

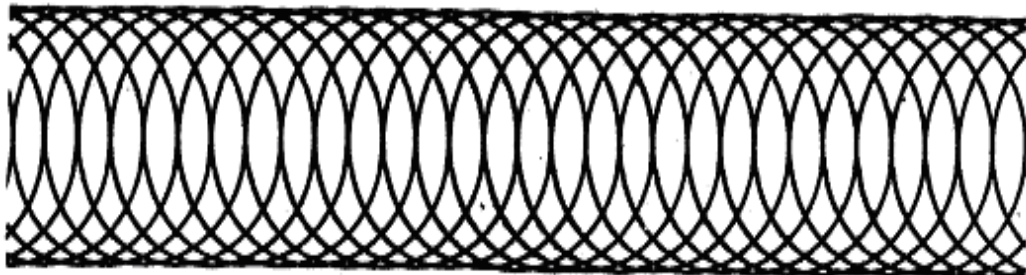
C I R C U I T O S

E L E C T R I C O S

I I I

Ing. Helena Vass

Quito - 1980



I N D I C E

	pág.
CAPITULO 1 : FUNCION DE RED	1
1.1 Concepto de frecuencia compleja	3
1.2 Función de red	8
1.3 Frecuencias naturales de una red	16
1.4 Polos y ceros	19
1.5 Respuesta en el tiempo	25
1.6 Vectores en el plano s	29
1.7 Partes de una función de red	34
1.8 Diagrama de la función de red	50
1.9 Diagrama de Nyquist	54
1.10 Diagrama de Bode	56
CAPITULO 2 : CUADRIPOLOS	72
2.1 Introducción	73
2.2 Relación matricial de las variables	74
2.3 Dispositivos de dos pares de terminales	94
2.4 Interconexión de cuadripolos	106
2.5 Restricciones de las conexiones .Prueba de Brune	115
2.6 Cuadripolos activos	122
2.7 Cuadripolos típicos	125
2.8 Impedancia de entrada y salida	136
2.9 Impedancia de entrada y salida en cc y ca	143
2.10 Impedancia iterativa	144
2.11 Impedancias imagen	149
2.12 Impedancia características	153
2.13 Función de propagación imagen	154
2.14 Deducción de Z_{i1} , Z_{i2} , y γ_i en función de las impedancias de cuadripolos típicos y viceversa	160

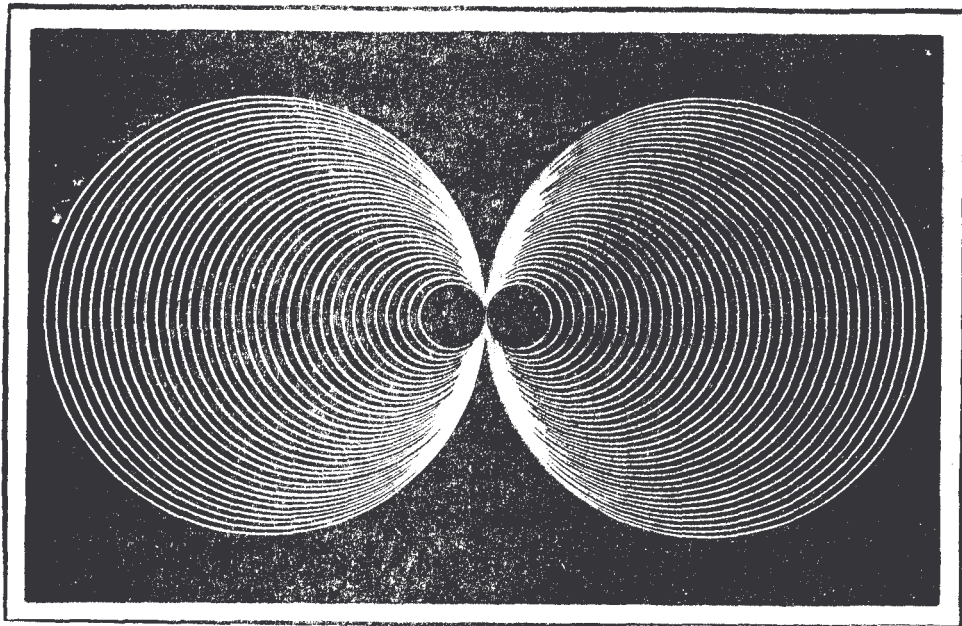
I N D I C E

	pág.
CAPITULO 3 : ANALISIS MATRICIAL DE REDES	16
3.1 Teoria de gráficos de redes	16
3.2 Matriz de incidencia aumentada	16
3.3 Matriz de conjuntos de corte aumentada	17
3.4 Matriz de lazos aumentada	17
3.5 Matriz de mallas	17
3.6 Condiciones de ortogonalidad	18
3.7 Relaciones entre voltajes de ramas y nodos	18
3.8 Relaciones entre corrientes de rama y malla	18
3.9 Implicación del Teorema de Tellegen	18
3.10 Circuitos equivalentes de elementos reactivos	19
3.11 Rama generalizada	19
3.12 Metodo de la matriz de impedancia primitiva	19
3.13 Método de la matriz de admitancia primitiva	20
3.14 Analisis por nodos	20
3.15 Análisis por lazos	21
 BIBLIOGRAFIA	 21
 APENDICE A : Inversión por partición de matrices	 21
 APENDICE B : Programa para análisis por nodos	 21
 APENDICE C : Programa para análisis por lazos	 21

capitulo 1

FUNCIÓN

DE RED



CAPITULO 1: FUNCION DE RED

CONTENIDO

1.1	Concepto de frecuencia compleja	3
1.2	Función de red	8
	Frecuencias naturales de una red	16
1.4	Polos y ceros	19
1.5	Respuesta en el tiempo	25
1.6	Vectores en el plano s	29
	Partes de una función de red	34
	Diagrama de la función de red	50
	Diagrama de Nyquist	54
	Diagrama de Bode	56

1.1 CONCEPTO DE FRECUENCIA COMPLEJA

La ecuación general de la respuesta de un circuito eléctrico es una ecuación diferencial que admite como solución a funciones en el dominio del tiempo de la forma:

$$K e^{st} \quad \text{ec. 1.1.1}$$

donde s es un número complejo, raíz de la ecuación característica expresado como

$$s = \sigma + j\omega \quad \text{ec. 1.1.2}$$

Donde ω es la frecuencia angular y aparece en las ecuaciones en el dominio del tiempo en las formas $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$.

La frecuencia angular tiene dimensiones de radianes por segundo y se puede expresar en función de la frecuencia f y del período T .

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

De acuerdo a la ecuación 1.1.2 se observa que σ y ω deben tener dimensiones iguales. La dimensión de ω es (tiempo) ya que el radián es una cantidad sin dimensión. a es la frecuencia neperiana y se la mide en neper por segundo y aparece en las ecuaciones como

$$I = I_0 e^{\sigma t}$$

La suma $s = \sigma + j\omega$ se define como frecuencia compleja.

La interpretación física de s en la exponencial

$$e^{st}$$

se estudiará en los siguientes casos:

a) Sea $s = \sigma + j0$

Para $\sigma > 0$ la función exponencial es creciente.

Para $\sigma < 0$ la función exponencial es decreciente.

Y para $\sigma = 0$; $s = 0 + j0$, la función será k , que si es referida a voltaje o a corrientes, se conoce como "corriente continua".

Los casos anteriores se representan en la figura 1.1.1.

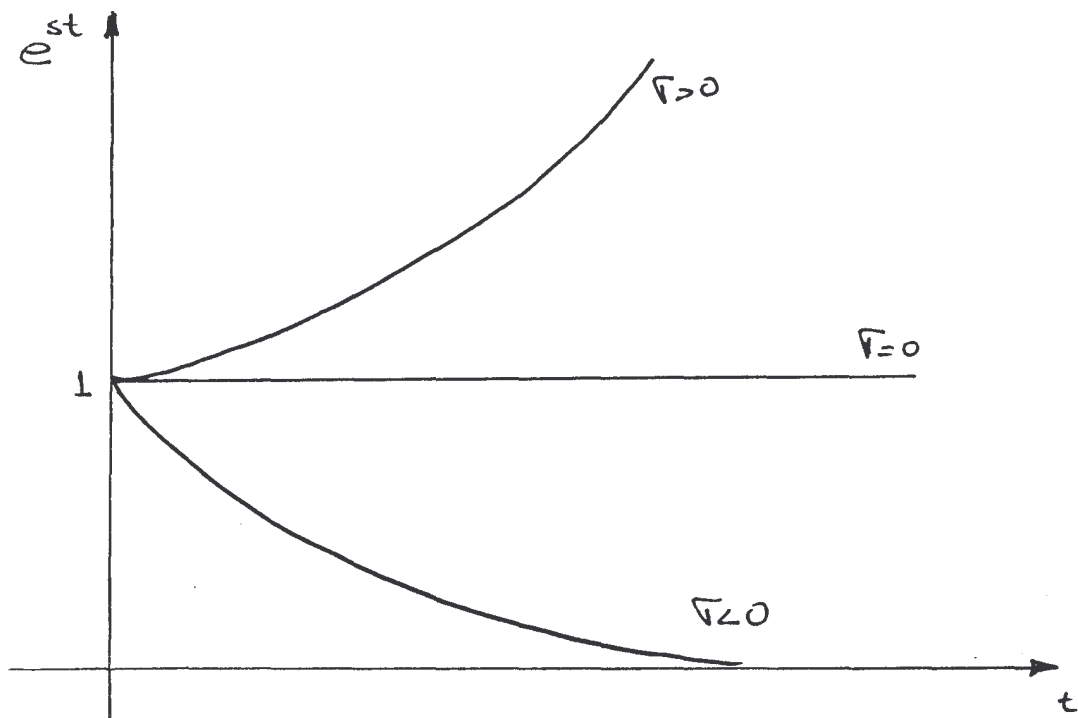


FIGURA 1.1.1

b) Sea $s = 0 \pm j\omega$

En este caso el factor exponencial se convierte por Euler en:

$$k e^{\pm j\omega t} = k (\cos \omega t \pm j \sin \omega t) \quad \text{ec. 1.1.3}$$

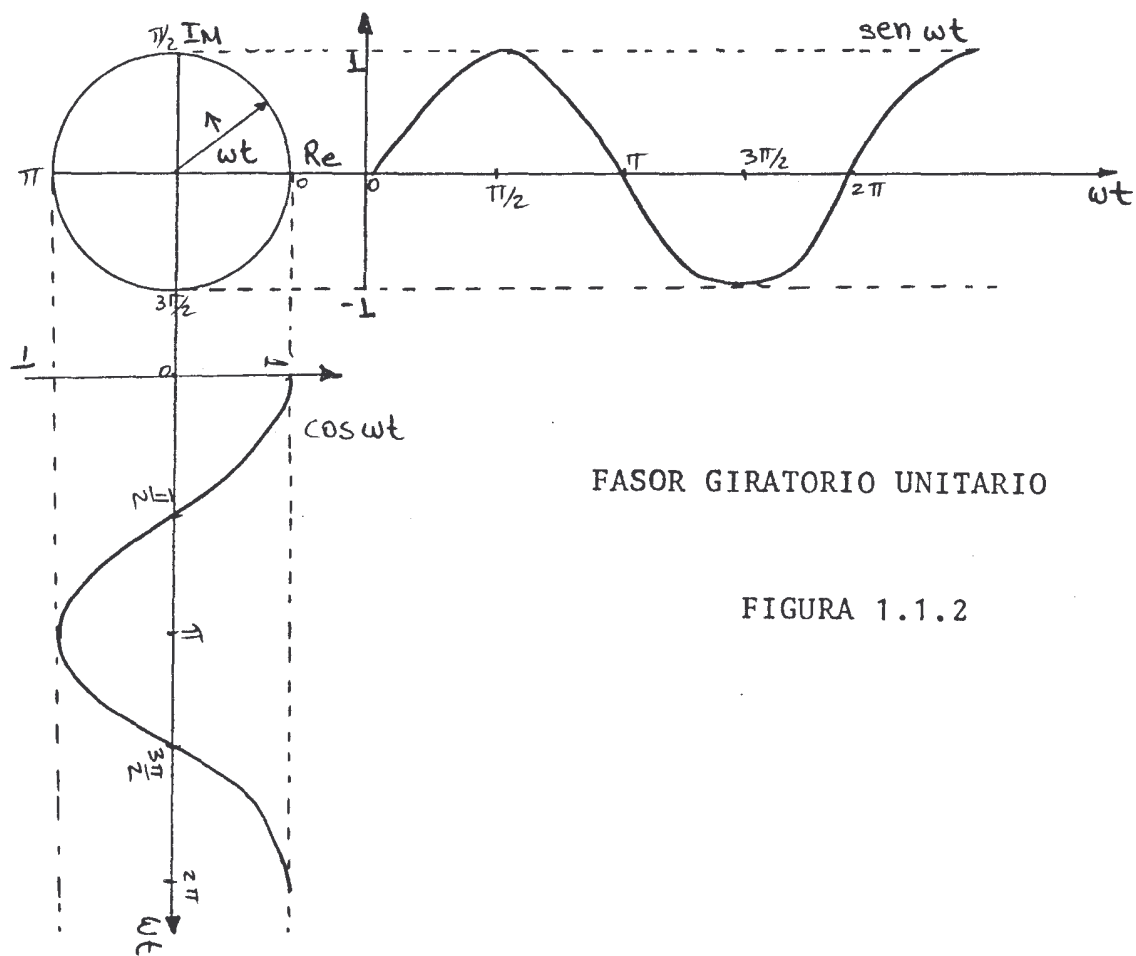
La exponencial $e^{\pm j\omega t}$ es usualmente Interpretada mediante un modelo físico (pero sin significado físico) de un vector unitario giratorio llamado fasor cuya dirección esta determinada

por el signo.

(Sentido positivo: dirección antihoraria y sentido negativo: dirección horaria).

Para rotación positiva, la parte real de $e^{\pm j\omega t}$ (o proyección sobre el eje real) varía como el coseno de $e^{\pm j\omega t}$, mientras que la parte imaginaria (o proyección sobre el eje imaginario) varía como el seno de $e^{\pm j\omega t}$.

El concepto se ilustra en la figura 1.1.2.



FASOR GIRATORIO UNITARIO

FIGURA 1.1.2

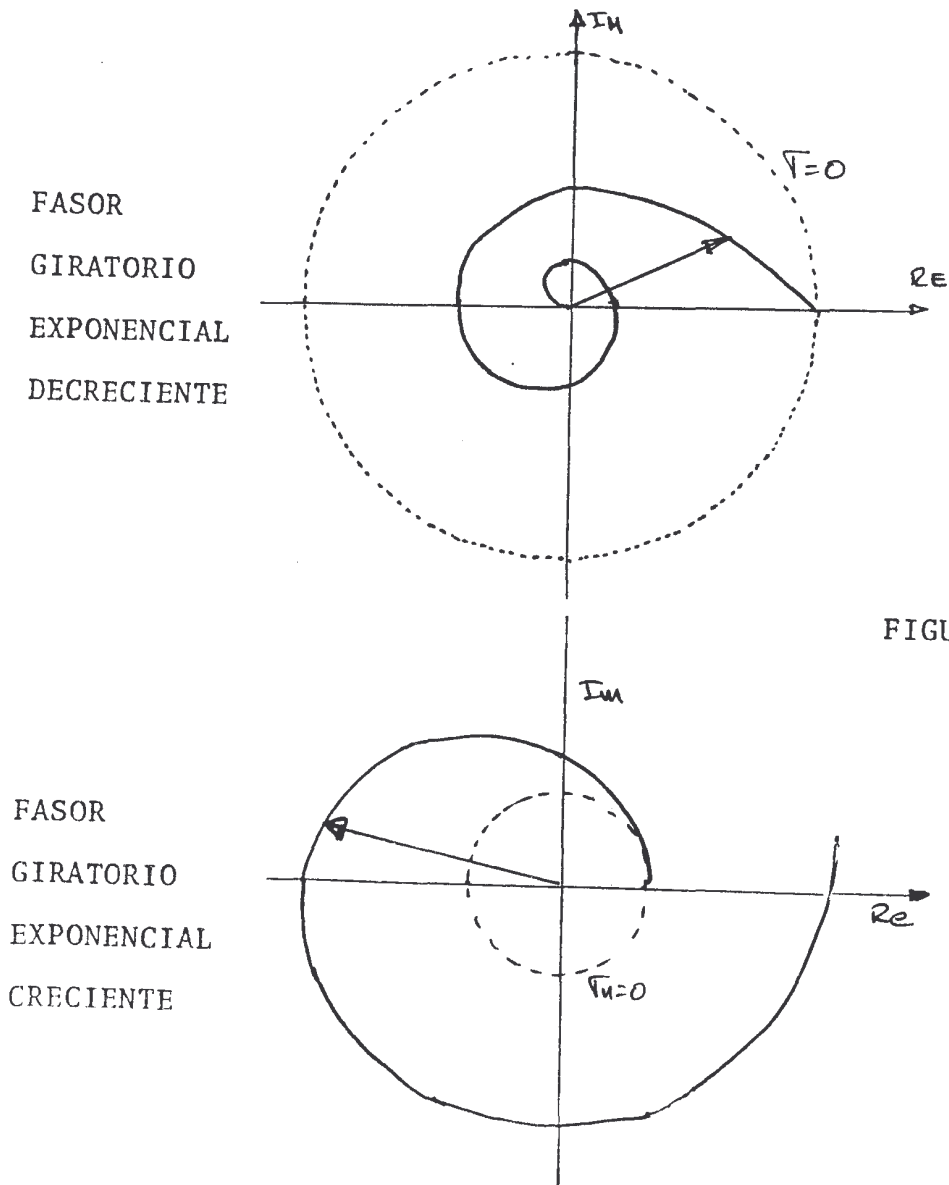
c) Sea $s = \sigma + j\omega$

Ahora: $k e^{(\sigma + j\omega)t} = k e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ ec. 1.1.4

Esta expresión resulta del producto de las variaciones para $s = \sigma$ y para $s = \pm j\omega$.

Un término representa la función exponencial creciente o decreciente y el otro un fasor.

El resultado es un vector giratorio o fasor cuya magnitud cambia con el tiempo. El concepto se ilustra en la figura 1.1.3.



Las proyecciones real e imaginaria de este fasor son:

$$\text{Re } |e^{st}| = e^{\sigma t} \cos \omega t$$

$$\text{Im } |e^{st}| = e^{\sigma t} \text{ sen } \omega t \quad \text{ec. 1.1.5}$$

Para $\sigma < 0$ la forma de onda se conoce con el nombre de senoide amortiguada y para $\sigma > 0$ las oscilaciones aumentan exponencialmente

Estas proyecciones se ilustran en la figura 1.1.4.

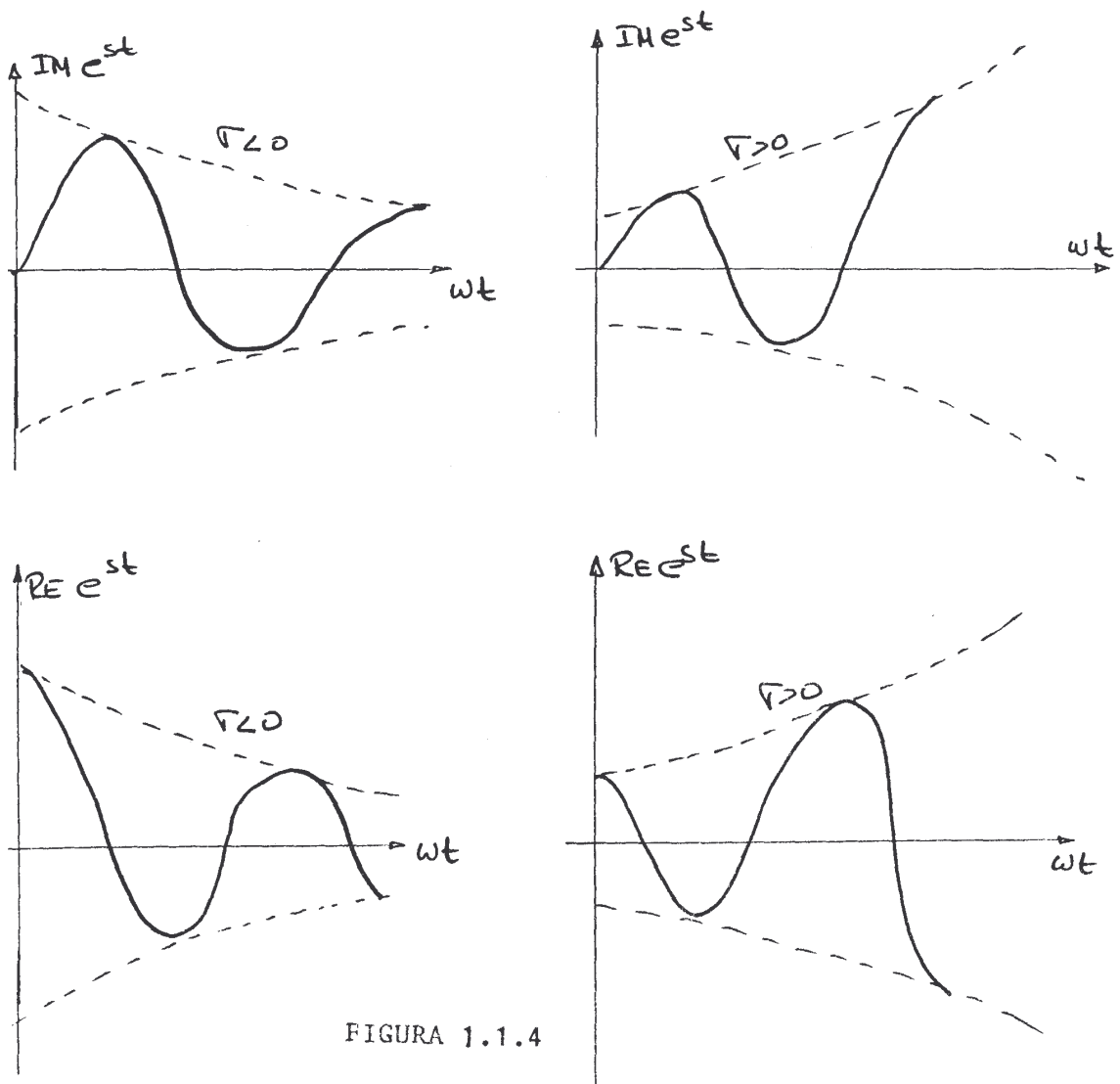


FIGURA 1.1.4

1.2 FUNCION DE RED

Consideremos una red lineal e invariante en el tiempo. Sea $X(t)$ la excitación y $Y(t)$ la respuesta.



