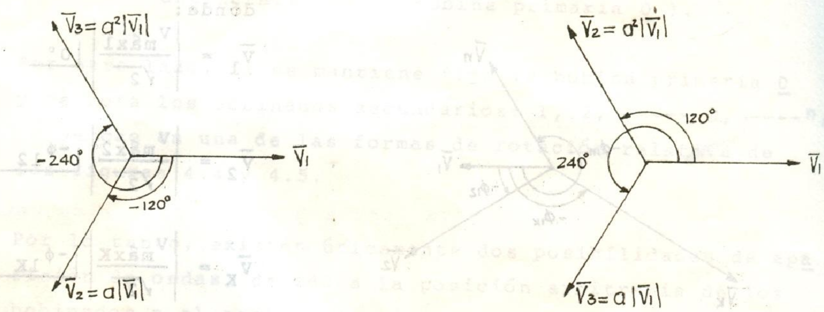
$$\overline{V}_2 = \left|\frac{V_{max_2}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\mp\theta_{12}} = a|\overline{V}|$$

$$\vdots$$

$$\overline{V}_K = \left|\frac{V_{max_K}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\mp\theta_{1K}} = a^{K-1}|\overline{V}|$$

$$\vdots$$

$$\overline{V}_n = \left|\frac{V_{max_n}}{\sqrt{2}}\right| \underline{|\mp\theta_{1n}} = a^{n-1}|\overline{V}|$$



I).- Secuencia Positiva II).- Secuencia Negativa

Fig.4.9.- Fasores correspondientes a ondas de voltaje de una generación simétrica trifásica (3Ø).

Dónde:

$$\text{Sec}(+)\begin{cases}\bar{V}_1 = |\bar{V}_1|\,\underline{|0°}\ \text{referencia}\\ \bar{V}_2 = |\bar{V}_1|\,\underline{|-120°}\\ \bar{V}_2 = |\bar{V}_1|\,\underline{|-240°} = |\bar{V}_1|\,\underline{|120°}\end{cases}\qquad \text{Sec}(-)\begin{cases}\bar{V}_1 = |\bar{V}_1|\,\underline{|0°}\ \text{referencia}\\ \bar{V}_2 = |\bar{V}_1|\,\underline{|120°}\\ \bar{V}_3 = |\bar{V}_1|\,\underline{|240°} = |\bar{V}_1|\,\underline{|-120}\end{cases}$$

II.- TRANSMISION Y CONSUMO

La transmisión de energía se lo hace mediante líneas de interconexión llamadas LINEAS, cuya representación simbólica se ve en la figura 4.10

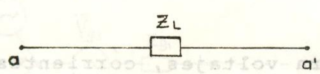


Fig.4.10.- Dipolo que representa la impedancia de líneas de interconexión.

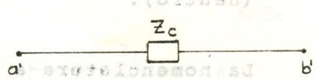


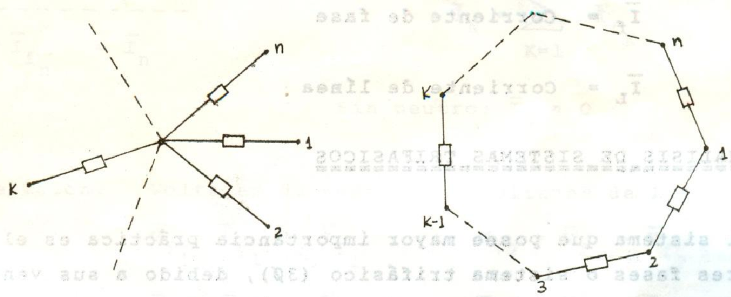
Fig.4.11.- Dipolo que representa la impedancia de la carga.

Respecto al consumo de energía o a la carga, también se considera la representación simbólica dada por la figura 4.11.

Z_C es general, pudiendo ser un elemento pasivo o una combinación de ellos, esta impedancia toma también el nombre de FASE.

4.2.- CONEXION FUENTE - LINEA - CARGA

La conexión de las fases en la generación (fuente) y en el consumo (carga) pueden tener una disposición estrella o polígono



a- Conexión Estrella b- Conexión Polígono

Fig.4.12.- Disposición de fases (fuente y carga)

La disposición estrella se caracteriza por poseer un punto común a las fases llamado NEUTRO.

Por lo tanto, las posibles interconexiones de las disposiciones de las fases en la fuente y carga son:

Estrella → Estrella
Polígono → Polígono
Estrella ↔ Polígono

En la interconexión estrella - estrella puede o no considerarse la conexión de los puntos comunes de las fases (neutro).

La nomenclatura a utilizarse para voltajes, corrientes, potencias, etc, en las fases y líneas serán:

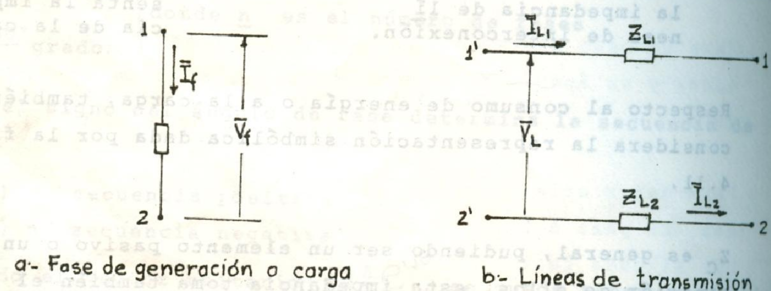


Fig.4.13.- Representación de fases y líneas con sus variables de voltaje y corriente.

Dónde: $\overline{V}_f$ = Voltaje de fase (fuente o carga)

$\overline{V}_L$ = Voltaje entre líneas o simplemente <u>Voltaje de línea</u>

$\overline{I}_f$ = Corriente de fase

$\overline{I}_L$ = Corriente de línea

4.3.- ANALISIS DE SISTEMAS TRIFASICOS

El sistema que posee mayor importancia práctica es el de tres fases o sistema trifásico (3Ø), debido a sus ventajas de tipo económico y técnico.

El análisis se lo hace en base al tipo de conexión entre la fuente y la carga y en base a la consideración de un sistema asimétrico y simétrico. Además se considera una formulación para sistemas polifásicos.

4.3.1. Conexión Estrella - Estrella (Y - Y)

Este tipo de conexión puede o no admitir la interconexión de los puntos comunes de las fases de la generación y carga (Neutro).

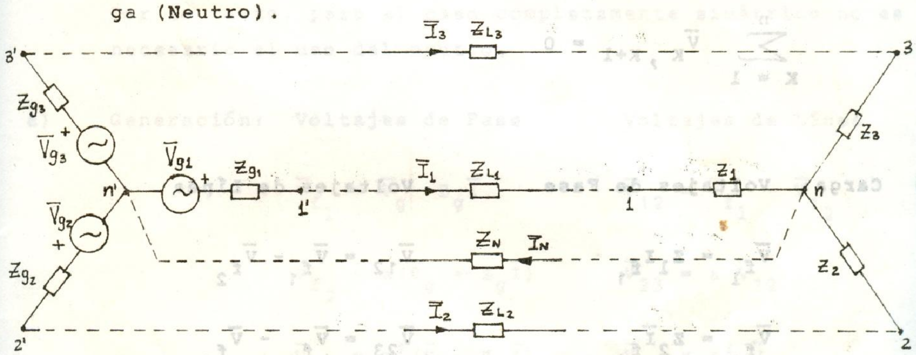


Fig.4.14.- Sistema Trifásico Y - Y con neutro

I.- Sistema Asimétrico

De acuerdo a la estructura de la conexión se tiene que:

Corrientes de Fase = Corrientes de línea (Generación y Carga)

$\bar{I}_{f_1} = \bar{I}_1$

$\bar{I}_{f_2} = \bar{I}_2$ L.C.K: $\bar{I}_N = \bar{I}_{f_1} + \bar{I}_{f_2} + \bar{I}_{f_3}$

$\bar{I}_{f_3} = \bar{I}_3$

$\bar{I}_N = \sum_{K=1}^{n} \bar{I}_{f_K}$

$\bar{I}_{f_n} = \bar{I}_n$

Sin neutro: $\bar{I}_N = 0$

a) Generación: Voltajes de Fase Voltajes de Línea

$\bar{V}_{f_1} = \bar{V}_{g_1} - Z_{g_1}\bar{I}_{f_1}$ $\bar{V}_{12} = \bar{V}_{f_1} - \bar{V}_{f_2}$

$\bar{V}_{f_2} = \bar{V}_{g_2} - Z_{g_2}\bar{I}_{f_2}$ $\bar{V}_{23} = \bar{V}_{f_2} - \bar{V}_{f_3}$

$$\bar{V}_{f_3} = \bar{V}_{g_3} - Z_{g_3}\bar{I}_{f_3} \qquad \bar{V}_{31} = \bar{V}_{f_3} - \bar{V}_{f_1}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$\bar{V}_{f_n} = \bar{V}_{g_n} - Z_{g_n}\bar{I}_{f_n} \qquad \bar{V}_{n-1,n} = \bar{V}_{f_{n-1}} - \bar{V}_{f_n}$$

L.V.K.: $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$

– – – – – – – – – –

$$\sum_{K=1}^{n} \bar{V}_{K,K+1} = 0$$

b) **Carga: Voltajes de Fase** — **Voltajes de Línea**

$$\bar{V}_{f_1} = Z_1 I_{f_1} \qquad \bar{V}_{12} = \bar{V}_{f_1} - \bar{V}_{f_2}$$

$$\bar{V}_{f_2} = Z_2\bar{I}_{f_2} \qquad \bar{V}_{23} = \bar{V}_{f_2} - \bar{V}_{f_3}$$

$$\bar{V}_{f_3} = Z_3\bar{I}_{f_3} \qquad \bar{V}_{31} = \bar{V}_{f_3} - \bar{V}_{f_1}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$\bar{V}_{f_n} = Z_n\bar{I}_{f_n} \qquad \bar{V}_{n-1,n} = \bar{V}_{f_{n-1}} - \bar{V}_{f_n}$$

II.- **Sistema Simétrico**

Dónde: $|\bar{V}_{g_1}| = |\bar{V}_{g_2}| = |\bar{V}_{g_3}| = \cdots = |\bar{V}_{g_n}| = |\bar{V}_g|$

$$Z_{g_1} = Z_{g_2} = Z_{g_3} = \cdots = Z_{g_n} = Z_g$$

$$Z_{L_1} = Z_{L_2} = Z_{L_3} = \cdots = Z_{L_n} = Z_L$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = \cdots = Z_n = Z$$

Además: $a \triangleq \mp e^{j120^\circ} = \mp e^{j\frac{2\pi}{3}}$

Corrientes de Fase = Corrientes de Línea (Generación y Carga).

$$\bar{I}_{f_1} = \bar{I}_1 = \bar{I}$$

$$\bar{I}_{f_2} = a\bar{I} \qquad \text{L.C.K.:} \quad \bar{I}_N = \bar{I} + a\bar{I} + a^2\bar{I} = 0$$

$$\bar{I}_{f_3} = a^2\bar{I} \qquad \bar{I}_N = \sum_{K=1}^{n} \bar{I}_{f_K} = 0$$

$$\bar{I}_{f_n} = a^{n-1}\bar{I}$$

Por lo tanto, para el caso completamente simétrico no es necesario el uso del neutro.

a) Generación: Voltajes de Fase — Voltajes de Línea

$$\bar{V}_{f_1} = \bar{V}_g - Z_g\bar{I} \qquad \bar{V}_{12} = \bar{V}_{f_1} - \bar{V}_{f_2}$$

$$\bar{V}_{f_2} = a(\bar{V}_g - Z_g\bar{I}) \qquad \bar{V}_{23} = a\,\bar{V}_{12}$$

$$\bar{V}_{f_3} = a^2(\bar{V}_g - Z_g\bar{I}) \qquad \bar{V}_{31} = a^2\,\bar{V}_{12}$$

$$\bar{V}_{f_n} = a^{n-1}\bar{V}_{f_1} \qquad \bar{V}_{n-1,n} = a^{n-2}\,\bar{V}_{12}$$

$$\text{L.V.C.:} \quad \sum_{K=1}^{n} \bar{V}_{fK} = 0 \qquad \sum_{K=1}^{n} \bar{V}_{K,K+1} = 0$$

b) Carga: Voltajes de Fase — Voltajes de Línea

$$\bar{V}_{f_1} = Z\,\bar{I} \qquad \bar{V}_{12} = \bar{V}_{f_1} - \bar{V}_{f_2}$$

$$\bar{V}_{f_2} = a\,\bar{V}_{f_1} \qquad \bar{V}_{23} = a\,\bar{V}_{12}$$

$$\bar{V}_{f_3} = a^2\bar{V}_{f_1} \qquad \bar{V}_{31} = a^2\bar{V}_{12}$$

$$\bar{V}_{f_n} = a^{n-1}\bar{V}_{f_1} \qquad \bar{V}_{n-1,n} = a^{n-2}\,\bar{V}_{12}$$

$$\text{L.V.C.:} \sum_{K=1}^{n} \bar{V}_{fK} = 0 \qquad \sum_{K=1}^{n} \bar{V}_{K,K+1} = 0$$

Considerando: $\overline{V}_{f_1} = |\overline{V}_f| \underline{|0°}$, se puede representar el esquema de fasores de voltaje en fase y línea, y de acuerdo a una secuencia,

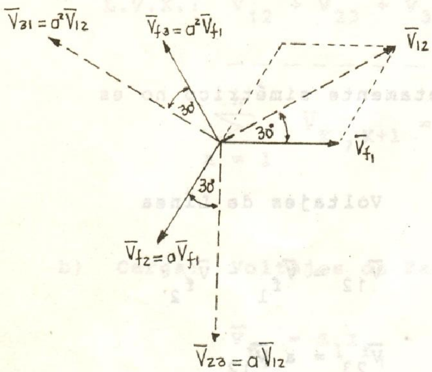


Fig.4.15.- Diagrama fasorial de secuencia positiva.

donde: $\overline{V}_{f_1} = |\overline{V}_f| \underline{|0°}$ referencia

$\overline{V}_{f2} = a|\overline{V}_f|$

$\overline{V}_{f3} = a^2|\overline{V}_f|$

$\overline{V}_{12} = \overline{V}_{f1} - \overline{V}_{f2} = (1-a)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|30°}$

$\overline{V}_{23} = \overline{V}_{f2} - \overline{V}_{f3} = (a-a^2)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|-90°}$

$\overline{V}_{31} = \overline{V}_{f3} - \overline{V}_{f1} = (a^2-1)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|150°}$

$\therefore |\overline{V}_L| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f|$ 4-1

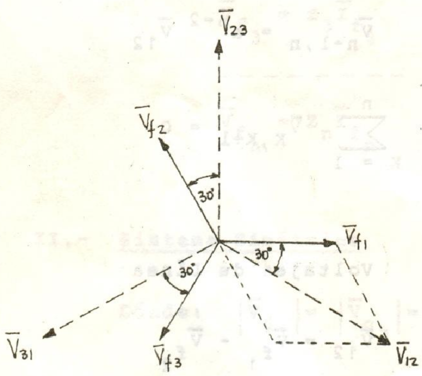


Fig.4.16.- Diagrama fasorial de secuencia negativa.

donde: $\overline{V}_{f1} = |\overline{V}_f| \underline{|0°}$ referencia

$\overline{V}_{f2} = a^2|\overline{V}_f|$

$\overline{V}_{f3} = a|\overline{V}_f|$

$\overline{V}_{12} = \overline{V}_{f_1} - \overline{V}_{f2} = (1-a^2)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|-30°}$

$\overline{V}_{23} = \overline{V}_{f2} - \overline{V}_{f3} = (a^2-a)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|90°}$

$\overline{V}_{31} = \overline{V}_{f3} - \overline{V}_{f1} = (a-1)|\overline{V}_f| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f| \underline{|-150°}$

$\therefore |\overline{V}_L| = \sqrt{3}\,|\overline{V}_f|$

Para un sistema polifásico: $|\overline{V}_L| = 2\,|\overline{V}_f|\ \text{Sen}\,\frac{\pi}{n}$ 4-2

Siendo n el número de fases en la carga.

Las expresiones 4-1 y 4-2, son muy útiles en el análisis de sistemas polifásicos simétricos.

El caso más usual, es el sistema parcialmente simétrico, esto es: generación y líneas simétricas y carga asimétrica.

