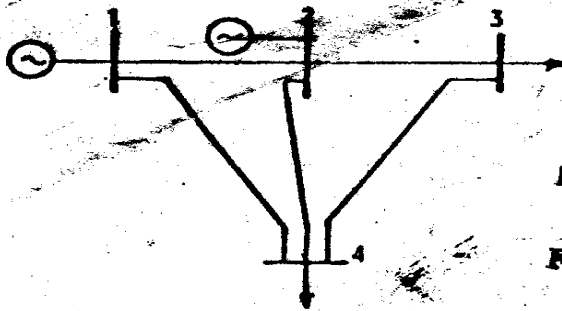


ANALISIS Y CONTROL DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

GABRIEL ARGUELLO RIOS

$\frac{\partial PL}{\partial \delta 1}$	$\frac{\partial P1}{\partial \delta 1}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial \delta 1}$	$\frac{\partial Q1}{\partial \delta 1}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial \delta 1}$	$\frac{\partial PL}{\partial P1}$
$\frac{\partial PL}{\partial \delta 2}$	$\frac{\partial P1}{\partial \delta 2}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial \delta 2}$	$\frac{\partial Q1}{\partial \delta 2}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial \delta 2}$	$\frac{\partial PL}{\partial P2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{\partial PL}{\partial \delta k}$	$\frac{\partial P1}{\partial \delta k}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial \delta k}$	$\frac{\partial Q1}{\partial \delta k}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial \delta k}$	$\frac{\partial PL}{\partial Pk}$
$\frac{\partial PL}{\partial V1}$	$\frac{\partial P1}{\partial V1}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial V1}$	$\frac{\partial Q1}{\partial V1}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial V1}$	$\frac{\partial PL}{\partial Q1}$
$\frac{\partial PL}{\partial V2}$	$\frac{\partial P1}{\partial V2}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial V2}$	$\frac{\partial Q1}{\partial V2}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial V2}$	$\frac{\partial PL}{\partial Q2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{\partial PL}{\partial Vk}$	$\frac{\partial P1}{\partial Vk}$	\dots	$\frac{\partial Pk}{\partial Vk}$	$\frac{\partial Q1}{\partial Vk}$	\dots	$\frac{\partial Qk}{\partial Vk}$	$\frac{\partial PL}{\partial Qk}$



DONADO POR F.E.P.O.N.
- - ABR. 1990

Fecha: _____

**ANALISIS Y CONTROL DE
SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA**

GABRIEL ARGUELLO RIOS

- **INSTITUTO ECUATORIANO DE ELECTRIFICACIÓN (INECEL)**
- **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL (EPN)**

MARZO 1988

**ANALISIS Y CONTROL
DE SISTEMAS ELECTRICOS
DE POTENCIA**

PRESENTACIÓN

Este libro presenta la formulación, desde el punto de vista analítico y práctico, de la metodología para el análisis y control de sistemas eléctricos de potencia en estado estable.

Los sistemas eléctricos permanecen casi todo el tiempo en condiciones operativas normales o de estado estable **y** gran énfasis se despliega actualmente en el desarrollo de técnicas analíticas **y** en la aplicación de técnicas de supervisión **y** de control para minimizar las excursiones de estado normal a estados emergentes que pueden llevar a condiciones dinámicas, inestables o de colapsos parciales o totales.

Estas técnicas tienen como objetivo el posibilitar que el sistema eléctrico de potencia opere con índices adecuados de seguridad, calidad **y** economía durante el suministro del servicio de energía eléctrica.

Este texto enfoca inicialmente la teoría de flujos de potencia, base general de todo análisis de sistemas eléctricos, **y** luego los fundamentos teórico-prácticos del control de calidad (voltaje **y** frecuencia) **y** el control de economía (despacho económico); el análisis **y** control de seguridad que si bien no es tratado directamente se fundamenta en la toma de acciones preventivas y correctivas resultante del análisis de contingencias, utilizando el flujo óptimo como herramienta esencial de soporte.

La obra puede utilizarse como material de consulta de ingenieros dedicados al análisis, planificación y operación de sistemas eléctricos de potencia; así como texto de complemento en la enseñanza de la ingeniería de sistemas eléctricos de potencia con fines de especialización.

La obra ha sido dividida en cuatro partes:

- ~ Modelación del Sistema Eléctrico
- Teoría de Flujos de Potencia
- Control de Potencia Activa y Reactiva
- Control Optimo de Potencia

Se ha añadido un capítulo de problemas sobre todos los temas tratados, con el objeto de complementar la parte teórica .

Este trabajo es el resultado de la experiencia profesional acumulada en el Instituto Ecuatoriano de Electrificación, en la actividad docente en la Escuela Politécnica Nacional, en los cursos de especialización recibidos, en cursos dictados al sector profesional y en la dirección de trabajos de Tesis de Grado e investigación en la Escuela Politécnica Nacional, uno de los cuales, Flujo Optimo de Potencias Activa y Reactiva desarrollado conjuntamente con el Ing. Francisco Vinuesa ha sido incluido en este texto.

GABRIEL ARGUELLO RIOS

QUITO - ECUA00R

1988

ANÁLISIS Y CONTROL DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

CONTENIDO

1. MODELACION DEL SISTEMA ELECTRICO

MATRICES DE RED YB, ZB

- INTRODUCCIÓN
- ELEMENTOS DE RED
- SISTEMA DE REFERENCIA NODAL
- PROPIEDADES DE YB Y ZB
- LA BARRA DE REFERENCIA
- EJEMPLO DE FORMACIÓN DE YB, ZB

2. TEORIA DE FLUJOS DE POTENCIA - DETERMINISTICOS Y ESTOCASTICOS

2.1 FORMULACIÓN ANALÍTICA GENERAL DE FLUJOS DE POTENCIA Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN.

- RESUMEN
 - INTRODUCCIÓN
 - PLANTEAMIENTO DE FLUJO DE POTENCIA
 - MÉTODOS Y SOLUCIÓN Y FORMULACIONES ESPECIALES
-
- MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON
 - MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON DESACOPLADO
 - MÉTODO DESACOPLADO RÁPIDO
 - FLUJO DE POTENCIA DE SEGUNDO ORDEN
 - FLUJOS DE POTENCIA PARA SISTEMAS MAL CONDICIONADOS
 - FLUJO DE POTENCIA DE "CORRIENTE DIRECTA"
 - FLUJO DE POTENCIA ESTOCÁSTICO - INTRODUCCIÓN
 - FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA - INTRODUCCIÓN

2.2 FORMULACIÓN ANÁLITICA DE FLUJOS DE POTENCIA ESTOCÁSTICOS

- RESUMEN
- INTRODUCCIÓN
- FORMULACIÓN LINEAL DEL FLUJO ESTOCÁSTICO
- ANÁLISIS ESTADÍSTICO
- FORMULACIÓN NO LINEAL DEL FLUJO DE POTENCIA ESTOCÁSTICO
- ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DEL FLUJO ESTOCÁSTICO
- CONSIDERACIONES ADICIONALES
- CONCLUSIONES

3. CONTROL DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

3.1 CONTROL DE POTENCIA REACTIVA y VOLTAJE (Q-V)

- RESUMEN
- TEORIA DE COMPENSACIÓN DE CARGA
- CONTROL DE VOLTAJE MEDIANTE TRANSFORMADORES
- COMPORTAMIENTO DE LINEAS DE TRANSMISIÓN
- CONTROL DE VOLTAJE DE GENERACIÓN

3.2 CONTROL DE POTENCIA ACTIVA Y FRECUENCIA (P-f)

- INTRODUCCIÓN
- EL CONTROL POTENCIA - FRECUENCIA
- REGULACIÓN NATURAL O PRIMARIA
- REGULACIÓN SUPLEMENTARIA O SECUNDARIA
- ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA DEL CONTROL p-f
- CONTROL P-f EN ÁREAS MÚLTIPLES

4. CONTROL ÓPTIMO DE POTENCIA EN SISTEMAS ELECTRICOS

4.1 DESPACHO ECONÓMICO DE POTENCIA ACTIVA

- INTRODUCCIÓN
- EN DESPACHO ECONÓMICO COMO SUBPROBLEMA DE FLUJOS ÓPTIMOS
- TÉCNICA DE SOLUCIÓN POR MULTILICADORES DE LAGRANGE.
- DETERMINACIÓN DE LAS CURVAS DE COSTO DE GENERACIÓN
- DESPACHO ECOCÓMICO SIMPLIFICADO
- DESPACHO ECONÓMICO CONSIDERANDO PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN

4.2 FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIAS ACTIVA Y REACTIVA

- RESUMEN
- INTRODUCCIÓN
- FORMULACIÓN DEL FLUJO DE POTENCIA EN VARIABLES DE ESTADO
- EL FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA
- MÉTODO DEL GRADIENTE REDUCIDO PARA LA SOLUCIÓN DEL FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA
- ALGORITMO DE SOLUCIÓN
- MODELO CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD
- MODELO CON RESTRICCIONES FUNCIONALES

5- PROBLEMAS PROPUESTOS

1. MODELACION DEL SISTEMA ELECTRICO DE POTENCIA MATRICES DE RED Y_B , Z_B

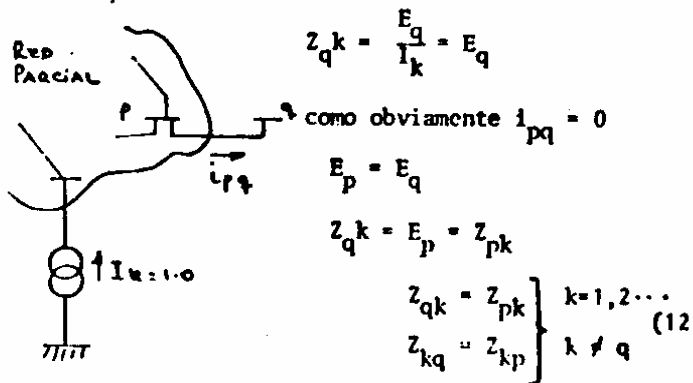
$$i + i = [y] \cdot \bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & y_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y_B : I_p = Y_{p1}E_1 + Y_{p2}E_2 + \dots + Y_{pp}E_p + \dots + Y_{pn}E_n$$

$$Y_{pp} = \frac{I_p}{E_p} \text{ cuando } E_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, i \neq p$$

$$Y_{pq} = \frac{I_p}{E_q} \text{ cuando } E_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$



MATRICES DE RED YB, ZB

1. INTRODUCCION

La modelación del sistema eléctrico de potencia es la base esencial para estudiar y analizar su comportamiento tanto en condiciones normales como en situaciones de emergencia.

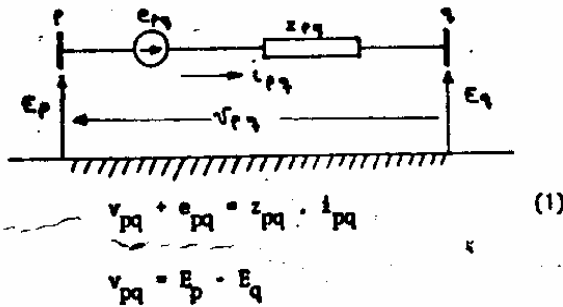
La modelación considera tanto el comportamiento individual de cada elemento que conforma la red como el comportamiento interconectado entre ellos. Esta modelación de la red se la efectúa a través de las matrices de red.

La forma de la matriz de red depende del sistema de referencia utilizado; los sistemas de referencia son nodal, de lazos, de ramas. En las aplicaciones de sistemas eléctricos de potencia, el sistema de referencia más comúnmente utilizado es el nodal, razón por la cual se presenta aquí únicamente las matrices de red YB, ZB de este sistema de referencia.

Por otro lado se presenta la formulación de YB y ZB para estudios o análisis de estado estable o de condiciones balanceadas, es decir a cada elemento trifásico se lo representa por su equivalente monofásico de secuencia positiva.

2. ELEMENTOS DE RED

Un elemento componente de una red trifásica balanceada puede representarse por su correspondiente elemento monofásico de secuencia positiva; en su forma más general el elemento se representa por:



La ecuación (1) es la de comportamiento del elemento y se la conoce como la forma THEVENIN del elemento.

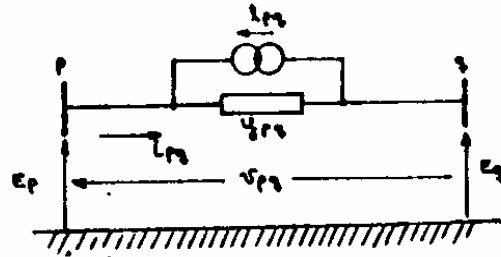
definiendo: $y_{pq} = \frac{1}{z_{pq}} \quad \frac{e_{pq}}{z_{pq}} = -i_{pq}$

La ecuación (1) se transforma en:

$$i_{pq} = \frac{v_{pq}}{z_{pq}} + \frac{e_{pq}}{z_{pq}} = y_{pq} v_{pq} - i_{pq}$$

$$i_{pq} + i_{pq} = y_{pq} v_{pq} \quad (2)$$

en este caso el diagrama equivalente es:



A la ecuación (2) se la conoce como la forma NORTON del elemento.

Las dos formas definen el elemento generalizado en la red (generadores, transformadores, líneas, cargas). Las dos formas son completamente equivalentes. Si un elemento no tiene fuentes, e_{pq} o i_{pq} se eliminan. Si un elemento no tiene impedancia, z_{pq} puede eliminarse, siendo éste una fuente ideal de voltaje.

Un sistema de potencia es una red compuesta de muchos de estos elementos que se interconectan entre sí; el comportamiento del sistema depende del comportamiento individual de los elementos y de la forma como están interconectados.

Si en el sistema de potencia existen n elementos, su comportamiento individual está dado por:

$$i + \bar{i} = [y] \cdot \bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \vdots \\ \bar{i}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & y_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

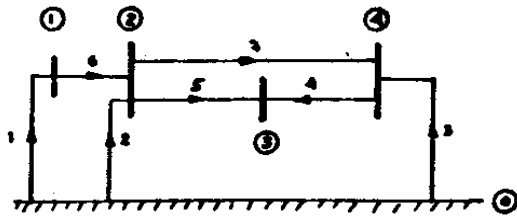
el sistema de ecuaciones (3) da el comportamiento individual de cada uno de los elementos, no dando información acerca de las conexiones entre ellos, ni como se distribuye i entre ellos. Esta ecuación se dice que está en el Sistema de Referencia Primitivo.

3. SISTEMA DE REFERENCIA NODAL

El sistema de referencia nodal establece las ecuaciones del comportamiento del sistema de potencia tomando en cuenta el comportamiento individual de cada uno de sus componentes así como la interconexión entre ellos. El sistema de referencia nodal es el más utilizado en análisis de sistemas de potencia.

La teoría del sistema de referencia nodal se la desarrollará en base a un sistema de potencia de ejemplo:

Consideremos la red de la figura siguiente (número y dirección arbitraria).



Se puede formar una matriz de conectividad de cada elemento a los nodos del sistema, de la siguiente forma:

$$\hat{A} = [a_{ij}]$$

$a_{ij} = 1$ si el elemento i es incidente y orientado al nodo j
 $a_{ij} = -1$ si el elemento i es incidente y orientado desde el nodo j
 $a_{ij} = 0$ si el elemento i no es incidente al nodo j

$$\hat{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & & -1 & & \\ 1 & & & -1 & \\ 1 & & & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A se obtiene eliminando la columna del nodo de referencia de la matriz \hat{A} .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & & \\ 1 & & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A se denomina matriz de incidencia de barras.

El comportamiento de cada elemento está dado por:

$$i + I = [y] \cdot \tilde{v}$$

Consideremos el producto:

$$A^t(i + I) = A^t [y] \tilde{v}$$

$$A^t I + A^t i = A^t [y] \tilde{v} \quad (4)$$

Tomemos el término $A^t i$

$$A^t i = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -i_1 + i_6 \\ -i_2 + i_5 - i_6 + i_7 \\ -i_4 - i_5 \\ -i_3 + i_4 - i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t i = \vec{0} \quad (\text{E corrientes a cada nodo})$$

Por tanto (4) es equivalente a:

$$A^t I = A^t [y] \tilde{v} \quad (5)$$

El término $A^t I$ será:

$$A^t I = \begin{bmatrix} -i_1 + i_6 \\ -i_2 + i_5 - i_6 + i_7 \\ -i_4 - i_5 \\ -i_3 + i_4 - i_7 \end{bmatrix}$$

observándose que $-i_1 + i_6$ es la corriente neta inyectada a la barra o nodo 1

$$I_1 = -i_1 + i_6$$

$$\text{de tal manera que } A^t I = I_B = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

La ecuación (5) se convierte en:

$$I_B = A^t [y] \tilde{v} \quad (6)$$

Ahora examinemos el producto $A E_B$, siendo E_B el vector de voltajes nodales medidos con respecto a la referencia.

$$A E_B = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ -E_2 \\ -E_4 \\ -E_3 + E_4 \\ E_2 - E_3 \\ E_1 - E_2 \\ E_2 - E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \vec{v}$$

$$A E_B = \vec{v}$$

Reemplazando este valor en (6) se tiene:

$$I_B = A^t [y] A E_B \quad (7)$$

Que se la conoce como ecuación de comportamiento del sistema de potencia en el sistema nodal.

Al producto $A^t [y] A$ se le denomina matriz admittance de barras.

$$Y_B = A^t [y] A \quad (8)$$

Por tanto la ecuación final es:

$$I_B = Y_B E_B \quad (9)$$

$$Y_B = A^T [y] A$$

$y_1 + y_6$	$-y_6$	0	0
$-y_6$	$y_2 + y_5 + y_6 + y_7$	$-y_5$	$-y_7$
0	$-y_5$	$y_4 + y_5$	$-y_4$
0	$-y_7$	$-y_4$	$y_3 + y_4 + y_7$

$$Y_B =$$

Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}
Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}
Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}
Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}

Pudiendo observarse que Y_B puede formarse por inspección, ya que

$Y_{pp} = \sum_{q \neq p} y_{pq}$ - sumatoria de admitancias de los elementos que concurren al nodo p desde cualquier barra q .

$Y_{pq} = -y_{pq}$ - el negativo de la admitancia del elemento que conecta la barra p con la q .

$Y_{pq} = 0$ si no existe elemento entre la barra p y la barra q .

Y_{pp} son las admitancias de punto matriz de Y_B

Y_{pq} son las admitancias de transferencia de Y_B

La ecuación equivalente del sistema nodal es:

$$\bar{E}_B = Z_B \bar{I}_B \quad (10)$$

$$Z_B = Y_B^{-1} \quad (11)$$

La ecuación (10) es la de comportamiento del sistema de potencia en forma de impedancia y a Z_B la denominamos matriz impedancia de barras. A las matrices Y_B y Z_B se las conoce como matrices de red en el sistema de referencia nodal.

4. PROPIEDADES DE Y_B Y Z_B

- Y_B, Z_B son matrices cuadradas simétricas de dimensión $n \times n$ siendo n el número de nodos (excluyendo el de referencia).

- Y_B puede formarse por inspección.

- Y_B es una matriz altamente dispersa, es decir tiene muy pocos elementos distintos de cero. En sistemas de potencia un número promedio de líneas que salen de cada barra es 3, el número de elementos distintos de cero es pues aproximadamente $3n$.

- Si no existe elemento entre por lo menos una barra del sistema y la barra de referencia, Y_B es una matriz

singular y por tanto Z_B no existe o no está definida para dicho sistema con dicha barra de referencia.

- Z_B no puede formarse por inspección

- Z_B es una matriz completamente llena.

- Y_B puede considerarse que es una matriz de punto matriz y de transferencia de cortocircuito. Similarmente Z_B es una matriz de punto matriz y de transferencia de circuito abierto.

$$\underline{Y}_B : I_p = Y_{p1}E_1 + Y_{p2}E_2 + \dots + Y_{pp}E_p + \dots + Y_{pn}E_n$$

$$Y_{pp} = \frac{I_p}{E_p} \text{ cuando } E_i = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, n \text{ } i \neq p$$

$$Y_{pq} = \frac{I_p}{E_q} \text{ cuando } E_i = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, n \text{ } q \neq i$$

$$\underline{Z}_B : E_p = Z_{p1}I_1 + Z_{p2}I_2 + \dots + Z_{pp}I_p + \dots + Z_{pn}I_n$$

$$Z_{pp} = \frac{E_p}{I_p} \text{ cuando } I_i = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, n \text{ } i \neq p$$

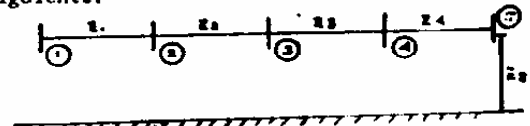
$$Z_{pq} = \frac{E_p}{I_q} \text{ cuando } I_i = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, n \text{ } i \neq q$$

Este concepto puede utilizarse para formar Y_B, Z_B mediante pruebas en la red tanto de cortocircuito como de circuito abierto.

5. ALGORITMO DE FORMACION DE Z_B

La obtención de Z_B mediante inversión de Y_B es inoperable y casi imposible para las magnitudes de nodos que se tienen en sistemas de potencia.

Z_B puede formarse por inspección cuando la red o sistema de potencia es completamente radial como es el caso siguiente:



$$Z_{pp} = \frac{E_p}{I_p} \text{ } I_i = 0 \text{ } i \neq p \quad Z_{11} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5) I_1}{I_1}$$

$$Z_{11} = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$$

$$Z_{pq} = \frac{E_p}{I_q} \text{ } I_i = 0 \text{ } i \neq q \quad E_1 = E_2 = (z_2 + z_3 + z_4 + z_5) I_2$$

$$Z_{12} = Z_{21} = z_2 + z_3 + z_4 + z_5$$

igualmente se puede obtener directamente que:

$$Z_{22} = z_2 + z_3 + z_4 + z_5$$

$$Z_{33} = z_3 + z_4 + z_5$$

$$\begin{aligned}
 Z_{44} &= Z_4 + Z_5 \\
 Z_{55} &= Z_5 \\
 Z_{13} &= Z_3 + Z_4 + Z_5 & Z_{23} &= Z_3 + Z_4 + Z_5 & Z_{34} &= Z_4 + Z_5 \\
 Z_{14} &= Z_4 + Z_5 & Z_{24} &= Z_4 + Z_5 & Z_{35} &= Z_5 \\
 Z_{15} &= Z_5 & Z_{25} &= Z_5 & Z_{45} &= Z_5
 \end{aligned}$$

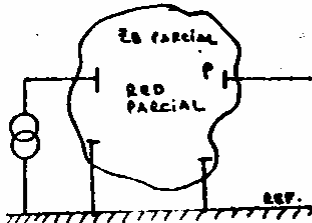
Como las redes en sistemas de potencia son siempre mallas, se puede formar Z_B mediante un algoritmo de construcción que es ya estándar en sistemas de potencia.

Consideraremos nuevamente, que se está trabajando en redes completamente balanceadas y que no existe acoplamiento entre elementos ya que se está enfocando únicamente el análisis de estado estable de la red.

El procedimiento es el siguiente:

Considerando que ya se ha formado Z_B para una porción de la red, y a la cual se le va a añadir un nuevo elemento, este elemento puede crear una nueva barra en su caso de lo denomina RAMA o no crear barras nuevas en este caso al elemento se lo denomina ENLACE.

5.1 Adición de una Rama a la Red Parcial



El elemento pq crea una nueva barra, la barra q, por lo tanto Z_B aumentará de dimensión en una fila y una columna

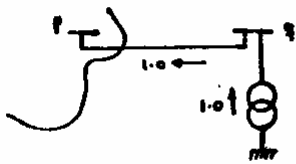
	p	q
p	Z_{pp}	Z_{pq}
q	Z_{qp}	Z_{qq}

Debido a que el sistema es completamente radial de p a q; si se aplica una corriente $I_k = 1.0$ en cualquier barra k existente del sistema, o sea $k \neq q$.



$$\begin{aligned}
 Z_{qk} &= \frac{E_p}{I_k} = E_q \\
 &\text{como obviamente } i_{pq} = 0 \\
 E_p &= E_q \\
 Z_{qk} &= E_p = Z_{pk} \\
 \left. \begin{aligned} Z_{qk} &= Z_{pk} \\ Z_{kq} &= Z_{kp} \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots \\ k &\neq q \end{aligned} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Inyectando una corriente en la barra q $I_q = 1.0$



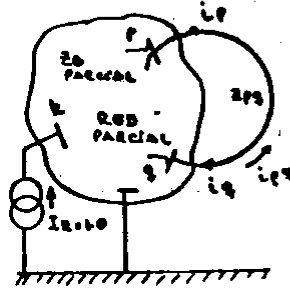
$$\begin{aligned}
 E_p &= E_q - Z_{pq} \cdot 1.0 \\
 E_q &= E_p + Z_{pq} \\
 \text{como } E_p &= Z_{pq} \cdot I_q = Z_{pq} \\
 \text{además de (12): } & Z_{pq} = Z_{qp}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_q &= Z_{pp} + Z_{pq} \\
 \text{como } Z_{qq} &= E_q / I_q = E_q \\
 Z_{qq} &= Z_{pp} + Z_{pq} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Si p hubiera sido la barra de referencia

$$\begin{aligned}
 Z_{kq} &= 0 \\
 Z_{qk} &= 0 \quad \left. \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots \\ k &\neq q \end{aligned} \right\} \\
 Z_{qq} &= Z_{pq} \quad (14)
 \end{aligned}$$

5.2 Adición de un Enlace a la Red Parcial



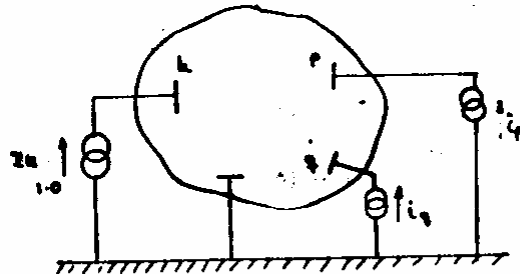
Como p y q son barras existentes no se modifica la dimensión de Z_B propia, sin embargo la distribución de corriente por los elementos es diferente por la presencia del enlace ya que:

$$\begin{aligned}
 E_B &= Z_B \cdot I_B \\
 \text{con el enlace} \\
 E_B' &= Z_B' \cdot I_B
 \end{aligned}$$

Si únicamente en la barra k se inyecta una corriente $I_k = 1.0$ por el enlace circulará una corriente i_{pq}

$$\begin{aligned}
 \text{Si } i_{pq} &= i_p \\
 i_q &= -i_p
 \end{aligned}$$

Igual efecto se obtiene con el circuito equivalente de la figura siguiente.



Teniéndose ahora tres corrientes inyectadas en la red parcial.

Sin el enlace el voltaje de cualquier barra m sería $E_m = Z_{mk} \cdot I_k = Z_{mk} \times 1.0 = Z_{mk}$ (solo I_k existe).

$$E_m = Z_{mk} \cdot I_k = Z_{mk} \times 1.0 = Z_{mk}$$

Con la introducción del enlace

$$\begin{aligned}
 E_m' &= Z_{mk}' \cdot I_k = Z_{mk}' \times 1.0 = Z_{mk}' \\
 m &= 1, 2, \dots, p, \dots, q, \dots
 \end{aligned}$$

Ahora si observamos la red de la figura equivalente:

$$\begin{aligned}
 E_m' &= Z_{mk}' \cdot I_k + Z_{mp}' \cdot i_p + Z_{mq}' \cdot i_q \\
 i_p &= -i_q \quad I_k = 1.0
 \end{aligned}$$

$$E'_m = Z'_{mk}$$

$$Z'_{mk} = Z_{mk} + ip(Z_{mp} - Z_{mq}) \quad (15)$$

$m = 1, 2, \dots, p, \dots, q, \dots, n$

$$\text{pero } ip = i_{pq} = \frac{E'_q - E'_p}{Z_{pq}} = \frac{Z'_{qk} - Z'_{pk}}{Z_{pq}} \quad (16)$$

de (15) para $m = q$ y luego $m = p$

$$Z'_{qk} = Z_{qk} + ip(Z_{qp} - Z_{qq})$$

$$Z'_{pk} = Z_{pk} + ip(Z_{pp} - Z_{pq})$$

luego de (16)

$$ip \cdot Z_{pq} + ip(Z_{pp} - Z_{pq}) - ip(Z_{qp} - Z_{qq}) = Z'_{qk} - Z'_{pk}$$

$$ip = \frac{Z_{qk} - Z_{pk}}{Z_{pq} + Z_{pp} + Z_{qq} - 2Z_{pq}}$$

luego la expresión general para los nuevos términos de la matriz Z'_B , modificados por la presencia del enlace es:

$$Z'_{mk} = Z_{mk} + \frac{Z_{qk} - Z_{pk}}{Z_{pq} + Z_{pp} + Z_{qq} - 2Z_{pq}} (Z_{mp} - Z_{mq}) \quad (17)$$

$$Z'_{mk} = Z_{mk} + \Delta Z_{mk} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

modif. por el enlace

Si al introducir el enlace, p era la barra de referencia ($Z_{pr} = 0$)

$$Z'_{mk} = Z_{mk} - \frac{Z_{qk} \cdot Z_{mq}}{Z_{pq} + Z_{qq}} \quad m, k = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

6. LA BARRA DE REFERENCIA

La barra de referencia del sistema es aquella con respecto a la cual se miden los voltajes y a través de la cual todas las corrientes inyectadas encuentran camino de retorno. En casi todas las aplicaciones de análisis de sistemas eléctricos se toma como referencia a tierra cuyo voltaje por definición es exactamente cero.

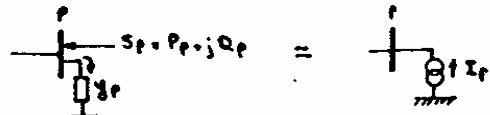
Si Y_B está formada con respecto o "con referencia" a tierra entonces $Z_B = Y_B^{-1}$ es la matriz impedancia de barras con respecto a tierra.

En el caso de que no exista al menos la conexión de un elemento entre una barra y tierra, Y_B es una matriz singular y por tanto Z_B no está definida con respecto a tierra, debido a que la impedancia de punto matriz de cada barra con respecto a tierra es infinita.

En situaciones como la anotada Z_B tiene que formarse con respecto a una barra del sistema. Igual problema se tiene cuando es necesario tratar todas las ramas shunt como fuentes de corriente. En estos casos es necesario tomar una barra R del sistema como barra de referencia; la ecuación de equilibrio es:

$$E_{B_R} = Z_{B_R} \cdot \bar{I}_B \quad (19)$$

los términos de \bar{I}_B son: $I_p = \frac{P_p - jQ_p}{E_p} - Y_p E_p$ $(p \neq R)$ (20)



Z_{B_R} es la matriz impedancia de barra formada con respecto a la barra R , E_{B_R} es el vector de voltajes nodales medidos con respecto a R , es decir si el voltaje de la barra de referencia es E_B con respecto a tierra, entonces los voltajes nodales de las demás barras del sistema con respecto a tierra son:

$$E_B - E_R = Z_{B_R} \cdot \bar{I}_B$$

$$E_B = Z_{B_R} \cdot \bar{I}_B + E_R \quad (21)$$

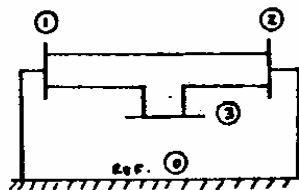
E_B es el vector cuyos elementos son todos iguales al voltaje de referencia E_R .

Otra situación interesante que puede darse es que si se conoce $Z_B^{(a)}$ formada con respecto a una barra de referencia a y se desea obtener $Z_B^{(b)}$ de la misma red pero con respecto a una barra de referencia b , no es necesario construir nuevamente Z_B . Los términos de $Z_B^{(b)}$ pueden encontrarse como:

$$Z_{ij}^{(b)} = Z_{ij}^{(a)} - Z_{ib}^{(a)} - Z_{bj}^{(a)} + Z_{bb}^{(a)} \quad (22)$$

7. EJEMPLO DE FORMACION DE Y_B Y Z_B

Obtener Y_B y Z_B para el sistema de potencia de la figura siguiente:



pq	pu	Z_{pq}	$Y_{pq} = 1/Z_{pq}$
0-1	j0.1025	-j9.76	
0-2	j0.1025	-j9.76	
1-2	j1.0	-j1.0	
1-3	j0.4	-j2.5	
2-3	j0.6	-j1.67	

7.1 Formación de Y_B

$$Y_{11} = y_{01} + y_{12} + y_{13} = -j9.76 - j1.0 - j2.5 = -j13.26$$

$$Y_{22} = y_{02} + y_{12} + y_{23} = -j9.76 - j1.0 - j1.67 = -j12.43$$

$$Y_{33} = y_{13} + y_{23} = -j2.5 - j1.67 = -j4.17$$

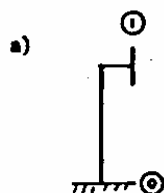
$$Y_{12} = Y_{21} = -y_{12} = j1.0$$

$$Y_{13} = Y_{31} = -y_{13} = j2.5$$

$$Y_{23} = Y_{32} = -y_{23} = j1.67$$

$$Y_B = -j \begin{bmatrix} 13.26 & -1.0 & -2.5 \\ -1.0 & 12.43 & -1.67 \\ -2.5 & -1.67 & 4.17 \end{bmatrix}$$

7.2 Formación de Z_B

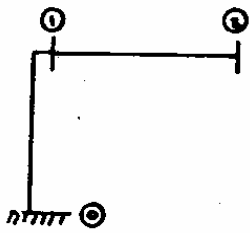


0-1 es RARA desde la referencia (cc (14))

$$q = 1 \quad Z_{11} = Z_{01} = j0.1025$$

$$Z_B = j 0.1025$$

b)



1-2 es RAMA desde la referencia (ec. 12 y 13)

$$p = 1 \quad q = 2$$

$$Z_{qk} = Z_{pk} \quad k=1$$

$$k \neq q$$

$$Z_{21} = Z_{12} = Z_{11} = j0.1025$$

$$Z_{qq} = Z_{pp} + Z_{pq}$$

$$Z_{22} = Z_{11} + Z_{12} = j0.1025 + j1.0 = j1.1025$$

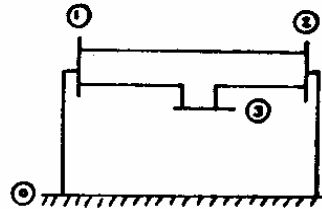
$$Z_B = j$$

0.1025	0.1025
0.1025	1.1025

$$Z_{pq} = Z_{pp} + Z_{pq} = Z_{22} + Z_{23} = 0.0938 + 0.6 = j0.6938$$

$$Z_B = j$$

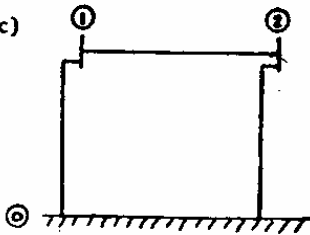
0.0938	0.0087	0.0087
0.0087	0.0938	0.6938
0.0087	0.0938	0.6938



1-3 es un enlace que no incluye la referencia (ec.17))

$$p = 1 \quad q = 3 \quad z_{pq} = j0.4$$

c)



0-2 es un ENLACE desde la referencia (ec.(18))

$$Z'_{mk} = Z_{mk} - \frac{Z_{qk} \cdot Z_{mq}}{Z_{pq} + Z_{qq}}$$

en este caso $p = 0 \quad q = 2$

$$m = 1, 2$$

$$k = 1, 2$$

$$m = 1 \quad k = 1$$

$$Z'_{11} = Z_{11} - \frac{Z_{21} \cdot Z_{12}}{Z_{02} + Z_{22}} = 0.1025 - \frac{(0.1025)^2}{0.1025 + 1.1025} = j0.0938$$

$$m = 1 \quad k = 2$$

$$Z'_{12} = Z'_{21} = Z_{12} - \frac{Z_{22} \cdot Z_{12}}{Z_{02} + Z_{22}} = 0.1025 + \frac{(1.1025)(0.1025)}{1.205} = j0.0087$$

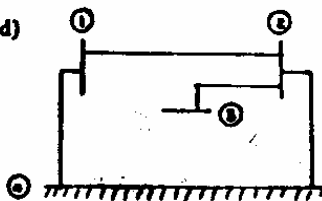
$$m = 2 \quad k = 2$$

$$Z'_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{22} \cdot Z_{22}}{Z_{02} + Z_{22}} = 1.1025 - \frac{(1.1025)^2}{1.205} = j0.0938$$

$$Z_B = j$$

0.0938	0.0087
0.0087	0.0938

d)



2-3 es una rama (ec. 12 y 13)

$$p = 2 \quad q = 3 \quad z_{23} = j0.6$$

$$Z_{qk} = Z_{pk} \quad k=1, 2 \quad k \neq q$$

$$Z_{31} = Z_{21} = j0.0087$$

$$Z_{32} = Z_{22} = j0.0938$$

Finalmente:

	①	②	③
①	0.0876	0.0149	0.0586
②	0.0149	0.0876	0.0439
③	0.0586	0.0439	0.2927

puede probarse que $Z_B = Y_B^{-1}$

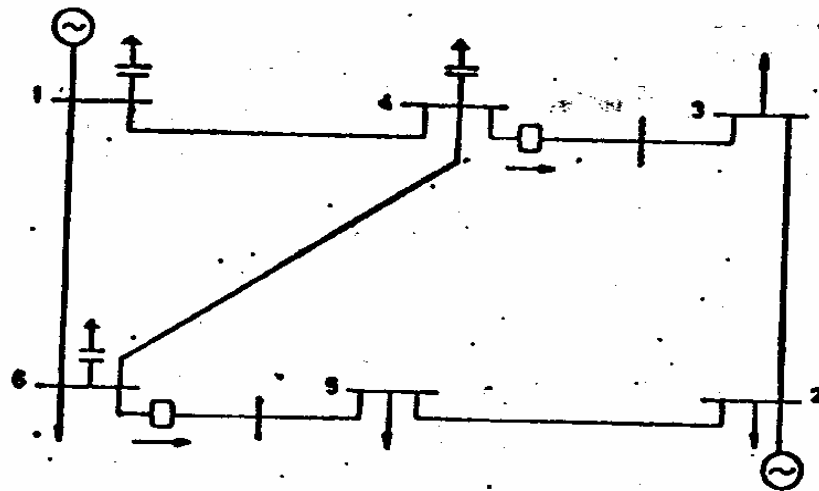
BIBLIOGRAFÍA

1. Matriz Methods in Electric Power System Análisis and Design – G.T Heydt – Notas de clase EE532 Purdue University.
2. Computer Methods in Power System Análisis – GW STAGG y A.H EI – ABIAD .MCGRAW – HILL BOOK 1968.
3. Digital Calculation of three –Short Circuits by Matrix Method, Trans.AIEE, VOL 79, pp1277 – 1281
4. Digital Calculation of line to ground Short Circuits by Matrix Method, Trans AIEE, VOL 79,PP323-332,1960.
5. Solution of Large Networks by Matrix Methods
H.E. Brown John Wiley, N.Y., 1975.
6. Computer Techniques in Power System Analysis – M.
A. PAI Tata Mc Graw – Hill, New Delhi, 1979.

2. TEORIA DE FLUJOS DE POTENCIA

DETERMINISTICOS

ESTOCASTICOS



$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & O \\ O & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

Donde visto que los términos de H y L son:

$$H_{pp} = \frac{\partial P_p}{\partial \delta_p} = -Q_p - B_{pp} V_p^2$$

$$H_{pq} = \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q} = V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq})$$

$$L_{pp} = V_p \frac{\partial Q_p}{\partial V_p} = Q_p - B_{pp} V_p^2$$

$$L_{pq} = V_p V_q \frac{\partial Q_p}{\partial V_q} = -B_{pq} V_p V_q (\cos \delta_{pq} - G_{pq} \sin \delta_{pq})$$

$$\text{cov}(\hat{z}) = (J^T V^{-1} J)^{-1}$$

$$\text{cov}(\hat{z}) = K \text{cov}(\hat{z}) K^T \quad (42)$$

cov(\hat{z}) es la matriz de covarianza de las variables de estado (V, δ)

FORMULACION ANALITICA GENERAL DE FLUJOS DE POTENCIA Y METODOS DE SOLUCION

RESUMEN

Se presenta un resumen de las diferentes técnicas analíticas que actualmente se dispone para la solución de problemas de flujo de potencia. La aplicación de estas técnicas, depende del planteamiento del problema a ser resuelto, con el objeto de conocer el comportamiento de estado estable de sistemas eléctricos de potencia. Se plantean de manera conceptual, las bases analíticas y las aplicaciones de formulaciones determinísticas y estocásticas de flujos de potencia.

INTRODUCCION

El flujo de potencia es la denominación que se da a la solución de estado estacionario de un sistema de potencia bajo ciertas condiciones preestablecidas de generación, carga y topología de red. La solución (obtenida con programas digitales), consiste en conocer los niveles de voltaje de todas las barras del sistema, tanto en magnitud como ángulo, el flujo de potencia por todos los elementos de la red y las pérdidas.

El flujo de potencia es extensamente utilizado en planeamiento de expansión, planeamiento operativo y en control de tiempo real de sistemas eléctricos de potencia.

La solución \bar{x} de las ecuaciones del flujo de potencia ($g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$) se la considera aceptable, cuando las variables de estado \bar{x} (voltajes en magnitud y ángulo) y las variables dependientes $\bar{h}(\bar{x})$ (flujos de potencia por los elementos) están dentro de rangos normales; de no obtenerse esta condición, deben efectuarse ajustes de las variables de control \bar{u} (potencias o voltajes de generación, posición de taps, etc) hasta encontrar la solución deseada para las condiciones preestablecidas de carga y topología \bar{p} , denominadas variables independientes.

Lo anterior constituye la formulación básica, común o convencional del flujo de potencia y diversos métodos se utilizan para resolver el conjunto de ecuaciones no lineales $g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$; métodos que son iterativos (se van acercando paulatinamente a la solución) tales como los denominados de Gauss-Seidel, Newton-Raphson, desacoplados, etc. Estos métodos difieren uno de otro por la técnica algorítmica de resolver ecuaciones, pero la solución \bar{x} en cualquier caso es la misma para resolver el mismo problema. En la actualidad los métodos de Newton en sus versiones; completo y desacoplado, se han constituido en los métodos estándar de solución de las ecuaciones de flujo de potencia. Existen versiones especiales, derivadas de los métodos de Newton, como el flujo de segundo orden y el flujo de potencia Hessiano, que tienen aplicaciones también especiales.

El planteamiento y solución del problema es determinístico debido a que las variables independientes \bar{p} son fijas o consideradas exactas en el problema y en esta forma la solución factible es única para \bar{x} y cumplen exactamente las ecuaciones $g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$.

Cuando se tiene incertidumbre sobre el valor de las variables \bar{p} (cargas activa y reactiva), es obvio que a \bar{x} no se las puede tomar como exactas ya que en ellas se refleja la incertidumbre de \bar{p} ; entonces para tener una idea más aproximada de la solución se recurre a resolver muchos flujos determinísticos para diferentes valores de \bar{p} alrededor del más probable y ésta constituye la manera natural como todos los analistas resuelven los problemas de flujo de potencia que por su naturaleza es probabilístico.

Para evitar la solución de muchos flujos determinísticos para una condición en la que existe incertidumbre sobre valores de \bar{p} , es posible tratar las variables del problema de flujos, como variables aleatorias, y la solución \bar{x} no es única sino que tiene un rango probable de variación alrededor de un valor esperado o más probable y ésta constituye la formulación probabilística o estocástica del problema de flujos de potencia.

Por otra parte, no siempre es condición suficiente resolver un problema de flujos, sea determinístico o estocástico, en la forma que ha sido establecida, sino que por requerimientos adicionales de seguridad, calidad y economía en un sistema de potencia, se requiere encontrar una solución óptima. La solución óptima consiste en determinar los valores de las variables de control \bar{u} y las de estado \bar{x} que minimicen una función objetivo $f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$ que al mismo tiempo satisfaga las ecuaciones de flujo $g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$ y que además, todas las variables tanto de control como de estado, estén dentro de límites operativos normales. Esta formulación constituye el flujo óptimo de potencia y la solución consiste en resolver un problema de optimización para el cual también existen diversas técnicas, como el del gradiente, programación lineal, etc. Problemas típicos de optimización son el denominado despacho económico y el de minimización de pérdidas de transmisión.

En este artículo se presenta el planteamiento analítico, la técnica de solución y la aplicación de estas diferentes formulaciones que puede tener el flujo de potencia.

PLANTEAMIENTO DEL FLUJO DE POTENCIA

Para el análisis de flujo de potencia se asume una red trifásica balanceada, de tal forma que se lo representa por su diagrama de secuencia positiva con parámetros serie lineales y concentrados y, rama en derivación.

La ecuación de equilibrio del sistema se la plantea utilizando el sistema de referencia nodal

$$\bar{I}_B = [YB] \bar{E}_B \quad (1)$$

En la que:

\bar{I}_B = corrientes netas inyectadas a las barras
 $[YU]$ = matriz admitancia de barras
 \bar{E}_B = voltajes de barra medidos con respecto a la referencia

La ecuación (1) es un sistema de ecuaciones lineales, del cual fácilmente se podría determinar las variables de estado \bar{E}_B para ciertas corrientes netas inyectadas a la red \bar{I}_B .

Pero en la situación real de un sistema de potencia, no se conocen las corrientes inyectadas a cada una de las barras, sino las potencias en varias de ellas y no en todas, debido a que no se conocen las pérdidas de la red.

Es por ello que el planeamiento analítico del flujo de potencia requiere de cuatro variables en cada barra p del sistema, las cuales son:

P_p potencia activa neta inyectada
 Q_p potencia reactiva neta inyectada
 V_p magnitud de voltaje
 δ_p ángulo de voltaje

Solamente dos de estas variables pueden definirse o conocerse a priori, el problema del flujo de potencia es el de encontrar las dos restantes para cada barra.

De esta forma, haciendo correspondencia con el sistema físico, es posible catalogar a las barras en los siguientes tipos o clases:

- Barra de carga o de voltaje no controlado P, Q. Es aquella barra en que se puede definir o especificar la potencia inyectada $P_p + jQ_p$. En el sistema físico esta corresponde a un centro de carga tal como una ciudad, una subestación que alimenta una industria, etc, y en las que la demanda del consumo es predecible. Además, se asume que P y Q no son afectados por variaciones pequeñas del voltaje, que es lo normal en condiciones de estado estable. Las incógnitas de esta barra son V_p y δ_p .
- Barra de generación o de voltaje controlado P, V. Es aquella barra en que se puede definir o especificar la potencia activa neta inyectada P_p y el voltaje V_p que se puede mantener en esa barra mediante inyección o soporte de potencia reactiva. Estas barras son aquellas en que existe generación y en las cuales P_p se puede fijar a cierto valor mediante el regulador de velocidad ejecutando control sobre la potencia mecánica de la turbina y, V_k mediante el regulador de voltaje ejecutando control sobre la corriente de excitación. Pero también puede ser una barra en la que se pueda controlar la potencia reactiva para mantener el voltaje V_p , tal como aquellas en que existan motores sincrónicos o compensadores en general. Las incógnitas de esta barra son Q_p y δ_p .
- Barra oscilante V, δ . Esta es una barra que hay que seleccionar en el sistema y en la que se especifica el voltaje en magnitud y ángulo V_p , δ_p . Esta es una barra única, y su necesidad aparece porque las pérdidas no pueden conocerse de antemano y por tanto la potencia activa no puede especificarse en todas las barras. Es común tomar una de las barras de generación del sistema como oscilante. Las incógnitas de esta barra son P_p y Q_p .

Estos son los tres tipos de barra que se definen en el flujo de potencia; siendo además la potencia neta, la diferencia entre la potencia de generación y la de carga que exista en dicha barra.

Con estas consideraciones, veamos como se transforma el sistema de ecuaciones de equilibrio de la red

$$\bar{I}_B = [YU] \bar{E}_B.$$

De la ecuación de equilibrio, la corriente inyectada en cualquier barra p es:

$$I_p = \sum_q Y_{pq} E_q \quad (2)$$

donde los términos de la matriz admitancia de barra son:

$$Y_{pp} = \sum_q Y_{pq}$$

$$Y_{pq} = -y_{pq}$$

y_{pq} son las admitancias de los elementos entre las barras p y q

y por definición:

$$S_p = P_p + jQ_p = E_p I_p^* = E_p \sum_q Y_{pq}^* E_q^* \quad (3)$$

$$\text{si: } Y_{pq} = G_{pq} + jB_{pq}$$

$$E_q = V_q \cos \delta_q + jV_q \sin \delta_q$$

entonces las ecuaciones de potencia para la barra p son:

$$P_p = \sum_q V_p V_q (G_{pq} \cos \delta_{pq} + B_{pq} \sin \delta_{pq}) \quad (4)$$

$$Q_p = \sum_q V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq}) \quad (5)$$

siendo $\delta_{pq} = \delta_p - \delta_q$

Las expresiones (4) y (5) se denominan forma polar de las ecuaciones de potencia, debido a que el voltaje se expresa en coordenadas polares.

Si el voltaje se expresara en coordenadas rectangulares

$$E_q = e_q + jf_q$$

entonces las ecuaciones de potencia se transforman en:

$$P_p = \sum_q (e_p e_q G_{pq} - e_p f_q B_{pq} + f_p f_q G_{pq} + f_p e_q B_{pq}) \quad (6)$$

$$Q_p = \sum_q (f_p e_q G_{pq} - f_p f_q B_{pq} - e_p f_q G_{pq} - e_p e_q B_{pq}) \quad (7)$$

las cuales se denominan forma rectangular de las ecuaciones de potencia.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones a resolver para la solución del flujo de potencia, existiendo n barras en el sistema de las cuales existen m barras de carga, l oscilante y n-m-l barras de generación es:

$$P_p = P_p(\bar{V}, \bar{\delta}) \quad p = 2, \dots, n$$

$$Q_p = Q_p(\bar{V}, \bar{\delta}) \quad p = 2, \dots, n \quad (8)$$

si están en forma polar (ecuaciones (4) y (5))

y si están en forma rectangular

$$P_p = P_p(\bar{e}, \bar{f}) \quad p = 2, \dots, n$$

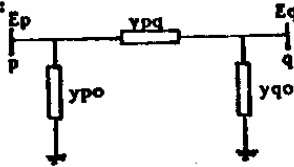
$$Q_p = Q_p(\bar{e}, \bar{f}) \quad p = 2, \dots, n$$

$$V_p = e_p^2 + f_p^2 \quad p = n+1, \dots, n \quad (9)$$

Los sistemas de ecuaciones (8) o (9) que son expresiones de la forma (4), (5) o (6) y (7) son sistemas de ecuaciones no lineales y requieren de técnicas iterativas de solución tales como las denominadas de

Gauss, o Newton-Raphson.

La solución de este sistema de ecuaciones es la solución del flujo de potencia, ya que se determinan las variables de estado de la red, con lo cual es posible luego calcular fácilmente los flujos de potencia por los elementos, las pérdidas en la red, la generación de la barra oscilante y la generación reactiva en las barras de voltaje controlado, así, el flujo de potencia conectado entre una barra p y q es:



$$S_{pq} = E_p \cdot I_{pq} = E_p [(E_p - E_q) y_{pq} + E_p y_{po}] \quad (10)$$

la potencia generada por la barra oscilante es:

$$S_I = E_I \cdot I_I = E_I Y_{Iq} E_q \quad (11)$$

la potencia reactiva generada en las barras de tensión controlada

$$Q_p = \text{Im} \{ E_p \cdot I_p^* \} = \text{Im} \{ E_p \sum_q Y_{pq} E_q \} \quad (12)$$

la potencia activa de pérdidas

$$P_L = \sum_p P_p \quad (13)$$

la potencia reactiva de pérdidas es el sumatorio de todas las fuentes de potencia reactiva (generadores, líneas, condensadores) menos el sumatorio de la potencia reactiva de la carga.

MÉTODOS DE SOLUCION DEL FLUJO DE POTENCIA

A continuación se presentan varios métodos de solución del sistema de ecuaciones del flujo de potencia, todos ellos basados en el método de Newton, que como se ha señalado antes es el estándar en la solución de problemas de flujo.

1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (N-R)

El método de Newton-Raphson transforma el sistema no lineal de ecuaciones en un conjunto de ecuaciones lineales y mediante un proceso iterativo se llega a la solución del problema no lineal.

La linealización de las ecuaciones se basa en la expansión de las funciones no lineales en series de Taylor alrededor del punto de solución.

Así, el sistema no lineal de ecuaciones en forma polar se transforma en:

$$\begin{aligned} \Delta P_p &= \sum_q \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q} \Delta \delta_q + \sum_q \frac{\partial P_p}{\partial V_q} \Delta V_q \quad p = 2, \dots, n \\ \Delta Q_p &= \sum_q \frac{\partial Q_p}{\partial \delta_q} \Delta \delta_q + \sum_q \frac{\partial Q_p}{\partial V_q} \Delta V_q \quad p = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

lo que puesto en forma matricial dan las bien conocidas ecuaciones de flujo por el método N-R.

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (15)$$

La división de $\Delta P/V_q$ no afecta numéricamente el algoritmo, pero sirve para simplificar algunos términos del jacobiano (matriz formada por H, N, J, L).

Los términos de la matriz jacobiano de la diagonal principal son:

$$\begin{aligned} H_{pp} &= \frac{\partial P_p}{\partial \delta_p} = -Q_p - B_{pp} V_p^2 \quad p = 2, \dots, n \\ H_{pp} &= \frac{\partial P_p}{\partial V_p} \cdot V_p = P_p + G_{pp} V_p^2 \quad p = 2, \dots, n \\ J_{pp} &= \frac{\partial Q_p}{\partial \delta_p} = P_p - G_{pp} V_p^2 \quad p = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

$$L_{pp} = \frac{\partial Q_p}{\partial V_p} \cdot V_p = Q_p - B_{pp} V_p^2 \quad p = 2, \dots, m$$

y los elementos fuera de la diagonal principal:

$$\begin{aligned} H_{pq} &= \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q} = V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq}) \\ N_{pq} &= \frac{\partial P_p}{\partial V_q} \cdot V_q = V_p V_q (G_{pq} \cos \delta_{pq} + B_{pq} \sin \delta_{pq}) \\ J_{pq} &= \frac{\partial Q_p}{\partial \delta_q} = -V_p V_q (G_{pq} \cos \delta_{pq} + B_{pq} \sin \delta_{pq}) \\ L_{pq} &= \frac{\partial Q_p}{\partial V_q} \cdot V_q = V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq}) \end{aligned} \quad (17)$$

notese que en estos términos, $H_{pq} = L_{pq}$ y que $N_{pq} = -J_{pq}$. Los subíndices p, q varían para H_{pq} ($p, q = 2, \dots, n$), N_{pq} ($p = 2, \dots, n, q = 2, \dots, m$) J_{pq} ($p = 2, \dots, m, q = 2, \dots, n$), L_{pq} ($p, q = 2, \dots, m$); en todos los casos $p \neq q$.