FIGURA 1.2.1

Se define la función de red como la relación entre la respuesta y la excitación.

En el dominio del tiempo la relación esta dada por la ecuación integro-diferencial general de la respuesta.

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = \\ (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t) \end{aligned} \quad \text{ec. 1.2.1}$$

donde

$$p^i f(t) = \frac{d^i}{dt^i} f(t) \quad \text{ec. 1.2.2}$$

Los coeficientes de esta ecuación dependen de los elementos y de la Topología de la red.

Trabajando con la transformada de Laplace se convierte en una relación algebraica.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{ec. 1.2.3}$$

De lo cual se deduce que una función de red es una función racional de s con coeficientes reales.

A continuación se definirán dos tipos de función de red:

- a) Función de excitación.
- b) Función de transferencia.

a) FUNCION DE EXCITACION

Si la excitación y la respuesta son medidas en el mismo par de terminales, entonces la función de red se denomina Función de Excitación. Existen dos tipos de funciones de excitación:

IMPEDANCIA Y ADMITANCIA (en dipolo).

$$Z_{11}(s) = V_1(s) / I_1(s) \quad \text{ec. 1.2.4}$$

$$Y_{11}(s) = I_1(s) / V_1(s)$$

Por la definición se cumple además que:

$$Y_{11}(s) = 1 / Z_{11}(s) \quad \text{ec. 1.2.5}$$

b) FUNCION DE TRANSFERENCIA

Si la excitación y la respuesta con medidas en diferentes pares de terminales la función correspondiente se denomina Función de Transferencia.

Se deberá observar que en redes de un par de terminales DÍPOLOS la excitación sólo podrá existir en los terminales de entrada mientras que la salida se considera conectada la carga.

CALCULO DE FUNCIONES DE RED EN DIPOLOS

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ Z_{31} & Z_{32} & \dots & Z_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los elementos de un columna.

$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} + V_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z}$$

$$I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} + V_3 \frac{\Delta_{32}}{\Delta_Z}$$

Como la red debe estar pasiva: La definición de impedancia de entrada

$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \quad \frac{V_1}{I_1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = Z_{11} \quad Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$$

$$I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} \quad \frac{I_2}{V_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} = Y_{21} \neq Z_{21}$$

Las relaciones siguientes se deducen:

$$V_2 = Z_L I_2 \quad T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L I_2}{V_1} = Z_L Y_{21}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{\frac{V_2}{V_1}}{\frac{I_1}{V_1}} = \frac{T_V}{Y_{11}}$$

$$T_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{I_2}{V_1}}{\frac{I_1}{V_1}} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}$$

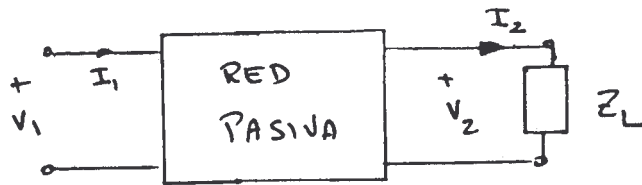
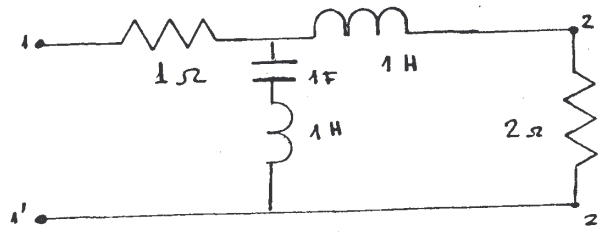


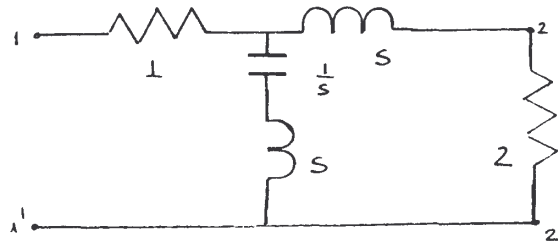
TABLA 1.2.1 (FUNCION DE RED)

Excitación	Respuesta	T(s)	DENOMINACION	
I_1	V_1	$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}$	Impedancia de excitación	INMITANCIA DE EXCITACION
V_1	I_1	$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}$	Admitancia de excitación	
I_1	V_2	$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}$	Impedancia de transferencia	INMITANCIA DE TRANSFERENCIA
V_1	I_2	$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}$	Admitancia de transferencia	
I_1	I_2	$T_1 = \frac{I_2}{I_1}$	Relación de corriente de transferencia	
V_1	V_2	$T_V = \frac{V_2}{V_1}$	Relación de tensión de transferencia	

EJEMPLO: Determinar Z_{11} , Y_{11} , Z_{21} , Y_{21} , T_V y T_I .



SOLUCION: En el dominio de la frecuencia



Mediante análisis matricial de mallas.

$$\Delta Z_m = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 + s + \frac{1}{s} & -s - \frac{1}{s} \\ \hline -s - \frac{1}{s} & 2 + 2s + \frac{1}{s} \\ \hline \end{array} \quad \Delta Z_m = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + 3}{s}$$

$$\Delta_{11} = 2 + 2s + \frac{1}{s}$$

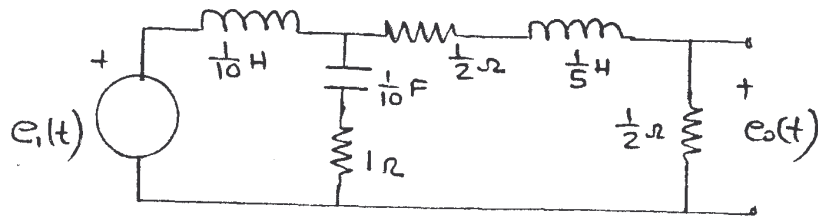
$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 3}$$

$$Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 3}$$

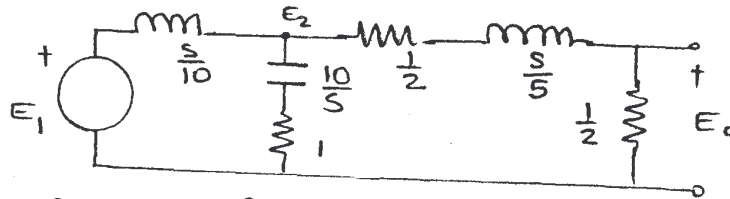
$$T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2I_2}{V_1} = 2Y_{21}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{V_2/V_1}{I_1/V_1} = \frac{T_V}{Y_{11}} = \frac{2(s^2 + 1)}{2s^2 + 2s + 1}$$

- EJEMPLO:** a) Hallar $T(S) = E_0/E_1$ por análisis de nodos.
 b) Si $e_1(t) = 5 e^{-3t} \cos(t - 10^\circ)$. Hallar $e_0(t)$



SOLUCION: En el dominio de la frecuencia



La Ec. Nodal para E_2 es:

$$\frac{E_2}{1 + \frac{10}{S}} + \frac{E_2}{1 + \frac{S}{5}} + \frac{E_2 - E_1}{\frac{S}{10}} = 0$$

$$E_2 = \frac{10(S + 5)(S + 10)}{S^3 + 20S^2 + 200S + 500} E_1$$

$$E_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{S}{5}} E_2 = \frac{25(S + 10)}{S^3 + 20S^2 + 200S + 500} E_1$$

$$T(S) = \frac{E_0}{E_1} = \frac{25(S + 10)}{S^3 + 20S^2 + 200S + 500}$$

Para $S = -3 + j$

$$T(s) \Big|_{S=-3+j} = 1.55 \angle -60.3^\circ$$

Los fasores serán:

$$E_1 = 5 \angle -10^\circ$$

$$E_0 = T(-3 + j) \cdot E_1 = 1.55 \underline{|-60.3^\circ} \cdot 5 \underline{|-10^\circ}$$

$$E_0 = 7.75 \underline{|-70.3^\circ}$$

En el dominio del tiempo

$$e_0(t) = 7.75 e^{-3t} \cos (t - 70.3^\circ)$$

1.3 FRECUENCIAS NATURALES DE UNA RED

La respuesta de una red lineal esta dada por sus dos componentes: libre y forzada, durante los períodos: transitorio y permanente. La respuesta libre o natural depende la topología y de las condiciones iniciales, mientras que la respuesta forzada depende exclusivamente del tipo de excitación.

Sea una red lineal caracterizada por la ecuación matricial

$$|M| \quad |X| = |N| \quad \text{ec. 1.3.1.}$$

Donde $|M|$ es una matriz cuadrada de la red (impedancia o admitancia).
 $|X|$ es un vector de variables de la red (voltajes o corrientes).
 $|N|$ es un vector de fuentes equivalentes.

Al asumir que todas las fuentes independientes se reducen a cero, (fuentes de corriente en circuito abierto y fuentes de voltaje en cortocircuito), se determina la variable j de la red (por ej. corriente de malla o voltaje de nodo) mediante la ecuación;

$$X_j = \sum_K \frac{\Delta_{jK}}{\Delta} N_K \quad \text{ec. 1.3.2.}$$

Que se obtiene aplicando la regla de Cramer a la ec. 1.3.1. desarrollando por los elementos de alguna columna.

Así, Δ es el determinante y Δ_{jk} es el cofactor del elemento jk en $|M|$ y N_K consiste en los voltajes iniciales en los capacitares y corrientes en los inductores.

El determinante de la matriz IMI siendo un polinomio en s puede ser escrito como;

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad \text{ec. 1.3.3.}$$

cuya transformada inversa mediante fracciones parciales resulta:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad \text{ec. 1.3.4.}$$

donde las constantes K_i se determinan mediante las condiciones iniciales.

La constante P_i depende de los elementos que conforman la red y de su topología.

Estas constantes P_i pueden ser complejas y por cuanto determinan la respuesta natural de la red se denominan frecuencias naturales de la variable $X(t)$.

Se notará que el número de las frecuencias naturales de la red corresponde al ORDEN DE COMPLEJIDAD de dicha red.

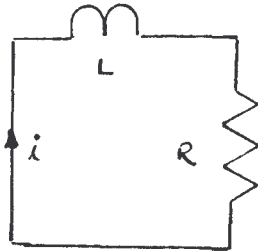
El orden de complejidad de la red no podrá exceder al número de elementos reactivos de la red.

As mismo es igual al número de condiciones iniciales independientes necesarias para la determinación de los voltajes y corrientes de la red,

Por lo tanto se desprende que sólo depende la topología de la red y no de la excitación.

EJEMPLO:

- a) Considérese la red de la figura. La ecuación diferencial de la respuesta para la corriente es:



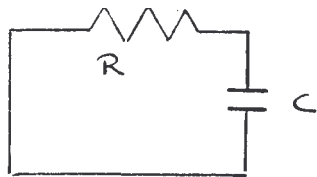
$$L \frac{di}{dt} + R i = 0$$

Si $i(0)$ es la corriente inicial a través del inductor entonces:

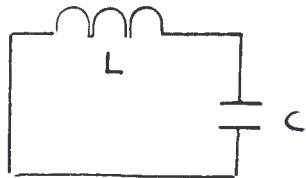
$$i(t) = i(0) e^{-t R/L}$$

Donde la frecuencia natural es $-R/L$

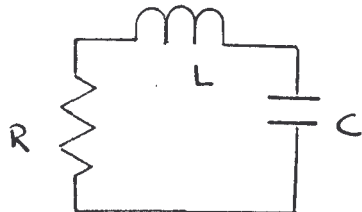
- b) También se puede obtener las frecuencias naturales de las siguientes redes:



a) $- 1/RC$



b) $\pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}$



c) $-R/2L \pm \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}$

Se deberá observar que las frecuencias naturales de redes RL y RC son negativos y reales mientras que las redes LC son imaginarias.

1.4 POLOS Y CEROS

Se definió una función de red como el cociente de dos polinomios en s ,

$$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{ec. 1.4.1.}$$

Donde los coeficientes a y b son reales y positivos para las redes de elementos pasivos y fuentes no controladas.

La ecuación 1.4.1 se puede escribir como un producto de factores lineales que incluyen las n raíces del denominador y las m raíces del numerador.

$$T(s) = H \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad \text{ec. 1.4.2.}$$

Donde $H = b_m/a_n$ es una constante que se conoce como **FACTOR DE ESCALA** y $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ son frecuencias complejas denominadas **CEROS** de la función por cuanto a estas frecuencias la función se hace nula.

Cuando s tiene los valores p_1, p_2, \dots, p_n la función de red se hace infinita; estas frecuencias complejas son los **POLOS** de la función.

Cuando r polos o ceros de la ecuación 1.4.2 tienen el mismo valor se dice que el polo o cero tiene **multiplicidad r** ; sino se repite se dice que es simple o distinto.

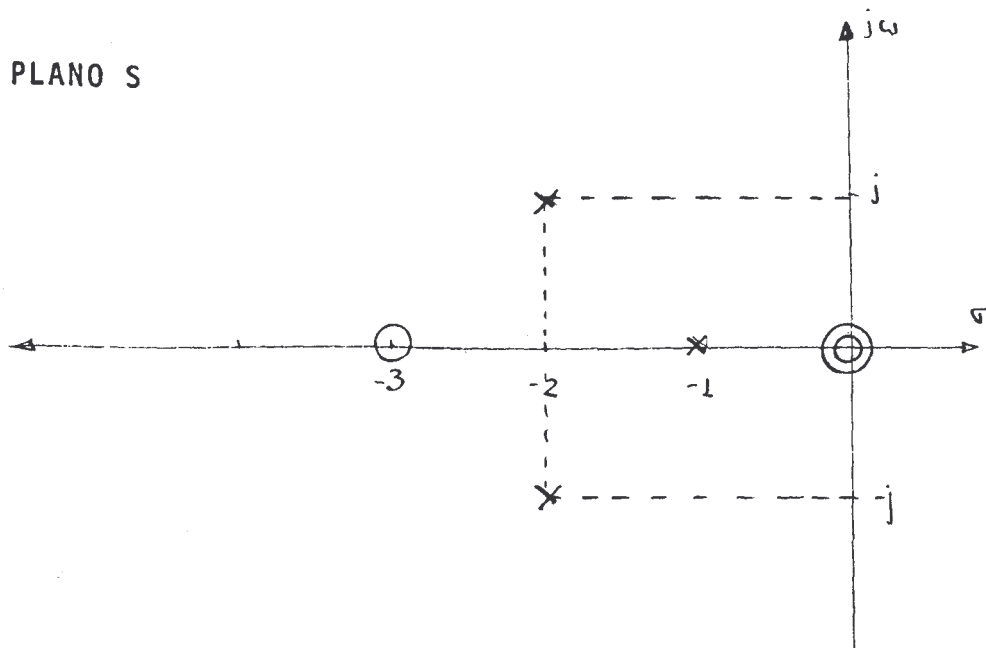
A los polos y los ceros para $s = \infty$ se les asigna también un grado: cuando $m > n$ en la ec. 1.4.1., el polo en el infinito es del grado o multiplicidad $n-m$; cuando $m < n$, el cero en el infinito es de grado $m-n$.

Si para cualquier función racional de red se toman en consideración los polos y los ceros en cero e infinito además de los polos y los ceros finitos, el número total de ceros es igual al número total de polos.

EJEMPLO: La función de red dada; representarla en el plano s

$$T(s) = \frac{s^2 (s + 3)}{(s+1) (s+2+j) (s+2-j)}$$

PLANO S



Se utiliza el símbolo 0 para designar los ceros y en concéntricos para designar, su multiplicidad y X para representar los polos y un exponente para su multiplicidad X^r.

La función de red descrita mediante estos s tiene un doble cero en s = 0 (origen) un cero en -3, y polos en -1, -2 + j, -2 - j.

INTERPRETACION DE LOS POLOS Y CEROS

Sea la función relación de voltaje

$$T_v = v_2/v_1 \quad \text{ec. 1.4.3.}$$

Que se puede escribir como;

$$v_2 = T_v \cdot v_1 \quad \text{ec. 1.4.4.}$$

Normalmente se especifica v_1 como la excitación y T_v se puede calcular a partir de la red.

Cuando se desarrolla la ec. 1.4.4. en fracciones parciales el denominador de cada término de fracción parcial da un polo de T_v ó bien de v_1 si no existen raíces repetidas en el denominador entonces;

$$T_v \cdot v_1 = \sum_{j=1}^a \frac{K_j}{s - p_j} + \sum_{k=1}^b \frac{K_k}{s - p_k}$$

donde a es el numero de polos de T_v y b es el número de polos de v_1 . La transformada inversa de Laplace da;

$$v_2 = \sum_{j=1}^a K_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^b K_k e^{p_k t} +$$

Por tanto las frecuencias p_j son las frecuencias complejas naturales correspondientes a la respuesta libre.

A su vez, las frecuencias p_k son as frecuencias complejas de la excitación corresponden a la respuesta forzada.

En consecuencia, los polos determinan la forma de onda en función del tiempo de la respuesta, el voltaje de salida, Los ceros determinan la magnitud de cada parte de la respuesta, ya que controlan la magnitud de K_j y K_k .

Para las inmitancias de excitación los polos y ceros significan que si

$$Z(s) = V(s)/I(s)$$

Un polo de $Z(s)$ implica una corriente cero para un voltaje finito lo que significa un circuito abierto.

Por otro lado, un cero de $Z(s)$ significa voltaje nulo para corriente finita lo que es lo mismo un cortocircuito.

Un dipolo es un circuito abierto para los polos y cortocircuitos para los ceros. Una representación de la magnitud de una función de red es t dado por la figura 1.4.2.

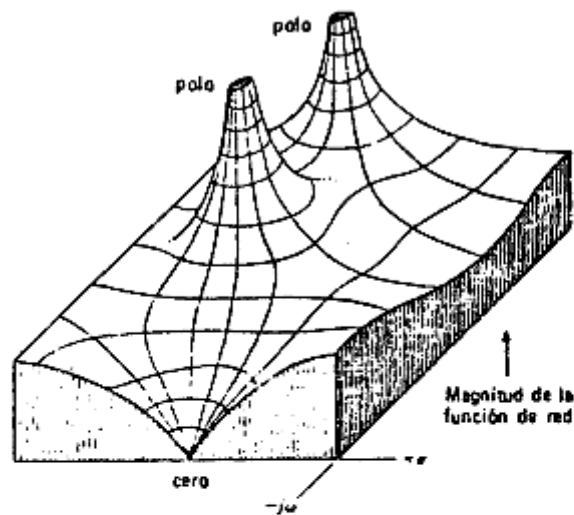
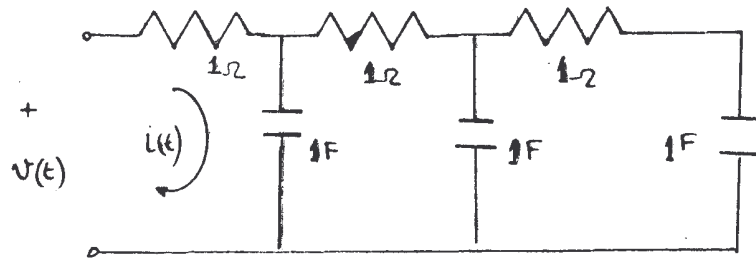


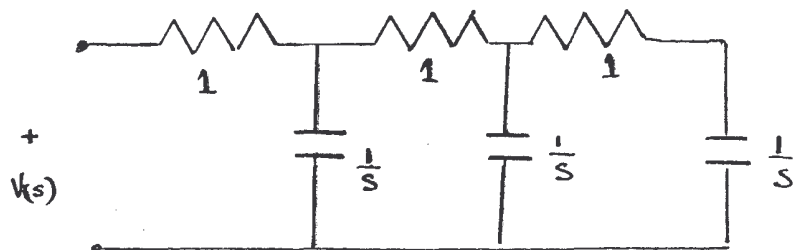
FIG. 1.4.2

MAGNITUD DE UNA FUNCION DE RED EN FUNCION DE LA FRECUENCIA COMPLEJA CON DOS POLOS Y UN CERO.