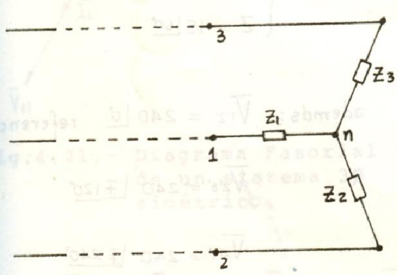


Fig.4.17.- Carga 3Ø asimétrica.

donde: $|\overline{V}_{12}| = |\overline{V}_{23}| = |\overline{V}_{31}| = |\overline{V}_{L}|$

$$\overline{V}_{12} = \overline{V}_{f_1} - \overline{V}_{f_2} \qquad \overline{V}_{f_1} = Z_1 \overline{I}_{f_1}$$

$$\overline{V}_{23} = a\overline{V}_{12} \qquad \overline{V}_{f_2} = Z_2 \overline{I}_{f_2}$$

$$\overline{V}_{31} = a^2\overline{V}_{12} \qquad \overline{V}_{f_3} = Z_3 \overline{I}_{f_3}$$

Si al sistema de la figura 4.17 se le incorpora el conductor neutro, se forza a la carga a que posee voltajes de fase simétricos, esto es:

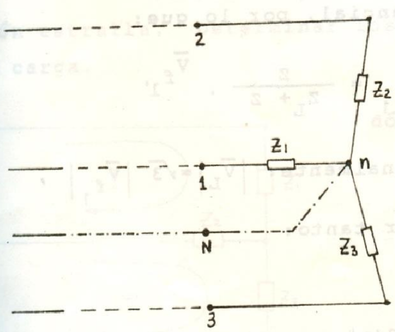


Fig.4.18.- Carga 3Ø asimétrica con neutro.

donde: $|\overline{V}_{12}| = |\overline{V}_{23}| = |\overline{V}_{31}| = |\overline{V}_{L}|$

$$|\overline{V}_{f_1}| = |\overline{V}_{f_2}| = |\overline{V}_{f_3}| = |\overline{V}_{f}| = \frac{|\overline{V}_L|}{\sqrt{3}}$$

si : $\overline{V}_{f_1} = |\overline{V}_f| \angle 0°$, entonces:

$$\overline{I}_{f_1} = Y_1 |\overline{V}_f|$$

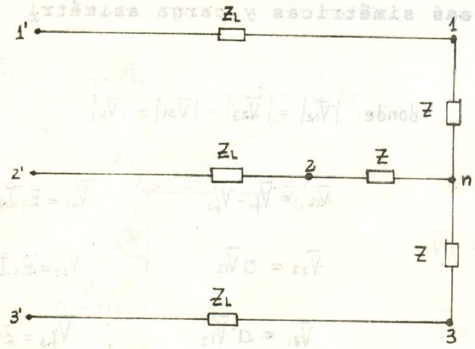
$$\overline{I}_{f_2} = Y_2 a |\overline{V}_f|$$

$$\overline{I}_{f_3} = Y_3 a^2 |\overline{V}_f|$$

también: $\overline{I}_N = \overline{I}_{f_1} + \overline{I}_{f_2} + \overline{I}_{f_3} = (Y_1 + aY_2 + a^2Y_3)|\overline{V}_f|$

Notese que si: $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y$, la corriente a través de

EJEMPLO.- Tres impedancias idénticas de $15\underline{|60°}$ Ohmios se conectan en estrella a un sistema de tres conductores a 240 Voltios entre líneas. Las líneas tienen entre la alimentación y la carga impedancias de 2+j1 Ohmios. Hallar el módulo del voltaje de línea en la carga.



donde: $\begin{cases} Z_L = 2+j1 \\ Z = 15\underline{|60°} \end{cases}$

además: $\overline{V}_{1'2'} = 240\underline{|0°}$ referencia

$\overline{V}_{2'3'} = 240\underline{|\mp 120°}$

$\overline{V}_{3'1'} = 240\underline{|\mp 240°}$

Fig.4.19.- Sistema simétrico en Y

Puesto que alimentación - línea - carga es simétrico, el sistema se reduce a considerar una fase de alimentación, una línea y una fase de carga.

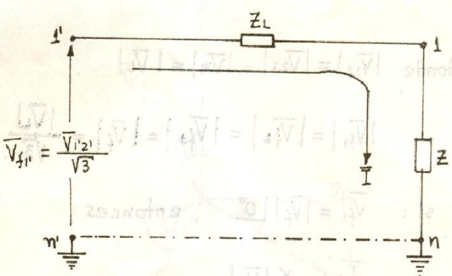


Fig.4.20.- Sistema monofásico.

dónde:

n' y n estarán al mismo potencial, por lo que:

$$\overline{V}_{f_1} = \frac{Z}{Z_L + Z} \cdot \overline{V}_{f_{1'}}$$

finalmente: $|\overline{V}_L| = \sqrt{3}\ |\overline{V}_{f_1}|$,

por tanto:

$$|\overline{V}_L| = \sqrt{3}\left|\frac{Z}{Z_L + Z}\right| |\overline{V}_{f1'}| = \sqrt{3}\left|\frac{15\underline{|60°}}{2+j1 + 15\underline{|60°}}\right| \left|\frac{240}{\sqrt{3}}\right| \simeq 213 \text{ Voltios}$$

EJEMPLO.- El diagrama fasorial de la figura 4.21, representa las corrientes de línea y los voltajes de línea de un sistema trifásico de tres conductores, 346 voltios y secuencia positiva. Si el módulo de la corriente de línea es 10 amperios, hallar la impedancia de la carga conectada en estrella.

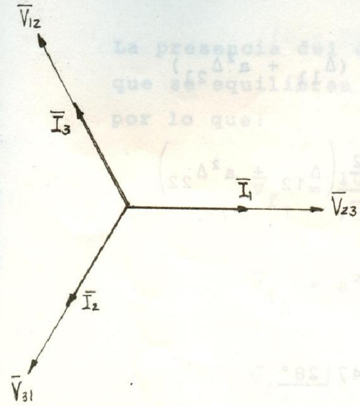


Fig.4.21.- Diagrama Fasorial de un sistema 3Ø simétrico.

donde: $\overline{V}_{23} = 346\angle 0°$ referencia

$\overline{V}_{31} = 346\angle -120°$

$\overline{V}_{12} = 346\angle 120°$

Además: $\overline{I}_1 = 10\angle 0°$

$\overline{I}_2 = 10\angle -120° = a\,\overline{I}_1$

$\overline{I}_3 = 10\angle 120° = a^2\overline{I}_1$

$$\overline{V}_{23} = \overline{V}_{f_2} - \overline{V}_{f_3} = Z\,\overline{I}_{f_2} - Z\,\overline{I}_{f_3}$$

$$= Z\,\overline{I}_2 - Z\,\overline{I}_3 = Z\,(\overline{I}_2 - \overline{I}_3)$$

entonces: $Z = \dfrac{\overline{V}_{23}}{\overline{I}_2 - \overline{I}_3} = \dfrac{\overline{V}_{23}}{(a-a^2)\,\overline{I}_1} = \dfrac{346\angle 0°}{(\sqrt{3}\angle -90°)\,10\angle 0°} = \dfrac{346}{10\sqrt{3}}\angle 90° \simeq 20\angle 90°$ ohmios

EJEMPLO .- Un sistema de tres conductores, 100 Voltios y secuencia negativa, alimenta a una carga con conexión estrella. Determinar los voltajes en las impedancias de la carga.

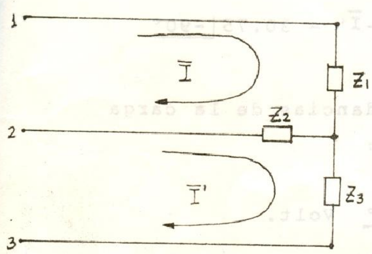


Fig.4.22.- Sistema 3Ø asimétrico.

dónde: $Z_1 = 3+j0$, además: $\overline{V}_{12} = 100\angle 0°$ Re:

$Z_2 = 2+j3$ $\quad\overline{V}_{23} = 100\angle 120°$

$Z_3 = 2-j1$ $\quad\overline{V}_{31} = 100\angle -120°$

Utilizando el Método de Mallas, se tiene:

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = (Z_1 + Z_2)\,\overline{I} - Z_2\overline{I}' \\ \overline{V}_{23} = -\,Z_2\overline{I} + (Z_2 + Z_3)\,\overline{I}' \end{cases}$$, donde:

$$\bar{I} = \bar{V}_{12}\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta Z}\right) + \bar{V}_{23}\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta Z}\right) = \frac{\bar{V}_{12}}{\Delta Z}\left(\Delta_{11} + a^2\Delta_{21}\right)$$

$$\bar{I}' = \bar{V}_{12}\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta Z}\right) + \bar{V}_{23}\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta Z}\right) = \frac{\bar{V}_{12}}{\Delta Z}\left(\Delta_{12} + a^2\Delta_{22}\right)$$

Entonces:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5+j3 & -(2+j3) \\ -(2+j3) & 4+j2 \end{vmatrix} = 21.47\underline{|28°}$$

$$\Delta_{11} = 4+j2 \;;\quad \Delta_{22} = 5+j3 \;;\quad \Delta_{12}=\Delta_{21} = 2+j3$$

Por lo tanto; $$\bar{I} = \frac{100\underline{|0°}}{21.47\underline{|28°}}\left\{4+j2+a^2(2+j3)\right\} = 10.56\underline{|52°}$$

$$\bar{I}' = \frac{100\underline{|0°}}{21.47\underline{|28°}}\left\{2+j3+a^2(5+j3)\right\} = 30.75\underline{|90°}$$

Las corrientes de fase serán: $\bar{I}_1 = \bar{I} = 10.56\underline{|52°}$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'-\bar{I} = 23.55\underline{|106°}$$

$$\bar{I}_3 = -\bar{I}' = 30.75\underline{|-90°}$$

Finalmente, los voltajes en las impedancias de la carga (Voltajes de fase), vienen dados por:

$$\bar{V}_{f_1} = Z_1\bar{I}_1 = 3\times 10.56\underline{|52°} = 31.68\underline{|52°} \text{ Volt.}$$

$$\bar{V}_{f_2} = Z_2\bar{I}_2 = (2+j3)\times 23.35\underline{|106°} = 84.2\underline{|162°} \text{ Volt.}$$

$$\bar{V}_{f_3} = Z_3\bar{I}_3 = (2-j1)\times 30.75\underline{|-90°} = 68.76\underline{|-117°} \text{ Volt.}$$

EJEMPLO.- Al sistema trifásico de la figura 4.22 se le incorpora el conductor neutro. Determinar las corrientes en las impedancias y en el conductor neutro. Construir el diagrama fasorial.

La presencia del conductor neutro sobre la carga, hace que se equilibren los voltajes en las impedancias (fases), por lo que:

$$\overline{V}_{f_1} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{|0°} \quad \text{referencia}$$

$$\overline{V}_{f_2} = a^2\overline{V}_{f_1}$$

$$\overline{V}_{f_3} = a\,\overline{V}_{f_1}$$

Por lo tanto: $\overline{I}_1 = \dfrac{\overline{V}_{f_1}}{\overline{Z}_1} = \dfrac{100\underline{|0°}}{\sqrt{3}\,.\,3} = 19.25\underline{|0°}$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{f_2}}{\overline{Z}_2} = \frac{100\underline{|120°}}{\sqrt{3}\,(2+j3)} = 16.01\underline{|64°}$$

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{V}_{f_3}}{\overline{Z}_3} = \frac{100\underline{|-120°}}{\sqrt{3}\,(2-j1)} = 25.82\underline{|-93°}$$

entonces: $\overline{I}_N = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 27.4\underline{|-25°}$

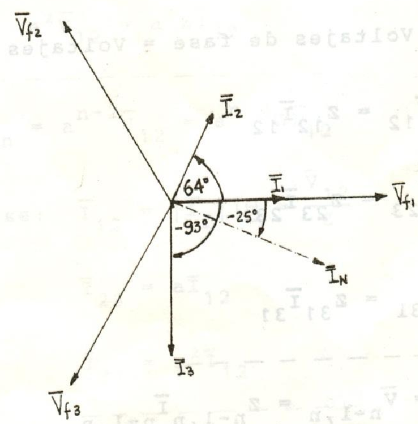


Fig.4.23.- Diagrama fasorial de un sistema 3Ø de carga asimétrica con neutro.

4.3.2.- Conexión Estrella - Polígono (Y - Δ)

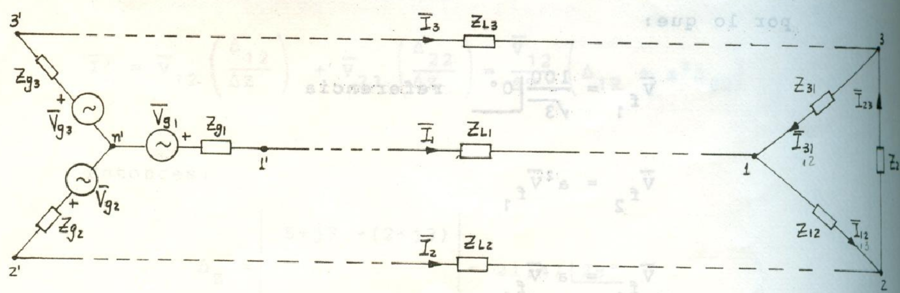


Fig.4.24.- Sistema Trifásico Y-Δ

De acuerdo a la estructura de conexión, ésto no admite la conexión del conductor neutro.

Por otro lado el análisis en generación resulta, similar al caso anterior, tanto en consideraciones asimétricas como también simétricas.

Entonces el análisis básico se rige a la carga.

I.- Sistema Asimétrico

Carga.- Voltajes de fase = Voltajes de línea

$$\overline{V}_{f_{12}} = \overline{V}_{12} = Z_{12}\overline{I}_{12}$$

$$\overline{V}_{f_{23}} = \overline{V}_{23} = Z_{23}\overline{I}_{23}$$

$$\overline{V}_{f_{31}} = \overline{V}_{31} = Z_{31}\overline{I}_{31}$$

— — — — — — — — — — — —

$$\overline{V}_{fn-1,n} = \overline{V}_{n-1,n} = Z_{n-1,n}\overline{I}_{n-1,n}$$

$$\text{L.V.K.}: \sum_{K=1}^{n} \overline{V}_{K,K+1} = 0$$

Corrientes de línea: $\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31}$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23}$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$\bar{I}_{n-1} = \bar{I}_{n-1,n} - \bar{I}_{n-2,n-1}$$

L.C.K.: $\sum_{K=1}^{n} \bar{I}_K = 0$

II.- Sistema Simétrico.-

Carga.- $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z$

Voltajes de fase = Voltajes de línea

$$\bar{V}_{12} = \bar{V}_{12} = Z\bar{I}_{12}$$

$$\bar{V}_{23} = a\bar{V}_{12} = aZ\bar{I}_{12}$$

$$\bar{V}_{31} = a^2\bar{V}_{12} = a^2Z\bar{I}_{12}$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$\bar{V}_{n-1,n} = a^{n-2}\bar{V}_{12} = a^{n-2}Z\bar{I}_{12}$$

Corrientes de fase: $\bar{I}_{12} = |\bar{I}_f|\underline{|\theta} = \dfrac{\bar{V}_{12}}{Z}$

$$\bar{I}_{23} = a\bar{I}_{12}$$

$$\bar{I}_{31} = a^2\bar{I}_{12}$$

$$- - - - - - - -$$

$$\bar{I}_{n-1,n} = a^{n-2}\bar{I}_{12}$$

Corrientes de línea: $\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} = (1-a^2)|\bar{I}_f|\underline{|\theta}$

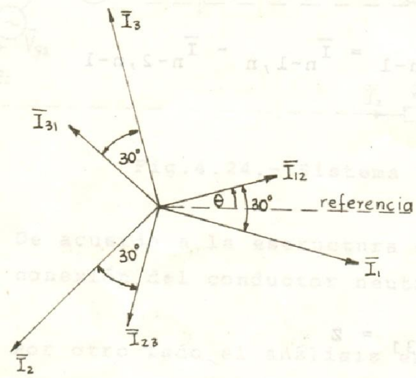
$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12} = (a-1)|\bar{I}_f|\underline{|\theta}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} = (a^2-a)|\bar{I}_f|\underline{|\theta}$$

Por lo tanto: $|(1-a^2)| = |(a-1)| = |(a^2-a)| = \sqrt{3}$, con lo que en consecuencia se tiene:

$$|\overline{I}_L| = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f| \qquad 4\text{-}3$$

Los diagramas fasoriales correspondientes a cada una de las secuencias vendrán dados por las figuras 4.25 y 4.26.