En cambio, si el sistema no lineal de ecuaciones está expresado en coordenadas rectangulares, la linealización de ecuaciones en series de Taylor da:

$$\begin{aligned} \Delta P_p &= \sum_q \frac{\partial P_p}{\partial e_q} \Delta e_q + \sum_q \frac{\partial P_p}{\partial f_q} \Delta f_q \\ \Delta Q_p &= \sum_q \frac{\partial Q_p}{\partial e_q} \Delta e_q + \sum_q \frac{\partial Q_p}{\partial f_q} \Delta f_q \\ \Delta V_p^2 &= \frac{\partial V_p^2}{\partial e_p} \Delta e_p + \frac{\partial V_p^2}{\partial f_p} \Delta f_p \end{aligned} \quad (18)$$

y las ecuaciones a resolver toman la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & T \\ U & W \\ K & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (19)$$

en este caso, los términos del jacobiano de la diagonal principal de las matrices D, T, U, W, K, F son:

$$\begin{aligned} D_{pp} &= \frac{\partial P_p}{\partial e_p} = a_p + G_{ppep} + B_{pp} f_p \quad p = 2, \dots, n \\ T_{pp} &= \frac{\partial P_p}{\partial f_p} = b_p - B_{ppep} + G_{pp} f_p \quad p = 2, \dots, n \\ U_{pp} &= \frac{\partial Q_p}{\partial e_p} = -b_p - B_{ppep} + G_{pp} f_p \quad p = 2, \dots, m \\ W_{pp} &= \frac{\partial Q_p}{\partial f_p} = a_p - G_{ppep} - B_{pp} f_p \quad p = 2, \dots, m \\ K_{pp} &= \frac{\partial V_p^2}{\partial e_p} = 2e_p \quad p = m+1, \dots, n \\ F_{pp} &= \frac{\partial V_p^2}{\partial f_p} = 2f_p \quad p = m+1, \dots, n \end{aligned} \quad (20)$$

en las que:

$$\begin{aligned} a_p &= \sum_q (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) \\ b_p &= \sum_q (f_q G_{pq} + e_q B_{pq}) \end{aligned} \quad (21)$$

los términos fuera de la diagonal principal ($p \neq q$) son:

$$\begin{aligned} D_{pq} &= \frac{\partial P_p}{\partial e_q} = G_{pq} e_p + B_{pq} f_p \\ T_{pq} &= \frac{\partial P_p}{\partial f_q} = G_{pq} f_p - B_{pq} e_p \\ U_{pq} &= \frac{\partial Q_p}{\partial e_q} = G_{pq} f_p - B_{pq} e_p \\ W_{pq} &= \frac{\partial Q_p}{\partial f_q} = -G_{pq} e_p - B_{pq} f_p \end{aligned}$$

$$K_{pq} = -\frac{\partial V_p^2}{\partial e_q} = 0$$

$$F_{pq} = -\frac{\partial V_p^2}{\partial i_q} = 0$$

(22)

notease que $D_{pq} = -W_{pq}$ y que $T_{pq} = U_{pq}$

Algoritmo de solución del método N-R

Se ha establecido anteriormente que el flujo de potencia no es sino un conjunto de ecuaciones no lineales y que aplicando el método de N-R se las linealiza asumiendo valores iniciales. En general hemos visto que estas ecuaciones lineales tienen la forma :

$$\Delta S = [J] \Delta E$$

dadas sea por las ecuaciones (15) o (19)

El algoritmo o pasos de solución mediante un programa digital es:

- a. Leer todos los datos de entrada (topología de red, impedancia de elementos, potencias y voltajes especificados según el tipo de barra)
- b. Formar la matriz admitancia de barra YB
- c. Asumir valores iniciales para todos los voltajes $\bar{E}_B(0) (V, \delta \text{ o } e, f)$
- d. Calcular las diferencias ΔS ($\Delta P = P$ especificado - P calculado, $\Delta Q = Q$ especificado - Q calculado). Los valores de P y Q calculados se los determina mediante las ecuaciones (4) y (5) o (6) y (7) según se utilice la forma polar o rectangular respectivamente.
- e. Evaluar los términos del jacobiano H, N, J, L con las ecuaciones (16) y (17) para la forma polar o D, T, U, W, K, F con las ecuaciones (20) y (22) para la forma rectangular.
- f. Efectuar la operación $\Delta E = [J]^{-1} \Delta S$
- g. Calcular los nuevos voltajes

$$\bar{E}_B = \bar{E}_B(0) + \Delta E$$
- h. Calcular la potencia reactiva de las barras de generación y determinar si viola límites, en caso de que esto ocurra cambiarla a barra de carga haciendo $Q = Q_{lim}$; en este caso la barra de generación no puede mantener el voltaje especificado. En la siguiente iteración hay que probar si pueda mantener voltaje con el valor de V_p calculado y volverla a barra PV.
- i. Si hay cambio de tipo de barra volver a d, caso contrario continuar a j.
- j. Probar convergencia $\Delta E \leq \epsilon$ (o también $\Delta P, \Delta Q \ll \epsilon$)
- k. Si no hay convergencia volver a d, caso contrario \bar{E}_B es la solución del flujo de potencia.
- l. Calcular el flujo de potencia por los elementos, la potencia generada por la barra oscilante, la potencia reactiva de las barras de tensión controlada y las pérdidas del sistema.
- m. Imprimir resultados.

Computacionalmente, el método de N-R en coordenadas polares tiene ventajas sobre el método de N-R en coordenadas rectangulares.

Técnicas especiales de programación del método N-R

La solución eficiente del sistema de ecuaciones $\Delta S = [J] \Delta E$ (paso f del algoritmo) es vital en el éxito del método N-R. Si se utilizaran técnicas de inversión convencionales para encontrar $[J]^{-1}$ y un almacenamiento en dos dimensiones, entonces se requerirían almacenar alrededor de $2n^2$ términos y un número de operaciones proporcional a n^3 , lo cual es prohibitivo sino imposible para sistemas de potencia, en los que n fácilmente varía entre 100 a 1000 barras.

Pero en sistemas de potencia, la matriz admitancia de barras YB es altamente dispersa (muy pocos elementos diferentes de cero) y por tanto, siendo los términos de $[J]$ función de los términos de YB, el jacobiano es una matriz altamente dispersa o porosa.

Esta característica especial hace que se hayan desarrollado ingeniosas técnicas de almacenamiento de J y técnicas de solución directa de la ecuación $\Delta S = [J] \Delta E$ (no se encuentra $[J]^{-1}$) mediante factorización o descomposición gaussiana de $[J]$, utilizando técnicas de ordenamiento de ecuaciones para este fin. (Para mayores detalles de estas técnicas especiales de programación ver la referencia [1]).

Sólo el desarrollo de estas técnicas especiales de programación hicieron práctico y eficiente el método de N-R.

Características del método de N-R

Con las técnicas de programación que explotan la dispersión del jacobiano y con el proceso ordenado de factorización, el método de N-R (y sus diferentes variantes que se exponen más adelante) es el más rápido y eficiente que cualquier otro método que se ha analizado en la actualidad para resolver el flujo de potencia de sistemas eléctricos. El número de iteraciones es prácticamente independiente del sistema, debido a sus características cuadráticas de convergencia. La mayoría de sistemas se resuelven de 2 a 5 iteraciones, el tiempo por iteración crece linealmente con el número de barras, por tanto el tiempo total de solución varía con n.

El método expuesto se lo puede extender fácilmente para obtener las versiones desacopladas, de las cuales el método desacoplado rápido es el más eficiente y más utilizado en la actualidad. Por otra parte el método de N-R es la base para la formulación de flujos estocásticos y flujos óptimos.

2. METODO DE NEWTON-RAPHSON DESACOPLADO

Una característica inherente de un sistema eléctrico de potencia de generación-transmisión, operando en estado estable es la fuerte dependencia que existe entre la potencia activa y los ángulos de los voltajes de barra y entre la potencia reactiva y la magnitud de voltajes de barra, en cambio es muy débil la dependencia entre P y V entre Q y δ . Esto se conoce como el principio de "desacoplamiento" y en este principio se basa el método de N-R desacoplado que simplifica el jacobiano. Tomando la forma polar del método, la ecuación (15) se transforma en :

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} \quad (23)$$

El principio de desacoplamiento se demuestra matemáticamente ya que:

$$\frac{N_{pq}}{H_{pq}} = \frac{V_q \cdot \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q}}{\frac{\partial P_p}{\partial \delta_q}} \approx - \frac{C_{pq}}{B_{pq}}$$

$$\frac{\Delta P_p}{L_{pq}} = \frac{\partial Q_p / \partial \delta_q}{V_q \partial Q_p / \partial V_q} = \frac{G_{pq}}{B_{pq}} \quad (24)$$

En sistemas de transmisión $G_{pq} \ll B_{pq}$ y es por esta razón que estos términos se desprecian.

De esta forma las ecuaciones a resolver son más simples

$$\begin{aligned} \Delta P &= [H] \Delta \delta \\ \Delta Q &= [L] \frac{\Delta V}{V} \end{aligned} \quad (25)$$

El algoritmo de solución es el mismo que para el método de N-R pero con las simplificaciones hechas en el jacobiano, así mismo se utilizan idénticas técnicas de programación.

Las ventajas de este método sobre el método completo de N-R son; menor almacenamiento, tiempo por iteración menor; pero en cambio sus características de convergencia son casi lineales, lo que hace que se requieran más iteraciones y a la vez el tiempo de procesamiento generalmente es superior, por lo tanto este método no tiene en la actualidad aplicación práctica; sin embargo dio la base teórica necesaria para el desarrollo del método desacoplado rápido que a continuación se expone.

3. MÉTODO N-R DESACOPLADO RÁPIDO

Este método, como su nombre lo indica, parte del método desacoplado y con simplificaciones adicionales se hace del jacobiano una matriz con términos constantes, y por tanto sus términos no requieren ser evaluados cada iteración. Al tener un jacobiano constante, este requiere "invertirse" una sola vez y no en cada iteración como en los métodos anteriores; que de paso, es donde se consume el mayor tiempo de procesamiento y de allí su nombre de "rápido".

Este método es extraordinariamente eficiente y rápido y es en la actualidad el método "obligado" en la solución de problemas de flujos de potencia en sistemas de potencia y sobre todo en análisis de operación en tiempo real.

El modelo matemático parte del método desacoplado, es decir:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & O \\ O & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix}$$

Veamos visto que los términos de H y L son:

$$\begin{aligned} H_{pp} &= \frac{\partial P_p}{\partial \delta_p} = -Q_p - B_{pp} V_p^2 \\ H_{pq} &= \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q} = V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq}) \\ L_{pp} &= V_p \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial V_p} = Q_p - B_{pp} V_p^2 \\ L_{pq} &= V_q \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial V_q} = V_p V_q (G_{pq} \sin \delta_{pq} - B_{pq} \cos \delta_{pq}) \end{aligned}$$

y que uno de los mayores problemas del método de N-R o del desacoplado es que estos términos deben evaluarse y la matriz jacobiano "invertirse", cada iteración.

Las siguientes simplificaciones adicionales, reducen enormemente el número de operaciones, al hacer el jacobiano constante:

El término $V_p^2 B_{pp}$ es mucho mayor que Q_p , ya que $V_p^2 B_{pp}$ es equivalente a una potencia reactiva de cortocircuito.

$\sin \delta_{pq} \ll \cos \delta_{pq}$ y por tanto $\delta_{pq} \rightarrow 0$

Sólo para el jacobiano, se consideran que la magnitud de voltajes es 1.0 p.u.

Con estas simplificaciones los términos del jacobiano quedan como:

$$\begin{aligned} H_{pp} &= -B_{pp} & p &= 2, \dots, n \\ H_{pq} &= -B_{pq} & p, q &= 2, \dots, n \\ L_{pp} &= -B_{pp} & p &= 2, \dots, n \\ L_{pq} &= -B_{pq} & p, q &= 2, \dots, n \end{aligned} \quad (26)$$

y el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{aligned} \Delta P &= [B'] \Delta \delta \quad (\text{orden } n-1) \\ \Delta Q &= [B''] \Delta V \quad (\text{orden } m) \end{aligned} \quad (27)$$

donde las matrices $[B']$ y $[B'']$ son las componentes de la parte imaginaria de YB.

La variante más eficiente es no considerar como 1.0 a V_p^2 o al producto $V_p V_q$, sino 1.0 a V_p y 1.0 a V_q , y las ecuaciones (27) se transforman en:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{V} &= [B'] \Delta \delta \\ \frac{\Delta Q}{V} &= [B''] \Delta V \end{aligned} \quad (28)$$

Los términos del lado izquierdo de la ecuación (28) son $\Delta P_p/V_p$ y $\Delta Q_p/V_p$. Este sistema de ecuaciones es el estándar del método desacoplado rápido. Las ecuaciones se resuelven alternativamente para actualizar los valores de V y δ .

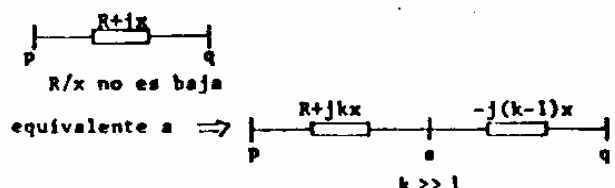
El algoritmo de solución con ligeras variantes es igual al del método de N-R, salvo que en este caso el jacobiano es constante.

Características del método desacoplado rápido

La convergencia del método es geométrica y generalmente converge de 3 a 7 iteraciones, pero el tiempo que toma en ejecutar una iteración es alrededor de 7 veces menor que el tiempo que toma el método N-R en una iteración. Los requerimientos de almacenamiento son alrededor de un 60% de los del método N-R. Estas características lo han hecho un método eficiente para solución de flujos de potencia, estudios de optimización, análisis de contingencias y prácticamente insustituible en aplicaciones de tiempo real.

Sin embargo este método en algunos casos no asegura convergencia, casos que en cambio el método N-R converge; esto generalmente ocurre cuando en la red hay elementos cuya relación R/x no es baja, pero mediante un artificio que consiste en incorporar una barra ficticia en estos elementos se logra disponer de relación muy baja de R/x , y en estos casos se obtiene convergencia.

El artificio se explica en la siguiente figura:



4. FLUJO DE POTENCIA DE SEGUNDO ORDEN

Un método que es un refinamiento del método de N-R y con características de convergencia muy similares al método desacoplado rápido, constituye el flujo de potencia de segundo orden, el cual utiliza la expansión completa de series de Taylor de las ecuaciones de flujo de potencia en vez de ser truncadas hasta las primeras derivadas como ocurre en el método de N-R.

El poder tener la expansión completa de las ecuaciones en series de Taylor, es posible únicamente si las ecuaciones de flujo se las expresa en coordenadas rectangulares, existiendo únicamente hasta las segundas derivadas; en cambio en coordenadas polares la serie es infinita.

El método se basa en el siguiente principio; consideremos que se tiene una función cuadrática $y(\bar{x})$, la cual expandida en series de Taylor es:

$$y(\bar{x}) = y(\bar{x})_0 + \sum_p \frac{\partial y}{\partial x_p} \cdot \Delta x_p + \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \Delta x_p \frac{\partial^2 y}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_q$$

que es equivalente a:

$$y(\bar{x}) = y(\bar{x})_0 + \nabla^t \bar{\Delta x} + \frac{1}{2} \bar{\Delta x}^t H \bar{\Delta x} \quad (29)$$

donde ∇ es el vector gradiente y H la matriz Hessiana de la función $y(\bar{x})$.

En el método de N-R cada función se expresa como $y(\bar{x}) = y(\bar{x})_0 + \nabla^t \bar{\Delta x}$ y como existen n funciones entonces se obtiene $\bar{\Delta y} = [J] \bar{\Delta x}$, donde la matriz jacobiano es formada por los vectores gradientes de cada función.

La matriz H es una matriz de dimensión n x n y para n funciones esta tendría una dimensión de n x n², lo cual es imposible de procesar.

Sin embargo se puede probar fácilmente (ver referencia [3]) que

$$\frac{1}{2} \bar{\Delta x}^t H \bar{\Delta x} = y(\bar{\Delta x}) \quad (30)$$

Entonces (29) se convierte en:

$$y(\bar{x}) = y(\bar{x})_0 + \nabla^t \bar{\Delta x} + y(\bar{\Delta x}) \quad (31)$$

y para un sistema de n ecuaciones (31) es:

$$\bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{x})_0 + [J] \bar{\Delta x} + \bar{y}(\bar{\Delta x})$$

es decir:

$$\bar{\Delta y}(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{\Delta x}) = [J] \bar{\Delta x} \quad (32)$$

la única variante con el método de N-R es la inclusión del término adicional $\bar{y}(\bar{\Delta x})$, el cual fácilmente puede evaluarse dentro del proceso iterativo. Si [J] se hace constante como el desacoplado rápido, el método es muy eficiente y se acerca más rápido a la solución debido a la corrección $\bar{y}(\bar{\Delta x})$.

A cualquier programa existente tanto de N-R como el desacoplado (en coordenadas rectangulares) es sencillo incluir la modificación de la ecuación (32). La primera iteración es igual al método de N-R ya que $\bar{y}(\bar{\Delta x}) = 0$. Luego de la primera iteración en la que se calcula $\bar{\Delta x}$ y los nuevos valores de \bar{x} , se puede calcular $\bar{y}(\bar{x})$ y $\bar{y}(\bar{\Delta x})$ y así sucesivamente cada iteración hasta obtener convergencia.

Así por ejemplo, si en una iteración k se ha calculado \bar{c}_e y \bar{d}_f y por tanto los nuevos \bar{c} y \bar{f} .

$$P_p(\bar{c}, \bar{f}) = \sum_q (c_p e_q c_p q - e_p f_q b_p q + f_p f_q c_p q + f_p e_q b_p q)$$

$$P_p(\bar{c}_e, \bar{d}_f) = \sum_q (\Delta c_p \Delta e_q c_p q - \Delta e_p \Delta f_q b_p q + \Delta f_p \Delta f_q c_p q +$$

$$+ \Delta f_p \Delta e_q b_p q)$$

el nuevo $\Delta P_p = P_{espec} - P(\bar{c}, \bar{f}) - P(\bar{c}_e, \bar{d}_f)$ en vez de $P_{esp} - P(\bar{c}, \bar{f})$ que se obtiene del método N-R, y ésta constituye la única diferencia.

Este método, en algunas veces, da resultados en sistemas de potencia que no han convergido con los métodos anteriores.

5. FLUJOS DE POTENCIA PARA SISTEMAS MAL CONDICIONADOS

El conjunto de ecuaciones que definen el problema de flujo de potencia tiene soluciones múltiples y solamente una corresponde al modo físico de operación del sistema de potencia. Es por ello raro encontrar más de una solución en la cercanía de los valores de voltaje iniciales estimados de (1.0 + j0.0) y por tanto una solución que converge, normalmente se la acepta como correcta. Sin embargo, casos especiales de redes "mal condicionadas" o sistemas que operan cerca de sus límites de estabilidad pueden tener dos o más soluciones que matemáticamente convergen, por ejemplo utilizando dos programas o algoritmos diferentes. En estos casos el análisis del usuario y en base a su experiencia puede llevarlo a obtener la solución correcta, por ejemplo chequeando diferencias angulares y caídas de tensión de cada elemento.

Existen otros casos en que ningún método de flujo de potencia converge, y no pueden obtenerse resultados. Estas redes o sistemas debido a su estructura y punto de operación, presentan problemas de "mal condicionamiento" y matemáticamente la convergencia se hace oscilatoria o divergente.

Para estos casos, se propone un método (ver referencia [4]) que basado en el flujo de potencia de segundo orden y en la utilización de un "multiplicador óptimo" se corrigen los valores $\bar{\Delta x}$ a valores que aseguren la convergencia. Así como en los casos anteriores, esta extensión puede fácilmente introducirse en programas existentes de flujos de potencia por los métodos de N-R.

El modelo es el siguiente. De la ecuación (32) se tiene que:

$$\bar{\Delta y}(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{\Delta x}) = [J] \bar{\Delta x} = \bar{0}$$

Con el fin de ajustar la longitud de corrección del vector $\bar{\Delta x}$ se lo multiplica por un escalar u, de tal forma que la ecuación anterior se convierte en:

$$\bar{\Delta y}(\bar{x}) = \bar{y}(u \bar{\Delta x}) = [J] u \bar{\Delta x} = \bar{0} \quad \text{lo cual se demuestra es (33) iguala:}$$

$$\bar{\Delta y}(\bar{x}) = u^2 \bar{y}(\bar{\Delta x}) - u [J] \bar{\Delta x} = 0 \quad (34)$$

Siendo necesario encontrar en cada iteración el valor de u. Para lo cual se crea una función objetivo a ser minimizada. Si por simplicidad se establece que $\bar{\Delta y}(\bar{x}) = \bar{a}$, $-\bar{y}(\bar{\Delta x}) = \bar{c}$, $-[J] \bar{\Delta x} = \bar{b}$, entonces (34) es:

$$\bar{a} + u \bar{b} + u^2 \bar{c} = 0$$

la función objetivo a ser minimizada es:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i (a_i + u b_i + u^2 c_i)^2 \quad (35)$$

Siendo a_i , b_i , c_i los términos de los vectores \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} .

El mínimo se obtiene cuando $\partial F / \partial u = 0$, lo cual da una ecuación cúbica del tipo

$$g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + g_3 u^3 = 0 \quad (36)$$

donde:

$$\begin{aligned} g_0 &= \sum_i a_i b_i & g_1 &= \sum_i (b_i^2 + 2a_i c_i) \\ g_2 &= 3 \sum_i b_i c_i & g_3 &= 2 \sum_i c_i^2 \end{aligned} \quad (37)$$

resolviendo la ecuación cúbica se obtiene el valor de u , la cual puede resolverse analíticamente por medio de la fórmula de Cardán.

La variante algorítmica que hay que introducir con respecto al método N-R es:

- Calcular Δx (método de N-R)
- Calcular \bar{a} , \bar{b} , \bar{c}
- Calcular g^0 , g^1 , g^2 , g^3
- Calcular u
- Ajustar $\Delta x = u \Delta x$
- $\bar{x} = \bar{x} + \Delta x$

Continuar proceso iterativo si no hay convergencia.

6. FLUJO DE POTENCIA DE "CORRIENTE DIRECTA - DC"

Una aproximación ampliamente utilizada para resolver el flujo de potencia, es el denominado flujo de "corriente directa", mal llamado así, pues en realidad es un flujo de corriente alterna. Este método convierte las ecuaciones no lineales del flujo de potencia en ecuaciones lineales. La conversión se basa en el hecho de que no interesa conocer con precisión la magnitud de voltajes de barra del sistema y por ende el flujo de potencia reactiva por la red, por tanto se establece que las magnitudes en todas las barras del sistema son 1.0 p.u.

Al utilizar este flujo de potencia, se pretende conocer de manera aproximada la distribución de potencia activa por la red sin llegar a detalles de precisión; es por ello que es ampliamente utilizado en planificación de expansión del sistema de transmisión, y poder analizar rápidamente muchas alternativas de transferencia de potencia, luego de lo cual se puede refinar los resultados con el flujo de potencia completo.

El método parte únicamente de la ecuación de potencias activas netas invertidas en las barras (ecuación (4)) o sea:

$$P_p = \sum_q V_p V_q (C_{pq} \cos \delta_{pq} + B_{pq} \sin \delta_{pq}) \quad p=2, \dots, n$$

haciendo $V_p = V_q = 1.0$ p.u. y $C_{pq} = 0$, entonces:

$$P_p = \sum_q B_{pq} \sin \delta_{pq}$$

$$\sin \delta_{pq} = (\delta_p - \delta_q) \text{ radianes}$$

$$\text{donde: } P_p = \sum_q B_{pq} (\delta_p - \delta_q) \quad p = 2, \dots, n \quad (38)$$

que constituye un conjunto lineal de ecuaciones en el que las incógnitas son los ángulos de voltaje de las barras del sistema.

El sistema de ecuaciones (38) es idéntico a:

$$P_p = - \sum_q B_{pq} \delta_q \quad p = 2, \dots, n$$

lo que expresado matricialmente es:

$$P = - [B] \delta \quad (39)$$

donde $[B]$ es la matriz formada por la parte imaginaria de YB . Como para toda barra, excepto la oscilante ($\delta = 0$), se especifica P , el sistema lineal de ecuaciones fácilmente se resuelve para δ .

Una vez encontrado δ se calcula el flujo de potencia activa por los elementos mediante:

$$P_{pq} = \frac{1}{x_{pq}} (\delta_p - \delta_q) \quad (40)$$

donde x_{pq} es la reactancia del elemento entre la barra p y q , como en esta red la potencia de pérdidas es cero, entonces:

$$\sum P_p = 0$$

y la potencia de la barra oscilante es:

$$P_1 = - \sum P_p \quad p \neq 1 \quad (41)$$

7. FLUJO DE POTENCIA ESTOCASTICO

En las anteriores formulaciones que son determinísticas, los valores de inyecciones P y Q , que son valores pronosticados, se especifican como valores fijos y por tanto los resultados se ajustan exactamente a estos valores. Es práctica común el analizar muchos casos de flujos de potencia para tomar en cuenta errores que pueden darse en la predicción de P y Q , resultado de lo cual se obtienen posibles rangos de variación de las variables de estado luego de un largo proceso de análisis, el cual además debe ser metódico y organizado.

El flujo de potencia estocástico, procesa la incertidumbre de los valores pronosticados dando como resultado los valores esperados más probables de las variables de estado así como sus rangos de variación alrededor de su valor esperado en base a límites de confianza. Los valores esperados coinciden con la solución determinística del problema. Por tanto el flujo de potencia estocástico parte de una solución convencional de flujos con un postprocesamiento que consiste en calcular las variaciones de las variables alrededor de su solución esperada en base a la incertidumbre de los datos de entrada. Un solo caso de flujo estocástico, adecuadamente formulado, equivale a muchos casos de flujos de potencia determinísticos.

La formulación del problema (ver el detalle analítico en la referencia [5]) es:

Las ecuaciones de flujo de potencia asumiendo error en cada una de las variables de entrada son:

$$\bar{y} = F(\bar{x}) + \bar{e}$$

siendo \bar{x} el vector de estado verdadero y \bar{e} los errores asociados a cada valor observado más probable de \bar{y} .

El valor esperado de $\bar{x} = \hat{x}$ coincide exactamente con la solución determinística, es decir \hat{x} es la solución que se obtiene con los métodos antes descritos usando como valores fijos a los más probables de \bar{y} (P, Q).

El postprocesamiento adicional que se requiere es el calcular los siguientes valores estadísticos

$$\text{cov}(\hat{z}) = (J^T V^{-1} J)^{-1}$$

$$\text{y } \text{cov}(\hat{z}) = K \text{cov}(\hat{z}) K^T \quad (42)$$

donde:

$\text{cov}(\hat{z})$ es la matriz de covarianza de las variables de estado (V, δ)

J es el jacobiano del sistema de potencia evaluado en el punto de solución (última iteración)

V matriz de varianzas de los datos de entrada \bar{y} (es conocida y se debe definir previamente).

$\text{cov}(\hat{z})$ es la matriz de covarianza de las variables dependientes (flujos de potencia por las líneas)

K es el jacobiano de las variables dependientes con respecto a las variables de estado.

De las matrices $\text{cov}(\hat{z})$ y $\text{cov}(\hat{z})$ se requieren los términos de la diagonal principal solamente, lo cual para ciertos intervalos de confianza, da las variaciones de las variables de estado y dependientes alrededor del valor medio \hat{x} y \hat{z} .

Algoritmo de solución del flujo de potencia estocástico

Nuevamente, el flujo estocástico, puede obtenerse fácilmente de un flujo de potencia que utilice el método de N-R, los pasos de solución son:

a. Resolver el flujo de potencia determinístico utilizando el método de N-R, para los valores de P y Q más probables. El resultado del flujo son los valores más probables para voltajes en magnitud y ángulo (\bar{x}) y para los flujos de potencia por las líneas (\bar{z}).

b. Con el jacobiano J evaluado en el punto de solución \bar{x} , calcular:

$$\text{cov}(\bar{z}) = (J^T V^{-1} J)^{-1}$$

cov(\bar{z}) es una matriz llena, J es dispersa, V es generalmente diagonal, por tanto para efectuar esta operación también se utilizan técnicas directas de solución por factorización.

c. Establecer el jacobiano K y evaluarlo en el punto de solución \bar{x} , luego

$$\text{cov}(\bar{z}) = K \text{cov}(\bar{x}) K^T$$

Los términos de K se obtienen evaluando las derivadas parciales de Ppq y Qpq con respecto a δp , δq , V_p y V_q .

d. Obtener los términos de la diagonal principal de cov(\bar{x}) y cov(\bar{z})

$$\bar{\sigma}^2 x = \text{diag.} [\text{cov}(\bar{x})]$$

$$\bar{\sigma}^2 z = \text{diag.} [\text{cov}(\bar{z})]$$

e. Calcular el rango de variación de las variables de estado \bar{x} y las dependientes \bar{z} para un intervalo de confianza, por ejemplo para 99% de confianza.

$$\bar{x} = \bar{x} \pm 2.57 \bar{\sigma}_x$$

$$\bar{z} = \bar{z} \pm 2.57 \bar{\sigma}_z$$

En este caso los resultados como pueden verse no es un solo valor sino un rango en el cual con 99% de posibilidad va a estar la solución verdadera considerando la incertidumbre que exista en los datos de entrada.

8. FLUJO OPTIMO DE POTENCIA

Como hemos visto, en un estudio de flujos de potencia, se especifica la potencia activa en todas las barras de generación excepto la oscilante, se especifican voltajes de generación, posición de taps, etc. Para un valor de demanda tanto activa como reactiva, existen infinito número de soluciones de flujos de potencia, de acuerdo a cómo se especifican las variables de control (potencias de generación, voltajes de generación, taps, etc.).

El flujo óptimo, es un flujo de potencia en el cual se seleccionan cuales son los mejores valores de las variables de control con el objeto de minimizar alguna función por ejemplo costos de operación, o pérdidas, obteniendo al mismo tiempo una solución adecuada para las variables de estado y variables dependientes.

Cuando los costos operativos se minimizan el flujo óptimo se lo denomina despacho económico o despacho óptimo de potencia activa. Cuando se minimizan las pérdidas de transmisión el flujo óptimo es un flujo óptimo de potencia reactiva. Cuando se minimiza primero los costos operativos y luego las pérdidas se convierte en el flujo óptimo en ge-

neral.

En consecuencia, el flujo óptimo de potencia es un problema de optimización cuyo planteamiento matemático es el siguiente:

Denominando como \bar{x} a las variables de estado que son V y δ en las barras de carga y δ en las barras de generación, como \bar{u} a las variables de control que son P y V en barras de generación, posición de taps y como \bar{p} a las variables independientes o fijas que son P y Q en las barras de carga y δ en la oscilante.

Se define una función objetivo $h(\bar{x}, \bar{u})$ a minimizar, sujeta a la condición de que se cumplan las ecuaciones del flujo de potencia $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$. Las incógnitas del problema son \bar{u} y \bar{x} , o sea:

$$\begin{aligned} \min h(\bar{x}, \bar{u}) \\ \text{sujeto a: } \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \end{aligned} \quad (43)$$

Para resolver este problema, una de las técnicas constituye la técnica de Lagrange, que convierte al problema restringido en un problema no restringido, formando una función denominada Lagrangiano que tiene la siguiente forma:

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = h(\bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \cdot \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (44)$$

los valores $\bar{\lambda}$ componentes del vector $\bar{\lambda}$ se denominan multiplicadores de Lagrange. De (44) las condiciones necesarias para el mínimo son:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} + \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{u}} + \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} \right]^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (47)$$

la matriz $\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}} \right]^T$ es el jacobiano transpuesto del sistema de potencia (el que se utiliza en el flujo de potencia convencional), la matriz $\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} \right]^T$ es el jacobiano transpuesto de las ecuaciones de flujo con respecto a las variables de control. Los términos $\frac{\partial L}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}$, $\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial h}{\partial \bar{u}}$, son los gradientes de las funciones escalares L y h.

En forma más compacta las ecuaciones anteriores pueden expresarse como:

$$\nabla_{\bar{x}} L = \nabla_{\bar{x}} h + [J]^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (48)$$

$$\nabla_{\bar{u}} L = \nabla_{\bar{u}} h + [J_u]^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (49)$$

$$\nabla_{\bar{\lambda}} L = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (50)$$

Algoritmo de solución del flujo óptimo

Utilizando el método de N-R completo, los pasos para resolver el flujo óptimo son:

a. Asumir las variables de control \bar{u} (al igual que se hace en un estudio de flujo de potencia convencional).

b. Encontrar la solución \bar{x} por medio del método N-R, calcular J, J_u en el punto de solución y evaluar $h(\bar{x}, \bar{u})$, $\nabla_{\bar{x}} h$ y $\nabla_{\bar{u}} h$.

c. Resolver la ecuación (48) para $\bar{\lambda}$, o sea:

$$\bar{\lambda} = - [J]^T \cdot \nabla_{\bar{x}} h$$

La ecuación (48) se cumple siempre para cualquier

solución de flujo de potencia, no necesariamente óptima, no así la ecuación (49) que sólo se cumple para el óptimo; como los valores definidos para \bar{u} no son óptimos, entonces la ecuación (49) no es ce ro, sino que tiene un valor o desviación \bar{V}_h .

d. Calcular la desviación \bar{V}_h

$$\bar{V}_h = \bar{V}_{hu} + [J_u]^T \lambda$$

el gradiente \bar{V}_h mide la sensibilidad de la función objetivo con respecto a cambios en \bar{u} satisfaciendo las ecuaciones de flujo de potencia. El gradiente \bar{V}_{hu} por sí mismo, no da ninguna mayor información debido a que no considera la restricción de las ecuaciones de flujo.

e. Si \bar{V}_h es lo suficientemente pequeño, se ha alcanzado el mínimo y por tanto \bar{u} y \bar{x} son los valores óptimos

f. Caso contrario, ajustar los valores de control como:

$$\bar{u}_{\text{nuevo}} = \bar{u}_{\text{anterior}} + \Delta \bar{u}$$

$$\text{siendo } \Delta \bar{u} = -c \bar{V}_h \quad (51)$$

g. retornar al paso b.

Los pasos a hasta e son directos y sin mayores problemas computacionales. La parte crítica del algoritmo es el paso f. La ecuación (51) es una de las muchas fórmulas de corrección que pueden determinarse y el éxito de la convergencia del flujo óptimo depende del valor c que se escoja.

Si se toman valores muy pequeños, generalmente se obtiene convergencia pero requiere de muchas iteraciones y el proceso es excesivamente largo; si se toman valores muy grandes ocurren oscilaciones alrededor del mínimo. Una mejor solución que se ha investigado en la referencia [6] es el ir ajustando c ; cada iteración.

Aspectos adicionales del flujo óptimo

El problema planteado anteriormente está enfocado sólo a que se cumplan las ecuaciones del flujo de potencia como restricciones, pero la solución \bar{u} y \bar{x} puede estar fuera de límites, razón por la cual es necesario incluir además como restricciones del problema que:

$$\bar{u}_{\text{min}} \leq \bar{u} \leq \bar{u}_{\text{max}}$$

$$\bar{x}_{\text{min}} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\text{max}}$$

Por último, a veces algunos elementos pueden tener restricciones de transferencia de potencia, y estas restricciones denominadas funcionales porque dependen de \bar{u} y \bar{x} , también hay que incluirlas.

El problema de optimización se complica un tanto por el manejo de estas restricciones. Ver referencias [6] y [7].

Aquí se ha presentado una técnica de solución del flujo óptimo, muchas se han investigado y se siguen investigando debido a que todavía no se ha encontrado un algoritmo eficiente, rápido y confiable del flujo óptimo.

REFERENCIAS

- [1] Power Flow solution by Newton's Method. W.F. Tinney, C.E. Hart, IEEE PAS-86 No.11 Nov.1967 pag. 1449-1460.
- [2] Fast Decoupled Load Flow. B. Stott, O. Alsac, IEEE PAS-93 May/June 1974 pag. 859-869.
- [3] A Fast Load Flow Method Retaining Nonlinearity, S. Iwamoto Y. Tamura, IEEE PAS-97 Sept/Oct. 1978, pag. 1586-1599.
- [4] A Load Flow Calculation Method for Ill-Conditioned Power Systems. S. Iwamoto, Y. Tamura, IEEE PAS-100 Abril/1981 pag. 1736-1743.
- [5] Flujo de Potencia Estocástico. G. Argüello, Jornadas Ingeniería Eléctrica, EPN. Mayo 1983 pag. 31-38.
- [6] Flujo Óptimo de Potencia. F. Vinuesa y G. Argüello, Jornadas Ingeniería Eléctrica, EPN. Junio 1985.
- [7] Optimal Power Flow Solutions. N. Dommel, W. Tinney IEEE PAS-87, Oct. 1968 pag. 1866-1876.
- [8] Review of Load Flow Calculation Methods, B. Stott Proc IEEE, VOL 62 pag. 916-929, julio 1974.
- [9] Optimal Power Dispatch. A Comprehensive Survey. H. Happ IEEE PAS-96, May/June 1977 pag. 841-852.
- [10] Flujo de Potencia Estocástico. R. Guijarro. Tesis de grado EPN Agosto 1984.
- [11] Estudios de Flujos de Carga. E. Mármol. Tesis de grado EPN julio 1983.
- [12] Nuevos métodos de flujo de potencia y su aplicación a sistemas mal condicionados N. Duque. Tesis de grado EPN Agosto 1984.
- [13] Flujo Óptimo de Potencia. F. Vinuesa. Tesis de grado EPN 1985.

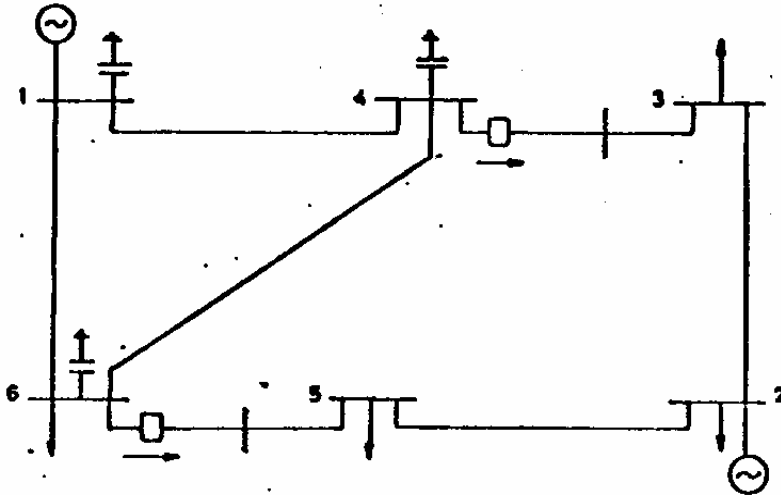
A P E N D I C E

A continuación se presenta un ejemplo (tomado de la ref. [12]) en el que se presentan resultados utilizando los distintos métodos de solución de flujo de potencia.

Ejemplo de flujo de corriente directa y flujo estocástico ver referencia [5]

Ejemplos de flujo óptimo, ver referencia [6]

Diagrama Unifilar



Número de la barra flotante 1

Base 100 MVA

Datos de Taps

Barra P	Barra Q	TAP en P
6	5	0.97561
4	3	0.90909

Datos de Condensadores

Barra No.	Susceptancia (MVAR)
4	2.9326
1	3.3898
6	3.5088

Límites de Generación de las Barras PV

Barra No.	MVAR max.	MVAR min.
2	25.0	0.0

Datos de Líneas y Transformadores

LINEA P Q	RESISTENCIA	REACTANCIA
	R	X
1 - 6	12.3	51.8
1 - 4	8.0	37.0
4 - 6	9.7	40.7
6 - 5	0.0	30.0
2 - 5	2.82	64.0
2 - 3	7.23	105.0
4 - 3	0.0	13.3

Datos de Barras

Barra Tipo	Barra No.	Voltaje (P.U.)	Generación		Carga	
			(MW)	(MVAR)	(MW)	(MVAR)
S	1	1.05				
T	2	1.1	50.0			
C	3				55.0	13.0
C	4				0.0	0.0
C	5				30.0	18.0
C	6				50.0	5.0

S: oscilante T: tensión controlada C: carga

VOLTAJES Y ANGULOS DE BARRA

METODO BARRA #	G-S		N-R(FP)		N-R(OP)		N-R(CR)		N-R(SO)		N-R(MO)	
	V	θ°	V	θ°	V	θ°	V	θ°	V	θ°	V	θ°
1	1.0500	0.00	1.0500	0.00	1.0500	0.00	1.0500	0.00	1.0500	0.00	1.0500	0.00
2	1.1000	- 3.36	1.1000	- 3.36	1.1000	- 3.37	1.1000	- 3.36	1.1000	- 3.36	1.1000	- 3.36
3	1.0005	-12.79	1.0003	-12.79	1.0003	-12.78	1.0006	-12.79	1.0006	-12.79	1.0005	-12.79
4	0.9296	- 9.84	0.9294	- 9.84	0.9295	- 9.84	0.9296	- 9.84	0.9297	- 9.84	0.9296	- 9.84
5	0.9193	-12.34	0.9188	-12.34	0.9191	-12.34	0.9193	-12.34	0.9193	-12.34	0.9193	-12.34
6	0.9191	-12.24	0.9187	-12.24	0.9190	-12.24	0.9191	-12.24	0.9191	-12.24	0.9191	-12.24

G-S - Gauss-Seidel

N-R(FP) - N-R completo en coordenadas polares

N-R(OP) - N-R desacoplado rápido

N-R(CR) - N-R completo en coordenadas rectangulares

N-R(SO) - N-R Segundo orden

N-R(MO) - N-R con el multiplicador óptimo

FORMULACION ANALITICA DE FLUJOS DE POTENCIA ESTOCASTICOS

RESUMEN

El flujo de potencia es la solución de estado estacionario de un sistema de potencia bajo ciertas condiciones preestablecidas de generación, carga y topología de red; proporcionando los niveles de tensión de todas las barras del sistema, tanto en magnitud como ángulo, el flujo de potencia por todos los elementos de la red y sus pérdidas.

La solución se ajusta exactamente a las condiciones preestablecidas de generación y carga, como estos valores son obtenidos en base a predicciones, resulta que la solución es buena en tanto en cuanto los datos sean buenos. Como evidentemente siempre hay incertidumbre en la predicción, es obvio que la solución contiene incertidumbre y no puede tomarse como exacta.

En el presente artículo, se presenta la formulación del flujo de potencia tomando en cuenta la incertidumbre en la predicción, resultado de lo cual las variables del problema son variables aleatorias, de las cuales no sólo se obtiene sus valores esperados sino una medida de su dispersión alrededor del valor esperado.

El método está basado en la teoría de estimación por mínimos cuadrados con cero grados de libertad, siendo por tanto imposible el filtrar errores de predicción. Se presentan resultados para un ejemplo sencillo.

INTRODUCCION

El flujo de potencia ha sido y lo sigue siendo, la herramienta fundamental para planeamiento, diseño y operación de sistemas eléctricos de potencia. La formulación del problema es determinística, por tanto los resultados se ajustan exactamente a los datos de entrada. Es práctica común el analizar muchos casos de flujos de potencia para tomar en cuenta errores que pueden darse en la predicción de carga y generación, resultado de lo cual se obtienen posibles rangos de variación de las variables de estado luego de un largo proceso de análisis, el cual además debe ser metódico y organizado. Uno de estos métodos organizados de análisis lo constituye la simulación de Monte Carlo.

El flujo de potencia estocástico, procesa la incertidumbre de los valores pronosticados dando como resultado los valores esperados más probables de las variables de estado así como sus rangos de variación alrededor de su valor esperado en base a límites de confianza. Los valores esperados para cero grados de libertad coinciden con la solución determinística del problema. Por tanto el flujo de potencia estocástico parte de una solución convencional de flujos, debiendo calcularse además las variaciones de las variables alrededor de su solución esperada en base a la incertidumbre de los datos de entrada. Un sólo caso de flujo estocástico, adecuadamente formulado, equivale a muchos casos de flujos de potencia determinísticos.

Cero grados de libertad significa que con las variables de entrada o datos se puede conformar un sistema de ecuaciones cuyo número coincide con el número

de incógnitas, que es el caso cuando se establecen los datos para un estudio de flujo convencional ya que no se conoce de antemano cual es el flujo de potencia por determinadas líneas o la generación de la barra oscilante, etc., esto hace imposible la detección y peor la identificación de posibles errores en las variables de entrada; en cambio es posible tomar en cuenta la existencia de errores en las variables de entrada y conocer su efecto en las variables de salida, lo cual es ya muy importante, y este es el objetivo del flujo estocástico o probabilístico. En aplicaciones en tiempo real para operación de sistemas eléctricos de potencia a través de un centro de control; es posible medir, además de las variables de entrada para un flujo de potencia, los flujos por líneas, voltajes de barra, etc. con lo cual es posible conformar un sistema de ecuaciones sobredeterminado, es decir, más ecuaciones (m) que incógnitas (n) y por tanto con $m-n$ grados de libertad, en este caso no sólo que es posible encontrar la mejor estimación de las variables de estado, sino detectar e identificar errores de medición, este proceso se conoce como estimación de estado, del cual el flujo de potencia estocástico es un caso muy particular. (6), (7).

El flujo de potencia estocástico ha sido entonces, formulado en base a la teoría de estimación (1), mediante la cual se demuestra que para cero grados de libertad, la solución más probable o esperada coincide con la solución determinística, pero además es también posible analizar la estadística de las variables de salida en base a la estadística de las variables de entrada y determinar entonces un rango probable de resultados asignando límites de confianza deseados.

1. FORMULACION LINEAL DEL FLUJO DE POTENCIA ESTOCASTICO

El flujo de potencia es un problema no lineal, el cual puede linealizarse mediante la expansión en series de Taylor de las ecuaciones de flujo, la solución se obtiene mediante un proceso iterativo de solución de ecuaciones lineales. (5).

Por esta razón analizaremos primero una formulación lineal del flujo de potencia estocástico y luego el no lineal que se transforma en un conjunto de problemas lineales.

La formulación está basada en los principios estadísticos de estimación por mínimos cuadrados. Consideremos el caso que el flujo de potencia puede describirse matemáticamente como un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\bar{y} = A\bar{x} \quad (1)$$

donde:

A es una matriz de coeficientes constantes

\bar{y} es el vector de valores observados o pronosticados

\bar{x} es el vector de variables de estado

La ecuación (1) es la formulación determinística de flujos en la que se asume que los valores observados son precisos y si A es una matriz cuadrada entonces \bar{x} se ajusta exactamente a \bar{y} . Si consideramos que \bar{y} contiene un vector $\bar{\epsilon}$ de ruido o error entonces (1) se transforma en:

$$\bar{y} = A\bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (2)$$

El objetivo es encontrar el mejor estimativo de \bar{x} dado el vector \bar{y} . Para encontrar el mejor estimativo de \bar{x} es conveniente primero asumir que el valor esperado de los errores sea cero, o sea:

$$E(\bar{\epsilon}) = \bar{0} \quad (3)$$

Esta ecuación implica que los errores están aleatoriamente distribuidos alrededor de cero, pero es obvio que los errores pueden tener un valor medio o esperado de cero así existan errores muy grandes positivos o negativos en las observaciones \bar{y} . Por lo tanto, siendo las observaciones de diferente calidad o precisión, la matriz de covarianza de los errores $\bar{\epsilon}$ da la indicación de la dispersión de los errores alrededor del valor medio, y está definido por:

$$V = E(\bar{\epsilon} \bar{\epsilon}^t) \quad (4)$$

La teoría de estimación establece que el mejor estimativo de \bar{x} de la ecuación (2) con las consideraciones dadas por las ecuaciones (3) y (4) se obtiene al minimizar la sumatoria de los cuadrados de los errores ponderados por sus varianzas, o sea:

$$\min J(\bar{x}) = \bar{\epsilon}^t V^{-1} \bar{\epsilon} = (\bar{y} - A\bar{x})^t V^{-1} (\bar{y} - A\bar{x}) \quad (5)$$

J(\bar{x}) se denomina función de error y es un valor escalar, con lo que (5) puede transformarse en:

$$J(\bar{x}) = \bar{y}^t V^{-1} \bar{y} - 2\bar{x}^t A^t V^{-1} \bar{y} + \bar{x}^t A^t V^{-1} A \bar{x} \quad (6)$$

J(\bar{x}) se minimiza cuando $\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0$, derivando (6) con

con respecto a \bar{x} se obtiene que:

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = -2 A^t V^{-1} \bar{y} + 2 A^t V^{-1} A \bar{x} = 0$$

donde: $A^t V^{-1} A \bar{x} = A^t V^{-1} \bar{y}$ (7)

designando como \hat{x} a la mejor estimación que minimiza los errores $\bar{\epsilon}$:

$$\hat{x} = (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{y} \quad (8)$$

Como un flujo de potencia se formula en base a que con las observaciones \bar{y} se conforma un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas \bar{x} es decir con cero grados de libertad, resulta que A es una matriz cuadrada, y es obvio de (7) y (8) que la mejor estimación de \bar{x} se reduce a:

$$\hat{x} = A^{-1} \bar{y} \quad (9)$$

De la ecuación (9) se deduce que se obtiene el mismo resultado de la formulación determinística dada por (1); por lo tanto la mejor estimación de la formulación estocástica coincide con la determinística ya que para cero grados de libertad, las matrices que involucran la estadística de los errores de las observaciones se eliminan y por tanto es imposible filtrar errores. Como veremos adelante, al efectuar

el análisis estadístico de los valores estimados, se comprobará que los valores calculados de \hat{x} se ajustan exactamente a las observaciones, siendo entonces la diferencia entre flujo estocástico y determinístico el análisis estadístico posterior que se puede efectuar en las variables de estado \hat{x} en base a la estadística de los errores de las observaciones dadas por la matriz de varianzas V conocida. Además, en este caso particular, de cero grados de libertad, se concluye que $J(\hat{x}) = 0$.

2. ANALISIS ESTADISTICO

A continuación se efectuará un riguroso análisis estadístico tanto de las observaciones como de la estimación de \hat{x} con el fin de obtener conclusiones sobre la formulación estocástica de flujos (2). Se partirá de las ecuaciones generales de estimación dadas por las ecuaciones (2) a (3) y luego se particularizará para cero grados de libertad.

2.1 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE \hat{x}

Designando al valor esperado de \hat{x} como $E(\hat{x})$, tenemos que de (2) y (8), \hat{x} puede expresarse como:

$$\hat{x} = (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} (A\bar{x} + \bar{\epsilon})$$

$$\hat{x} = (A^t V^{-1} A)^{-1} (A^t V^{-1} A) \bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon}$$

$$\hat{x} = \bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon}$$

$$E(\hat{x}) = E(\bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon})$$

como $(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1}$ es una matriz constante M

$$E(\hat{x}) = E(\bar{x} + M\bar{\epsilon}) = E(\bar{x}) + ME(\bar{\epsilon})$$

De la ecuación (3) se partió que el valor esperado de los errores es cero y que además de la ec (2) resulta que \bar{x} es el valor verdadero, entonces:

$$E(\hat{x}) = E(\bar{x}) = \bar{x} \quad (10)$$

Por tanto el valor esperado de \hat{x} es el vector de estado \bar{x} verdadero que es precisamente lo que tratamos de estimar. Cuando se cumple esta condición se dice que el estimador es sin desviación ("unbiased").

La varianza de las variables de estado es el valor esperado de las desviaciones cuadráticas de los valores estimados con respecto a sus valores medios, dando como resultado una matriz denominada matriz de covarianza de \hat{x} .

$$\text{cov.}(\hat{x}) = E((\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t)$$

De las relaciones anteriores se tiene que

$$\hat{x} = \bar{x} + M\bar{\epsilon}$$

$$\text{por tanto } \text{cov}(\hat{x}) = E((\bar{x} + M\bar{\epsilon} - \bar{x})(\bar{x} + M\bar{\epsilon} - \bar{x})^t)$$

$$\text{cov}(\hat{x}) = E(M\bar{\epsilon}(M\bar{\epsilon})^t) = E(M\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t M^t)$$

$$\text{cov}(\hat{x}) = ME(\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t)M^t$$

Pero de la ec (4) se tiene que $E(\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t)$ es la matriz de varianzas V de los errores de las observaciones \bar{y} , matriz que es conocida y reemplazamos el valor

$M = (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1}$ obtenemos finalmente que:

$$\text{cov}(\hat{x}) = (A^t V^{-1} A)^{-1} \quad (11)$$

La expresión (11) es muy importante en el análisis de flujo estocástico pues da las desviaciones que tendrían los resultados de los valores esperados de las variables de estado ante la incertidumbre de las variables de entrada dada por V. Para cero grados de libertad la ecuación (11) se mantiene.

2.2 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE \hat{y}

Si \hat{x} es la mejor estimación del sistema de ecuaciones $\hat{y} = A\hat{x} + \hat{e}$, entonces el valor estimado o calculado de las observaciones será:

$$\hat{y} = A\hat{x} \quad (12)$$

Entonces, el valor esperado de \hat{y} es:

$$E(\hat{y}) = E(A\hat{x}) = AE(\hat{x}) = A\bar{x}$$

ahora: $E(\hat{y}) = E(A\hat{x} + \hat{e}) = AE(\hat{x}) + E(\hat{e}) = A\bar{x}$

por tanto: $E(\hat{y}) = E(\bar{y}) = A\bar{x} = \bar{y}_t$ (13)

Siendo \bar{y}_t el valor verdadero de las observaciones y \bar{x} el valor verdadero del estado como ya se estableció antes.

De igual manera la matriz de covarianza de los valores estimados de las observaciones es:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{y}) &= E((\hat{y} - \bar{y}_t)(\hat{y} - \bar{y}_t)^t) \\ &= E((A\hat{x} - A\bar{x})(A\hat{x} - A\bar{x})^t) \\ &= E(A(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t A^t) \\ &= AE((\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t) A^t \end{aligned}$$

$$\text{pero } E((\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t) = \text{cov}(\hat{x}) = (A^t V^{-1} A)^{-1}$$

$$\text{por tanto: } \text{cov}(\hat{y}) = A(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t \quad (14)$$

para cero grados de libertad en la que A es cuadrada y simétrica (14) se reduce a:

$$\text{cov}(\hat{y}) = V \quad (15)$$

Lo que significa que para cero grados de libertad no es posible obtener un valor de \hat{y} más cercano a y_t que el valor original de la observación y ya que la varianza de y y \hat{y} es la misma.

2.3 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE LOS ERRORES \hat{e}

De las ecuaciones $\hat{y} = A\hat{x} + \hat{e}$ y $\hat{y} = A\hat{x}$ tenemos que el valor calculado de los errores es:

$$\hat{e} = \hat{y} - A\hat{x}$$

$$E(\hat{e}) = E(\hat{y} - A\hat{x}) = E(\hat{y}) - E(A\hat{x}) = \bar{y}_t - A\bar{x} = \bar{e}_t = \bar{0}$$

lo cual es obvio por cuanto es una de las condiciones de partida para la formulación del problema, el asumir que el valor medio de los errores de las observaciones es cero y por tanto de los calculados.

La matriz de covarianza de los errores calculados es:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{e}) &= E((\hat{e} - \bar{e}_t)(\hat{e} - \bar{e}_t)^t) \\ &= E((\hat{e} - \bar{0})(\hat{e} - \bar{0})^t) = E(\hat{e} \hat{e}^t) \\ &= E((A(\hat{x} - \bar{x}) + \hat{e})(A(\hat{x} - \bar{x}) + \hat{e})^t) \end{aligned}$$

lo que se reduce a:

$$y: E(\hat{e}\hat{e}^t) = V$$

por tanto:

$$\text{cov}(\hat{e}) = V - A(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t \quad (16)$$

o lo que es lo mismo: $\text{cov}(\hat{e}) = V - \text{cov}(\hat{y})$

Para cero grados de libertad hemos establecido con la ec (15) que $\text{cov}(\hat{y}) = V$ por tanto en este caso particular:

$$\text{cov}(\hat{e}) = \bar{0} \quad (17)$$

Esto significa que para igual número de ecuaciones que de incógnitas simplemente $y = \hat{y}$ como así lo establecen las ecuaciones (9) y (12). Por tanto este análisis de errores para flujo estocástico no aporta nada, demostrando una vez más que es imposible el filtrado de errores para cero grados de libertad. Sin embargo la ec (16) es de extraordinaria importancia en estimación de estado (2).

2.4 VALOR ESPERADO DE LA FUNCION DE ERROR $J(\hat{x})$

Por no ser de interés para flujo de potencia estocástico no se hará la demostración sobre el valor esperado de la función de error $J(\hat{x}) = \bar{0}$ y por tanto su valor esperado es cero, simplemente estableceremos que en el caso general de m observaciones y n variables de estado:

$$J(\hat{x}) = (\hat{y} - A\hat{x})^t V^{-1} (\hat{y} - A\hat{x})$$

y que $E(J(\hat{x})) = m - n$ (18)

lo que significa que el valor esperado de $J(\hat{x})$ coincide con el número de grados de libertad. La distribución chi-cuadrado sigue la misma propiedad, por tanto la función de error evaluada en el punto de solución (2) sigue la distribución chi-cuadrado. También en estimación de estado la ec (18) es de mucha importancia.