EJEMPLO: Si la excitación es: $v(t) = e^{-3t}$ calcular la respuesta $i(t)$.



SOLUCION: En el dominio de la frecuencia



La impedancia de entrada

$$Z_1 = \frac{S^3 + 5S^2 + 6S + 1}{S(S^2 + 4S + 3)} \quad Y = 1Z$$

$$Y_1 = \frac{S(S+1)(S+3)}{(S+0.2)(S+1.62)(S+3.18)}$$

$$I(s) = Y_1 \Big|_{S=-3} V(s)$$

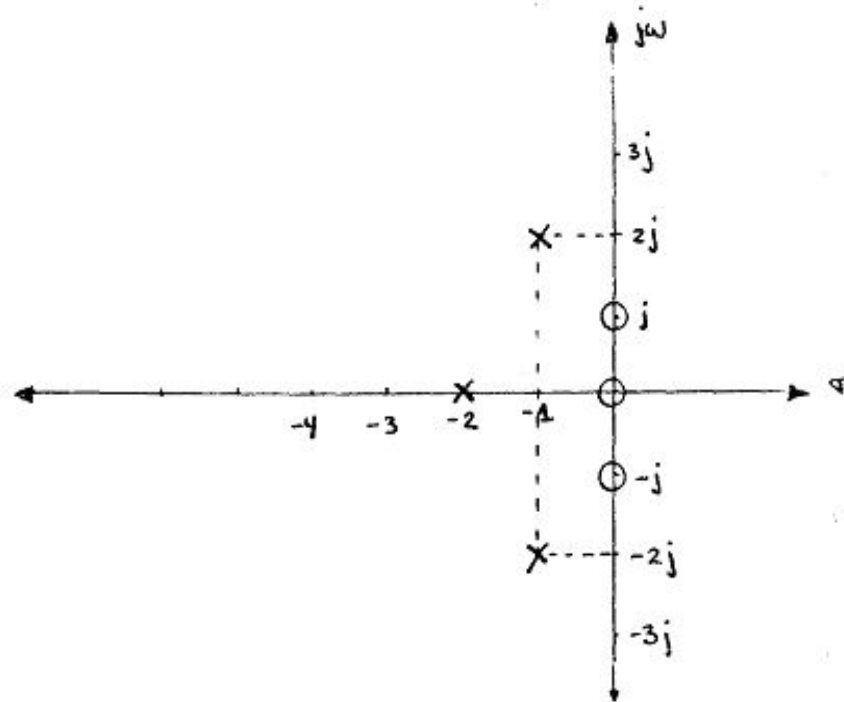
$$I(s) = \frac{(-3)(-3+1)(-3+3)}{(-3+0.2)(-3+1.62)(-3+3.18)} V(s)$$

$$i(t) = 0$$

CONCLUSION:

Si la excitación es tal que su frecuencia compleja s tiene el valor de algunos de los ceros la respuesta debido a esa excitación es nula.

EJEMPLO: Dado el diagrama de polos y ceros de una función de red, la cual es excitada por $g(t)=12e^{-t}\text{Cos}(t+45^\circ)$. Hallar su respuesta forzada si $H = 1$



SOLUCION:

La función de red correspondiente es:

$$T(s) = \frac{S(S+j)(S-j)}{(S+2)(S+1-2j)(S+1+2j)}$$

La frecuencia de la excitación es: $S = -1 + j$

$$T(-1+j) = \frac{\sqrt{5}}{3} \underline{26.6^\circ}$$

$$G(s) = 12 \underline{45^\circ}$$

La respuesta $F(s) = T(s) \cdot G(s)$

$$F(s) = 8.94 \underline{71.6^\circ}$$

En el dominio del tiempo

$$f(t) = 8.94 e^{-t} \text{Cos}(t+71.6^\circ)$$

1.5 RESPUESTA EN EL TIEMPO

Los diferentes tipos de polos darán respuestas típicas en el tiempo según su ubicación.

Según su posición en el plano complejo tendremos las formas de onda de la respuesta, dadas en la figura 1.5.1

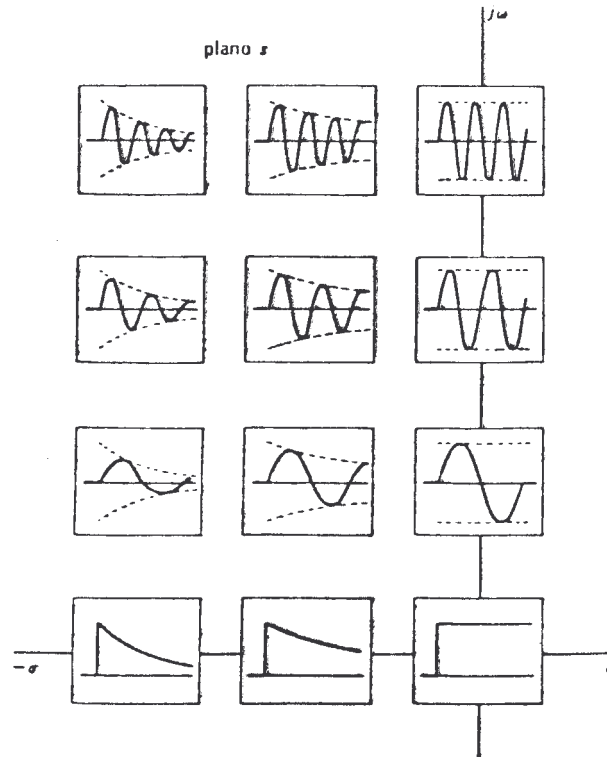


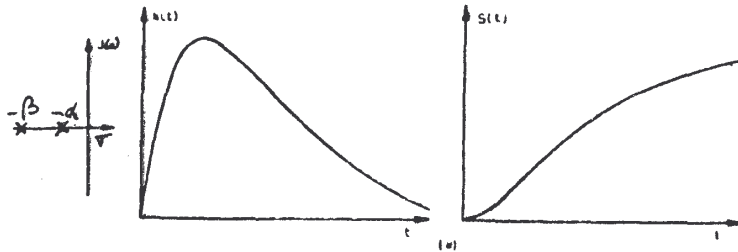
FIGURA 1.5.1.

Donde se observa lo siguiente:

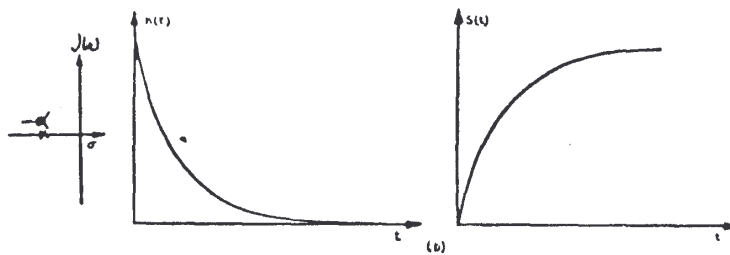
- Las raíces sobre el eje imaginario corresponden a respuestas oscilatorias con un amortiguamiento nulo.
- Las raíces en el plano complejo corresponden a oscilaciones amortiguadas (respuesta subamortiguada).
- Las raíces que están sobre el eje real negativo corresponden ya sea a un caso críticamente amortiguado o a una forma sobreamortiguada que se expresa como la diferencia de dos funciones exponenciales.

Las respuestas al impulso $h(t)$ y al escalón $S(t)$ de acuerdo a la ubicación de los polos de una función de red están da dos en la Tabla siguiente.

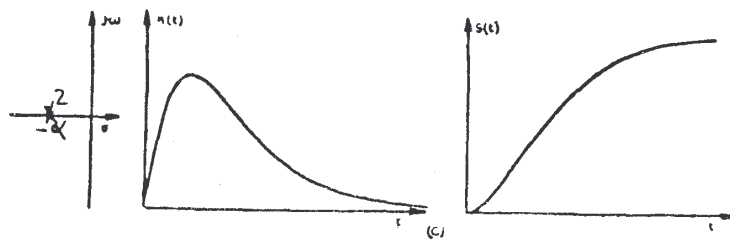
Las curvas de las figuras 1 .5.i (a), (b), (c) y Cd) corresponden a redes estables mientras que los de la figura (f) y (g) son inestables.



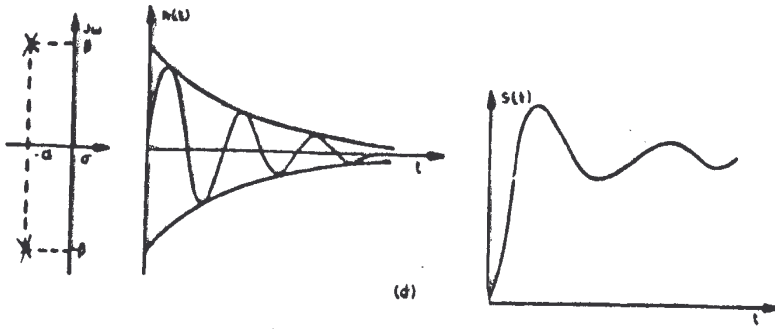
$$h(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} [e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}] \quad S(t) = \frac{1}{\alpha\beta} \mu(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{-\beta t}}{\beta} \right] \mu(t)$$



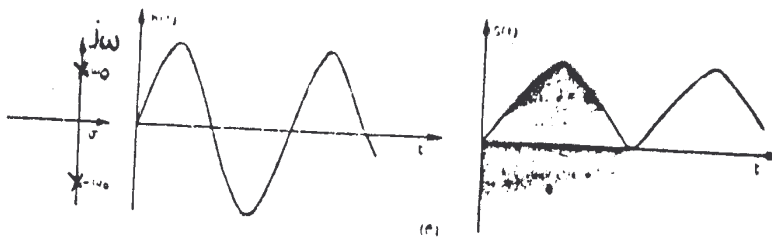
$$h(t) = e^{-\alpha t} \mu(t) \quad S(t) = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}] \mu(t)$$



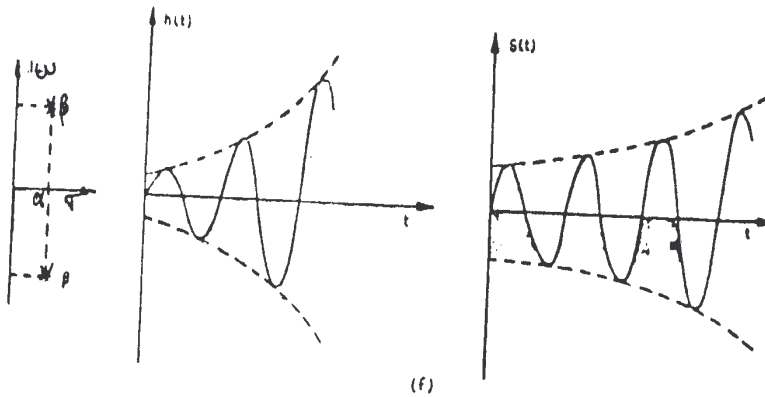
$$h(t) = t e^{-\alpha t} \mu(t) \quad S(t) = \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} \right] \mu(t)$$



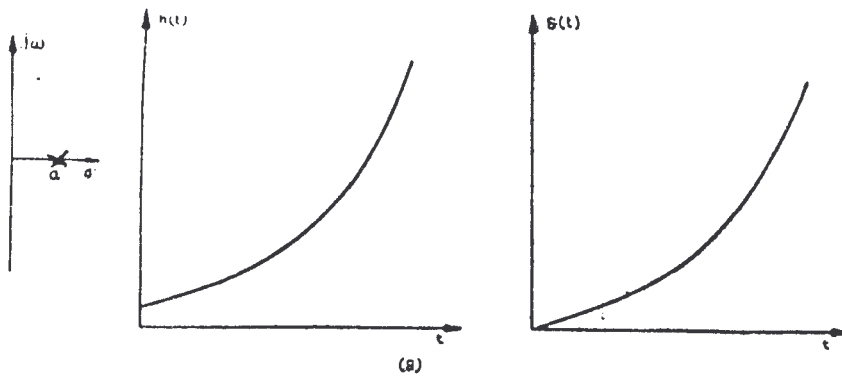
$$h(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \text{Sen } \beta t \mu(t) \quad S(s) = \left[\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \mu(t) - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \mu(t)$$



$$h(t) = \frac{1}{\omega_0} \text{Sen } \omega_0 t \mu(t) \quad S(s) = \frac{1}{\omega_0} \left[1 - \text{Cos } \omega_0 t \right] \mu(t)$$



$$h(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \text{Sen } \beta t \mu(t) \quad S(s) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \mu(t) - \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\text{Cos } \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \text{Sen } \beta t \right] \mu(t)$$



$$h(t) = e^{\alpha t} \mu(t)$$

$$S(s) = \alpha \left[e^{\alpha t} - 1 \right] \mu(t)$$

1.6. VECTORES EN EL PLANO -S

Una función de red puede ser evaluada para un valor particular de S tanto en forma analítica como gráficamente.

Como en general es

$$T(s) = H \frac{(s-s_{z1})(s-s_{z2})\dots\dots(s-s_{zm})}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\dots\dots(s-s_{pn})} \quad \text{ec. 1.6.1.}$$

Para un valor particular de $S = S_r$, será:

$$T(s_r) = H \frac{(s_r-s_{z1})(s_r-s_{z2})\dots\dots(s_r-s_{zm})}{(s_r-s_{p1})(s_r-s_{p2})\dots\dots(s_r-s_{pn})} \quad \text{ec. 1.6.2.}$$

Además S_r es un complejo cuya representación en el plano S será un vector; igualmente sucederá con S_{z1} , S_{z2} , S_{zm} ; y S_{p1} , S_{p2} S_{pn}

La representación de $(S_r - S_{z1})$ será el de la figura 1.6.1

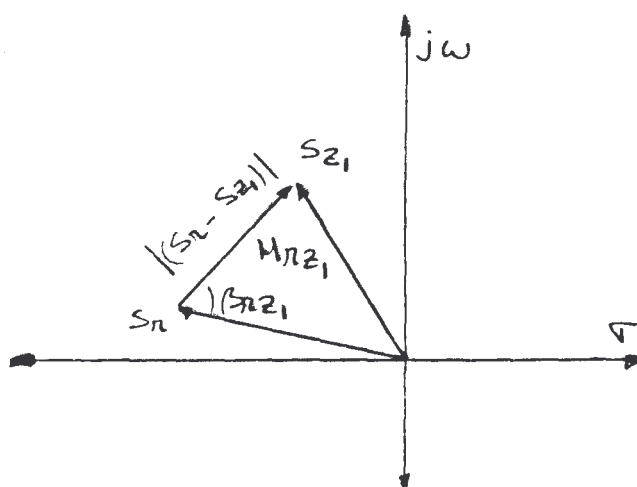


FIGURA 1.6.1.

$$S_r - S_{z1} = M_{rZ1} e^{j\beta_{rZ1}} \quad \text{ec. 1.6.3}$$

Donde M_{rK} es el módulo de la diferencia de vectores $(S_r - S_{zK})$ o $(S_r - S_{pK})$ en el plano S y β_{rK} es el argumento; pudiéndose obtener gráficamente.

El módulo de $T(S_r)$ será:

$$\left| T(s_r) \right| = H \frac{M_{rZ_1} \cdot M_{rZ_2} \cdot M_{rZ_3} \cdots M_{rZ_m}}{M_{rP_1} \cdot M_{rP_2} \cdot M_{rP_3} \cdots M_{rP_n}} \quad \text{ec. 1.6.4.}$$

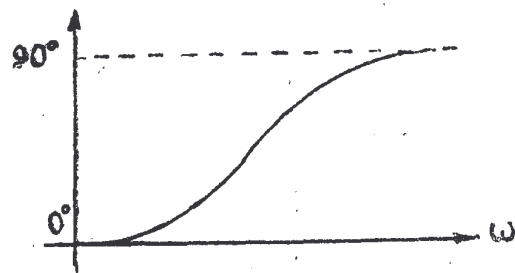
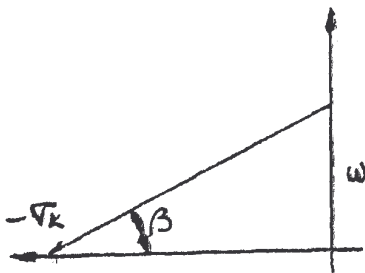
y midiendo los argumentos obtendremos

$$\beta(s_r) = \sum_{k=1}^m \beta_{rZ_k} - \sum_{k=1}^n \beta_{rP_k}$$

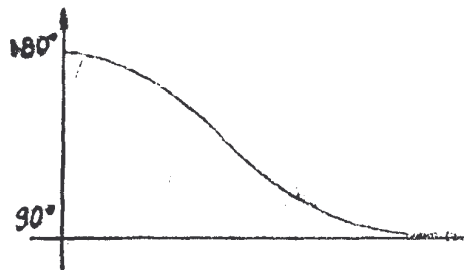
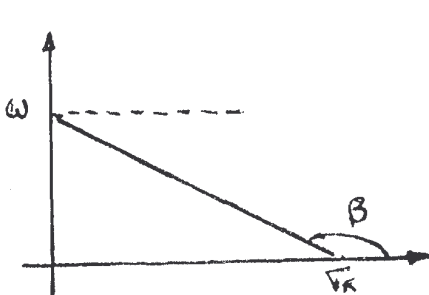
Así

$$T(s_r) = \left| T(s_r) \right| \angle T(s_r)$$

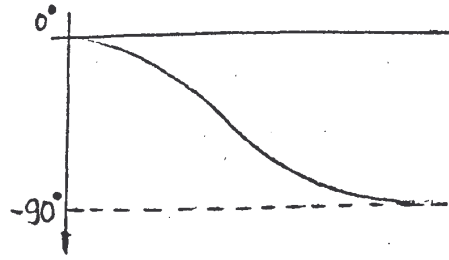
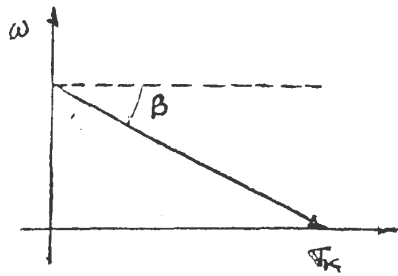
Considerando los distintos casos de factores que pueden aparecer en $T(s)$ tanto en el numerador como en el denominador se - observará su ángulo cuando $S = j\omega$



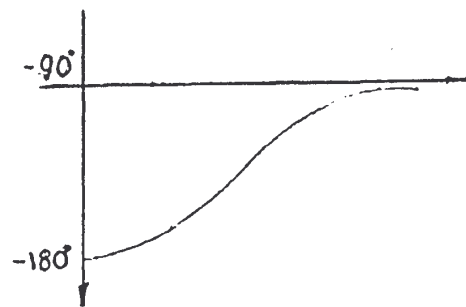
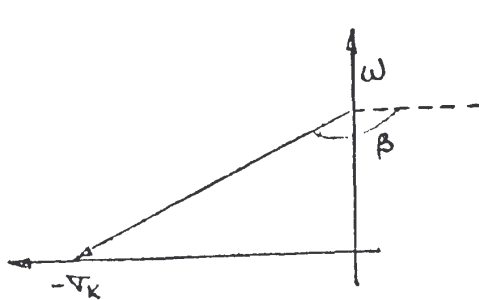
$(S + \sigma_k)$ con $\sigma_k > 0$ $\beta(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\sigma_k}$ y es $0^\circ \leq \beta(\omega) \leq 90^\circ$