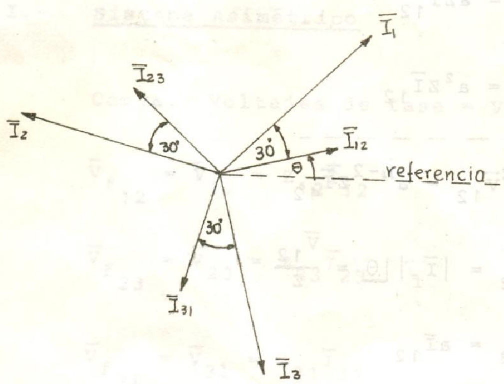
donde:

$$\overline{I}_1 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta-30°}$$

$$\overline{I}_2 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta-150°}$$

$$\overline{I}_3 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta-270°}$$

Fig.-4.25.- Diagrama fasorial de secuencia positiva.



donde:

$$\overline{I}_1 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta+30°}$$

$$\overline{I}_2 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta+150°}$$

$$\overline{I}_3 = \sqrt{3}\ |\overline{I}_f|\ \underline{|\theta+270°}$$

Fig.-4.26.- Diagrama fasorial de secuencia negativa.

Considerando la transformación Polígono-Estrella en la carga, se tiene:

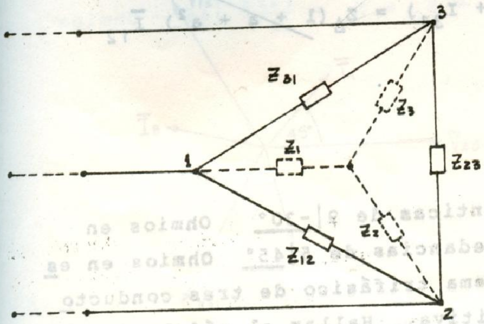


Fig.4.27.- Transformación Polígono - Estrella.

donde:

$$Z_1 = \frac{Z_{12}\cdot Z_{31}}{Z_{12}+Z_{23}+Z_{31}} = \frac{Z_{12}Z_{31}}{\Sigma}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{23}\cdot Z_{12}}{\Sigma}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{31}\cdot Z_{23}}{\Sigma}$$

Si la carga es simétrica: $Z_{12}=Z_{23}=Z_{31}=Z_\Delta$, con lo que:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

Acoplando generación - Línea - Carga simétrica, se obtiene la conexión estrella - estrella ya analizada, cuyas relaciones son:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{g_1}}{Z_g+Z_L+\frac{Z_\Delta}{3}} \qquad \bar{V}_{12} = \frac{Z_\Delta}{3}(\bar{I}_1-\bar{I}_2) = \frac{(1-a)\bar{V}_{g_1}Z_\Delta}{3(Z_g+Z_L)+Z_\Delta}$$

$$\bar{I}_2 = a\,\bar{I}_1 \qquad \bar{V}_{23} = a\,\bar{V}_{12}$$

$$\bar{I}_3 = a^2\bar{I}_1 \qquad \bar{V}_{31} = a^2\bar{V}_{12}$$

---------- ----------

$$\bar{I}_n = a^{n-1}\bar{I}_1 \qquad \bar{V}_{n-1,n} = a^{n-2}\bar{V}_{12}$$

También: $\bar{I}_{12} = \dfrac{\bar{V}_{12}}{Z_\Delta} = \dfrac{(1-a)\bar{V}_{g_1}}{3(Z_g+Z_L)+Z_\Delta}$

$$\bar{I}_{23} = a\,\bar{I}_{12}$$

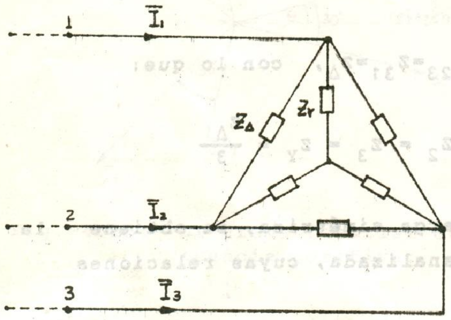
$$\bar{I}_{31} = a^2\bar{I}_{12}$$

$$\bar{I}_{n-1,n} = a^{n-2}\bar{I}_{12}$$

$$\overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31} = Z_\Delta(\overline{I}_{12} + \overline{I}_{23} + \overline{I}_{31}) = Z_\Delta \cancel{(1 + a + a^2)}^{\,0}\ \overline{I}_{12}$$

por lo tanto: $\sum_{K=1}^{n} \overline{I}_{k,k+1} = 0$

EJEMPLO.- Tres impedancias idénticas de $9\underline{|-30°}$ Ohmios en triángulo y tres impedancias de $5\underline{|45°}$ Ohmios en estrella se conectan al mismo sistema trifásico de tres conductores, 480 voltios y secuencia positiva. Hallar el módulo de la intensidad de corriente de línea.



donde: $Z_\Delta = 9\underline{|-30°}$ Ohmios

$Z_Y = 5\underline{|45°}$ Ohmios

Transformando Z_Y a Z'_Δ y combinando con Z_Δ, se tiene:

Fig.4.28.- Carga trifásica Mixta

$$Z = \frac{Z_\Delta\ Z'_\Delta}{Z_\Delta + Z'_\Delta} = \frac{Z_\Delta . 3Z_Y}{Z_\Delta + 3Z_Y} = \frac{9\underline{|-30°}\ .15\underline{|45°}}{9\underline{|-30°}\ +15\underline{|45°}} = 6.96\underline{|-3.4°}$$

Por lo tanto: $\left|\overline{I}_f\right| = \left|\frac{\overline{V}_f}{Z}\right| = \left|\frac{\overline{V}_L}{Z}\right| = \frac{480}{6.96} = 68.97$

Finalmente: $\left|\overline{I}_L\right| = \sqrt{3}\ \left|\overline{I}_f\right| = \sqrt{3}\times 68.97 = 119.45$ Amperios

EJEMPLO.- El sistema de corrientes de línea simétricas en el diagrama fasorial de la figura 4.29, tiene un valor absoluto de 10 amperios y el voltaje de línea es de 120 voltios. Determinar el valor de la impedancia de carga conectada en triángulo y en estrella.

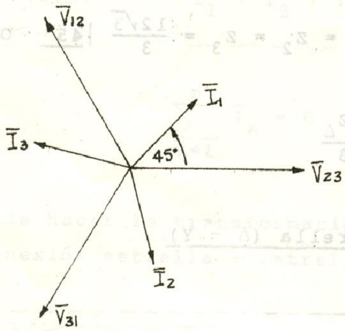


Fig.4.29.- Diagrama Fasorial de Secuencia negativa. positiva

donde:

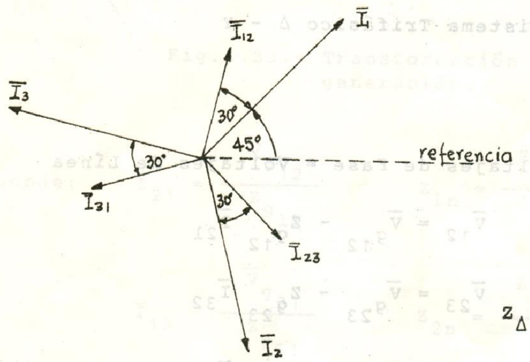
$\bar{V}_{23} = 120\,\underline{|0°}$ Ref, $\bar{I}_1 = 10\,\underline{|4}$

$\bar{V}_{31} = 120\,\underline{|-120°}$ $\bar{I}_2 = 10\,\underline{|-7}$

$\bar{V}_{12} = 120\,\underline{|120°}$ $\bar{I}_3 = 10\,\underline{|16}$

- Impedancia de carga en triángulo: $Z_\Delta = \dfrac{\bar{V}_L}{\bar{I}_f}$

donde: $\bar{I}_{12} = \dfrac{|\bar{I}_1|}{\sqrt{3}}\,\underline{|75°}$



$\bar{I}_{23} = \dfrac{|\bar{I}_1|}{\sqrt{3}}\,\underline{|-45°}$

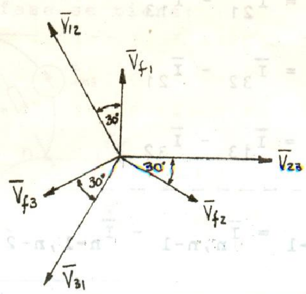
$\bar{I}_{31} = \dfrac{|\bar{I}_1|}{\sqrt{3}}\,\underline{|-165°}$

$$Z_\Delta = \frac{\bar{V}_{12}}{\bar{I}_{12}} = \frac{120\,\underline{|120°}}{\frac{10}{\sqrt{3}}\,\underline{|75°}} = 12\sqrt{3}\,\underline{|4}$$

Fig.4.30.- Diagrama fasorial de Secuencia Positiva.

$Z_\Delta = Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = 12\sqrt{3}\,\underline{|45°}$ Ohmios

- Impedancia de carga en estrella: $Z_Y = \dfrac{\bar{V}_f}{\bar{I}_L}$



donde: $\bar{V}_{f1} = \dfrac{|\bar{V}_{23}|}{\sqrt{3}}\,\underline{|90°}$

$\bar{V}_{f2} = \dfrac{|\bar{V}_{23}|}{\sqrt{3}}\,\underline{|-30°}$

$\bar{V}_{f3} = \dfrac{|\bar{V}_{23}|}{\sqrt{3}}\,\underline{|-150°}$

$$Z_Y = \frac{\bar{V}_{f1}}{\bar{I}_1} = \frac{\frac{120}{\sqrt{3}}\,\underline{|90°}}{10\,\underline{|45°}} = \frac{12}{\sqrt{3}}\,\underline{|45}$$

$$Z_Y = Z_1 = Z_2 = Z_3 = \frac{12\sqrt{3}}{3} \underline{|45°} \quad \text{Ohmios}$$

Nótese que se cumple que: $Z_Y = \dfrac{Z_\Delta}{3}$

4.3.3.- Conexión Polígono - Estrella (Δ - Y)

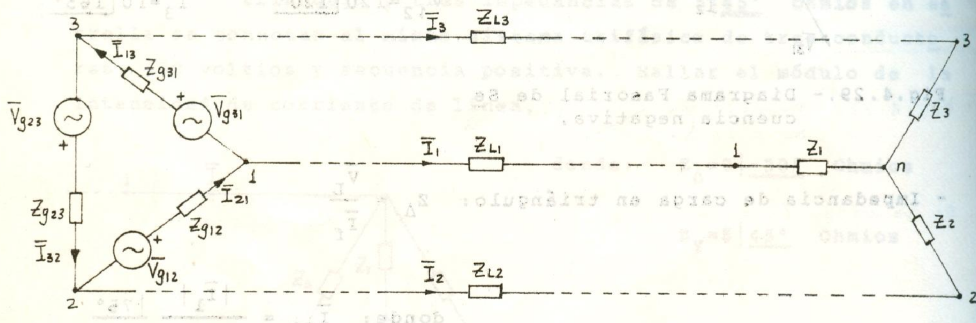


Fig.4.32.- Sistema Trifásico Δ - Y

I.- Sistema Asimétrico

a) Generación: Voltajes de Fase = Voltajes de Línea

$$\bar{V}_{12} = \bar{V}_{g_{12}} - Z_{g_{12}} \bar{I}_{21}$$

$$\bar{V}_{23} = \bar{V}_{g_{23}} - Z_{g_{23}} \bar{I}_{32}$$

$$\bar{V}_{31} = \bar{V}_{g_{31}} - Z_{g_{31}} \bar{I}_{13}$$

$$\bar{V}_{n-1,n} = \bar{V}_{gn-1,n} - Z_{gn-1,n} \bar{I}_{n,n-1}$$

Corrientes de línea: $\bar{I}_1 = \bar{I}_{21} - \bar{I}_{13}$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{32} - \bar{I}_{21}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{13} - \bar{I}_{32}$$

$$\bar{I}_{n-1} = \bar{I}_{n,n-1} - \bar{I}_{n-1,n-2}$$

L.C.K.: $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$

$$\sum_{K=1}^{n} \overline{I}_K = 0$$

Se puede hacer la transformación de fuentes para desembocar en una conexión estrella - estrella (sin neutro) ya analizada.

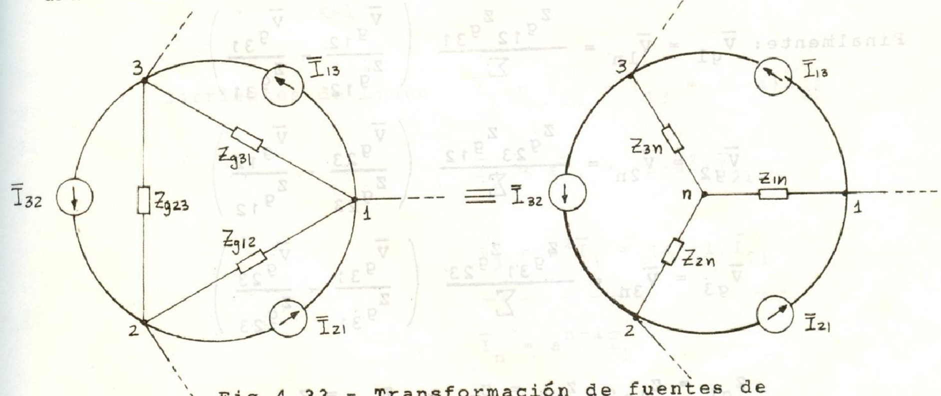


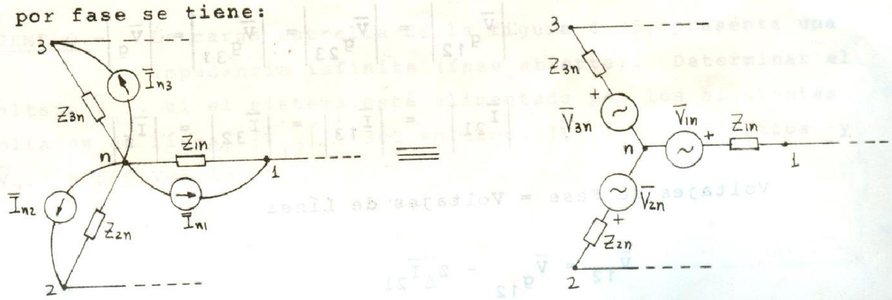
Fig.4.33.- Transformación de fuentes de generación.

donde: $\overline{I}_{21} = \dfrac{\overline{V}_{g12}}{Z_{g12}}$ $\quad Z_{1n} = \dfrac{Z_{g12} Z_{g31}}{Z_{g12} + Z_{g23} + Z_{g31}} = \dfrac{Z_{g12} Z_{g31}}{\Sigma}$

$$\overline{I}_{13} = \frac{\overline{V}_{g31}}{Z_{g31}} \qquad Z_{2n} = \frac{Z_{g23} Z_{g12}}{\Sigma}$$

$$\overline{I}_{32} = \frac{\overline{V}_{g23}}{Z_{g23}} \qquad Z_{3n} = \frac{Z_{g31} Z_{g23}}{\Sigma}$$

Trasladando las fuentes de corriente y obteniendo una equivalente por fase se tiene:



donde: $\bar{I}_{n1} = \bar{I}_{21} - \bar{I}_{13}$ $\quad \bar{V}_{1n} = Z_{1n}\bar{I}_{n1}$

$\bar{I}_{n2} = \bar{I}_{32} - \bar{I}_{21}$ $\quad \bar{V}_{2n} = Z_{2n}\bar{I}_{n2}$

$\bar{I}_{n3} = \bar{I}_{13} - \bar{I}_{32}$ $\quad \bar{V}_{3n} = Z_{3n}\bar{I}_{n3}$

Finalmente: $$\bar{V}_{g1} = \bar{V}_{1n} = \frac{Z_{g_{12}} Z_{g_{31}}}{\Sigma} \left(\frac{\bar{V}_{g_{12}}}{Z_{g_{12}}} - \frac{\bar{V}_{g_{31}}}{Z_{g_{31}}} \right)$$

$$\bar{V}_{g2} = \bar{V}_{2n} = \frac{Z_{g_{23}} Z_{g_{12}}}{\Sigma} \left(\frac{\bar{V}_{g_{23}}}{Z_{g_{23}}} - \frac{\bar{V}_{g_{12}}}{Z_{g_{12}}} \right)$$

$$\bar{V}_{g3} = \bar{V}_{3n} = \frac{Z_{g_{31}} Z_{g_{23}}}{\Sigma} \left(\frac{\bar{V}_{g_{31}}}{Z_{g_{31}}} - \frac{\bar{V}_{g_{23}}}{Z_{g_{23}}} \right)$$

$$Z_{g1} = Z_{1n}, \quad Z_{g2} = Z_{2n}, \quad Z_{g3} = Z_{3n}$$

Por lo tanto, bajo esta estructura, se puede considerar la conexión Y - Y analizada anteriormente.

b) Carga.- Respecto a la carga y líneas se repite también el análisis anterior del sistema asimétrico y simétrico, por lo que no es conveniente repetir todas las relaciones establecidas.