Para cero grados de libertad en que $m = n$, entonces:

$$E(J(\hat{x})) = \bar{0} \quad (19)$$

lo que significa que la solución determinística del flujo de potencia coincide con la mejor estimación de la estocástica, ya que también $J(\hat{x}) = 0$

2.5 VALORES ESPERADOS Y VARIANZA DE LAS VARIABLES DE SALIDA DEPENDIENTES \hat{z}

Hasta aquí se ha analizado completamente la estadística de las variables observadas o de entrada \hat{y} y la de las de salida o de estado \hat{x} que en un flujo de potencia son los voltajes nodales en magnitud y ángulo.

Las variables de salida dependientes \hat{z} son todos aquellos valores que se calculan una vez obtenido el estado \hat{x} , el vector de variables de salida dependientes \hat{z} son entonces los flujos de potencia por las líneas y la potencia reactiva en los generadores. La barra oscilante requiere una consideración especial y se la analizará más adelante.

Continuando con el modelo lineal, consideremos que las variables de salida \hat{z} son funciones lineales del estado \hat{x} y que puede expresarse de la forma:

$$\hat{z} = D\hat{x} \quad (20)$$

Si \hat{x} es la mejor estimación, entonces los valores calculados de \hat{z} son:

$$\hat{z} = D \cdot \hat{x}$$

el valor esperado de \hat{z} es:

$$E(\hat{z}) = D \cdot E(\hat{x}) = D \cdot \bar{x} = \bar{z} \quad (21)$$

es decir siendo \bar{x} el valor verdadero, los valores esperados de \hat{z} son aquellos obtenidos de la solución determinística.

La matriz de covarianza de \hat{z} es entonces

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{z}) &= E\{(\hat{z} - \bar{z})(\hat{z} - \bar{z})^t\} \\ &= E\{D(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t D^t\} \\ &= D \cdot E\{(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t\} D^t \\ &= D \cdot \text{cov}(\hat{x}) \cdot D^t \\ \text{cov}(\hat{z}) &= D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t \quad (22) \end{aligned}$$

Para cero grados de libertad, la ec (22) se mantiene por tanto es posible calcular la dispersión de las variables de salida dependientes alrededor de su valor esperado.

2.6 INTERVALOS DE CONFIANZA

En todo el análisis estadístico desarrollado hasta aquí, se ha establecido que, dado el vector \bar{y} de observaciones y una matriz de varianzas V de las observaciones, las relaciones de interés para flujo de potencia estocástico son:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A^{-1} \bar{y} \\ \hat{z} &= D \cdot \hat{x} \\ \text{cov}(\hat{x}) &= (A^t V^{-1} A)^{-1} \\ \text{cov}(\hat{z}) &= D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t \end{aligned}$$

Las dos primeras relaciones establecen que la mejor estimación de las variables del flujo de potencia son las determinísticas o sea aquellas obtenidas de un flujo convencional, la diferencia radica en las dos relaciones últimas, con las cuales es posible encontrar la dispersión de las variables de salida en función de la incertidumbre de las variables de entrada.

Ahora es conveniente establecer las características de distribución de probabilidad de las variables (1). Las observaciones \bar{y} pueden tener cualquier función de distribución de probabilidad la cual es determinada del conocimiento del problema físico, pudiendo establecerse su estadística dada por V . Las variables de salida \bar{x} y \bar{z} son combinaciones lineales de \bar{y} y en base al teorema del límite central que establece que, siendo las observaciones independientes y pudiendo tener diferentes funciones de distribución, su combinación para encontrar \bar{x} y \bar{z} hace que estas tiendan a ser variables aleatorias que siguen la distribución normal con valores medios \bar{x} y \bar{z} , y con una desviación estándar σ_x y σ_z respectivamente, donde:

$$\sigma_x^2 = \text{diag}(\text{cov}(\hat{x})) = \text{diag}((A^t V^{-1} A)^{-1}) \quad (23)$$

$$\sigma_z^2 = \text{diag}(\text{cov}(\hat{z})) = \text{diag}(D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t) \quad (24)$$

Entonces siendo \hat{x} y \hat{z} los valores esperados o solución determinística de flujo de potencia, \bar{x} y \bar{z}

en vez de tener un valor único, tendrán un rango de variación que tome en cuenta la incertidumbre de las variables de entrada en base a un intervalo de confianza dado por:

$$\bar{x} = \bar{x} \pm s \sigma_x \quad (25)$$

$$\bar{z} = \bar{z} \pm s \sigma_z \quad (26)$$

donde si $s=1$ entonces el intervalo de confianza es de 65%, si $s=2$ 95% y si $s=3$ 99%. por tanto para tener un 99% de cubrir los valores verdaderos de las variables de salida, se toma en el flujo estocástico que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} \pm 3 \sigma_x \\ \bar{z} &= \bar{z} \pm 3 \sigma_z \quad (27) \end{aligned}$$

3. FORMULACION NO LINEAL DEL FLUJO DE POTENCIA ESTOCASTICO

Una vez establecido el modelo completo de la formulación lineal del flujo estocástico, la formulación no lineal es una simple extensión. La relación funcional entre \bar{y} y \bar{x} es no lineal en sistemas de potencia, pero como es conocido es posible linealizar las ecuaciones alrededor del punto de solución mediante la expansión de las funciones no lineales en series de Taylor.

Las ecuaciones de flujo de potencia asumiendo error en cada una de las variables de entrada son:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{\epsilon} \quad (28)$$

Siendo \bar{x} el vector de estado verdadero.

Efectuando la expansión en series de Taylor alrededor de \bar{x}_s tenemos que (28) se transforma en:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}_s) + J \Delta \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (29)$$

donde J es el jacobiano del sistema de ecuaciones que consta de las derivadas parciales de las variables de entrada con respecto a cada una de las variables de estado y evaluado en \bar{x}_s , por tanto:

$$\Delta \bar{y} = \bar{y} - \bar{f}(\bar{x}_s) = J \Delta \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (30)$$

la ecuación (30) es una ecuación lineal que tiene la misma forma de la ec(2) con la diferencia que J no es una matriz constante pero que depende del punto al cual es evaluada, la mejor estimación de $\Delta \bar{x}$ en el caso general es (de la ec (8)).

$$\Delta \bar{x} = (J^t V^{-1} J)^{-1} J^t V^{-1} \Delta \bar{y} \quad (31)$$

Para cero grados de libertad en que el jacobiano es una matriz cuadrada, entonces:

$$\Delta \bar{x} = J^{-1} \Delta \bar{y} \quad (32)$$

que es exactamente la misma solución obtenida por los métodos de Newton-Raphson, los valores más cercanos a la solución se obtienen como:

$$\hat{x}_s = \bar{x}_s + \Delta \hat{x} \quad (33)$$

Las ec.(32) y(33) se repiten hasta que se satisfaga un criterio de convergencia, es decir la solución determinística del flujo de potencia.

La expresión de interés para flujo estocástico es la matriz de covarianza de \hat{x} , de la ec (11).

$$\text{cov}(\hat{\Delta x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1} \quad (34)$$

Si ya se ha obtenido convergencia, entonces J es evaluado en el punto de solución y $\hat{x}_s = \hat{x}$ es la solución del flujo de potencia, como lo que en realidad interesa es la cov (\hat{x}) tenemos que de (33) en la que \hat{x}_s no son variables aleatorias, ya que son valores que se van calculando a partir de valores iniciales asumidos:

$$\text{cov}(\hat{x}) = \text{cov}(\hat{\Delta x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1} \quad (35)$$

De idéntica manera las ecuaciones de las variables de salida dependientes son funciones no lineales de las variables de estado, y cuyos valores calculados estarán dados por:

$$\hat{z} = \hat{g}(\hat{x}) \quad (36)$$

Con el objeto de conocer la estadística de \hat{z} y aplicar la teoría lineal, es necesario linealizar (36) por expansión en series de Taylor, así:

$$\hat{z} = \hat{g}(\hat{x}_s) + K \Delta \hat{x} \quad (37)$$

donde $\Delta \hat{z} = \hat{z} - \hat{g}(\hat{x}_s) = K \Delta \hat{x}$

Siendo K el jacobiano de las variables de salida dependiente con respecto a las variables de estado, la ec (37) tiene entonces la misma forma que la ecuación lineal (20). Entonces los valores calculados de $\Delta \hat{z}$ que se pueden obtener a medida que se calcula $\Delta \hat{x}$ es:

$$\Delta \hat{z} = K \Delta \hat{x} \quad (38)$$

Aplicando la ecuación (22)

$$\text{cov}(\Delta \hat{z}) = K(J^t V^{-1} J)^{-1} K^t \quad (39)$$

así mismo:

$$\text{cov}(\hat{z}) = \text{cov}(\Delta \hat{z}) = K(J^t V^{-1} J)^{-1} K^t \quad (40)$$

Si el flujo de potencia ha convergido, K y J se evalúan en el punto de solución y se determina así la estadística de las variables de salida dependientes.

Por último los resultados dados como un intervalo de confianza del 99% son:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x} \pm 3\hat{\sigma}_x \\ \hat{z} &= \hat{z} \pm 3\hat{\sigma}_z \end{aligned} \quad (41)$$

4: ALGORITMO DE RESOLUCION DEL FLUJO ESTOCASTICO

Una vez presentada la teoría general necesaria para el flujo de potencia estocástico, el algoritmo de solución puede plantearse, para una topología dada de un sistema de potencia, de la siguiente manera:

Siendo: \hat{y} el vector de datos de entrada para un flujo de potencia, P y Q para las barras de carga y P para las de generación en las que se man tiene la magnitud de voltaje $|E|$.

\hat{x} es el vector de las variables $|E|$ y δ

V las varianzas asumidas de los errores en los datos de entrada \hat{y} .

J el jacobiano de las ecuaciones de flujo de potencia compuesta por las derivadas parciales de P y Q con respecto a $|E|$ y δ

\hat{z} las variables de estado dependientes calculadas a partir de \hat{x} , tales como los flujos por las líneas y las potencias reactivas de generación.

K el jacobiano de las variables \hat{z} con respecto a \hat{x}

Paso 1.- Flujo de Potencia.-El vector \hat{x} se determina con un flujo de potencia convencional por el método de Newton Raphson, donde también se calcula \hat{z} .

Paso 2.- Cálculo de $\text{cov}(\hat{x})$.-con el jacobiano J evaluado en el punto de solución \hat{x} , calcular:

$$\text{cov}(\hat{x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1}$$

$\text{cov}(\hat{x})$ es una matriz llena, J es muy dispersa, V es generalmente diagonal, por tanto para efectuar esta operación es conveniente utilizar técnicas de descomposición L.U a la matriz $J^t V^{-1} J$.

Paso 3.- Cálculo de $\text{cov}(\hat{z})$.-Establecer el jacobiano K y evaluarlo en el punto de solución \hat{x} , luego

$$\text{cov}(\hat{z}) = K \text{cov}(\hat{x}) K^t$$

Sólo los términos de la diagonal principal de $\text{cov}(\hat{x})$ y $\text{cov}(\hat{z})$ son de interés, ya que con ellos se conforman los vectores $\hat{\sigma}_x$ y $\hat{\sigma}_z$.

Paso 4.- Intervalos de confianza en \hat{x} y \hat{z} .- Finalmente se calcula el rango de variación de los resultados como:

$$\hat{x} = \hat{x} \pm 3\hat{\sigma}_x$$

$$\hat{z} = \hat{z} \pm 3\hat{\sigma}_z$$

para 99% de confianza (exactamente para 99% est 2.57 σ)

5. CONSIDERACIONES ADICIONALES SOBRE EL FLUJO ESTOCASTICO

5.1 CORRELACION ENTRE VARIABLES

Normalmente se asume que la matriz de varianzas V de los datos de entrada es diagonal, lo que significa que todas las observaciones son independientes o no están correlacionadas entre sí, pero aún así las variables de estado están correlacionadas debido a la conexión de los nodos o barras mediante la red de transmisión, como efectivamente lo demuestra la matriz $\text{cov}(\hat{x})$ que es una matriz llena.

Una formulación más real es aquella que considera que carga y generación no son en la práctica independientes, ya que cambios en carga serán acompañados de cambios en generación en la misma dirección, esta es una indicación de correlación entre generación y carga. Por ejemplo, si una carga está conectada a una barra de generación, los cambios en carga serán seguidos fundamentalmente por dicha generación estableciéndose una alta correlación entre las dos.

Por otra parte la predicción de la carga total del sistema es generalmente más precisa que la predicción de las cargas individuales, esta información adicional puede ser muy valiosa y ser considerada como parte de la información de correlación. Si la carga total del sistema P_t igual a la suma de todas las cargas individuales entonces (3)

$$P_t = \sum_i P_{ci} \quad (42)$$

asumiendo independencia en las inyecciones, el valor esperado de P_t es:

$$E(P_t) = \sum_i E(P_{ci}) \quad (43)$$

y la varianza:

$$\text{Var}(P_t) = \sum_i \text{Var}(P_{ci}) \quad (44)$$

Es interesante observar el caso cuando las varianzas tanto de la carga total como de las cargas individuales se especifican independientemente, en dicha circunstancia (44) no se cumple. Si sabemos de antemano que la $\text{Var}(P_t)$ debe ser pequeña por ser la predicción más precisa, entonces debe existir correlaciones entre cargas tal que al calcular la varianza de la carga total dé un valor pequeño como el esperado.

Estos aspectos analizados en este numeral hace que V no necesariamente tratada como matriz diagonal, sino que en determinadas circunstancias que resultan ser más reales es necesario establecer correlaciones entre carga y generación y entre carga y carga. Para mayor información ver ref (3)

5.2 ESTADISTICA DE LA BARRA OSCILANTE

Como en el sistema de potencia no se especifica la inyección correspondiente a la barra oscilante, es finalmente necesario conocer su estadística en función de la incertidumbre de todas las inyecciones especificadas, para dicho efecto es suficiente considerar que la potencia activa de generación de la barra oscilante es:

$$P_s = \sum_{i=1}^n P_i \quad (45)$$

donde los P_i son las potencias netas inyectadas a cada una de las n barras del sistema. Es obvio que de la ec (45) se desprecian las pérdidas del sistema.

Si todas las inyecciones se consideran independientes entre si, la varianza de P_s es:

$$\text{Var}(P_s) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(P_i) \quad (46)$$

De la ecuación (46) se deduce que la varianza de la barra oscilante es grande, ya que es la suma de todas las varianzas de las potencias netas; puesto que ésta trata de compensar todas las variaciones en las inyecciones. Este hecho es importante y debe notarse que el efecto es inverso para lo establecido con la varianza de la carga total que se analizó anteriormente.

También es importante resaltar el hecho de que si la varianza de P_s es alta, también lo serán las varianzas de los flujos de potencia de las líneas que conectan a la barra oscilante. Estos resultados

hay que tomarlos con reserva ya que si cambia la posición de la barra oscilante, también cambiará la estadística de estas líneas. Esto es debido a que se considera independencia en la estadística de las inyecciones y debe considerarse como que se está analizando lo peor que puede ocurrir en el sistema por ello el establecimiento de una matriz V con correlación entre carga y generación conduce a resultados más reales ya que todos los generadores tratan de compensar la incertidumbre en la carga y no sólo la oscilante.

6. CONCLUSIONES

El flujo de potencia estocástico constituye una herramienta alternativa para considerar la incertidumbre que existe en la predicción de las inyecciones, dando como resultado que las variables de estado no tengan un valor único como en el flujo de potencia determinístico, sino que se presenten en forma de rangos alrededor de este valor.

La formulación del flujo estocástico puede fácilmente extenderse para aplicaciones en tiempo real, donde se puede medir información redundante, con lo que se logra establecer la mejor estimación de las variables de estado y lo que es más importante aún, la detección e identificación de errores de medición.

Un flujo estocástico bien formulado equivale a muchos casos de flujos determinísticos con lo que se puede conseguir notorios ahorros en procesamiento y evaluación de la información.

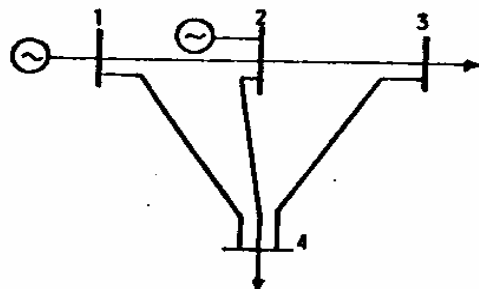
Se recomienda el aplicar esta técnica a los estudios que se efectúan en el planeamiento y operación de los sistemas eléctricos del país ya que es una simple extensión del flujo convencional por Newton Raphson.

La técnica de estimación de estado, que no es sino un flujo de potencia probabilístico redundante será uno de los programas básicos a implementarse en el Centro Nacional de Control de Energía de INECEL, para la supervisión y control en tiempo real del Sistema Nacional Interconectado.

Por último, si bien existen formulaciones alternativas del flujo estocástico (8), pues se cuestiona la aplicabilidad del teorema del límite central, éstas últimas son muy complicadas y con resultados que en la mayoría de los casos pueden no diferir mucho de esta formulación sencilla que requiere un buen juicio de ingeniería en sus resultados para la toma de decisiones.

APENDICE

Se presenta un ejemplo sencillo de flujo estocástico. Consideremos el siguiente sistema de potencia, al cual le resolvemos por el denominado método de corriente directa, con el fin de obtener un sistema lineal de ecuaciones del sistema de potencia (Ref(4))



Los datos de la red son:

BARRAS	P
1	oscil.
2	0.5
3	-0.5
4	-0.3

LINEA	REACTANCIA
1-2	0.1
1-4	0.3
2-4	0.15
2-3	0.2
4-3	0.2

Esta constituye la información normal del flujo determinístico, para flujo estocástico debemos establecer los errores probables que se tienen en las inyecciones P. Estos errores probables son sus desviaciones estándar, los valores que se especificaron anteriormente constituyen los valores esperados de P.

Se desea conocer los rangos de variación de los voltajes nodales (ángulos en este caso) y los flujos de potencia por las líneas para un intervalo de confianza del 99%, si los errores de predicción probables en las inyecciones son:

$$\sigma_2 = 2\% \text{ E } (P_2) = 0.01 \quad \sigma_3 = 3\% \text{ E } (P_3) = 0.015$$

$$\sigma_4 = 2\% \text{ E } (P_4) = 0.006 \quad V = \text{diag}(\sigma_2^2 \quad \sigma_3^2 \quad \sigma_4^2)$$

Paso 1. Flujo de potencia.- el vector $\hat{\delta}$ de estado lo determinamos en base a un flujo convencional que en este caso es el flujo denominado de corriente directa en el que:

$$\hat{P} = B \cdot \hat{\delta}$$

B es la parte imaginaria de la matriz admitancia de barras, $\hat{\delta}$ el vector de ángulos nodales con respecto a la referencia medidos en radianes y \hat{P} el vector de potencias netas inyectadas que se han especificado. Tomando la barra 1 como referencia: ($\delta_1 = 0.0$)

$$Y = B = \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 39 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix} \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = B^{-1} \hat{P} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0123 \\ -0.0827 \\ -0.053 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -0.704 \\ -4.732 \\ -3.032 \end{bmatrix} \text{ grados}$$

El flujo de potencia por cada una de las líneas está dado por:

$$P_{ij} = \frac{1}{x_{ij}} (\delta_i - \delta_j) = b_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad P_L = b \cdot \hat{\delta}$$

Con lo que se puede conformar el sistema de ecuaciones:

$$P_L = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{14} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 \\ 5 & -5 & 0 \\ 20/3 & 0 & -20/3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.123 \\ 0.177 \\ 0.352 \\ 0.271 \\ 0.148 \end{bmatrix}$$

Este constituye la solución del flujo de potencia determinístico en base a un modelo lineal, en el que la correspondencia de las variables con la teoría es:

$$\hat{y} = A \cdot \hat{x} \quad \hat{P} = B \cdot \hat{\delta} \quad \hat{x} = \hat{\delta} \text{ variables de estado}$$

$$\hat{z} = D \cdot \hat{x} \quad \hat{P}_L = b \cdot \hat{\delta} \quad \hat{z} = \hat{P}_L \text{ variables de estado dependientes}$$

Paso 2.- Cálculo de la matriz de cov de las variables de estado (A=B)

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = (B^T V^{-1} B)^{-1} = B^{-1} V B^{-1T}$$

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 39 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 22.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 49 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = \begin{bmatrix} 1.8612 & 3.5789 & 2.162 \\ 3.5789 & 8.1025 & 4.51 \\ 2.162 & 4.51 & 2.76 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Las desviaciones estándar de las variables de estado son:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \text{diag}(\text{cov}(\hat{\delta})) = \begin{bmatrix} 1.8612 \\ 8.1025 \\ 2.76 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 1.3643 \\ 2.8465 \\ 1.6613 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Paso 3. Cálculo de la matriz de cov de las variables de estado dependientes (b=D)

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = b \cdot \text{cov}(\hat{\delta}) \cdot b^T$$

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 \\ 5 & -5 & 0 \\ 20/3 & 0 & -20/3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.8612 & 3.5789 & 2.162 \\ 3.5789 & 8.1025 & 4.51 \\ 2.162 & 4.51 & 2.76 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 & 5 & 20/3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -10/3 & 0 & -20/3 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = \begin{bmatrix} 1.86 & 0.72 & 0.86 & 0.20 & 0.71 \\ 0.72 & 0.31 & 0.39 & 0.13 & 0.29 \\ 0.86 & 0.39 & 0.70 & 0.21 & 0.54 \\ 0.20 & 0.13 & 0.21 & 0.13 & 0.11 \\ 0.71 & 0.29 & 0.54 & 0.11 & 0.46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Las desviaciones estándar de las variables de estado dependientes son $\hat{\sigma}_z = \text{diag}(\text{cov}(\hat{P}_L))$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \begin{bmatrix} 1.364 & 0.557 & 0.837 & 0.360 & 0.678 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Para un 99% de confianza, el rango de variación de las variables de estado δ y las dependencias P_i que toma en cuenta la incertidumbre de los datos de entrada y siendo los valores de δ y P_i los valores calculados del flujo determinístico, son:

	$E(\delta)$	$E(\delta) - 3\sigma_x$	$E(\delta) + 3\sigma_x$
δ_2	-0.0123	-0.0164	-0.00821
δ_3	-0.0827	-0.0912	-0.0742
δ_4	-0.053	-0.0580	-0.0480

	$E(P_i)$	$E(P_i) - 3\sigma_z$	$E(P_i) + 3\sigma_z$
P12	0.123	0.0821	0.164
P14	0.177	0.1603	0.1937
P23	0.352	0.3269	0.3771
P24	0.271	0.2602	0.2818
P43	0.148	0.1277	0.1683

Por último, en lo que tiene relación a la barra oscilante:

$$E(P_1) = E(P_{12}) + E(P_{14}) = 0.3$$

y su varianza es:

$$\text{Var}(P_1) = \sum_{i=2}^4 \text{Var}(P_i) = \text{Var}(P_1) + \text{Var}(P_2) + \text{Var}(P_3)$$

$$\text{Var}(P_1) = 10^{-5} (10 + 22.5 + 3.6) = 0.361 \times 10^{-3}$$

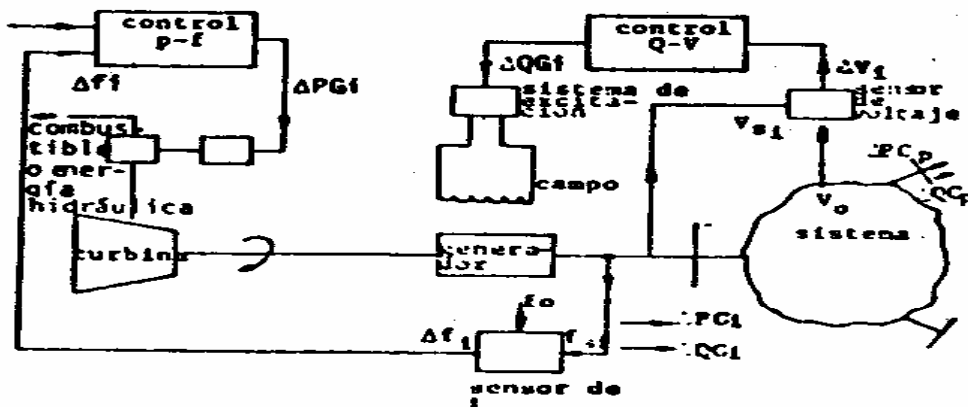
Notándose que la varianza de la barra oscilante es la mayor.

REFERENCIAS

- (1) Stochastic Load Flows, J.F. Dopazo, O.A. Klitin, A.M. Sasson IEEE Pas-94 March/April 1975 pp 299-304.
- (2) State Estimation for Power Systems: Detection and Identification of Gross Measurement Errors, J.F. Dopazo, O.A. Klitin, A.M. Sasson-Proceedings of the 8th IEEE PICA Conference, June, 1973.
- (3) An Alternative Formulation of the Stochastic Load Flow Method, F. Aboytes, B.J. Cory-IEEE PICA Conference, July, 1975.
- (4) Nuevas Formulaciones de Estudios de Flujo para la Operación de Sistemas de Potencia, F. Aboytes, D. Romero, Coloquio sobre Aplicaciones de Control a los Sistemas Eléctricos de Potencia, Universidad Autónoma Metropolitana, México, Nov. 1978.
- (5) Flujo de Potencia, G. Arguello, Seminario sobre Técnicas de Computación para Supervisión y Control de Sistemas Eléctricos de Potencia, Escuela Politécnica Nacional, Quito-Ecuador, Enero 1983.
- (6) Estimación de Estado en Sistemas de Potencia, G. Arguello, Seminario EPN, Quito-Ecuador, Enero 1983.

- (7) Power System Static Estimator, F.C. Schweppe et al, parts I-III IEEE Pas vol 89, pp 120-135, Jan 1970
- (8) Probabilistic Load Flow, B. Borkowska, IEEE Pas vol 93, 1974 pp 752-759
- (9) Notas de clase, R. Rodas, Seminario sobre Técnicas de Computación para Supervisión y Control de Sistemas Eléctricos de Potencia, EPN Quito-Ecuador. En 1983.

3. CONTROL DE POTENCIA ACTIVA (P-ε) Y REACTIVA (Q-V)



$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot G(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{1}{MS + D}$$

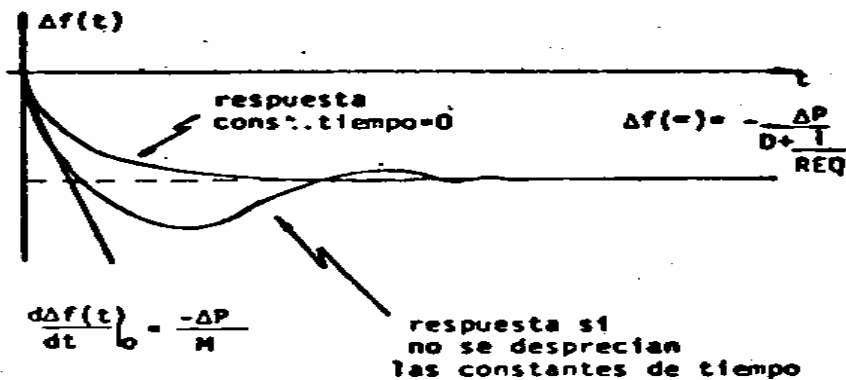
Si ΔP es una función paso:

$$\Delta f(t) = \frac{\Delta P}{D} (e^{-\frac{D}{M}t} - 1) \quad \Delta f(0) = 0$$

la velocidad inicial de caída de la frecuencia

$$\frac{d}{dt} \Delta f(t) = \frac{\Delta P}{D} \left(-\frac{D}{M}\right) e^{-\frac{D}{M}t} = -\frac{\Delta P}{M} e^{-\frac{D}{M}t}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta f(0) = -\frac{\Delta P}{M} = -\frac{\Delta P}{2H} \quad (33)$$



CONTROL DE POTENCIA REACTIVA Y VOLTAJE (Q-V) EN SISTEMAS ELECTRICOS

RESUMEN

El control de potencia reactiva en sistemas eléctricos de potencia ha crecido en importancia, por varias razones:

- La necesidad de mantener magnitudes adecuadas de voltaje en todas las barras del sistema con el objeto de mantener índices de calidad aceptables.
- Los requerimientos de una operación más eficiente debido a incrementos de costos de combustible y costos operativos. Para una distribución dada de potencia activa de generación, se puede minimizar las pérdidas (MW) en la red, mediante la optimización del flujo de potencia reactiva. Este principio se aplica a través de todo el sistema, desde la simple corrección de factor de potencia de una carga inductiva hasta los requerimientos de control en distintos puntos del sistema, requerimientos que se obtienen mediante sofisticados algoritmos de optimización.
- Los requerimientos cada vez mayores de transferencia de potencia activa pueden ocasionar problemas de inestabilidad y de colapso de voltaje. El control de potencia reactiva en estos casos, juega un papel fundamental. La compensación serie, shunt y sincrónica se aplica en situaciones como esta.

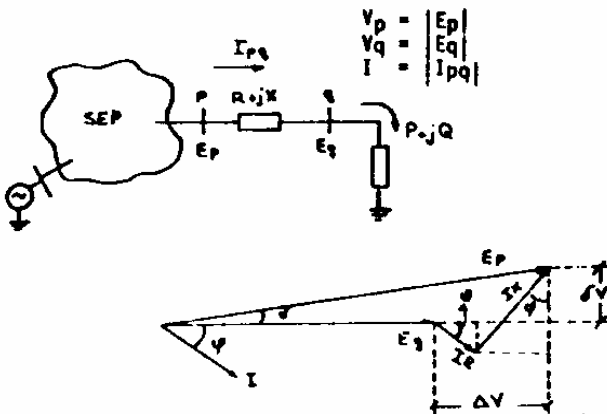
Estos aspectos se discuten y analizan en este curso desde el punto de vista teórico y práctico.

1. TEORIA DE COMPENSACION DE LA CARGA

1.1 Principios Básicos

La calidad del suministro de energía eléctrica al consumidor se mide en función de la magnitud de voltaje y de la frecuencia. En un sistema ideal, el voltaje y frecuencia debería ser constante en cada punto de entrega y a factor de potencia unitario, de esta forma la cuantificación de la calidad del servicio se mediría en términos de cuán cerca se está de la condición ideal. Aquí nos referiremos únicamente a las estrategias de diseño y control que se deben efectuar para mantener condiciones adecuadas de voltaje y en este capítulo, en particular, en la carga propiamente dicha.

La compensación de la carga es uno de los aspectos básicos en el manejo de potencia reactiva para mejorar la calidad de servicio en todo el sistema de potencia. El nivel de voltaje está influenciado directamente por el flujo de potencia reactiva requerido por la carga así:



$$V_p^2 = (V_q + \Delta V)^2 + \delta V^2 \quad (1)$$

$$V_p^2 = (V_q + IR \cos\phi + IX \sin\phi)^2 + (IX \cos\phi - IR \sin\phi)^2$$

$$P = V_q \cdot I \cdot \cos\phi$$

$$Q = V_q \cdot I \cdot \sin\phi$$

$$V_p^2 = \left(V_q + \frac{PR}{V_q} + \frac{QX}{V_q} \right)^2 + \left(\frac{PX}{V_q} - \frac{QR}{V_q} \right)^2 \quad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$\Delta V = \frac{PR + QX}{V_q} \quad (3)$$

$$\delta V = \frac{PX - QR}{V_q} \quad (4)$$

Donde ΔV representa la caída de tensión de voltaje con respecto a la magnitud de V_p . En cambio δV representa la "caída" de voltaje con respecto al ángulo de V_p .

Como un sistema de potencia en general y en líneas de transmisión en particular ($R \ll X$) tenemos que

$$\Delta V = \frac{QX}{V_q} \quad \text{y} \quad \delta V = \frac{PX}{V_q} \quad (5)$$

Donde podemos obtener dos importantes propiedades del flujo de potencia por una línea de transmisión:

La caída de voltaje en magnitud depende fundamentalmente del flujo de potencia reactiva (Q).

La desviación angular entre las dos barras depende fundamentalmente del flujo de potencia activa (P).

En la compensación de carga, existen tres objetivos principales

- Corrección del factor de potencia
- Mejoramiento de la regulación de voltaje
- Balance de la carga

La corrección del factor de potencia se requiere para generar la potencia reactiva lo más cerca posible a los requerimientos de la carga, antes que suministrarle de puntos remotos; con lo cual se tienen menores desviaciones de voltaje, menores pérdidas y mayor capacidad de transferencia de potencia activa.

La regulación de voltaje por efecto de las variaciones continuas de la carga, tiene que ver con el control que se debe efectuar en el sistema de tal forma que siempre la magnitud de voltaje esté dentro de límites aceptables, generalmente $\pm 5\%$ del valor nominal

En ciertos puntos de la red es importante tener una carga balanceada, con el fin de evitar componentes de secuencia negativa y cero que pueden causar problemas de malfuncionamiento en motores, generadores.

1.2 Corrección del factor de potencia

A nivel de la carga o usuario, generalmente se utiliza compensadores estáticos de potencia reactiva, de tal forma que la carga presente al sistema de potencia un factor de potencia cercano a la unidad.

Examinemos la teoría básica de corrección de factor de potencia en la carga.

CONTROL DE POTENCIA REACTIVA Y VOLTAJE (Q-V) EN SISTEMAS ELECTRICOS

RESUMEN

El control de potencia reactiva en sistemas eléctricos de potencia ha crecido en importancia, por varias razones:

- La necesidad de mantener magnitudes adecuadas de voltaje en todas las barras del sistema con el objeto de mantener índices de calidad aceptables.
- Los requerimientos de una operación más eficiente debido a incrementos de costos de combustible y costos operativos. Para una distribución dada de potencia activa de generación, se puede minimizar las pérdidas (MW) en la red, mediante la optimización del flujo de potencia reactiva. Este principio se aplica a través de todo el sistema, desde la simple corrección de factor de potencia de una carga inductiva hasta los requerimientos de control en distintos puntos del sistema, requerimientos que se obtienen mediante sofisticados algoritmos de optimización.
- Los requerimientos cada vez mayores de transferencia de potencia activa pueden ocasionar problemas de inestabilidad y de colapso de voltaje. El control de potencia reactiva en estos casos, juega un papel fundamental. La compensación serie, shunt y sincrónica se aplica en situaciones como esta.

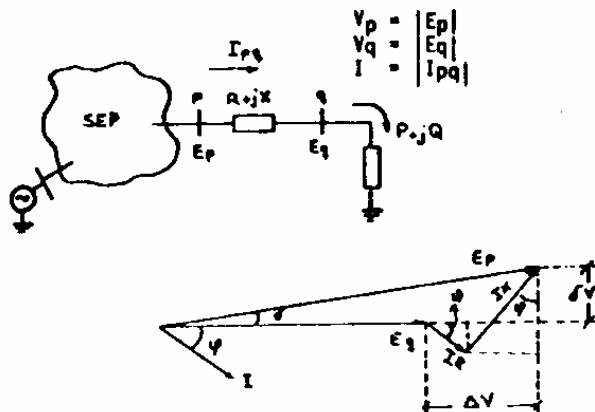
Estos aspectos se discuten y analizan en este curso desde el punto de vista teórico y práctico.

1. TEORIA DE COMPENSACION DE LA CARGA

1.1 Principios Básicos

La calidad del suministro de energía eléctrica al consumidor se mide en función de la magnitud de voltaje y de la frecuencia. En un sistema ideal, el voltaje y frecuencia debería ser constante en cada punto de entrega y a factor de potencia unitario, de esta forma la cuantificación de la calidad del servicio se mediría en términos de cuán cerca se está de la condición ideal. Aquí nos referiremos únicamente a las estrategias de diseño y control que se deben efectuar para mantener condiciones adecuadas de voltaje y en este capítulo, en particular, en la carga propiamente dicha.

La compensación de la carga es uno de los aspectos básicos en el manejo de potencia reactiva para mejorar la calidad de servicio en todo el sistema de potencia. El nivel de voltaje está influenciado directamente por el flujo de potencia reactiva requerido por la carga así:



$$V_p^2 = (V_q + \Delta V)^2 + \delta V^2 \quad (1)$$

$$V_p^2 = (V_q + IR \cos \phi + IX \sin \phi)^2 + (IX \cos \phi - IR \sin \phi)^2$$

$$P = V_q \cdot I \cdot \cos \phi$$

$$Q = V_q \cdot I \cdot \sin \phi$$

$$V_p^2 = \left(V_q + \frac{PR}{V_q} + \frac{QX}{V_q} \right)^2 + \left(\frac{PX}{V_q} - \frac{QR}{V_q} \right)^2 \quad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$\Delta V = \frac{PR + QX}{V_q} \quad (3)$$

$$\delta V = \frac{PX - QR}{V_q} \quad (4)$$

Donde ΔV representa la caída de tensión de voltaje con respecto a la magnitud de V_p . En cambio δV representa la "caída" de voltaje con respecto al ángulo de V_p .

Como un sistema de potencia en general y en líneas de transmisión en particular ($R \ll X$) tenemos que

$$\Delta V = \frac{QX}{V_q} \quad \text{y} \quad \delta V = \frac{PX}{V_q} \quad (5)$$

Donde podemos obtener dos importantes propiedades del flujo de potencia por una línea de transmisión:

La caída de voltaje en magnitud depende fundamentalmente del flujo de potencia reactiva (Q).

La desviación angular entre las dos barras depende fundamentalmente del flujo de potencia activa (P).

En la compensación de carga, existen tres objetivos principales

- Corrección del factor de potencia
- Mejoramiento de la regulación de voltaje
- Balance de la carga

La corrección del factor de potencia se requiere para generar la potencia reactiva lo más cerca posible a los requerimientos de la carga, antes que suministrarle de puntos remotos; con lo cual se tienen menores desviaciones de voltaje, menores pérdidas y mayor capacidad de transferencia de potencia activa.

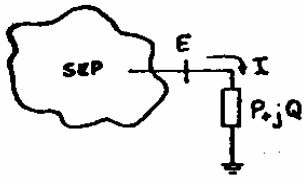
La regulación de voltaje por efecto de las variaciones continuas de la carga, tiene que ver con el control que se debe efectuar en el sistema de tal forma que siempre la magnitud de voltaje esté dentro de límites aceptables, generalmente $\pm 5\%$ del valor nominal

En ciertos puntos de la red es importante tener una carga balanceada, con el fin de evitar componentes de secuencia negativa y cero que pueden causar problemas de malfuncionamiento en motores, generadores.

1.2 Corrección del factor de potencia

A nivel de la carga o usuario, generalmente se utiliza compensadores estáticos de potencia reactiva, de tal forma que la carga presente al sistema de potencia un factor de potencia cercano a la unidad.

Examinemos la teoría básica de corrección de factor de potencia en la carga.



La carga generalmente es inductiva (corriente atrasa a voltaje) y absorbe potencia reactiva del sistema; por definición:

$$S = P + jQ = E \cdot I^* \quad (6)$$

Además si la carga absorbe $P + jQ$ significa que tiene una impedancia $R + jX$ de secuencia positiva.

$$\therefore I = \frac{E}{R + jX} = \frac{V \angle 0^\circ (R - jX)}{R^2 + X^2} = \frac{VR}{R^2 + X^2} - j \frac{VX}{R^2 + X^2} = I_r + jI_x$$

donde vemos que efectivamente I atrasa a E con un ángulo $\tan^{-1} \frac{I_x}{I_r}$

$$\text{De (6): } P + jQ = \frac{V^2 R}{R^2 + X^2} + j \frac{V^2 X}{R^2 + X^2}$$

Los requerimientos de potencia activa y reactiva de la carga están dados, por lo tanto, como:

$$P = \frac{V^2 R}{R^2 + X^2}$$

$$Q = \frac{V^2 X}{R^2 + X^2} \quad (7)$$



La potencia aparente S tiene dos componentes: P la potencia activa que se convierte en calor, trabajo mecánico, iluminación u otras formas de energía y la componente reactiva Q que no se convierte en energía útil pero de cuya existencia se requiere de manera indispensable para la transferencia y conversión de potencia activa (7).

La corriente $|I|$ que suministra el sistema de potencia a la carga es mayor que la que requiere la carga para el consumo de potencia activa I_r y es mayor en un factor dado por

$$\frac{|I|}{I_r} = \frac{1}{f_p}$$

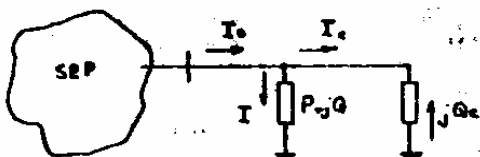
donde $f_p = \cos \phi$ o factor de potencia de la carga.

$$\cos \phi = \frac{I_r}{|I|} = \frac{P/V}{|S|/V} = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (8)$$

en otras palabras $f_p = \cos \phi$ es aquella fracción de potencia aparente que puede ser convertida en otra forma de energía.

Las pérdidas por el o los alimentadores a la carga se incrementan por el factor $1/\cos \phi$ (7). La capacidad de los mismos debe ser superior de acuerdo con esto y las pérdidas deben ser pagadas por el consumidor.

El principio de corrección del factor de potencia es el de compensar la potencia reactiva de la carga, o sea, suministrarla localmente conectando en paralelo a la carga un compensador que tenga reactancia capacitiva $(-jX_c)$.



La corriente que suministra el sistema es ahora

$$I_s = I + I_c$$

$$I = I_r + jI_x = \frac{VR}{R^2 + X^2} - j \frac{VX}{R^2 + X^2}$$

$$I_c = \frac{V}{-jX_c} = j \frac{V}{X_c}$$

$$I_s = \frac{VR}{R^2 + X^2} + j \left(\frac{V}{X_c} - \frac{VX}{R^2 + X^2} \right)$$

La potencia aparente que entrega el sistema es:

$$S_s = \frac{V^2 R}{R^2 + X^2} + j \left(\frac{V^2 X}{R^2 + X^2} - \frac{V^2}{X_c} \right) = P + j(Q - Q_c) \quad (9)$$

El factor de potencia corregido que "ve" el sistema es ahora

$$\cos \phi_s = \frac{I_r}{|I_s|} = \frac{P}{|S_s|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - Q_c)^2}}$$

$$\tan \phi_s = \frac{Q - Q_c}{P} \Rightarrow \text{P} \tan \phi_s = Q - Q_c$$

ahora $\tan \phi = \frac{Q}{P} \Rightarrow P = \frac{Q}{\tan \phi}$ (Cos ϕ es el factor de potencia de la carga)

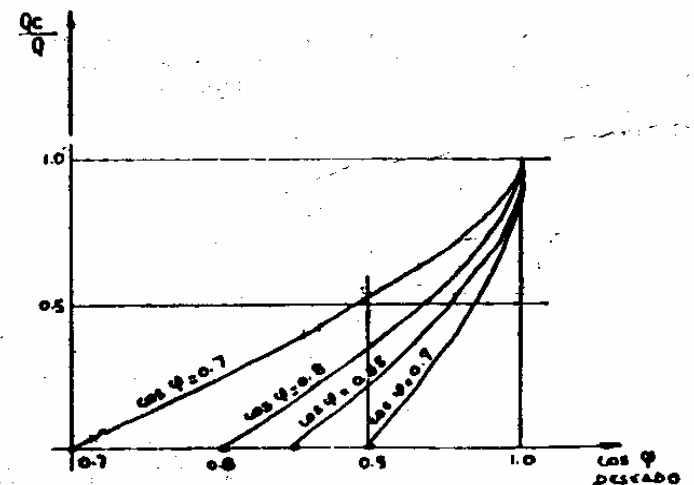
$$\frac{Q}{\tan \phi} \cdot \tan \phi_s = Q - Q_c$$

$$\text{de donde: } Q_c = Q \left(1 - \frac{\tan \phi_s}{\tan \phi} \right) \quad (10)$$

La expresión anterior nos da los requerimientos del compensador Q_c en función del factor de potencia $\cos \phi_s$ que se desea obtener a nivel de sistema para una carga cuyo factor de potencia es $\cos \phi$.

Así: si se desea que $\cos \phi_s = 1.0$ (carga totalmente compensada) entonces: $\tan \phi_s = 0.0$ $Q_c = Q$

La figura siguiente indica los requerimientos de compensación Q_c/Q para una carga de distintos factores de potencia.

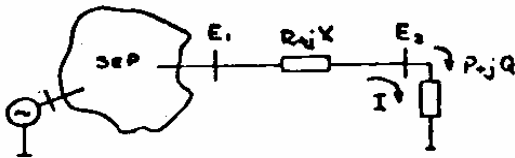


Un compensador estático (capacitores) para corrección de factor de potencia al ser de susceptancia fija, no realiza una eficiente corrección, debido a las fluctuaciones de la carga de una barra durante las diversas horas del día. En la práctica para minimizar este problema se lo divide en un banco de capacitores, o dividido en secciones paralelas, cada cual conectable individualmente, de tal forma que se pueden ejecutar cambios discretos o en pasos más pequeños de compensación de tal manera de ir con la forma variante de la carga en la barra. Como veremos más adelante, para cargas de importancia, la compensación puede ejecutarse de manera continua mediante motores sincrónicos, con los cuales se puede ajustar de manera continua y eficiente la potencia reactiva que la carga presente al sistema.

Como lo hemos señalado, la compensación en la carga, cambia la distribución de potencia reactiva en el sistema, mejorando los niveles de tensión, la cuantificación de lo cual es materia de la siguiente sección.

1.3 Regulación de Voltaje

La regulación se define como la relación del cambio de voltaje (cero carga a plena carga) al voltaje de plena carga; todas estas variables en magnitud.

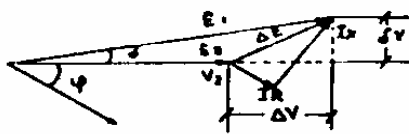


$$\text{regulación} = \frac{|E_1| - |E_2|}{|E_2|} \quad (11)$$

- Cuando la carga es cero $|E_1| = |E_2|$
- Cuando la carga es $P+jQ$ $|E_1| > |E_2|$ para la dirección de flujo establecida.

Si establecemos que $E_2 = V_2$ o, hemos visto anteriormente (3) y (4) que:

$$\Delta E = \Delta V + j\delta V = \frac{PR + QX}{V_2} + j \frac{PX - QR}{V_2}$$

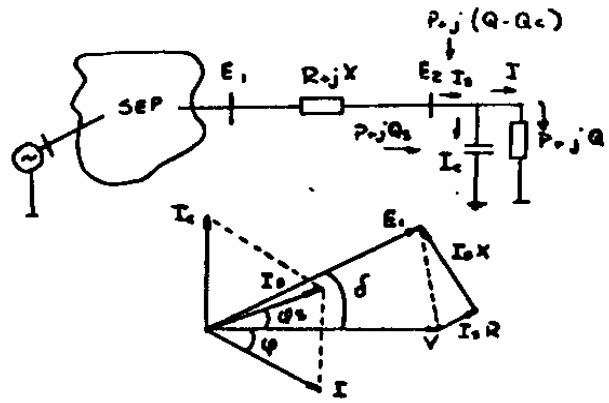


$$\Delta E = E_1 - E_2 \Rightarrow E_1 = E_2 + \Delta E = V_2 + \frac{PR+QX}{V_2} + j \frac{PX-QR}{V_2}$$

$$|E_1|^2 = \left[V_2 + \frac{PR+QX}{V_2} \right]^2 + \left[\frac{PX-QR}{V_2} \right]^2$$

$$\therefore \text{regulación} = \frac{\sqrt{(V_2^2 + PR + QX)^2 + (PX - QR)^2}}{V_2^2} - 1.0 \quad (12)$$

Añadiendo un compensador en paralelo con la carga, es posible que $|E_1| = V_2$, o sea hacer que la regulación sea cero.



En este caso la regulación es:

$$\text{reg} = \frac{\sqrt{[V_2^2 + PR + (Q-Qc)X]^2 + [PX - (Q-Qc)R]^2}}{V_2^2} - 1.0 \quad (13)$$

la compensación Qc necesaria para hacer la regulación igual a cero, será entonces:

$$[V_2^2 + PR + (Q-Qc)X]^2 + [PX - (Q-Qc)R]^2 - V_2^4 = 0$$

$$\text{Si } Q_s = Q - Qc \quad (14)$$

$$(V_2^2 + PR)^2 + 2Q_s X (V_2^2 + PR) + Q_s^2 X^2 + P^2 X^2 + Q_s^2 R^2 - 2P X Q_s R - V_2^4 = 0$$

$$(X^2 + R^2) Q_s^2 + 2Q_s X V_2^2 + (V_2^2 + PR)^2 + P^2 X^2 - V_2^4 = 0$$

$$\text{Sea } X^2 + R^2 = a$$

$$2X V_2^2 = b$$

$$(V_2^2 + PR)^2 + P^2 X^2 - V_2^4 = c$$

$$a Q_s^2 + b Q_s + c = 0$$

$$Q_s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (15)$$

de esta solución se obtiene Q_s y por tanto $Qc = Q - Q_s$ que es la compensación necesaria para que la regulación sea cero. Lo importante aquí es que siempre existe una solución para Qc independiente del valor de potencia activa que se transfiera para mantener un valor de regulación igual a cero (?), lo que lleva a la siguiente conclusión importante:

Un compensador puramente reactivo puede eliminar las variaciones de voltaje causados por las variaciones de potencia activa y reactiva de la carga. Es decir si se podría controlar de manera continua la producción de potencia reactiva del compensador, éste puede actuar como un regulador de voltaje ideal. Se enfatiza el hecho de que se está controlando la magnitud de voltaje, pero el ángulo de fase (δ) varía según la condición de carga (o de P).

De las dos secciones anteriores podemos establecer que con un compensador de la potencia reactiva de la carga, o se puede controlar a criterio el factor de potencia o el voltaje a ciertos valores prefijados, pero no los dos al mismo tiempo, ya que:

Si queremos mantener el voltaje constante de tal forma que la regulación sea cero, entonces se debe calcular mediante (15) el valor de Qc que haga posible esto, en cambio si se quiere que el factor de potencia que presente al sistema la carga compensada, sea unitario, entonces $Q_s = 0$ y por tanto la regulación no es cero.

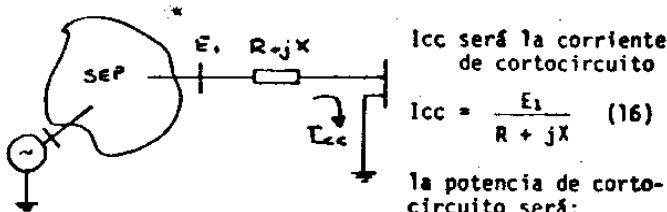
Entonces, con un compensador no se puede mantener voltaje constante y factor de potencia unitario al mismo tiempo, la excepción a esta regla es en el caso particular en que $P=0$ (?) pero esto no tiene interés práctico.

1.3.1 Relaciones aproximadas para regulación de voltaje

Las expresiones dadas anteriormente para ΔV y δV , son dadas a veces de forma alternativa, tenemos que por un lado:

$$\Delta E = \Delta V + j \delta V = \frac{PR + QX}{V_2} + j \frac{PX - QR}{V_2}$$

Por otro lado, si cortocircuitamos la barra 2 de carga, entonces:



$$S_{cc} = P_{cc} + jQ_{cc} = E_1 \cdot I_{cc}^* = \frac{V_1^2}{R - jX}$$

como en cortocircuitos, normalmente se asume que $V_1 = 1.0$ pu entonces:

$$S_{cc} = \frac{1.0}{R - jX} \text{ pu} \quad (17)$$

O lo que es lo mismo:

$$S_{cc} = \frac{(R + jX)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2} |S_{cc}| \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

$$= |S_{cc}| \angle \phi_{cc}$$

siendo $|S_{cc}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

$$R = |S_{cc}| (R^2 + X^2) \cos \phi_{cc} = \sqrt{R^2 + X^2} \cos \phi_{cc} = \frac{\cos \phi_{cc}}{|S_{cc}|} \quad (17)$$

$$X = |S_{cc}| (R^2 + X^2) \sin \phi_{cc} = \sqrt{R^2 + X^2} \sin \phi_{cc} = \frac{\sin \phi_{cc}}{|S_{cc}|}$$

R y X son las características de la línea de transmisión; reemplazando estos valores en la ecuación para ΔE tenemos que:

$$\Delta V = \frac{PR + QX}{V_2} = \frac{1}{V_2 |S_{cc}|} [P \cos \phi_{cc} + Q \sin \phi_{cc}] \quad (18)$$

$$\Delta \delta = \frac{PX - QR}{V_2} = \frac{1}{V_2 |S_{cc}|} [P \sin \phi_{cc} - Q \cos \phi_{cc}]$$

Por otro lado habíamos establecido que

$$\text{reg} = \frac{|E_1| - V_2}{V_2}$$

y que $|E_1| - V_2 = \Delta V$, entonces la regulación aproximada es:

$$\text{reg} = \frac{\Delta V}{V_2} = \frac{1}{V_2 |S_{cc}|} [P \cos \phi_{cc} + Q \sin \phi_{cc}] \quad (19)$$

Si efectuamos simplificaciones adicionales válidas, como que en operación normal $V_2 = 1.0$ y que $R \ll X$, entonces: $\sin \phi_{cc} = 1.0$ y por tanto

$$\Delta V_{pu} = \text{regulación} = \frac{Q}{|S_{cc}|} \text{ p.u} \quad (20)$$

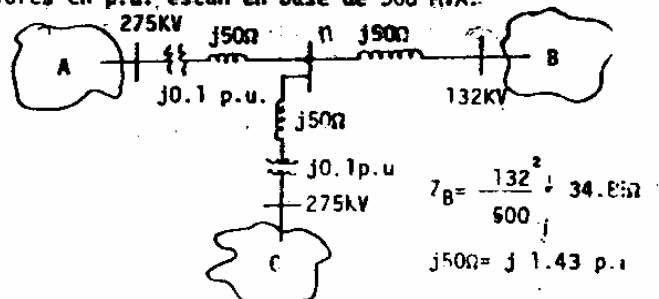
la relación aproximada dada por (20) expresa que el cambio en p.u. en la magnitud de una barra de carga, cuando se conecta una carga reactiva Q, es igual a la relación de esta carga a la potencia de cortocircuito de la barra. El nuevo voltaje de la barra comparada con aquella en vacío es:

$$V_2 = 1.0 - \Delta V = 1.0 - \frac{Q}{|S_{cc}|} \quad (21)$$

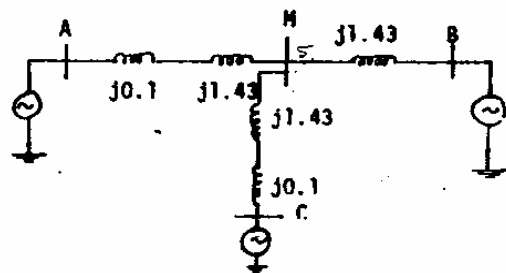
estas expresiones son válidas para cuando $Q \ll S_{cc}$ debido a las aproximaciones.

EJEMPLO

Supongamos que deseamos controlar el voltaje del punto o barra M del sistema de potencia de la figura siguiente. Supongamos que en cierta condición de carga, el voltaje de línea de la barra M cae en 5KV con respecto a su valor nominal, se requiere calcular la potencia reactiva que hay que inyectar a la barra M para volver su voltaje al nominal. Los valores en p.u. están en base de 500 MVA.



El diagrama en p.u. del área de interés es:



$$V_A = V_B = V_C = 1.0 \text{ p.u.}$$

$$V_M = 1.0 - \frac{5}{132} = 0.962 \text{ p.u.}$$

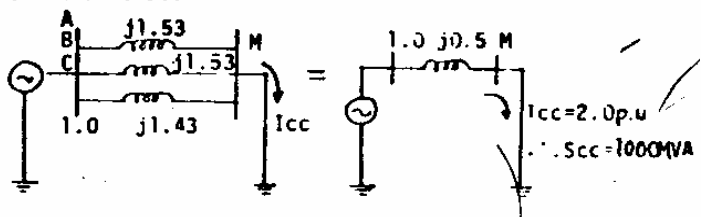
De acuerdo con la ec (21) $\Delta V_M = \frac{Q_M}{S_{ccM}}$

Se debe inyectar una potencia reactiva Q_{CM} de tal forma que:

$$\Delta V_M = 0 = \frac{Q_M - Q_{CM}}{S_{ccM}}$$

Por tanto $Q_{CM} = Q_M$

Cálculo de S_{cc}



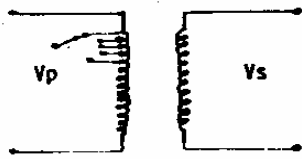
$$Q_M = \Delta V_M \cdot S_{CCM} = \frac{5}{132} \times 1000 = 37.9 \text{ MVAR}$$

Por tanto hay que inyectar con un condensador 37.9 MVAR (3φ) para mantener el voltaje nominal en la barra M.