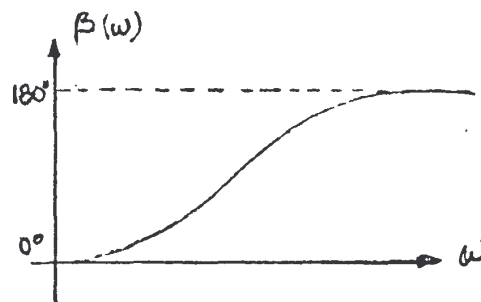
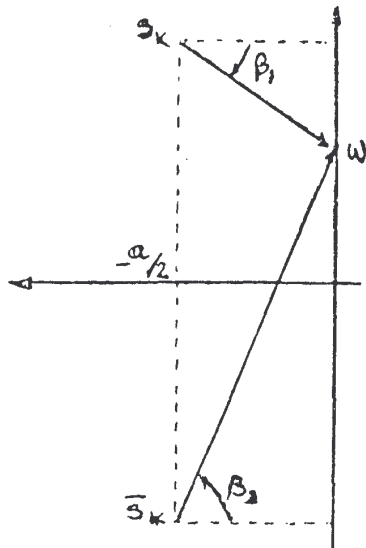
$(S - \sigma_k)$ con $\sigma_k > 0$ $\beta(\omega) = \arctg \frac{\omega}{-\sigma_k}$ y $90^\circ \leq \beta(\omega) \leq 180^\circ$



$(\sigma_k - S)$ con $\sigma_k > 0$ $\beta(\omega) = \arctg \frac{-\omega}{\sigma_k}$ y $-90^\circ \leq \beta(\omega) \leq 0^\circ$

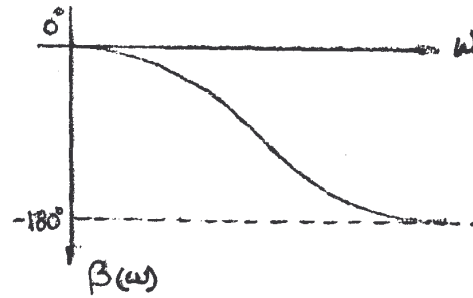
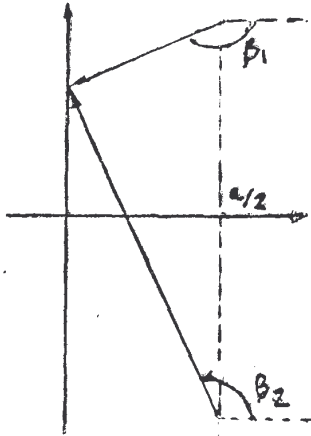


$(-\sigma_k - S)$ con $\sigma_k > 0$ $\beta(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\sigma_k}$ $-180^\circ \leq \beta(\omega) \leq -90^\circ$



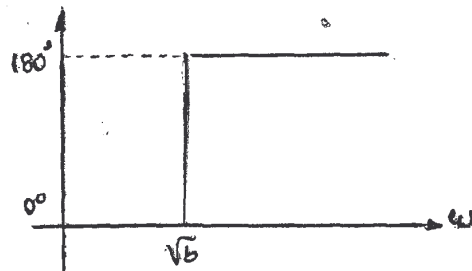
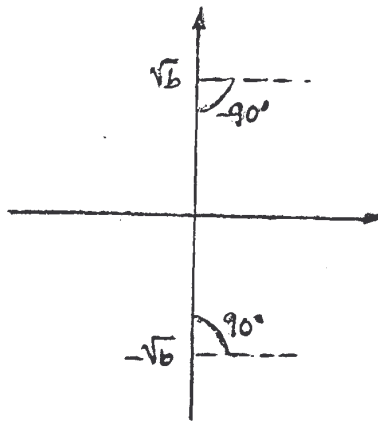
$(S - S_k)(S - \bar{S}_k) = S^2 + aS + b$ a y $b > 0$ $\beta(\omega) = \arctg \frac{a\omega}{b - \omega^2}$ y

$0^\circ \leq \beta(\omega) \leq 180^\circ$



$$(S - S_k)(S - \bar{S}_k) = S^2 - aS + b \quad a \text{ y } b > 0 \quad \beta = \arctg \frac{-a\omega}{b - \omega^2}$$

$$-180^\circ \leq \beta(\omega) \leq 0$$



$(S^2 + b)$ es un caso particular de las anteriores y es $\beta = 0$ para $\omega < \sqrt{b}$ y $\beta = 180^\circ$ para $\omega > \sqrt{b}$

EJEMPLO: Dada la función de transferencia

$$T(s) = \frac{25(s + 10)}{(s + 3.52)(s + 8.24 - j 8.61)(s + 8.24 + j 8.61)}$$

Evaluarla gráficamente para $s = -3 + j$

SOLUCION

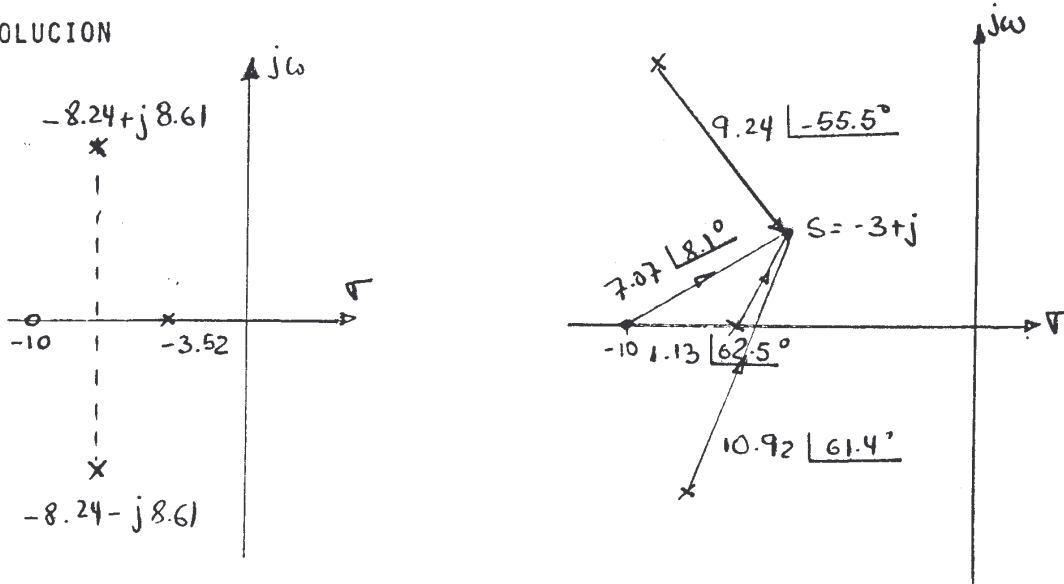


DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

GRAFICO PARA $s = -3 + j$

$$|T(-3+j)| = \frac{25(7.07)}{(1.13)(9.24)(10.92)} = 1.55$$

$$\angle T(-3+j) = 8.1^\circ - (62.5 - 55.5 + 61.4) = -60.3^\circ$$

$$T(-3+j) = 1.55 \angle -60.3^\circ$$

1.7. PARTES DE UNA FUNCIÓN DE RED

En los apartados anteriores se observa que una función de red consta de varias partes. La razón para estudiar cuales son las partes de una función de red es debido a que para el diseño o s de redes las especificaciones son generalmente dadas en términos de dichas partes; por otro lado las mediciones son igualmente hechas de las anteriores partes de la función.

La división más común que se hace de una función de red es en parte par y parte impar.

$$T(s) = P_R T(s) + I_R T(s) \quad \text{ec. 1.7.1.}$$

Para ello veamos que:

$$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P_p(s) + P_i(s)}{Q_p(s) + Q_i(s)}$$

Si multiplicamos numerador y denominador por $Q(-s)$

$$Q(-s) = Q_p - Q_i \quad \text{ec. 1.7.2.}$$

$$T(s) = \frac{P(s) \cdot Q(-s)}{Q(s) \cdot Q(-s)} = \frac{(P_p + P_i)(Q_p - Q_i)}{(Q_p + Q_i)(Q_p - Q_i)}$$

$$T(s) = \frac{P_p Q_p - P_i Q_i}{Q_p^2 - Q_i^2} + \frac{P_i Q_p - P_p Q_i}{Q_p^2 - Q_i^2} \quad \text{ec. 1.7.3.}$$

Donde se observa que las partes par e impar son:

$$P_R \left| T(s) \right| = \frac{P_p Q_p - P_i Q_i}{Q_p^2 - Q_i^2} \quad \text{ec. 1.7.4.}$$

$$I_R \left| T(s) \right| = \frac{P_i Q_p - P_p Q_i}{Q_p^2 - Q_i^2} \quad \text{ec. 1.7.5.}$$

Se puede llegar a la expresión siguiente:

$$P_R T(s) = \frac{1}{2} [T(s) + T(-s)] \quad \text{ec. 1.7.6.}$$

$$I_R T(s) = \frac{1}{2} [T(s) - T(-s)] \quad \text{ec. 1.7.7.}$$

En las ecuaciones anteriores el rango de variación de S es sobre todo el plano complejo; pero generalmente el régimen permanente sinusoidal es de mayor interés (caso $\sigma = 0$); ya que todas las mediciones se realizan durante este modo de operación; luego $s = j\omega$; así las ecuaciones se transforman en:

$$T(j\omega) = R_e T(j\omega) + j I_m T(j\omega) \quad \text{ec. 1.7.8.}$$

de lo que se asocia a:

$$R_e T(j\omega) = P_R T(s) \Big|_{s=j\omega} \quad \text{ec. 1.7.9.}$$

$$j I_m T(j\omega) = I_R T(s) \Big|_{s=j\omega} \quad \text{ec. 1.7.10.}$$

e igualmente se tiene que:

$$R_e T(j\omega) = \frac{1}{2} [T(j\omega) + T(-j\omega)] \quad \text{ec. 1.7.11.}$$

$$j I_m T(j\omega) = \frac{1}{2} [T(j\omega) - T(-j\omega)] \quad \text{ec. 1.7.12.}$$

Ahora bien si $T(j\omega)$ es una función de variable compleja - puede ser expresada en términos de su magnitud y fase:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\beta(\omega)} \quad \text{ec. 1.7.13.}$$

Donde:

$$\left| T(j\omega) \right| = \sqrt{R_e T(j\omega)^2 + I_m T(j\omega)^2} \quad \text{ec. 1.7.14.}$$

$$\left| T(j\omega) \right| = \sqrt{T(s) \cdot T(-s)} \Big|_{s=j\omega} \quad \text{ec. 1.7.15.}$$

$$y: \quad \beta(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{I_m T(j\omega)}{R_e T(j\omega)} \quad \text{ec. 1.7.16.}$$

La ec. 1.7.8. es la forma cartesiana la ec. 1.7.13 es la forma polar y también podemos escribir $T(j\omega)$ en la forma exponencial

$$T(j\omega) = e^{\gamma(j\omega)} \quad \text{ec. 1.7.17.}$$

donde $\gamma(j\omega)$ es la función exponencial expresada como:

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad \text{ec. 1.7.18.}$$

α , β , γ , son adimensionales, pero α se mide en nepers y β en radianes.

γ se denomina la función propagación

α es la ganancia, atenuación o función de pérdida

β es la función de fase o ángulo de fase.

EJEMPLO

Calcular las partes de la siguiente función:

$$T(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1}$$

SOLUCION

$$P_R T(s) = \frac{1}{2} \left| T(s) + T(-s) \right|$$

$$P_R T(s) = \frac{1}{2} \left| \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1} + \frac{s^2 - 2s + 2}{1 - s} \right|$$

$$P_R T(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 1}$$

$$I_R T(s) = \frac{1}{2} \left| T(s) - T(-s) \right|$$

$$I_R T(s) = \frac{1}{2} \left| \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1} - \frac{s^2 - 2s + 2}{1 - s} \right|$$

$$I_R T(s) = \frac{s^3}{s^2 - 1}$$

$$R_e T(jw) = P_R T(s) \Big|_{s = jw}$$

$$R_e T(jw) = \frac{(jw)^2 - 2}{(jw)^2 - 1} = \frac{w^2 + 2}{w^2 + 1}$$

$$I_m T(jw) = \frac{1}{j} I_R T(s) \Big|_{s = jw}$$

$$I_m T(jw) = \frac{1}{j} \frac{(jw)^3}{(jw)^2 - 1} = \frac{w^3}{w^2 + 1}$$

$$|T(j\omega)| = \sqrt{T(s) \cdot T(-s)} \Big|_{s = j\omega}$$

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{s^4 + 4}{1 - s^2}} \Big|_{s = j\omega}$$

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^4 + 4}{\omega^2 + 1}}$$

$$\beta(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} T(j\omega)}{\operatorname{Re} T(j\omega)}$$

$$\beta(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega^3}{\omega^2 + 2}$$

$$\alpha(\omega) = \ln |T(j\omega)|$$

$$\alpha(\omega) = \ln \sqrt{\frac{\omega^4 + 4}{\omega^2 + 1}}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} |\ln(\omega^4 + 4) - \ln(\omega^2 + 1)|$$

$$\gamma(\omega) = \ln \sqrt{\frac{\omega^4 + 4}{\omega^2 + 1}} + j \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega^3}{\omega^2 + 2}$$

I.7.a. CALCULO DE UNA FUNCION DE RED CONOCIDA SU PARTE REAL

Si se conoce la parte real de una función de red también se conocerá su parte par haciendo

$$P_{RT}(s) = P_e T(jw) \Big|_{w^2=s^2}$$

así obtendremos

$$P_{RT}(s) = \frac{M(s^2)}{N(s^2)} = \frac{A_0 + A_2 s^2 + \dots}{B_0 + B_2 s^2 + \dots}$$

$$P_{RT}(s) = \frac{P_R |P(s)Q(-s)|}{Q(s)Q(-s)} \text{ por lo que tendrá que}$$

ser

$$N(s^2) = Q(s)Q(-s)$$

Luego el segundo paso será descomponer $N(s^2)$ en el producto anterior cosa que se obtiene fácilmente factorizandolo y $Q(s)$ estará constituido por todos aquellos - factores a los que corresponda la parte real negativa.

Así conseguimos:

$$Q(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n$$

y podremos considerar que es:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$$

llegando $P(s)$ hasta el mismo grado que $Q(s)$ de esto será:

$$T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

y multiplicando numerador y denominador por $Q(-s)$ podemos obtener $Pr T(s)$ para lo que es necesario que se verifique:

$$M(s^2) = P_r \left[P(s) Q(-s) \right]$$

o lo que es lo mismo:

$$A_0 + A_2 s^2 + A_4 s^4 + \dots = P_r \left[(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots)(b_0 - b_1 s + b_2 s^2 - \dots) \right]$$

y como en esta igualdad las únicas incógnitas son a_0, a_1, \dots, a_n podemos obtener un sistema para su deducción. El sistema es:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0 b_0 \\ A_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1 \\ A_4 &= a_0 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_0 - a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

Este método seguido es el método de Gerwertz,

Debemos ver que la función $T(s)$ obtenida as no es la única que tiene la parte real dada, para ello consideraremos:

$$T_1(s) = K_s + \frac{h_s}{s^2 + w_0^2} + T(s)$$

El primer sumando corresponde a considerar un polo en el infinito y el segundo dos polos conjugados, en el eje imaginario. Si hacemos $s = jw$, tenemos:

$$T_1(jw) = j k w + \frac{j h w}{w_0^2 - w^2} + T(jw)$$

y como los dos primeros sumandos son imaginarios puros, será:

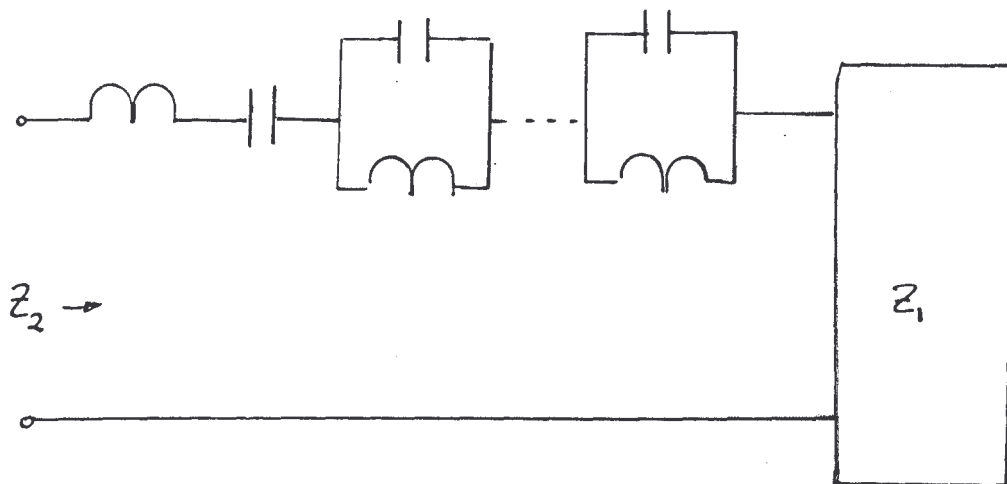
$$R_e T_1(jw) = R_e T(jw)$$

Como consecuencia podemos añadir que el $T(s)$ obtenido por

el procedimiento anterior no tiene polos en el eje imaginario ni en el infinito. Al mismo tiempo puede decirse que dicho es el de parte imaginaria mínima. Cuando se trate de impedancias se dicen de reactancia mínima y si son admitancias son de susceptancia mínima.

La solución general será por tanto:

$$T_g(s) = T_1(s) + K_0 s + \sum_i^n \frac{K_i s}{s^2 + w_i^2} + \frac{K}{s}$$



siendo K_0 , K_i y w_i arbitrarios. Es fácil de comprender lo expuesto anteriormente si consideramos en la FIG. que al añadir elementos reactivos en serie con Z_1 su nueva impedancia Z_2 tendrá $R_e Z_2 = R_e Z_1$.

EJEMPLO: Dada $R_e T(jw) = \frac{1}{1 + w^4}$ determinar $T(s)$ de parte imaginaria mínima.

SOLUCION:

$$1^\circ \quad P_r T(s) = \frac{1}{1 + s^4}$$

$$2^\circ \quad N(s^2) = (1 + s^4) = (1 + \sqrt{2} s + s^2)(1 - \sqrt{2} s + s^2)$$

$$Q(s) = 1 + \sqrt{2} s + s^2$$

$$3^{\circ} \quad T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}{1 + \sqrt{2} s + s^2} \quad y$$

$$M(s^2) = 1 = P_r \left| (a_0 + a_1 s + a_2 s^2)(1 - \sqrt{2} s + s^2) \right| =$$
$$a_0 + (a_0 - \sqrt{2} a_1 + a_2) s^2 + a_2 s^4$$

de donde:

$$a_0 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = \sqrt{2}/2$$

luego:

$$T(s) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} s + 1}{s^2 + \sqrt{2} s + 1}$$

I.7.b. CALCULO DE UNA FUNCION DE RED CONOCIDA SU PARTE IMAGINARIA

El proceso a seguir es muy análogo al anterior. Primero tendremos en cuenta que:

$$j I_m T(jw) \Big|_{jw=s} = I_r T(s)$$

es decir que multiplicamos por j y hacemos $jw = s$, obteniendo así la parte impar de T(s) que será:

$$I_r T(s) = \frac{s M(s^2)}{N(s^2)} = \frac{A_1 s + A_3 s^3 + \dots}{B_0 + B_2 s^2 + \dots}$$

El segundo paso es descomponer como antes $N(s^2) = Q(s) \cdot Q(-s)$ obteniendo así:

$$Q(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n$$

El tercer paso será escribir:

$$T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n+1} s^{n+1}}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}$$

llegando en el numerador hasta un grado m que en el denominador. Por último tendrá que ser:

$$sM(s^2) = I_r \left[P(s)Q(-s) \right] = I_r \left[(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n+1} s^{n+1})(b_0 - b_1 s + b_2 s^2 - \dots) \right]$$

de donde obtenemos un sistema:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_1 b_0 - a_0 b_1 \\ A_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

Unicamente debemos de observar que el sistema tiene una incógnita mas que ecuaciones por haber introducido a_{n+1} . Entonces lo que podemos hacer son dos cosas:

- a) Resolver en función de una de las incógnitas todas las demás.
- b) Darle un valor arbitrario a una de ellas y resolver el sistema.