II.- Sistema Simétrico

a) Generación: $Z_{g_{12}} = Z_{g_{23}} = Z_{g_{31}} = Z_{g_\Delta}$

$$\left|\bar{V}_{g_{12}}\right| = \left|\bar{V}_{g_{23}}\right| = \left|\bar{V}_{g_{31}}\right| = \left|\bar{V}_{g}\right|$$

$$\left|\bar{I}_{21}\right| = \left|\bar{I}_{13}\right| = \left|\bar{I}_{32}\right| = \left|\bar{I}_{f}\right|$$

Voltajes de Fase = Voltajes de Línea

$$\bar{V}_{12} = \bar{V}_{g_{12}} - Z_\Delta \bar{I}_{21}$$

$$\bar{V}_{23} = a\,\bar{V}_{12}$$

$$\overline{V}_{31} = a^2\overline{V}_{12}$$

$$-------------$$

$$\overline{V}_{n-1,n} = a^{n-2}\ \overline{V}_{12}$$

L.V.K.: $$\sum_{K=1}^{n} \overline{V}_{K,K+1} = 0$$

Corrientes de Línea: $\overline{I}_1 = \overline{I}_{21} - \overline{I}_{13} = (1-a)\overline{I}_{21}$

$$\overline{I}_2 = a\overline{I}_1 = (a-a^2)\overline{I}_{21}$$

$$\overline{I}_3 = a^2\overline{I}_1 = (a^2-1)\overline{I}_{21}$$

$$-------------$$

$$\overline{I}_n = a^{n-1}\overline{I}_1$$

L.C.K.: $$\sum_{K=1}^{n} \overline{I}_k = 0$$

Para la transformación en la generación se tiene:

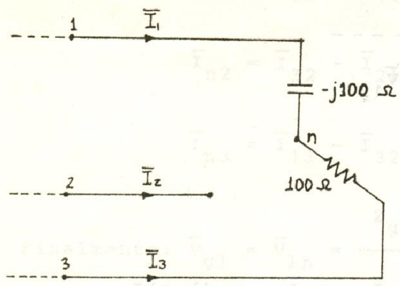
$$Z_{g\Delta} = Z_{1n} = Z_{2n} = Z_{3n}$$

$$\overline{V}_{g1} = \frac{(1-a^2)}{3}\ \overline{V}_{g12}$$

$$\overline{V}_{g2} = a\ \overline{V}_{g1}$$

$$\overline{V}_{g3} = a^2\overline{V}_{g1}$$

EJEMPLO.- La carga estrella de la figura 4.35, presenta una impedancia infinita (fase abierta). Determinar el voltaje $\overline{V}_{n2}$, si el sistema está alimentado por los siguientes voltajes de línea: $|\overline{V}_{12}|$ = 300 voltios, $|\overline{V}_{23}|$ = 400 Voltios y $|\overline{V}_{31}|$ = 500 Voltios y su secuencia es (-)

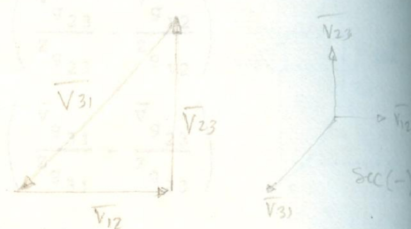


dónde: $\bar{I}_2 = 0$

$\bar{I}_1 = -\bar{I}_3$

Además, por la L.V.K., se tiene que: $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$, para lo cual se tiene:

Fig.4.35.- Sistema 3Ø Asimétrico.



$\bar{V}_{12} = 300\underline{|0°}$

$\bar{V}_{23} = 400\underline{|90°}$

$\bar{V}_{31} = 500\underline{|-126.9°}$

$\bar{V}_{n2} = \bar{V}_{12} - \bar{V}_{1n} = \bar{V}_{12} - (-j100)\,\bar{I}_1$

dónde: $\bar{I}_1 = \dfrac{\bar{V}_{13}}{100-j100} = \dfrac{500\underline{|53.1°}}{100\sqrt{2}\underline{|-45°}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\underline{|98.1°}$

$\bar{V}_{n2} = 300\underline{|0°} + 100\,\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,\underline{|90°+98.1°} = 300\underline{|0°} + 250\sqrt{2}\underline{|188.1°}$

$V_{n2} = 70.58\underline{|-135.1°}$ Voltios.

4.3.4.- Conexión Polígono - Polígono (Δ-Δ)

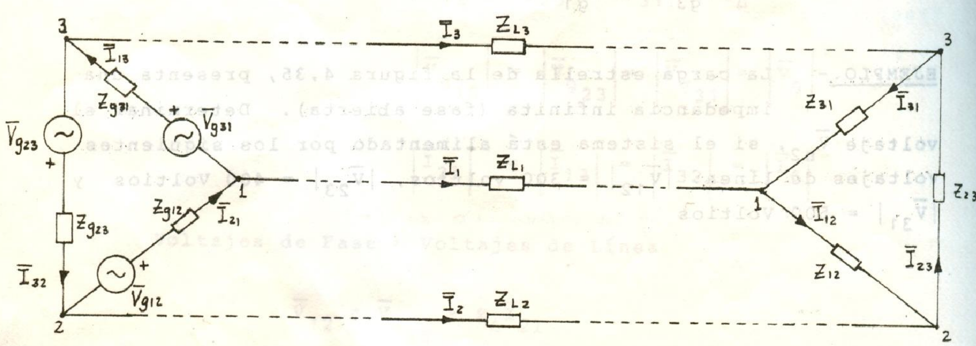


Fig.4.36.- Sistema Trifásico Δ-Δ

En este caso, la conexión presenta una gran ventaja, debido a la flexibilidad con que una impedancia de carga puede añadirse o quitarse. Esto es difícil de realizar con una impedancia de carga estrella, en el aspecto práctico de los sistemas trifásicos.

I.- Sistema Asimétrico.- De acuerdo a la estructura de conexión, se cumple que:

Voltajes de Fase = Voltajes de Línea, tanto en generación como en carga. Además se cumple la L.C.K., para las corrientes de línea, esto es:

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

$$\sum_{K=1}^{n} \overline{I}_{k}=0, \quad \text{puesto que:} \quad \overline{I}_K = \overline{I}_{k+1,k} - \overline{I}_{k,k-1} \quad \text{(Generación)}$$

$$\overline{I}_K = \overline{I}_{K,K+1} - \overline{I}_{K-1,K} \quad \text{(Carga)}$$

También se cumple la L.V.K., esto es:

$$\overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31} = 0$$

$\sum_{K=1}^{n} V_{K,K+1}=0$, fácilmente demostrable si se transforma la generación o carga polígono a estrella.

II.- Sistema Simétrico.- Las relaciones establecidas anteriormente para la conexión polígono se cumplen plenamente, así:

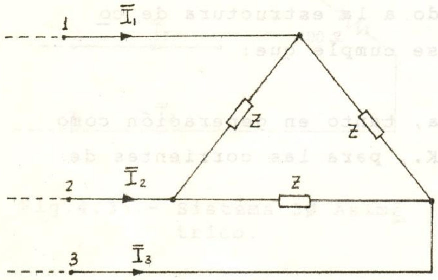
Generación y Carga: $|\overline{I}_L| = \sqrt{3}|\overline{I}_f|$

Además, en la carga, se tiene que: $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z_{\Delta}$, lo que implica de: $\overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31} = 0$, obtener:

$$\overline{I}_{12} + \overline{I}_{23} + \overline{I}_{31} = 0$$

$$\sum_{K=1}^{n} \overline{I}_{k,k+1}=0 \quad \text{corrientes de fase}$$

EJEMPLO.- Tres impedancias de $42\angle{-35°}$ Ohmios se conectan en polígono a un sistema trifásico de tres conductores, 350 voltios y secuencia positiva. Hallar las intensidades de corriente de línea.



dónde: $Z = 42\angle{-35°}$ Ohmios

$|\overline{V}_L| = 350$ Voltios

además: $\begin{cases} \overline{V}_{12} = 350\angle{0°} \text{ referencia} \\ \overline{V}_{23} = 350\angle{-120°} \\ \overline{V}_{31} = 350\angle{120°} \end{cases}$

Fig.4.37.- Sistema 3Ø Simétrico

En este sistema se cumple que: $|\overline{I}_1| = |\overline{I}_2| = |\overline{I}_3| = |\overline{I}_L|$

además: $|\overline{V}_f| = |\overline{V}_L|$ y también: $|\overline{I}_L| = \sqrt{3}|\overline{I}_f|$

Entonces: $\overline{I}_{12} = \dfrac{\overline{V}_{12}}{Z} = \dfrac{350\angle{0°}}{42\angle{-35°}} = 8.33\angle{35°}$ Amperios

$$\overline{I}_{23} = a\,\overline{I}_{12}$$

$$\overline{I}_{31} = a^2\overline{I}_{12}$$

Finalmente: $\overline{I}_1 = \overline{I}_{12} - \overline{I}_{31} = (1-a^2)\overline{I}_{12} = 14.43\angle{5°}$ Amperios

$\overline{I}_2 = a\,\overline{I}_1 = 14.43\angle{-115°}$ Amperios

$\overline{I}_3 = a^2\overline{I}_1 = 14.43\angle{125°}$ Amperios

EJEMPLO.- Determinar las corrientes de línea $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_3$, siendo: $|\overline{V}_{g1}| = |\overline{V}_{g2}| = |\overline{V}_{g3}| = 100$ Voltios y secuencia positiva.

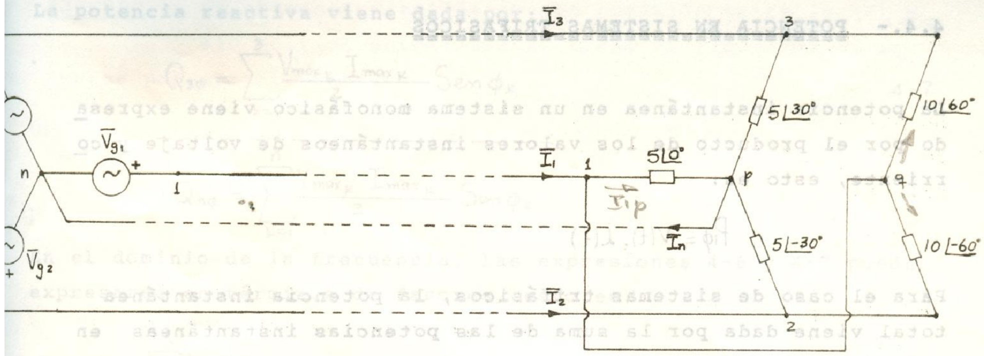


Fig.4.38.- Sistema 3Ø - 4 Conductores, parcialmente simétrico.

dónde:

$$\begin{cases} \bar{V}_{g1} = 100\,|\underline{0^\circ} \\ \bar{V}_{g2} = 100\,|\underline{-120^\circ} \\ V_{g3} = 100\,|\underline{120^\circ} \end{cases}$$

además:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{1p} - \bar{I}_{2q} - \bar{I}_{3q}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{2p} + \bar{I}_{2q}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{3p} + \bar{I}_{3q}$$

por lo tanto:

$$\bar{I}_{1p} = \frac{\bar{V}_{g1}}{5\,|\underline{0^\circ}} = \frac{100\,|\underline{0}}{5\,|\underline{0^\circ}} = 20\,|\underline{0^\circ}$$

$$\bar{I}_{2p} = \frac{\bar{V}_{g_2}}{5\,|\underline{-30^\circ}} = \frac{100\,|\underline{-120^\circ}}{5\,|\underline{-30^\circ}} = 20\,|\underline{-90^\circ}$$

$$\bar{I}_{3p} = \frac{\bar{V}_{g3}}{5\,|\underline{30^\circ}} = \frac{100\,|\underline{120^\circ}}{5\,|\underline{30^\circ}} = 20\,|\underline{90^\circ}$$

$$\bar{I}_{2q} = \frac{\bar{V}_{21}}{10\,|\underline{-60^\circ}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 100\,|\underline{-150^\circ}}{10\,|\underline{-60^\circ}} = 10\sqrt{3}\,|\underline{-90^\circ}$$

$$\bar{I}_{3q} = \frac{\bar{V}_{31}}{10\,|\underline{60^\circ}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 100\,|\underline{150^\circ}}{10\,|\underline{60^\circ}} = 10\sqrt{3}\,|\underline{90^\circ}$$

finalmente:

$$\bar{I}_1 = 20\,|\underline{0^\circ} - 10\sqrt{3}\,|\underline{-90^\circ} - 10\sqrt{3}\,|\underline{90^\circ} = 20\,|\underline{0^\circ} \quad \text{amperios}$$

$$\bar{I}_2 = 20\,|\underline{-90^\circ} + 10\sqrt{3}\,|\underline{-90^\circ} = 37.321\,|\underline{-90^\circ} \quad \text{amperios}$$

$$\bar{I}_3 = 20\,|\underline{90^\circ} + 10\sqrt{3}\,|\underline{90^\circ} = 37.321\,|\underline{90^\circ} \quad \text{amperios}$$

4.4.- POTENCIA EN SISTEMAS TRIFASICOS

La potencia instantánea en un sistema monofásico viene expresado por el producto de los valores instantáneos de voltaje y corriente, esto es:

$$P_{1\phi} = V(t) \cdot i(t)$$

Para el caso de sistemas trifásicos, la potencia instantánea total viene dada por la suma de las potencias instantáneas en cada fase, así:

$$P_{3\phi} = P_{f1} + P_{f2} + P_{f3} = V_{f1} \cdot i_{f1} + V_{f2} \cdot i_{f2} + V_{f3} \cdot i_{f3} \qquad 4\text{-}4$$

Si las ondas de voltaje y corriente, están dadas por las expresiones:

$$V(t) = V_{máx} \operatorname{Cos} \omega t$$

$$i(t) = I_{máx} \operatorname{Cos} (\omega t + \phi)$$

Entonces: $P_{3\phi} = V_{max_1} \operatorname{Cos}\omega t \cdot I_{max_1} \operatorname{Cos}(\omega t + \phi_1) + V_{max_2} \operatorname{Cos}\omega t \cdot I_{max_2} \operatorname{Cos}(\omega t + \phi_2) + V_{max_3} \operatorname{Cos}\omega t \cdot I_{max_3} \operatorname{Cos}(\omega t + \phi_3)$

También:

$$P_{3\phi}(t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{V_{max\,k} \cdot I_{max\,k}}{2} \left[\operatorname{Cos}\phi_k + \operatorname{Cos}(2\omega t + \phi_k)\right] \qquad 4\text{-}5$$

- -

$$P_{n\phi}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_{max\,k} \cdot I_{max\,k}}{2} \left[\operatorname{Cos}\phi_k + \operatorname{Cos}(2\omega t + \phi_k)\right]$$

Según la expresión 4-5, se obtiene la potencia activa, esto es:

$$P_{3\phi} = \sum_{k=1}^{3} \frac{V_{max\,k} \cdot I_{max\,k}}{2} \operatorname{Cos}\phi_k \qquad 4\text{-}6$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$P_{n\phi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_{max\,k} \cdot I_{max\,k}}{2} \operatorname{Cos}\phi_k$$

La potencia reactiva viene dada por:

$$Q_{3\phi} = \sum_{K=1}^{3} \frac{V_{max_K}\, I_{max_K}}{2}\, Sen\, \phi_K \qquad 4\text{-}7$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$Q_{n\phi} = \sum_{K=1}^{n} \frac{V_{max_K}\, I_{max_K}}{2}\, Sen\, \phi_K$$

En el dominio de la frecuencia, las expresiones 4-6 y 4-7 pueden expresarse en términos de fasores, esto es:

$$P_{3\phi} = P_T = \sum_{K=1}^{3} |\overline{V}_K||\overline{I}_K| \, Cos\, \phi_K \longrightarrow \text{conexión estrella}$$

$$= \sum_{K=1}^{3} |\overline{V}_{K,K+1}||\overline{I}_{K,K+1}| \, Cos\, \phi_{K,K+1} \longrightarrow \text{conexión polígono}$$

Igualmente:

$$Q_{3\phi} = Q_T = \sum_{K=1}^{3} |\overline{V}_K||\overline{I}_K| \, Sen\, \phi_K \longrightarrow \text{conexión estrella}$$

$$= \sum_{K=1}^{3} |\overline{V}_{K,K+1}||\overline{I}_{K,K+1}| \, Sen\, \phi_{K,K+1} \longrightarrow \text{conexión polígono}$$

Además ϕ_K ó $\phi_{K,K+1}$, represente el ángulo entre los fasores voltaje y corriente.