2. CONTROL DE VOLTAJE MEDIANTE TRANSFORMADORES

Los transformadores también pueden controlar de manera complementaria el voltaje de las barras a las que está conectado. A más de su importante función de transformación, los transformadores pueden ejecutar ajustes pequeños en la magnitud de voltaje de las barras (también algunos pueden ejecutar ajustes en el ángulo de voltaje para control del flujo de potencia activa). Los ajustes en magnitud de voltaje generalmente van en el rango de + 10% del voltaje nominal, lo que en muchos casos es suficiente para mantener una buena regulación en las barras del transformador y en las más cercanas a él.

Esto se debe a que la mayoría de transformadores tienen taps con lo cual es posible efectuar cambios pequeños en la relación de transformación de los mismos. En algunos transformadores sólo es posible cambiar el tap cuando están desenergizados, en otros manualmente con carga y otros automáticamente bajo carga; en este último caso existe un mecanismo de control que responde a desviaciones de voltaje previamente establecidas. La utilización de uno u otro tipo depende de la localización del transformador dentro del sistema de potencia.

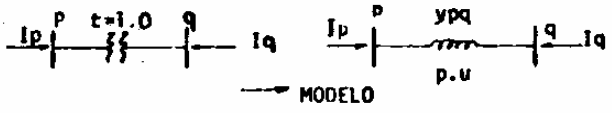


$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad V_s \frac{V_p \cdot N_s}{N_p} = N_s \frac{V_p}{N_p}$$

$$(V_s + \Delta V_s) = N_s \frac{V_p}{(N_p + \Delta N_p)}$$

2.1 Modelo del transformador para análisis de sistemas

Un transformador cuando el tap está en su posición nominal (tap 1.0 p.u.), la relación de transformación es la nominal y su circuito equivalente está dado por:



siendo $z_{pq} = jx_{pq} = Y_{pq}$; x_{pq} es la reactancia de cortocircuito del transformador en p.u.

Cuando la posición del tap se encuentra fuera de la posición nominal, su efecto puede tomarse en cuenta de la siguiente manera:

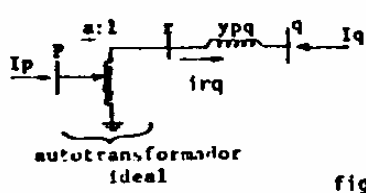


fig. 2.1

Siendo a la relación de transformación del autotransformador ideal.

Si $a = 1$ entonces $I_p = I_{rq}$ y el circuito equivalente es igual al de tap nominal.

Si $a \neq 1$ entonces:

$$I_p = \frac{I_{rq}}{a} \quad E_p = a E_r \Rightarrow I_p \cdot E_p = I_{rq} \cdot E_r$$

El objetivo es disponer de un modelo general y sencillo a la vez para considerar el efecto del tap. Este lo constituye el modelo =

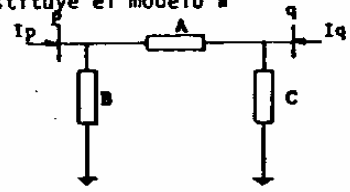


fig. 2.2

Siendo A, B, C los parámetros del transformador que se requieren determinar, para lo cual tenemos que:

(A, B, C son admitancias)

De la fig. 2.1:

$$I_p = \frac{I_{rq}}{a} \quad E_r = \frac{E_p}{a}$$

$$I_{rq} = (E_r - E_q) y_{pq}$$

$$\therefore I_p = \frac{(E_r - E_q) y_{pq}}{a} = \frac{(\frac{E_p}{a} - E_q) y_{pq}}{a}$$

$$I_p = (E_p - a E_q) \frac{y_{pq}}{a^2} \tag{22}$$

a su vez:

$$I_q = -I_{rq} = (E_q - E_r) y_{pq} = (E_q - \frac{E_p}{a}) y_{pq}$$

$$I_q = (a E_q - E_p) \frac{y_{pq}}{a} \tag{23}$$

Ahora si queremos representarlo como la fig. 2.2 :

$$I_p = E_p \cdot B + (E_p - E_q) A \tag{24}$$

$$I_q = E_q \cdot C + (E_q - E_p) A \tag{25}$$

Como el valor de los parámetros no cambian para diferentes condiciones de operación (E_p, E_q, I_p, I_q), hagamos que $E_p = 0$ $E_q = 1.0$ pu

De (22) y (23) $I_p = - \frac{y_{pq}}{a}$ $I_q = y_{pq}$

De (24) y (25) $I_p = - A$ $I_q = C + A$

Por lo tanto:

$$A = \frac{y_{pq}}{a}$$

$$C = I_q - A = y_{pq} - \frac{y_{pq}}{a} = y_{pq} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \tag{26}$$

De igual forma si $E_p = 1.0$ p.u. y $E_q = 0$

De (22) $I_p = \frac{y_{pq}}{a^2}$

De (24) $I_p = B + A$

$$B = \frac{y_{pq}}{a^2} - A = \frac{y_{pq}}{a^2} - \frac{y_{pq}}{a} = y_{pq} \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \tag{27}$$

finalmente si designamos como $t = \frac{1}{a}$; entonces:

$$\begin{aligned} A &= y_{pq} \cdot t \\ B &= y_{pq} \cdot t (t - 1) \\ C &= y_{pq} (1 - t) \end{aligned} \quad (28)$$

De esta forma el circuito equivalente. o modelo del transformador con cambio de taps es:

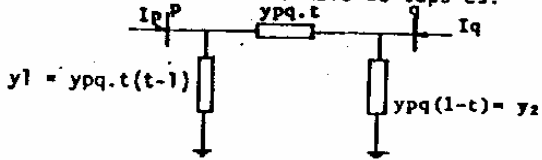


fig. 2.3

En este modelo el cambiador de taps está en la barra p y la barra controlada es la barra q.

2.2 Análisis del modelo del transformador con taps.-

-Si el transformador tiene el tap en la posición nominal ($a = 1$) $t = 1.0$, entonces:

$$y_1 = y_2 = 0$$



-Si ($a > 1$) o sea $t < 1.0$ (0.9 a 1.0)

$$y_1 = t(t-1) \cdot y_{pq} = -k y_{pq} \text{ es un condensador}$$

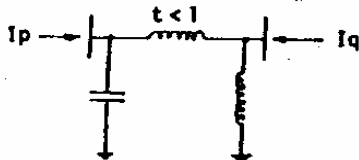
valor neg. (ypq es una reactancia inductiva)
 $k > 0$

en cambio:

$$y_2 = (1-t) \cdot y_{pq} = k_1 \cdot y_{pq} \text{ es un reactor}$$

valor posit. $k_1 > 0$ $k_1 > k$

y el modelo se convierte en:



$y_{pq} \cdot t < y_{pq}$ por tanto la impedancia entre p y q aumenta.

lo que significa que ubicando la posición del tap en valores $t < 1.0$ la acción de control tiende a disminuir el voltaje de la barra q, ya que vemos que en el modelo, un reactor queda conectado a esta barra.

- si ($a < 1$) o sea $t > 1.0$ (1.0 a 1.1)

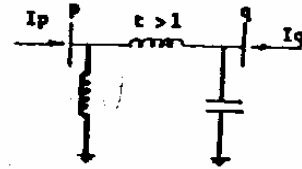
$$y_1 = t(t-1) \cdot y_{pq} = k_2 y_{pq} \text{ reactor}$$

valor posit. $k_2 > 0$

$$y_2 = (1-t) \cdot y_{pq} = -k_1 y_{pq} \text{ es un condensador}$$

valor nega.

el modelo se convierte en:



$y_{pq} \cdot t > y_{pq}$ por tanto la impedancia entre p y q disminuye.

lo que significa que ubicando la posición del tap en valores $t > 1.0$ la acción de control tiende a aumentar el voltaje de la barra q.

Haciendo una conclusión general podemos decir que el circuito equivalente del transformador con taps ubica un condensador o reactor en la barra que se desea subir o bajar el voltaje mientras en la otra ubica un reactor o condensador respectivamente.

Además la potencia reactiva inyectada o absorbida por esta combinación de capacitor o reactor en el equivalente del transformador, es una función de t debido a la forma de y_1 y y_2 . Esta potencia reactiva crece cuadráticamente y linealmente a medida que t crece o decrece del valor $t = 1.0$.

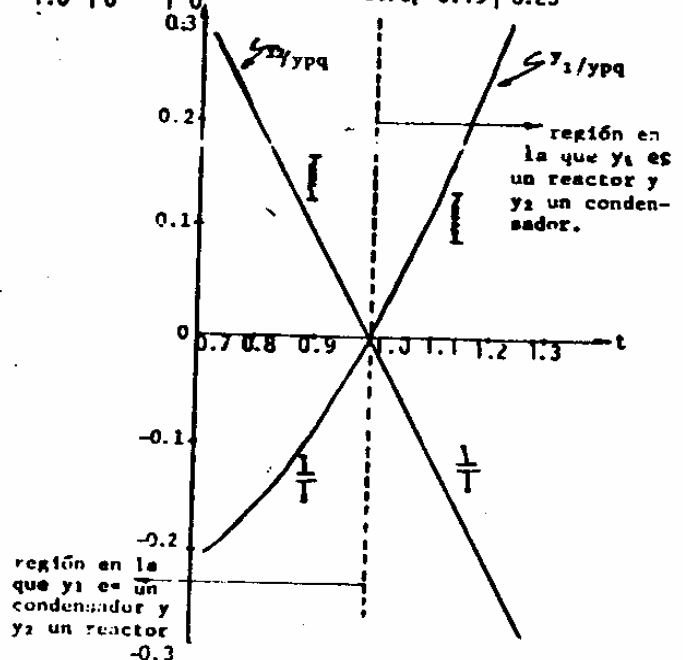
Así, para clarificar lo anteriormente señalado, tenemos que:

$$\frac{y_1}{y_{pq}} = t(t-1) \text{ función cuadrática}$$

$$\frac{y_2}{y_{pq}} = (1-t) \text{ función lineal}$$

la potencia reactiva producida o absorbida por la rama y_1 es una función cuadrática de t, en cambio la de y_2 es una función lineal de t.

t	$\frac{y_1}{y_{pq}}$	$\frac{y_2}{y_{pq}}$	t	$\frac{y_1}{y_{pq}}$	$\frac{y_2}{y_{pq}}$
1.25	0.31	-0.25	0.95	-0.05	0.05
1.20	0.24	-0.20	0.90	-0.09	0.10
1.15	0.17	-0.15	0.85	-0.13	0.15
1.10	0.11	-0.10	0.80	-0.16	0.20
1.05	0.05	-0.05	0.75	-0.19	0.25
1.0	0	0			



Para tener una idea de la magnitud de potencia reactiva producida o absorbida por y_1 y y_2 consideremos un transformador con una reactancia de cortocircuito del 10% y que $t=1.1$.

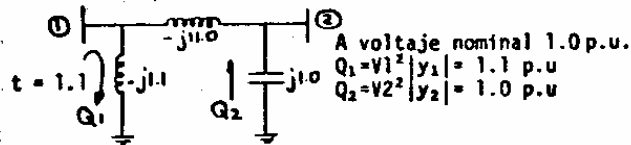
$$y_{pq} = (x_{pq})^{-1} = (j0.1)^{-1} = -j 10.0 \text{ p.u.}$$

$$y_{pq.t} = -j11.0$$

$$y_1 = t(t-1)y_{pq} = 1.1(0.1)(-j10.0) = -j1.1 \text{ p.u.}$$

$$y_2 = (1-t)y_{pq} = (-0.1)(-j10.0) = j1.0$$

el circuito equivalente es entonces:

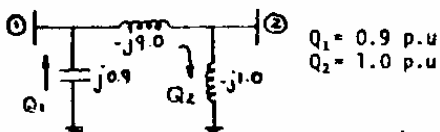


si $t = 0.9$

$$y_{pq.t} = -j 9.0$$

$$y_1 = 0.9(-0.1)(-j10.0) = j0.9$$

$$y_2 = (0.1)(-j10.0) = -j1.0$$



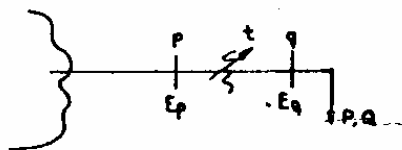
De este análisis sencillo vemos que las ramas equivalentes producen o absorben una potencia reactiva de magnitud aproximadamente igual a la capacidad nominal del transformador (1.0 p.u.) cuando la posición del tap está entre +10%. Similarmente si se podría variar la posición del tap entre +20%, la potencia reactiva que producen o absorben y_1 y y_2 será aproximadamente el doble de la capacidad del transformador.

Además vemos que el "precio" de controlar voltaje con la posición del tap, es que el transformador demanda mayor potencia reactiva del sistema.

2.3 Ubicación de transformadores con taps en sistemas de potencia.

2.3.1 Control de voltaje en una carga radial

En redes de subtransmisión y distribución (en estas últimas básicamente) es común controlar el voltaje de la carga mediante transformadores con cambio automático de tap bajo carga.



Refiriéndonos a la fig, p sería normalmente la barra de alta tensión, también el caso normal es que la carga sea inductiva. El objetivo del control de voltaje con tap sería el mantener el voltaje de la barra q a su valor nominal o lo más cercano a él.

Consideremos por ejemplo que la reactancia del transformador es $x_{pq}=0.1$ p.u. Si el factor de potencia de la carga es unitario y se está transfiriendo una carga activa igual a la capacidad del transformador $P=1.0$ p.u., entonces la regulación de voltaje sería:



$$P_{qp} = -1.0 = \text{Re} \{ E_q^* I_{qp} \} = \text{Re} \{ E_q^* (E_q - E_p) \}$$

$$= \text{Re} \left\{ \frac{V_q^2}{x} - V_q \left[\frac{\delta}{-j} \right] \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \frac{(V_q - V_q \cos \delta - j V_q \sin \delta) (-j)}{x} \right\}$$

$$P_{qp} = - \frac{V_q \sin \delta}{x} = -1.0$$

$$Q_{qp} = \frac{V_q^2}{x} - V_q \cos \delta = 0$$

de donde $V_q = 0.995$ $\delta = 5.3^\circ$

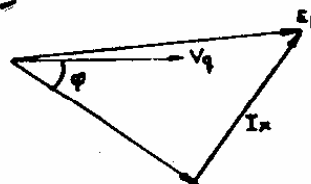
$$\text{reg} = \frac{1.0 - 0.995}{0.995} = 0.5\%$$

Esta regulación puede considerarse óptima para plena transferencia del transformador.

Ahora si añadimos una carga reactiva $Q = 1.0$ p.u. adicional a P, entonces:

$$\frac{V_q \sin \delta}{x} = 1.0$$

$$\frac{V_q^2 - V_q \cos \delta}{x} = -1.0$$



donde $V_q = 0.88$ $\delta = 6.5^\circ$

$$\text{reg} = \frac{1.0 - 0.88}{0.88} = 13.6\% \text{ (mala regulación)}$$

y el transformador tiene una sobrecarga de 60%

Si en estas condiciones la posición del tap cambia a 1.1, entonces:

$$S_{qp}^* = P_{qp} - jQ_{qp} = E_q^* \cdot I_{qp}$$

$$= E_q^* ((E_q - E_p)yt + E_q y_2)$$

$$= V_q^2 yt - V_p V_q yt \left[\frac{\delta}{x} \right] + V_q^2 y_2$$

$$y_2 = y(1-t) \quad y = - \frac{j}{x}$$

$$S_{qp}^* = V_q^2 \left(- \frac{j}{x} \right) t - V_p V_q \left(- \frac{j}{x} \right) t (\cos \delta + j \sin \delta) - V_q^2 \left(- \frac{j}{x} \right) (1-t)$$

$$= -j \frac{V_q^2}{x} t + j \frac{V_p V_q}{x} t (\cos \delta + j \sin \delta) - j \frac{V_q^2}{x} + j \frac{V_q^2}{x} t$$

$$= j \frac{V_p V_q}{x} t \cos \delta - \frac{V_p V_q}{x} t \sin \delta - j \frac{V_q^2}{x}$$

$$\text{donde } P_{qp} = - \frac{V_p V_q}{x} t \sin \delta = -1.0$$

$$Q_{qp} = \frac{V_q^2}{x} - \frac{V_p V_q}{x} t \cos \delta = -1.0$$

Como $V_p = 1.0$

$$\frac{V_q t \sin \delta}{x} = 1.0$$

$$\frac{V_q^2 - V_q t \cos \delta}{x} = -1.0$$

$$\text{donde: } V_q^4 + V_q^2 (2x - t^2) + x^2 (1 - t^2) = 0$$

$$V_q = 0.993$$

$$\delta = 5.3^\circ$$

$$\text{la reg} = 0.7\%$$



es decir la rama y_2 prácticamente compensa toda la carga reactiva, por la rama y_1 se puede decir que únicamente circula potencia activa.

Por otro lado :(7)

$$P_{pq} = \frac{V_p V_q}{x} t \sin \delta$$

$$Q_{pq} = \frac{V_p^2}{x} t^2 - \frac{V_p V_q}{x} t \cos \delta$$

aplicando valores:

$$P_{pq} = 1.0 \text{ p.u.}$$

$$Q_{pq} = 1.22 \text{ p.u.}$$

$$|S_{pq}| = 1.58$$

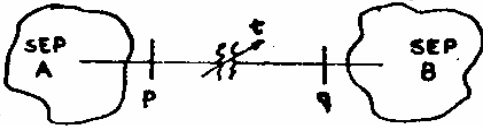
el transformador se sobrecarga en 58%.

Como podemos ver las condiciones de regulación mejoran ostensiblemente pero la sobrecarga del transformador se mantiene. En la práctica el voltaje de la barra P también varía ligeramente y los verdaderos valores serán también ligeramente diferentes a los encontrados. (ya que el transformador demanda mayor potencia reactiva del sistema, aumentando la corriente por la línea que conecta a la barra p del transformador).

Como conclusión, la estrategia de control con el tap, debe ser tal, que de acuerdo a las condiciones P y Q de la carga, se minimice la transferencia de potencia reactiva por la rama y_1 del equivalente.

2.3.2 Conexión de dos sistemas a través de un transformador con taps.

Dos sistemas de potencia o dos sectores importantes de un mismo sistema pueden estar conectados a través de un transformador.



En estos casos la variación de la posición del tap tiene por objeto regular la transferencia de potencia reactiva entre los sistemas A y B, no teniendo efecto el control de tap en los voltajes de las barras p y q como en el caso anterior (2.3.1).

Supongamos que de A a B se están transfiriendo Q_0 MVAR con $t=1$, y por necesidades del sistema B se requiere que se transfiera $Q_0 + \Delta Q$ MVAR, entonces la posición del tap deberá colocarse en tal forma que se obtenga el efecto deseado.

Como se trata de sistemas grandes, la variación de la posición del tap no produce variaciones de tensión en las barras p y q o los produce de manera insignificante. Sin embargo el efecto es cambiar la distribución de potencia reactiva.

Para el caso antes señalado, la transferencia de potencia reactiva de la barra p a la q está dada por:

$$Q_{pq} = \frac{V_p^2}{x} t^2 - \frac{V_p V_q}{x} t \cos \delta$$

Si $V_p = V_q = 1.0$ p.u. y $t = 1.0$ entonces $Q_{pq} = \frac{1}{x}(1 - \cos \delta) = Q_0$ (valor muy bajo, ya que para transferencias nominales de P_{pq} $\delta = 5$ a 8°). Si se cambia la posición del tap

$$Q_{pq} = \frac{t^2}{x} - \frac{t}{x} \cos \delta = \frac{1}{x} (t^2 - t \cos \delta)$$

la variación del flujo de potencia reactiva es

$$\Delta Q_{pq} = Q_{pq} - Q_{pq_0} = \frac{1}{x} (t^2 - t \cos \delta - 1 + \cos \delta)$$

lo que aproximadamente es:

$$\Delta Q_{pq} \approx \frac{1}{x} (t^2 - t) = \frac{t}{x} (t-1)$$

De esta relación vemos que si queremos transmitir potencia reactiva de p a q la posición del tap ($t > 1.0$) debe ser tal que se "trate" de aumentar el voltaje de la barra q.

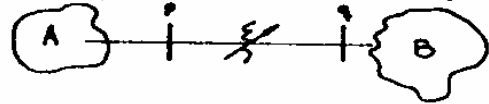
El mismo efecto visto desde el otro lado del transformador es:

$$\Delta Q_{qp} = \frac{1}{x} (1-t)$$

Las pérdidas adicionales de potencia reactiva que se producen en el transformador son:

$$\Delta Q_{pq} + \Delta Q_{qp} = \frac{(t-1)^2}{x}$$

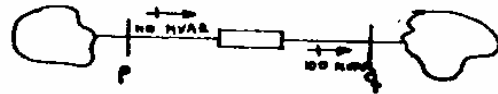
Como ejemplo de aplicación, supongamos que un transformador con cambio de taps interconecta dos grandes sistemas, se desea saber la variación de potencia reactiva que fluye del uno al otro sistema a) cuando t pasa de 1.0 a 1.1 y b) cuando t pasa de 1.0 a 0.9 $x = 0.1$ p.u. MVAR = 100 c) de 1.1 a 0.9



$$a) \Delta Q_{pq} = \frac{t(t-1)}{x} = \frac{1.1(0.1)}{0.1} = 1.1 \text{ pu} = 110 \text{ MVAR}$$

$$\Delta Q_{qp} = \frac{1-t}{x} = \frac{1-1.1}{0.1} = -1.0 \text{ pu} = -100 \text{ MVAR}$$

pérdidas adic. en el transformador = 10 MVAR



$$b) \Delta Q_{pq} = \frac{t(t-1)}{x} = \frac{0.9(-0.1)}{0.1} = -0.9 \text{ pu} = -90 \text{ MVAR}$$

$$\Delta Q_{qp} = \frac{1-t}{x} = \frac{1-0.9}{0.1} = 1.0 \text{ pu} = 100 \text{ MVAR}$$

pérdidas de 10 MVAR



$$c) \Delta Q_{pq} \approx -200 \text{ MVAR (se subexcitan los generadores del sist. A)}$$

$$\Delta Q_{qp} = 200 \text{ MVAR (se sobrecitan los generadores del sist. B)}$$

Si se pasa una potencia activa $P_{pq} = 1.0$ p.u. = 100 MW, el ángulo δ sería:

$$P_{pq} = \frac{t}{x} \sin \delta \Rightarrow \delta = 5.74^\circ \quad t=1.0$$

Con $t = 1.1$ δ variaría a 5.2° y con $t=0.9$ $\delta = 6.3^\circ$

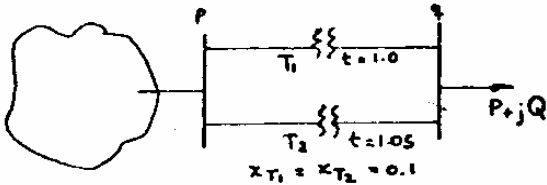
Como puede verse de este ejemplo sencillo existe la posibilidad de transferir grandes bloques de potencia reactiva entre uno y otro sistema, cambiando la posición del tap de transformadores de interconexión. Este cambio de transferencia de potencia reactiva es muy importante para mantener una adecuada coordinación de voltaje en todo el sistema.

Por ejemplo, si todas las fuentes de potencia reactiva del sistema B están llegando a sus límites en cierta condición de carga, los voltajes en ciertas porciones de esta red pueden empezar a descender por falta de capacidad de regulación en este sistema, en estas circunstancias puede solicitarse del sistema mayor transferencia de potencia reactiva (si este tiene capacidad) modificando la posición del tap, lo que demandará que fuentes de generación de potencia reactiva del sistema A incrementen su generación.

2.3.3 Transformadores con cambio de taps, conectados en paralelo

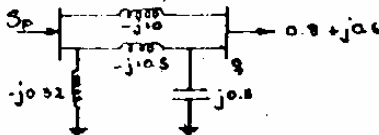
Transformadores en paralelo pueden estar en las redes de subtransmisión-distribución o en la red de transmisión, y si estos tienen tap, se puede utilizar la posición del tap en los transformadores de la misma forma que antes se analizó, es decir para regular el voltaje o para cambiar la distribución de potencia reactiva entre sistemas.

Sin embargo, posibilidades adicionales de control pueden aparecer si la posición de taps en los transformadores, es diferente. En estos casos hay fenómenos interesantes que merecen ser analizados. Para explicar esto, utilicemos el siguiente ejemplo:



sea $P+jQ=0.8+j0.6$ p.u.
y que $E_q = 1.0 \angle 0^\circ$

El diagrama de secuencia positiva sería:



El propósito es analizar cómo se distribuiría el flujo de potencia dentro de los transformadores. Para analizar esto, utilicemos la ecuación de equilibrio nodal de la red

$$IB = YB EB$$

en este caso:
$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{pp} & Y_{pq} \\ Y_{qp} & Y_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p \\ E_q \end{bmatrix}$$

$$Y_{pp} = -j21.02 \quad Y_{pq} = Y_{qp} = j20.5 \quad Y_{qq} = -j20$$

por otro lado: $I_q = \left(\frac{S_q}{E_q}\right)^* = \frac{(-0.8 - j0.6)^*}{1.0} = -0.8 + j0.6$

$$I_q = Y_{qp} E_p + Y_{qq} E_q \rightarrow E_p = \frac{I_q - Y_{qq} E_q}{Y_{qp}} = 1.005 \angle 2.2^\circ$$

Conocidos E_p y E_q se puede determinar el flujo de potencia por cada transformador así:

$$S_{pq_{t_1}} = E_p \cdot I_{pq_{t_1}}^* = E_p [(E_p - E_q) Y_{pq_{t_1}}]^*$$

$$S_{pq_{t_2}} = E_p \cdot I_{pq_{t_2}}^* = E_p [(E_p - E_q) Y_{pq_{t_2}} + E_p Y_{p_0}]^*$$

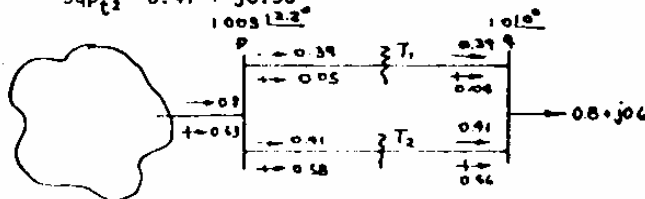
donde:
$$S_{pq_{t_1}} = (V_p^2 - V_p V_q \frac{\Delta R}{\Delta X}) j10 = (1.01 - 1.005 \angle 2.2^\circ) j10 = 0.39 + j0.05$$

$$S_{pq_{t_2}} = (V_p^2 - V_p V_q \frac{\Delta R}{\Delta X}) j10.5 + V_p^2 \cdot j0.52 = 0.41 + j0.58$$

de idéntica forma, el flujo que llega al otro extremo es:

$$-S_{qp_{t_1}} = 0.39 + j0.04$$

$$-S_{qp_{t_2}} = 0.41 + j0.56$$



De los resultados podemos ver que los dos transformadores se reparten de manera equitativa el flujo de potencia activa, en tanto que el transformador t_2 toma casi la potencia reactiva de la carga.

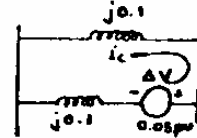
Si los transformadores tuvieran el tap en la misma posición, entonces se repartirían la misma carga activa y reactiva (transformadores de igual impedancia).

La desigual distribución de carga aparece debido a la diferencia de tensión entre los dos transformadores, lo que ocasiona una corriente circulatoria para mantener los niveles de tensión en las barras p y q al mismo valor para los dos transformadores.

El análisis aproximado y al mismo tiempo objetivo de este fenómeno es:

$$\Delta V = 0.05 \text{ p.u.}$$

$$I_c = \frac{\Delta V}{j0.2} = j0.25 \text{ p.u.}$$



La potencia reactiva circulatoria es:

$$S_c = j0.25 \text{ p.u.}$$

por tanto la carga de cada transformador en el lado de la carga es:

$$S_{T_1} = \frac{S_L}{2} - S_c = 0.4 + j0.3 - j0.25 = 0.4 + j0.05$$

$$S_{T_2} = \frac{S_L}{2} + S_c = 0.4 + j0.3 + j0.25 = 0.4 + j0.55$$

valores que son prácticamente iguales a los obtenidos anteriormente.

Si los dos transformadores tuvieron el tap en la misma posición, digamos $t = 1$, en este caso:

$$Y_{pp} = -j20.0 \quad Y_{pq} = Y_{qp} = j20 \quad Y_{qq} = -j20 \quad I_q = -0.8 + j0.6$$

$$E_p = \frac{I_q - Y_{qq} E_q}{Y_{qp}} = \frac{-0.8 + j0.6 + j20}{j20} = \frac{20.6 + j0.8}{20} = 1.03 + j0.04$$

$$E_p = 1.03 \angle 2.2^\circ$$

Nótese la importancia de este resultado, y cómo en determinadas circunstancias el tap en transformadores puede utilizarse para controlar voltaje. Aquí si bien hemos mantenido $E_q = 1.0$ pu para explicar el ejemplo, en la realidad el voltaje que va a ser aproximadamente constante es E_p , si $V_p = 1.0$, $V_q = 1.05$ en el primer caso y $V_q = 1.03$ en el segundo caso (igual tap); de tal forma que es posible controlar el voltaje V_q con una estrategia adecuada de posicionamiento del tap entre transformadores para producir corrientes circulatorias en uno u otro sentido, o para aliviar de carga a un transformador que por alguna circunstancia se encuentre en problemas y sea necesario limitar su carga.

Otra aplicación importante de este concepto, ocurre cuando dos transformadores en paralelo tienen diferencias en reactancia, en cuyo caso es posible posicionar el tap en uno de ellos de tal forma que se repartan equitativamente la carga (?).

3. COMPORTAMIENTO DE LINEAS DE TRANSMISION

3.1 Impedancia característica y carga natural

Una línea de transmisión en redes de alto voltaje de sistemas de potencia está caracterizada por su impedancia serie y su impedancia capacitiva shunt. En general en líneas de transmisión de alto voltaje la relación R/X tiende a cero.

La impedancia característica de una línea que tiene una reactancia serie $X_L(\Omega)$ y una susceptancia capacitiva shunt $B_c(\mathcal{U})$, es:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{XL}{BC}} \quad \Omega$$

Este valor depende del diseño de la línea, pero para líneas aéreas de alta tensión este valor cae en el rango de 200 a 400 Ω

Esta característica nos indica que el comportamiento cualitativo de todas las líneas de transmisión es el mismo, apareciendo únicamente diferencias cuantitativas en función de longitud, nivel de voltaje y nivel de potencia de transmisión.

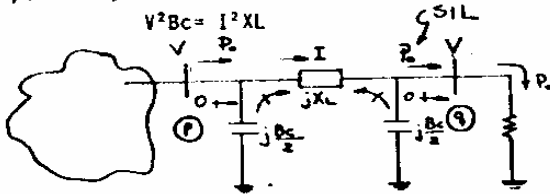
Si una línea tiene conectada en su extremo una carga resistiva igual al valor de su impedancia característica, la potencia activa de transferencia es igual a

$$P_0 = \frac{V_0^2}{Z_0} \text{ MW} \quad Z_0 = \frac{V_0^2}{1 \text{ SIL}}$$

donde V_0 es el voltaje nominal de la línea. Al valor P_0 se le denomina carga natural o SIL, y en estas circunstancias ocurren dos fenómenos muy importantes.

- La línea de transmisión por la que se transmite una potencia activa igual a su SIL, no absorbe ni entrega potencia reactiva al sistema de potencia.
- El nivel de voltaje en magnitud, en cualquier punto de la línea es el mismo.

El primer fenómeno significa que toda la potencia reactiva generada en la capacitancia shunt de la línea es exactamente absorbida por la inductancia serie es decir la línea está totalmente compensando sus pérdidas, es decir:



Como no circula potencia reactiva de la barra p a la q, $V_p = V_q$. El sistema de potencia "ve" a la línea de transmisión como que no existiera, es decir como que físicamente estuvieran unidas las barras p y q. Considerando la resistencia, sería únicamente como un elemento resistivo de baja impedancia que une las barras p y q. (Por supuesto, hay diferencia angular entre p y q).

Como consecuencia de lo anotado, si se transfiere una potencia activa superior al SIL

$$I^2 XL > V^2 Bc$$

la línea empieza a demandar potencia reactiva del sistema, y comienza a actuar como reactor, en este caso:

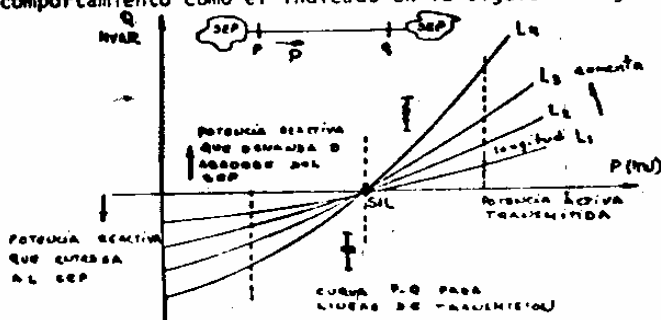
$$V_p > V_q$$

y consecuentemente, si se transfiere una potencia activa inferior al SIL, la línea actúa como condensador.

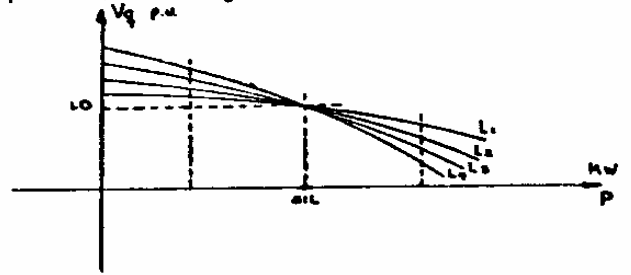
$$I^2 XL < V^2 Bc$$

$$\text{y } V_p < V_q$$

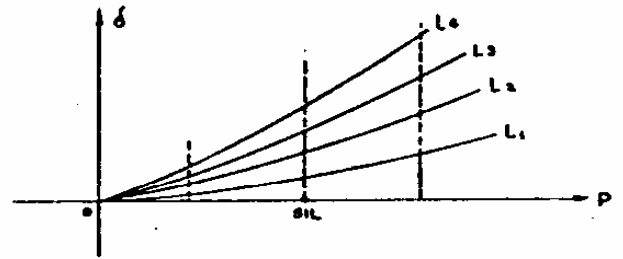
Lo señalado da como resultado, de que todas las líneas de transmisión de igual nivel de tensión tengan un comportamiento como el indicado en la siguiente figura.



Para voltaje $V_p = 1.0$ p.u constante, el voltaje de la barra q variará de la siguiente forma:

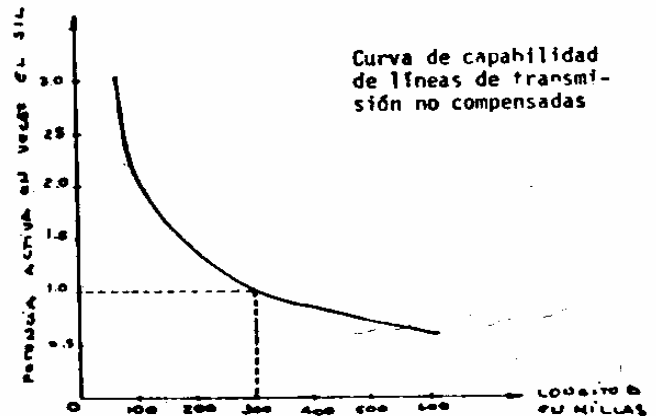


A su vez el ángulo δ_{pq} entre los dos extremos de la línea variará como:



De las figuras antes señaladas puede concluirse que; la operación y control de un sistema de potencia, en lo que tiene relación a voltaje y manejo de potencia reactiva como consecuencia de la transferencia de potencia activa, es mucho más complicado con líneas largas que con cortas.

Para mantener un compromiso entre niveles de voltaje y requerimientos de potencia reactiva con la transferencia de potencia activa por una línea de transmisión, se ha establecido una curva recomendada de capacidad (denominada curva de St. Clair) la cual establece los niveles de transferencia de potencia activa que se pueden pasar en función de la longitud de la línea, con lo cual no existe detrimento en niveles de tensión ni estabilidad.



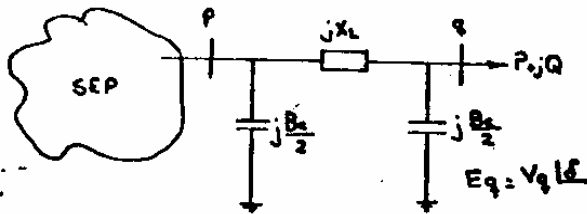
Curva de capacidad de líneas de transmisión no compensadas

Esta figura indica que la potencia que puede transmitirse por una línea no compensada decrece con el aumento de longitud de la línea. Cuando se necesite transferir mayor potencia activa que los valores señalados, entonces se requiere la compensación serie o shunt que veremos más adelante.

3.2 Efecto de longitud de la línea, carga activa, factor de potencia sobre el voltaje y potencia reactiva de una línea de transmisión.

En este capítulo precisaremos más los conceptos antes señalados, pero nos referiremos al comportamiento que tiene una línea de transmisión a diferentes niveles de carga, tomando en cuenta el efecto del factor de potencia de la carga.

Supongamos la siguiente línea radial con una carga $P+jQ$ en su extremo, y consideremos además que el voltaje del sistema es constante a igual 1.0 pu (voltaje E_p).



$$S_{qp}^* = P_{qp} - jQ_{qp} = -P + jQ = E_q \cdot i_{qp} = E_q \left[\frac{E_q - E_p}{jX_L} + E_q \cdot j \frac{B_c}{2} \right]$$

$$S_{qp}^* = \frac{(V_q^2 - V_p V_q \cos \delta)}{X_L} (-j) + jV_q^2 \frac{B_c}{2}$$

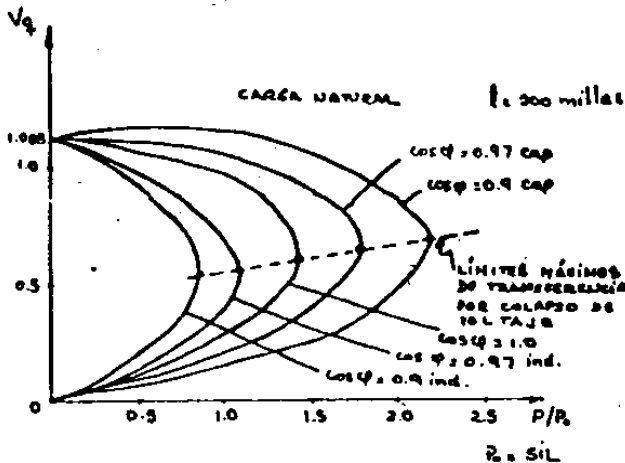
$$= \frac{(V_q^2 - V_p V_q \cos \delta + jV_p V_q \sin \delta)}{X_L} (-j) + jV_q^2 \frac{B_c}{2}$$

$$-P = \frac{V_p V_q \sin \delta}{X_L} \quad Q = \frac{V_p V_q \cos \delta}{X_L} + V_q^2 \frac{B_c}{2} - \frac{V_q^2}{X_L}$$

haciendo $V_p = 1.0$

$$P = \frac{V_q}{X_L} \sin \delta \quad Q = V_q^2 \left(\frac{B_c}{2} - \frac{1}{X_L} \right) + \frac{V_q \cos \delta}{X_L}$$

De este par de ecuaciones podemos determinar V_q en función de P y $\cos \phi$ de la carga (P/Q). La solución de la ecuación cuadrática para V_q indica que este voltaje varía con la potencia activa y el factor de potencia de la carga. El resultado típico de la variación de V_q para una línea de longitud L se indica en la siguiente figura.

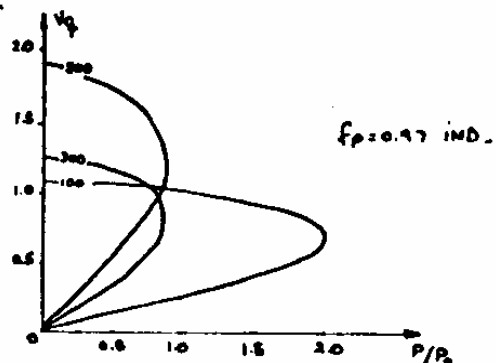
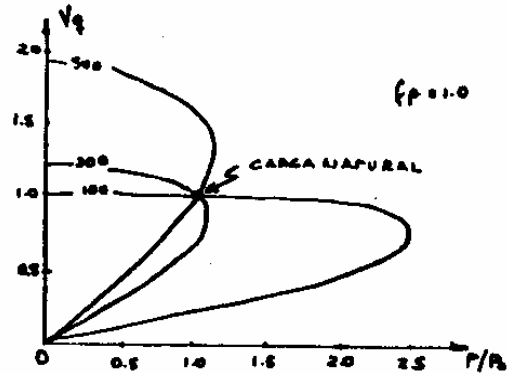
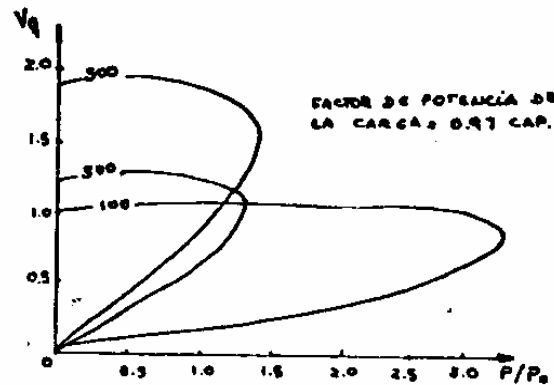


$$V_q = f(P)$$

Muchas propiedades fundamentales de transmisión en corriente alterna resultan evidentes de la figura anterior. Para cada factor de potencia de la carga existe una máxima potencia que se puede transferir, pasada la cual ocurre colapso de voltaje en el lado receptor. Para cualquier valor de P bajo el máximo, existen dos posibles soluciones para V_q (raíces de la ecuación), la operación normal siempre ocurre al valor superior dentro de límites estrechos alrededor de 1.0 p.u.

El factor de potencia de la carga tiene fuerte influencia en el voltaje terminal V_q . A medida que P aumenta, el voltaje V_q siempre disminuye con factor de potencia en atraso hasta el unitario. Con factores de potencia capacitivos (excepto los muy cercanos a la unidad) la tendencia es aumentar V_q a medida que P aumenta hasta cierto punto, ya que cargas con factor de potencia capacitivo, generan VARS hacia la línea manteniendo alto el nivel de tensión.

El efecto de longitud de la línea, se puede obtener calculando V_q para diferentes longitudes de línea (cambian X_L y B_c), obteniéndose curvas como las siguientes (longitudes de 500, 300 y 100 millas).



Se puede observar de las figuras anteriores que líneas no compensadas de longitudes de hasta 200 millas se puede operar dentro de límites razonables para bandas estrechas de factor de potencia de la carga, en cambio líneas más largas es muy difícil de operarlas debido a las grandes variaciones de voltaje que ocurren a diferentes niveles de carga y de factor de potencia, y en estos casos algún mecanismo de compensación o de control resulta imprescindible, ya que aún si se las operara a carga natural; V_0 es extremadamente sensitivo a cualquier variación de P , nótese además que operando una línea de 500 millas a una carga natural su punto de operación es inestable.

3.3 Factores determinantes en la transmisión de potencia en sistemas eléctricos-líneas de transmisión.

Una vez que se ha presentado un aspecto tan importante como es aquel que tiene que ver con el comportamiento de líneas de transmisión en niveles de tensión y requerimientos de potencia reactiva, cuando se está transfiriendo potencia activa; podemos ahora enunciar y clarificar los factores que limitan en ciertos casos la transferencia de potencia por líneas de transmisión.

Podemos señalar que para líneas de transmisión, podemos establecer que existen tres limitaciones básicas para la transferencia de potencia activa:

- Límite térmico
- Límite por caída de tensión
- Límite de estabilidad de estado estable

El límite térmico es más bien una característica de diseño antes que un problema operativo. Este límite está determinado por la selección del conductor y las condiciones ambientales. Este límite es crítico únicamente en líneas de bajo voltaje y de longitudes de 50 km o menos.

En alto voltaje (138-345 Kv) y más aún en extra alto voltaje, las características ambientales tales como efecto corona, hacen que estas líneas tengan límites térmicos muy altos, estos límites exceden en largo a los límites que pueden alcanzarse en la operación normal de un sistema, que son los otros dos límites señalados.

Por tanto cuando se opera un sistema de transmisión, los únicos límites que hay que tomar en cuenta son los límites por caída de tensión y el límite por estabilidad de estado estable.

Hemos visto que cuando se transmite potencia, y en especial por líneas largas, existen severas caídas de tensión, en operación normal de un sistema eléctrico de potencia no es recomendable que la caída de tensión sea superior al 5%, ya que se puede peligrosamente acercarse al límite de transferencia, después del cual hay colapso de voltaje en el sistema o en partes del sistema en el que se encuentra la línea de transmisión, lo que puede desencadenar un proceso continuo de deterioro de toda la red.

El límite de estabilidad de estado estable en una línea de transmisión que interconecta dos centros de generación ocurre cuando $\delta = 90^\circ$ ($P = \frac{V_1 V_2}{X} \sin \delta$) donde

$$P_{max} = \frac{V_1 V_2}{X}$$

Sin embargo cuando hablamos de este límite hay que considerar todo el sistema y no sólo la línea en particular; por supuesto que, en ningún momento hay que acercarse siquiera al ángulo de 90° porque se perdería estabilidad entre los generadores, debiendo darse un margen adecuado de seguridad por este concepto.

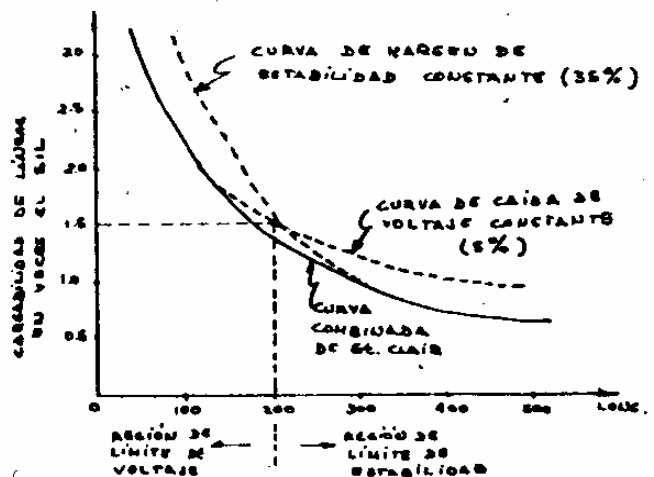
Un índice o un buen criterio constituye el margen de estabilidad, definido como:

$$\% \text{ de margen de estabilidad} = \frac{P_{max} - P_{normal}}{P_{max}} \times 100$$

Este margen debe tomarse de tal forma que el sistema pueda soportar de manera adecuada un conjunto de contingencias probables (cambios de transmisión en la línea, debido a cambios de carga o de generación en sus extremos, etc.). Un nivel aconsejado de margen de estabilidad es del orden del 30 al 35%, lo que significa que el máximo ángulo entre la generación y la carga debe ser del orden de 40 a 45° , de los cuales el mayor desplazamiento es producido por líneas muy cargadas.

Al efectuar una investigación de las circunstancias bajo las cuales el sistema es dependiente de uno de los dos límites (caída de tensión o por estabilidad), se ha encontrado que el factor más limitante para el sistema es el de caída de tensión en líneas de transmisión de longitudes hasta de 200 millas, en cambio el de estabilidad es el limitante para longitudes superiores.

Esta situación se indica en la figura siguiente. De requerirse una mayor transferencia de potencia cuando se alcance uno de los dos límites por una línea de transmisión, es imprescindible la "compensación de la línea" sea ésta shunt o serie. La curva de carga recomendada de St. Clair conjuga estos dos límites.



3.4 La Compensación shunt y serie.-

Como se señaló antes, para incrementar los límites de transferencia de potencia por una línea de transmisión en particular y en el sistema en general es necesario en unos casos la compensación shunt y en otros la serie

Debido a los rápidos descensos de tensión en las barras de una línea a medida que se la carga sobre el S.I.L., el voltaje puede ser controlado mediante compensación shunt.

Si añadimos una compensación capacitiva ΔB_c a la línea, su impedancia característica cambia a

$$Z = \sqrt{\frac{X_L}{B^*c}} = \sqrt{\frac{X_L}{B_{c0} + \Delta B_c}}$$

siendo B_{c0} la susceptancia propia de la línea; además como

$$Z_0 = \sqrt{\frac{X_L}{B_{c0}}}, \text{ tenemos que: } \frac{Z}{Z_0} = \sqrt{\frac{X_L \cdot B_{c0}}{B^*c \cdot X_L}} = \sqrt{\frac{B_{c0}}{B^*c}}$$

La nueva potencia natural de la línea es:

$$P_n = \frac{V^2}{Z} = V^2 \sqrt{\frac{B'C}{XL}}$$

La que comparada con la potencia natural de la línea es evidentemente mayor:

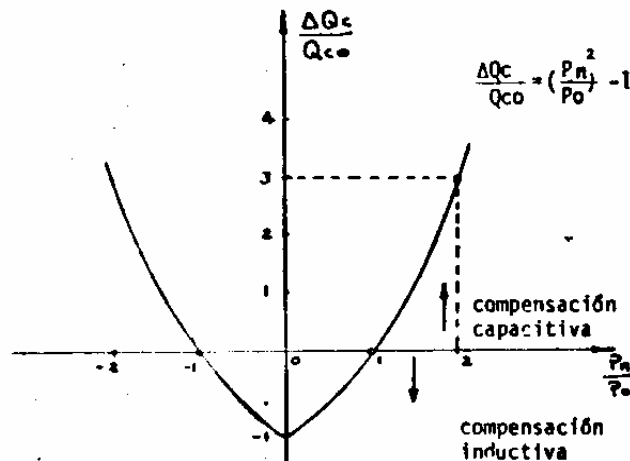
$$\frac{P_n}{P_o} = \sqrt{\frac{B'C}{B'c_0}} = \sqrt{\frac{B'c_0 + \Delta B'c}{B'c_0}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta B'c}{B'c_0}}$$

donde vemos que la potencia que puede transmitirse por una línea de transmisión con compensación shunt y manteniendo voltaje constante en sus extremos se ve incrementada por el factor $(1 + \frac{\Delta B'c}{B'c_0})^{1/2}$ de su correspondiente SIL.

el factor $\frac{\Delta B'c}{B'c_0} = (\frac{P_n}{P_o})^2 - 1$ se denomina grado o nivel de compensación shunt.

De las relaciones señaladas, vemos que la compensación shunt disminuye la impedancia natural y aumenta la potencia natural.

Las necesidades de compensación según la nueva potencia natural que se requiere obtener está dada por la siguiente figura.



En cambio para compensación SERIE, la susceptancia shunt permanece constante, en cambio se disminuye la impedancia serie; las correspondientes relaciones son:

$$Z = \sqrt{\frac{X'L}{B'c_0}} \sqrt{\frac{XL - \Delta X_c}{B'c_0}}$$

$$\frac{Z}{Z_0} = \sqrt{\frac{XL - \Delta X_c}{B'c_0}} \cdot \frac{B'c_0}{XL} = \sqrt{1 - \frac{\Delta X_c}{XL}}$$

$$\frac{P_n}{P_{n0}} = \sqrt{\frac{B'c_0}{XL}} \cdot \frac{XL}{B'c_0} = \sqrt{\frac{XL}{XL - \Delta X_c}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\Delta X_c}{XL}}}$$

donde: $\frac{\Delta X_c}{XL} = 1 - (\frac{P_{n0}}{P_n})^2$ se denomina grado o nivel de compensación serie. La potencia natural se ve ahora incrementada por el factor $\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\Delta X_c}{XL}}}$

Para comparar los dos tipos de compensación, supongamos que queremos duplicar la potencia natural.

Con compensación shunt:

$$\frac{P_n}{P_o} = 2 = \sqrt{1 + \frac{\Delta B'c}{B'c_0}} \Rightarrow \frac{\Delta B'c}{B'c_0} = \frac{\Delta Q_c}{Q_{c0}} = 3.0$$

$$\therefore \Delta Q_c = 3 Q_{c0}$$

por tanto para duplicar la potencia natural de transferencia hay que triplicar con compensación, la potencia capacitiva que produce la línea sola.

Con compensación serie:

$$\frac{P_n}{P_o} = 2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\Delta X_c}{XL}}} \Rightarrow \frac{\Delta X_c}{XL} = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 0.75$$

la potencia reactiva adicional que se inyecta por la compensación será:

$$\Delta Q_c = \Delta X_c \cdot I_o^2 = 0.75 XL (2I_o)^2 = 3.0 I_o^2 XL$$

como $I_o^2 XL = V^2 B'c_0 = Q_{c0}$

I_o corriente de la línea al SIL

$$\text{entonces } \Delta Q_c = 3 Q_{c0}$$

Por tanto, igual incremento en la capacidad de potencia de transferencia por caída de tensión se obtiene añadiendo la misma capacidad reactiva serie o shunt en líneas de transmisión.

Pero a la vez, el límite de estabilidad de estado estable mejora notoriamente con compensación serie, en cambio se mantiene prácticamente el mismo con la compensación shunt, ya que:

$$P = \frac{V_1 V_2}{X'L} \sin \delta \quad \begin{matrix} X'L = KL \text{ con compensación shunt} \\ X'L < XL \text{ con compensación serie} \end{matrix}$$

$$P_{LIM} = \frac{1}{XL} \text{ shunt}$$

$$P_{LIM} = \frac{1}{XL - \Delta X_c} \text{ serie}$$

al duplicar la potencia natural $X_c = 0.75 XL$; el límite de estabilidad con compensación serie se incrementa en 4 veces el límite sin compensación, en cambio no hay variación con la compensación shunt.

Esto involucra que la compensación shunt se utiliza en los casos en que el limitante es la caída de tensión en cambio la compensación serie en aquellos casos en que la estabilidad es el limitante. De esta forma se puede modificar la curva de St. Clair a valores deseados.

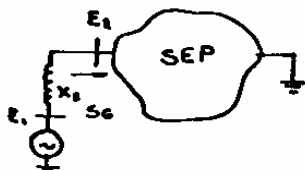
Sin embargo no se puede compensar indefinidamente una línea, existiendo un límite (alrededor de 3.0) especialmente para compensación serie, ya que pueden aparecer frecuencias subsíncronas (menores que 60 ciclos) en el sistema, las que dan lugar al fenómeno denominado resonancia subsíncrona, fenómeno que ocasiona la ruptura del eje entre la excitatriz y el generador, del o los generadores que estén conectados a la línea de transmisión.

4. CONTROL DE VOLTAJE EN GENERADORES

La función básica de los generadores es la de producir MW, el torque electromecánico en el entrehierro del generador, constituye el enlace fundamental entre la potencia mecánica de la turbina y la potencia eléctrica generada.

Sin embargo el generador también está en capacidad de producir o absorber MVAR, de tal forma de mantener niveles de tensión deseados para la transferencia de potencia activa y para satisfacer los requerimientos de potencia reactiva de la carga.

El diagrama de secuencia positiva elemental y al mismo tiempo suficiente para análisis de estado estable de la máquina síncrona y del sistema es, el de una fuente de voltaje detrás de la reactancia síncrona.