Siguiendo cualquiera de los dos caminos tendremos totalmente definido $T(s)$ únicamente que ahora podemos dividir y dejar:

$$T(s) = K_1 s + K_0 + \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1}}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} = K_1 s + K_0 + T_1(s)$$

pero:

$$T(j\omega) = j K_1 \omega + K_0 + T_1(j\omega)$$

por lo que es:

$$\text{Im} T(j\omega) = K\omega + \text{Im} T_1(j\omega)$$

Esto nos indica que si hemos obtenido $T(s)$ también $K+T(s)$ tiene la misma parte imaginaria, por ello si seguimos el método a) o el b) lo que procuraremos es que $T(s)$ no tenga parte entera independiente y a dicho $T(s)$ se le denomina de parte real mínima siendo la solución general:

$$T_g(s) = K + T(s)$$

donde K es un número real arbitrario

EJEMPLO: Dada:

$$\text{Im} T(j\omega) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \omega - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega^3}{1 + \omega^4}$$

Calcular $T(s)$ con parte real mínima

SOLUCION:

$$1^{\circ} \quad I_r T(s) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} s + \frac{\sqrt{2}}{2} s^3}{1+s^4}$$

$$2^{\circ} \quad \text{Como antes } Q(s) = 1 + \sqrt{2} s + s^2$$

$$3^{\circ} \quad T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}{1 + \sqrt{2} s + s^2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} s - \frac{\sqrt{2}}{2} s^3 = I_r \left| (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3)(1 - \sqrt{2} s + s^2) \right|$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{2} &= -\sqrt{2} a_0 + a_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= -\sqrt{2} a_2 + a_1 + a_3 \\ 0 &= a_3 \end{aligned} \right\}$$

de donde en función de a_0 obtenemos:

$$a_3 = 0; \quad a_2 = a_0 - 1; \quad a_1 = \sqrt{2} a_0 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Es decir:

$$T(s) = \frac{a_0 + (\sqrt{2} a_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}) s + (a_0 - 1) s^2}{1 + \sqrt{2} s + s^2}$$

y para que no exista término independiente deberá ser $a_0 = 1$ con lo que queda:

$$T(s) = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} s}{1 + \sqrt{2} s + s^2}$$

I.7.c. CALCULO FUNCION DE RED CONOCIDA SU MODULO

Ahora primero obtenemos $\left| T(j\omega) \right|^2$

$$\left| T(j\omega) \right|^2 \Big|_{j\omega=s} = T(s)T(-s) = \frac{P(s)P(-s)}{Q(s)Q(-s)} = \frac{M(s^2)}{N(s^2)}$$

Luego el paso siguiente es, como en los anteriores casos, descomponer:

$$N(s^2) = Q(s) \cdot Q(-s)$$

y $Q(s)$ deberá tener todos sus ceros a la izquierda del plano s . Después hacemos:

$$M(s^2) = P(s) P(-s)$$

con la particularidad de que por el hecho de que $P(s)$ sí puede tener ceros a la derecha habrá en general varias combinaciones. Sin embargo cuando tomemos $P(s)$ con todos sus ceros a la izquierda resultara $T(s)$ una función de fase mínima y la solución general ser

$$T_g(s) = T(s) \cdot T_{tp}(s)$$

siendo $T_{tp}(s)$ una función de todo paso arbitraria.

EJEMPLO: Se conoce:

$$\left| T(j\omega) \right| = \frac{1 + \frac{1}{2} \omega^2}{1 + \omega^4}$$

$$1^\circ \quad T(s) \cdot T(-s) = \frac{1 - \frac{1}{2} s^2}{1 + s^4} = \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)}{(1 + \sqrt{2} s + s^2)(1 - \sqrt{2} s + s^2)}$$

en realidad de aquí obtenemos las soluciones:

$$T_1(s) = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s}{1 + \sqrt{2}s + s^2} \quad y \quad T_2(s) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

La 1ª es la fase mínima y además la 2ª puede ser obtenida de la 1ª multiplicando ésta por:

$$T_{tp}(s) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s}$$

y la solución general es:

$$T(s) = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s}{1 + \sqrt{2}s + s^2} \cdot T_{tp}(s)$$

siendo como ha quedado dicho $T_{tp}(s)$ una función de todo paso arbitraria.

I.7.d. CALCULO FUNCION DE RED CONOCIDA SU ARGUMENTO

En este caso tendremos en cuenta que:

$$\frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)} = \left| \frac{T(j\omega)}{T(j\omega)} \right| \frac{e^{j\beta(\omega)}}{e^{-j\beta(\omega)}} = e^{j2\beta(\omega)}$$

por lo que primero hacemos:

$$G(j\omega) = e^{j2\beta(\omega)} = \frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)}$$

el segundo paso será:

$$G(s) = G(j\omega) \Big|_{j\omega=s} = \frac{T(s)}{T(-s)} = \frac{P(s)Q(-s)}{P(-s)Q(s)} = \frac{N(s)}{N(s)}$$

el tercer paso será hacer: $N(s) = P(-s)Q(s)$

con la particularidad de que ahora $P(-s)$ puede tener ceros a la derecha, lo que significa que $P(s)$ tiene ceros a la izquierda, por eso existirán varias combinaciones.

Por último, conocimos $P(-s)$ y $Q(s)$ podemos conocer $P(s)$ con lo cual quedará hallada $T(s)$.

Lo que si se puede conseguir es que no tenga ceros a la derecha y esta función será única. Más en este caso podemos multiplicar a $T(s)$ por una constante K sin que cambie $\beta(\omega)$.

Cuando nos dan $\text{tg } \beta(\omega)$ como es:

$$j \text{tg } \beta(\omega) = \frac{e^{j\beta(\omega)} - e^{-j\beta(\omega)}}{e^{j\beta(\omega)} + e^{-j\beta(\omega)}} = \frac{G(j\omega) - 1}{G(j\omega) + 1}$$

tenemos:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j \text{tg } \beta(\omega)}{1 - j \text{tg } \beta(\omega)}$$

EJEMPLO: Se da:

$$\operatorname{tg}\beta(\omega) = \frac{\omega^3 - 2\omega}{1 - 2\omega^2}$$

SOLUCION:

$$1^\circ) \quad G(j\omega) = \frac{1 - 2\omega^2 + j\omega^3 - j2\omega}{1 - 2\omega^2 - j\omega^3 + j2\omega}$$

$$2^\circ) \quad G(s) = \frac{1 - s^3 - 2s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3} = \frac{(1-s)(1-s+s^2)}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

$$3^\circ) \quad \text{Puede ser: } \begin{array}{ll} Q_1(s) = 1+s & P_1(s) = 1-s+s^2 \\ Q_2(s) = 1+s+s^2 & P_2(s) = 1-s \\ Q_3(s) = (1+s)(1+s+s^2) & P_3(s) = 1 \end{array}$$

y las soluciones serán:

$$T_1(s) = K \frac{1-s+s^2}{1+s}; \quad T_2(s) = K \frac{1-s}{1+s+s^2} \quad \text{y} \quad T_3(s) = \frac{K}{1+2s+2s^2+s^3}$$

Véase que solo $T(s)$ tiene todos sus ceros a la izquierda es decir es de fase mínima.

1.8. DIAGRAMA DE LA FUNCION DE RED

Una función de red de una variable real se puede representar fácilmente sobre un conjunto único de ejes de coordenadas. Por ejemplo, la función real $f(x)$ siendo X real, se puede representar fácilmente en coordenadas rectangulares con X como abscisa y $f(x)$ como la ordenada. Una función compleja de una variable compleja tal como la función de red $T(s)$ con $S = \sigma + j\omega$, no se puede representar sobre un conjunto único de coordenadas.

La variable compleja $S = \sigma + j\omega$ depende de dos cantidades independientes que son las partes real e imaginaria de S . Luego no se puede representar por medio de una línea.

Corno la función compleja $T(s)$ también tiene las partes real e imaginaria, no se puede representar sobre una sola dimensión.

En general, para representar a $T(s)$ con $S = \sigma + j\omega$ se requieren dos gráficos bidimensionales.

La primera es un gráfico $j\omega$ vs σ que se denomina plano S , con el mismo conjunto de coordenadas usadas para representar los polos y los ceros. La segunda es parte imaginaria vs parte real de $T(s)$ que se denomina plano $T(s)$ Como:

$$T(j\omega) = R_e T(j\omega) + j I_m T(j\omega) = |T(j\omega)| \angle \beta(\omega)$$

Podemos hacer representaciones independientes de:

- a) Parte real y parte imaginaria.
- b) módulo y argumento.

a) DIAGRAMA DE LA PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA EN FUNCION DE ω

EJEMPLO: Sea un circuito R serie de impedancia.

$$Z(j\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$\text{Re}(Z(j\omega)) = R$$

$$\text{Im}(Z(j\omega)) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Que están graficados en la figura 1.8.1.

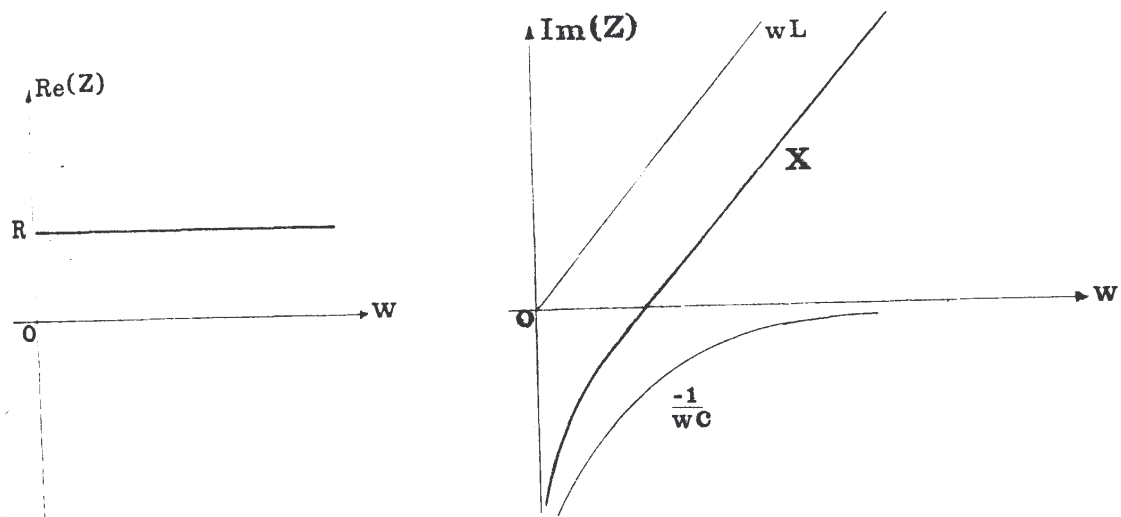


Figura 1.8.1

b) DIAGRAMAS DE MODULO Y ARGUMENTO EN FUNCION DE w

Como ejemplo se representa el módulo y el argumento de la impedancia del punto anterior (Fig. 1.8.2)

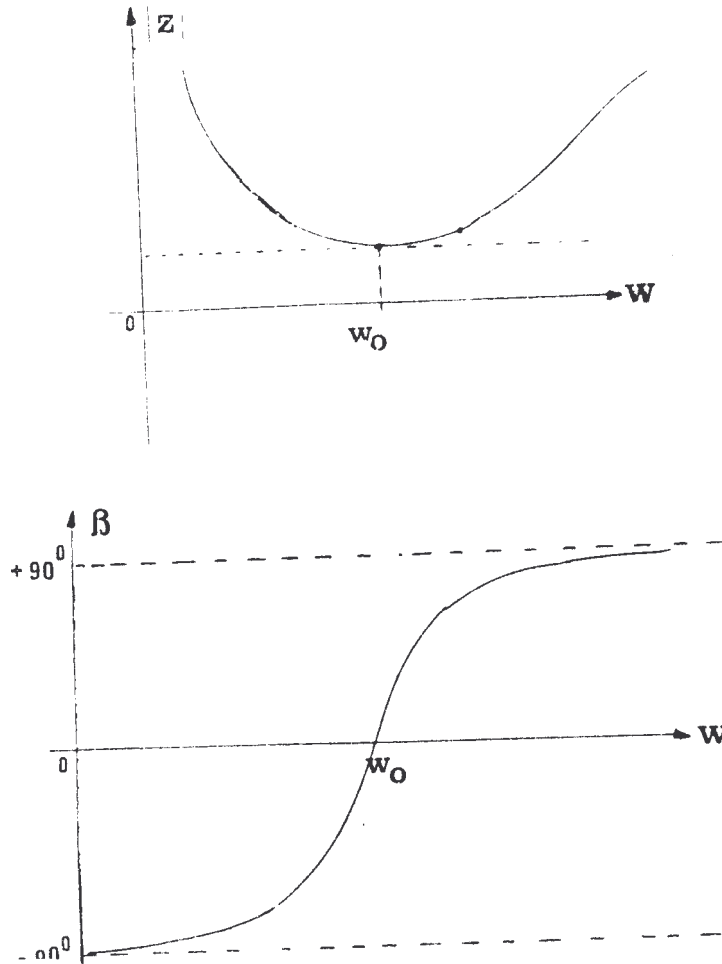
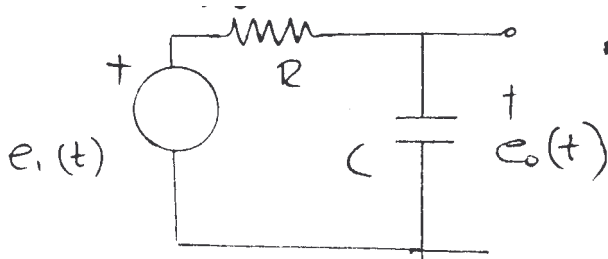


Figura 1.8.2

EJEMPLO

DIBUJAR LOS DIAGRAMAS DE MODULO Y ARGUMENTO DE $T(s) = E_0/E_1$ PARA EL SIGUIENTE CIRCUITO DENOMINADO FILTRO PASO BAJO



SOLUCION

LA FUNCION DE RED $T(s) = E_0/E_1$, PARA LA RED ES POR DIVISOR DE VOLTAJE

$$\frac{E_1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E_0}{\frac{1}{sC}} \quad \therefore \frac{E_0}{E_1} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Donde el polo $p_1 = -1/RC$

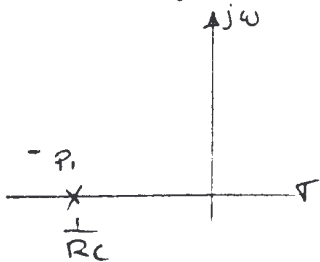
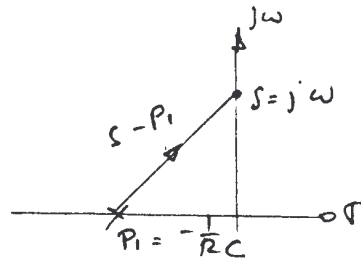


DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

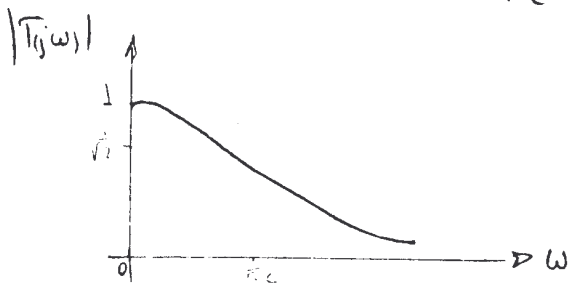


VECTORES EN EL PLANO S

EL VECTOR $s - p_1$ para $\omega = 0$ vale $\frac{1}{RC}$

$$\frac{1}{RC} \quad 0^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{RC} \quad 45^\circ$$

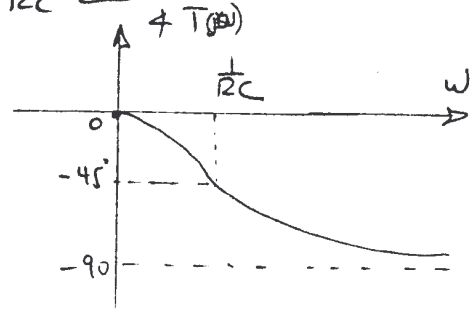


$$|T(j\omega)| = \frac{1}{RC} \left| \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \right| = \frac{1}{RC} \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - (\omega)^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}$$

$$\omega = 0 \quad |T(j\omega)| = 1 \quad 0^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 45^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |T(j\omega)| = 0 \quad 90^\circ$$



ARGUMENTO DE $T(j\omega)$

1.9 DIAGRAMA DE NYQUIST

El diagrama de Nyquist presenta un gráfico de la función $T(j\omega)$ con sus coordenadas rectangulares; representando sobre un eje la parte real y sobre el otro la parte imaginaria.

En él, la curva es a base de frecuencias desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$.

El vector que va a un punto de la curva en $|T(j\omega)|$ y su componente horizontal es $\text{Re } T(j\omega)$ y la vertical en $\text{Im } T(j\omega)$ y el ángulo que forma el vector con el eje horizontal es $\beta(j\omega)$

EJEMPLO

Sea:

$$T(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega}$$

SOLUCION:

Racionalizando $T(j\omega)$ se obtiene:

$$T(j\omega) = \frac{(1 + j\omega)(2 - j\omega)}{\omega^2 + 4} = \frac{2 + \omega^2}{\omega^2 + 4} + j \frac{\omega}{\omega^2 + 4}$$

Donde:

$$\text{Re } T(j\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^2 + 4}$$

$$\text{Im } T(j\omega) = \frac{\omega}{\omega^2 + 4}$$

Dando valores diferentes de ω se obtiene la siguiente tabla de valores:

ω	$\omega^2 + 4$	$\omega^2 + 2$	$R_e T(j\omega)$	$I_m T(j\omega)$
0	4	2	0,5	0
1	5	3	0,6	0,2
2	8	6	0,75	0,25
3	13	11	0,845	0,25
5	29	27	0,93	0,172
10	104	102	0,982	0,096
∞	∞	∞	1	0

Que se grafica en la figura 1.9.1.

Los diagramas de Nyquist se utilizan en la determinación de la estabilidad de redes.

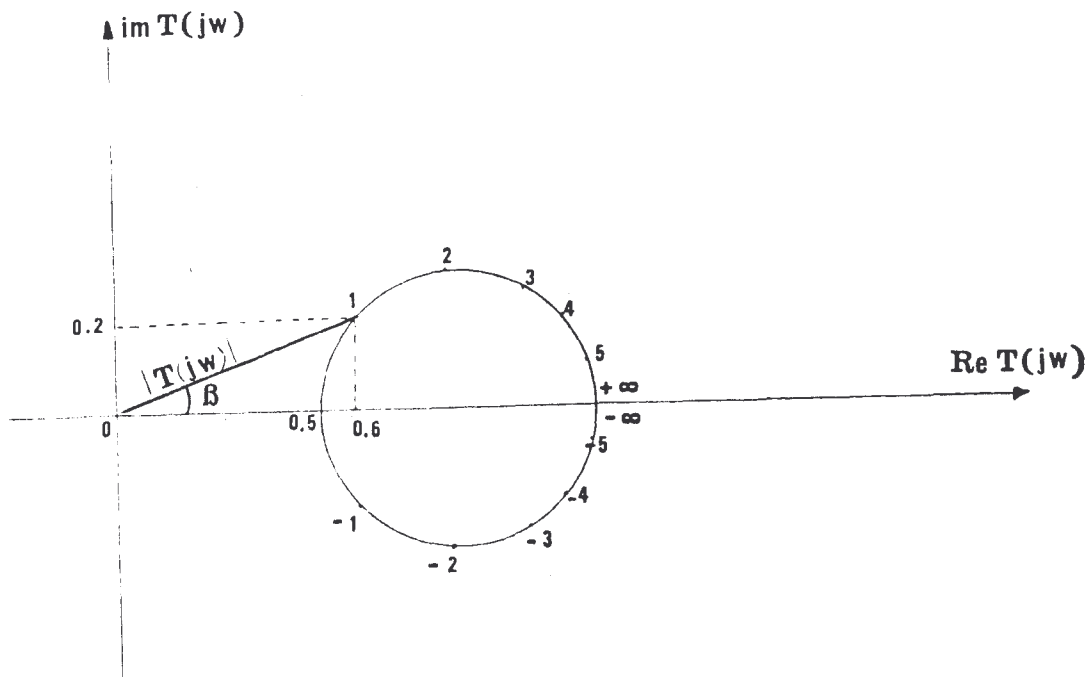


FIGURA 1.9.1

1.10 DIAGRAMA DE BODE

El diagrama de Bode nos permite representar el módulo de la función de red en función de la frecuencia en escala logarítmica.

También llamado diagrama de esquinas o diagrama semi-logarítmico de T(s).

1. CARACTERISTICAS

- 1) Que los términos del numerador y del denominador al aplicarles logaritmos se convierten en términos aditivos los cuales se pueden estudiar por separado.
- 2) Se puede representar cada término mediante líneas rectas.