De acuerdo al triángulo de potencias (figura 4.39) se tiene:

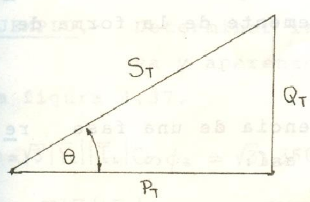


Fig.4.39.- Triángulo de Potencias.

donde: $|S_T| = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$

$$S_T = P_T + j\, Q_T \qquad 4\text{-}8$$

$$Cos\, \theta = \frac{P_T}{|S_T|} \longrightarrow \text{factor de potencia de un sistema } 3\phi \qquad 4\text{-}9$$

Considerando un sistema simétrico, se obtiene las siguientes relaciones:

$$P_T = 3P_f$$

a) Conexión estrella.- $P_f = |\overline{V}_f||\overline{I}_L| \, Cos\, \phi_z$

$P_T = 3|\overline{V}_f||\overline{I}_L| \, Cos\, \phi_z$, de acuerdo a 4-1 , se tiene que: $|\bar{V}_f| = \dfrac{|\bar{V}_L|}{\sqrt{3}}$

$$P_T = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \cos\phi_Z \qquad 4\text{-}10$$

$$Q_T = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \operatorname{Sen}\phi_Z \qquad 4\text{-}11$$

$$|S_T| = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \qquad 4\text{-}12$$

b) Conexión Polígono.-

$$P_f = |\bar{V}_L| |\bar{I}_f| \cos\phi_Z$$

$P_T = 3|\bar{V}_L| |\bar{I}_f| \cos\phi_Z$, de acuerdo a 4-3 , se tiene

que: $|\bar{I}_f| = \dfrac{|\bar{I}_L|}{\sqrt{3}}$

$$P_T = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \cos\phi_Z \qquad 4\text{-}13$$

$$Q_T = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \operatorname{Sen}\phi_Z \qquad 4\text{-}14$$

$$|S_T| = \sqrt{3}\, |\bar{V}_L| |\bar{I}_L| \qquad 4\text{-}15$$

Si se comparan las expresiones: 4-10 y 4-13; 4-11 y 4-14; 4-12 y 4-15, se ve que son las mismas.

Estas últimas expresiones pueden, entonces, ser aplicadas a sistemas trifásicos simétricos, independientemente de la forma de conexión de las fases.

Además debe notarse, que el factor de potencia de una fase representa al factor de potencia trifásico, así:

$$\text{Factor de potencia } 3\emptyset = \cos \emptyset_Z \qquad 4\text{-}16$$

Siendo $\emptyset_Z$ el ángulo entre el voltaje y la corriente en una fase de un sistema trifásico simétrico.

La expresión 4-9 en cambio, es una relación válida para sistemas trifásicos simétricos y asimétricos.

<u>NOTA</u>.- Para el caso de sistemas excitados por ondas no sinusoidales, el factor de potencia debe ser corregido por un factor propio de cada forma de onda.

EJEMPLO.- Un alternador trifásico con conexión estrella (Y) y 440 voltios entre líneas, tiene un límite de 35 amperios por arrollamiento.

a) Cuál es la potencia aparente (KVA) de régimen de la máquina?.

b) Si el alternador suministra una corriente de línea de 20 amperios de intensidad con un factor de potencia 0,65 ¿Cuál es la potencia aparente por fase de la máquina?.

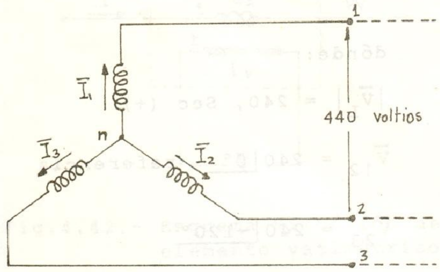


Fig.4.40.- Alternador trifásico en Y.

donde: $|\bar{V}_L| = 440$ voltios

a) $|\bar{I}_L| = 35$ amperios

$$|S_T| = \sqrt{3}\,|\bar{V}_L||\bar{I}_L| = \sqrt{3} \cdot 440 \cdot 35 = 26.6 \text{ KVA}$$

b) $|\bar{I}_L| = 20$ amperios ; f.p. = 0.65

$$|S_f| = |\bar{V}_f||\bar{I}_L| = \frac{|\bar{V}_L|}{\sqrt{3}}|\bar{I}_L| = \frac{440}{\sqrt{3}} \cdot 20 = 5.08 \text{ KVA}$$

También: $P_f = |\bar{V}_f||\bar{I}_L| \cos\phi = \frac{440}{\sqrt{3}} \cdot 20 \cdot 0.65 \simeq 3.3$ KW

$$Q_f = |\bar{V}_f||\bar{I}_L| \operatorname{Sen}\phi = \frac{440}{\sqrt{3}} \cdot 20 \cdot 0.76 \simeq 3.86 \text{ KVAR}$$

$$|S_f| = \sqrt{P_f^2 + Q_f^2} = \sqrt{(3.3)^2 + (3.86)^2} \text{ KVA} \simeq 5.08 \text{ KVA}$$

EJEMPLO.- Determinar las potencias trifásicas: activa, reactiva y aparente y el factor de potencia del sistema de la figura 4.37.

$$P_T = \sqrt{3}\,|\bar{V}_L||\bar{I}_L| \cos\phi_Z = \sqrt{3} \cdot 350 \cdot 14.43 \cos 35° = 7.166 \text{ KW}$$

$$Q_T = \sqrt{3}\,|\bar{V}_L||\bar{I}_L| \operatorname{Sen}\phi_Z = \sqrt{3} \cdot 350 \cdot 14.43 \operatorname{Sen} 35° = 5.017 \text{ KVAR}$$

$$|S_T| = \sqrt{3}\,|\bar{V}_L||\bar{I}_L| = \sqrt{3} \cdot 350 \cdot 14.43 = 8.748 \text{ KVA}$$

Puesto que el ángulo de la impedancia es negativo (-35°), entonces se tiene una carga de dominio capacitivo. En este caso se dice que el factor de potencia está en adelanto, así:

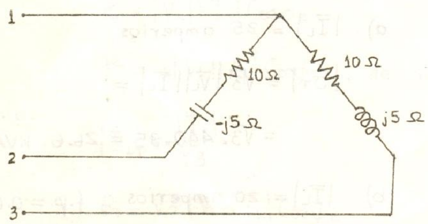
Factor de potencia = Cos (-35°) = 0,82 en adelanto

EJEMPLO.- Determinar el factor de potencia del sistema de la figura 4.29.

Siendo el ángulo de la impedancia Z_Δ y Z_Y positivo (+ 45°), entonces se tiene una carga de dominio inductivo. En este caso se dice que el factor de potencia está en retraso, así:

Factor de potencia = Cos (+ 45°) = 0.707 en retraso.

EJEMPLO.- Determinar la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia del sistema trifásico de la figura 4.41, si el voltaje de alimentación es de 240 voltios entre líneas y secuencia positiva.



dónde:

$|\overline{V}_L| = 240$, Sec (+)

$\overline{V}_{12} = 240\lfloor 0°$ referencia

$\overline{V}_{23} = 240\lfloor -120°$

$\overline{V}_{31} = 240\lfloor 120°$

Fig.4.41.- Sistema 3Ø en Δ abierto

Entonces: $P_T = P_{f12} + P_{f31} = |\overline{V}_{12}||\overline{I}_{f12}|\cos\phi_{12} + |\overline{V}_{31}||\overline{I}_{31}|\cos\phi_{31}$

$$Q_T = Q_{f12} + Q_{f31} = |\overline{V}_{12}||\overline{I}_{f12}|\,\mathrm{Sen}\,\phi_{12} + |\overline{V}_{31}||\overline{I}_{31}|\,\mathrm{Sen}\,\phi_{31}$$

Por lo tanto:

$$\overline{I}_{f12} = \frac{\overline{V}_{12}}{10-j5} = \frac{240\lfloor 0°}{10-j5} = 21.47\lfloor 26.57°$$

$$\overline{I}_{f31} = \frac{\overline{V}_{31}}{10+j5} = \frac{240\lfloor 120°}{10+j5} = 21.47\lfloor 93.43°$$

Así: $P_T = |\overline{V}_L|\left(|\overline{I}_{f12}|\cos\phi_{12} + |\overline{I}_{f31}|\cos\phi_{31}\right) =$

$$= 240 \times 21.47\left(\cos 26.57° + \cos(120-93.43°)\right) = 9217.2 \text{ Watios}$$

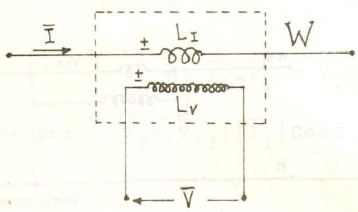
$$Q_T = 240 \times 21.47\left(\mathrm{Sen}\, 26.57° - \mathrm{Sen}(120-93.43°)\right) = 0 \text{ VAR}$$

$$S_T = P_T + jQ_T = 9217.2 \text{ VA}$$

$$f.p. = \cos\theta = \frac{P_T}{S_T} = 1 \longrightarrow \text{factor de potencia } 3\phi \text{ unitario}$$

4.4.1.- Determinación de Potencia Mediante el Uso de Elementos Vatimétricos

La estructura básica de un elemento vatimétrico, es la presentada en la figura 4.42, donde se ve en forma simbólica sus componentes fundamentales.



dónde:

L_I → bobinado de corriente (serie).

L_V → bobinado de voltaje o potencial (Paralelo).

± → Referencias en corriente y voltaje.

Fig.4.42.- Esquema Simbólico de un elemento vatimétrico.

La expresión que sintetiza el efecto de medición de potencia, de un elemento vatimétrico, está dada por:

$$W = |\bar{V}||\bar{I}| \cos \widehat{\bar{V},\bar{I}} \rightarrow \text{expresión de potencia activa.} \qquad 4\text{-}17$$

Mediante el uso de estos elementos vatimétricos, puede determinarse la potencia en un sistema polifásico, bajo el siguiente enunciado:

"La potencia en un sistema de n líneas se puede medir con n elementos vatimétricos dispuestos de modo que cada una de las n líneas contenga una bobina de corriente, estando conectadas las correspondientes bobinas de potencial entre cada línea y un punto común. Si el punto común está sobre una de las líneas, la potencia se la podrá medir mediante (n-1) elementos vatimétricos" (Teorema de Blondel).

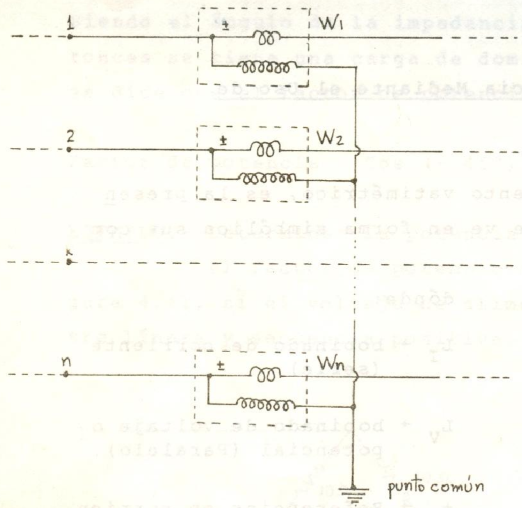


Fig.4.43.- Ubicación de elementos vatimétricos en un sistema de n líneas (con punto común fuera de las líneas).

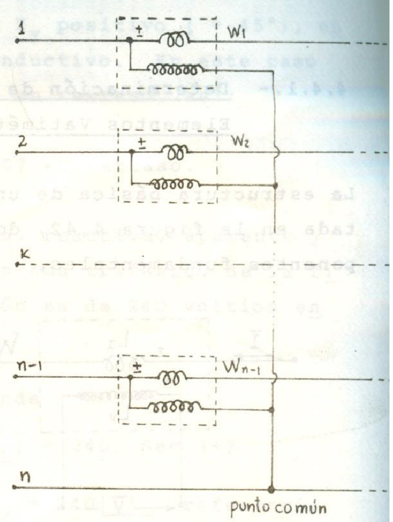


Fig.4.44.- Ubicación de elementos vatimétricos en un sistema de n líneas (con punto común sobre una línea)

Para el caso de sistemas trifásicos, se pueden utilizar 2 ó 3 elementos vatimétricos según se tengan 3 ó 4 líneas respectivamente en el sistema (Figuras 4.45 y 4.46).

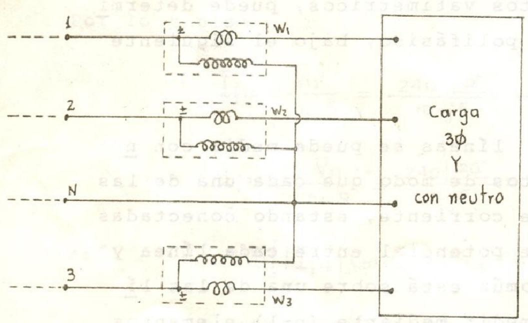


Fig.4.45.- Sistema 3Ø de 4 líneas (Conductores).

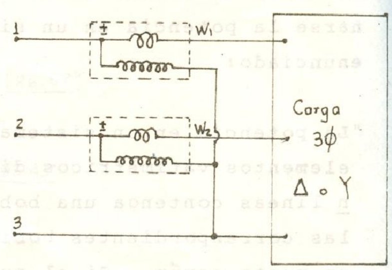


Fig.4.46.- Sistema 3Ø de 3 líneas.

Según la figura 4.46., y considerando una carga estrella, se tiene:

$$S_T = \overline{V}_1 \overline{I}_1^* + \overline{V}_2 \overline{I}_2^* + \overline{V}_3 \overline{I}_3^* = P_T + jQ_T$$

Además: $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$, por no haber neutro,

$\overline{I}_3 = -(\overline{I}_1 + \overline{I}_2) \rightarrow$ para concordar con la ubicación de W_1 y W_2

$\overline{I}_3^* = -\overline{I}_1^* - \overline{I}_2^*$

Entonces: $S_T = \overline{V}_1\overline{I}_1^* + \overline{V}_2\overline{I}_2^* - \overline{V}_3\overline{I}_1^* - \overline{V}_3\overline{I}_2^*$

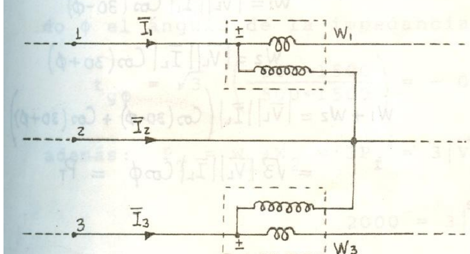
$$= \left(\overline{V}_1 - \overline{V}_3\right)\overline{I}_1^* + \left(\overline{V}_2 - \overline{V}_3\right)\overline{I}_2^*$$

$= \overline{V}_{13}\overline{I}_1^* + \overline{V}_{23}\overline{I}_2^*$, donde la componente real vendrá

dada por: $P_T = \underbrace{|\overline{V}_{13}||\overline{I}_1|\cos\phi_{13,1}}_{W_1} + \underbrace{|\overline{V}_{23}||\overline{I}_2|\cos\phi_{23,2}}_{W_2}$

Finalmente se demuestra que: $P_T = W_1 + W_2$

También se pueden tener otras alternativas de conexión de los vatímetros, figuras 4.47 y 4.48.