- E_1 es el voltaje interno generado
- $E_2 = k \omega \cdot L_{fa} \cdot i_f = k_1 \cdot i_f$
- ω velocidad
- L_{fa} inductancia mutua entre generador y campo
- i_f corriente de campo
- E_2 es el voltaje terminal del generador

Como sabemos, la potencia eléctrica que entrega el generador al sistema es:

$$SG = -(S_{21}) = -(E_2 \cdot I_2^*) = -(E_2 \frac{E_2 - E_1}{-jX_s}) = (PG + jQG)$$

Si $E_1 = V_1 = k_1 \cdot i_f$

$$E_2 = V_2 \angle -\delta$$

$$PG + jQG = - \left(\frac{V_2^2 - V_1 V_2 \angle -\delta}{X_s} \right) = \frac{(V_1^2 - V_1 V_2 \cos \delta + j V_1 V_2 \sin \delta)}{X_s}$$

donde: $PG = \frac{V_1 V_2}{X_s} \sin \delta$ p.u MW

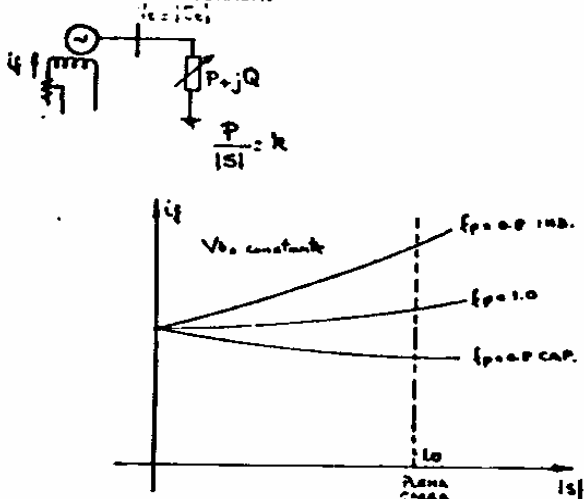
$$QG = \frac{V_1 V_2}{X_s} \cos \delta - \frac{V_2^2}{X_s}$$
 p.u MVAR

El análisis más detallado de estas dos relaciones se lo hará más adelante.

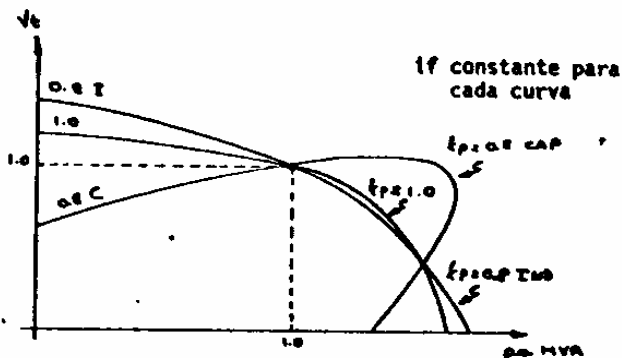
4.1 Características de operación de estado estable de máquinas síncronas

Las características principales de operación de estado estable de máquinas síncronas, constituyen las interrelaciones entre voltaje terminal, corriente de campo, potencia aparente y factor de potencia.

Consideremos primero, un generador síncrono alimentando una carga cuyo factor de potencia es constante. La curva que relaciona la corriente de campo i_f para mantener el voltaje terminal constante a medida que la carga va variando (a igual factor de potencia) se denomina CURVA COMBINADA.

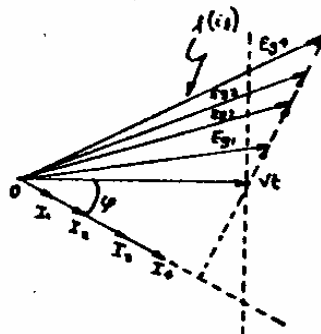
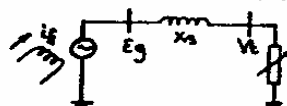


En cambio si mantenemos la corriente de campo constante a medida que varía la carga, evidentemente variará el voltaje terminal V_t . Grafizando las curvas correspondientes para diferentes factores de potencia y considerando que la corriente de excitación inicial debe ser tal que a plena carga se tenga voltaje terminal de 1.0 p.u para carga de cualquier factor de potencia tenemos:



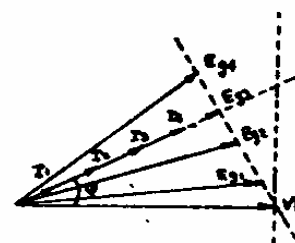
Los correspondientes diagramas vectoriales para los dos conjuntos de curvas antes indicadas son:

- CURVA DE VOLTAJE TERMINAL CONSTANTE



$\cos \phi = 0.8$ inb.

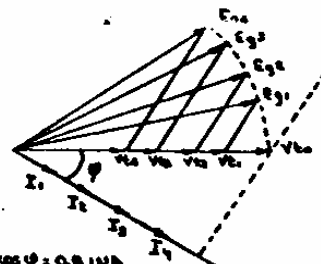
if va aumentando continuamente



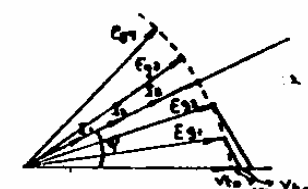
$\cos \phi = 0.8$ CAP.

if va disminuyendo continuamente

- CURVA DE CORRIENTE DE CAMPO CONSTANTE $|E_g| = k$



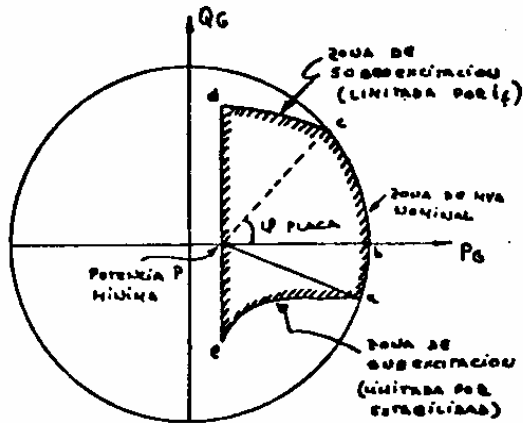
$\cos \phi = 0.8$ inb.
 V_t va disminuyendo continuamente



$\cos \phi = 0.8$ CAP.
 V_t va aumentando paulatinamente hasta cierto punto.

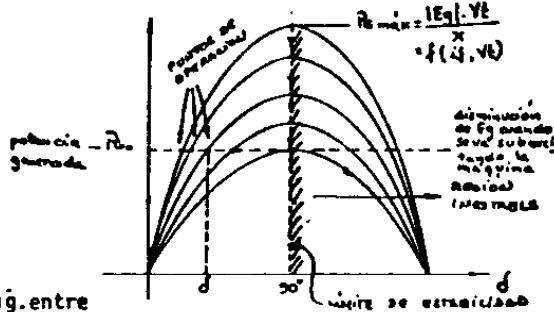
Una de las curvas más utilizadas y comunes de máquinas síncronas es la curva de CAPABILIDAD, la que proporciona la región completa de operación en estado normal, esta curva relaciona la potencia activa de generación con la potencia reactiva que el generador puede generar o absorber, en esta curva están intrínsecamente consideradas el voltaje terminal, el voltaje generado, la

corriente de excitación, y tiene la siguiente forma:



Los generadores síncronos generalmente tienen como características de placa los MVA y $\cos\phi$ (0.8 a 0.95). La potencia activa está limitada, dentro de la producción de MVA, por la capacidad del sistema matriz, los MVA nominales es posible generarlos en cierta zona únicamente. Para factores de potencia de carga bajos e inductivos, el calentamiento de campo limita la producción de MVA, ya que el generador debe sobreexcitar el campo para entregar MVAR al sistema. Para cargas de factor de potencia capacitivo, el generador debe subexcitarse para trabajar como reactor, lo que ocasiona una disminución de E_g a medida que decrece δ , se limita la curva de operación en esta región por razones de estabilidad ya que puede llegar un punto en el cual E_g es tan bajo que no es posible transferir potencia activa al sistema, produciéndose la pérdida de sincronismo, ya que:

$$P_G = \frac{|E_g| \cdot V_t}{x_s} \sin \delta$$



La curva anterior es la muy conocida curva P- δ de máquinas síncronas.

4.2 Análisis de potencias activa y reactiva de generación

Habíamos determinado anteriormente que la potencia activa y reactiva que el generador entrega al sistema de potencia es:

$$P_G = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \sin \delta$$

$$Q_G = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \cos \delta - \frac{V_t^2}{x_s}$$

El torque mecánico de la turbina que luego se transforma en potencia activa generada es función de δ . Un análisis lógico y físico del problema nos indica que la potencia activa generada es función directa de δ en tanto que la potencia reactiva generada es función directa de V_g y por tanto de i_f . Todo esto dentro de la zona normal de operación del generador.

Matemáticamente encontramos que:

$$\frac{\partial P_G}{\partial \delta} = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \cos \delta; \quad \frac{\partial P_G}{\partial V_g} = \frac{V_t}{x_s} \sin \delta = \frac{\partial P_G}{\partial i_f} = 0 ?$$

Como δ es un ángulo que varía hasta unos 30 o 40° en operación normal, $\frac{\partial P_G}{\partial \delta}$ es un valor alto, lo que da una fuerte dependencia entre P y δ y ninguna entre P y V_g .

$$\text{Por otro lado: } \frac{\partial Q_G}{\partial \delta} = -\frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \sin \delta; \quad \frac{\partial Q_G}{\partial V_g} = \frac{V_t}{x_s} \cos \delta$$

$$\text{en este caso } \frac{\partial Q_G}{\partial V_g} > \frac{\partial Q_G}{\partial \delta}$$

Concentrándonos exclusivamente en la producción de potencia reactiva tenemos que:

$$Q_G \text{ es positivo cuando } V_g \cos \delta > V_t$$

Esto significa que el generador produce potencia reactiva, es decir actúa como condensador, la relación anterior depende de la potencia activa generada ya que es función de δ , pero generalmente la desigualdad se mantiene únicamente para valores altos de V_g o sea para sobre-excitación.

En cambio una máquina subexcitada absorbe potencia reactiva de la red, actuando como reactor, cuando.

$$V_g \cos \delta < V_t$$

relación que se cumple cuando V_g es pequeña.

En el caso de un motor síncrono, utilizado para compensar la carga, en cuyo caso denominado compensador síncrono ocurre que:

$$P_M = 0 \therefore \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \sin \delta = 0 \quad \delta = 0$$

$$\therefore Q_G = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} - \frac{V_t^2}{x_s}$$

Con lo cual vemos que muy simple y fácilmente la potencia reactiva de un motor síncrono (entregada o absorbida) puede controlarse aumentando o disminuyendo V_g variando la corriente de campo i_f .

Es importante enfatizar, que en el generador síncrono, el cambio del nivel de excitación no cambia el valor de potencia generada, esta permanece constante, variando δ . El nivel de excitación afecta el valor de $P_{MAX} = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s}$ únicamente (ver curva P- δ).

En cambio una variación de potencia activa causa una variación de δ , lo que a su vez origina también una variación de Q_G , pero para los ángulos de operación esta variación es mínima y prácticamente desacoplada.

Consideremos como ejemplo una máquina síncrona de 15 MVA, 13.6 KV y $x_s = 0.835$ p.u. Supongamos que $V_t = 1.0$

En cierta condición de carga $V_g = 1.5$ p.u (sobreexcitado) y $P_G = 0.25$ pu entonces:

$$P_G = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \sin \delta \Rightarrow \sin \delta = \frac{0.25 \times 0.835}{1.5} = 0.1392 \quad \delta = 8^\circ$$

la potencia reactiva que genera es:

$$Q_G = \frac{V_g \cdot V_t}{x_s} \cos \delta - \frac{V_t^2}{x_s} = 0.581 \text{ p.u}$$

Ahora, asumamos que abriendo la turbina el generador toma $P_G = 0.5$ p.u., en cuyo caso

$$\delta = 16.16^\circ$$

$$\text{y } Q_G = 0.528 \text{ p.u.}$$

nótese que duplicando la potencia activa, Q_G varía ligeramente.

Si volviendo a la condición inicial $P_G=0.25$, incrementamos en un 20% la corriente de excitación, entonces:

$$V_g = 1.2 \times 1.5 = 1.8 \text{ p.u.}$$

la potencia activa generada no puede cambiar variando i_f , entonces

$$0.25 = \frac{1.8 \times 1.0}{0.835} \sin \delta \quad \delta = 6.66^\circ$$

es decir originó un cambio en el ángulo δ , la potencia reactiva generada es ahora:

$$Q_G = 0.944 \text{ p.u.}$$

lo cual es un incremento importante en estas condiciones.

BIBLIOGRAFIA

1. Electric Power Systems. B.H.Weedy - Edit. John Wiley & Sons.
2. Electric Energy Systems Theory - O.Elgerd - Editorial McGraw - Hill.
3. Reactive Power Control in Electric Systems - Editado por T.J.E.Miller Editorial John Wiley & Sons.
4. Elements of Power System Analysis. W.D.Stevenson. Edit. McGraw-Hill.
5. A new look at shunt compensation. E.W.Kimbark. IEEE Pas VOL 102, January 1983, pp 212-218.
6. Operación de Líneas de Transmisión. G.Arroyo. México-79 SEP 10-12, 1979, México, D.F.

CONTROL DE POTENCIA ACTIVA Y FRECUENCIA (P-f) EN SISTEMAS ELECTRICOS

1. INTRODUCCION

De los estudios de flujos de potencia de un sistema, así como de estudios de sensibilidad del mismo, se puede establecer que el sistema presenta las siguientes propiedades:

- Cambios ΔP_i en las potencias activas de las barras, afectan esencialmente a los ángulos de fase de los voltajes nodales y por tanto al flujo de potencia activa por las líneas de transmisión, manteniéndose las magnitudes de los voltajes nodales prácticamente inalteradas.
- Cambios ΔQ_i en las potencias reactivas de las barras, afectan esencialmente a las magnitudes de los voltajes nodales y por tanto al flujo de potencia reactiva por las líneas de transmisión, manteniéndose los ángulos de los voltajes nodales prácticamente inalterados.
- Cambios en potencia reactiva en una barra en particular afectan mayormente a la magnitud de voltaje de dicha barra y en menor grado a las demás.

Estas propiedades se aplican únicamente cuando el sistema de potencia se encuentra en condiciones estables, es decir estos cambios son pequeños y el sistema se acomoda a un nuevo estado estable.

El sistema encuentra un nuevo estado estable cuando para los cambios ΔP_i o ΔQ_i existe una respuesta de los elementos controlables del sistema que fundamentalmente son los generadores de la red. El pasar de un estado estable a otro requiere necesariamente de una respuesta de tipo dinámica.

Los generadores tienen dos canales de control, el canal de control p-f sirve para corregir las desviaciones de balance de potencia activa producida por las continuas desviaciones ΔP_i de la demanda del sistema. El canal de control Q-V corrige las desviaciones de voltaje de la barra a que está conectado el generador por efecto de las continuas desviaciones ΔQ_i de la demanda del sistema. Esquemáticamente estos canales de control se indican en la figura siguiente. Denominándose control p-f debido a

que un cambio ΔP_i produce una desviación de frecuencia que debe ser corregida a través de un control en el sistema motriz del generador, permitiendo mayor entrada de combustible, vapor, agua, etc. dependiendo del tipo de turbina, siendo ΔP un cambio que significa que para el generador un aumento de la demanda de potencia activa del sistema y viceversa. El control p-f se lo efectúa a través del llamado REGULADOR DE VELOCIDAD, el cual mediante un sensor de la frecuencia, transforma en un aumento o disminución del torque mecánico de la turbina, resultado de lo cual se produce un cambio ΔP_G en la generación de potencia activa.

El control Q-V en cambio, una vez que se mide una desviación ΔV_i por efecto de un cambio ΔQ en el sistema, se produce un control en la excitación del generador que da como resultado un aumento o disminución en la corriente de campo, según disminuya o aumente el voltaje de la barra, que a su vez produce un aumento o disminución ΔQ_G en el generador. El control Q-V en los generadores se lo efectúa a través del llamado REGULADOR DE VOLTAJE, por supuesto en el sistema de potencia existen otros elementos de control en el canal Q-V, como son los transformadores con tap, los condensadores y reactores así como las características de las líneas de transmisión.

En estado estable estos dos canales de control son, como ya se ha dicho, desacoplados. En estado dinámico, cuando por efecto de una perturbación mayor, existe acoplamiento entre estos dos canales de control pero en general el control Q-V es mucho más rápido que el canal p-f debido a la inercia de las partes mecánicas de los generadores y por tanto el acoplamiento puede despreciarse.

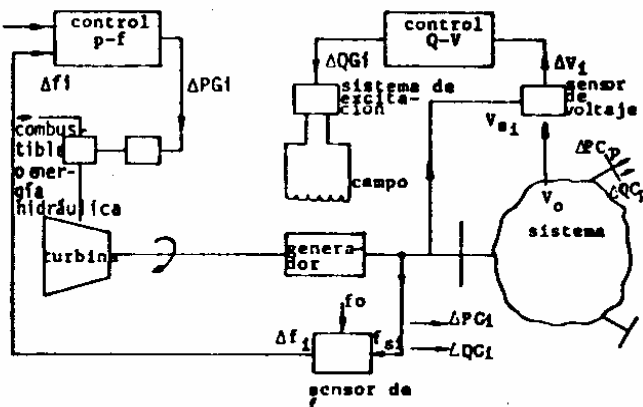
Aquí estudiaremos toda la problemática relativa al control potencia-frecuencia (p-f) en sistemas eléctricos de potencia, el cual como ya se ha establecido tiene como objetivo mantener el balance generación-carga más pérdidas (MW), por efecto de las variaciones continuas, rápidas y de pequeña magnitud de la demanda activa del sistema. En tiempos más largos es necesario distribuir adecuadamente esta demanda entre todos los generadores de la red, lo cual se efectúa mediante el despacho económico anteriormente estudiado, el control de los generadores para despacho económico sea manual o automático se lo efectúa a través del mismo canal p-f.

2. EL CONTROL POTENCIA-FRECUENCIA (p-f)

Con la introducción anterior se puede establecer que, el satisfacer la demanda activa con la generación es un problema de conversión de energía, que involucra variables eléctricas y mecánicas, la diferencia en tiempos de actuación y en tiempos de respuesta entre los dos tipos de variables, origina variaciones en la velocidad de las máquinas y por tanto desviaciones de frecuencia.

Un objetivo básico y primario en operación de sistemas de potencia es el mantener el balance entre generación y el consumo total, la velocidad del sistema (f) o más específicamente un cambio en ella es un indicativo rápido de que el balance no está siendo satisfecho.

Una frecuencia estacionaria, a cualquier valor que permanezca, indica una igualdad entre la generación y la carga, una frecuencia que esté acelerándose significa que la generación es más alta que la carga.



(La respuesta ΔP_G y ΔQ_G dependen de las características del generador.)

Una frecuencia que esté desacelerándose significa que la generación es más baja que la carga.

Pero existe un problema adicional, no sólo es necesario conseguir que el sistema opere a una frecuencia estacionaria, sino adicionalmente que esta frecuencia sea la nominal o "programada" del sistema, que en nuestro caso, la nominal sea de 60 ciclos/seg.

Los reguladores de velocidad de los sistemas motrices de los generadores tienen la misión de corregir estas desviaciones. En un sistema de potencia hay una gran cantidad de generadores que operan en paralelo, algunos son hidráulicos, otros son térmicos y entre ellos hay diferencias en capacidad y tipo y todos ellos están equipados con reguladores de velocidad.

Los reguladores de velocidad tienen diferentes características de respuesta, ya que pueden tener diferentes sensibilidades, tiempos de respuesta, y aún pueden estar bloqueados; pero dentro de este ambiente, cada generador está alerta para cambiar su salida de potencia activa, cambiando la entrada de agua o combustible a la parte motriz, en función de los cambios de velocidad del sistema.

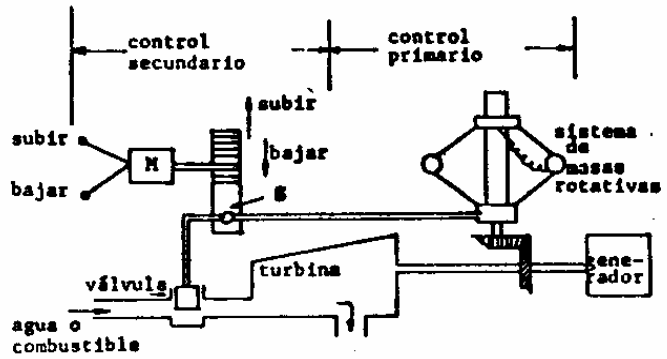
Cuando se incrementa la demanda del sistema, ocurre un cierto tiempo en que la demanda es superior a la generación del sistema y la frecuencia del sistema empieza a desacelerarse, durante la ocurrencia de éste efecto y de acuerdo con las características de los reguladores, varios generadores del sistema se verán forzados por sus reguladores para que se incrementen su generación hasta un punto tal que se mantenga el equilibrio generación-carga y la frecuencia no decaiga más. La distribución del incremento de demanda entre los generadores, depende de las características de regulación de los diversos generadores y en general es de tipo aleatoria y se la denomina REGULACION NATURAL del sistema.

Después de esta distribución de carga de tipo aleatoria es necesario efectuar una distribución más coherente entre máquinas preseleccionadas de tal forma de mantener el control de la generación del sistema y no permitir que se sobrecarguen máquinas, etc., y en tiempos más largos la distribución más adecuada se la efectúa mediante el despacho económico. Esta distribución requiere de un control adicional en los reguladores que puede ser hecho manual o automáticamente y que se denomina CONTROL SUPLEMENTARIO mediante el cual se efectúa esta repartición más coherente del cambio de demanda entre los generadores y al mismo tiempo controlar la frecuencia a un valor pre-establecido.

El objetivo del control potencia-frecuencia en sistemas de potencia es el coordinar las relaciones entre la respuesta natural y la acción suplementaria de tal forma de obtener la mejor respuesta del sistema de generación a cambios de la demanda del sistema manteniendo el equilibrio generación-carga.

Lo anterior constituye la operación normal de un SEP. Cuando ocurren variaciones grandes en el equilibrio como producto de una perturbación mayor, las desviaciones de frecuencia así como su desaceleración o aceleración son grandes, en estas circunstancias el sistema se encuentra en estado dinámico, y si bien los reguladores actúan, en muchas circunstancias su acción no es suficiente y para mantener o encontrar un nuevo estado estable, el sistema requiere de otros medios de control muy rápidos que constituyen los relés de protección.

La fig. siguiente indica físicamente un diagrama simplificado de un regulador de velocidad de un generador y sus componentes de regulación primaria o natural y la regulación secundaria.

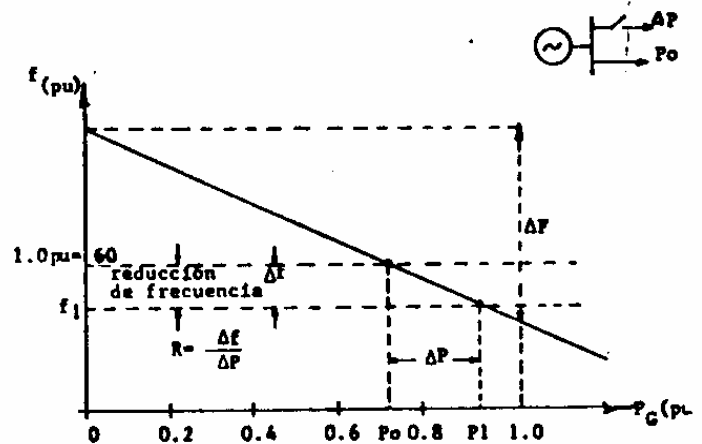


El sistema de masas rotativas efectúan el control primario o regulación natural en tanto que actuando sobre el motor M se efectúa el control secundario o regulación suplementaria moviendo el punto pivote g; un movimiento hacia arriba incrementa la potencia de generación y viceversa.

3. REGULACION NATURAL O PRIMARIA

En base a lo establecido en 2. analizaremos ahora en detalle en qué consiste la regulación natural o primaria.

Los reguladores de velocidad responden de tal manera que el generador aumente o disminuya su potencia de generación en función de las variaciones de velocidad según aumente o disminuya la carga del generador. Para permitir la operación en paralelo de los generadores en un sistema de potencia, (operación estable y no oscilatoria) los reguladores de velocidad responden a los cambios de carga en el sistema en base a una característica frecuencia-potencia de generación, indicada en la figura siguiente:



La característica anterior de regulación, teóricamente es una línea recta. Si un generador tiene conectada una carga P_0 y opera a una frecuencia de 60 ciclos/seg. y se incrementa una carga ΔP , el generador absorbe el incremento de carga ΔP por acción del regulador de velocidad pero se estabiliza a una frecuencia inferior f_1 . La regulación se define como: (Δf y ΔP en p.u. en bases de la máquina)

$$R = \frac{\Delta f}{\Delta P} \text{ p.u.} \quad (1)$$

Un valor importante de regulación, denominado también estatismo permanente, se define como la variación de frecuencia en p.u. causada cuando la máquina va de cero a plena carga.

$$\Delta P = P_n = 1.0 \text{ p.u.} \Rightarrow R_s = \frac{\Delta f}{1.0} = \Delta f \text{ p.u.} \quad (2)$$

Si la característica de regulación fuera lineal, entonces la relación (1) sería igual a la (2), pero en la práctica no es una recta sino que tiene desviaciones alrededor de la misma, debido a las irregularidades que se presentan en la operación de válvulas de entrada de combustible o agua.

Una máquina con una regulación R_s del 4% = 0.04 p.u. significa que si se le aplica una carga del 100% = 1.0 p.u. de su potencia nominal habiendo estado inicialmente al vacío, la frecuencia final en la que se estabiliza la máquina después de absorber la carga será de 0.04 p.u. inferior a la de vacío (si $f_0 = 60$ ciclos, $f_f = 57.6$ c/seg) valores típicos de R_s para los generadores de sistemas de potencia están entre 2 y 6% (0.02 a 0.06 pu). Los valores para R dados por la ecuación (1) son generalmente superiores a R_s (0.05 a 0.25 p.u.). Es conveniente o más común expresar en vez de R , su inverso:

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta P}{\Delta f} \quad (3)$$

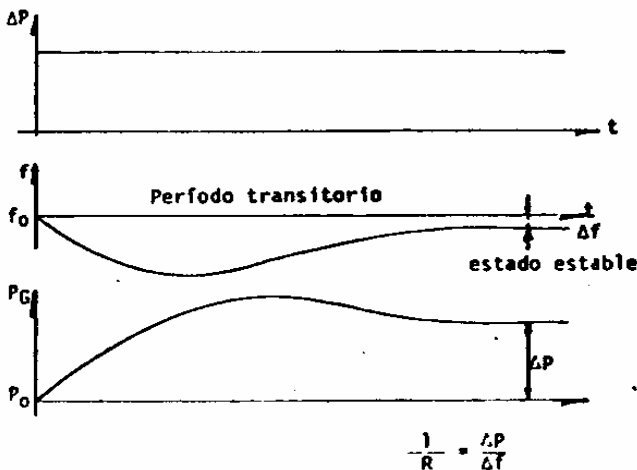
Este valor es conocido también como energía regulante, la cual puede estar en p.u. en MW/ciclo y también en MW/0.1 ciclo. El significado de la energía regulante es la contribución en potencia que da la máquina cuando la frecuencia decrece 0.1 ciclos (cuando $1/R$ está dada en MW/0.1 ciclo).

Ejemplo 1.- Un generador tiene una carga inicial de 2000 MW y opera a frecuencia nominal de 60 ciclos/seg, calcular el cambio de frecuencia en estado estable debido a la regulación natural del regulador, si se incrementa una carga de 10 MW al generador y siendo $R=0.2$ p.u. Calcular la energía regulante en MW/0.1 Hz ($P_g = 2000$ MW)

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta P}{\Delta f} \Rightarrow \Delta f = \Delta P \cdot R = \frac{10}{2000} \times 0.2 = 0.001 \text{ p.u.} = 0.06 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{10 \text{ MW}}{0.06 \text{ Hz}} = 166.6 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} = 16.67 \frac{\text{MW}}{0.1 \text{ Hz}}$$

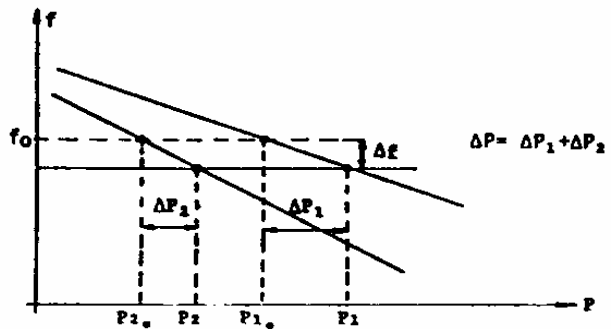
La figura siguiente da las respuestas típicas de un regulador de velocidad y su acción en la potencia de generación, cuando se ha incrementado una carga ΔP .



3.1 Repartición de carga entre varios generadores

Cuando dos o más unidades están operando en paralelo la repartición de un incremento de carga entre las unidades de generación está determinada por dos hechos: las unidades deben operar a la misma frecuencia y deberán operar de acuerdo con sus características de regulación.

La figura siguiente, establece las características de regulación de dos unidades en paralelo. Inicialmente las máquinas están operando con cargas P_{10} y P_{20} y su frecuencia es f_0 (digamos 60 Hz). Después de un incremento de carga ΔP , las nuevas condiciones de operación son P_1, P_2, f



De la fig. anterior podemos concluir:

- Las unidades que tienen menos pendiente en su característica (menor R) toman más carga.
- La frecuencia final es inferior a la inicial. Si hubiera estado operando una sola máquina la frecuencia final sería aún más baja para el mismo incremento de carga ΔP .
- La división de la carga ΔP entre las dos unidades se basa estrictamente en su característica de regulación, lo cual puede ser no deseable.

Además se puede encontrar una característica equivalente de las dos máquinas, ya que:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\Delta P_1}{\Delta f}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\Delta P_2}{\Delta f}, \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{\Delta P}{\Delta f}$$

Como además $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{\Delta f} = \frac{\Delta f/R_1 + \Delta f/R_2}{\Delta f} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Generalizando para n máquinas que operen en paralelo la regulación equivalente está dada por:

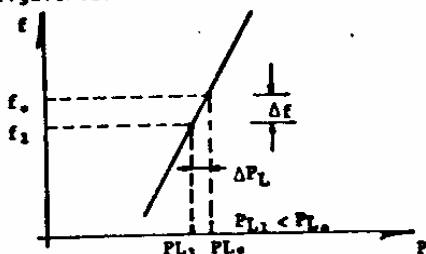
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (4)$$

3.2 Efecto de la carga en la regulación

En la descripción anterior, hemos considerado que la carga del sistema es insensible a los cambios de frecuencia del sistema, aunque esto es verdad para ciertos tipos de carga, no lo es para cargas dinámicas como es el caso de los motores. La carga en general varía con las variaciones de frecuencia en relación directa, es decir, la carga aumenta con un aumento de frecuencia y viceversa, lo cual favorece a la regulación de generación ya que si se aumenta una carga ΔP al generador hemos visto que la frecuencia

disminuye, al disminuir la frecuencia la carga total disminuye un tanto, haciendo que el verdadero incremento de carga sea $\Delta P'$ en vez de ΔP ($\Delta P' < \Delta P$) y la variación de frecuencia $\Delta f'$ será menor a Δf , siendo Δf la variación que se obtendría si la carga fuera insensitiva a la frecuencia. Este efecto se conoce como amortiguamiento de la carga.

La característica f-p de la carga se indica en la fig. siguiente.



La relación entre la disminución de carga ΔP_L y la disminución de frecuencia Δf que causa la disminución de ΔP_L se denomina característica de amortiguamiento de la carga.

$$D = \frac{\Delta P_L}{\Delta f} \quad (5)$$

Entonces, si se aplica una carga ΔP a un generador, el cambio final de frecuencia por la acción de la regulación del generador estaría dado por:

$$\Delta f = \Delta P \cdot R$$

Pero, debido al efecto de la carga el cambio efectivo de frecuencia será $\Delta f'$, ya que la carga habría disminuido un valor dado por:

$$\Delta P_L = D \cdot \Delta f'$$

Entonces, el cambio efectivo de carga será

$$\Delta P' = \Delta P - \Delta P_L = \Delta P - D \cdot \Delta f'$$

y por tanto la desviación de frecuencia que se produce en el generador incluido el efecto de la carga es

$$\Delta f' = \Delta P' \cdot R = (\Delta P - D \cdot \Delta f') \cdot R$$

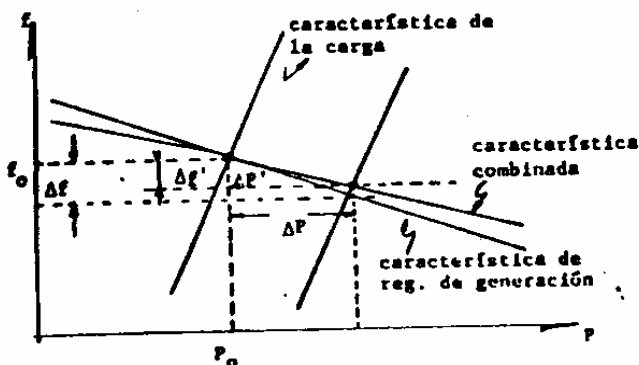
o lo que es lo mismo: $\Delta f' = \Delta P \cdot \frac{R}{1 + DR}$ igual a

$$\Delta f' = \frac{1}{\frac{1}{R} + D} \cdot \Delta P \quad (6)$$

la característica de regulación combinada entre generación y carga (R') sería entonces:

$$\Delta f' = R' \cdot \Delta P \Rightarrow R' = \frac{1}{\frac{1}{R} + D} \quad (7)$$

la figura siguiente explica gráficamente lo descrito



valores típicos para D en p.u. son 0.5 a 2.0 p.u

Ejemplo 2.- Un generador tiene una regulación $R=0.2$ p.u. operando con una carga de 2000 MW a 60 Hz. Se aplica un incremento de carga de 10 MW, si la carga tiene un amortiguamiento de 2.0 p.u., calcular la frecuencia a la que se estabiliza la máquina luego de la respuesta del regulador de velocidad, la generación total, y la disminución de carga por efecto de la reducción de frecuencia.

$$a) \Delta f' = \frac{1}{\frac{1}{R} + D} \cdot \Delta P = \frac{1}{5.0 + 2.0} \times \frac{10}{2000} = 0.0007143 \text{ pu} =$$

$$0.042857 \text{ Hz}$$

$$f' = f_0 - \Delta f' = 60 - 0.042857 = 59.957143 \text{ Hz}$$

$$b) \Delta P_G = \frac{\Delta P'}{R} = 0.0035715 \text{ p.u.} = 7.143 \text{ MW}$$

$$P_{Gf} = P_{G0} + \Delta P_G = 2007.143 \text{ MW}$$

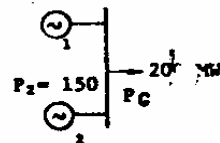
$$c) \Delta P_L = D \cdot \Delta f' = 2.0 \times 0.0007143 = 0.0014286 \text{ p.u.} = 2.8572 \text{ MW}$$

$$\Delta P = \Delta P_G + \Delta P_L = 10.0 \text{ MW}$$

Ejemplo 3.- Consideremos el sistema de la fig. siguiente. Asumir que el sistema está operando a 60 Hz para abastecer la carga indicada. Despreciando el cambio de carga con la frecuencia, cual será la nueva frecuencia si la carga aumenta 25 MW, cuánto de esta carga será tomada por cada máquina. Repetir este problema, si la carga varía en 1% por cada 1% de cambio en frecuencia.

Capacidad $G_1 = 100$ MW
 $R = 0.05$ p.u. en sus propias bases

Capacidad $G_2 = 250$ MW
 $R_2 = 0.04$ p.u en sus propias bases



a) Con la carga independiente de la frecuencia

Sea $P_B = 200$ MW $f_B = 60.0$

las características de regulación en esta nueva base son:

$$R_1 = 0.05 \times \frac{200}{100} = 0.1 \text{ p.u.}$$

$$R_2 = 0.04 \times \frac{200}{250} = 0.032 \text{ p.u.}$$

la regulación equivalente de las dos máquinas es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.032} = 10 + 31.25 = 41.25 \Rightarrow$$

$$R_{eq} = 0.02424 \text{ p.u.}$$

siendo $\Delta P = 25 \text{ MW} = 0.125 \text{ p.u.}$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{\Delta P}{\Delta f} \Rightarrow \Delta f = R_{eq} \cdot \Delta P = 0.00303 \text{ p.u.} = 0.1818 \text{ Hz}$$

la nueva frecuencia del sistema es: 59.8182 Hz

la carga que toma cada máquina es:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\Delta P_{G1}}{\Delta f} \Rightarrow \Delta P_{G1} = \frac{\Delta f}{R_1} = \frac{0.00303}{0.1} = 0.0303 \text{ p.u.} = 6.06 \text{ MW}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\Delta P_{G2}}{\Delta f} \Rightarrow \Delta P_{G2} = \frac{\Delta f}{R_2} = \frac{0.00303}{0.032} = 0.09469 \text{ p.u.} = 18.94 \text{ MW}$$

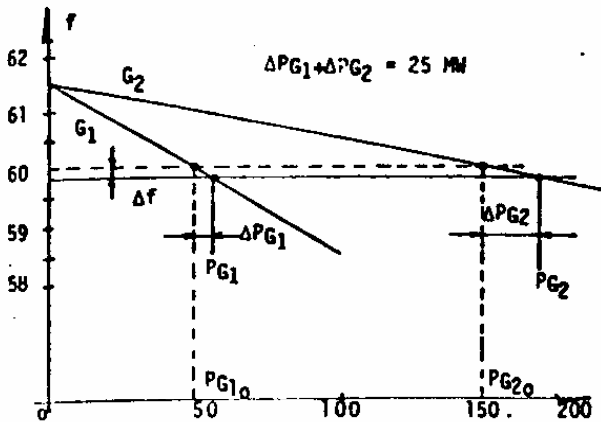
la generación final de cada máquina es:

$$PG_1 = PG_{10} + \Delta PG_1 = 56.06 \text{ MW}$$

$$PG_2 = PG_{20} + \Delta PG_2 = 168.94 \text{ MW}$$

$$P_C = P_{C0} + \Delta P_C = 225 \text{ MW}$$

la solución gráfica en unidades reales es la siguiente:



la resolución de este problema en unidades reales sería:

$$R_1 = 0.05 \text{ p.u.} = \frac{\Delta f \text{ p.u.}}{\Delta P \text{ p.u.}} = \frac{\Delta f \text{ p.u.}}{1.0 \text{ p.u.}} = \frac{3 \text{ Hz}}{100 \text{ MW}}$$

$$R_2 = 0.04 \text{ p.u.} = \frac{2.4 \text{ Hz}}{250 \text{ MW}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{100}{3} + \frac{250}{2.4} = 137.5 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \Rightarrow$$

$$R_{eq} = 0.0072727 \frac{\text{Hz}}{\text{MW}}$$

$$\Delta f = \Delta P \times R_{eq} = 25 \text{ MW} \times 0.0072727 \frac{\text{Hz}}{\text{MW}} = 0.1818 \text{ Hz} \Rightarrow f_f = 59.8182$$

$$\Delta PG_1 = \frac{\Delta f}{R_1} = \frac{0.1818 \text{ Hz}}{0.03 \text{ Hz/MW}} = 6.06 \text{ MW}$$

$$\Delta PG_2 = \Delta P - \Delta PG_1 = \frac{\Delta f}{R_2} = \frac{0.1818 \text{ Hz}}{2.4 \text{ Hz/MW}} \times 250 = 18.94 \text{ MW}$$

b) $D = 1.0 \text{ p.u.}$

$$\Delta f' = \frac{1}{\frac{1}{R_{eq}} + D} \Delta P = \frac{1}{\frac{1}{0.0072727} + 1.0} \times 0.125 \text{ pu} = 0.0029582 \text{ p.u.} =$$

$$= 0.1775 \text{ Hz}$$

la frecuencia final es entonces: 59.8225 Hz

$$\Delta PG_1 = \frac{\Delta f'}{R_1} = \frac{0.0029582}{0.1} = 0.029582 \text{ p.u.} = 5.9164 \text{ MW}$$

$$\Delta PG_2 = \frac{\Delta f'}{R_2} = \frac{0.0029582}{0.032} = 0.09244 \text{ p.u.} = 18.4887 \text{ MW}$$

el cambio efectivo de carga es entonces

$$\Delta P' = \Delta PG_1 + \Delta PG_2 = 24.4051 \text{ MW}$$

la disminución de carga por efecto de la disminución de frecuencia es:

$$\Delta P_L = \Delta P - \Delta P' = D \cdot \Delta f' = 1.0 \times 0.3029582 \text{ p.u.} = 0.59164 \text{ MW}$$

En base a lo establecido, se puede entonces generalizar a un sistema de potencia que tenga n generadores, cada uno con una característica de regulación R_1, R_2, \dots, R_n , si la carga tiene una característica de amortiguamiento D y se produce un incremento de carga ΔP MW:

La desviación final de frecuencia estará dada por:

$$\Delta f = \frac{\Delta P}{\frac{1}{R_{eq}} + D} \text{ Hz} \quad (8)$$

$$\text{donde: } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (9) \quad R_i = \frac{\Delta f}{\Delta P_i} \frac{\text{Hz}}{\text{MW}} \quad (10) \quad D = \frac{\Delta P_L}{\Delta f} \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \quad (11)$$

el valor de carga que toma cada generador es:

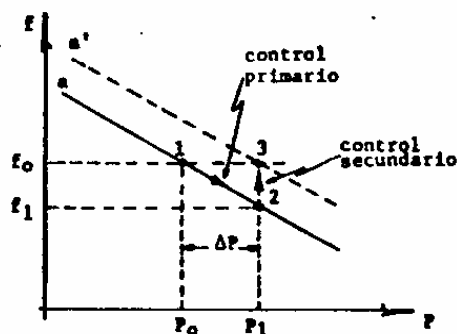
$$\Delta P_{G_i} = \frac{\Delta f}{R_i} = \frac{\Delta P}{R_i \left(\frac{1}{R_{eq}} + D \right)} \text{ MW} \quad (12)$$

$$\Delta P = \sum \Delta P_{G_i} + D \cdot \Delta f \text{ MW} \quad (13)$$

4. REGULACION SUPLEMENTARIA O SECUNDARIA

Como visto anteriormente que debido a la característica de regulación de los generadores, una vez que se produce un incremento de carga ΔP , los generadores, por acción natural o primaria, toman la carga ΔP pero la frecuencia se estabiliza en un valor inferior a la nominal. Como es importante mantener el valor de la frecuencia en el valor nominal o en el valor programado, se requiere ejecutar acciones de control adicionales para volver la frecuencia al valor nominal, esta acción se denomina regulación suplementaria, incorporada al regulador de velocidad.

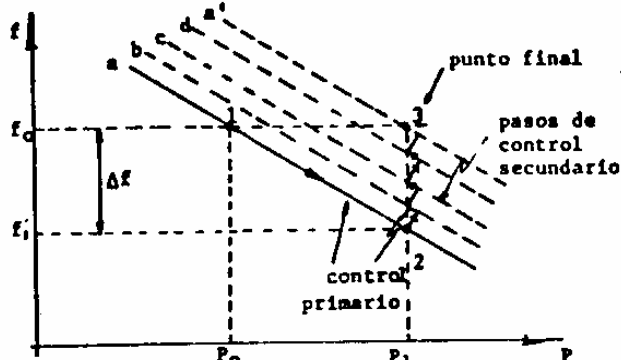
Para visualizar la acción de la regulación suplementaria, tomemos inicialmente como ejemplo una sola máquina que esté alimentando al sistema de potencia entregando una potencia P_0 a una frecuencia f_0 (fig. siguiente); ocurre un incremento de carga y este generador toma una carga ΔP , por acción de la regulación natural o primaria, el regulador abrirá las válvulas de entrada para incrementar la energía mecánica a la turbina y por tanto la potencia eléctrica del generador hasta un valor P_1 , estabilizándose la frecuencia en un valor inferior f_1 . Es decir, por acción primaria, la



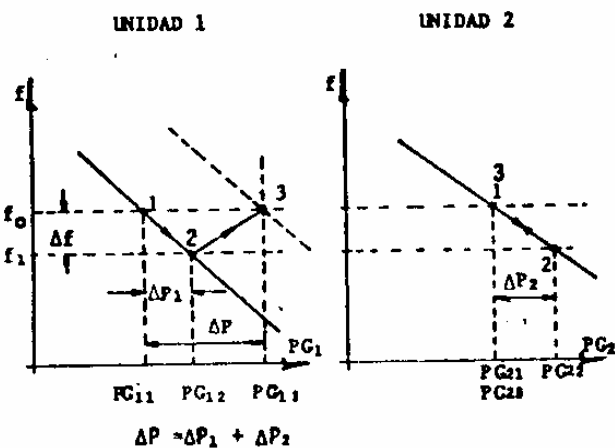
máquina va del punto (1) a (2), si no se toma acción de control adicional, el punto estable de operación será (2).

Para retornar la frecuencia al valor original f_0 , se requiere de la acción del control suplementario, la cual puede efectuarse manual o automáticamente. El efecto que se consigue con el control secundario es desplazar la característica de regulación en forma paralela, como lo indica la figura, estabilizándose el proceso en el punto (3), con lo cual el generador opera a frecuencia nominal f_0 y ha tomado el incremento de carga ΔP .

El proceso físico de ir del punto (2) al punto (3) es un proceso dinámico de control primario y secundario, ya que cuando se da una señal de control secundario, se abren más las válvulas de admisión, incrementando la potencia de salida del generador y por ende produciendo un desbalance generación-carga, actúa nuevamente la regulación primaria para volver a la potencia inicial pero a energía cinética mayor y así sucesivamente, esto se ilustra en la fig. siguiente:



Consideremos ahora que tenemos dos unidades alimentando al sistema, con características de regulación como las que se indica en la fig. siguiente, las condiciones iniciales de las dos unidades están definidas por los puntos (1).



Supongamos un incremento de carga ΔP y que por razones de que la unidad 2 esté cerca de su límite máximo o por alguna otra razón de tipo operativo o económico, es deseable que únicamente la unidad 1 tome todo el incremento de carga ΔP .

Como ya se ha establecido, al aplicar la carga ΔP , las dos máquinas toman carga ΔP_1 y ΔP_2 en virtud de la respuesta primaria y en función de sus características de regulación, resultado de lo cual las máquinas estabilizan su operación en el punto (2) a una frecuencia reducida f_1 , y trabajarían en ese punto si no se ejerciera control secundario.

Como el trabajar a frecuencia reducida no es una condición deseada de operación, es necesario realizar la acción secundaria para redistribuir la carga entre los dos generadores y recuperar la frecuencia a f_0 . Si se ejerce acción secundaria únicamente en la unidad 1, esta desplazará en forma paralela su característica y en virtud de la operación a igual frecuencia, la máquina 2 irá reduciendo su carga regresando por su característica original debido a su respuesta primaria y que para esta máquina existe una disminución de carga por cada paso de regulación secundaria de la máquina 1, hasta que el punto final de operación a frecuencia f_0 es el punto (3). La máquina 1 toma todo el incremento de carga ΔP en tanto que la 2 regresa a su punto inicial de operación.

Si era necesaria otra distribución debido a despacho económico por ejemplo, se puede tomar la carga deseada al generador 1 y al generador 2 ejerciendo acción secundaria en los dos, esta distribución depende de la cantidad de pulsos de regulación secundaria que se dé a cada máquina.

Lo explicado constituye la parte fundamental del control potencia-frecuencia en sistemas eléctricos de potencia, por un lado la regulación primaria que permite que todas las máquinas respondan de acuerdo con sus características de regulación y por otra parte que mediante el control secundario es posible recuperar la frecuencia al valor nominal y lo más importante, que mediante este control se puede distribuir la carga entre los generadores a valores deseados.

La regulación secundaria para control de la frecuencia y para la distribución de carga entre generadores constituye una función operativa a nivel de sistema de potencia ya que se requiere una coordinación adecuada para que el sistema opere en condiciones deseadas, en tanto que la regulación primaria es una respuesta natural y descentralizada. En la actualidad, la regulación secundaria está coordinada desde el centro de control del sistema desde donde se envían señales a los reguladores de velocidad para corregir la frecuencia al valor programado y luego la distribución más conveniente de carga entre generadores mediante despacho económico. Esta función se denomina también control automático de generación (AGC) y puede observarse que se encuentra muy ligada con el despacho económico.

En sistemas de potencia pequeños y en los que no se dispone de un centro de control moderno, es práctica común delegar el control de la frecuencia a un generador, en tanto que la distribución económica se la hace en forma manual cuando de tiempo en tiempo el operador del centro de control da instrucciones a los operadores de las centrales para que se sitúen con determinada carga. El generador que controla la frecuencia tiene el control automático para recuperar la frecuencia al valor nominal, actuando cada vez sobre su control secundario cada vez que se produce la desviación de frecuencia por efecto de la desviación de carga y por tanto este generador absorbe todas las variaciones de carga y el aporte de los demás ocurre únicamente con su regulación primaria, razón por la cual en ciertos intervalos de tiempo es necesario redistribuir la carga entre los generadores actuando de manera manual en su control secundario para establecerse en límites de carga deseados.

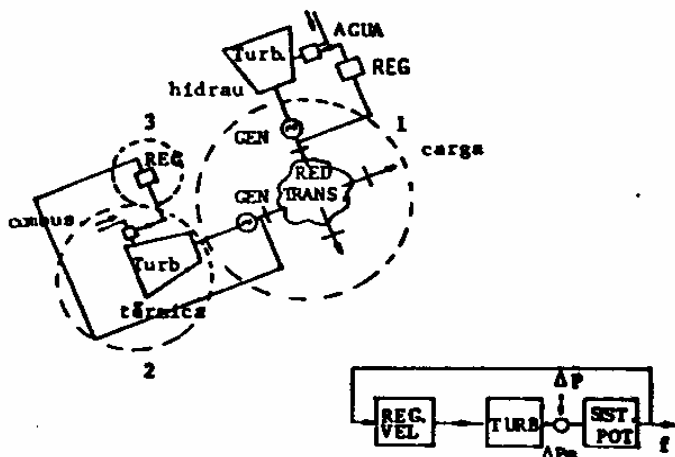
5. ANALISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DEL CONTROL p-f EN UN SISTEMA DE POTENCIA

En las secciones anteriores se ha analizado la respuesta de estado estable del proceso de control potencia-frecuencia, las ecuaciones que lo gobiernan, etc., habiéndose dado especial énfasis a la parte funcional del control p-f.

Aquí se presentará una breve descripción de la respuesta total de regulación con todos los componentes asociados en el proceso (generadores, turbinas, reguladores, carga) ante la ocurrencia de un cambio de carga pequeño, es decir para pequeñas oscilaciones.

Todos los elementos; unidades de generación, sistemas motrices, etc., para propósitos del análisis de control p-f, son adecuadamente representados por ecuaciones diferenciales lineales, las cuales son válidas para pequeñas oscilaciones en operación normal.

Hemos establecido que en el control p-f intervienen los elementos indicados en la fig. siguiente:



Los generadores pueden ser movidos por turbinas térmicas o por hidráulicas, la parte "eléctrica" o sea generación y carga se la modela como un todo y se denomina modelo del sistema de potencia (zona 1), la zona (2) constituye el sistema motriz y la (3) el sistema de regulación. Después se combinan los modelos de cada uno de los componentes, pudiendo obtenerse el modelo general para el análisis del control p-f.

5.1 Modelación de los sistemas asociados al control p-f

5.1.1 Modelo del sistema de potencia.- Al producirse un cambio de carga en el sistema, existe una potencia neta acelerante aplicada a los generadores, los cuales responden de acuerdo a la conocida relación:

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = \Delta P_a \quad (14)$$

Donde M es el momento de inercia equivalente de los generadores, que en función de la constante de inercia H equivalente en p.u (velocidad $d\delta/dt$ en p.u.) es

$$M = 2 H e_q \text{ p.u.} \quad (15)$$

y que a su vez:

$$H e_q = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \frac{S_i}{S_B} \quad (16)$$

siendo H_i la constante de inercia de cada generador expresado en sus propias bases S_i (MVA), S_B la base del sistema.

D para oscilaciones pequeñas, es únicamente el coeficiente de amortiguamiento de la carga.

Ahora, si el sistema de potencia opera en un punto inicial δ_0 y aparece una perturbación pequeña dada por ΔP_a , el sistema adquirirá un nuevo estado $\delta = \delta_0 + \Delta \delta$, entonces para cambios pequeños (14) puede expresarse como:

$$M \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + D \frac{d \Delta \delta}{dt} = \Delta P_a$$

$$\Delta P_a = P_m - P_e = (P_{m0} + \Delta P_m) - (P_{e0} + \Delta P_e)$$

$$\therefore \Delta P_a = \Delta P_m - \Delta P_e$$

ΔP_e es el incremento de carga ΔP que se aplica al sistema

ΔP_m es el incremento de potencia mecánica al eje del generador.

$$\text{Por lo tanto: } M \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + D \frac{d \Delta \delta}{dt} = \Delta P_m - \Delta P$$

$$M \frac{d}{dt} \left(\frac{d \Delta \delta}{dt} \right) + D \left(\frac{d \Delta \delta}{dt} \right) = \Delta P_m - \Delta P$$

$$\left(M \frac{d}{dt} + D \right) \frac{d \Delta \delta}{dt} = \Delta P_m - \Delta P$$

$$(M p + D) p \Delta \delta = \Delta P_m - \Delta P \quad p = \frac{d}{dt}$$

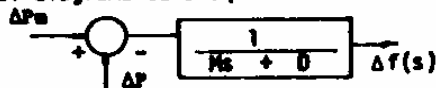
siendo $p \Delta \delta = \Delta \omega$ la desviación de velocidad del valor inicial ω_0 que en p.u es igual a Δf p.u., por tanto; si todas las cantidades anteriores están en p.u. entonces:

$$(M p + D) \Delta f(t) = \Delta P_m(t) - \Delta P(t)$$

En dominio de frecuencia:

$$\Delta f(s) = \frac{\Delta P_m - \Delta P}{M s + D} \quad (17)$$

Siendo el diagrama de bloques del sistema de potencia:



si al sistema de potencia se le aplica una carga ΔP y no se produce un incremento de potencia mecánica, entonces:

$$(*) \Delta f(s) = -\frac{\Delta P(s)}{M s + D} \quad (18)$$

(*) el signo menos significa que un aumento de carga produce disminución de frecuencia.

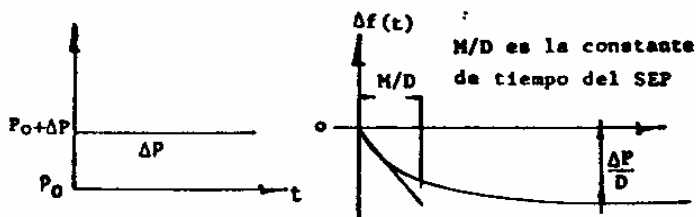
Si ΔP es una función paso, entonces la respuesta en dominio de tiempo es:

$$\Delta f(t) = \frac{\Delta P}{D} \left(e^{-\frac{D}{M} t} - 1 \right) \quad (19)$$

la respuesta de estado estable es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f = -\frac{\Delta P}{D}$$

lo que gráficamente es:



si no hubiera amortiguamiento de la carga y sin incremento de potencia mecánica, la frecuencia del sistema decrecería indefinidamente, la velocidad inicial de variación de frecuencia es $-\Delta P/M$.

5.1.2 Modelación del Sistema Motriz

En la sección anterior se ha analizado el comportamiento del sistema de potencia en respuesta a cambios de carga, sin tomar en cuenta el efecto de la variación de la potencia mecánica proveniente de la turbina, en esta sección se analiza este efecto que básicamente ocurre por cambios en la posición de las válvulas de entrada a la turbina, la que a su vez ocasionada por la acción del sistema de regulación de velocidad. La respuesta ΔP_m depende del tipo de turbina, térmica o hidráulica, ya que tiene funciones de transferencia diferentes.

- Turbinas térmicas (vapor). - La potencia desarrollada por la turbina es proporcional al flujo de vapor.