Como en general T(s) es de la forma:

$$T(s) = H \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)} \quad \text{ec. 1.10.1}$$

Según sean las raíces tendremos:

$$T(s) = H \frac{s^p \prod_{i=1}^n (s + \sigma_i) \prod_{j=1}^m (s^2 + a_j s + b_j)}{\prod_{k=1}^k (s + \sigma_k) \prod_{l=1}^n (s^2 + a_l s + b_l)}$$

Donde:

- s^p = polo o cero en el origen
- $(s + \sigma)$ = raíces reales
- $(s^2 + as + b)$ = raíces imaginarias

Luego para $S = j\omega$

$$T(j\omega) = H \frac{(j\omega)^P \prod_{i=1}^n (j\omega + \sigma_i) \prod_{j=1}^m [(-\omega^2 + b_j) + a_j j\omega]}{k \prod_{l=1}^k (j\omega + \sigma_l) \prod_{m=1}^n [(-\omega^2 + b_m) + a_m j\omega]}$$

y sacando factor común todos los términos independientes:

$$T(j\omega) = k \frac{(j\omega)^P \prod_{i=1}^n (1 + \frac{j\omega}{\omega_{ni}}) \prod_{j=1}^m [-(\frac{\omega}{\omega_{nj}})^2 + C_j j\omega + 1]}{\prod_{l=1}^k (1 + \frac{j\omega}{\omega_{nl}}) \prod_{m=1}^n [-(\frac{\omega}{\omega_{nm}})^2 + C_m j\omega + 1]}$$

El módulo de $T(j\omega)$ lo representamos, calculandolos en una unidad que llamaremos decibelios (db) para ello debemos multiplicar por 20 el logaritmo del módulo de dicha función.

$$db = 20 \text{ Log } |T(s)|$$

NOTA La unidad "bel" se define como:

$$\alpha_p = \frac{\text{razón de potencia en bels}}{1} = \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Donde el logaritmo es en base diez y P_2 y P_1 son las potencias en dos diferentes terminales de la red.

- Generalmente se considera P_2 salida y P_1 entrada y en este sentido $\frac{P_2}{P_1} < 1$ para redes pasivas.

En la práctica esta unidad resulta muy grande y se utiliza el decibelio.

$$\text{db} = \frac{1}{10} \text{ bel} \quad \text{ec. 1.10.4}$$

$$\alpha_p = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ db} \quad \text{ec. 1.10.5}$$

Luego aplicando logaritmos base 10 y multiplicando por 20 tendremos

$$\begin{aligned} 20 \log |T(j\omega)| &= 20 \log |K| + 20 \log |(j\omega)^p| + 20 \sum_1^n \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_n} \right| \\ &+ 20 \sum_{n+1}^m \log \left[\left| 1 + j\omega c - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \right] - 20 \sum_1^n \log \left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n} \right) \right| \\ &- 20 \sum_{n+1}^m \log \left[\left| 1 + j\omega c - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \right] \quad \text{ec. 1.10.6} \end{aligned}$$

2. ANALISIS GRAFICO DE LOS FACTORES

- a) Constantes
- b) Polos y ceros en el origen
- c) Polos y ceros reales

único
múltiple
- d) Polos y ceros complejos

único
múltiple

Como veremos, el diagrama de Bode nos presenta la ventaja de que podemos analizar por separado cada uno de estos factores y luego por simple sumatoria algebraica obtener el módulo de la función total.

Los gráficos se indican en papel semilogarítmico.

- Escala lineal: ganancia de $T(j\omega)$ en db.
- Escala logarítmica: frecuencia ω .

CASO A CONSTANTES

Ya que:

$$K_{db} = 20 \log K = cte$$

su representación será:

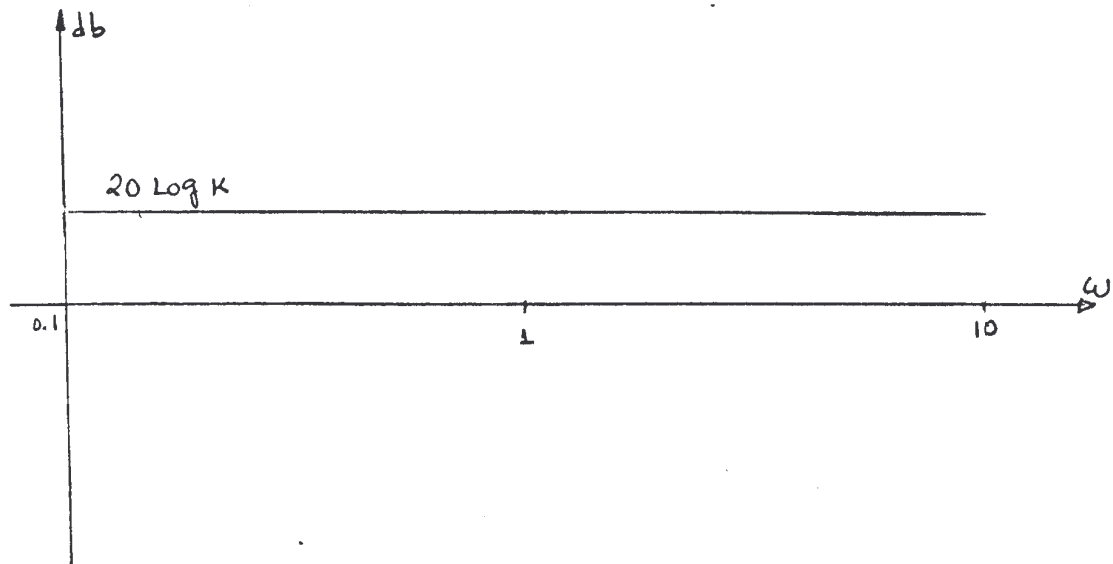


FIG 1.10.1

CASO B: POLOS Y CEROS EN EL ORIGEN"

Consideremos el caso siguiente (que no es válido para los polos)

$$20 \log |(j\omega)^P| = 20^P \log \omega \text{ db} \qquad \text{ec. 1.10.7}$$

Que es la ecuación de una línea recta en coordenadas semilogarítmicas. La pendiente de esta línea puede hallarse derivado con respecto a $\log \omega$, luego:

$$\frac{d \ 20 \log |(jw)^P|}{d(\log w)} = 20 \text{ p db/década} \quad \text{ec. 1.10.8}$$

Por lo tanto por el cambio de una unidad de $\log w$ corresponde a un cambio de 20 p db por unidad de $\log w$ que equivale al cambio en w 10, 100, 1000; por ello decimos que tiene una pendiente 20 p db por década.

A veces se usa la octava (db/octava) para moderar la separación de las frecuencias:

w_1 y w_2 están separadas por una octava si $w_1/w_2 = 2$. Así:

$$\text{Nº de octavas} = \frac{\log w_1/w_2}{\log 2} \quad \text{ec. 1.10.9}$$

Mientras que el número de décadas es:

$$\text{Nº de décadas} = \frac{\log w_1/w_2}{\log 10} \quad \text{ec.1.10.10}$$

EJEMPLO:

$$\text{Sea } w_1/w_2 = 10$$

$$\text{En octavas} = \log 10/\log 2 = 1/0.301 \text{ décadas.}$$

Por tanto

$$20 \text{ n db/décadas} = 20 \text{ n} \times 0.301 = 6 \text{ n db/octava}$$

Así pues la representación de

$$20 \log |(jw)^n| = 20 \text{ n} \log w$$

está dada por la figura 1.10.2.

CASO C: "POLOS Y CEROS REALES"

1) CERO SIMPLE

$$T(j\omega) = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

El logaritmo del módulo en db será:

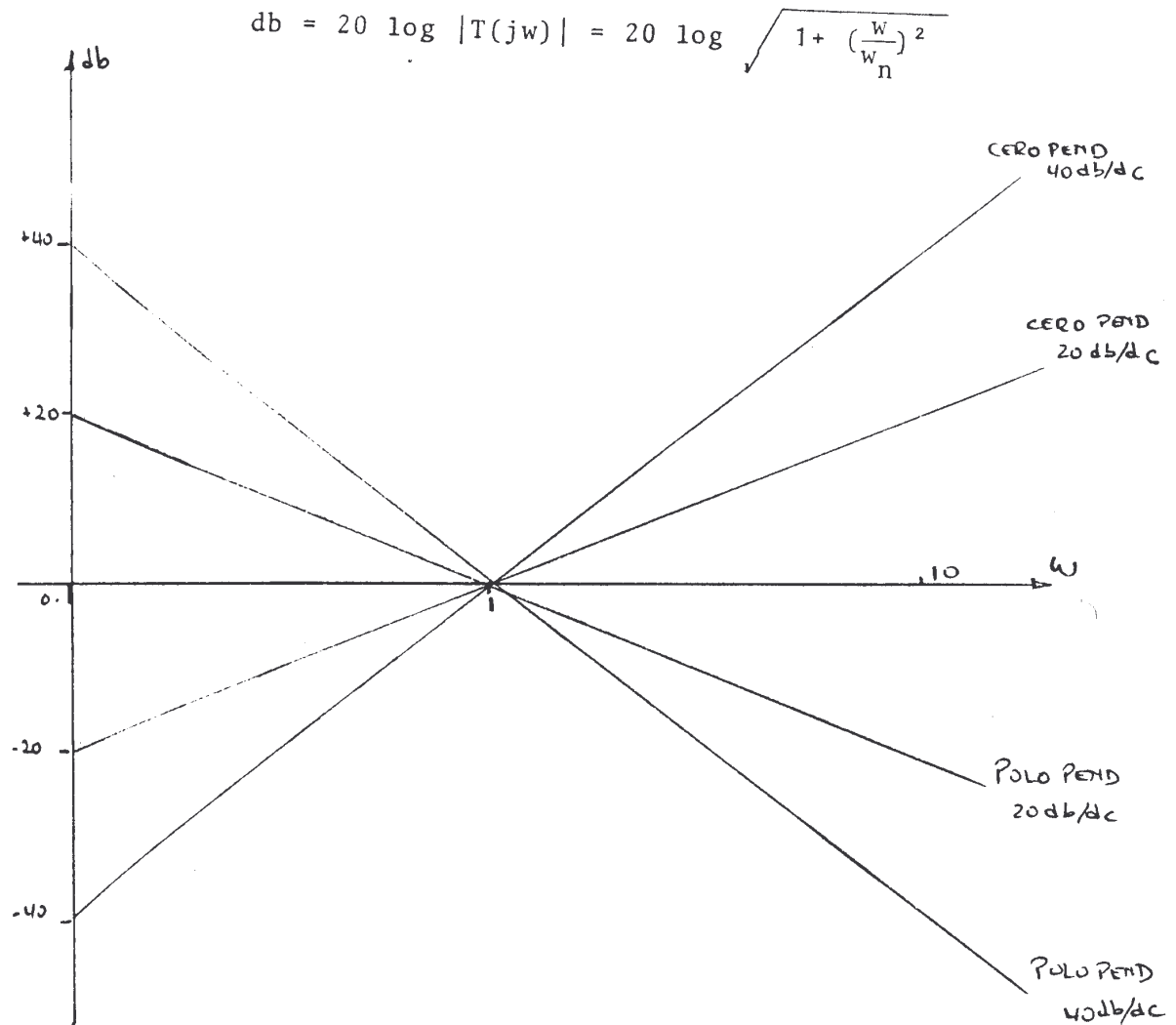


FIGURA 1.10.2

Las aproximaciones asintóticas de la curvas son

BAJA FRECUENCIA $\frac{w}{w_n} \ll 1$ $20 \log 1 = 0$ recta horizontal.

ALTA FRECUENCIA $\frac{w}{w_n} \gg 1$ $20 \log w - 20 \log w_n$ recta con pendiente.

INTERSECCION $20 \log w = 20 \log w_n$ $w = w_n$ frecuencia de esquina.

PENDIENTE $\frac{d(20 \log w - 20 \log w_n)}{d \log w} = 20 \text{ db/dc}$

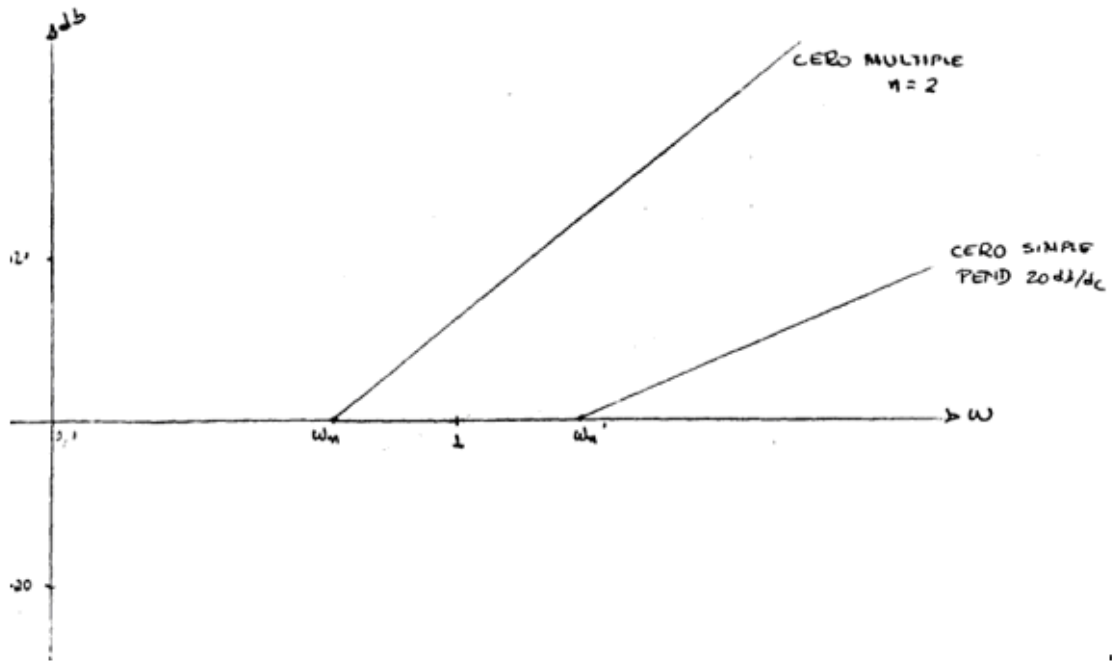
La curva del módulo es uniforme pero se desvía ligeramente en las proximidades de la intersección de las asíntotas.

Sin embargo en el codo de la unión de las dos asíntotas existe un error cuyo valor es:

$$\epsilon_{w_n} = 20 \log \sqrt{\left(\frac{w}{w_n}\right)^2 + 1} = 20 \log \sqrt{1 + 1} =$$

$$\epsilon_{w_n} = 20 \log 2^{\frac{1}{2}} = 10 \log 2$$

$$\epsilon_{w_n} = 3.01 \text{ db}$$



2) CERO MULTIPLE

Igual que antes:

$$T(j\omega) = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^n$$

$$|T(j\omega)|_{db} = 20 \log |T(j\omega)| = 20 n \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Pendiente 20 n db/dc

3) POLO SIMPLE

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_n}}$$

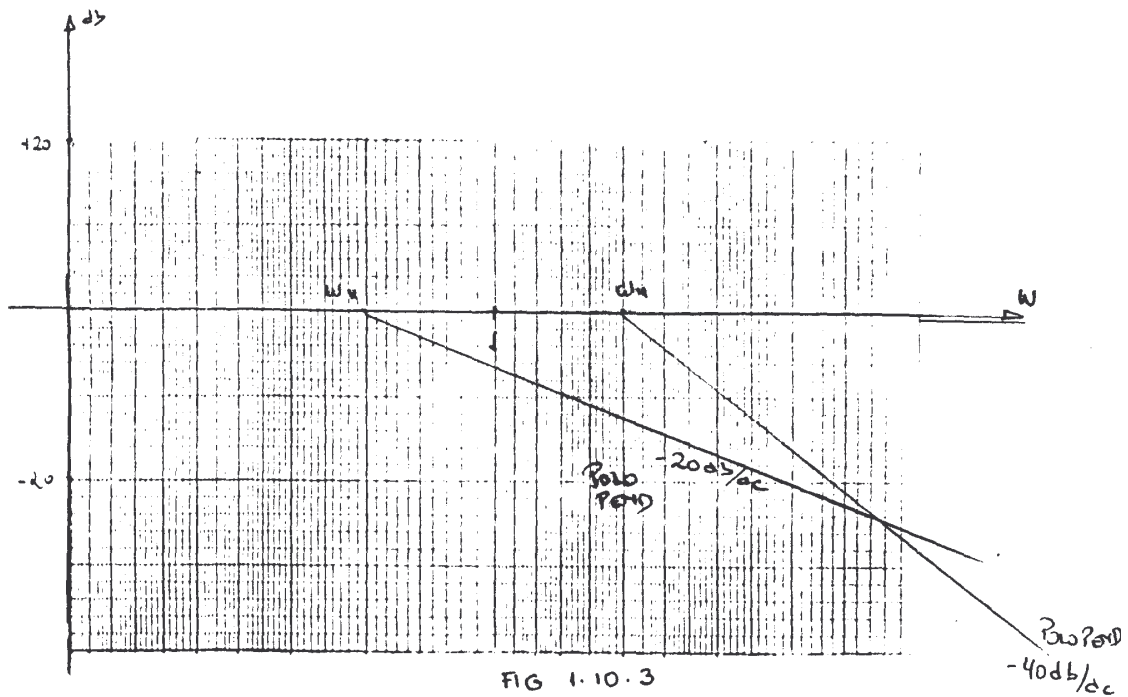
Vemos que resulta similar al caso del cero simple sólo que este

tiene pendiente negativa.

$$T(j\omega) \Big|_{\text{db}} = 20 \log \left| \left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right|^{-1} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Es decir, es una línea recta en 0 db para baja frecuencia y para alta frecuencia es una recta de pendiente -20 db/dc.

Se intersectan en " ω_n " llamada "frecuencia de esquina negativa".
Figura 1.10.3.



4) POLO MULTIPLE

$$T(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^n} = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^{-n}$$

Resultando igual que en caso anterior pero esta vez la pendiente va a ser -20 n db/dc.

CASO D "POLOS Y CEROS CUADRATICOS O COMPLEJOS"

a) CERO CUADRÁTICO UNICO

$$T(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{D} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$|T(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{D}\right)^2}$$

- Para $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ $20 \log \sqrt{1} = 0$

Luego es una línea recta en el eje de las abcisas.

