C A P I T U L O III

ALGEBRA DE BOOLE

Los dispositivos y circuitos digitales operan en el sistema numérico binario; esto es, todas las variables circuitales son 0 o 1 (bajo o alto). Esta característica de los dispositivos digitales hace posible usar el algebra booleana como una herramienta matemática para el análisis y diseño de circuitos y sistemas digitales. El hecho de tener solo dos valores posibles en el álgebra booleana, lo hace diferenciar del álgebra ordinaria.

En álgebra booleana existen tres operaciones básicas:

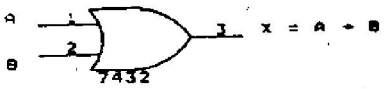
1.- Suma lógica o suma OR u operación OR, cuyo signo es el símbolo (+).

2.- Multiplicación lógica o multiplicación AND u operación AND, con símbolo (.).

3.- Complementación lógica o inversión u operación NOT, con el símbolo ( ).

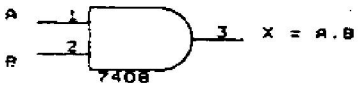
Operación OR: $X = A + B$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



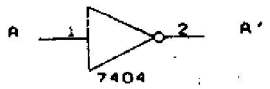
Operación AND: $X = A . B$

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Operación NOT: $X = \overline{A}$

A	X
0	1
1	0



La aplicación más importante del álgebra booleana, es la si plificación de circuitos lógicos, mediante ciertos teorem booleanos.

POSTULADOS Y TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA DE BOOLE

LEY	PRODUCTO	SUMA
Conmutativa	$X_1 . X_2 = X_2 . X_1$	$X_1 + X_2 = X_2 + X_1$
Asociativa	$X_1 . (X_2 . X_3) = (X_1 . X_2) . X_3$	$X_1 + (X_2 + X_3) = (X_1 + X_2) + X_3$
Distributiva	$X_1 . (X_2 + X_3) = X_1 . X_2 + X_1 . X_3$	$X_1 + (X_2 . X_3) = (X_1 + X_2) . (X_1$
Absorción	$X_1 . (X_1 + X_2) = X_1$	$X_1 + (X_1 . X_2) = X_1$
Idempotencia	$X_1 . X_1 = X_1$	$X_1 + X_1 = X_1$
Negación	$X . \overline{X} = 0$	$X + \overline{X} = 1$
Doble Negac.	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$
Ley de Morgan	$\overline{X_1 . X_2} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$	$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X}_1 . \overline{X}_2$
Operaciones con 0 y 1	$X . 1 = X$ $X . 0 = 0$ $\overline{0} = 1$	$X + 1 = 1$ $X + 0 = X$ $\overline{1} = 0$

Es importante señalar que en estos teoremas la variable X puede realmente representar una expresión que contenga más de una variable.

ENERALIZACION DE ALGUNOS TEOREMAS

(4) $A + A.B + A.C + A.X = A$

(4) $A.(A + B).(A + C).(A + X) = A$

(3),(5),(6) $A.(\bar{A} + B).(\bar{A} + C).(\bar{A} + X) = ABCX$

$A + \bar{A}.B + \bar{A}.C + \bar{A}.X = A + B + C + X$

(7) $\overline{A + B + C + X} = \bar{A} . \bar{B} . \bar{C} . \bar{X}$

$\overline{A . B . C . X} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{X}$

on el álgebra de Boole se puede simplificar funciones lógi-
s, esto es obtener el circuito lógico más simple.

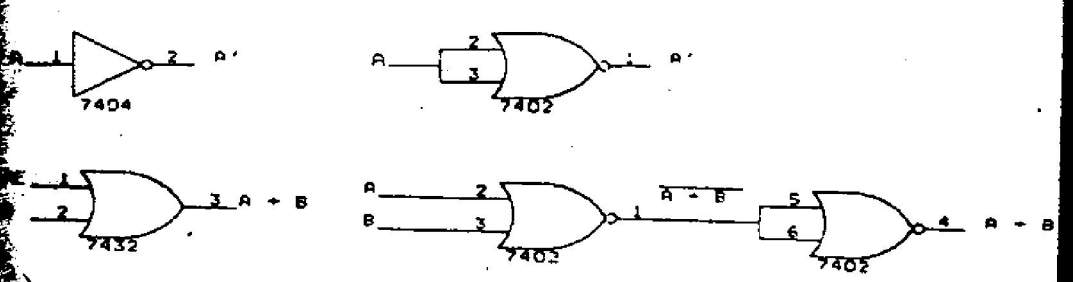
partir de estos postulados podemos concluir que se cumple
PRINCIPIO DE DUALIDAD, que dice: "Si se demuestra que un
orema determinado es verdadero, entonces inmediatamente se
noce un teorema dual verdadero". El teorema dual se ob-
ene intercambiando: las funciones AND y OR, los 0 y 1 y
nteniendo las variables y los paréntesis inalterados.