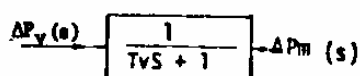
$$P_m = k \cdot \dot{m} (h_i - h_o) \quad (19)$$

donde P_m es la potencia de la turbina, h_i y h_o son las entalpías del vapor de entrada y salida, las cuales para pequeños cambios permanecen constantes, \dot{m} es el flujo de vapor. Por tanto la potencia mecánica es proporcional a \dot{m} . Relacionando la dinámica asociada a la turbina se puede establecer que, la relación entre un cambio en la posición de las válvulas de entrada ΔP_v que produce un cambio en la potencia mecánica de la turbina ΔP_m , está dada por:

$$(T_v S + 1) \Delta P_m(s) = \Delta P_v(s) \quad (20)$$

$$\Delta P_m(s) = \frac{\Delta P_v(s)}{T_v S + 1}$$

El diagrama de bloques de la turbina a vapor es:

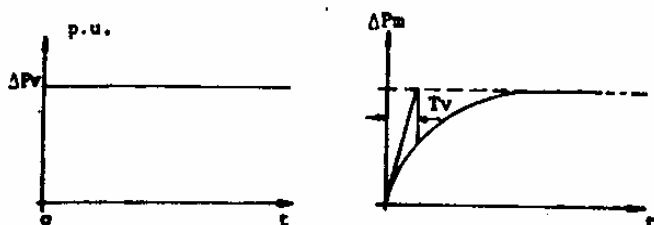


Esta es la representación de una turbina a vapor sin ciclo de recalentamiento, la respuesta del flujo de vapor a un cambio de posición de válvulas es muy rápida ya que la constante de tiempo de la turbina a vapor $T_v = 0.2$ a 0.3 seg.

La función de transferencia de turbinas a vapor con ciclo de recalentamiento es más elaborada, pero para efectos de este análisis consideraremos únicamente la función de transferencia dada.

La respuesta en dominio de tiempo, para una función paso en la posición de las válvulas de entrada es:

$$\Delta P_m(t) = \Delta P_v (1 - e^{-t/T_v}) \quad (21)$$



- Turbinas hidráulicas. - la inercia de la columna de agua que fluye por la tubería de presión da lugar a un fenómeno interesante en turbinas hidráulicas. Al abrirse las válvulas o compuertas de entrada a la turbina, el efecto inicial es una variación negativa de su potencia, pues la presión es utilizada para acelerar la columna de agua. El cambio inicial es opuesto al cambio final y es de el doble de magnitud que este último.

La función de transferencia aproximadamente es:

$$\Delta P_m(s) = \frac{(1 - T_w s)}{(1 + \frac{T_w}{2} s)} \Delta P_v(s) \quad (22)$$

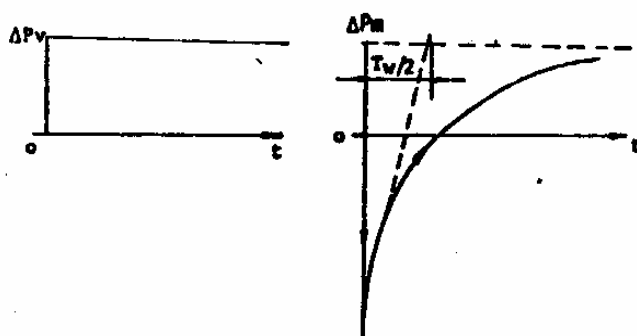
T_w , tiempo de arranque del agua en la tubería (0.5 a 4 sec)

$$T_w = uL/gH \quad (23)$$

u velocidad del agua, L longitud de la tubería, g aceleración de la gravedad, H altura de la tubería

La respuesta en dominio de tiempo es:

$$\Delta P_m(t) = (1 - 3e^{-\frac{t}{T_w}}) \Delta P_v \quad (24)$$



T_w depende de la carga con que se halle la turbina, en relación directa, así si la máquina está con el 50% de la carga, T_w es aproximadamente la mitad de T_w a plena carga.

Existen además otros fenómenos dinámicos que pueden ocurrir en las turbinas hidráulicas, uno de ellos se debe a la compresibilidad del agua y la elasticidad de la tubería de presión, que dan origen a ondas viajeras conocidas como golpe de ariete, generalmente de alta frecuencia y no son tomadas en cuenta. Adicionalmente cuando existe la chimenea de equilibrio ocurren oscilaciones entre la chimenea y el reservorio, estas oscilaciones son lentas y están en el orden de minutos/ciclo y pueden, de manera general, ser despreciadas en el análisis del control $p-f$.

5.1.3 Modelación del Regulador de Velocidad

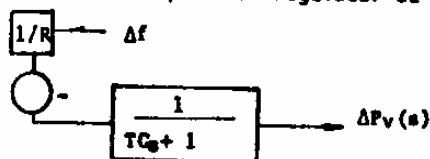
Como se había indicado anteriormente, el regulador de velocidad es el mecanismo de control que, a partir de las variaciones de frecuencia $\Delta f(t)$, da las señales de control para cambiar la posición de las válvulas de las turbinas ΔP_v que a su vez ocasionan un ΔP_m que hace que finalmente el generador entregue una potencia ΔP igual al cambio de carga, en estado estable.

Esta acción del regulador, acción primaria, relaciona la desviación de frecuencia $\Delta f(t)$ con el cambio de posición de las válvulas, mediante la siguiente función de transferencia:

$$\Delta P_v(s) = \frac{1}{T_G s + 1} \cdot \frac{\Delta f(s)}{R} \quad (25)$$

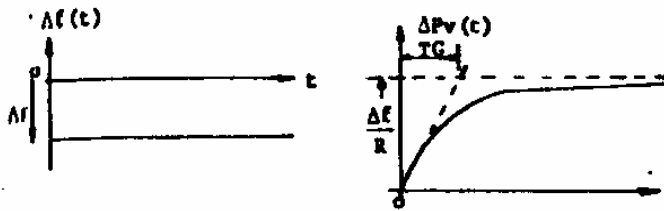
Donde T_G es la constante de tiempo del regulador ($= 0.25$ seg), R el estatismo.

El diagrama de bloques del regulador de velocidad es:



La respuesta en dominio de tiempo es:

$$\Delta P_v(t) = \frac{\Delta f}{R} (e^{-t/T_G} - 1) \quad (26)$$



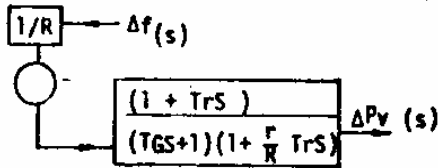
El regulador antes descrito es un regulador típico para máquinas térmicas; para las turbinas hidráulicas, debido a sus características muy particulares de respuesta; se requiere reguladores con una compensación especial de estatismo transitorio, esto es que para variaciones rápidas de frecuencia el regulador presenta un estatismo alto, en tanto que para variaciones lentas y en estado estable el regulador tiene estatismo bajo.

La función de transferencia de este regulador es:

$$\Delta P_V(s) = - \left(\frac{1}{TGS+1} \right) \left(\frac{1 + TrS}{1 + \frac{r}{R} TrS} \right) \frac{\Delta f(s)}{R} \quad (26)$$

donde: R, estatismo permanente (0.03 a 0.15 pu)
 r, estatismo transitorio (0.3 a 1.2 p.u.)
 Tr, constante de tiempo asociada a la compensación transitoria (0.5 a 64 seg)
 TG, constante de tiempo del regulador (0.3 a 0.6 seg).

El diagrama de bloques de este regulador es:



La respuesta inicial para un cambio Δf (función paso Δf(s) = Δf/s) la respuesta en dominio de tiempo es:

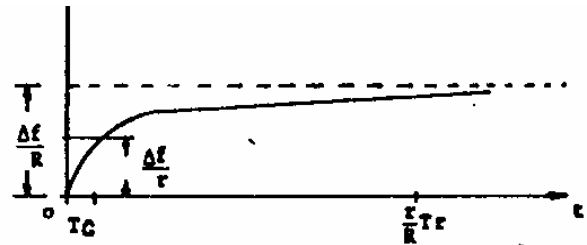
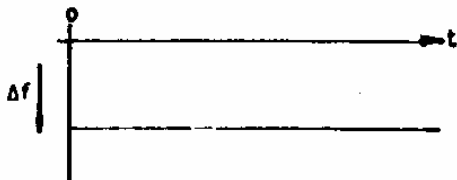
$$\Delta P_V(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta P_V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{(1+TrS)s}{(TGS+1)(1 + \frac{r}{R} Trs)} \frac{\Delta f}{sR} = - \frac{1}{R} \Delta f$$

$$\frac{Tr \cdot \Delta f}{R(\frac{r}{R} Tr)} = - \frac{1}{r} \Delta f$$

La respuesta en estado estable:

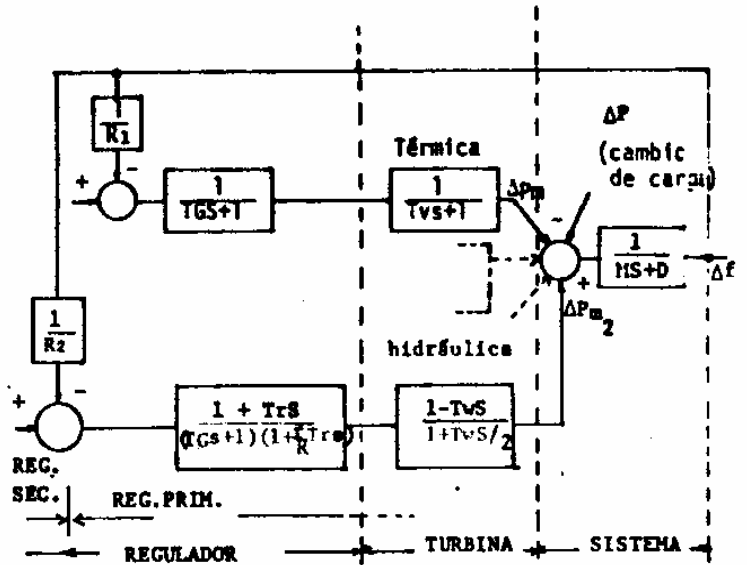
$$\Delta P_V(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta P_V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1+Trs)s}{(TGS+1)(1 + \frac{r}{R} Trs)} \frac{\Delta f}{sR} = - \frac{1}{R} \Delta f$$

donde puede observarse que inicialmente la máquina presenta un alto estatismo y por tanto haciendo más insensible al regulador (más pequeño ΔPv) y por tanto el efecto de la inercia de la columna de agua se minimiza, en tanto que en estado estable presenta menor estatismo.



5.2 Análisis de respuesta del control p-f en un sistema de potencia. Respuesta primaria

Una vez establecidos los modelos para los elementos componentes del sistema de potencia que intervienen en el control potencia-frecuencia, tenemos que el diagrama de bloques del sistema es:



Ahora examinemos el comportamiento transitorio del sistema cuando está sujeto a un cambio de carga ΔP tomando en cuenta el efecto del sistema de regulación de velocidad (control primario), de la fig. se tiene:

$$\Delta f(s) = - \Delta f(s) \left[\frac{1}{(TGS+1)(Tvs+1)R_1} + \frac{(1+Trs)(1-Tvs)}{(TGS+1)(1 + \frac{r}{R} Trs)(1+Tvs/2)R_2} \right]$$

$$+ \dots - \Delta P(s) \frac{1}{MS + D} \quad (27)$$

$$\Delta f(s) = (-\Delta f(s)[H(s)] - \Delta P(s)) G(s) \quad (28)$$

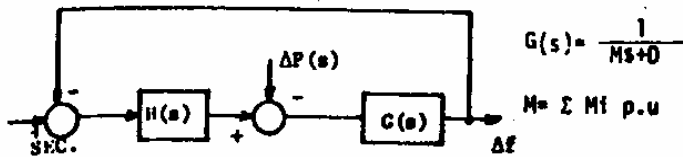
Siendo H(s) la función de transferencia total de los reguladores y turbinas del sistema de generación, G(s) la función de transferencia del sistema de potencia, ΔP(s) el cambio de carga que se produce en la red y Δf(s) la oscilación de la frecuencia del sistema.

H(s) puede también expresarse en base a la función de transferencia combinada regulador-turbina de cada generador, como:

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \frac{H_i(s)}{R_i} \quad (29)$$

En la que n es el número de generadores, Ri el estatismo de cada máquina, que en este caso se lo ha expresado simbólicamente.

En la ec (28) podemos establecer que el diagrama de bloques de todo el sistema se reduce a:

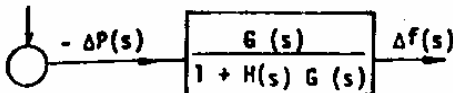


A su vez la ec (28) puede expresarse como:

$$\Delta f(s) [1 + H(s) G(s)] = -\Delta P(s) G(s)$$

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)} \quad (30) \quad (*)$$

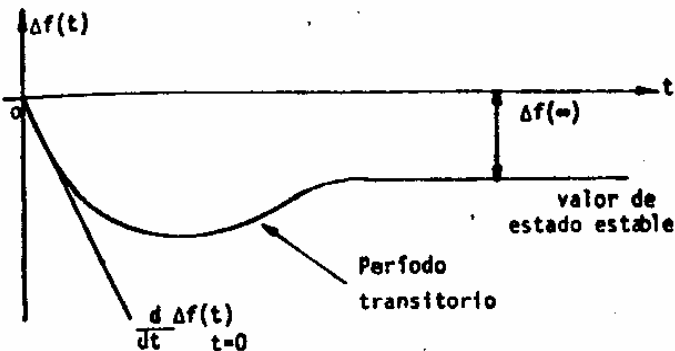
con lo que el diagrama de bloques total es:



resolviendo la ecuación diferencial para una función ΔP y por medio de la transformada inversa de Laplace se encuentra $\Delta f(t)$ para cualquier instante de tiempo, como es suficiente considerar que ΔP es una función paso $\Delta P(s) = \frac{\Delta P}{s}$, entonces se tiene que:

$$\Delta f(s) = -\frac{\Delta P}{s} \cdot \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$\Delta f(t)$ en dominio de tiempo tiene la forma:



para $t=0$

$$\Delta f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Delta f(s) = 0$$

para $t = \infty$, en estado estable:

$$\Delta f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta P \cdot \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} = -\Delta P \cdot \frac{1/D}{1 + \frac{1}{RT} \cdot \frac{1}{D}}$$

$$\text{o sea: } \Delta f(\infty) = -\Delta P \cdot \frac{1}{\frac{1}{RT} + D} = -\Delta P \cdot \frac{1}{\frac{1}{REQ} + D} \quad (31)$$

(*) el signo menos indica que un aumento de carga produce disminución de frecuencia.

esta última relación que es la ya conocida sobre la desviación final de la frecuencia, vemos que depende únicamente de las características de regulación de cada uno de los reguladores de velocidad de los generadores del sistema, del amortiguamiento de la carga y de la magnitud del incremento de carga. Durante el período transitorio intervienen todas las demás constantes del sistema matriz, regulación, generación, etc.

para $t=0+$, $\Delta f(s)$ prácticamente está dada por:

$$H(s) \rightarrow 0$$

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot G(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{1}{Ms + D} \quad (32)$$

Si ΔP es una función paso:

$$\Delta f(t) = \frac{\Delta P}{D} (e^{-\frac{D}{M}t} - 1) \quad \Delta f(0) = 0$$

la velocidad inicial de caída de la frecuencia es:

$$\frac{d}{dt} \Delta f(t) = \frac{\Delta P}{D} \left(-\frac{D}{M}\right) e^{-\frac{D}{M}t} = -\frac{\Delta P}{M} e^{-\frac{D}{M}t}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta f(0) = -\frac{\Delta P}{M} = -\frac{\Delta P}{2M} \quad (33)$$

llegándose a la conclusión muy importante que la variación de caída inicial de la frecuencia es directamente proporcional a la sobrecarga e inversamente proporcional a la inercia del sistema.

Una vez obtenida $\Delta f(t)$, se puede obtener el comportamiento de cada generador individual, así:

Para una máquina térmica:

$$-\Delta f(s) \left[\frac{1}{(T_G s + 1)(T_V s + 1)} \right] \frac{1}{RT} = \Delta P m_1(s)$$

resolviendo en dominio de tiempo esta expresión puede obtenerse $\Delta P m_1(t)$

para $t = \infty$ $s=0$

$$\Delta P G_1 = \Delta P m_1(\infty) = -\frac{\Delta f(\infty)}{R_1} = \frac{\Delta P}{R_1 \left(\frac{1}{REQ} + D \right)} \quad (34)$$

que es otra de las expresiones antes obtenidas para condiciones de estado estable.

Ahora, bajo el supuesto caso que la respuesta del sistema regulador -turbina, fuera instantánea, (constantes de tiempo=0), la función de transferencia de todo el sistema, es:

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$\text{donde: } H(s) = \sum \frac{1}{RT} = \frac{1}{REQ} \quad G(s) = \frac{1}{Ms + D}$$

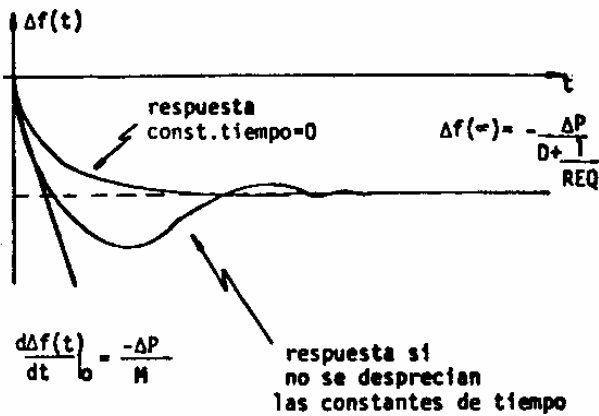
por tanto:

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{1}{\frac{1}{REQ} + H(s)} = -\Delta P(s) \cdot \frac{1}{Ms + D + \frac{1}{REQ}}$$

donde para una función paso:

$$\Delta f(t) = \frac{\Delta P}{\left(D + \frac{1}{REQ} \right)} \left(e^{-\frac{D + \frac{1}{REQ}}{M} t} - 1 \right) \quad (35)$$

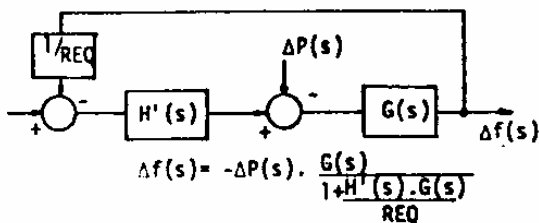
el efecto de esta simplificación puede verse en la fig. siguiente:



Por último, observando la forma de $H(s)$ y el valor de respuesta final, esta puede expresarse como:

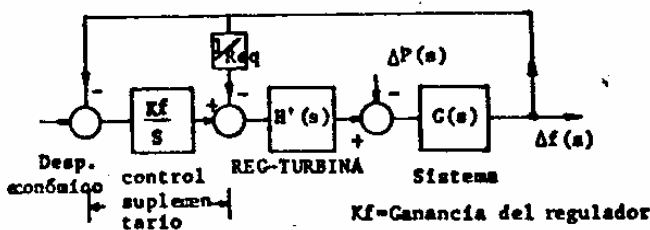
$$H(s) = \frac{1}{REQ} \cdot H'(s) = \sum \frac{H_i(s)}{R_i}$$

donde $H(s)$ es la función de transferencia regulador-turbina que involucra las constantes de tiempo, por tanto el diagrama de bloques también puede representarse como:



5.3 Análisis de respuesta con control secundario

El control suplementario o secundario, que como ya se habfa establecido, retorna la frecuencia al valor nominal, y luego mediante este control es posible redistribuir la carga entre generadores, no es sino una señal de integración que se añade al diagrama de bloques del control primario antes analizado, así:



de esta figura se tiene:

$$\Delta f(s) = [-\Delta P(s) \left(\frac{Kf}{s} + \frac{1}{REQ} \right) H'(s) - \Delta P(s)] G(s)$$

$$\Delta f(s) \left(1 + \frac{H'(s) \cdot G(s)}{REQ} + \frac{Kf H'(s) G(s)}{s} \right) = -\Delta P(s) G(s)$$

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + \frac{H'(s) G(s)}{REQ} + \frac{Kf H'(s) G(s)}{s}} \quad (36)$$

Para fines de análisis consideremos que las constantes de tiempo son despreciables, o sea $H'(s)=1.0$, por tanto:

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{REQ} + \frac{Kf G(s)}{s}}$$

$$G(s) = \frac{1}{Ms + D} = \frac{1/D}{\frac{M}{D}s + 1} = \frac{Kp}{Tp s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Kp = \frac{1}{D} \\ R = REQ \end{array} \right. \quad Tp = \frac{M}{D} \quad (37)$$

$$\Delta f(s) = -\Delta P(s) \cdot \frac{Kp}{Tp} \cdot \frac{s}{s^2 + s \left[\left(1 + \frac{Kp}{R} \right) / Tp \right] + \frac{Kf Kp}{Tp}}$$

Si ΔP es una función paso, entonces:

$$\Delta f(s) = -\Delta P \cdot \frac{Kp}{Tp} \cdot \frac{1}{s^2 + s \left[\left(1 + \frac{Kp}{R} \right) / Tp \right] + \frac{Kf Kp}{Tp}}$$

la respuesta en dominio de tiempo depende de la naturaleza de los polos del denominador, los cuales a su vez dependen de la magnitud de la ganancia Kf .

$$s^2 + s \left[\left(1 + \frac{Kp}{R} \right) / Tp \right] + \frac{Kf Kp}{Tp} = \left(s + \frac{1 + Kp/R}{2Tp} \right)^2 + \frac{Kf Kp}{Tp} - \left(\frac{1 + Kp/R}{2Tp} \right)^2$$

Si la suma de los dos últimos términos es positiva, o sea:

$$\frac{Kf Kp}{Tp} > \left(\frac{1 + Kp/R}{2Tp} \right)^2$$

$$Kf > \frac{1}{4Tp Kp} \left(1 + \frac{Kp}{R} \right)^2 = Kfc \quad (38)$$

significa que el denominador tiene la forma $(s + \alpha)^2 + \omega^2$, y $\omega^2 > 0$ con lo que $\Delta f(s)$ tiene un par de polos complejos y conjugados en el plano s , la respuesta para $\Delta f(t)$ es del tipo

$$\Delta f(t) = g(e^{-\alpha t} \sin \omega t, e^{-\alpha t} \cos \omega t) \quad (39)$$

la expresión (38) se la conoce como el valor de ganancia crítica, y en este caso $\Delta f(t) \rightarrow 0$ de manera oscilatoria.

Si al contrario, $Kf < Kfc$, significa que el denominador tiene la forma $(s + \beta_1)(s + \beta_2)$, siendo β_1 y β_2 positivos y reales, con lo que $\Delta f(s)$ tiene un par de polos reales y negativos en el plano s , la respuesta para $\Delta f(t)$ es del tipo:

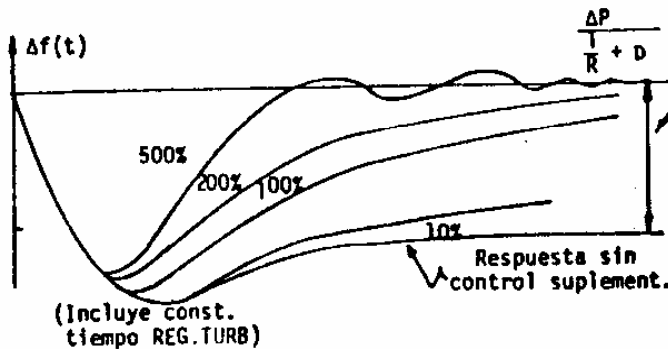
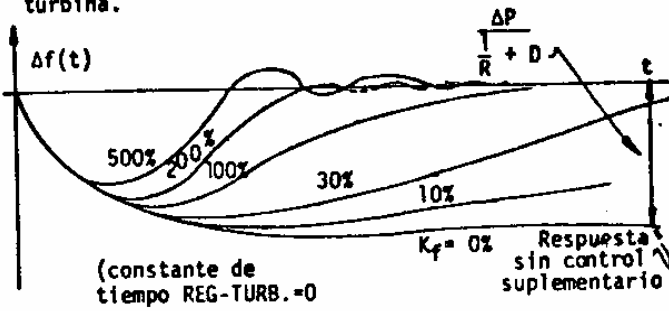
$$\Delta f(t) = g(e^{-\beta_1 t}, e^{-\beta_2 t}) \quad (40)$$

la cual es una respuesta no oscilatoria y $\Delta f(t) \rightarrow 0$

Vemos que en cualquier caso, $\Delta f(t)$ tiende a cero por acción de la regulación secundaria, por lo tanto el control es siempre estable.

Las raíces del polinomio denominador o ecuación característica son los valores característicos o "eigenvalues" del sistema de control.

Para fines comparativos al valor de K_f que iguala a K_{fc} o valor crítico se lo designa como 100%, las figuras siguientes indican la respuesta de frecuencia para diferentes valores de K_f , se indica también la acción de las constantes de tiempo del regulador y turbina.

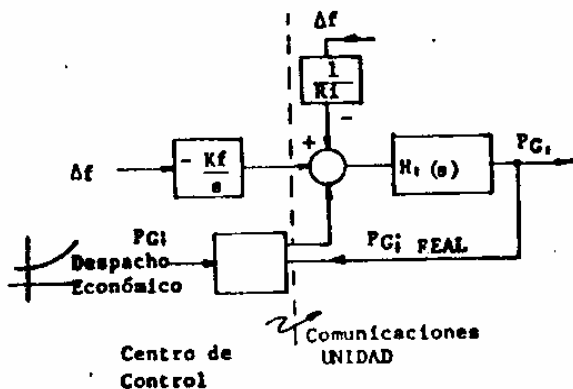


Si se ajusta al control secundario con ganancias subcríticas ($K_f < 100\%$), se obtiene una respuesta de frecuencia no oscilatoria la corrección de frecuencia toma más tiempo y el error de tiempo comparado con un reloj patrón es mayor, ya que

$$\Delta t = \int_0^{\infty} \Delta f(t) dt \quad (\text{ciclos}) \quad (41)$$

Para aumentar la velocidad de respuesta se debe aumentar K_f y si esta es K_{fc} , la respuesta es oscilatoria. En la práctica se utiliza ganancias subcríticas.

Disponiéndose de un centro de control se efectúa la coordinación de control de frecuencia con despacho económico, con el objeto de que las unidades trabajen con niveles de carga adecuados para el sistema.



6. Control p-f en áreas múltiples.- Análisis estado estable

Cuando dos o más sistemas se interconectan, para obtener inherentes beneficios de la interconexión como son: operación más económica, reducción de costos de capital, aumento en el nivel de seguridad de operación, etc; sin embargo, las interconexiones introducen un problema de control más complejo.

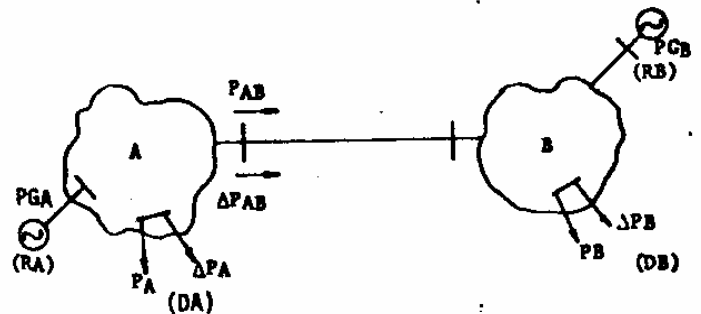
En un sistema interconectado, la frecuencia del sistema no es el único índice de control para el balance de potencia activa, sino que por razones contractuales y de seguridad es necesario controlar el flujo de potencia por las líneas de interconexión al valor programado.

Los cambios de carga pueden sucederse en cualquier sistema o "área", todo el sistema de potencia reacciona con regulación primaria para absorber dicha variación, la frecuencia se estabiliza en un valor superior a aquel que se obtendría si el área en la que se produjo el cambio, estuviera aislada.

Después de este proceso, obviamente cambian los flujos por las líneas de interconexión, para volver a su valor inicial o programado, cada una de las áreas debe ejercer control suplementario de tal forma de absorber sus propias variaciones de carga.

La única forma de conocer cual es la variación propia de cada área es mediante el conocimiento de la variación del flujo de potencia por las líneas de interconexión, por efecto de la variación de la carga en una o más áreas.

Para visualizar este problema tomemos dos áreas interconectadas por una línea de transmisión.



- P_{GA}, P_{GB} es la generación equivalente de las áreas A y B
- P_A, P_B cargas de las áreas A y B
- D_A, D_B amortiguamiento equivalente de la carga de las áreas A y B
- R_A, R_B regulación equivalente del sistema de generación de las áreas A y B
- P_{0AB} potencia por la línea de interconexión (valor programado)

Si se producen incrementos de carga ΔP_A y ΔP_B en cada área, la nueva frecuencia de estado estable por efecto de la regulación primaria se reducirá en un valor Δf dado por:

$$\Delta f = \frac{\Delta P}{\frac{1}{R_{EQ}} + D_{EQ}} = \frac{\Delta P_A + \Delta P_B}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + D_A + D_B} \quad (42)$$

la carga que tomarán los generadores del área A es:

$$\Delta P_{GA} = \frac{\Delta f}{R_A} = \frac{\Delta P_A + \Delta P_B}{R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + D_A + D_B \right)} \quad (43)$$

y los del área B:

$$\Delta P_{GB} = \frac{\Delta f}{R_B} = \frac{\Delta P_A + \Delta P_B}{R_B \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + D_A + D_B \right)}$$

Ahora, el cambio que se produce en el flujo de potencia por la línea de interconexión estará dado por:

$$\Delta P_{AB} = \Delta P_{GA} - (\Delta P_A - D_A \Delta f) \quad (44)$$

donde $\Delta P_A - D_A \Delta f$ es el cambio efectivo de carga en el área A.

Reemplazando (42) y (43) en (44) se obtiene que:

$$\Delta P_{AB} = \frac{-\Delta P_A \left(\frac{1}{R_A} + D_B \right) + \Delta P_B \left(\frac{1}{R_A} + D_A \right)}{\left(\frac{1}{R_A} + D_A \right) + \left(\frac{1}{R_B} + D_B \right)} \quad (45)$$

En el caso de que las dos áreas sean idénticas en características de regulación: $R_A = R_B = R$ $D_A = D_B = D$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f &= \frac{\Delta P_A + \Delta P_B}{2 \left(\frac{1}{R} + D \right)} \\ \Delta P_{GA} &= \frac{\Delta P_A + \Delta P_B}{2R \left(\frac{1}{R} + D \right)} \\ \Delta P_{AB} &= \frac{-\Delta P_A + \Delta P_B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Mediante control secundario, se requiere no sólo efectuar el control para que Δf sea cero, sino que también se debe actuar en la generación de cada área de tal forma que ΔP_{AB} sea también cero, y volver al valor programado. En otras palabras se debe efectuar control secundario de tal forma que los generadores tanto del área A como los del B absorban sus propios cambios efectivos de carga, es decir para el caso del área A, los generadores deben efectuar control para tomar una carga dada por:

$$\Delta P_A - D_A \Delta f = \Delta P_{GA} - \Delta P_{AB} = ECA \text{ (p.u o MW)}$$

esta expresión se denomina "error de control de área". Para objeto de implementación automático de control la variación del flujo de potencia por la interconexión viene dado por:

$$\Delta P_{AB} = T_{AB} (\Delta \delta_A - \Delta \delta_B) \quad (47)$$

donde T_{AB} es el coeficiente de sincronización de la línea de interconexión, $\delta_A - \delta_B$, la diferencia angular de sus extremos; de esta forma el error de control de área viene dado por:

$$ECA = \Delta P_{GA} - T_{AB} (\Delta \delta_A - \Delta \delta_B)$$

donde $\Delta P_{GA} = \frac{1}{R_A} \Delta f$. Si existen varias líneas de interconexión, entonces:

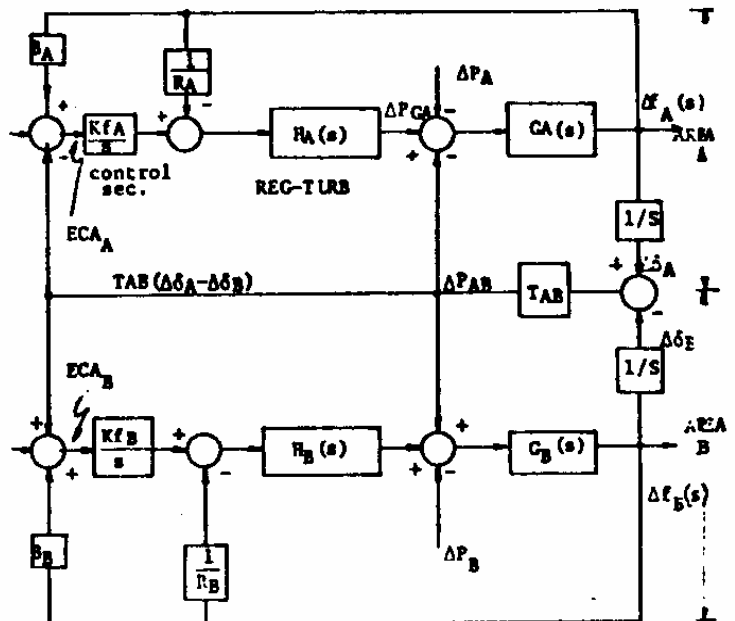
$$ECA = \frac{1}{R_A} \Delta f - \sum_j T_{Aj} (\Delta \delta_A - \Delta \delta_j) \quad (48)$$

la expresión $\frac{1}{R_A}$ definida antes como energía regulante se la denomina también factor B_A de polarización (BIAS), entonces:

$$ECA_A = B_A \Delta f - \sum_j T_{Aj} (\Delta \delta_A - \Delta \delta_j) \quad (49)$$

¡ Las interconexiones que tenga el área A con áreas B, C, D, ... etc.

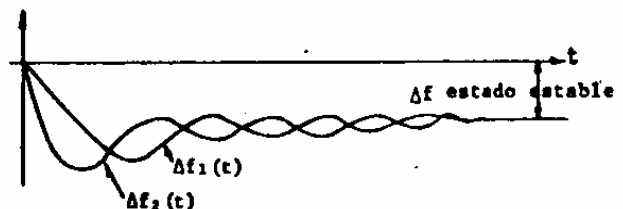
El diagrama de bloques para el control p-f para dos áreas es (para análisis transitorio):



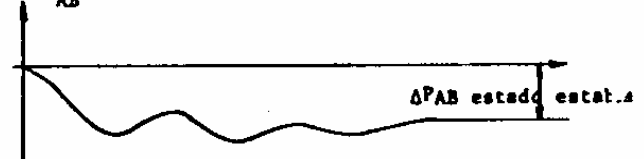
Para el caso de área simple, el $ECA = B \Delta f$ (MW)

Respuestas típicas tienen la forma (sin control suplementario):

$\Delta f(t)$



$\Delta P_{AB}(t)$



Con control secundario tanto Δf como ΔP_{AB} tienden a cero, de manera similar vista para el caso de área simple.

Por último; el coeficiente de sincronización de la línea es:

$$P_{AB} = \frac{V_A V_B}{X_{AB}} \sin(\delta_A - \delta_B) = \frac{V_A V_B}{X_{AB}} \sin \delta_B$$

al producirse un cambio de potencia activa normal, se afecta esencialmente los ángulos δ_A y δ_B en pequeñas magnitudes, lo que produce un cambio en el flujo de potencia activa de la línea de interconexión, dado por:

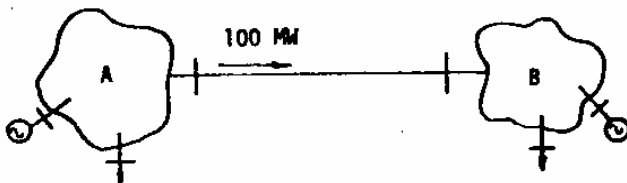
$$\Delta P_{AB} = \frac{\partial P_{AB}}{\partial \delta_{AB}} \Delta \delta_{AB} = \frac{V_A V_B}{X_{AB}} \cos \delta_{AB} \cdot \Delta \delta_{AB}$$

donde: $T_{AB} = \frac{V_A V_B}{X_{AB}} \cos(\delta_A - \delta_B)_0$ (50)

siendo $(\delta_A - \delta_B)_0$ los valores nominales para la potencia programada P_{AB0} .

$$\therefore \Delta P_{AB} = T_{AB} \cdot \Delta \delta_{AB} = T_{AB}(\Delta \delta_A - \Delta \delta_B)$$

Ejemplo 4. El diagrama siguiente, es un diagrama esquemático de dos áreas interconectadas con una línea. Las condiciones iniciales de operación son:



	AREA A	AREA B
Capacidad de generación (operando)	1200 MW	10000 MW
Generación efectiva	1000 MW	9400 MW
Carga	900 MW	9500 MW
Flujo de A-B	100 MW	
Frecuencia f_0	60 HZ	60 HZ
Regulación equivalente R	12%	20%
Coefficiente de amortiguamiento D	2.0 p.u	1.5 p.u

Si se incrementa una carga de 60 MW en el área A.

Calcular:

- La energía regulante efectiva o combinada en las condiciones iniciales.
- La frecuencia final sin regulación suplementaria.
- La nueva generación y carga en cada área
- El nuevo flujo de potencia por la línea de interconexión.
- El cambio de generación que debe efectuarse en cada área (mediante control suplementario) para volver el flujo de potencia por la interconexión al valor programado.

$$1. R_A = 0.12 \text{ p.u} \times \frac{60 \text{ Hz}}{1200 \text{ MW}} = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{Hz}}{\text{MW}}$$

$$R_B = 0.2 \text{ p.u} \times \frac{60 \text{ Hz}}{10000 \text{ MW}} = 1.2 \times 10^{-3} \frac{\text{Hz}}{\text{MW}}$$

$$\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} = \frac{10^3}{6} + \frac{10^3}{1.2} = 1000 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$$

$$D_A = 2.0 \text{ p.u} = \frac{2\% (900)}{1\% (60)} = 30 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$$

$$D_B = 1.5 \text{ p.u} = 1.5 \frac{(9500)}{60} = 237.5 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$$

$$D_{eq} = D_A + D_B = 267.5 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$$

la regulación combinada equivalente es:

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{R_{EQ}} + D_{EQ}} = \frac{1}{1000 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} + 267.5 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}} = 7.89 \times 10^{-3} \frac{\text{Hz}}{\text{MW}}$$

$$2. \Delta f = R' \cdot (\Delta P_A + \Delta P_B) \quad \begin{matrix} \Delta P_A = 60 \text{ MW} \\ \Delta P_B = 0 \end{matrix}$$

$$\Delta f = 7.89 \times 10^{-3} \frac{\text{Hz}}{\text{MW}} \cdot 60 \text{ MW} = 4.73 \times 10^{-2} \text{ Hz}$$

$$f = f_0 - \Delta f = 60 - 0.0473 = 59.9527 \text{ Hz}$$

$$3. \Delta P_{GA} = \frac{\Delta f}{R_A} = \frac{4.73 \times 10^{-2} \text{ Hz}}{6 \times 10^{-3} \text{ Hz/MW}} = 7.88 \text{ MW}$$

$$\Delta P_{GB} = \frac{\Delta f}{R_B} = \frac{4.73 \times 10^{-2} \text{ Hz}}{1.2 \times 10^{-3} \text{ Hz/MW}} = 39.42 \text{ MW}$$

El cambio efectivo de carga en cada área es:

$$\Delta P_A - D_A \Delta f = 60 \text{ MW} - 30 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \times 4.73 \times 10^{-2} \text{ Hz} = 58.58 \text{ MW}$$

$$\Delta P_B - D_B \Delta f = 0 - 237.5 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \times 4.73 \times 10^{-2} \text{ Hz} = -11.23 \text{ MW}$$

El cambio efectivo de carga en todo el SEP es:

$$(\Delta P_A - D_A \Delta f) + (\Delta P_B - D_B \Delta f) = 47.35 \text{ MW} = \Delta P_{GA} + \Delta P_{GB}$$

Por tanto, la nueva generación y carga en cada área es:

$$P_{GA} = P_{GA0} + \Delta P_{GA} = 1000 \text{ MW} + 7.88 \text{ MW} = 1007.88 \text{ MW}$$

$$P_A = P_{A0} + (\Delta P_A - D_A \Delta f) = 900 + 58.58 = 958.58 \text{ MW}$$

$$P_{GB} = P_{GB0} + \Delta P_{GB} = 9400 + 39.42 = 9439.42 \text{ MW}$$

$$P_B = P_{B0} + (\Delta P_B - D_B \Delta f) = 9500 - 11.23 = 9488.77 \text{ MW}$$

4. El nuevo flujo de potencia por la línea de interconexión será:

$$P_{GA} = P_A + P_{AB}$$

$$P_{AB} = P_{GA} - P_A = 1007.88 - 958.58 \text{ MW} = 49.3 \text{ MW}$$

$$\Delta P_{AB} = -50.7 \text{ MW}$$

5. El cambio de generación que debe efectuarse en cada área para volver al valor programado en la línea de interconexión es:

$$E_{CA} = \Delta P_A - D_A \Delta f = 58.58 \text{ MW}$$

$$E_{CB} = \Delta P_B - D_B \Delta f = -11.23 \text{ MW}$$

Con lo que la generación total de cada área debe ser:

$$P_{GA} = P_{GA0} + E_{CA} = 1058.58 \text{ MW}$$

$$P_{GB} = P_{GB0} + E_{CB} = 9388.77 \text{ MW}$$

el flujo por la línea es:

$$P_{AB} = P_{GA} - P_A = 1058.58 \text{ MW} - 958.58 \text{ MW} = 100 \text{ MW}$$

una vez que se corrija la frecuencia a 60 Hz entonces:

$$P_{GA} = 1060.0 \text{ MW}$$

$$P_{GB} = 9400.0 \text{ MW}$$

$$P_A = 960 \text{ MW}$$

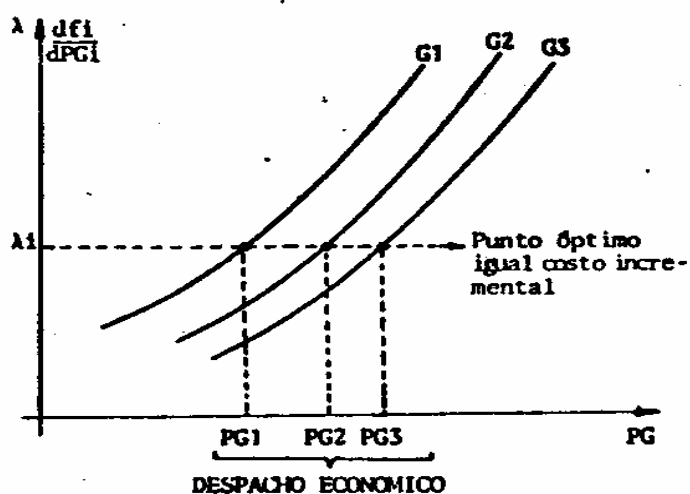
$$P_B = 9500 \text{ MW}$$

$$P_{AB} = 100 \text{ MW}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Control of Generation and Power Flow on Interconnected systems. Nathan Cohn. Edit. John Wiley & Sons.
2. Electric Power Systems. B.M. Weedy - Edit. John Wiley & Sons.
3. Economic Control of Interconnected Systems. L. Kirchmayer - Edit. John Wiley & Sons.
4. Electric Energy Systems Theory. O. Elgerd - Edit. MacGraw Hill.

4. CONTROL OPTIMO DE POTENCIA EN SISTEMAS ELECTRICOS



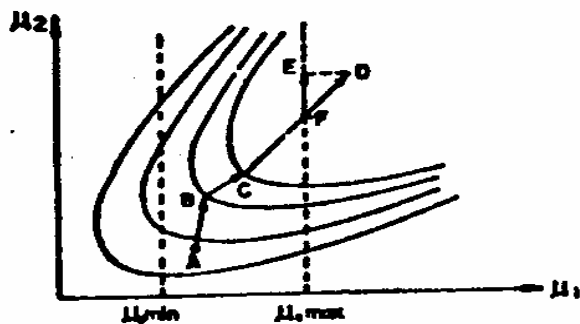
$$\frac{df_i}{dPG_i} + \lambda \frac{\partial PL}{\partial PG_i} = \lambda \quad ; \quad i = 1, 2, \dots$$

con la restricción:

$$\phi(P_i) = \sum PG_i - \sum PC_j - PL = 0$$

en donde:

$$PL = \sum_i \sum_j PG_i B_{ij} PG_j; \quad i, j = 1, 2, \dots$$



DESPACHO ECONOMICO DE POTENCIA ACTIVA

1. INTRODUCCION

Una de las funciones más importantes en la operación de sistemas de potencia lo constituye el control de generación, que tiene como objetivo el ir ajustando la generación de potencia activa a medida que va cambiando la demanda del sistema.

La demanda del sistema es siempre dinámica y por tanto los ajustes de generación deben ser continuos. En tiempos cortos (seg-min) la demanda tiene cambios rápidos de pequeña magnitud; en tiempos más largos (min-hora) la demanda tiene cambios lentos de gran magnitud. Los cambios rápidos producen desviaciones de frecuencia y las unidades de generación dependiendo de su tipo y velocidad de respuesta, absorben estos cambios y controlan así la frecuencia del sistema; si continúan operando de esta forma los generadores, ocurre que en tiempos más largos, se habrán sucedido una serie de cambios rápidos en la demanda que en conjunto producen un cambio grande en demanda y en estas circunstancias varios generadores pueden haber llegado a su carga máxima, otros pueden tener cargas muy bajas. Como ésta es una situación indeseable ya que aún se pueden sobrecargar y disparar generadores produciendo la salida en cascada del sistema, es necesario que en ciertos intervalos (10-15 min), la demanda del sistema se redistribuya en todos los generadores de tal forma de evitar el problema mencionado. El problema ahora es con qué criterio se distribuye la demanda entre todos los generadores que están operando, el criterio consiste en distribuir la potencia de tal forma que todas las unidades trabajen dentro de sus límites operativos y que además el costo total de generación sea mínimo, como este criterio es válido y tiene solución analítica se lo aplica en sistemas de potencia y se lo conoce como despacho económico.

De lo expuesto se deduce que el control de generación tiene dos aspectos; el primero denominado control de frecuencia, llamado también control potencia-frecuencia, y el segundo el despacho económico. El primero es un control rápido y el segundo un control lento. El control potencia-frecuencia generalmente es de tipo automático, el segundo puede ser "manual" o automático. Manual si un operador del sistema de potencia da instrucciones de tiempo en tiempo a cada central con la carga que debe estar y automático si desde un centro de control se envían señales a cada unidad, en este último caso el control potencia-frecuencia también se lo efectúa desde un centro de control. En este desarrollo, nos ocuparemos del despacho económico.

2. EL DESPACHO ECONOMICO COMO UN SUBPROBLEMA DE FLUJOS OPTIMOS

En un estudio de flujos de potencia, se especifica la potencia activa en todas las barras de generación excepto la oscilante; para un valor de demanda existen infinito número de posibilidades de distribución de potencia activa en las barras de generación y por tanto un infinito número de soluciones de flujos de potencia para una sola condición de carga. En la práctica el problema de flujos tiene un conjunto de restricciones que reducen el número de soluciones factibles, restricciones tales como límites de potencia reactiva de los generadores, magnitud de voltajes en barras, capacidad de elementos, etc y con el fin de obtener una solución factible se distribuye la carga entre los generadores con ciertos criterios técnicos y económicos. La solución del flujo de potencia obtenida así puede dar en la mayoría de los casos valores representativos del comportamiento del sistema de potencia para cierta condición de carga, pero en

ningún caso la solución es óptima, a lo más se puede estar cerca de ella.

El estudio de flujos óptimos permite formular el flujo de potencia optimizándolo en algún sentido y cumpliendo un conjunto de restricciones. En la formulación de flujos óptimos, las funciones objetivo generalmente son:

- minimizar costos de generación
- minimizar pérdidas
- minimizar compensación de potencia reactiva

La solución óptima se obtiene encontrando el valor de las variables de control que minimicen la función objetivo y al mismo tiempo satisfagan las restricciones del problema.

Cuando la función objetivo a minimizar constituye los costos de generación de potencia activa con la restricción de mantener el balance de potencia en la red, el flujo óptimo recibe el nombre de despacho económico.

Si cada generador tiene una función de costo, función de la potencia activa que genera, entonces se debe minimizar

$$\sum_{i=1}^n f_i(PG_i) \quad (1)$$

Siendo $f_i(PG_i)$ la función de costo del generador i , n el número de generadores de la red.

Plantando el problema como (1), el costo mínimo es cero, es decir no deben generar las máquinas, la razón se debe a que no existen restricciones y por tanto es una solución trivial. Pero como se trata de satisfacer la demanda, la restricción constituye el balance de potencia activa en la red, o sea:

$$\sum_{i=1}^n PG_i = P_c + P_L \quad (2)$$

Siendo $\sum_{i=1}^n PG_i$ la potencia total de generación, P_c la potencia total de carga y P_L la potencia de pérdidas en el sistema de transmisión.

Si se soluciona la función objetivo (1) con la restricción (2) puede obtenerse una solución factible o una solución que en la práctica es imposible de satisfacer tal como que una central deba generar una potencia mucho mayor que su capacidad nominal o una potencia menor que la potencia mínima recomendada (debido a problemas en las turbinas), entonces un conjunto de restricciones adicionales son:

$$PG_i \min \leq PG_i \leq PG_i \max \quad (3)$$

El problema de despacho económico es el encontrar los PG_i que minimicen (1) y a la vez satisfagan (2) y (3), obteniéndose de esta forma un despacho económico para una condición de carga P_c , para otro punto de operación se debe repetir el proceso.

El despacho económico puede tener más restricciones, como por ejemplo que cuando se corra un flujo de potencia con los PG_i , los voltajes en barras estén dentro de rangos aceptables, que no se sobrecarguen elementos

etc. Estas restricciones se incluyen a veces cuando se está analizando la expansión de un sistema de potencia, como en operación se tiene una red que ha sido convenientemente analizada y dispone de varios elementos de control, es suficiente resolver el problema como ha sido planteado y con seguridad se obtiene una solución que satisface restricciones adicionales, si no, se pueden hacer pequeños ajustes.

El despacho económico es un problema de optimización no lineal por cuanto como se verá adelante, las funciones f_i (PG) son no lineales, además la restricción (2) es no lineal ya que la potencia de pérdidas P_L se expresa como una función cuadrática de las potencias de generación.

LA TÉCNICA DE SOLUCIÓN POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Una técnica apropiada para resolver este problema de optimización es el método de Lagrange que establece, que si se desea optimizar (max o min) una función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeta a m restricciones de igualdad $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, siendo x_1, x_2, \dots, x_n las variables del problema a obtener.

Se establece una función aumentada no restringida que tiene la forma:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \cdot g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

o lo que es lo mismo:

$$h(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \bar{\lambda}^t \bar{g}(\bar{x}) \quad (4)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se denominan multiplicadores de Lagrange, $h(\bar{x})$ la función no restringida, \bar{x} el vector de variables a determinarse.

Plantando así el problema, existen $n + m$ incógnitas (\bar{x} y $\bar{\lambda}$). El máximo o el mínimo de $F(\bar{x})$ se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1, \dots, n \\ \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial \lambda_i} &= 0 & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

De esta forma se plantean $m + n$ ecuaciones con $m+n$ incógnitas, la resolución se la efectúa por técnicas numéricas conocidas para sistemas de ecuaciones no lineales.

Ahora, para optimizar una función $F(\bar{x})$ sujeta a m restricciones de igualdad $g(\bar{x}) = 0$ y a las restricciones de desigualdad $q(\bar{x}) > 0$ se utiliza igual técnica, ya que a las restricciones de desigualdad se fuerza a que se conviertan en igualdades con variables adicionales, así para cualquier $q_i(\bar{x}) \geq 0$,

$$q_i(\bar{x}) + z^2 = 0 \quad (6)$$

z^2 es un término positivo que tomará un valor distinto de cero sólo si se viola la restricción $q_i(\bar{x}) \geq 0$, o sea que si $q_i(\bar{x}) < 0$, z^2 tomará un valor tal que se satisfaga (6).

De esta forma la función no restringida es:

$$h(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \bar{\lambda}^t \bar{g}(\bar{x}) + \bar{u}^t [q(\bar{x}) + z^2] \quad (7)$$

donde u son multiplicadores de Lagrange adicionales, en este caso se dispone de $n + m + 2k$ incógnitas

($\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{z}$). El máximo o el mínimo de $F(\bar{x})$ se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1, \dots, n \\ \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial \lambda_i} &= 0 & i &= 1, \dots, m \\ \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial u_i} &= 0 & i &= 1, \dots, k \\ \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial z_i} &= 0 & i &= 1, \dots, k \end{aligned} \quad (8)$$

Esta técnica de tratamiento de restricciones de desigualdad se han denominado como las condiciones de KUN y TUCKER.

4. DETERMINACION DE LAS CURVAS DE COSTO DE GENERACION

Hemos establecido anteriormente que el objetivo del despacho económico en sistemas de potencia, es el minimizar costos de generación. El costo de generación es una función de la potencia activa de cada generador que está en operación, es decir cada generador tiene una curva de costo.

Consideremos que se dispone de un parque generador puramente térmico, o que mediante algún proceso las plantas hidráulicas se las ha transformado en una máquina térmica equivalente.

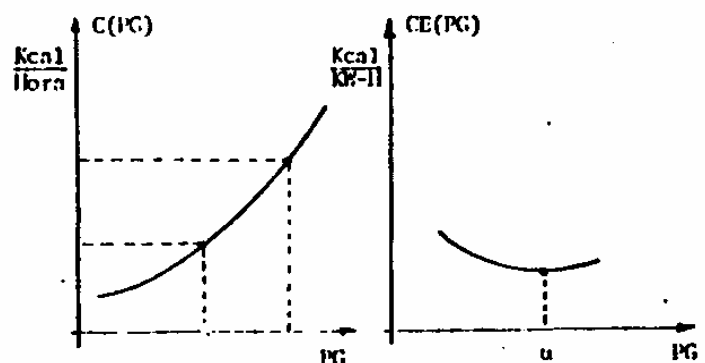
Con esta consideración, tenemos que los componentes de costo de generación más importantes son: el costo por combustible y el costo de personal de operación.

El costo por combustible depende de la potencia que esté generando la máquina en cambio el costo de personal se mantiene prácticamente independiente de la potencia de generación y por tanto es un costo constante que se añade al costo variable por combustible.

La curva de costo por combustible se la obtiene experimentalmente midiendo la cantidad de combustible por hora que se consume para una potencia fija de generación, la cantidad de combustible por hora a su vez puede transformarse en energía calórica por hora, de acuerdo al rendimiento térmico de combustible. La curva así obtenida se denomina curva de entrada-salida.

Otra curva importante obtenida a partir de la anterior, es la que se denomina curva de consumo específico que relaciona la eficiencia de la conversión de energía con la potencia eléctrica de salida.

El gráfico de las dos curvas mencionadas es el siguiente:



La relación entre las curvas está dada por:

$$CE(PG) = \frac{C(PG)}{PG} \quad (9)$$

Es decir, un punto de la curva de consumo específico se la obtiene dividiendo la potencia térmica para la potencia eléctrica de generación correspondiente. Para medir los puntos de la curva entrada-salida se requiere controlar el proceso térmico y obtener una operación estabilizada. La curva de consumo específico tiene un valor mínimo a cuyo valor de generación (α) es más eficiente el proceso de conversión de la energía.

Para el proceso de optimización o despacho económico, se requiere una función analítica de la curva entrada-salida, típicamente se le aproxima a una función cuadrática y en algunos casos cúbica así:

$$C(PG) = aPG^2 + bPG + c$$

$$CE(PG) = aPG + b + \frac{c}{PG} \quad (10)$$

Siendo necesario determinar las constantes a, b, c, para lo cual se requerirá efectuar al menos tres mediciones, sin embargo en la práctica se requieren efectuar más mediciones para determinar lo más ajustadamente posible las constantes, debido a que todo proceso de medición involucra errores sea por instrumentación o por observación. Una técnica eficiente de determinación de las constantes constituye un filtro matemático de errores denominado estimación por mínimos cuadrados, el cual requiere el planteamiento de un sistema de ecuaciones que tenga más ecuaciones que incógnitas con el fin de obtener los valores más cercanos de las variables a los reales. Si se desea refinar más el proceso, aún es posible detectar e identificar una medición completamente errónea y desecharla para que no afecte a la estimación (base de la teoría de estimación de estado en sistemas de potencia).