- Para $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$

$$|T(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} = 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

de pendiente 40 db/dc. Para la intersección ω Luego es una recta ω (Fig. 1.10.4)

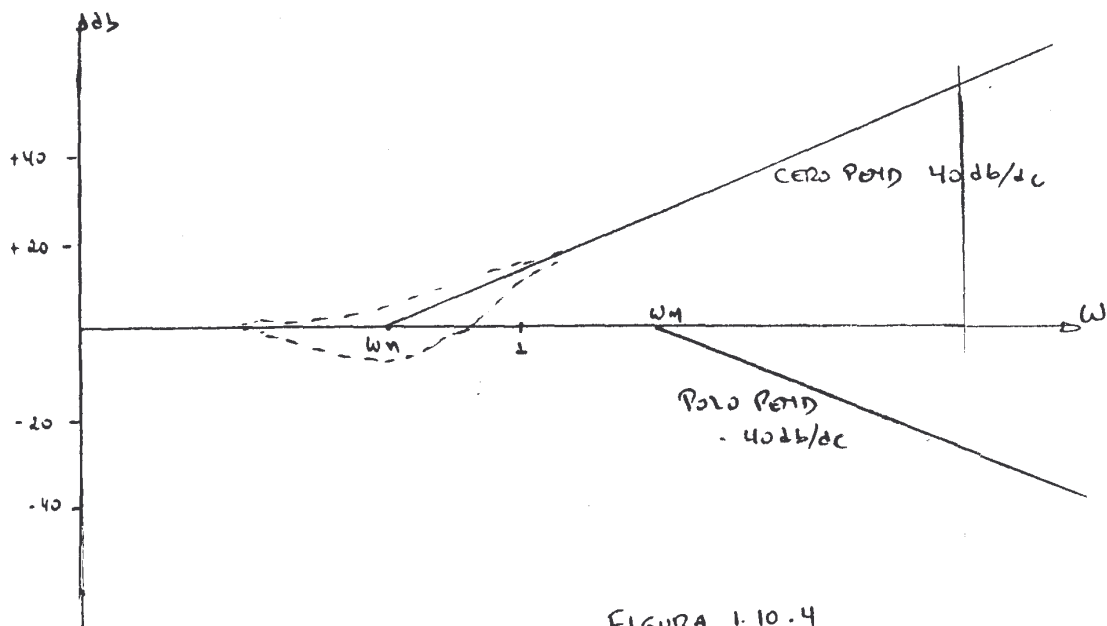


FIGURA 1.10.4

El error en el codo $w = w_n$

$$\epsilon_{w_n} = 20 \log \sqrt{1 - 1 + \left(\frac{w_n}{D}\right)^2} = 20 \log \frac{w_n}{D}$$

$$\epsilon > 0 \quad \text{si} \quad \frac{w_n}{D} > 1$$

$$\epsilon < 0 \quad \text{si} \quad \frac{w_n}{D} < 1$$

b) CERO CUADRÁTICO MULTIPLE

$$T(jw) = \left[1 + \frac{jw}{D} - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \right]^n$$

$$|T(jw)|_{\text{db}} = 20 \log |T(jw)| = 20 n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \right]^2 + \left(\frac{w}{D}\right)^2}$$

Tendría pendiente igual a 40 n db/dc.

c) POLO CUADRÁTICO SIMPLE

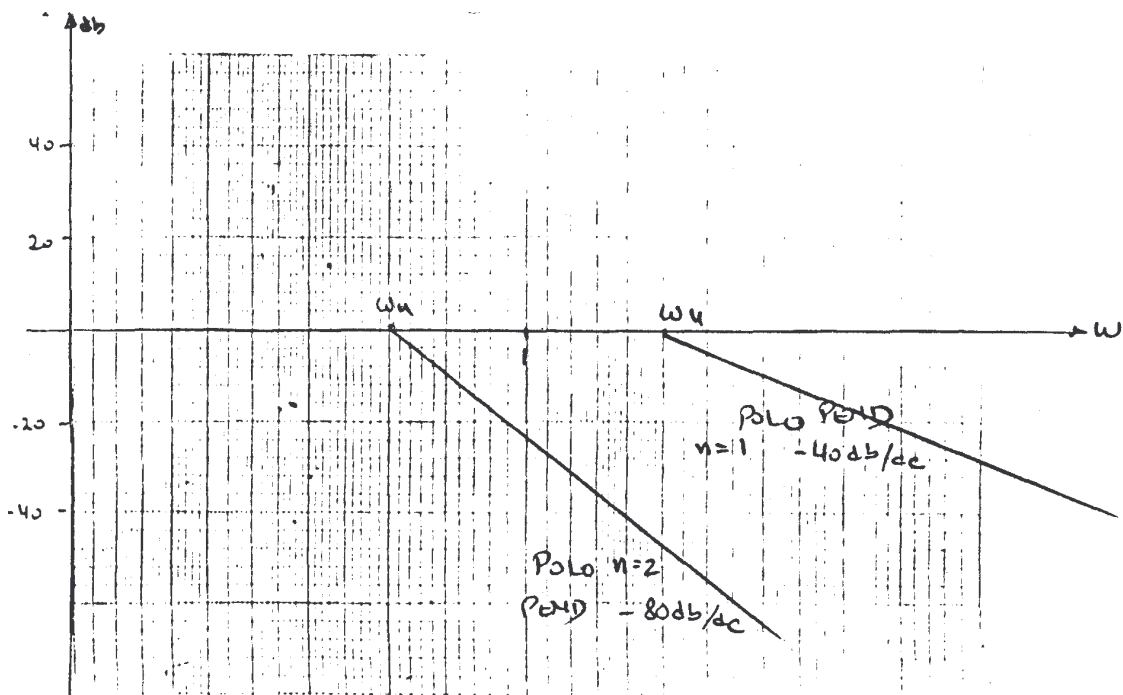
$$T(jw) = \frac{1}{1 + j\frac{w}{D} - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}$$

$$T(jw) = \left[1 + j\frac{w}{D} - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \right]^{-1}$$

$$|T(jw)|_{\text{db}} = 20 \log |T(jw)| = -20 \log |T(jw)|$$

Análogo al caso anterior para baja frecuencia será una recta so

bre el eje de las abscisas y para alta frecuencia será una recta de pendiente -40 db/dc.



d) POLO CUADRATICO MULTIPLE

$$T(jw) = \frac{1}{\left[1 + j \frac{w}{D} - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^n}$$

$$T(jw) = \left[1 + j \frac{w}{D} - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^{-n}$$

$$|T(jw)|_{db} = 20 \log |T(jw)| = -20 n \log |T(jw)|$$

De pendiente -40 db/dc.

EJEMPLO: Obtener el diagrama de Bode de la función.

$$T(s) = \frac{2}{3} \frac{(s + \frac{1}{2})(3s + 4)^2(s^3 + 6s)}{(s^2 + s + \frac{4}{3})^2(4s^2 + 2s + \frac{1}{4})}$$

SOLUCION

Haciendo el término independiente de cada factor igual a la unidad se tiene para $s = jw$.

$$T(jw) = 72 \frac{(jw)(1 + \frac{jw}{0.5})(1 + \frac{jw}{4})^2 \left[1 + \frac{jw}{6} - (\frac{w}{\sqrt{6}})^2\right]}{\left[1 + \frac{jw}{4/3} - \frac{w}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right]^2 \left[1 + j \frac{w}{0.25}\right]^2}$$

Analizando término por término, determinando las frecuencias de esquinas y la pendiente tendremos:

- 1) La constante 72 $\left[20 \log 72 = 37 \text{ db} \quad \text{recta horizontal} \right]$
- 2) Cero en el origen (jw) $\left[\text{recta infinita que pasa por } w = 1 \text{ con pendiente } 20 \text{ db/dc.} \right]$
- 3) Cero real $\left[\begin{array}{l} w_n = 0.5 \\ \text{pendiente } 20 \text{ db/dc.} \end{array} \right]$
- 4) Cero múltiple $\left[\begin{array}{l} w_n = 2.45 \\ \text{pendiente } 40 \text{ db/dc.} \end{array} \right]$
- 5) Cero cuadrático $\left[\begin{array}{l} w_n = 1.33 \\ \text{pendiente} = 40 \text{ db/dc.} \end{array} \right]$
- 6) Polo cuadrático múltiple $\left[\begin{array}{l} w_n = 1.15 \\ \text{pendiente} = -80 \text{ db/dc} \end{array} \right]$
- 7) Polo real múltiple $\left[\begin{array}{l} w_n = 0.25 \\ \text{pendiente} = -40 \text{ db/dc} \end{array} \right]$

Para la representación se necesita papel semilogarítmico.

Mar. superior: 40 db

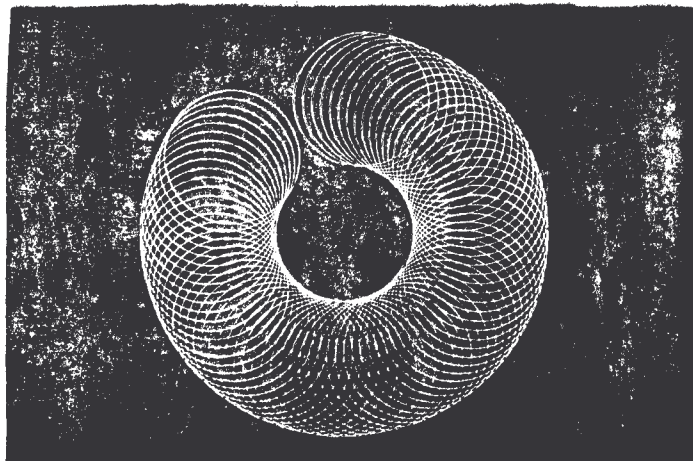
Mar. inferior: -80 db

Frecuencia inferior: 0,25

Frecuencia superior: 2,45

capitulo 2

CUADRIPOLOS



CAPITULO N° 2 : CUADRIPOLOS

CONTENIDO

2.1	Introducción	73
2.2	Relación matricial de las variables	74
2.3	Dispositivos de dos pares de terminales	94
2.4	Interconexion de cuadripolos	106
2.5	Restricciones de las conexiones. Prueba de Brune	115
2.6	Cuadripolos activos	122
2.7	Cuadripolos típicos	125
2.8	Impedancias de entrada y salida	136
2.9	Impedancias de entrada y salida en ca y cc	143
2.10	Impedancias iterativas	144
2.11	Impedancias imagen	149
2.12	Impedancias características	153
2.13	Función de propagación imagen	154
2.14	Deducción de Z_{i1} , Z_{i2} y β_c en función de las impedancias de cuadripolos típicos y viceversa	160

2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se estudiará una clase especial de función de red utilizada para describir el comportamiento de redes de dos pares de terminales y que puede ser generalizada para describir redes de n pares de terminales.

Se verá que dichas funciones de red son parecidas a las estudiadas anteriormente pero con restricciones adicionales impuestas por el requerimiento de que uno de los dos pares de terminales deberá estar en cortocircuito o en circuito abierto.

Así, pues, se entiende por cuadripolo toda red con cuatro terminales.

Dos de los terminales se consideran como terminales de entrada (por los cuales se excita el cuadripolo). Los otros dos son los terminales de salida, por donde la carga recibe la respuesta del cuadripolo a la excitación.

En la figura 2.1.1. se considera los terminales 1 — 1' de entrada y los terminales 2 - 2' de salida.

Así mismo se observa el convenio de polaridades

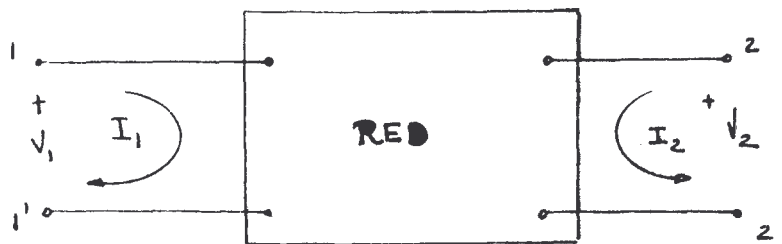


FIGURA 2.1.1.

En la figura 2.1.1. están indicadas las variables de un cuadripolo y estas son: V_1 , I_1 , V_2 e I_2 .

2.2 RELACION MATRICIAL DE LAS VARIABLES

En el cuadripolo de la figura 2.L1 se identifica cuatro variables: dos voltajes y dos corrientes.

La dependencia de dos de las variables en función de las otras dos se puede hacer de seis maneras diferentes. Los nombres de estos parámetros se escogen para indicar su dimensión o su aplicación principal.

Así en la tabla 2.2.1 se resumen estas combinaciones:

PARAMETROS DE CUADRIPOLOS

NOMBRE	Símbolo	FUNCIÓN	
		Expresa	En términos de
Impedancia de circuito abierto	Z	V_1, V_2	I_1, I_2
Admitancia de corto circuito	Y	I_1, I_2	V_1, V_2
Transmisión	a	V_1, I_1	V_2, I_2
Transmisión inversa	b	V_2, I_2	V_1, I_1
Híbrida	h	V_1, I_2	I_1, V_2
Híbrida inversa	g	I_1, V_2	V_1, I_2

TABLA 2.2.1.

2.2.a MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE CIRCUITO ABIERTO

MATRIZ (Z)

Suponiendo que son conocidas las corrientes I_1 e I_2 el Teorema de sustitución, nos permite considerar que la entrada y la salida han sido cerrados por fuentes de corriente de valor

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}$$

En la ec. 2.2.2. se observa que la dimensión de los coeficientes de las corrientes son de impedancias por lo que podemos escribir.

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad \text{ec. 2.2.3.}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

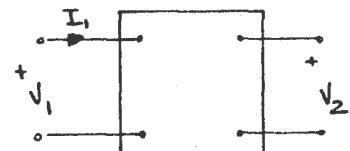
donde la matriz $|Z|$ es.

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

Los parámetros se definen partiendo de las ec. 2.2.3.

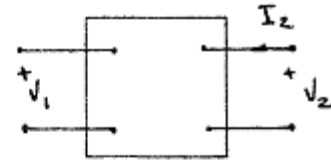
$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0}$$

Impedancia de entrada cuando la salida está abierta.



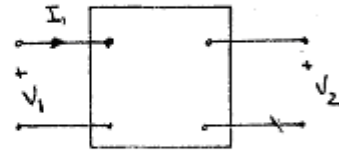
$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1 = 0}$$

Impedancia de transferencia cuando los terminales 1-1' están abiertos.



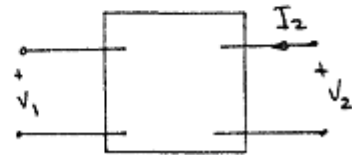
$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2 = 0}$$

Impedancia de transferencia con los terminales 2-2' abiertos.



$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1 = 0}$$

Impedancia de salida cuando los terminales 1-1' están abiertos.



Ejemplo: Sea hallar la matriz de impedancia de circuito abierto al circuito en T de la figura 1.2.2.

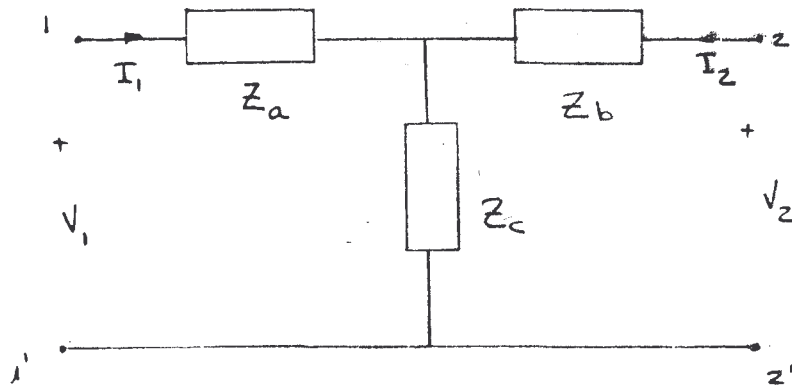


FIGURA 2.2.2.

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0}$$

Ello indica que la salida está en circuito abierto, y por lo tanto:

$$Z_{11} = Z_a + Z_c$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_c$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} \quad \text{Luego} \quad Z_{22} = Z_b + Z_c$$

Así

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_a + Z_c) & Z_c \\ Z_c & (Z_b + Z_c) \end{bmatrix}$$

2.2.b MATRIZ DE ADMITANCIA DE CORTOCIRCUITO

MATRIZ [Y]

Para expresar ahora I_1 e I_2 en términos de V_1 y V_2 podemos utilizar las ec. 2.2.3. y despejar; quedando

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} V_1 + \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} V_2$$

ec. 2.2.4.

$$I_2 = \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} V_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta Z} V_2$$

$$\text{donde:} \quad \Delta Z = -Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$$

En las ec. 2.2.4. se observa que la dimensión de los coeficientes de los voltajes es de admitancia por lo que se puede escribir como:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

ec. 2.2.5.

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

Que en forma matricial se expresa:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Donde por la matriz [Y] se denomina Matriz de admitancia de cortocircuito.

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

La interpretación de los parámetros es:

$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big _{V_2=0}$	Admitancia de entrada cuando la salida está cortocircuitada.	
$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big _{V_1=0}$	Admitancia de transferencia cuando los terminales 1 - 1' están cortocircuitados.	
$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big _{V_2=0}$	Admitancia de transferencia cuando los terminales 2 - 2' están cortocircuitados.	
$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big _{V_1=0}$	Admitancia de salida cuando los terminales 1 - 1' están cortocircuitados.	

Como se observa: la matriz [Z] y la [Y] tienen las siguientes

tes relaciones de equivalencia:

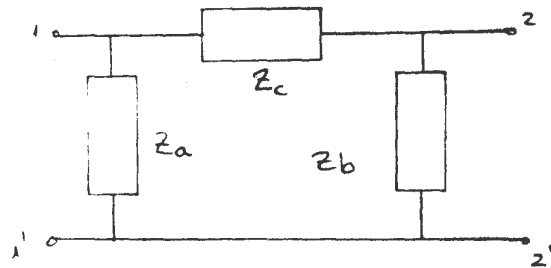
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta z} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta z} & \frac{Z_{11}}{\Delta z} \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.6.}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\Delta y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta y} & \frac{Y_{11}}{\Delta y} \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.7.}$$

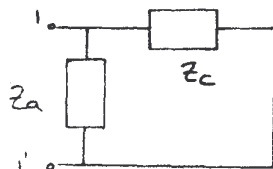
Es decir que se cumple que:

$$[Z] \cdot [Y] = [U] \quad \text{ec. 2.4.8.}$$

EJEMPLO Calcular la matriz [Y] del cuadripolo en π

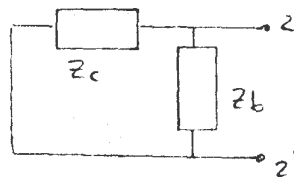


$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$



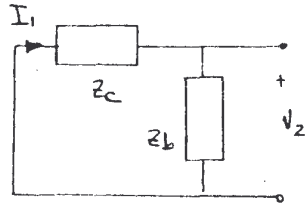
$$Y_{11} = Y_a + Y_c$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$



$$Y_{22} = Y_b + Y_c$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$



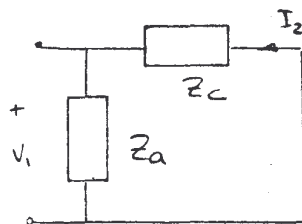
$$I_1 Z_c + V_2 = 0$$

$$I_1 Z_c = -V_2$$

$$\frac{I_1}{V_2} = -\frac{1}{Z_c}$$

$$Y_{12} = -Y_c$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$



$$Z_c I_2 + V_1 = 0$$

$$\frac{V_1}{I_2} = -Z_c$$

$$Y_{21} = -Y_c$$

Quedando así la matriz de admitancia

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

2.2.c. MATRIZ DE TRANSMISION

MATRIZ [a]

Los parámetros de transmisión sirven para relacionar el voltaje y la corriente de un par de terminales a el voltaje y la corriente del otro par de terminales.

Estos parámetros se conocen por una variedad de nombres: "Parámetros de cadena", "Parámetros ABCD", etc. Su primer uso fue para el análisis de líneas de transmisión donde se conocen con

el nombre de "Parámetros generales del circuito"

Las ecuaciones correspondientes se derivan de las ec. 2.2.3. y 2.2.5. donde sale que:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \quad ; \quad V_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} V_2 - \frac{\Delta z}{Z_{21}} I_2 \quad \text{ec. 2.2.9.}$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \quad ; \quad I_1 = \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$$

El signo negativo de los segundos términos de la ec. 1.2.9. proviene de los convenios diferentes asignados a la dirección positiva de I_2 . En problemas de transmisión de energía es convencional asignar a la corriente un sentido contrario al tomado por nosotros. Luego el signo menos de la ec. 2.2.9 debe interpretarse como el de la corriente y no el de B ó de D.

En forma matricial la ec. 2.2.9 quedaría:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

donde la matriz de transmisión [a] es;

$$[a] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

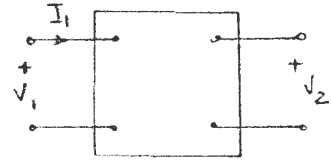
donde asimismo: si el cuadripolo es bilateral.

$$\Delta a = AD - BC = \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{12}^2} - \frac{Z_{11} Z_{12} - Z_{12}^2}{Z_{12}^2} = 1 \quad \text{ec. 2.2.10}$$

Las interpretaciones físicas de los parámetros son:

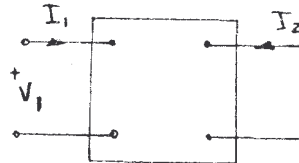
$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

Relación de potenciales cuando la salida está a bierta (Inversa de la función de red T_E)



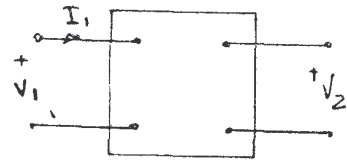
$$-B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Inversa de la admitancia de transferencia cuando los terminales 2 - 2' están cortocircuitados.



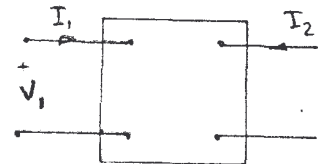
$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

Inversa de impedancia de transferencia cuando los terminales 2-2' están abiertos.



$$-D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Relación de corrientes cuando la salida está cortocircuitada (Inversa de la función de red T_I).



Obsérvese que:

$$AD - BC = \frac{Z_{12}}{Z_{21}}$$

Si $Z_{12} = Z_{21}$ como es el caso de cuadripolos recíprocos será:

$$\Delta a = AD - BC = 1 \quad \text{ec. 2.2.11.}$$

Así mismo si se conocen tres parámetros de transmisión el cuarto se puede determinar mediante la ec. 2.2.11.

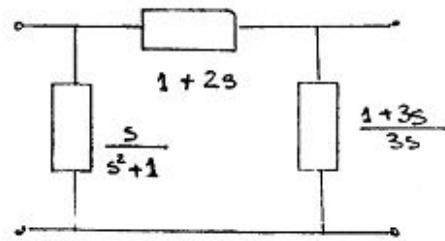
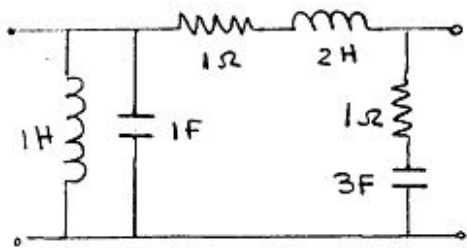
EJEMPLO:

Partiendo de su definición determinar los parámetros de la matriz [a] del cuadripolo de la figura.