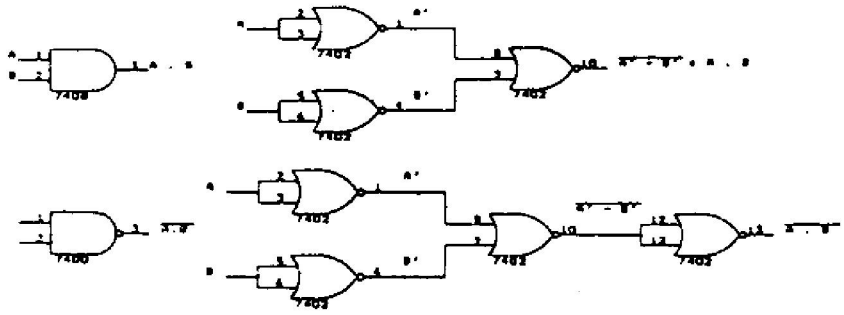
emplo:

$X + 0 = X$

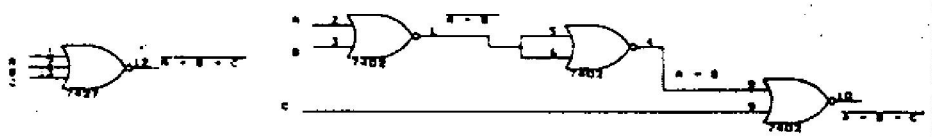
$X . 1 = X$

o una aplicación de estos teoremas y específicamente de
s Leyes de Morgan se verá a continuación la implementación
compuertas básicas utilizando exclusivamente compuertas
R.





Se puede igualmente diseñar compuertas de varias entradas, utilizando compuertas de dos entradas, como por ejemplo:



Ejemplos de utilización del Algebra de Boole.-

1.- Demostrar que :

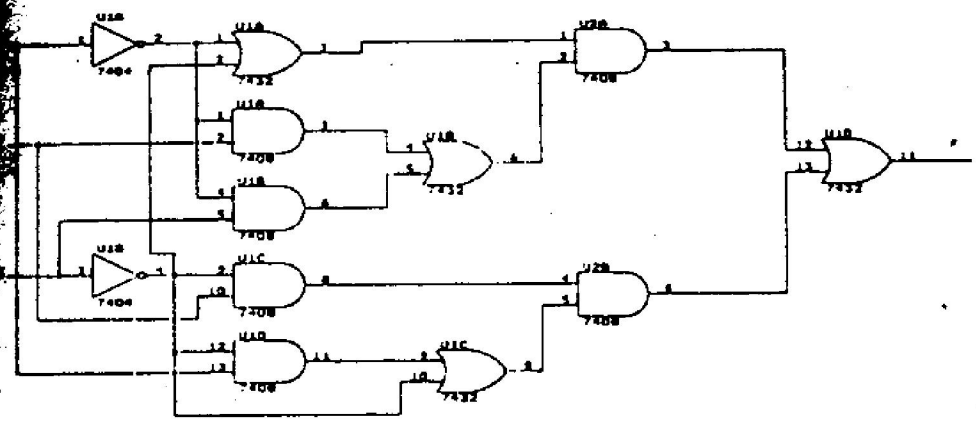
$$(y' + y'z + z)\ (xy + xz' + yz) = (xy'z' + yz)$$

$(y' + z[y' + 1])\ (xy + xz' + yz)$
$(y' + z)\ (xy + xz' + yz)$
$y'(xy + xz' + yz) + z\ (xy + xz' + yz)$
$\cancel{xyy'} + xy'z' + \cancel{yy'z} + xyz + \cancel{xzz'} + yz$
$xy'z + xyz + yz$
$xy'z' + yz\ (x + 1)$
$xy'z' + yz$

2.- Dibujar mediante compuertas la siguiente función:

$$F = (x' + z')\ (x'y + x'z) + yz'\ (z' + z'x)$$

Simplificar y encontrar un nuevo circuito que cumpla la misma función

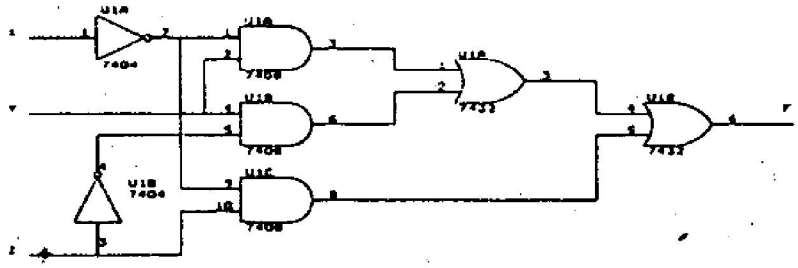


Simplificando:

F = (x' + z') (x'y + x'z) + yz' (z' + z'x)