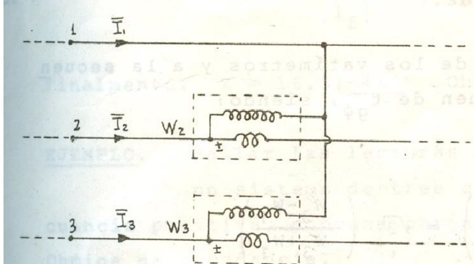
dónde:

$W_1 = |\overline{V}_{12}||\overline{I}_1|\cos\phi 12,1$

$W_3 = |\overline{V}_{32}||\overline{I}_3|\cos\phi 32,3$

$P_T = W_1 + W_3$

Fig.4.47.- Sistema 3Ø de 3 líneas



dónde:

$W_2 = |\overline{V}_{21}||\overline{I}_2|\cos\phi 21,2$

$W_3 = |\overline{V}_{31}||\overline{I}_3|\cos\phi 31,3$

$P_T = W_2 + W_3$

Fig.4.48.- Sistema 3Ø de 3 hilos

Para el caso de un sistema simétrico, con carga conectada en estrella y elementos vatimétricos W_1 y W_2, se tiene el siguiente análisis:

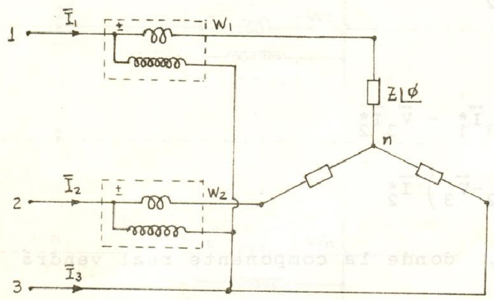


Fig.4.49.- Sistema 3Ø Simétrico

dónde:

$$W_1 = |\overline{V}_{13}||\overline{I}_1|\mathrm{Cos}\phi 13,1$$

$$W_2 = |\overline{V}_{23}||\overline{I}_2|\mathrm{Cos}\phi 23,2$$

además: $|\overline{V}_{13}| = |\overline{V}_{23}| = |\overline{V}_L|$

$$|\overline{I}_1| = |\overline{I}_2| = |\overline{I}_L|$$

Asumiendo una secuencia positiva, se tiene:

$$\phi_{13,1} = 60° - (30° + \phi) = 30° - \phi$$

$$\phi_{23,2} = 30° + \phi$$

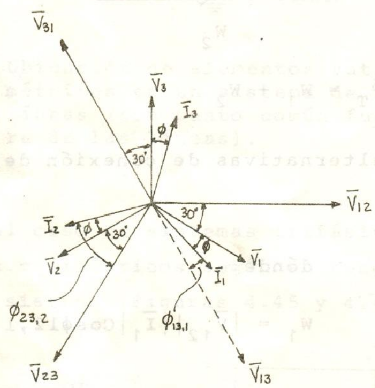


Fig.4.50.- Diagrama fasorial de secuencia positiva.

entonces:

$$W_1 = |\overline{V}_L||\overline{I}_L|\mathrm{Cos}(30-\phi)$$

$$W_2 = |\overline{V}_L||\overline{I}_L|\mathrm{Cos}(30+\phi)$$

$$W_1 + W_2 = |\overline{V}_L||\overline{I}_L|\left(\mathrm{Cos}(30-\phi) + \mathrm{Cos}(30+\phi)\right)$$

$$= \sqrt{3}\,|\overline{V}_L||\overline{I}_L|\mathrm{Cos}\phi = P_T$$

También: $Q_T = \sqrt{3}\,|\overline{V}_L||\overline{I}_L|\mathrm{Sen}\phi = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$, en consecuencia

$$t_{g\phi} = \sqrt{3}\left(\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}\right) \qquad 4\text{-}18$$

De acuerdo a las disposiciones de los vatímetros y a la secuencia de fases, se tiene un resumen de $t_{g\phi}$, siendo:

Secuencia positiva:

$$t_{g\phi} = \sqrt{3}\left(\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_3}{W_2 + W_3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1}\right)$$

Secuencia negativa:

$$t_{g\phi} = \sqrt{3}\left(\frac{W_2-W_1}{W_2+W_1}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{W_3-W_2}{W_3+W_2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{W_1-W_3}{W_1+W_3}\right)$$

Para el caso de una carga simétrica en polígono, se cumplen plenamente las mismas relaciones anteriores.

EJEMPLO.- Los vatímetros situados en las líneas 1 y 2 de un sistema de 120 voltios y secuencia negativa, indican los valores de 1500 y 500 vatios, respectivamente. Hallar las impedancias de la carga equilibrada en polígono.

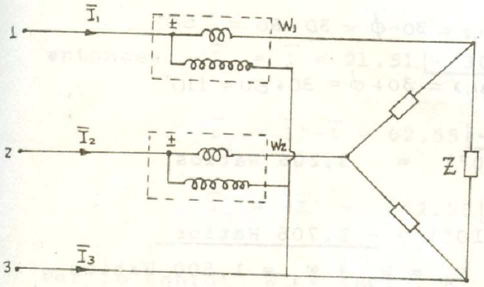


Fig.4.51.- Sistema 3Ø Simétrico

dónde:

$\overline{V}_{12} = 120\underline{|0°}$ referencia

$\overline{V}_{23} = 120\underline{|120°}$

$V_{31} = 120\underline{|-120°}$

entonces: $t_{g\phi} = \sqrt{3}\left(\frac{W_2-W_1}{W_2+W_1}\right)$, siendo ϕ el ángulo de la impedancia.

$$t_{g\phi} = \sqrt{3}\left(\frac{500-1500}{500+1500}\right) = -0.87 \rightarrow \phi = -41°$$

además: $P_T = W_1+W_2 = 3P_f = 3|\overline{V}_L||\overline{I}_f|\text{Cos}\phi$

$2000 = 3|120||\overline{I}_f|\text{Cos } 41°$, dónde:

$$|\overline{I}_f| = \frac{2000}{3\times 120\times \text{Cos } 41°} = 7.36 \text{ Amp.}$$

Por lo tanto: $|Z| = \frac{|\overline{V}_L|}{|\overline{I}_f|} = \frac{120}{7.36} = 16.3$ Ohmios

Finalmente: $Z = 16.3\underline{|-41°}$ Ohmios.

EJEMPLO.- Hallar las lecturas de dos vatímetros utilizados en un sistema de tres conductores, de 240 voltios secuencia positiva, con una carga simétrica en polígono de $20\underline{|80°}$ Ohmios de impedancia.

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = 240\,\underline{|0^\circ} & \text{referencia} \\ \bar{V}_{23} = 240\,\underline{|-120^\circ} \\ \bar{V}_{31} = 240\,\underline{|120^\circ} \end{cases}$$

además:

$$\begin{cases} \bar{I}_{12} = \dfrac{\bar{V}_{12}}{\bar{Z}} = \dfrac{240\,\underline{|0^\circ}}{20\,\underline{|80^\circ}} = \\ \qquad = 12\,\underline{|-80} \\ \bar{I}_{23} = 12\,\underline{|160^\circ} \\ \bar{I}_{31} = 12\,\underline{|40^\circ} \end{cases}$$

Si los vatímetros se conectan en las líneas 2 y 3, se tiene:

$$W_2 = |\bar{V}_{21}|\,|\bar{I}_2|\,\mathrm{Cos}\,\phi_{21,2}$$

$$W_3 = |\bar{V}_{31}|\,|\bar{I}_3|\,\mathrm{Cos}\,\phi_{31,3}$$, donde: $\phi_{21,2} = 30-\phi = 30-80 = -50^\circ$

$$\phi_{31,3} = 30+\phi = 30+80 = 110^\circ$$

Por lo tanto: $W_2 = 240(\sqrt{3}.12)\,\mathrm{Cos}(50^\circ) = 3.206$ Watios

$W_3 = 240(\sqrt{3}.12)\,\mathrm{Cos}(110^\circ) = \underline{-\ 1.706}$ Watios

$P_T = W_2 + W_3 = 1,500$ Watios

NOTA.- Las lecturas negativas en los vatímetros se deben al ángulo de desplazamiento mayor a 90° entre voltaje y corriente.

EJEMPLO.- Un sistema de tres conductores, 480 voltios y secuencia positiva alimenta a una carga en estrella. Hallar las lecturas de los vatímetros ubicados en las líneas 1 y 2, y el factor de potencia del sistema.

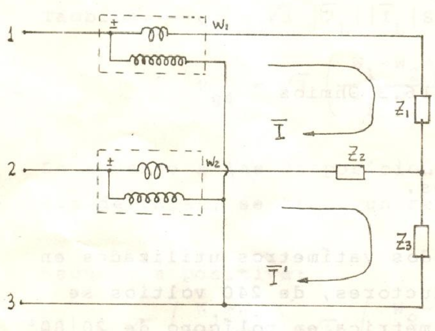


Fig.4.52.- Sistema 3Ø Asimétrico

dónde:

$Z_1 = 10\,\underline{|0^\circ}$

$Z_2 = 5\,\underline{|-30^\circ}$

$Z_3 = 5\,\underline{|30^\circ}$

además:

$\bar{V}_{12} = 480\,\underline{|0^\circ}$ referencia

$\bar{V}_{23} = 480\,\underline{|-120^\circ}$

$\bar{V}_{31} = 480\,\underline{|120^\circ}$

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = (Z_1 + Z_2)\overline{I} - Z_2 \overline{I}' \\ \overline{V}_{23} = -Z_2 \overline{I} + (Z_2 + Z_3)\overline{I}' \end{cases}$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} = 111.56$$

$$\overline{I} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{V}_{12} & -Z_2 \\ \overline{V}_{23} & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\Delta Z} = 21.51 \lfloor -30^\circ$$

$$\overline{I}' = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & \overline{V}_{12} \\ -Z_2 & \overline{V}_{23} \end{vmatrix}}{\Delta Z} = 62.55 \lfloor -110^\circ$$

entonces: $\overline{I}_1 = \overline{I} = 21.51 \lfloor -30^\circ$

$\overline{I}_2 = \overline{I}' - \overline{I} = 62.55 \lfloor -110^\circ - 21.51 \lfloor -30^\circ = 69.59 \lfloor -92.3^\circ$

$\overline{I}_3 = -\overline{I}' = -62.55 \lfloor -110^\circ = 62.55 \lfloor 70^\circ$

Por lo tanto: $W_1 = 480 \times 21.51 \text{ Cos } 30^\circ = 8.94 \text{ KW}$

$W_2 = 480 \times 69.59 \text{ Cos } 27.7^\circ = 29.57 \text{ KW}$

$W_1 + W_2 = 38.51 \text{ KW} = P_T$

$$Q_T = Q_{f_1} + Q_{f_2} + Q_{f_3} = |\overline{V}_1||\overline{I}_1| \text{ Sen}\phi_1 + |\overline{V}_2||\overline{I}_2| \text{ Sen}\phi_2 + |\overline{V}_3||\overline{I}_3| \text{ Sen}\phi_3$$

$\overline{V}_1 = Z_1 \overline{I}_1 = 215.1 \lfloor -30^\circ$, $\quad \overline{V}_2 = Z_2 \overline{I}_2 = 347.95 \lfloor -122.3^\circ$,

$\overline{V}_3 = Z_3 I_3 = 312.75 \lfloor 100^\circ$

Entonces: $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 30^\circ$, $\phi_3 = 30^\circ$

así: $Q_T = 0 + 347.95 \times 69.59 \text{ Sen } 30^\circ - 312.75 \times 62.55 \text{ Sen } 30^\circ$

$= 12106.92 - 9781.26 = 2.33 \text{ KVAR}$

finalmente: $tg\,\phi = \frac{Q_T}{P_T} = \frac{2.33}{38.51} = 0.06 \longrightarrow \phi = 3.46^\circ$

factor de potencia $= \text{Cos}\,\phi = 0.998$ en adelanto.

4.5. METODO DE COMPONENTES SIMETRICAS EN LA RESOLUCION DE SISTEMAS TRIFASICOS

El método de Componentes Simétricas aparece, como un auxiliar, en la resolución de Sistemas Trifásicos asimétricos, fundamentalmente.

Los sistemas trifásicos asimétricos que se van a considerar son de dos tipos:

a).- Sistema que tenga valores de impedancia iguales, pero magnitudes de voltaje y corriente desiguales.

b).- Sistema que esté completamente asimétrico (valores de voltaje, corriente e impedancias diferentes).

El método de Componentes simétricas, supone que un sistema asimétrico de 3 vectores puede ser descompuesto en tres sub-sistemas constituidos por Componentes Simétricas de Secuencia (Teorema de FORTESCUE para un sistema de 3 vectores), siendo:

1.- Subsistema de Componentes Simétricas de Secuencia Positiva: - Formado por tres vectores de igual módulo, diferencia de fase de 120° y secuencia positiva.

2.- Subsistema de Componentes Simétricas de Secuencia Negativa: - Formado por tres vectores de igual módulo, diferencia de fase de 120° y secuencia negativa.

3.- Subsistema de Componentes Simétricas de Secuencia Cero: - Formado por tres vectores de igual módulo y diferencia de fase nula.

En resumen:

$$S_{3\emptyset asimétrico} = S^{(+)}_{3\emptyset simétrico} + S^{(-)}_{3\emptyset Simétrico} + S^{(o)}_{3\emptyset Simétrico} \qquad 4-19$$

Una apreciación gráfica de la última expresión, se lo puede ver en la figura 4.53.a.b.c.d.

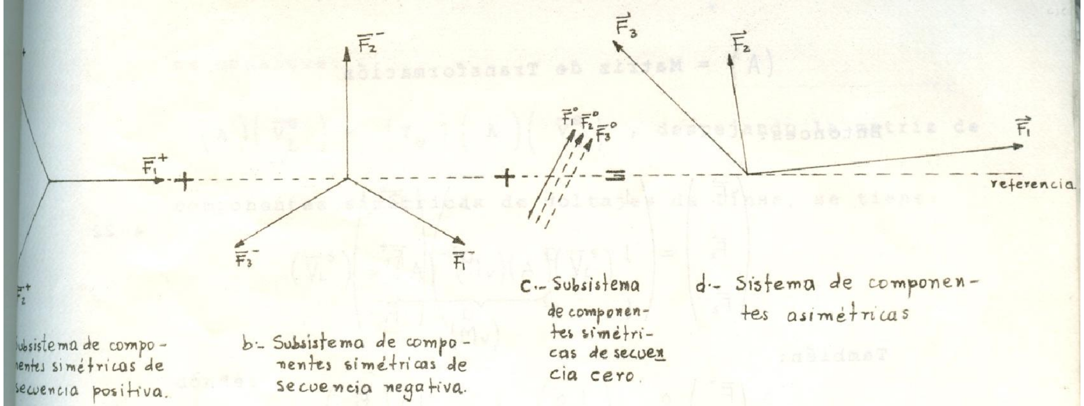


Fig.4.53. Subsistemas Simétricos y Sistema Asimétrico

En forma analítica el sistema de componentes asimétricas, puede ser expresado en función de los subsistemas de componentes simétricas de secuencia a través de las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{\circ} + \vec{F}_1^{+} + \vec{F}_1^{-} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{\circ} + \vec{F}_2^{+} + \vec{F}_2^{-} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_3^{\circ} + \vec{F}_3^{+} + \vec{F}_3^{-} \end{cases} \qquad 4\text{-}20$$

Puesto que: $a \triangleq e^{j120^{\circ}}$

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{\circ} = \vec{F}_2^{\circ} = \vec{F}_3^{\circ} = \vec{F}^{\circ} \\ \vec{F}_2^{+} = a\vec{F}_1^{+} \ , \quad \vec{F}_3^{+} = a^2\vec{F}_1^{+} \\ \vec{F}_2^{-} = a^2\vec{F}_1^{-} \ , \quad \vec{F}_3^{-} = a\vec{F}_1^{-} \end{cases}$$

, se tiene:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}^{\circ} + \vec{F}_1^{+} + \vec{F}_1^{-} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}^{\circ} + a\vec{F}_1^{+} + a^2\vec{F}_1^{-} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}^{\circ} + a^2\vec{F}_1^{+} + a\vec{F}_1^{-} \end{cases} \qquad 4\text{-}21$$

La forma matricial de 4-21, será: $(\vec{F}) = (A)(\vec{F}^{s})$

dónde: $(\vec{F})$ = Matriz de componentes asimétricas

$(\vec{F}^{s})$ = Matriz de componentes simétricas de secuencia.