Aquí asumiremos como suficiente que se dispone de una instrumentación adecuada pero que se acepta exista cierto error asociado. Así, si vamos a determinar la función analítica $C(PG) = aPG^2 + bPG + c$ de un generador para lo cual es necesario determinar a, b y c, supongamos hemos efectuado n mediciones o puntos de la curva entrada-salida, entonces para cada punto medido conocemos C(PG) y PG, pudiendo plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

MEDICION No.		ERROR DE MEDICION
1	$C1(PG1) = aPG_1^2 + bPG_1 + c + \epsilon_1$	
2	$C2(PG2) = aPG_2^2 + bPG_2 + c + \epsilon_2$	
3	$C3(PG3) = aPG_3^2 + bPG_3 + c + \epsilon_3$	
.		
.		
.		
n	$Cn(PGn) = aPG_n^2 + bPG_n + c + \epsilon_n$	

Si se tuviera una medición perfecta hubiera sido suficiente plantear tres ecuaciones (sin errores) y resolverlas para las tres incógnitas a, b, c. Las expresiones anteriores pueden expresarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ \vdots \\ Cn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PG_1^2 & PG_1 & 1 \\ PG_2^2 & PG_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ PG_n^2 & PG_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

(Ecuación)

o, lo que es lo mismo

$$\bar{C} = A \cdot \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (11)$$

el concepto de la mejor estimación de $\bar{x} = [a \ b \ c]^T$ es minimizar la suma de todos los errores al cuadrado, así de (11):

$$\bar{\epsilon} = \bar{C} - A \cdot \bar{x}$$

$$\min J(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \bar{\epsilon}^T \cdot \bar{\epsilon} = (\bar{C} - A\bar{x})^T (\bar{C} - A\bar{x}) \quad (12)$$

el min de J(x) se obtiene cuando:

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (13)$$

derivando en forma matricial la expresión (12) obtenemos que:

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = -2A^T \bar{C} + 2A^T A \bar{x} = 0 \quad (14)$$

donde para el mínimo ($\partial J / \partial \bar{x} = 0$), la mejor estimación es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{C} \quad (15)$$

(Puede existir un intento de suprimir A^T en la expresión (14) o en la (15) esto no se puede ya que A^T no es una matriz cuadrada y por lo tanto no existe la inversa. Sólo en el caso de igual número de ecuaciones que de incógnitas A es cuadrada.)

Un proceso similar puede utilizarse para determinar la expresión analítica de la curva de consumo específico, tomando en cuenta que el punto de máxima eficiencia debe estar entre el 85 y el 95% de la potencia máxima del generador, un valor inferior a este significa incongruencia en el sistema de mediciones.

Si las funciones de la curva de entrada-salida son cúbicas (mejor aproximación) el procedimiento de ajuste es el mismo sino que en este caso se tendrán cuatro constantes a determinar.

Valores típicos de estas curvas para dos máquinas de diferente capacidad se indican en la siguiente tabla:

GENERACION %	UNIDAD DE 158 MW		UNIDAD DE 300 MW	
	C(PG) M-Kcal/H	CE(PG) Kcal/KWh-H	C(PG) M-Kcal/H	CE(PG) Kcal/KWh-H
100.0	385.7	2442	728	2427
87.5	339.5	2459	618.8	2363
81.25	316.7	2473	575.2	2349
75.0	297.0	2489	531.5	2359
68.75	273.9	2512	495.1	2395
62.5	250.7	2538	458.7	2459
50.0	208.3	2630	419.8	2657

EjemPlo : Supongamos que se está midiendo un proceso dado por $y = ax^2 + bx + c$, y que el resultado de dichas mediciones sea:

x	1	2	3	4	5	6
y	4	15.5	15.6	25.1	36.0	48.4

Determinar la función analítica del proceso (a, b, c)

conformando el sistema de ecuaciones:

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c \quad i = 1, \dots, 6$$

tencemos:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8.5 \\ 15.6 \\ 25.1 \\ 36.0 \\ 48.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Según (15) la mejor estimación de a, b, c está dado por:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t y_m$$

donde:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 2275 & 441 & 91 \\ 441 & 91 & 21 \\ 91 & 21 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02679 & -0.1875 & 0.25 \\ -0.1875 & 1.36964 & -1.95 \\ 0.25 & -1.95 & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} .089 & -.018 & -.071 & -.071 & -.018 & .089 \\ -.768 & .039 & .471 & .529 & .211 & -.482 \\ 1.5 & .3 & -.4 & -.6 & -.3 & .5 \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9906 \\ 2.1321 \\ 0.65 \end{bmatrix}$$

$$y = 0.9906x^2 + 2.1321x + 0.65$$

Con mayor cantidad de mediciones se hubiera obtenido valores más cercanos a los verdaderos que son:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

Una comparación de los valores medidos y calculados de y frente al valor verdadero es:

x	y _m	y _c	y _v
1	4	3.77	4
2	8.5	8.88	9
3	15.6	15.96	16
4	25.1	25.03	25
5	36.0	36.07	36
6	48.4	49.1	49
.	.	.	.
.	.	.	.
10	--	121.0	121

$y_c = 0.9906x^2 + 2.1321x + 0.65$
 $y_v = \text{valor verdadero}$

Nótese como los valores calculados se ajustan a los verdaderos, donde a pesar que hay diferencias en el valor calculado de la constante c con el verdadero, ésta no es incidente en el proceso, las constantes decisivas son a y b las cuales están bastante ajustadas. Si hubiéramos determinado a, b y c con sólo tres mediciones estas estuvieran más alejadas de los valores verdaderos. La razón por la cual c es inferior al verdadero es debido a que las mediciones efectuadas nos están dando valores inferiores a los reales.

También es importante anotar que este proceso es válido cuando se usa el mismo instrumento de medición o instrumentos de igual calidad, si para cada punto de medición utilizáramos instrumentos de diferente precisión es necesario ponderar las medi-

ciones dando mayor peso a los más precisos, en este caso la mejor estimación viene dada por: (extensión de la ec (15)).

$$\hat{x} = (A^t W A)^{-1} A^t W \hat{c} \quad (16)$$

donde W es una matriz diagonal de ponderaciones, cuyos elementos son los inversos de las varianzas de los errores asociados a cada medición individual. Como este aspecto está fuera del alcance de este tema, únicamente se le deja planteado, así como también el proceso de detección e identificación de errores de medición para desecharlos y que no afecten a la estimación de parámetros.

Este es un procedimiento para determinar las curvas de entrada-salida de las unidades de generación, con el costo de combustible se las transforma entonces en curvas de costo de generación fi.

3. DESPACHO ECONOMICO SIMPLIFICADO

La formulación más sencilla de despacho económico en sistemas de potencia es aquella en la que no se considera el sistema de transmisión, es decir la generación está junto a la carga. En algunos sistemas de potencia de alta concentración de carga y con un sólido sistema de transmisión que tenga una longitud relativa pequeña, esta formulación puede ser suficiente. En definitiva el no considerar el sistema de transmisión en el problema de despacho económico significa el desprestigiar las pérdidas activas de transmisión.

Con esta consideración el planteamiento del problema es:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n f_i(P_{Gi}) \quad n = \text{número de generadores}$$

$$\text{sujeta a: } P_{Gi} = P_c \quad i = 1, n$$

$$P_{Gmin} \leq P_{Gi} \leq P_{Gmax}$$

Consideremos sólo la restricción de igualdad, y según el método de optimización de Lagrange, la función no restringida es:

$$h(\vec{P}_c) = \sum_{i=1}^n f_i(P_{Gi}) - \lambda (\sum P_{Gi} - P_c)$$

para minimizar, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{\partial h(PG)}{\partial P_{Gi}} = 0 = \frac{\partial f_i(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} - \lambda \quad i=1, \dots, n \quad (17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_c$$

Como la función de costo de un generador i es independiente de la función de costo de cualquier otro generador, entonces:

$$\frac{\partial f_i}{\partial P_{Gi}} = \frac{df_i}{dP_{Gi}} \quad (18)$$

a la función dada por (18) se la conoce como función de costo incremental de un generador i:

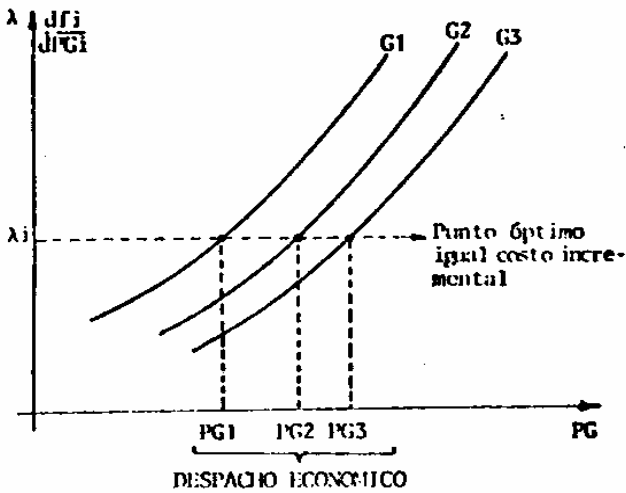
$$\text{de (17): } \frac{df_i}{dP_{Gi}} = \lambda \quad i=1, \dots, n \quad (19)$$

$$\sum P_{Gi} = P_c$$

La expresión (19) significa que operando los generadores 1...n para satisfacer la carga P_c, el mínimo costo de operación o el despacho económico se obtiene cuando todos los generadores trabajan a

a igual costo incremental (λ).

Gráficamente, el despacho económico, por ejemplo para tres generadores, es:



en el que $PG_1 + PG_2 + PG_3 = P_c$ para la cual se efectúa el despacho económico, para una carga mayor que P_c la recta se desplaza hacia arriba.

EjemPLO : Consideremos un sistema de potencia con dos unidades de generación, cuyas funciones de costo sean:

$$f_1 = 0.5 P_1^2 + 3.89 P_1 + 0.406$$

$$f_2 = 0.5 P_2^2 + 3.51 P_2 + 0.444$$

(a) es el despacho económico para una carga de 2.6, si $0.3 \leq P_1, P_2 \leq 2.4$.

El despacho económico se obtiene cuando:

$$\frac{df_1}{dP_1} = \frac{df_2}{dP_2} = \lambda \text{ siendo } P_1 + P_2 = 2.6$$

$$\frac{df_1}{dP_1} = P_1 + 3.89$$

$$\frac{df_2}{dP_2} = P_2 + 3.51$$

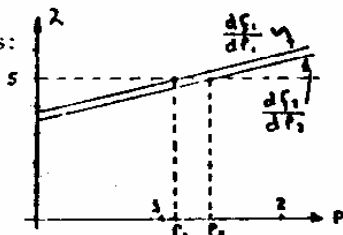
el sistema de ecuaciones es:

$$P_1 + 3.89 = P_2 + 3.51$$

$$P_1 + P_2 = 2.6$$

donde: $P_1 = 1.11, \lambda = 5$

$P_2 = 1.49$



Como no se violan los límites, es la solución del despacho económico.

1 MODELO GENERAL DE DESPECHO SIMPLIFICADO CUANDO LAS FUNCIONES DE COSTO SON CUADRÁTICAS $a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i$

A continuación exponemos un modelo general para despacho económico simplificado tomando en cuenta al mismo tiempo los límites de generación de las máquinas, suponiendo que todas las máquinas tienen funciones de costo cuadráticas.

$$\min \sum_i (a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

sujeta: $\sum P_i - P_c = 0$

$$P_{i,\min} \leq P_i \leq P_{i,\max} \quad i=1, \dots, n$$

El despacho económico, considerando la restricción de igualdad, se obtiene cuando todas las máquinas trabajan a igual costo incremental por tanto:

$$\frac{df_1}{dP_1} = \frac{df_2}{dP_2} = \dots = \frac{df_n}{dP_n} = \lambda$$

$$\sum P_i = P_c$$

por lo tanto el sistema lineal de ecuaciones a resolver es:

$$2a_1 P_1 + b_1 = \lambda \quad 2a_1 P_1 - \lambda = -b_1$$

$$2a_2 P_2 + b_2 = \lambda \quad 2a_2 P_2 - \lambda = -b_2$$

$$\dots \Rightarrow$$

$$2a_n P_n + b_n = \lambda \quad 2a_n P_n - \lambda = -b_n$$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = P_c \quad P_1 + P_2 + \dots + P_n = P_c$$

siendo las incógnitas P_1, P_2, \dots, P_n y λ

El sistema anterior expresado matricialmente en la forma $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ es:

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 2a_2 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2a_3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2a_n & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dots \\ P_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ \dots \\ -b_n \\ P_c \end{bmatrix} \quad (20)$$

este sistema lineal puede ser resuelto por métodos directos (descomposición L.U) o métodos iterativos (Gauss-Seidel) para encontrar las incógnitas $P_1, P_2, \dots, P_n, \lambda$, luego de lo cual se pasa a verificar si no existe violaciones de límites. De existir violaciones, la técnica de solventar las restricciones de desigualdad violadas es: (Este es un método más directo y sencillo que el visto en el numeral 3).

Sustituir la ecuación de costo incremental ($2a_i P_i - \lambda = b_i$) por la del límite violado ($P_i = P_{i,\max}$ o $P_i = P_{i,\min}$) con lo cual (20) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 2a_2 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2a_n & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_j \\ \dots \\ P_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \dots \\ P_{i,\min} \\ \dots \\ -b_n \\ P_c \end{bmatrix} \quad (21)$$

Se resuelve (21), y se repite este proceso dado por la ec.(21), hasta que no existan violaciones de límites.

EjemPLO : Efectuar el despacho económico entre dos generadores cuyas funciones de costo están dadas por:

$$f_1 = 0.5 P_1^2 + 3.89 P_1 + 0.406$$

$$f_2 = 0.5 P_2^2 + 3.51 P_2 + 0.444$$

Si se va a abastecer una carga de 8.0, si además:

$$3 \leq P1 \leq 5$$

$$2 \leq P2 \leq 4$$

Las funciones de costo incremental son:

$$\frac{df1}{dP1} = P1 + 3.89, \frac{df2}{dP2} = P2 + 3.51$$

Planteando el sistema de ecuaciones dado por (20):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.89 \\ -3.51 \\ 8.0 \end{bmatrix}$$

la solución es: $P1 = 3.81$
 $P2 = 4.19$
 $\lambda = 7.7$

Como $P2 \leq 4$ se viola esta restricción por tanto se hace $P2 = P_{\max} = 4$ y se plantea la ec. (21)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.89 \\ 4.0 \\ 8.0 \end{bmatrix}$$

para este caso, la solución es:

$$P1 = 4.0$$

$$P2 = 4.0$$

$$\lambda = 7.89$$

Como las variables están dentro de los límites, esta constituye el despacho económico.

2. MODELO GENERAL DE DESPACHO SIMPLIFICADO CUANDO LAS FUNCIONES DE COSTO SON CUBICAS $a_i P_i^3 + b_i P_i^2 + c_i P_i + d_i$

En algunos generadores puede ocurrir que la expresión analítica que mejor satisface las observaciones sea un polinomio de tercer orden, resultado de lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales a resolver, así:

$$\min \sum_i (a_i P_i^3 + b_i P_i^2 + c_i P_i + d_i)$$

$$\sum_i P_i - P_c = 0$$

$$P_{i_{\min}} \leq P_i \leq P_{i_{\max}}$$

Como hemos visto, el despacho económico se obtiene cuando

$$\frac{df_i}{dP_i} = \lambda \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum P_i = P_c$$

en este caso las funciones de costo incremental tienen la forma:

$$\frac{df_i}{dP_i} = 3a_i P_i^2 + 2b_i P_i + c_i = \lambda \quad i = 1, \dots, n$$

las cuales constituyen un sistema no lineal de ecuaciones de la forma: $g_i(P_i) = 3a_i P_i^2 + 2b_i P_i + c_i - \lambda = 0$

$$g_1(P_1) = 0$$

$$g_2(P_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_n(P_n) = 0$$

(22)

$$\sum P_i - P_c = 0$$

Para resolver este sistema no lineal de ecuaciones, el método adecuado es el de Newton-Raphson, método iterativo que mediante la expansión en series de Taylor, transforma el sistema no lineal en uno lineal de la forma:

$$\Delta g(k) = [J](k) \cdot \Delta x(k) \quad (23)$$

donde:

$[J](k)$ es el Jacobiano de (22) en la iteración (k)

$\Delta x(k)$ es el vector de desviaciones de las incógnitas P y λ

$\Delta g(k)$ es el vector de desviaciones de las funciones g(P)

El algoritmo de solución es:

- 1) - Asumir valores iniciales $P_{i(0)}, \lambda(0)$
- 2) - Calcular $\Delta g_i(0) = 0 - g_i(0)$
- 3) - Evaluar el jacobiano $[J](0)$
- 4) - Formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial P_1} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} & \Delta P_1 \\ 0 & \frac{\partial g_2}{\partial P_2} & \dots & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} & \Delta P_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial \lambda} & \Delta P_n \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & \Delta \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_n \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1(0) \\ -g_2(0) \\ \dots \\ -g_n(0) \\ \sum P_i(0) - P_c \end{bmatrix}$$

En el anterior sistema de ecuaciones: $\frac{\partial g_i}{\partial P_i} =$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial P_i^2} = 6a_i P_i + 2b_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} = -1$$

- 5) - Se resuelve el sistema lineal de ecuaciones anterior
- 6) - Se corrigen los valores a $P_{i(1)} = P_{i(0)} + \Delta P_i(0)$
 $\text{y} \quad \lambda(1) = \lambda(0) + \Delta \lambda(0)$

- 7) - Se continúa con este proceso hasta que se satisfaga un criterio de convergencia
- 8) - Se verifica si hay o no violación de límites, de existir se reemplaza la ecuación de costo incremental del generador que viola límites por la ecuación $P_i = P_{i_{\max}}$ (como en el caso anterior), y se repite el proceso (1) a 8)) hasta que se cumplan todas las restricciones de desigualdad.

Este modelo de solución es válido para funciones de costo que sean polinomios mayores o iguales a los de tercer orden.

6. DESPACHO ECONOMICO CONSIDERANDO LAS PERDIDAS DE TRANSMISION

El despacho económico en sistemas de potencia considerando las pérdidas de transmisión (PT) se lo obtiene al resolver:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i(P_i) \quad n = \text{número de generadores o barras de generación si se han determinado equivalentes}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_c - P_L = 0$$

la función aumentada de costo es:

$$h(PG) = \sum_{i=1}^n f_i(P_{Gi}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_c - P_L \right)$$

las condiciones para el mínimo de $E f_i(P_{Gi})$ son:

$$\frac{\partial h}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

$$i=1, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} \text{donde: } \frac{df_i}{dP_{Gi}} - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} \right) &= 0 \quad i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_c - P_L &= 0 \end{aligned} \right\} (24)$$

la carga es independiente de las variaciones que puedan darse en los distintos generadores ($\partial P_c / \partial P_{Gi} = 0$). De la expresión (24), el sistema de ecuaciones a resolver tiene la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_i}{dP_{Gi}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}} &= \lambda \quad i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_c - P_L &= 0 \end{aligned} \right\} (25)$$

donde:

$$\frac{df_i}{dP_{Gi}} \quad \text{es el costo incremental del generador } i$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} \quad \text{son las pérdidas incrementales de transmisión debidas al generador } i.$$

Definiendo como factor de penalización del generador L_i a la expresión:

$$L_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}} \quad (26)$$

el despacho económico, considerando las pérdidas de transmisión se reduce a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_i}{dP_{Gi}} \cdot L_i &= \lambda \quad i=1, \dots, n \\ \sum P_{Gi} - P_c - P_L &= 0 \end{aligned} \right\} (27)$$

la diferencia con el despacho económico simplificado es que en despacho simplificado: $L_i = 1$ ya que $P_L = 0$ y por tanto $\frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} = 0$

la ecuación (27) establece que la operación óptima se encuentra cuando cada generador opera de tal forma que sus costos incrementales penalizados por su participación en las pérdidas del sistema, son iguales.

Sin embargo la ecuación (27) no puede resolverse ya que no se conoce las pérdidas del sistema y como además se requiere encontrar $\frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}$ es imprescindible primero, el establecer una relación funcional entre la potencia de pérdidas y las variables del problema, las potencias de generación.

Dicha relación funcional no puede derivarse de manera exacta utilizando teoría de redes, debido a las no linealidades entre la potencia de generación, flujos por las líneas y pérdidas. Sin embargo, la potencia de pérdidas puede establecerse con suficiente precisión en función de las potencias de generación, en una zona o rango de operación normal.

0.1 FÓRMULA DE PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN

Se conoce como fórmula de pérdidas, a la expresión:

$$P_L = \sum_i^n \sum_j^n P_{Gi} B_{ij} P_{Gj} \quad (28)$$

la cual es una expresión analítica de las pérdidas del sistema en función de las potencias de generación. Los parámetros B_{ij} se los conoce como coeficientes de pérdidas, los cuales deben determinarse.

La ecuación (28) que es una expresión cuadrática, se la conoce también como fórmula de George. Se han efectuado aproximaciones adicionales para obtener una fórmula más exacta y es así como se lo añade a la expresión cuadrática un término lineal y una constante, donde como resultado:

$$P_L = R_0 + \sum_i^n E_i P_{Gi} + \sum_i^n \sum_j^n P_{Gi} B_{ij} P_{Gj} \quad (29)$$

Esta expresión se la llama fórmula de Kron, en virtud de que G. Kron fue el que investigó totalmente este problema y poder determinar la expresión (29), de la cual (28) es una expresión más simple. Las ecuaciones (28) o (29) dan con suficiente precisión las pérdidas de transmisión si se determinan adecuadamente los coeficientes de pérdidas B . Aquí presentamos dos métodos para calcular los coeficientes de pérdidas.

0.1.1 OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE PÉRDIDAS B UTILIZANDO Z_B

El método tradicional que se ha venido utilizando para determinar los coeficientes de pérdidas B tales que, permitan expresar las pérdidas en función de las potencias de generación; es aquel que utiliza la matriz impedancia de barras del sistema Z_B , y además de los resultados de un flujo de potencia base para condiciones más o menos representativas del sistema de potencia bajo estudio. Una vez determinados los coeficientes B , estos se los toma como constantes para una zona de operación en la que las potencias de carga y las de generación estén alrededor del caso base analizado. Es práctica común determinar coeficientes B para demanda mínima, otros para demanda media y otros para máxima.

Este método clásico data a partir de la década de 1950, época en la cual se analizó profundamente, el problema de despacho económico (véase "Economic Operation of Power Systems", L.K. Kirchmayer, John Wiley, 1958). Este método requiere además de algunas aproximaciones y transformaciones.

El modelo, de manera compacta es el siguiente:

Las potencias netas aparentes, inyectadas en cada una de las barras del sistema, por definición son:

$$S_i = \sum_k^A S_{Gk} - S_{Ci} \quad i=1, \dots, k$$

donde, $S_{Gk} = P_{Gk} + jQ_{Gk}$ es la potencia de generación inyectada en la barra i , $S_{Ci} = P_{Ci} + jQ_{Ci}$ es la potencia de carga en la barra i y k es el número total de barras del sistema. Si sumamos todas las

potencias netas inyectadas tenemos:

$$\sum_{i=1}^k S_i = \sum_{i=1}^k (P_i G_i + j Q_i G_i) - \sum_{i=1}^k (P_i C_i + j Q_i C_i)$$

$$= \sum_{i=1}^k (P_i G_i - P_i C_i) + j \sum_{i=1}^k (Q_i G_i - Q_i C_i)$$

la parte real de esta expresión, son las pérdidas activas de transmisión:

$$PL = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^k S_i \right\} = \sum_{i=1}^k (P_i G_i - P_i C_i) \quad (30)$$

pero, también tenemos que la potencia neta inyectada S_i , es el producto del voltaje nodal en la barra i por la corriente neta inyectada conjugada en dicha barra; o sea:

$$S_i = E_i \cdot I_i^*$$

$$\text{Por lo tanto: } PL = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^k E_i \cdot I_i^* \right\} \quad (31)$$

la expresión (31) en forma matricial es:

$$PL = \text{Re} \left\{ \bar{E}_B^t \cdot \bar{I}_B^* \right\} \quad (32)$$

donde \bar{E}_B es el vector de voltajes nodales, e \bar{I}_B el vector de corrientes netas inyectadas a las barras del sistema.

Además, en el sistema de referencia nodal, la ecuación de equilibrio de la red es:

$$\bar{E}_B = Z_B \cdot \bar{I}_B$$

en la que Z_B es la matriz impedancia de barras formada con respecto a la barra de referencia a la cual se miden los voltajes \bar{E}_B .

$$\therefore PL = \text{Re} \left\{ \bar{I}_B^t \cdot Z_B \cdot \bar{I}_B^* \right\} \quad (33)$$

Z_B , e \bar{I}_B pueden expresarse como:

$Z_B = R + jX$, R y X son las matrices reales e imaginarias componentes de Z_B , e $\bar{I}_B = \bar{I}_p + j \bar{I}_q$, por tanto de (33):

$$PL = \text{Re} \left\{ (\bar{I}_p^t R \bar{I}_p + \bar{I}_q^t R \bar{I}_q) + j(\bar{I}_p^t X \bar{I}_p + \bar{I}_q^t X \bar{I}_q) \right\}$$

$$\text{por tanto: } PL = \bar{I}_p^t R \bar{I}_p + \bar{I}_q^t R \bar{I}_q \quad (34)$$

En este punto es deseable eliminar las corrientes (el objetivo es expresar PL en función de $P_i G_i$).

Nuevamente, la potencia aparente inyectada en la barra i es:

$$S_i = E_i \cdot I_i^* = P_i + j Q_i$$

siendo: $E_i = V_i (\cos \delta_i + j \sin \delta_i)$; $I_i = I_p + j I_q$, de estas expresiones se obtiene que:

$$I_p = \frac{1}{V_i} [P_i \cos \delta_i + Q_i \sin \delta_i] \quad (35)$$

$$I_q = \frac{1}{V_i} [P_i \sin \delta_i - Q_i \cos \delta_i]$$

La ecuación (34) también puede expresarse como:

$$PL = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k [I_p^i \cdot r_{ij} \cdot I_p^j + I_q^i \cdot r_{ij} \cdot I_q^j]$$

reemplazando los valores de la ec. (35) obtenemos:

$$PL = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left[\frac{r_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) (P_i P_j + Q_i Q_j) + r_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) (Q_i P_j - P_i Q_j)}{V_i V_j} \right]$$

$$\text{definiendo: } c_{ij} = r_{ij} \frac{\cos(\delta_i - \delta_j)}{V_i V_j} \quad (36)$$

$$d_{ij} = r_{ij} \frac{\sin(\delta_i - \delta_j)}{V_i V_j} \quad (37)$$

Se obtiene:

$$PL = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left[- (P_i c_{ij} P_j + Q_i c_{ij} Q_j - P_i d_{ij} Q_j + Q_i d_{ij} P_j) \right]$$

expresándola matricialmente:

$$PL = \bar{P}^t C \bar{P} + \bar{Q}^t C \bar{Q} - \bar{P}^t D \bar{Q} + \bar{Q}^t D \bar{P}$$

donde C y D son las matrices formadas por los términos c_{ij} y d_{ij} respectivamente.

La expresión anterior es también igual a:

$$PL = [\bar{P}^t \quad \bar{Q}^t] \begin{bmatrix} C & -D \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (38)$$

En todo este desarrollo \bar{P} y \bar{Q} son las potencias netas inyectadas a las barras del sistema, expresándolas en función de potencias de generación y de carga:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P}_G - \bar{P}_C \\ \bar{Q} &= \bar{Q}_G - \bar{Q}_C \end{aligned} \quad (39)$$

Si además arreglamos las matrices C y D de tal forma que:

$$C = \begin{bmatrix} CCG & | & CCc \\ \hline CcG & | & Ccc \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} DCG & | & DcC \\ \hline DcG & | & Dcc \end{bmatrix} \quad (40)$$

CCG matriz C de punto matriz de todas las barras de generación

CCc matriz C de transferencia entre las barras de generación y carga

CcG matriz C de punto matriz de las barras de carga

reemplazando (39) y (40) en (38) obtendremos que:

$$PL = [\bar{P}_G^t \quad \bar{Q}_G^t] \begin{bmatrix} CCG & -DCG \\ DCG & CCG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_G \\ \bar{Q}_G \end{bmatrix} + [\bar{P}_C^t \quad \bar{P}_C^t] \begin{bmatrix} CCG \\ \bar{Q}_G \end{bmatrix} + S \quad (41)$$

donde:

$$S = [\bar{P}_C^t \quad \bar{Q}_C^t] \begin{bmatrix} Ccc & -Dcc \\ Dcc & Ccc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_C \\ \bar{Q}_C \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\bar{N} = 2 (DcG \bar{Q}_C - CcG \bar{P}_C)$$

$$\bar{N} = 2 (DcG \bar{Q}_C - CcG \bar{P}_C) \quad (43)$$

Obviamente las matrices C y D son funciones del punto de operación (V y δ), pero se asume que dentro de cierto rango de carga y topología de red, estos se mantienen constantes y además de asume que las potencias reactivas de generación varían linealmente con las potencias activas de generación en la forma:

$$\begin{aligned} QGi &= QGi_0 + gi PGi \\ \therefore \bar{Q}G &= \bar{Q}G_0 + G PG \end{aligned} \quad (44)$$

$$G = \text{diag} \{ gi \}$$

reemplazando (44) en (41) obtendremos:

$$PL = \bar{P}G^t [B] \bar{P}G + \bar{B}^t \bar{P}G + B_0$$

o lo que es lo mismo:

$$PL = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{Gi} B_{ij} P_{Gj} + \sum_{i=1}^n B_i P_{Gi} + B_0 \quad (45)$$

que es la fórmula de pérdidas que deseábamos encontrar, donde las matrices:

$$\left. \begin{aligned} [B] &= CGG + G^t CGG.G + 2G^t DGG \\ \bar{B}^t &= \bar{N}^t + 2\bar{Q}G_0^t [CGG.G + DGG] + \bar{N}^t G \\ B_0 &= S + \bar{Q}G_0^t CGG \bar{Q}G_0 + \bar{N}^t \bar{Q}G_0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Para determinar los coeficientes de pérdidas B se requiere del siguiente algoritmo:

- Un flujo de potencia base (para determinar V_i , δ_i).
- Formar ZB del sistema, siendo de interés su parte real R (numerando primero las barras de generación).
- Calcular los términos de las matrices C y D (lc (36) y (37)).
- Calcular el valor de S y de los vectores \bar{N} y \bar{N} , con potencias de carga del caso base.
- Establecer los valores de QGi y gi para cada generador (sea en base a pruebas en las máquinas o mediante estudios de flujos).
- Calcular los coeficientes de pérdidas mediante las ecuaciones (46).

6.1.2 OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DE PERDIDAS B UTILIZANDO EL METODO DE SENSITIVIDAD

Este método, desde el punto de vista conceptual es muy simple y a la vez sorprendente debido a la total coherencia que se tiene con el método anterior descrito en 6.1.1, el método anterior se lo desarrolla en base a una fuerte sustentación física del problema, el que a continuación se expondrá tiene una sustentación matemática únicamente, sin embargo los dos coinciden totalmente.

Este método se basa en la expansión en series de Taylor de una función de varias variables. Supongamos que se tiene una función $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y que está evaluada en un punto base \bar{x}_0 ; para variaciones pequeñas alrededor de \bar{x}_0 , $g(\bar{x})$ puede expandirse en series de Taylor en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= g(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}) = g(\bar{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2} \Big|_0 \Delta X_2 + \dots \\ &+ \frac{\partial g}{\partial X_n} \Big|_0 \Delta X_n + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} \Delta X_1^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} \Delta X_1 \Delta X_2 + \dots \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 g}{\partial X_n^2} \Delta X_n^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Truncando la serie hasta la segunda potencia:

$$g(\bar{x}) = g(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_0 \Delta X_i + \Delta \Delta$$

$$\Delta \Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \Delta X_i \Delta X_j$$

esta expresión expresada matricialmente es:

$$g(\bar{x}) = g(\bar{x}_0) + \bar{v}g_0^t \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^t Hg_0 \Delta \bar{x} \quad (47)$$

donde:

$$\bar{v}g_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad Hg_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$$

siendo $\bar{v}g_0$ el gradiente de la función g evaluada en el punto base y Hg_0 la matriz Hessiana de g evaluada en el punto base.

Aplicando este concepto a las pérdidas de transmisión como función de las potencias activas de generación, tenemos que si conocemos o desarrollamos un flujo de potencia base representativo del sistema para condiciones de carga dadas, podemos conocer las pérdidas del sistema PL_0 y el vector $\bar{P}G_0$ de las potencias de generación, si se efectúan variaciones en las potencias de generación alrededor de $\bar{P}G_0$ tenemos que de (47); las pérdidas del sistema en estas nuevas condiciones están dadas por:

$$PL(\bar{P}G) = PL_0 + \bar{v}PL_0^t \Delta \bar{P}G + \frac{1}{2} \Delta \bar{P}G^t H_0 \Delta \bar{P}G \quad (48)$$

Como el vector $\Delta \bar{P}G = \bar{P}G - \bar{P}G_0$, $\bar{v}PL_0^t$ el gradiente y H_0 el Hessiano de PL .

Entonces (48) se transforma en:

$$\begin{aligned} PL(\bar{P}G) &= PL_0 + \bar{v}PL_0^t (\bar{P}G - \bar{P}G_0) + \frac{1}{2} (\bar{P}G^t - \bar{P}G_0^t) H_0 (\bar{P}G - \bar{P}G_0) \\ &= PL_0 + \bar{v}PL_0^t \bar{P}G - \bar{v}PL_0^t \bar{P}G_0 + \frac{1}{2} \bar{P}G^t H_0 \bar{P}G - \bar{P}G_0^t H_0 \bar{P}G \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{P}G_0^t H_0 \bar{P}G_0 \end{aligned}$$

ordenando y reagrupando términos:

$$PL(\bar{P}G) = \frac{1}{2} \bar{P}G^t H_0 \bar{P}G + (\bar{v}PL_0^t - \bar{P}G_0^t H_0) \bar{P}G + (PL_0 - \bar{v}PL_0^t \bar{P}G_0 + \frac{1}{2} \bar{P}G_0^t H_0 \bar{P}G_0)$$

Definiendo $B = \frac{1}{2} H_0$

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^t &= \bar{v}PL_0^t - \bar{P}G_0^t H_0 \\ B_0 &= PL_0 - \bar{v}PL_0^t \bar{P}G_0 + \bar{P}G_0^t H_0 \bar{P}G_0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

y por tanto:

$$PL(\bar{P}G) = \bar{P}G^t B \bar{P}G + \bar{B}^t \bar{P}G + B_0 \quad (50)$$

que es la fórmula de pérdidas, donde puede observarse que la matriz de coeficientes de pérdidas B es la matriz Hessiana (n x n) de la potencia de pérdidas PL evaluada en el caso base de flujo de potencia o matriz de sensibilidad de segundo orden de las pérdidas, el vector \bar{B}^t es un vector función del gradiente y del Hessiano de la potencia de pérdidas evaluados en el caso base y el valor B_0 que también depende del gradiente y del Hessiano.

Nótese de la expresión (49) que todos los coeficientes de pérdidas son funciones del caso base de flujo de potencia y esta expresión de resultados muy similares y aún más exactos a los establecidos en la ecuación (46) obtenida por el método clásico.

El problema ahora, es cómo determinar el gradiente y el hessiano de la potencia de pérdidas evaluados en el caso base, luego de lo cual simplemente se aplican las relaciones (49) y se obtienen los coeficientes de pérdidas.

Para determinar $\sqrt{PL_0}$ y I_{00} , se utiliza nuevamente la ecuación (48) que es igual a:

$$PL(\overline{PG}) = PL_0 + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial PL}{\partial PG_i} \right|_0 \cdot \Delta PG_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta PG_i \cdot \left. \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \right|_0 \Delta PG_j$$

El número de incógnitas o valores componentes de $\sqrt{PL_0}$ y I_{00} son: n de $\sqrt{PL_0}$ y $\frac{n^2 + n}{2}$ de I_{00} (debido

a que el hessiano es una matriz simétrica en este caso), o sea un total de $n(n+3)/2$ incógnitas, siendo n el número de barras de generación del sistema.

Debemos plantear al menos un sistema de $n(n+3)/2$ ecuaciones. Partiendo de un flujo de potencia base para el cual se conoce PL_0 y PG_0 , se puede correr una serie de flujos de potencia con variaciones ΔPG_i alrededor del caso base, variaciones que cubran una zona representativa de la curva de carga, por tanto para cada nuevo flujo de carga que se corra se conocerá $PL(\overline{PG})$ y las variaciones ΔPG_i que uno impone.

Para propósitos de una mejor estimación de los términos del gradiente y el hessiano es conveniente correr una cantidad de flujos, superior a $n(n+3)/2$ para obtener redundancia, con esto nos podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones: (De la expresión anterior):

Flujo

$$1 \quad PL_1 - PL_0 = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial PL}{\partial PG_i} \right|_0 \cdot \Delta PG_{i1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta PG_{i1} \cdot \left. \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \right|_0 \Delta PG_{j1}$$

$$2 \quad PL_2 - PL_0 = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial PL}{\partial PG_i} \right|_0 \cdot \Delta PG_{i2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta PG_{i2} \cdot \left. \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \right|_0 \Delta PG_{j2}$$

$$r \quad PL_r - PL_0 = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial PL}{\partial PG_i} \right|_0 \cdot \Delta PG_{ir} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta PG_{ir} \cdot \left. \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \right|_0 \Delta PG_{jr}$$

El anterior sistema de ecuaciones puesto en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \Delta PL_1 \\ \vdots \\ \Delta PL_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta PG_i & & \\ & \Delta^2 PG_i & \\ & & \Delta PG_i \cdot \Delta PG_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial PG_i} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \\ \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_i \partial PG_j} \end{bmatrix}$$

conocido conocido incógnitas

de donde:

$$\Delta PL = A \cdot X$$

si el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas entonces la mejor estimación para \bar{X} (según lo visto en 4) es:

$$\bar{X} = (A^t A)^{-1} A^t \cdot \Delta PL$$

si A es una matriz cuadrada entonces la anterior expresión se transforma en:

$$X = A^{-1} \cdot \Delta PL$$

veamos que \bar{X} contiene todos los términos de $\sqrt{PL_0}$ y de I_{00} , determinándose de esta forma el gradiente y el hessiano de la función de pérdidas evaluadas en el caso base. Una vez determinados $\sqrt{PL_0}$ y I_{00} se calculan los coeficientes de pérdidas B según (49).

Como se podrá apreciar el método es simple y poderoso para múltiples aplicaciones, su gran inconveniente es la cantidad alta de flujos de potencia que hay que analizar. Desde el punto de vista de generar funciones analíticas es muy importante y para despacho económico es conveniente para sistemas de potencia que tengan un número pequeño de barras de generación (< 10), para sistemas de potencia más grandes el método clásico luce más conveniente pero también, como se verá más adelante existe un método con el cual se puede calcular directamente los términos $\partial PL / \partial PG_i$ aunque no se puede establecer una función analítica para PL .

6.2 ALGORITMO DE SOLUCION DEL DESPACHO ECONOMICO CONSIDERANDO PERDIDAS DE TRANSMISION

Se ha establecido con la ec (25) que el sistema de ecuaciones a resolver, para obtener el despacho económico de un sistema de potencia, es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dPG_i}{dPG_i} = \frac{1}{1 - \frac{\partial PL}{\partial PG_i}} = \lambda \quad i = 1, \dots, n \\ \epsilon PG_i - P_c - PL = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Como } PL = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n PG_i B_{ij} PG_j + \sum_{j=1}^n B_j PG_j + B_0$$

$$\frac{\partial PL}{\partial PG_i} = 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} PG_j + B_i$$

y asumiendo funciones de costo cuadráticas $\frac{dPG_i}{dPG_i} = 2a_i PG_i + b_i$

Entonces, el sistema de ecuaciones es:

$$pg_i = 2a_i PG_i + b_i - \lambda (1 - B_i - 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} PG_j) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$h = \sum_i G_i - P_c - \sum_i^n \sum_j^n PG_i R_{ij} PG_j - \sum_i^n B_i PG_i - B_0 = 0 \quad (51)$$

El sistema de ecuaciones es no lineal y necesariamente se requiere una técnica iterativa para resolverlo, ésta puede ser Gauss-Seidel o Newton-Raphson. Aplicando el método de N-R, al sistema de ecuaciones (51) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta g \\ \Delta h \end{bmatrix} (k) = \begin{bmatrix} J_{gp} & J_{g\lambda} \\ J_{hp} & J_{h\lambda} \end{bmatrix} (k) \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad \text{Asumiendo valores iniciales para } PG_i(0) \text{ y } \lambda(0).$$

$h = \text{iteración}$

donde $\Delta g = -\bar{g}(k)$
 $\Delta h = -h(k)$

$$J_{gp} = \left[\frac{\partial g}{\partial PG} \right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial PG_i} \right] = 2a_i + 2B_{i1}\lambda = 2(a_i + B_{i1}\lambda) \quad (k)$$

$i = 1 \dots n$

$$\frac{\partial g_i}{\partial PG_j} (k) = 2\lambda (k) B_{ij} \quad i, j = 1 \dots n$$

$$J_{g\lambda} = \left[\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \right] = (B_i + 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} PG_j (k) \lambda^{-1})$$

$i=1, \dots, n$

$$J_{hp} = \left[\frac{\partial h}{\partial PG_i} \right] = \left[\frac{\partial h}{\partial PG_i} \right] = 1 - 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} PG_j (k) - B_i$$

$$J_{h\lambda} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

J_{gp} es una matriz cuadrada, $J_{g\lambda}$ es un vector columna, J_{hp} es un vector hilera y $J_{h\lambda}$ es un solo elemento igual a cero, además $J_{hp} = -J_{g\lambda}$.

Las correcciones deben calcularse entonces como:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} (k) = \begin{bmatrix} J_{gp} & J_{g\lambda} \\ J_{hp} & 0 \end{bmatrix}^{-1} (k) \begin{bmatrix} \Delta g \\ \Delta h \end{bmatrix} (k) \quad (52)$$

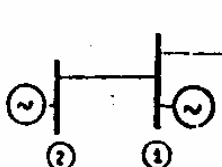
los valores más cercanos a la solución como:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta \lambda^{(k)} \quad (53)$$

$$PG^{(k+1)} = PG^{(k)} + \Delta P^{(k)}$$

hasta que se satisfaga un criterio de convergencia, luego de lo cual se pasa a determinar si hay violación de límites de existir se iguala el valor de la potencia del o los generadores que violan límites al valor límite violado y considerando este efecto en el sistema de ecuaciones.

Ejem PLO : En la siguiente figura se dan las características de un sistema de potencia.



si las funciones de costo de los generadores son:

$$f_1 = 0.5P_1^2 + 3.89P_1 + 0.406$$

$$f_2 = 0.5P_2^2 + 3.51P_2 + 0.444$$

$$z_{12} = 0.02 + j0.08$$

$$z_{13} = 0.005 + j0.02$$

Además, si para un caso base de flujo de potencia se obtiene que:
 $P_1 = 1.2732, P_2 = 1.40, PL = 0.0732,$
 $P_c = -P_3 = 2.6, V_1 = 1.0, V_2 = 1.02,$
 $V_3 = 0.98$

Efectuar el despacho económico para $P_c = 2.6,$
 $0 \leq P_1, P_2 \leq 2.0$

- Cálculo de los Coeficientes de Pérdidas

Para calcular los coeficientes de pérdidas, utilizamos el método de sensibilidad para lo cual se deberán correr varios casos de flujos de potencia. Como hay dos generadores existen cuatro coeficientes de H_0 , dos coeficientes V_{PL0} ; de los cuatro términos de H_0 sólo tres requieren ser calculados debido a la simetría de la matriz H_0 , por lo tanto se tienen un total de cinco incógnitas y al menos cinco flujos de potencia adicionales deberán analizarse fuera del caso base; pero con el fin de obtener una mejor estimación de los parámetros del Hessiano y del gradiente se efectuarán un total de 10 flujos de potencia, los cuales se establecen en la siguiente tabla (listándose sólo las variables de interés).

CASO	PG1	PG2	PL	Pc
BASE	1.2732	1.4	0.0732	2.6
1	1.3206	1.35	0.0706	2.6
2	1.3681	1.30	0.0681	2.6
3	1.4156	1.25	0.0656	2.6
4	1.4633	1.20	0.0633	2.6
5	1.5599	1.10	0.0599	2.6
6	1.2260	1.45	0.0760	2.6
7	1.1789	1.50	0.0789	2.6
8	1.1318	1.55	0.0818	2.6
9	1.0848	1.60	0.0848	2.6
10	0.9912	1.70	0.0912	2.6

formando la matriz A con los términos $\Delta PG_1, \Delta PG_2, \Delta P_1^2, \Delta P_2^2, \Delta PG_1 \Delta PG_2$ evaluados con respecto al caso base, con lo que:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial PG_1} \\ \frac{\partial PL}{\partial PG_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PL}{\partial P_1^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PL}{\partial P_2^2} \\ \frac{\partial^2 PL}{\partial PG_1 \partial PG_2} \end{bmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \Delta PL$$

ΔPG_1	ΔPG_2	ΔP_1^2	ΔP_2^2	$\Delta PG_1 \Delta PG_2$	$PL_1 - PL_0$
0.0474	-0.05	0.00247	0.0025	-0.00237	0.0026
0.0949	-0.1	0.0096	0.01	-0.00949	-0.0051
0.1424	-0.15	0.02027	0.0225	-0.02134	-0.0076
0.1901	-0.2	0.03614	0.04	-0.03802	-0.0099
0.2377	-0.25	0.05219	0.06	-0.05601	-0.0133
-0.0472	0.05	0.002228	0.0025	-0.00236	0.0028
-0.0943	0.1	0.00889	0.01	-0.00943	0.0052
-0.1414	0.15	0.02	0.0225	-0.02121	0.0086
-0.1884	0.2	0.03549	0.04	-0.03768	0.0116
-0.282	0.3	0.07952	0.09	-0.0846	0.018

de donde:

$$(A^t A) = \begin{bmatrix} 0.295 & -0.312 & 0.00108 & 0.000103 & -0.000763 \\ & 0.330 & -0.000763 & 0.000005 & 0.000403 \\ & & 0.0165 & 0.0185 & -0.0175 \\ & & & 0.0206 & -0.0195 \\ & & & & 0.0185 \end{bmatrix}$$

(simétrica)

$$A^t \Delta PL = \begin{bmatrix} -0.0168 \\ 0.0174 \\ 0.000132 \\ 0.000103 \\ -0.000136 \end{bmatrix}; \lambda = (A^t A)^{-1} A^t \Delta PL = \begin{bmatrix} -0.0262 \\ 0.0291 \\ 0.0889 \\ 0.0889 \\ 0.157 \end{bmatrix}$$

donde, el hessiano y el gradiente evaluados en el caso base son:

$$H_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 PL}{\partial PG1^2} & \frac{\partial^2 PL}{\partial PG1 \partial PG2} \\ \frac{\partial^2 PL}{\partial PG2 \partial PG1} & \frac{\partial^2 PL}{\partial PG2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1778 & 0.157 \\ 0.157 & 0.1778 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\nabla PL}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial PG1} \\ \frac{\partial PL}{\partial PG2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0262 \\ 0.0291 \end{bmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones (49) los coeficientes de pérdidas son:

$$B = \frac{1}{2} H_0 = \begin{bmatrix} 0.0889 & 0.0785 \\ 0.0785 & 0.0889 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4724 & -0.4197 \\ -0.4197 & -0.4724 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = 0.66416$$

- Cálculo del despacho Económico.- Para asumir los valores iniciales es conveniente primero resolver el despacho simplificado, entonces:

$$\frac{df1}{dPG1} = \frac{df2}{dPG2} = \lambda; \frac{df1}{dPG1} = P1 + 3.89; \frac{df2}{dPG2} = P2 + 3.51$$

$$PG1 + PG2 = 2.6$$

$$\text{donde: } \lambda(0) = 5.0; PG1(0) = 1.11; PG2(0) = 1.49$$

$$\max |c| \leq 0.01$$

los términos del jacobiano son:

$$\frac{\partial g1}{\partial PG1} = 2a1 + 2B11\lambda; \frac{\partial g1}{\partial PG2} = 2\lambda B12; \frac{\partial g2}{\partial PG1} = 2\lambda B21$$

$$\frac{\partial g2}{\partial PG2} = 2a2 + 2B22\lambda$$

$$\frac{\partial g1}{\partial \lambda} = B1 + 2 \sum_{j=1}^n B1j PGj - 1 = B1 + 2B11 PG1 + 2B12 PG2 - 1$$

$$\frac{\partial g2}{\partial \lambda} = B2 + 2 \sum_{j=1}^n B2j PGj - 1 = B2 + 2B21 PG1 + 2B22 PG2 - 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial PG1} = -\frac{\partial g1}{\partial \lambda}; \frac{\partial h}{\partial PG2} = -\frac{\partial g2}{\partial \lambda}; \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

$$\text{además: } g1 = 2a1 PG1 + b1 - \lambda(1 - B1 - 2B11 PG1 - 2B12 PG2) = 0$$

$$g2 = 2a2 PG2 + b2 - \lambda(1 - B2 - 2B21 PG1 - 2B22 PG2) = 0$$

$$h = PG1 + PG2 - Pc - PG1^2 B11 - 2PG1 PG2 B12 +$$

$$- PG2^2 B22 - B11 PG1 - B2 PG2 - B_0 = 0$$

Evaluando estos valores en el punto inicial:

$$\Delta g1(0) = -g1(0) = 0.20$$

$$\Delta g2(0) = -g2(0) = -0.09746$$

$$\Delta h(0) = -h(0) = 0.081$$

$$J(0) = \begin{bmatrix} 1.89 & 0.785 & -1.04 \\ 0.785 & 1.89 & -0.98 \\ +1.04 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix} \Delta PG1(0) \\ \Delta PG2(0) \\ \Delta \lambda(0) \end{bmatrix} = J^{-1}(0) \begin{bmatrix} \Delta g1(0) \\ \Delta g2(0) \\ \Delta h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17188 \\ -0.09975 \\ 0.04476 \end{bmatrix}$$

los valores más cercanos a la solución son:

$$PG1(1) = PG1(0) + \Delta PG1(0) = 1.282$$

$$PG2(1) = PG2(0) + \Delta PG2(0) = 1.39$$

$$\lambda(1) = \lambda(0) + \Delta \lambda(0) = 5.0448$$

en una segunda iteración obtendremos valores que prácticamente son la solución:

$$PG1 = 1.29$$

$$PG2 = 1.392$$

$$PL = 0.07262$$

$$Pc = 2.6$$

$$\lambda = 5.05$$

En este punto las pérdidas incrementales de transmisión son:

$$\frac{\partial PL}{\partial PG1} = 2 \sum_{j=1}^n B1j PGj + B1 - 2B11 PG1 + 2B12 PG2 + B1 = -0.0245$$

$$\frac{\partial PL}{\partial PG2} = 2 \sum_{j=1}^n B2j PGj + B2 - 2B21 PG1 + 2B22 PG2 + B2 = 0.0303$$

los factores de penalización:

$$L1 = 1.0 / (1 - \partial PL / \partial PG1) = 0.9761 \quad L2 = 1.0312$$

$$\text{en el punto óptimo: } \frac{df1}{dPG1} \cdot L1 = \frac{df2}{dPG2} \cdot L2 = \lambda = 5.05$$

6.3 SOLUCION DE DESPACHO ECONOMICO MEDIANE CALCULO DIRECTO DE PERDIDAS INCREMENTALES ($\partial PL / \partial PGi$) UTILIZANDO FLUJO DE POTENCIA MEDIANTE NEWTON-RAPHSON

Hemos establecido anteriormente dos procedimientos para determinar una función analítica de las pérdidas de transmisión en función de las potencias activas de generación, esta fórmula está basada en la obtención de coeficientes de pérdidas B. Estos coeficientes una vez obtenidos, para ciertas condiciones representativas de la curva de carga, se los mantiene constantes y requieren ser actualizados de tiempo en tiempo; el despacho económico del sistema se reduce a la solución de un sistema no lineal de ecuaciones como se ha visto en 6.2.

Un método alternativo que no requiere calcular los coeficientes de pérdidas, es mediante la utilización de un método iterativo en el cual está un flujo de potencia por el método de Newton-Raphson (N-R). Con la información que existe en el jacobiano de un flujo de potencia resuelto es posible calcular directamente las pérdidas incrementales de transmisión ($\partial PL / \partial PGi$), además de los resultados de flujo se conocen las pérdidas de transmisión PL, con esta in-

formación se pasa a resolver las ecuaciones de despacho económico, cuyos resultados nuevamente retornan al flujo de potencia para las correcciones correspondientes de $\partial PL/\partial PG_i$ y PL y nuevamente la solución de despacho económico, hasta que se satisfaga un criterio de convergencia. El proceso se acelera notoriamente si se utiliza el flujo de potencia desacoplado rápido.

El modelo matemático es el siguiente:

Las pérdidas activas en un sistema de potencia puede expresarse como una función de las potencias activas y reactivas netas inyectadas a las barras del sistema

$$PL = PL(P_1, P_2, \dots, P_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$$

$$\text{donde: } P_i = P_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, V_1, V_2, \dots, V_k)$$

$$Q_i = Q_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, V_1, V_2, \dots, V_k)$$

siendo V_j y δ_j la magnitud y ángulo de voltaje de la barra j del sistema.

Un cambio incremental de la potencia de pérdidas con respecto a un cambio en el ángulo nodal de cualquier barra está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial PL}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial PL}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial PL}{\partial P_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \delta_1} + \dots + \\ &+ \frac{\partial PL}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial \delta_1} + \frac{\partial PL}{\partial Q_1} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial PL}{\partial Q_2} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_1} + \dots + \\ &+ \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \cdot \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_1} \quad i=1, \dots, k \end{aligned}$$

igualmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial PL}{\partial V_1} &= \frac{\partial PL}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial V_1} + \frac{\partial PL}{\partial P_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial V_1} + \dots + \\ &+ \frac{\partial PL}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial V_1} + \frac{\partial PL}{\partial Q_1} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial V_1} + \frac{\partial PL}{\partial Q_2} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial V_1} + \dots + \\ &+ \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \cdot \frac{\partial Q_k}{\partial V_1} \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Expresando todas estas relaciones en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial PL}{\partial \delta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial \delta_k} \\ \hline \frac{\partial PL}{\partial V_1} \\ \frac{\partial PL}{\partial V_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial V_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \\ \frac{\partial PL}{\partial P_2} & & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_2} & & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial P_k} & & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} & & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \\ \hline \frac{\partial PL}{\partial P_1} & & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_1} & & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \\ \frac{\partial PL}{\partial P_2} & & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_2} & & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial P_k} & & \frac{\partial PL}{\partial P_k} & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} & & \frac{\partial PL}{\partial Q_k} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Donde podemos observar que la matriz de derivadas parciales es el conocido jacobiano, en este caso transpuesto, utilizado en el flujo de potencia por el método de N-R. En forma compacta (54) se transcribe en:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial \delta} \\ \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ \vdots & \vdots \\ J & L \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial PL}{\partial P} \\ \vdots \\ \frac{\partial PL}{\partial Q} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Siendo la matriz $\begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix}$ el jacobiano de las ecuaciones de flujo de potencia.