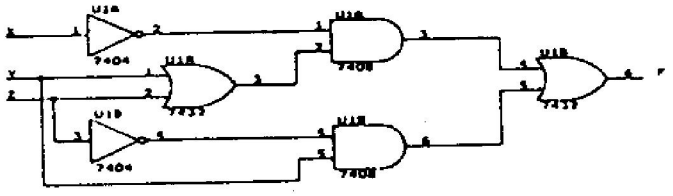
x'(x'y + x'z) + z'(x'y + x'z) + yz' (z'[x + 1])
x'y + x'z + x'yz' + x'zz' + yz'
x'y + x'z + yz' (x' + 1)
x'y + x'z + yz'

x'(y + z) + yz'



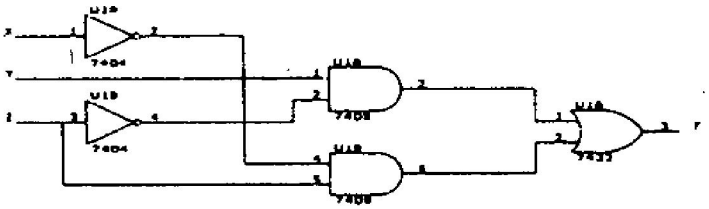
A la función simplificada si se asocia una de sus variables se tiene:

x'(y + z) + yz'

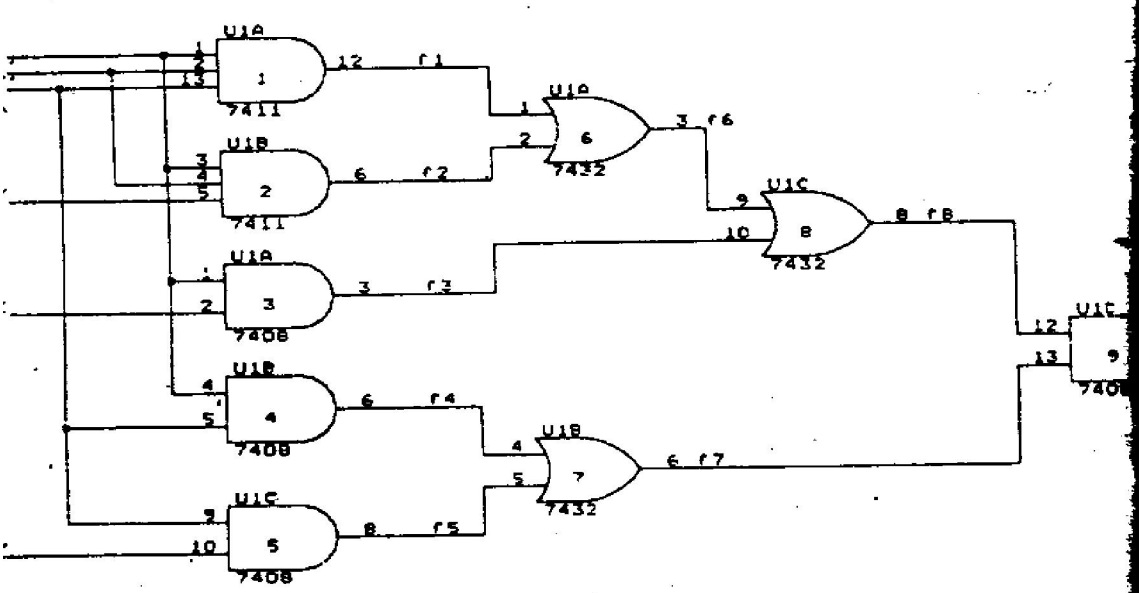


Simplificando aun más mediante artificios

$$x'y + x'z + yz'$$
$$(z + z') \quad (x'y) + x'z + yz'$$
$$x'yz + x'yz' + x'z + yz'$$
$$yz' \ (x' + 1) + x'z \ (y + 1)$$
$$yz' + x'z$$

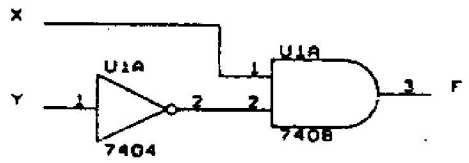


3.- Dado un circuito: encontrar un equivalente simplificado que cumpla con la misma función



$f_1 = xz'y'$
$f_2 = xz'y$
$f_3 = xz$
$f_4 = xy'$
$f_5 = x'y'$
$f_6 = f_1 + f_2$
$xy'z' + xyz'$
$f_7 = xy' + x'y'$
$f_8 = xy'z' + xyz' + xz$
$F = f_8 . f_7$

$F = (xy'z' + xyz' + xz)\ (xy' + x'y')$
$F = (xz'[y' + y] + xz)\ y'(x + x')$
$F = (xz' + xz)\ y'$
$F = x\ (z + z')\ y'$
$F = y'x$



A manera de ejercicios adicionales, hacer las funciones simplificadas obtenidas con un solo tipo de compuerta NAND o NOR.