(A) = Matriz de Transformación

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{F}^{\circ} \\ \overline{F}_1^{+} \\ \overline{F}_1^{-} \end{pmatrix} \qquad 4-22$$

También:

$$\begin{pmatrix} \overline{F}^{\circ} \\ \overline{F}_1^{+} \\ \overline{F}_1^{-} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix} \qquad 4-23$$

Para el análisis de sistemas trifásicos asimétricos, se debe considerar:

$$\begin{cases} \vec{F} = \overline{V} \text{ (Voltajes de línea o de fase)} \\ \vec{F} = \overline{I} \text{ (Corrientes de línea o de fase)} \end{cases}$$

4.5.1. Relación entre Componentes simétricas de Voltajes de Línea y de Fase

Considerando el sistema trifásico de la figura 4.54, se tiene:

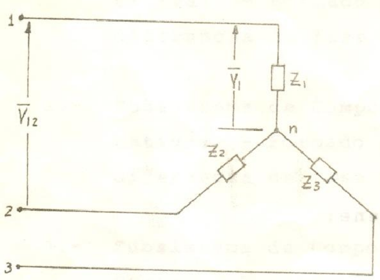


Fig.4.54.- Sistema 3Ø Asimétrico

$$\overline{V}_{12} = \overline{V}_1 - \overline{V}_2$$

$$\overline{V}_{23} = \overline{V}_2 - \overline{V}_3$$

$\overline{V}_{31} = \overline{V}_3 - \overline{V}_1$, en forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_{12} \\ \overline{V}_{23} \\ \overline{V}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

en forma simplificada, se puede expresar:

$$\left(\overline{V}_L\right) = \left(T_V\right)\left(\overline{V}_f\right)$$, aplicando la expresión 4-22

se consigue:

$$\left(A\right)\left(\overline{V}_L^s\right) = \left(T_V\right)\left(A\right)\left(\overline{V}_f^s\right)$$, despejando la matriz de

componentes simétricas de voltajes de línea, se tiene:

$$\left(\overline{V}_L^s\right) = \underbrace{\left(A\right)^{-1}\left(T_V\right)\left(A\right)}_{(M_V)}\left(\overline{V}_f^s\right)$$

dónde:

$$(M_V) = (A)^{-1}(T_V)(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

finalmente:

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_{12}^{\,0} \\ \overline{V}_{12}^{\,+} \\ \overline{V}_{12}^{\,-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_1^{\,0} \\ \overline{V}_1^{\,+} \\ \overline{V}_1^{\,-} \end{pmatrix} \qquad 4\text{-}24$$

La forma matricial 4-24 expresa la relación entre componentes simétricas de voltajes de línea y voltajes de fase.

Además, se ve que:

$$\begin{cases} \overline{V}_{12}^{\,0} = 0 \\ \overline{V}_{12}^{\,+} = (1-a)\,\overline{V}_1^{\,+} = \sqrt{3}\,\overline{V}_1^{\,+}\,\underline{|30^\circ} \\ \overline{V}_{12}^{\,-} = (1-a^2)\,\overline{V}_1^{\,-} = \sqrt{3}\,\overline{V}_1^{\,-}\,\underline{|-30^\circ} \end{cases}$$

Nótese que:

$$\begin{cases} \left|\overline{V}_{12}^{\,+}\right| = \sqrt{3}\,\left|\overline{V}_1^{\,+}\right| \\ \left|\overline{V}_{12}^{\,-}\right| = \sqrt{3}\,\left|\overline{V}_1^{\,-}\right| \end{cases}$$

4.5.2. <u>Relación entre componentes simétricas de corrientes de Línea y de Fase</u>

Considerando el sistema trifásico de la figura 4.55, se tiene:

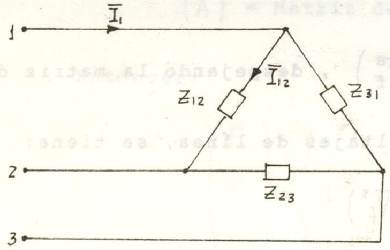


Fig.4.55.- Sistema 3Ø Asimétrico

$\overline{I}_1 = \overline{I}_{12} - \overline{I}_{31}$

$\overline{I}_2 = \overline{I}_{23} - \overline{I}_{12}$

$\overline{I}_3 = \overline{I}_{31} - \overline{I}_{23}$, cuya forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_{12} \\ \overline{I}_{23} \\ \overline{I}_{31} \end{pmatrix}$$

También: $(\overline{I}_L) = (T_I)(\overline{I}_f)$, aplicando la expresión 4-22, se tiene:

$(A)(\overline{I}_L^s) = (T_I)(A)(\overline{I}_f^s)$, dónde: $(\overline{I}_L^s) = (M_I)(\overline{I}_f^s)$

Siendo:

$$(M_I) = (A)^{-1}(T_I)(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} \overline{I}_1^{\circ} \\ \overline{I}_1^{+} \\ \overline{I}_1^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_{12}^{\circ} \\ \overline{I}_{12}^{+} \\ \overline{I}_{12}^{-} \end{pmatrix} \qquad \text{4-25}$$

La forma matricial 4-25 expresa la relación entre componentes simétricas de corrientes de línea y corrientes de fase.

Además, se tiene que:

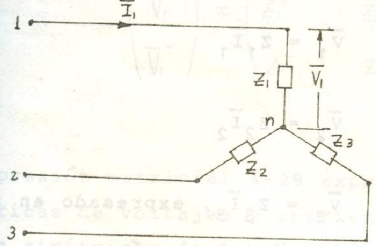
$$\begin{cases} \overline{I}_1^{\circ} = 0 \\ \overline{I}_1^{+} = (1-a^2)\,\overline{I}_{12}^{+} = \sqrt{3}\,\overline{I}_{12}^{+} \underline{|-30^{\circ}} \\ \overline{I}_1^{-} = (1-a)\,\overline{I}_{12}^{-} = \sqrt{3}\,\overline{I}_{12}^{-} \underline{|30^{\circ}} \end{cases}$$

También:

$$\begin{cases} |\overline{I}_1^{+}| = \sqrt{3}\,|\overline{I}_{12}^{+}| \\ |\overline{I}_1^{-}| = \sqrt{3}\,|\overline{I}_{12}^{-}| \end{cases}$$

4.5.3. Potencia en Función de Componentes Simétricas

Considerando el sistema de la figura 4.56, se tiene:



$$S = \bar{V}_1\bar{I}_1^* + \bar{V}_2\bar{I}_2^* + \bar{V}_3\bar{I}_3^*$$, también:

$$S = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \bar{V}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}^*$$

Fig.4.56.- Sistema 3Ø Asimétrico

$S = (\bar{V})^t\ (\bar{I})^*$, aplicando la relación 4 - 22

se tiene: $S = |(A)(\bar{V}^s)|^t\,|(A)(\bar{I}^s)|^*$, pero:

$$|(A)(\bar{V}^s)|^t = (\bar{V}^s)^t (A)^t$$

$$|(A)(\bar{I}^s)|^* = (A)^*(\bar{I}^s)^*$$, entonces:

$$S = (\bar{V}^s)^t (A)^t (A)^* (\bar{I}^s)^*$$

$$S = \begin{pmatrix} \bar{V}_1^\circ & \bar{V}_1^+ & \bar{V}_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1^\circ \\ \bar{I}_1^+ \\ \bar{I}_1^- \end{pmatrix}^* .$$

donde:

$$S = 3\begin{pmatrix} \bar{V}_1^\circ & \bar{V}_1^+ & \bar{V}_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1^\circ \\ \bar{I}_1^+ \\ \bar{I}_1^- \end{pmatrix}^* \qquad 4\text{-}26$$

La forma matricial 4-26 expresa la potencia en función de las componentes simétricas de voltajes y corrientes de fase.

También: $$S = P +_j Q = \underbrace{\underbrace{3\bar{V}_1^\circ \bar{I}_1^{\circ *}}_{S^\circ}}_{P^\circ +_j Q^\circ} + \underbrace{\underbrace{3\bar{V}_1^+ \bar{I}_1^{+*}}_{S^+}}_{P^+ +_j Q^+} + \underbrace{\underbrace{3\bar{V}_1^- \bar{I}_1^{-*}}_{S^-}}_{P^- +_j Q^-} \qquad 4\text{-}27$$

$$S = (P^\circ + P^+ + P^-) +_j (Q^\circ + Q^+ + Q^-)$$

Si: $\bar{I}_1^\circ = 0$, entonces: $S^\circ = 0$

4.5.4.- Impedancia en Función de Componentes Simétricas

Considerando el sistema de la figura 4.57, se tiene:

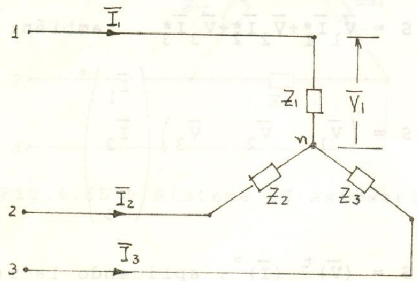


Fig.4.57.- Sistema 3Ø Asimétrico

$\overline{V}_1 = Z_1\overline{I}_1$

$\overline{V}_2 = Z_2\overline{I}_2$

$\overline{V}_3 = Z_3\overline{I}_3$, expresado en forma matricial, será:

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \\ \overline{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{pmatrix}$$

plicondo la relación 4-22 a los voltajes y corrientes de fase, se tiene lo siguiente:

$$(\overline{V}_f) = (Z_c)(\overline{I}_f)$$

$$(A)(\overline{V}_f^s) = (Z_c)(A)(\overline{I}_f^s) \quad , \text{ donde: } \quad (\overline{V}_f^s) = \underbrace{(A)^{-1}(Z_c)(A)}_{(Z_c^s)}(\overline{I}_f^s)$$

Entonces:

$$(A)^{-1}(Z_c)(A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} Z_1+Z_2+Z_3 & Z_1+aZ_2+a^2Z_3 & Z_1+a^2Z_2+aZ_3 \\ Z_1+a^2Z_2+aZ_3 & Z_1+Z_2+Z_3 & Z_1+aZ_2+a^2Z_3 \\ Z_1+aZ_2+a^2Z_3 & Z_1+a^2Z_2+aZ_3 & Z_1+Z_2+Z_3 \end{pmatrix} = (Z_c^s)$$

donde se define:

$$\left\{\begin{aligned} Z_1^0 &= \tfrac{1}{3}(Z_1+Z_2+Z_3) \\ Z_1^+ &= \tfrac{1}{3}(Z_1+a^2Z_2+aZ_3) \\ Z_1^- &= \tfrac{1}{3}(Z_1+aZ_2+a^2Z_3) \end{aligned}\right. \qquad 4\text{-}28$$

finalmente:

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_1^{\circ} \\ \overline{V}_1^{+} \\ \overline{V}_1^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1^{\circ} & Z_1^{-} & Z_1^{+} \\ Z_1^{+} & Z_1^{\circ} & Z_1^{-} \\ Z_1^{-} & Z_1^{+} & Z_1^{\circ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_1^{\circ} \\ \overline{I}_1^{+} \\ \overline{I}_1^{-} \end{pmatrix} \qquad 4\text{-}29$$

La expresión matricial 4-29 expresa la relación de componentes simétricas de voltajes y corrientes de fase a través de componentes simétricas de impedancias.

Para un caso particular, en que: $Z_1=Z_2=Z_3=Z$, de acuerdo a las relaciones 4-28, se tiene:

$$\begin{cases} Z_1^{+} = Z_1^{-} = 0 \\ Z_1^{\circ} = Z \end{cases}$$

por lo tanto, en sistemas de carga simétrica, voltajes y corrientes asimétricas, prevalece únicamente la impedancia de secuencia cero (impedancia simétrica de carga).

Así:

$$\begin{cases} \overline{V}_1^{\circ} = Z\,\overline{I}_1^{\circ} \\ \overline{V}_1^{+} = Z\,\overline{I}_1^{+} \\ \overline{V}_1^{-} = Z\,\overline{I}_1^{-} \end{cases} \qquad 4\text{-}30$$

<u>EJEMPLO</u>.- Determinar las componentes simétricas del sistema de voltajes dado por:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = 10\,\underline{|30^{\circ}} \\ \overline{V}_2 = 30\,\underline{|-60^{\circ}} \\ \overline{V}_3 = 15\,\underline{|-145^{\circ}} \end{cases}$$

$$\overline{V}_1^{\circ} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3\right) = \frac{1}{3}\left(10\,\underline{|30^{\circ}} + 30\,\underline{|-60^{\circ}} + 15\,\underline{|-145^{\circ}}\right) = 10.57\,\underline{|-68.97^{\circ}}$$

$$\overline{V}_1^{+} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_1 + a^2\overline{V}_2 + a\overline{V}_3\right) = \frac{1}{3}\left\{10\,\underline{|30^{\circ}} + \left(30\,\underline{|-60^{\circ}}\right)\left(1\,\underline{|120^{\circ}}\right) + \left(15\,\underline{|-145^{\circ}}\right)\left(1\,\underline{|-120^{\circ}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(10\,\underline{|30^{\circ}} + 30\,\underline{|60^{\circ}} + 15\,\underline{|95^{\circ}}\right) = 17.02\,\underline{|64.05^{\circ}}$$

$$\overline{V}_1^- = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_1 + a\overline{V}_2 + a^2\overline{V}_3\right) = \frac{1}{3}\left\{10\underline{|30^\circ} + \left(30\underline{|-60^\circ}\right)\left(1\underline{|-120^\circ}\right) + \left(15\underline{|-145^\circ}\right)\left(1\underline{|120^\circ}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(10\underline{|30^\circ} + 30\underline{|180^\circ} + 15\underline{|-25^\circ}\right) = 2.62\underline{|-170.19^\circ}$$

Los subsistemas de componentes simétricas del sistema asimétrico del ejemplo se representa en la figura 4.58

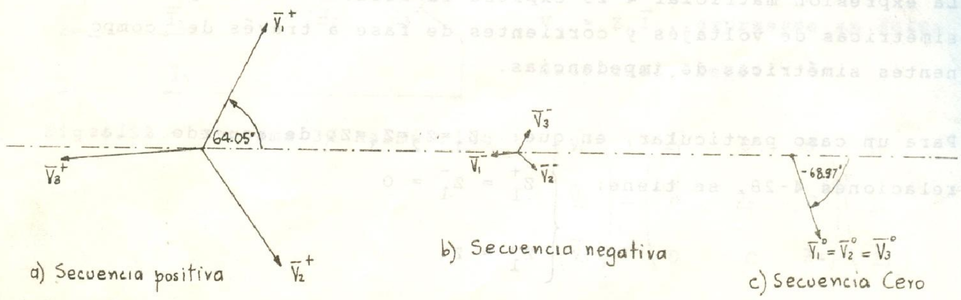


Fig.4.58.- Subsistemas de Componentes Simétricas.

EJEMPLO.- Determinar en forma gráfica las componentes simétricas del sistema asimétrico dado por la figura 4.59.

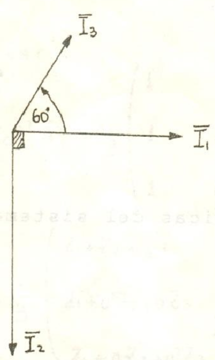
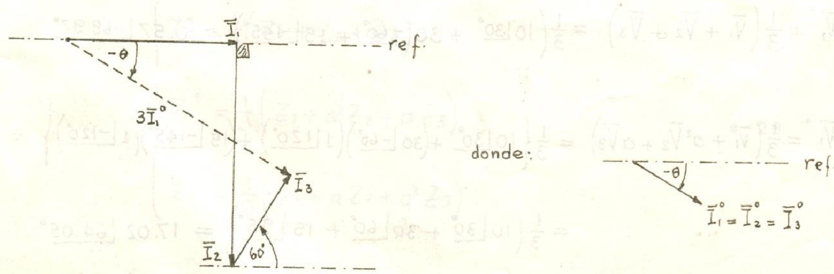


Fig.4.59.- Sistema Asimétrico

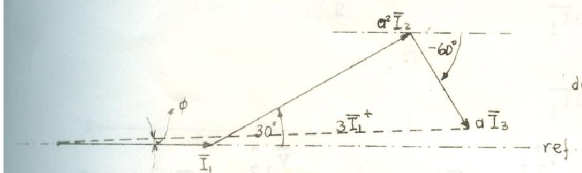
Mediante el uso de las relaciones 4-23 se puede obtener las componentes simétricas del sistema asimétrico. Esta relación puede ser interpretada en forma gráfica, siendo:

$\overline{I}_1^0 = \frac{1}{3}\ (\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3)$, esto significa que la componente simétrica de secuencia cero es la tercera parte del vector resultante de la suma de los tres vectores asimétricos.