Se ha demostrado que las matrices de acoplamiento N y J son insignificantes con respecto a las matrices H y L debido al principio de desacoplamiento atribuido a la alta relación de X/R en los elementos componentes del sistema de transmisión, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial PL}{\partial \delta} &\approx H^t \frac{\partial PL}{\partial P} \\ V \cdot \frac{\partial PL}{\partial V} &\approx L^t \frac{\partial PL}{\partial Q} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Con las simplificaciones adicionales que se efectúan en el jacobiano utilizando el método desacoplado rápido, (56) se transforma en:

$$\frac{\partial PL}{\partial \delta} \cdot V^{-1} = K \cdot \frac{\partial PL}{\partial P} \quad (57)$$

donde V es una matriz diagonal de magnitud de voltajes nodales y K es el jacobiano constante cuyos términos son los términos imaginarios de la matriz admitancia de barras YB . De la ecuación (57) los términos que interesan son las pérdidas incrementales de transmisión de las potencias netas inyectadas ($\partial PL/\partial P$), de las que se utilizan aquellas que tengan generación, ahora los términos del lado izquierdo de (57) fácilmente pueden obtenerse como:

$$\frac{\partial PL}{\partial \delta_i} \cdot \frac{1}{V_i} = 2 \sum_{j \neq i} [V_j \sin(\delta_i - \delta_j) g_{ij}] \quad (58)$$

donde g_{ij} es la conductancia del elemento ij . Si el elemento ij es un transformador, g_{ij} es modificada por el tap. Con los resultados del flujo de potencia se evalúa (58) y luego se determina $\frac{\partial PL}{\partial P}$ de la ecuación (57).

Con este resultado se efectúa el despacho económico, resolviendo un sistema lineal de ecuaciones dado por $\frac{\partial PL}{\partial PG_i} - \frac{1}{1 - \partial PL/\partial PG_i} = \lambda$

$i=1, \dots, n$, y $EPG - P_c - PL = 0$, esta última ecuación es lineal ya que se conoce PL del flujo de potencia como los valores de PG se ajustan se requiere un proceso iterativo.

El algoritmo de solución es: (Para una carga total P_c)

1. Resolver despacho económico simplificado, por tanto los factores de penalización L_i son unitarios ($1.0/(1 - \partial PL/\partial PG_i)$), se conoce entonces $PG_i(0)$, $L_i(0)$, $\lambda(0)$
2. Resolver el flujo de potencia utilizando el método desacoplado rápido con los valores $PG_i(k)$, número de iteración $0, 1, \dots$
3. Calcular los términos $\frac{\partial PL}{\partial \delta_i} \cdot \frac{1}{V_i}(k)$ mediante la ecuación (58).
4. Calcular las pérdidas incrementales $\frac{\partial PL}{\partial PG_i}(k)$ mediante la ecuación (57), luego obtener los factores de

$$\text{penalización nuevos } Li^{(k)} = \frac{1}{1 - \frac{\partial PL}{\partial PGI}(k)}$$

5. Suavizar los factores de penalización mediante:

$$Li_N^{(k)} = Li^{(k-1)} + \beta (Li^{(k)} - Li^{(k-1)})$$

$\beta < 1$ para evitar oscilación numérica

6. Resolver las ecuaciones lineales de despacho económico

$$\frac{df_i}{dPGI} \cdot Li^{(k)} = \lambda^{(k)}$$

$$EPGI(k) - Pc - PL(k) = 0$$

7. Verificar convergencia $|PGI^{(k)} - PGI^{(k-1)}| \leq \epsilon$, si se cumple se tiene la solución de despacho económico, caso contrario hacer $k = k+1$ y volver a 2).

BIBLIOGRAFIA

1. Estudios de Flujos Optimos de Potencia. F.Aboytes, B.Vidrio, H.Torres. México, 1979.
2. Optimal Power Dispatch - A Comprehensive Survey. H.H.Happ IEEE Trans. on PAS VOL 96, 1977, pp 841-851.
3. Operación Optima de Sistemas de Potencia. G.Argüello INECEL, Quito, 1977.
4. Economic Operation of Power Systems: L.K.Kirchmayer Editorial John Wiley & Sons. 1958.
5. Optimal load flow - A practical Outlook, A.M.Sasson IEEE Tutorial Course, 1976.
6. Penalty Factors form Newton's Method. F.L.Alvarado IEEE Trans.VOL PAS-97, 1976.
7. Optimal Power Flow Solutions. H.W.Dommel and W.F. Tinney IEEE Trans. PAS, VOL 87, 1968.

FLUJO OPTIMO DE POTENCIAS ACTIVA Y REACTIVA

ESQUEMA

El presente trabajo enfoca la optimización del flujo de potencia desde tres puntos de vista: flujo óptimo de potencia activa (despacho económico); flujo óptimo de potencia reactiva (minimización de pérdidas de transmisión); flujo óptimo de potencia en general (despacho económico y minimización de pérdidas, simultáneamente).

El método utilizado es aquel propuesto por Dommel y Tinney, el cual necesita de una formulación del flujo de potencia en variables de estado; de la formulación de funciones objetivo, y de la técnica del gradiente reducido para la optimización. El punto óptimo de operación de un SEP, se consigue cuando las variables de control toman valores tales que permiten que la función objetivo planteada tenga su valor mínimo, o muy cercano a éste.

Se presentan resultados obtenidos sobre tres sistemas de potencia sobre los cuales el esquema fue probado.

Introducción [4]

El flujo óptimo de potencia nace con el problema del despacho económico. Este problema empezó a ser discutido a partir de 1920, o quizás antes, cuando se debió repartir la carga total de un sistema, entre las unidades generadoras disponibles. Hacia 1930 se tomaron básicamente dos criterios para resolver el problema:

- El método de la carga base, en el que la unidad más eficiente era la primera en tomar carga, y lo hacía a su máxima capacidad, luego la segunda unidad más eficiente tomaba carga a su máxima capacidad, y así sucesivamente hasta satisfacer la demanda.
- El mejor punto de carga, en el que las unidades generadoras tomaban carga hasta alcanzar un punto mínimo de calentamiento, empezando con la unidad más eficiente, y cargando la menos eficiente al final.

Posteriormente se conoció que el método del costo incremental era el que daba los mejores resultados económicos, y a partir de 1931 se tomó como criterio que para realizar despacho económico, el costo incremental debe ser igual; criterio que se usa hasta hoy. Este modelo, que hoy se conoce como despacho económico simplificado, era sencillo y práctico, pero no considera las pérdidas de transmisión.

En la década de los 40, se hicieron intentos por incluir las pérdidas de transmisión, con lo que se consiguió la construcción de diagramas aproximados para calcular dichas pérdidas. Sin embargo se requería de un método que combine los costos incrementales de combustible con las pérdidas incrementales y con refinamientos de una fórmula de pérdidas.

Los trabajos de Kron y paralelamente de Kirchmayer y Stagg, dieron como resultado lo que ahora se conoce como las ecuaciones de coordinación, primeramente sugeridas por Ward y que se usan actualmente:

$$\frac{df_i}{dPG_i} + \lambda \frac{\partial PL}{\partial PG_i} = \lambda ; i = 1, 2, \dots$$

con la restricción:

$$\phi(P_i) = \sum PG_i - \sum PC_j - PL = 0$$

en donde:

$$PL = \sum_i \sum_j PG_i B_{ij} PG_j ; i, j = 1, 2, \dots$$

Al final de la década de los 50 aparece el flujo de potencia en computadores digitales. Con estas bases, a principios de la década de los 60, Squires y Carpentier formulan métodos más poderosos que no requieren de suposiciones que se hacían con la matriz (B) de coeficientes, y que pueden incluir un modelo exacto de la red. Tales modelos recibieron el nombre de flujos óptimos de potencia.

Finalmente, en 1967, Dommel y Tinney formulan el flujo óptimo de potencia partiendo de un flujo de potencia factible. El proceso de optimización conlleva la técnica de los multiplicadores de Lagrange y la técnica del gradiente reducido. Como restricciones de igualdad toman el flujo de potencia mismo. Toman como restricciones de desigualdad los límites máximos y mínimos de las variables de control. Incluyen restricciones funcionales de desigualdad, para tomar en cuenta los límites máximos y mínimos de las variables de estado y de las potencias reactivas de generación, y amplían las funciones objetivo con penalizaciones para incluir tales restricciones.

Este modelo tiene la ventaja de que no necesita de la matriz de coeficientes (B) ni de la fórmula de pérdidas, y es el motivo del presente trabajo. Para la aplicación de este modelo se requiere de:

1. Formulación del flujo de potencia en variables de estado.
 2. Formulación de las funciones objetivo
 3. Formulación del proceso de optimización
2. Formulación del flujo de potencia en variables de estado (X, Y)

Sea un sistema de potencia formado por M barras de carga, S barras de tensión controlada y una barra oscilante. Llamando N al número total de barras del sistema, se tiene que $N = M + S + 1$.

En el flujo de potencia convencional, se tiene que por definición, la potencia neta aparente en una barra K es:

$$S_K = E_K I_K^* = PNET_K + jQNET_K ; K = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

o su conjugada:

$$S_K^* = E_K^* I_K = PNET_K - jQNET_K ; K = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$I_K = \sum_{i=1}^N Y_{Ki} E_i ; K = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$E_K = V_K e^{j\theta_K} = V_K \angle \theta_K ; K = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$Y_{Ki} = |Y_{Ki}| e^{j\gamma_{Ki}} = |Y_{Ki}| \angle \gamma_{Ki} ; K, i = 1, \dots, N \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones 2, 3, 4 y 5, y separando en sus partes real e imaginaria, se llega a:

$$PNET_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i |Y_{Ki}| \cos(\theta_i - \theta_K + \gamma_{Ki});$$

$$K = 1, \dots, N \quad (6a)$$

$$QNET_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i |Y_{Ki}| \sin(\theta_i - \theta_K + \gamma_{Ki});$$

$$K = 1, \dots, N \quad (6b)$$

Llamando a los segundos términos de estas ecuaciones $P_K(V, \theta)$ y $Q_K(V, \theta)$, respectivamente (2), se tiene:

$$P_K(V, \theta) - PNET_K = 0 \quad K = 1, \dots, N \quad (7)$$

$$Q_K(V, \theta) - QNET_K = 0 \quad K = 1, \dots, N \quad (8)$$

que son las ecuaciones de incrementos, utilizadas para la solución del flujo de potencia, será necesario plantear M ecuaciones de la forma de la ec. (7), M ecuaciones de la forma de la ecuación (8) y S ecuaciones de la forma de la ec. (7), es decir, un sistema de (2M+S) ecuaciones con (2M+S) incógnitas, para obtener la solución del flujo, suponiendo que la barra 1 es la oscilante, y que por lo tanto se conocen V_1 y θ_1 .

Para plantear el flujo de potencia en variables de estado, se definen tres vectores, a saber:

\bar{x} : Vector de estado. Contiene todos los V y θ desconocidos

\bar{y} : Vector de variables independientes. Contiene todas las variables especificadas

$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$: Vector de incrementos. Se forma con las ecuaciones (7) y (8)

Estos vectores tendrán la siguiente forma:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{en las barras PQ} \\ \text{en las barras PV} \end{array}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} PNET \\ QNET \\ V \\ \theta_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{en las barras PQ} \\ \text{en las barras PV} \\ \text{en la barra oscilante} \end{array}$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} ec (7) \\ ec (8) \\ ec (8) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{para las barras PQ} \\ \text{para las barras PV} \end{array}$$

Adicionalmente a esto, al vector \bar{y} se lo puede dividir en dos vectores:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{bmatrix}$$

en donde \bar{p} es un vector constante, y \bar{u} es el vector de control y contiene las variables de control. De aquí que indistintamente se puede referir a esta modelación como en variables (\bar{x}, \bar{y}) ó variables $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$. Cabe mencionar que la composición del vector \bar{y} y está incompleta ya que los taps de transformadores con cambiadores automáticos forman también parte del vector \bar{y} , y más específicamente, del vector \bar{u} , dependiendo del tipo de optimización que se desee realizar. La solución del flujo de potencia será obtenida cuando se conozca el vector de estado \bar{x} que satisfaga la nulidad del vector $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$. El algoritmo de Newton-Raphson, para la solución del flujo de potencia, es como sigue:

1. Suponer un vector inicial de estado \bar{x}_0
2. Obtener correcciones sucesivas para \bar{x} , mediante

$$\bar{x}^{(h+1)} = \bar{x}^{(h)} + \Delta \bar{x}^{(h+1)}$$

con la ecuación recursiva:

$$\left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}^{(h)}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right] \Delta \bar{x}^{(h+1)} = - \bar{g}(\bar{x}^{(h)}, \bar{y}) \quad (9)$$

3. Probar un criterio de convergencia:

$$|\Delta \bar{x}| \leq \epsilon$$

$$\text{ó } |\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})| \leq \epsilon$$

4. Si no se satisface el criterio de convergencia; regresar al paso 2; en caso contrario, se tiene la solución \bar{x} .

En la ecuación (9) se tiene la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]$. Esta es la matriz jacobiano. El desarrollo de los vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$ y de la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]$, así como sus demostraciones, se encuentran ampliamente expuestos en la referencia [10]

3. El Flujo Optimo de Potencia

Para determinar un punto óptimo de operación de un sistema eléctrico de potencia, ha sido práctica común realizar primeramente despacho económico y luego minimización de pérdidas. Los problemas que trae consigo este método son la determinación de la matriz de coeficientes [B] y la inclusión de la fórmula de pérdidas. Esto puede obviarse mediante la utilización del flujo óptimo de potencia.

En la operación de sistemas de potencia, el poder realizar despacho económico, minimización de pérdidas, o ambos a la vez, convierten al flujo óptimo de potencia en un modelo poderoso y útil para dicha actividad. Además de poder programar adecuadamente las centrales de generación, se podrá mantener un buen perfil de voltaje a lo largo de toda la red, mediante las restricciones que se impongan al flujo óptimo, lo cual permite que el sistema opere en las mejores condiciones técnicas y económicas para una carga dada.

Formulación matemática del flujo óptimo de potencia

En general, cualquier tipo de optimización consiste en buscar el valor óptimo (máximo o mínimo) de una función objetivo, siempre y cuando en el óptimo se cumpla con un conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad.

En el caso del flujo óptimo de potencia, generalmente, la optimización es una minimización. Para que ésta sea posible, se necesita de un conjunto de variables de control y de la formulación de funciones objetivo.

Como se dijo antes, a partir del vector \bar{y} se obtendrá el vector de control \bar{u} . Este vector, dependiendo del tipo de optimización, estará conformado por una combinación de los siguientes parámetros controlables:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Taps en transformadores
- Potencias activas de generación PG

Para el propósito del presente trabajo, se consideran tres tipos de optimización, que son: flujo óptimo de potencia activa (despacho económico), flujo óptimo de potencia reactiva (minimización de pérdidas), o las dos a la vez (flujo óptimo en general). A continuación se presentan las funciones objetivo y las variables de control utilizadas en cada caso.

3.1 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo de potencia activa

La función objetivo para este caso es el costo total de generación. Para esto se consideran unidades térmicas de generación, por cuanto la función objetivo para cada unidad será su función de ENTRADA - SALIDA. Se considerará que dichas curvas son cuadráticas, por cuanto la función analítica de costo será representada, en general, por la ecuación:

$$C(PG) = a PG^2 + b PG + c \quad (10)$$

De aquí que la función objetivo será la suma de todas las funciones de costo, para las barras de generación, de modo que:

$$f = a_1 PG_1^2 + b_1 PG_1 + c_1 + \sum_i (a_i PG_i^2 + b_i PG_i + c_i) \quad (11)$$

en donde i representa cada una de las barras PV capaces de generar potencia activa.

El vector de control \bar{u} estará formado por las siguientes variables:

- Potencias activas de generación de las barras PV, no asociadas a condensadores sincrónicos.

Vétese: 1) Las potencias de generación están intrínsecamente relacionadas con el vector \bar{y} , ya que:

$$P_{NET1} = PG_1 - P_{C1}$$

- 2) No se toma la potencia de la barra oscilante como variable de control, ya que se deberá tener en cuenta las pérdidas del sistema.

3.2 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo de potencia reactiva

Puesto que no se conocen con anterioridad las pérdidas del sistema, cuando el flujo de potencia queda resuelto, la barra oscilante tendrá que cubrir dichas pérdidas, según la ecuación de equilibrio:

$$PG_1 = PL + EPC - EPG \quad (12)$$

En donde: PG_1 = potencia de generación de la barra oscilante
 PL = potencia de pérdidas del sistema
 EPC = carga total del sistema
 EPG = potencia total de generación, excluyendo a la barra oscilante.

Según esto, minimizar las pérdidas del sistema, significa precisamente minimizar la potencia neta de la barra oscilante, de aquí que:

$$f = P_{NET1} = P_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad (13)$$

El vector \bar{u} estará formado por:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Magnitud de voltaje en la barra oscilante
- Taps en transformadores

3.3 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo en general

Para este caso la función objetivo será idéntica a la función objetivo del despacho económico (ec. 11). La diferencia radica en el vector de control, que en este caso estará conformado por:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Magnitud de voltaje en la barra oscilante
- Taps en transformadores
- Potencias activas de generación en las barras PV, no asociadas a condensadores sincrónicos.

3.4 Modelo general de optimización

Con la función objetivo y las variables de control para cada uno de los casos planteados, el modelo general será expresado como:

$$\min_{\bar{u}} f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (14)$$

Sujeto a las restricciones de igualdad impuestas por el flujo de potencia:

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \quad (15)$$

Para resolver el problema, se aplica el método clásico de optimización de los multiplicadores de Lagrange, para lo cual se debe obtener la función ampliada de Lagrange:

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (16)$$

En donde los λ_i , elementos del vector $\bar{\lambda}$, son llamados los multiplicadores de Lagrange. La función ampliada de Lagrange, deberá cumplir las siguientes condiciones necesarias, en el mínimo:

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{\lambda} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{u}} \right]^T \bar{\lambda} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \quad (19)$$

La ecuación (17) contiene $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]^T$, que como se vio antes, es la matriz jacobiano de la última iteración del flujo de potencia, razón por la cual se sugiere [2] que se use el método formal de Newton-Raphson para la resolución del mismo. Esto porque se requiere del conocimiento de todo el jacobiano, y no solamente de sus partes dominantes.

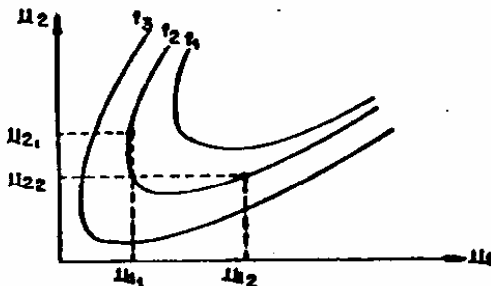
La ecuación (18) contiene la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{u}]$ que se conoce como el jacobiano reducido. La ecuación (19) es igual a la ecuación (15) y es una ecuación vectorial que representa al flujo de potencia.

Método del gradiente reducido para la solución del flujo óptimo de potencia

En cualquier punto factible, el flujo de potencia puede ser resuelto, es decir que la ecuación (19) puede ser satisfecha. Una vez resuelto el flujo de potencia, con ayuda del jacobiano de la última iteración del flujo, y con el vector $\partial f / \partial \bar{x}$, se puede encontrar el vector $\bar{\lambda}$, a partir de la ecuación (17).

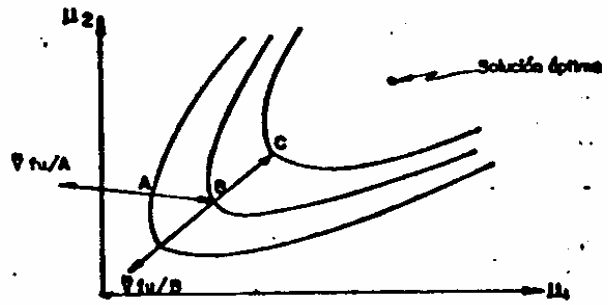
Reemplazando este vector $\bar{\lambda}$ en la ecuación (18), se encontrará, en general que $\partial L / \partial \bar{u} \neq 0$, ya que el punto factible de operación, no será necesariamente el óptimo. El vector $\partial L / \partial \bar{u}$ tiene un significado importante; es el vector gradiente \bar{v}_{fu} , el cual es ortogonal a los contornos de valores constantes de la función objetivo [2].

Los contornos de valores constantes de las funciones objetivo que se está planteando, son curvas convexas, y en el caso de dos dimensiones, tienen las siguientes formas:



En donde las curvas más abiertas tienen mayor valor, así, $f_3 > f_2 > f_1$. Cada una de estas curvas indica el lugar geométrico en donde la función objetivo tiene un valor constante, así por ejemplo, se tendrá un valor f_2 con las coordenadas (u_{11}, u_{21}) ó con las coordenadas (u_{12}, u_{22}) . Partiendo de este concepto, se puede obtener infinidad de pares de coordenadas para obtener un mismo valor de las funciones objetivo, en el caso de dos dimensiones.

Por otro lado, las ecuaciones (17), (18) y (19) son ecuaciones no lineales y deben ser resueltas por métodos iterativos. El esquema iterativo más simple es el "método del descenso más pronunciado" llamado también método del gradiente reducido. La idea básica de este método es partir de una solución factible (un punto en la curva anterior) y hacer que la optimización busque nuevas soluciones en la dirección del descenso más pronunciado, es decir, en la dirección del gradiente negativo. El nuevo punto factible encontrado estará más cercano al punto óptimo. La interpretación gráfica del método, en dos dimensiones, es la siguiente:



En el gráfico anterior, si A es una solución factible inicial, y si se evalúa el gradiente \bar{v}_{fu}/A , en este punto, se encontrará la dirección en que más rápidamente crecen las funciones. Por lo tanto, si se encuentra otra solución B, en la dirección del gradiente negativo, esta nueva solución tendrá un menor valor para la función objetivo y, consecuentemente, B estará más cerca de la solución óptima que A. Procediendo de la misma forma, se encontrará el punto C, y así sucesivamente hasta satisfacer un criterio de convergencia.

Se llama método del gradiente reducido porque para hacer las correcciones descritas, además de cambiar, de signo al gradiente, se lo multiplica por una constante c.

5. Algoritmo de solución

El algoritmo de solución por el método del gradiente reducido es el siguiente [2]:

- Asumir un conjunto de variables de control, para formar el vector de control \bar{u} .
- Encontrar una solución factible del flujo de potencia, por el método de Newton-Raphson formal. Con esto se obtendrá la matriz jacobiano en el punto de solución, en forma factorizada.
- Resolver la ecuación (17) para obtener $\bar{\lambda}$

$$\left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{\lambda} = - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}} \quad (20)$$

- Insertar el vector $\bar{\lambda}$ obtenido, en la ecuación (18) para obtener el gradiente \bar{v}_{fu} .

$$\bar{v}_{fu} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{u}} \right]^T \bar{\lambda} \quad (21)$$

El gradiente \bar{v}_{fu} mide la sensibilidad de la función objetivo con respecto a cambios en el vector \bar{u} , sujeto a las restricciones de igualdad (19). Nótese que el vector $\partial f / \partial \bar{u}$, por sí mismo, no da información útil puesto que ignora las restricciones de igualdad [2].

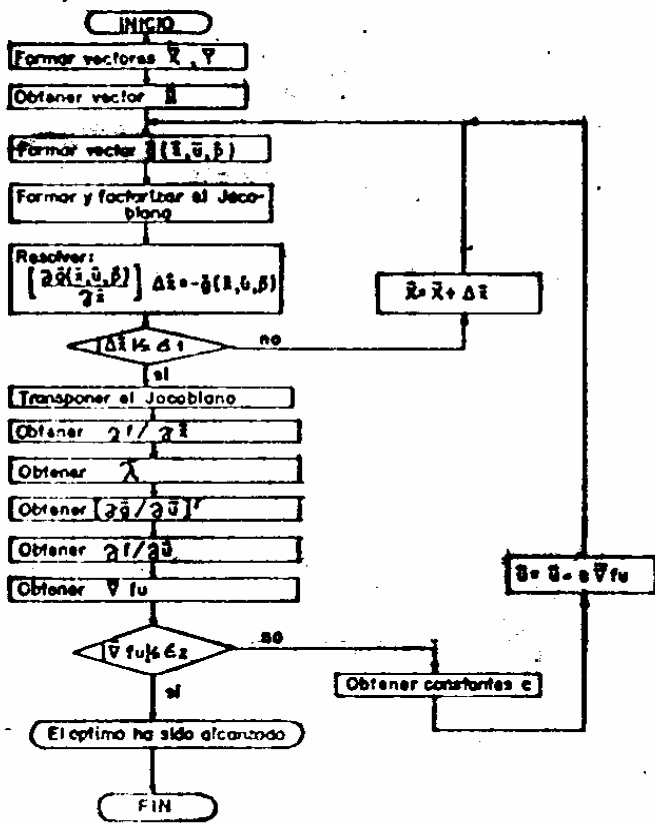
- Verificación de convergencia: Si $|\bar{v}_{fu}|$ es suficientemente pequeño, el mínimo (óptimo) ha sido alcanzado, de otra forma ir al paso f.
- Encontrar un nuevo valor para cada una de las variables de control:

$$\bar{u} \text{ (nuevo)} = \bar{u} \text{ (anterior)} + \Delta \bar{u} \quad (22)$$

$$\text{con: } \Delta \bar{u} = -c \bar{v}_{fu}$$

y regresar al paso b)

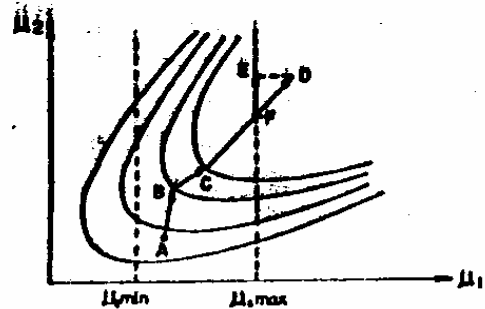
Este algoritmo sugiere el siguiente diagrama de flujo:



Las restricciones de la expresión (23) son manipuladas de modo que el algoritmo descrito en la sección 5, no envíe a las variables de control más allá de sus límites permisibles. Si cualquier componente del vector \hat{u} , al corregirse con Δu_i , llega a tener un valor tal que exceda uno de sus límites, entonces u_i se colocará en el límite correspondiente: [2]

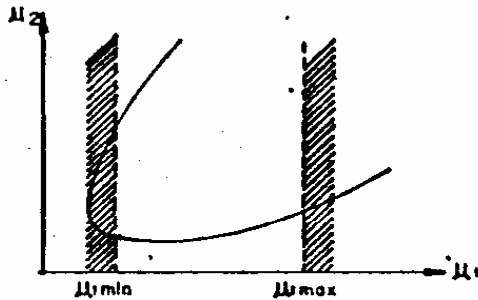
$$u_i \text{ (nuevo)} = \begin{cases} u_{i, \max}, & \text{si } u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i > u_{i, \max} \\ u_{i, \min}, & \text{si } u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i < u_{i, \min} \\ u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i, & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (24)$$

Esto implica que cuando una de las variables de control ha llegado a uno de sus límites, entonces el movimiento en la dirección del gradiente negativo puede no efectuarse, sino que se realizará a lo largo de la proyección del gradiente negativo sobre el límite alcanzado. Gráficamente, en dos dimensiones, se tiene:



Modelo con restricciones de desigualdad

En este modelo se incluyen restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control, componentes del vector u . El restringir dichos parámetros significa reducir el amplio espacio de posibles soluciones, a un espacio más pequeño, en donde los parámetros de control tomen valores que están entre sus límites máximos y mínimos. Gráficamente, en dos dimensiones, significa:



Como se observa, se ha reducido el espacio de posibles soluciones. En este caso, solamente se ha restringido a una variable de control u_1 , pero en general se puede restringir a todos los parámetros de control, y de hecho, en casos reales, se procede así.

Matemáticamente, el modelo con restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control se plantea como sigue:

$$\min_u f(\bar{x}, \bar{u})$$

Sujeto a las restricciones de igualdad

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$$

Y a las restricciones de desigualdad:

$$\bar{u} \min \leq \bar{u} \leq \bar{u} \max \quad (23)$$

Los movimientos sucesivos en las direcciones de los gradientes negativos se efectúan a partir del punto A, hasta llegar al punto C. En este punto, el algoritmo sin restricciones de desigualdad enviaría a una solución en el punto D. Sin embargo, al incluir tales restricciones, se tiene una solución en el punto E. Dicho en otras palabras, del punto C se llegaría al punto F y de aquí, al punto E, en la dirección de la proyección del gradiente negativo sobre el límite alcanzado.

Ahora, no importa que un parámetro haya alcanzado un límite; su participación en el gradiente debe ser siempre tomada en cuenta, ya que en los siguientes ciclos iterativos puede salir del límite, hacia regiones no permitidas, o en el otro caso, volver a regiones donde su valor esté dentro del rango permitido. [2]

Cuando hay restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control, en el mínimo las componentes del vector gradiente ∇f_u deben cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 & \text{si } u_{i, \min} \leq u_i \leq u_{i, \max} \\ \frac{\partial L}{\partial u_i} \leq 0 & \text{si } u_i = u_{i, \max} \\ \frac{\partial L}{\partial u_i} \geq 0 & \text{si } u_i = u_{i, \min} \end{cases} \quad (25)$$

El teorema de Kuhn-Tucker prueba que las condiciones (25) son necesarias en el mínimo, puesto que las funciones involucradas son convexas.

Modelo con restricciones funcionales

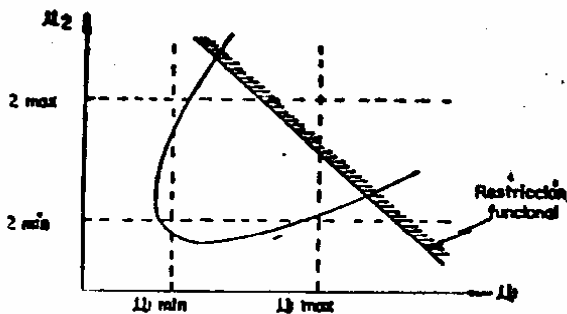
Además de las restricciones de desigualdad sobre el vector de control \bar{u} , puede también haber restricciones funcionales de desigualdad:

$$\theta(\bar{x}, \bar{u}) \leq 0 \quad (26)$$

Un caso frecuente de este tipo de restricciones son los límites de las variables dependientes o de estado, componentes del vector \bar{x} .

$$\bar{x}_{\min} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\max} \quad (27)$$

Gráficamente, en dos dimensiones, se presentan como:



El problema de este tipo de restricciones está en que no pueden ser manipuladas de la misma forma que las restricciones sobre los parámetros de control. Existen algunos métodos para tomar en cuenta las restricciones funcionales de desigualdad, de los cuales los más importantes son:

1. Linealizar el problema y usar programación lineal.
2. Transformar las restricciones funcionales a restricciones de desigualdad sobre parámetros de control, cambiando variables x a u , y viceversa.
3. Técnica del sumatorio del gradiente múltiple.

Sin embargo estos tres métodos necesitan de la matriz de sensibilidad, o al menos de sus elementos dominantes, para relacionar cambios en u para cambios en x .

El método que plantean Dommel-Tirney es el método de penalización, que consiste en aumentar a la función objetivo, penalizaciones a las restricciones funcionales, lo cual hace retroceder la solución a un punto suficientemente cercano a la restricción. Se escoge este método por tres razones:

1. Las restricciones funcionales tienen rara vez límites rígidos, sino que más bien tienen límites blandos.
2. Este método añade muy poco al algoritmo, ya que las penalizaciones influyen solamente en los vectores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial u$.
3. Este método da soluciones factibles en donde otros métodos, con límites rígidos, excluirían soluciones.

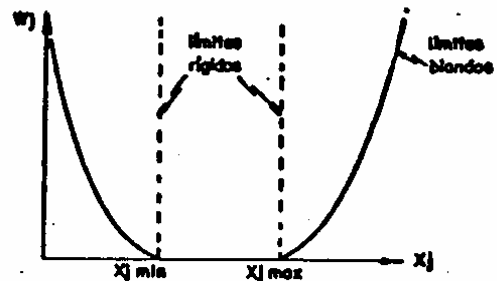
Para usar el método de penalización se deberá modificar las funciones objetivo de la siguiente manera:

$$\text{(con penalización)} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \sum_j W_j \quad (28)$$

donde se introduce una penalización W_j para cada una de las restricciones funcionales. Estas funciones de penalización tienen la siguiente forma:

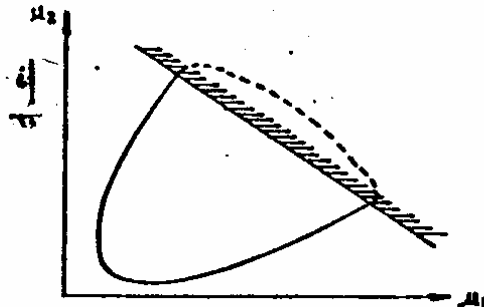
$$W_j = \begin{cases} s_j (x_j - x_{j,\max})^2; & \text{cuando } x_j > x_{j,\max} \\ s_j (x_j - x_{j,\min})^2; & \text{cuando } x_j < x_{j,\min} \end{cases}$$

Las funciones de penalización pueden ser representadas gráficamente del siguiente modo:



Los límites blandos se acercan más a los rígidos cuanto más alto es el valor de los s_j . De aquí que el método sugiere que se empiece el proceso de optimización con valores bajos de s_j , y que se los vaya incrementando a lo largo del proceso, si la solución excede a un determinado límite de tolerancia.

La introducción de penalización en la función objetivo hace que los contornos de ésta se cierren cerca de la restricción funcional



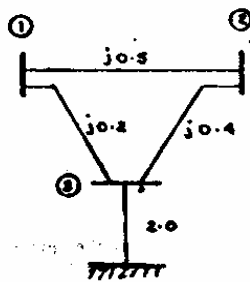
Cuanto más alto sea el valor de s_j , más cercano estará el cierre (de los contornos) a la restricción funcional.

En el presente trabajo se ha tomado como restricciones funcionales:

- Las diferencias angulares entre dos barras interconectadas, que deberán ser menores a un cierto ángulo α_{\max} especificado.
- Las magnitudes de voltaje de las barras PQ, que deberán estar dentro de sus límites máximo y mínimo, y que no son controlables.
- Las potencias reactivas de generación de las barras PV y oscilante, que también deberán estar dentro de sus límites máximo y mínimo.

El presente trabajo se halla desarrollado en detalle en la referencia [10], en donde se puede encontrar todos los detalles de modelación expuestos brevemente aquí.

5. PROBLEMAS PROPUESTOS



$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial p} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial p}$$

para $X > R$

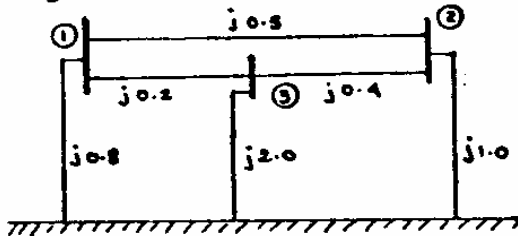
$$\frac{\partial P}{\partial p} < \frac{\partial P}{\partial p} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial p} < \frac{\partial P}{\partial p}$$

para $R > X$

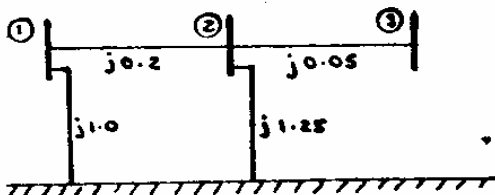
PROBLEMAS PROPUESTOS

MATRICES DE RED Y_B , Z_B

1. En la siguiente red se dan los valores de impedancia de los elementos en p.u. Determine Y_B y Z_B .



2. Pruebe que en el sistema del problema 1, $Y_B = A^T [y] A$.
3. Para la red de la figura siguiente, en la que los valores indicados son de impedancia en p.u.



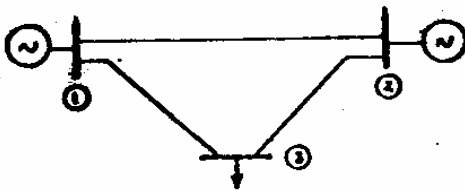
Encontrar:

- Y_B y Z_B mediante pruebas de cortocircuito y circuito abierto.
 - Encontrar Z_B por inversión de Y_B .
 - Formar Y_B y Z_B por sus algoritmos.
4. Probar que para un sistema de potencia que no tiene conexión a través de, por lo menos un elemento de cierta impedancia a la barra de referencia, Z_B no puede definirse aunque Y_B si lo esté.
5. Demuestre que para obtener $Z_B^{(b)}$ (matriz impedancia de barras con respecto a la barra de referencia b) en función de $Z_B^{(a)}$ (del mismo sistema, formada con respecto a la barra a), se utiliza la siguiente relación:

$$Z_{ij}^{(b)} = Z_{ij}^{(a)} - Z_{ib}^{(a)} - Z_{bj}^{(a)} + Z_{bb}^{(a)}$$

FLUJOS DE POTENCIA

6. Dado el siguiente sistema de potencia



que tiene las siguientes características

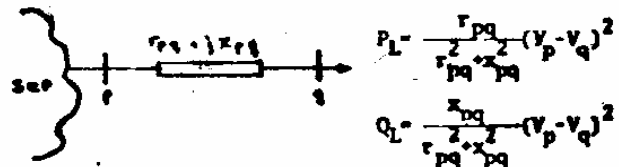
p	q	y_{pq} (p.u.)
1	2	-j10.0
2	3	-j5.0
1	3	-j5.0

y las condiciones operativas siguientes:

Barra p	Tipo	Voltaje V_p	Angulo δ_p	Potencias Netas P_p Q_p
1	OSC.	1.0	0.0	-----
2	GEN.	1.1	---	5.3217
3	CAR.	---	---	-3.6392 -0.5339

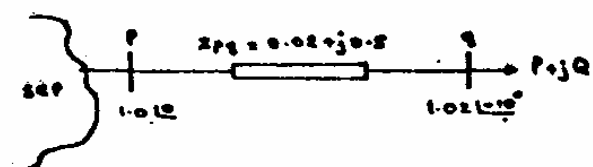
Encontrar el flujo de potencia por la red utilizando el método de Newton-Raphson completo y el desacoplado rápido.

- Repita el problema 6 utilizando el método de Newton-Raphson en coordenadas rectangulares y el de segundo orden.
- Utilizando el jacobiano en el punto de solución del flujo de potencia, determine los nuevos valores de voltaje en el sistema para una variación del 15% en los valores de potencia neta en la barra 3. (Utilice la matriz de sensibilidad $S = J^{-1}$ del prob. 6).
- Pruebe que utilizando $\Delta \bar{E}_B = Z_B \cdot \Delta \bar{I}_B$ puede obtener valores similares al del problema 8. ($\Delta \bar{E}_B$ es la variación de voltajes de barra, Z_B la matriz impedancia de barras del sistema y $\Delta \bar{I}_B$ la variación de corrientes inyectadas en la red).
- Si conecta un capacitor de susceptancia $j0.6$ p.u. en la barra 3, encontrar su nuevo voltaje. (Prob. 6).
- Probar que en la línea de transmisión de la figura siguiente las pérdidas activas y reactivas están dadas aproximadamente por:



12. En el siguiente sistema calcular P_{12} , Q_{12} , $\frac{\partial P_{12}}{\partial V_2}$,

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial V_2}, \frac{\partial Q_{12}}{\partial V_2}, \frac{\partial Q_{12}}{\partial V_2}, P, Q \text{ y obtenga conclusiones.}$$



III. CONTROL DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

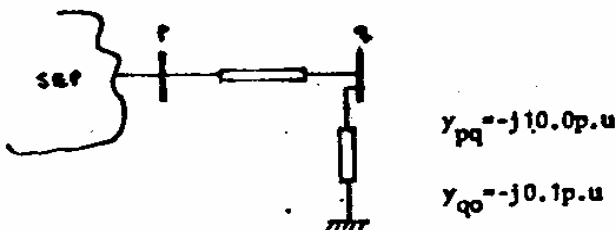
13. En el sistema del problema 1 se inyecta las corrientes $I_1 = 1.0 \angle -90^\circ$ e $I_2 = 1.2 \angle -60^\circ$ p.u.; determinar:

- Los voltajes (V, δ) de las barras del sistema
- La dirección de flujo de potencia activa y reactiva en cada extremo de los elementos del sistema.
- Calcular el flujo de potencia $S_{23} = P_{23} + jQ_{23}$
- Verificar si se cumplen las relaciones:

$$\Delta V = \frac{Qx}{V} \quad \Delta \delta = \frac{Px}{V}$$

- Determinar la regulación de voltaje de la barra 3 si su voltaje de vacío es 1.0 p.u.
- Determinar cuales son barras netas de generación y carga.
- Si se conecta un capacitor de reactancia 5.0 p.u en la barra 3, cuál es la variación de voltaje en cada barra y cuál es la magnitud de voltaje final de las mismas, después de la conexión?

14. En el siguiente sistema de potencia:



- Si la magnitud de voltaje $V_p = 1.0$ p.u., indique si V_q es igual, menor o mayor que 1.0 p.u.
- Si se desconecta la línea pq el voltaje V_p será igual, menor o mayor que 1.0 p.u.

15. Si se transmite potencia activa y reactiva de una barra p a una q a través de una línea de transmisión de impedancia $z_{pq} = R + jX$ probar que:

$$\frac{\partial P_p}{\partial R} \geq \frac{\partial P_q}{\partial R} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_p}{\partial R} \geq \frac{\partial Q_q}{\partial R}$$

para $X > R$

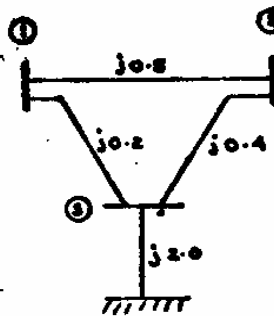
$$\frac{\partial P_p}{\partial X} \leq \frac{\partial P_q}{\partial X} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_p}{\partial X} \leq \frac{\partial Q_q}{\partial X}$$

para $R > X$

los valores de las derivadas son sus módulos.

16. La siguiente red en la que se indica los valores de impedancia en p.u., tiene las siguientes condiciones operativas:

$$\begin{aligned} \Delta V_{12} &= -0.0222 & \Delta V_{13} &= 0.0631 \\ \Delta \delta_{12} &= -5.17^\circ & \Delta \delta_{13} &= -1.6^\circ \end{aligned}$$



a. Calcular el flujo de potencia S_{12} y S_{13} , sabiendo además que por el elemento 3-0 circula una potencia cuya magnitud es 0.436 p.u.

b. Determinar los voltajes en magnitud y ángulo de las barras del sistema.

c. La potencia neta inyectada en la barra 1.

17. Los transformadores con cambio automático de taps bajo carga (LTC) que están en el sistema de transmisión, generalmente tienen un cambiador con taps sin carga en el lado de alta tensión, en tanto que el LTC está en el lado de baja. Determinar el modelo equivalente del transformador para análisis de sistemas eléctricos.

18. Dos barras (p-q) están interconectadas por dos transformadores en paralelo cuyas reactancias son $X_1 = j0.1$ y $X_2 = j0.2$ p.u. La corriente de carga en la barra q es $I = 1.0 \angle -30^\circ$ y su voltaje $E_q = 1.0 \angle 0^\circ$ p.u. Cuál debe ser la posición de los taps t1 y t2 para conseguir la mínima transferencia de potencia por el transformador 1?

19. Si n transformadores de igual reactancia se encuentran en paralelo, encontrar el transformador equivalente si los transformadores tienen diferentes posiciones de taps, además encontrar la distribución del flujo de potencia por cada uno de ellos.

20. Tres transformadores de reactancia 0.1 se encuentran en paralelo y tienen sus taps en 1.0, 1.1 y 0.9, la carga es $0.8 + j0.6$ p.u. Encontrar el aporte por cada transformador a la carga, asumir $V_q = 1.0$.

21. Repetir el problema anterior utilizando el método aproximado de corrientes circulatorias.

22. Obtener los límites de transferencia (P_{max}, V_q, LIM) en el extremo q de una línea de transmisión no compensada a) Considere $Z_L = jX_L$ y $\cos \varphi = 1.0$ y b) $\cos \varphi \neq 1.0$ y $Z_L = jX_L$ (asuma para ambos casos que el voltaje del extremo emisor p es $E_p = 1.0 \angle 0^\circ$).

23. Dos líneas de transmisión en paralelo tienen una carga activa equivalente a su SIL en su extremo receptor (cada una). En cierto instante ocurre la desconexión de una ellas; aproximadamente cuántos MVAR absorbe o entrega la línea restante del sistema? a. Cuando la desconexión es en un extremo. b. Cuando se desconectan los dos extremos de la línea. ($B_c = 0.09$ p.u. de cada línea en base 100 MVA).

24. Repetir el problema anterior para el caso en que se conecte una tercera línea.

25. Una línea de 138 KV tiene conectada en su extremo una carga resistiva igual a 1.5 veces el SIL de la línea. Si la magnitud de voltaje en este extremo es $1.0 \angle 0^\circ$. Cuál es el voltaje en el extremo emisor y el flujo de potencia que sale desde él? Suponga que $R = 0.0 + j0.3$ en base 100 MVA y que el aporte total de potencia reactiva de la línea es de 8 MVAR.

Una línea de 138 KV tiene las siguientes características $R = 0$, $X_L = 0.3$, $R_c = 0.08$ en base 100 MVA. Se conecta la línea en vacío a una barra de voltaje 1.0 p.u. ¿Cuál es el voltaje del extremo libre?

Una máquina sincrónica cuya reactancia $X_s = 0.9$ p.u. opera con un voltaje terminal de 1.0 p.u. y un voltaje de generación de 1.5 p.u. La máquina genera 0.25 p.u. MW. Si se disminuye un 30% la corriente de excitación, ¿cuál es la variación de potencia activa y reactiva?

CONTROL POTENCIA-FRECUENCIA (p-f)

En un sistema eléctrico que opera en condiciones de estado estable a frecuencia nominal, se produce un incremento de carga de 25 MW. Por acción de la respuesta primaria del sistema de regulación y por el amortiguamiento de la carga, las nuevas condiciones de estado estable se obtienen a una frecuencia de 59.8225 Hz; si la carga inicial conectada al sistema se redujo en 0.59164 MW por efecto de la disminución de la frecuencia, determinar:

- a. La regulación equivalente del sistema
- b. La carga total inicial del Sistema ($D = 1.0$ p.u.)
- c. La carga adicional que toma el sistema de generación por efecto del incremento de los 25 MW.
- d. La velocidad inicial de descenso de la frecuencia si la constante de inercia equivalente es $H=3.0$ p.u. en base de la generación total inicial.

Dos sistemas de potencia A y B están interconectados por una línea de transmisión y tienen características de regulación R_A y R_B HZ/MW, se desprecia el amortiguamiento de la carga en los dos sistemas. Si se produce un incremento de carga de 500 MW en el sistema A ocurre un incremento de 300 MW por la línea de interconexión, de B a A. Si en estas circunstancias, se desconecta la línea, la desviación final de la frecuencia en el sistema A es de 1HZ. Determinar R_A y R_B (P_{BA} inicial = 0.0 MW).

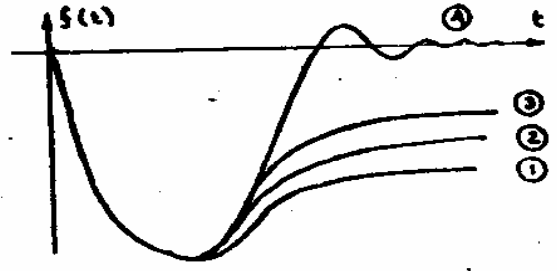
Se tiene un sistema con una regulación equivalente R_{eq} y un coeficiente de amortiguamiento D . Establecer un procedimiento experimental para determinar R_{eq} y D .

Un sistema eléctrico de potencia está compuesto por tres unidades de generación con características R_1, R_2 y R_3 y opera en un momento dado a una frecuencia de 60 HZ. Ocorre un incremento de carga de 50MW y el sistema adquiere un nuevo estado estable por efecto de la regulación primaria, en el cual los generadores toman una carga de 49.36MW y de la cual $\Delta P_{G2} = \Delta P_{G3}$. Si la frecuencia final del sistema es 59.96 HZ, calcular o determinar R_1, R_2, R_3 y D , sabiendo además que el generador 1 toma una carga equivalente al amortiguamiento de la carga para una desviación de frecuencia de 0.4 HZ.

Un sistema de potencia tiene una carga de 600 MW y en el cual las unidades más grandes tienen capacidades de 50, 75 y 100 MW. Establezca un esquema de seccionamiento de carga para sujeción contingencia simple de cualquier una de estas unidades. Asuma $H_{eq} = 3.0$ p.u. en base 600 MW.

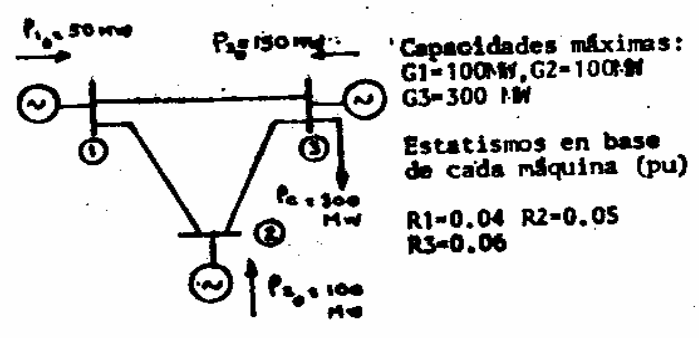
Un sistema está compuesto por tres generadores idénticos de 100 MW cada uno, en cierta condición operativa abastecen de igual forma una carga de 180 MW. El estadístico equivalente del sistema de generación es 0.01HZ/MW, la carga tiene un amortiguamiento de 2.0 p.u. uniforme para toda carga conectada, súbita y simultáneamente se dispara uno de los generadores y 30 MW de carga. ¿Cuál es la frecuencia final del sistema sin regulación suplementaria.

Analice si en un sistema de potencia por efecto de la regulación primaria y para las mismas condiciones iniciales se pueden dar las siguientes respuestas de frecuencia para un mismo incremento de carga ΔP (NOTA: Analizar en qué circunstancias se darían las respuestas 1,2,3 o 4 por efecto de regulación primaria).



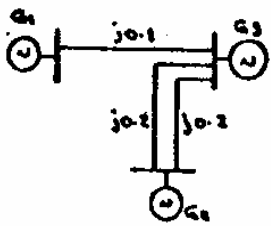
En un SEP existen n generadores de idéntica capacidad. En un momento determinado ocurre un aumento de carga ΔP , los generadores toman las siguientes cargas: $\Delta P_2 = 2\Delta P_1, \Delta P_3 = 3\Delta P_1, \dots, \Delta P_n = n\Delta P_1$. Determinar el estadístico de cada máquina, la regulación equivalente. Repetir el problema cuando se bloquean los reguladores de las máquinas 2,4,6,8,.....etc.

En el sistema de la figura siguiente, cuál será la nueva frecuencia si la carga aumenta 50 MW. Por cada 1% de variación de frecuencia ocurre 1% de variación de carga. Calcular además la carga que toma cada máquina.



Una vez que se hace regulación secundaria con el G_3 (problema anterior) la frecuencia retorna a 60 HZ, luego de lo cual se desconecta el G_1 . Calcular la velocidad inicial de caída de la frecuencia ($H_1=2.0, H_2=2.0, H_3=4.0$ en sus bases) y la frecuencia final después de la regulación primaria.

El sistema de potencia de la figura siguiente, en el que los tres generadores de 100MW c/u son idénticos en características, abastecen de igual forma una carga de 180 MW. El estadístico equivalente de generación del sistema es 0.02 HZ/MW - la carga tiene un amortiguamiento de 2.0 pu uniforme para toda carga conectada. A partir de la condición inicial:



- a. Súbita y simultáneamente se desconecta la línea 1-2 y 30 MW de carga. ¿Cuál es la frecuencia final de las barras 1, 2 y 3 sin regulación suplementaria.
- b. Si se desconecta la línea 2-3, ¿cuál es la frecuencia final de las barras 1, 2 y 3 sin regulación suplementaria?

IV CONTROL OPTIMO DE POTENCIA

38. Se tienen tres generadores cuyas funciones de costo son:

$$f_1 = a_1 P_1 + b_1 \quad 2 \leq P_1 \leq 8 \quad a_3 > a_2 > a_1$$

$$f_2 = a_2 P_2 + b_2 \quad 0 \leq P_2 \leq 10 \quad b_1 > b_2 > b_3$$

$$f_3 = a_3 P_3 + b_3 \quad 4 \leq P_3 \leq 15$$

¿Cuál es el despacho económico para una carga de 30 MW? (potencia de pérdidas = 0).

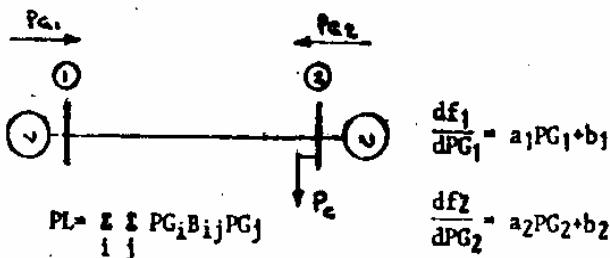
39. En una central existen n máquinas térmicas, las cuales tienen funciones de costo de la forma $a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i$; (todas las máquinas son diferentes). Se desea representar a toda la central por una sola máquina de función de costo:

$$F = AP^2 + BP + C$$

demostrar que: $A = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$; $B = A \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$

$$C = \frac{B^2}{4A} + \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{b_i^2}{4a_i} \right)$$

40. Al efectuar el despacho económico del sistema de la figura siguiente se encuentra que el costo incremental del sistema es λ . Determinar P_{G1} , P_{G2} , P_C y P_L en este punto óptimo; sabiendo que en un caso base, cuando se transmite una potencia P_{12} , las pérdidas del sistema son P_L y además, las funciones de costo incremental de cada generador son:

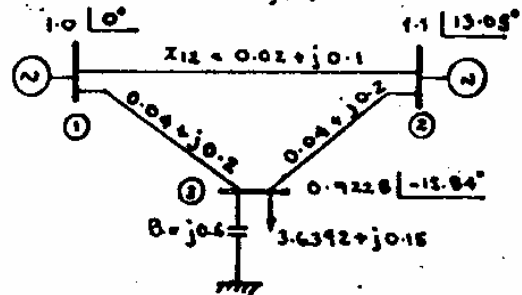


41. Se tienen tres unidades de generación

COMBUSTIBLE	P _{MAX} MW	P _{MIN} MW
1 CARBON	600	150
2 DIESEL	400	100
3 BUNKER	200	50

	H(ENTRADA-SALIDA)	$\frac{\text{MBTU}}{h}$	COSTO \$ / MBTU
1. CARBON	$510 + 7.2P_1 + 0.00142 P_1^2$	P_1^2	1.1
2. DIESEL	$310 + 7.85P_2 + 0.00194 P_2^2$	P_2^2	1.0
3. BUNKER	$78 + 7.97P_3 + 0.00482 P_3^2$	P_3^2	1.0

- a. ¿Cuál es el despacho económico para una carga de 850 MW?
- b. Si el precio de carbón se reduce a 0.9 \$/MBTU, ¿cuál es el nuevo despacho?
42. Un sistema opera en despacho económico con $\lambda = 12.5$ \$/MWh. Al incrementar la generación de una unidad en 100KW (mientras las demás se mantienen constantes) ocurre un incremento de pérdidas de 12 KW. ¿Cuál es el costo adicional por hora si la generación de esta unidad se incrementa en 1 MW?
43. ¿Cómo efectúa el despacho económico en un SEP si las funciones de costo de las máquinas son unas cuadráticas y otras lineales? ($P_L = 0$).
44. Obtenga los coeficientes de pérdidas B del siguiente sistema de potencia, en el que se indica su caso base de flujos.



45. Si en el problema anterior, $\frac{df_1}{dP_{G1}} = P_{G1} + 2$ y $\frac{df_2}{dP_{G2}} = P_{G2} + 1.5$ y si $2 \leq P_{G1} \leq 10$ realice un despacho económico, y luego un flujo óptimo general (establezca sus condiciones, límites, etc).