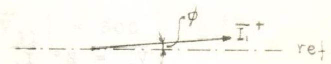


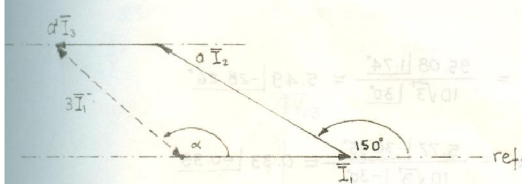
La componente de secuencia positiva y negativa, será respectivamente:

$\overline{I}_1^{+} = \frac{1}{3}\left(\overline{I}_1 + a^2\overline{I}_2 + a\ \overline{I}_3\right)$, $\overline{I}_1^{-} = \frac{1}{3}\left(\overline{I}_1 + a\ \overline{I}_2 + a^2\ \overline{I}_3\right)$, cuyas formas gráficas se representan a continuación:

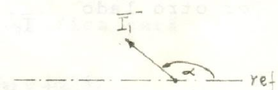


donde:





donde:



PROBLEMA.- En el circuito de la Figura 4.60, determinar las relaciones $\overline{V}_L^s/\overline{V}_f^s$, además usando como método intermedio el de las componentes simétricas, determinar $\overline{I}_L$ y P

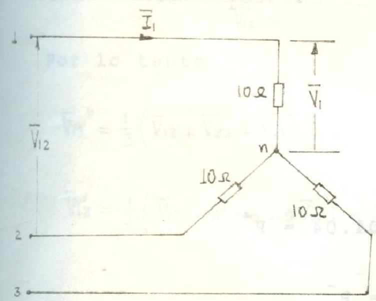


Fig.4.60.- Sistema Asimétrico (excitación asimétrica, carga simétrica)

donde:
$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = 100\,\underline{|0°} \\ \overline{V}_{23} = 90\,\underline{|240°} \\ \overline{V}_{31} = 95.5\,\underline{|125.2°} \end{cases}$$

debido a la característica del circuito, se cumple que:

$$\begin{cases} \overline{I}_1^{\circ} = \frac{1}{3}(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3) = 0 \text{ , además} \\ \overline{V}_{12}^{\circ} = \frac{1}{3}(\overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31}) = 0 \end{cases}$$

También: $\overline{V}_{12}^{+} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_{12} + a^2\,\overline{V}_{23} + a\,\overline{V}_{31}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(100\,\underline{|0°} + 90\,\underline{|240° + 120°} + 95.5\,\underline{|125.2° - 120°}\right) = 95.08\,\underline{|1.74°}$$

$$\overline{V}_{12}^{-} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_{12} + a\overline{V}_{23} + a^2\,\overline{V}_{31}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(100\,\underline{|0°} + 90\,\underline{|240° - 120°} + 95.5\,\underline{|125.2° + 120°}\right) = 5.77\,\underline{|-30.35°}$$

Según la relación matricial 4-29, se tiene para este ejemplo lo siguiente:

$$\overline{V}_1^\circ = Z_1^\circ \overline{I}_1^\circ = 10\overline{I}_1^\circ = 0$$

$$\overline{V}_1^+ = Z_1^\circ \overline{I}_1^+ = 10\overline{I}_1^+$$

$$\overline{V}_1^- = Z_1^\circ \overline{I}_1^- = 10\overline{I}_1^-$$

Por lo que: $\frac{\overline{V}_{12}^\circ}{\overline{V}_1^\circ} = \text{ind}$; $\frac{\overline{V}_{12}^+}{\overline{V}_1^+} = \sqrt{3}\,\underline{|30°}$ y $\frac{\overline{V}_{12}^-}{\overline{V}_1^-} = \sqrt{3}\,\underline{|-30°}$

Por otro lado $\overline{I}_1^+ = \frac{\overline{V}_{12}^+}{\sqrt{3}\,\underline{|30°}\,.\,Z_1^\circ} = \frac{95.08\,\underline{|1.74°}}{10\sqrt{3}\,\underline{|30°}} = 5.49\,\underline{|-28.26°}$

$$\overline{I}_1^- = \frac{\overline{V}_{12}^-}{\sqrt{3}\,\underline{|-30°}\,.\,Z_1^\circ} = \frac{5.77\,\underline{|-30.35°}}{10\sqrt{3}\,\underline{|-30°}} = 0.33\,\underline{|-0.35°}$$

Según 4-27, se tiene:

$S = S^\circ + S^+ + S^-$, donde: $S^\circ = 0$ puesto que $\overline{I}_1^\circ = 0$, entonces:

$$\overline{V}_1 = 10\,\overline{I}_1^+ = 54.9\,\underline{|-28.26°}$$

$$\overline{V}_1 = 10\,\overline{I}_1^- = 3.33\,\underline{|-0.35°}$$

$$S^+ = 3 \times 54.89\,\underline{|-28.26°} \times 5.49\,\underline{|28.26°} = 904.04 = P^+$$

$$S^- = 3 \times 3.33\,\underline{|-0.35°} \times 0.33\,\underline{|0.35°} = 3.3 = P^-$$

Finalmente: $\overline{I}_1 = \overline{I}_1^\circ + \overline{I}_1^+ + \overline{I}_1^- = 5.78\,\underline{|-26.73°}$ amp.

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_1^\circ + a\,\overline{I}_1^+ + a^2\,\overline{I}_1^- = 5.49\,\underline{|-151.71°} \text{ amp.}$$

$$\overline{I}_3 = \overline{I}_1^\circ + a^2\,\overline{I}_1^+ + a\,\overline{I}_1^- = 5.21\,\underline{|93.67°} \text{ amp.}$$

$$P = P^\circ + P^+ + P^- = 907.34 \text{ vatios}$$

EJEMPLO.- Utilizando como método intermedio el de las componentes simétricas, determinar las corrientes de línea en el circuito de la Figura 4.61.

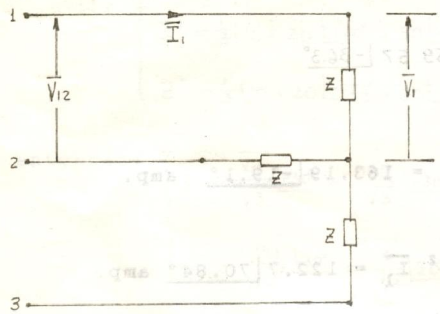


Fig.4.61.- Sistema Asimétrico (excitación asimétrica, carga simétrica).

donde:

$|\overline{V}_{12}|$ = 300 Voltios

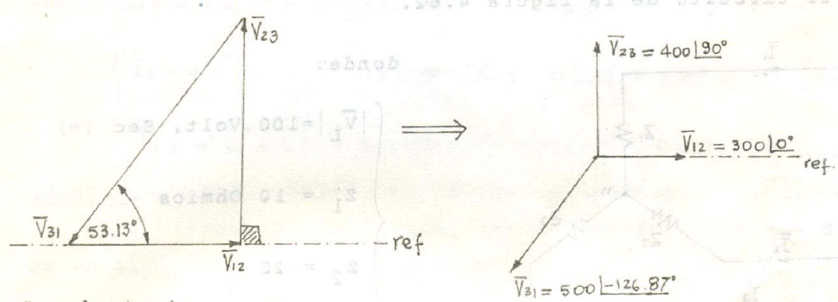
$|\overline{V}_{23}|$ = 400 $\angle 90°$

$|\overline{V}_{31}|$ = 500 $\angle -126.87$

Z= 1+j1 Ohmios

Puesto que se debe cumplir:

$\overline{V}_{12}+\overline{V}_{23}+\overline{V}_{31}=0$, entonces la gráfica será:



Por lo tanto:

$$\overline{V}_{12}^{\,\circ} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31}\right) = 0$$

$$\overline{V}_{12}^{+} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_{12} + a^2\overline{V}_{23} + a\overline{V}_{31}\right) = \frac{1}{3}\left(300\angle 0° + 400\angle 90°+120° + 500\angle -126.87°-120°\right) =$$

$$= 118.54\angle 133.06°$$

$$\overline{V}_{12}^{-} = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_{12} + a\overline{V}_{23} + a^2\overline{V}_{31}\right) = \frac{1}{3}\left(300\angle 0° + 400\angle 90°-120° + 500\angle -126.87°+120°\right) =$$

$$= 390.85\angle -21.3°$$

Además:

$$\overline{V}_1^{\,+} = \frac{\overline{V}_{12}^{\,+}}{\sqrt{3}}\angle -30° = \frac{118.54\angle 133.06°-30°}{\sqrt{3}} = 68.44\angle 103.06°$$

$$\overline{V}_1^{\,-} = \frac{\overline{V}_{12}^{\,-}}{\sqrt{3}}\angle 30° = \frac{390.85\angle -21.3°+30°}{\sqrt{3}} = 225.66\angle 8.7°$$

También:

$$\overline{I}_1^{\,\circ} = \frac{1}{3}\left(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3\right) = 0$$

$$\overline{I}_1^{\,+} = \frac{\overline{V}_1^{\,+}}{Z^{\circ}} = \frac{68.44\angle 103.06°}{\sqrt{2}\angle 45°} = 48.39\angle 58.06°$$

$$\overline{I}_1^- = \frac{\overline{V}_1^-}{Z_1^\circ} = \frac{225.66\,\underline{|8.7^\circ}}{\sqrt{2}\,\underline{|45^\circ}} = 159.57\,\underline{|-36.3^\circ}$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{I}_1^\circ + \overline{I}_1^+ + \overline{I}_1^- = 163.19\,\underline{|-19.1^\circ} \text{ amp.} \\ \overline{I}_2 = \overline{I}_1^\circ + a\,\overline{I}_1^+ + a^2\,\overline{I}_1^- = 122.7\,\underline{|70.84^\circ} \text{ amp.} \\ \overline{I}_3 = \overline{I}_1^\circ + a^2\overline{I}_1^+ + a\,\overline{I}_1^- = 204.27\,\underline{|-162.18^\circ} \text{ amp.} \end{cases}$$

EJEMPLO.- Utilizando como método intermedio el de las componentes simétricas, determinar las corrientes de línea en el circuito de la figura 4.62.

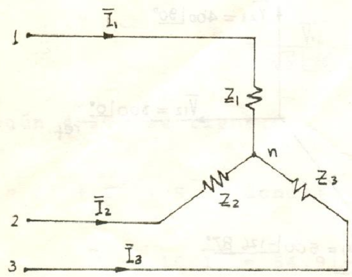


Fig.4.62.- Sistema Asimétrico (excitación simétrica y carga asimétrica).

donde:

$$\begin{cases} |\overline{V}_L| = 100 \text{ Volt. Sec } (+) \\ Z_1 = 10 \text{ Ohmios} \\ Z_2 = 20 \\ Z_3 = 30 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \overline{V}_{12}^\circ = 0 \\ \overline{V}_{12}^+ = \overline{V}_{12} = 100\,\underline{|0^\circ} \text{ Ref.} \\ \overline{V}_{12}^- = 0 \end{cases}$$

además: $\overline{I}_1^\circ = 0$ (no hay neutro)

por otro lado:

$$\begin{cases} \overline{V}_1^+ = Z^\circ\overline{I}_1^+ + Z^-\,\overline{I}_1^- \\ \overline{V}_1^- = Z^+\,\overline{I}_1^+ + Z^\circ\,\overline{I}_1^- \end{cases} \text{, donde:}$$

$$\begin{cases} Z^{\circ} = \frac{1}{3}(10+20+30) = 20 \\ Z^{+} = \frac{1}{3}(10+20\angle 120^{\circ} + 30\angle -120^{\circ}) = 5.77\angle -150^{\circ} \\ Z^{-} = \frac{1}{3}(10+20\angle -120^{\circ} + 30\angle 120^{\circ}) = 5.77\angle 150^{\circ} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} \overline{V}_1^{+} = \frac{\overline{V}_{12}^{+}}{\sqrt{3}}\angle -30^{\circ} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -30^{\circ} = 20\,\overline{I}_1^{+} + 5.77\angle 150^{\circ}\,\overline{I}_1^{-} \\ \overline{V}_1^{-} = \frac{\overline{V}_{12}^{-}}{\sqrt{3}}\angle 30^{\circ} = \frac{0}{\sqrt{3}}\angle 30^{\circ} = 5.77\,\overline{I}_1^{+} + 20\,\overline{I}_1^{-} \end{cases}$$

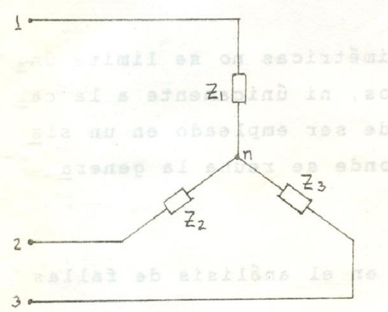
Resolviendo se tiene que:

$$\begin{cases} \overline{I}_1^{+} = 3.15\angle -30^{\circ} = 2.73 - j1.57 \\ \overline{I}_1^{-} = 0.91 \end{cases}$$

Así:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{I}_1^{+} + \overline{I}_1^{-} = 2.73 - j1.57 + 0.91 = 3.96\angle -23.41^{\circ}\ \text{Amp.} \\ \overline{I}_2 = a\overline{I}_1^{+} + a^2\overline{I}_1^{-} = 3.15\angle -30^{\circ}-120^{\circ} + 0.91\angle 120^{\circ} = 3.28\angle -166.1^{\circ}\ \text{Amp.} \\ \overline{I}_3 = a^2\overline{I}_1^{+} + a\overline{I}_1^{-} = 3.15\angle -30^{\circ}+120^{\circ} + 0.91\angle -120^{\circ} = 2.41\angle 100.89^{\circ}\ \text{Amp.} \end{cases}$$

EJEMPLO.- Utilizando como método intermedio el de las componentes simétricas, determinar los voltajes de fase en el circuito de la figura 4.63.



donde:

$$\begin{cases} |\overline{V}_L| = 208\ \text{Volt. Sec}(-) \\ Z_1 = 10\angle -60^{\circ}\ \text{Ohmios} \\ Z_2 = 10\angle 0^{\circ} \\ Z_3 = 10\angle 60^{\circ} \end{cases}$$

Fig.4.63.- Sistema Asimétrico (excitación simétrica y carga asimétrica).

Excitación:

$$\begin{cases} \overline{V}_{12}^{\circ} = \overline{V}_{12}^{+} = 0 \\ \overline{V}_{12}^{-} = \overline{V}_{12} = 208\angle 0^{\circ}\ \text{ref} \end{cases}$$

Carga:

$$\begin{cases} \overline{I}_1^{\circ} = 0\ \text{(No hay neutro)} \\ \overline{V}_1^{+} = Z^{\circ}\overline{I}_1^{+} + Z^{-}\ \overline{I}_1^{-} = \frac{\overline{V}_{12}^{+}}{\sqrt{3}}\angle -30^{\circ} = 0 \\ \overline{V}_1^{-} = Z^{+}\ \overline{I}_1^{+} + Z^{\circ}\overline{I}_1^{-} = \frac{\overline{V}_{12}^{-}}{\sqrt{3}}\angle 30^{\circ} = \frac{208}{\sqrt{3}}\angle 30^{\circ} \end{cases}$$

entonces: $\begin{cases} Z^{\circ} = \frac{1}{3}\left(10\underline{|-60^{\circ}} + 10\underline{|0^{\circ}} + 10\underline{|60^{\circ}}\right) = \frac{20}{3} \\ Z^{+} = \frac{1}{3}\left(10\underline{|-60^{\circ}} + 10\underline{|120^{\circ}} + 10\underline{|-60^{\circ}}\right) = \frac{10}{3}\underline{|-60^{\circ}} \\ Z^{-} = \frac{1}{3}\left(10\underline{|-60^{\circ}} + 10\underline{|-120^{\circ}} + 10\underline{|180^{\circ}}\right) = \frac{20}{3}\underline{|-120^{\circ}} \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 0 = Z^{\circ}\,\overline{I}_1 + Z^{-}\,\overline{I}_1^{-} \\ \overline{V}_1^{-} = \overline{Z}^{+}\,\overline{I}_1^{+} + Z^{\circ}\,\overline{I}_1^{-} \end{cases}$, se tiene que:

$\overline{I}_1^{+} = \frac{20.8}{\sqrt{3}}\underline{|90^{\circ}}$ e $\overline{I}_1^{-} = \frac{20.8}{\sqrt{3}}\underline{|-30^{\circ}}$, por lo que:

$\overline{V}_1^{\circ} = Z^{-}\,\overline{I}_1^{+} + Z^{+}\,\overline{I}_1^{-} = \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|-30^{\circ}}$

Finalmente: $\overline{V}_1 = \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|-30^{\circ}} + \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|30^{\circ}} = 208\underline{|0^{\circ}}$ Volt.

$\overline{V}_2 = \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|-30^{\circ}} + \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|150^{\circ}} = 0$ Volt.

$\overline{V}_3 = \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|-30^{\circ}} + \frac{208}{\sqrt{3}}\underline{|-90^{\circ}} = 208\underline{|-60^{\circ}}$ Volt.

4.6. CONCLUSIONES

El método de las componentes simétricas no se limita únicamente a los sitemas trifásicos, ni únicamente a la carga de un sistema, sino que puede ser empleado en un sistema más general y completo, donde se reuna la generación, línea y carga.

Además este método es muy útil en el análisis de fallas en sistemas trifásicos.