Solución:

$$V_1 = A V_2 - B I_2$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2$$

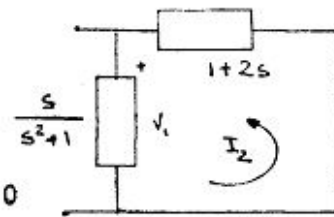


$$-B = -\frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

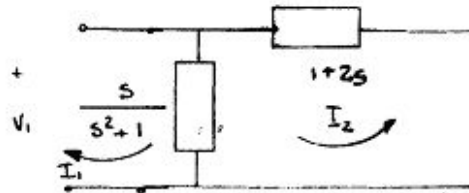
$$V_1 + (1 + 2S) I_2 = 0$$

$$(1 + 2S) = -\frac{V_1}{I_2}$$

$$\therefore B = 1 + 2S$$



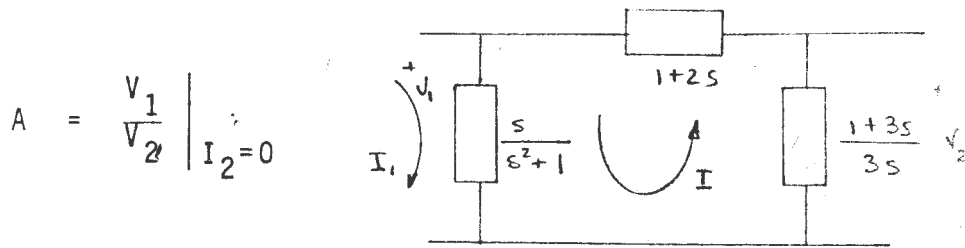
$$-D = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$



$$(I_1 + I_2) \frac{S}{S^2 + 1} + (1 + 2S) I_2 = 0$$

$$\frac{S}{S^2 + 1} I_1 = - \left(\frac{S^2 + 1 + 2S^3 + 2S + S}{S^2 + 1} \right) I_2$$

$$-D = \frac{I_1}{I_2} = - \frac{2S^3 + S^2 + 3S + 1}{S}$$



$$V_1 + (1 + 2S) I - V_2 = 0$$

$$V_2 = - \left(\frac{1 + 3S}{3S} \right) I$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{6S^2 + 6S + 1}{3S + 1}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$V_1 + (1 + 2S) I - V_2 = 0$$

$$V_1 = (I_1 + I) \frac{S}{S^2 + 1}$$

$$V_2 = - \left(\frac{1 + 3S}{3S} \right) I$$

$$I_1 \frac{S}{S^2 + 1} + \frac{S}{S^2 + 1} I + (1 + 2S) I = V_2$$

$$I_1 \frac{S}{S^2 + 1} + \left[\frac{-3S}{1 + 3S} V_2 \right] \left[\frac{S}{S^2 + 1} + 1 + 2S \right] = V_2$$

$$C = \frac{6S^4 + 6S^3 + 10S^2 + 6S + 1}{3S^2 + S}$$

4. MATRIZ DE TRANSMISION INVERSA

[b] sólo para $\Delta a = 1$ cuadripolos recíprocos

Si en las ec. 2.2.9. expresamos V_2 e I_2 en función de V_1 e I_1 recordando que sólo si $\Delta a = 1$ obtendremos, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_2 &= D V_1 - B I_1 \\ I_2 &= C V_1 - A I_1 \end{aligned} \quad \text{ec. 2.2.12.}$$

Que en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

La matriz [b] llamada de transmisión inversa queda definida por:

$$[b] = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

y desde luego se cumple que:

$$[a] [b] \text{ es siempre diferente } [u]$$

5. MATRIZ HIBRIDA

[h] V_1, I_2 en función I_1, V_2

Si despejamos de cualquiera de los sistemas de ecuaciones anteriores V_1 e I_2 tendremos:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad \text{ec. 2.2.13.}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

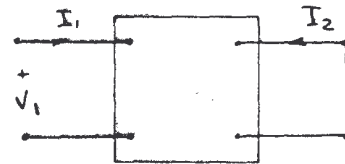
donde:

$$[h] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Las interpretaciones físicas de estos parámetros son:

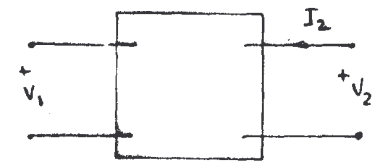
$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Impedancia de entrada con la salida cortocircuitada.



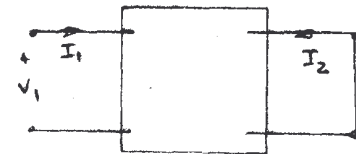
$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Relación de potenciales cuando la entrada está abierta.



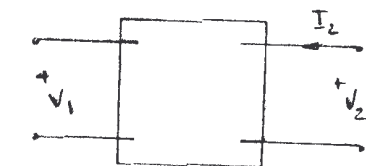
$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Relación de corrientes cuando la salida está cortocircuitada.

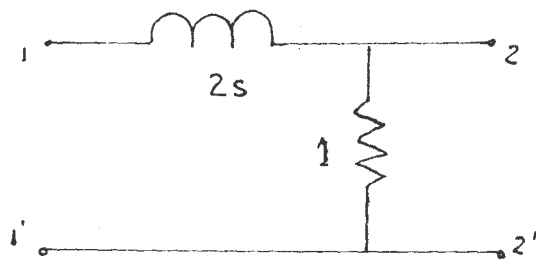


$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

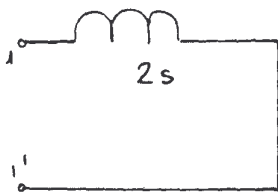
Admitancia entre los terminales 2-2' cuando 1-1' están abiertos.



EJEMPLO: En el cuadripolo de la figura hallar la matriz híbrida a partir de su definición.

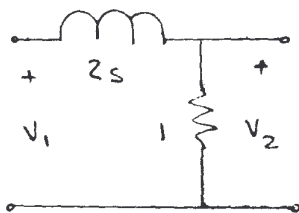


$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$



$$h_{11} = 2s$$

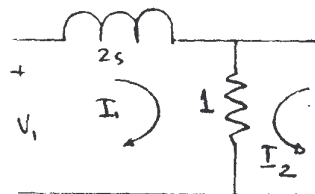
$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$



En la segunda malla ya que no circula corriente por 2s tendremos:

$$V_1 = V_2 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

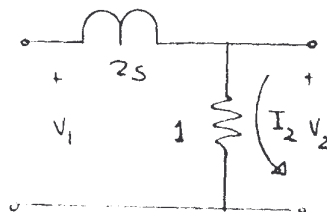


En la segunda malla se tiene que:

$$I_1 + I_2 = 0$$

$$\frac{I_1}{I_2} = -1$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$



En la segunda malla

$$I_2 = V_2$$

$$\frac{I_2}{V_2} = 1$$

$$[h] = \begin{bmatrix} 2s & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En cuadripolos bilateral es se cumple que $h_{12} = - h_{21}$ y en cuadripolos simétricos $\Delta h = 1$.

6. MATRIZ HIBRIDA INVERSA

MATRIZ $[g]$ I_1, V_2 en función V_1, I_2

Se obtiene al despejar I_1 y V_2 en función de V_1 e I_2 con lo cual tendremos:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.2.13.}$$

Donde la matriz híbrida inversa es:

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad g_{12}$$

se cumple además que:

$$g_{12} = - g_{21}$$

y;

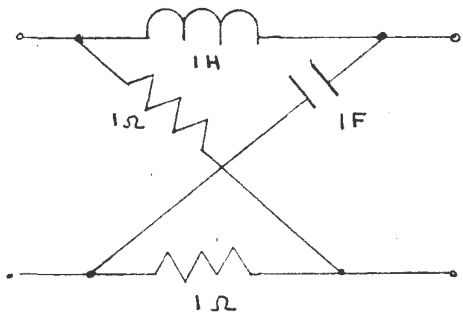
$$[h] \cdot [g] = [u]$$

Por ser $[g]$ la matriz inversa de $[h]$ y en cuadripolos simétricos $\Delta g = 1$.

Del modo como se han establecido las relaciones entre las seis matrices hasta aquí definidas se desprende que se puede esta-

blecer equivalencias entre ellas. Estas relaciones se resumen en el cuadro 2.2.2. y en la tabla 2.2.3. se hacen algunas relaciones de los parámetros especiales para el caso de cuadripolos pasivos recíprocos.

EJEMPLO: Determinar los parámetros de la matriz [g] haciendo uso de sus definiciones.

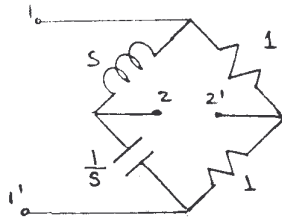


Solución

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

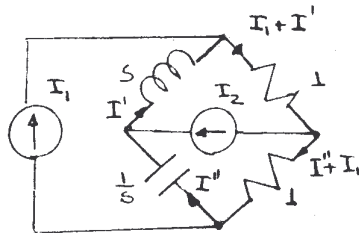
$$g_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$



$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{(s + \frac{1}{s})2}{s + \frac{1}{s} + 2} = \frac{2s^2 + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$g_{11} = \frac{s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2} = \frac{(s+1)^2}{2(s^2 + 1)}$$

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$



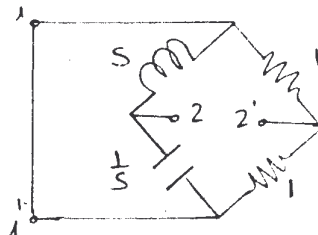
$$I_2 + I'' = I'$$

$$I''(\frac{1}{s}) + (s)I' = 0$$

$$(I_1 + I') + I'' + I_1 = 0$$

$$g_{12} = -g_{21} = \frac{s^2 - 1}{2s^2 + 2}$$

$$g_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$



$$g_{22} = \frac{s \left(\frac{1}{s} \right)}{s + \frac{1}{s}} + \frac{1}{2}$$

$$g_{22} = \frac{s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2} & \frac{s^2 - 1}{2s^2 + 2} \\ -\frac{s^2 - 1}{2s^2 + 2} & \frac{s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2} \end{bmatrix}$$

	[z]	[Y]	[h]	[g]	[a]
[z]	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta y} & \frac{Y_{11}}{\Delta y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta g}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta a}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$
[Y]	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & \frac{-z_{12}}{\Delta z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta a}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$
[h]	$\begin{matrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta g} & \frac{-g_{12}}{\Delta g} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta g} & \frac{g_{11}}{\Delta g} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta a}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$
[g]	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta h} & \frac{-h_{12}}{\Delta h} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta h} & \frac{h_{11}}{\Delta h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-\Delta a}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$
[a]	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\Delta y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta h}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta g}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$
[b]	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{-1}{Y_{12}} \\ \frac{-\Delta y}{Y_{12}} & \frac{-Y_{21}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta h}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta g}{g_{12}} & \frac{-g_{22}}{g_{12}} \\ \frac{-g_{11}}{g_{12}} & \frac{-1}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} D & B \\ C & A \end{matrix}$

MATRIZ	ECUACIONES	CONDICION PARA RED RECIPROCA	CONDICION PARA RED SIMETRICA
[z]	$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$ $V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$
[Y]	$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$ $I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$
[a]	$V_1 = A V_2 - B I_2$ $I_1 = C V_2 - D I_2$	$A D - B C = 1$	$A = D$
[b]	$V_2 = D V_1 - B I_1$ $I_2 = C V_1 - A I_1$	$A D - B C = 1$	$A = D$
[h]	$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$ $I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$	$h_{12} = - h_{21}$	$\Delta h = 1$
[g]	$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$ $V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$	$g_{12} = - g_{21}$	$\Delta g = 1$

2.5. DISPOSITIVOS DE DOS PARES DETERMINALES

En esta sección se describirán unos dispositivos importantes de dos pares de terminales: el transformador ideal, el girador, el convertidor de inmitancias negativo (NIC) y el amplificador operacional.

De estos elementos los tres últimos son realizables mediante elementos activos (Ej. transistores).

a) EL TRANSFORMADOR IDEAL

Un transformador Ideal tiene las siguientes características:

- a) No posee pérdidas.
- b) Las reactancias del primario y del secundario son mucho mayores que la impedancia de carga $\omega L_1, L_2 \gg Z_L$.
- c) No existe flujo de dispersión es decir, que $k = 1$.

Consideremos el transformador de dos bobinas cuyo diagrama esquemático se muestra en la figura 2.3.1.

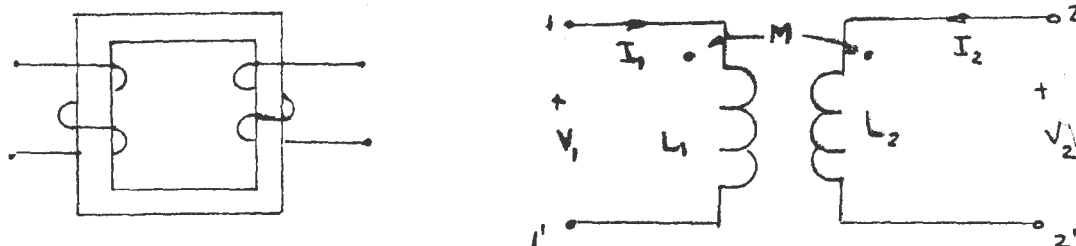


FIGURA 2.3.1

Las ecuaciones que relacionan los voltajes con las corrientes están dados en forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S L_1 & S M \\ S M & S L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

donde el coeficiente de inducción mutua se relaciona con los de autoinducción mediante la ecuación:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

siendo k el coeficiente de acoplamiento entre las bobinas: $k \leq 1$.

Para el caso Limite cuando $k = 1$, el transformador se denomina "perfectamente acoplado o simplemente transformador perfecto"

Si se conecta una carga Z_L al transformador cuando $k = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} V_2 &= - I_2 Z_L \\ M &= \sqrt{L_1 L_2} \\ n &\triangleq \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned} \quad \text{ec. 2.3.1}$$

donde (n) se conoce como relación de transformación del transformador.

Asi de la ecuación matricial

$$V_2 = s M I_1 + s L_2 I_2$$

sustituyendo, queda:

$$-I_2 Z_L = s \sqrt{L_1 L_2} I_1 + s L_2 I_2$$

$$-I_2 (Z_L + s L_2) = s \sqrt{L_1 L_2} I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1} = - \frac{s \sqrt{L_1 L_2}}{s L_2 + Z_L} \quad \text{ec. 2.3.2.}$$

Demostración

$$\begin{aligned} V_1 &= s L_1 I_1 + s L_1 I_2 & M &= \sqrt{L_1 L_2} \\ V_2 &= s M I_1 + s L_2 I_2 & \frac{I_2}{I_1} &= - \frac{s \sqrt{L_1 L_2}}{s L_2 + Z_L} \end{aligned} \quad y$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s M I_1 + s L_2 I_2}{s L_1 I_1 + s M I_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s M \frac{I_1}{I_2} + s L_2}{s L_1 \frac{I_1}{I_2} + s M} = \frac{s \sqrt{L_1 L_2} \frac{s L_2 + Z_L}{s \sqrt{L_1 L_2}} + s L_2}{-s L_1 \frac{s L_2 + Z_L}{s \sqrt{L_1 L_2}} + s \sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-s L_2 - Z_L + s L_2 s \sqrt{L_1 L_2}}{-s^2 L_1 L_2 - s L_1 Z_L + s^2 L_1 L_2} = \frac{(-Z_L) s \sqrt{L_1 L_2}}{-s L_1 Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{1}{n}$$

TAMBIEN ES :

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & s \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \\ \frac{1}{sM} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n} \quad \text{ec. 2.3.3.}$$

Supongamos que hacemos L_1 y L_2 tan grande que la magnitud de sus correspondientes impedancias es mucho mayor que la de Z_L luego la ec. 2.3.2 se convierte en:

$$\frac{I_2}{I_1} = - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -n \quad \text{ec. 2.3.4.}$$

Un transformador perfecto que satisface las ecs. 2.3.3. y 2.3.4. se denomina transformador ideal (Fig. 2.3.2.).

Este puede caracterizarse por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.3.5.}$$

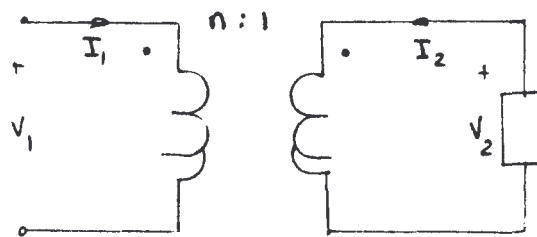


FIGURA 2.3.2.

donde evidentemente que la matriz $[a]$ para un transformador ideal es:

$$[a] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Dado que $B = C = 0$ se evidencia según la tabla 2.2.2. que los parámetros $[Z]$ y $[Y]$ no existen para un transformador ideal.

Obsérvese que la carga Z_L de los terminales de salida de un transformador ideal produce cierta impedancia de entrada dada por

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

Pero por las relaciones anteriores:

$$Z_{in} = \frac{n V_2}{-(I/n) I_2}$$

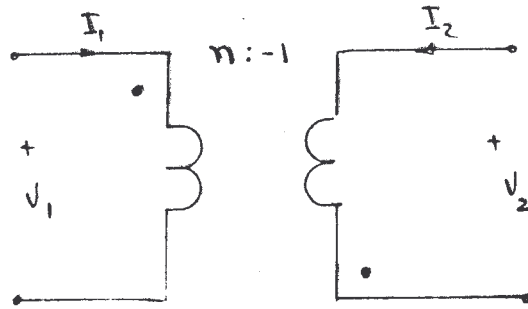
$$V_2 = - I_2 Z_L$$

Luego

$$Z_{in} = n^2 \left(\frac{V_2}{-I_2} \right) = n^2 Z_L \quad \text{ec. 2.3.6.}$$

La ec. 2.3.6. revela una propiedad interesante del transformador ideal; sirve como un convertidor de impedancias positivas; el cual hace que la Z_{in} sea directamente proporcional a la carga Z_L . Otra característica del transformador ideal es la propiedad de aislador; esto es que sirve para asegurar que las condiciones de los terminales no se alteren cuando se lo utiliza para ciertas interconexiones entre cuadripolos

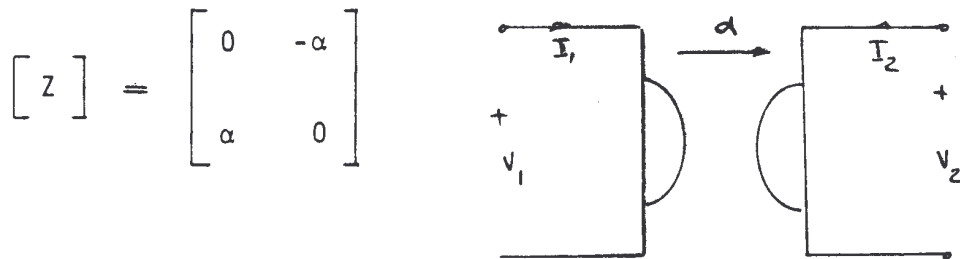
En el caso de que el convenio de polaridades sea el indicado en la figura entonces n será negativo.



b) EL GIRADOR

Tal como el transformador ideal, el girador, introducido por B.D.H. Telegen en 1948, es un dispositivo de dos pares de terminales acoplados, Fig. 2.3.3., que esta caracterizado por la siguiente ecuación matricial, donde α es una constante real conocida como "coeficiente girostático" tiene dimensión resistiva. La matriz $[Z]$ del girador se obtiene directamente de la ec. 2.3.7

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.3.7.}$$



El girador no es bilateral

$$Z_{12} \neq Z_{21}$$

FIGURA 2.3.3

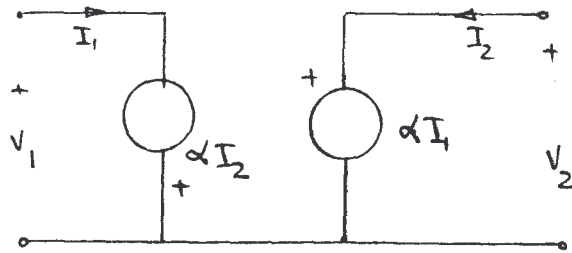
Se puede demostrar fácilmente que cuando el girador tiene una impedancia de carga Z_L . La impedancia de entrada es:

$$Z_{in} = \frac{\alpha^2}{Z_L}$$

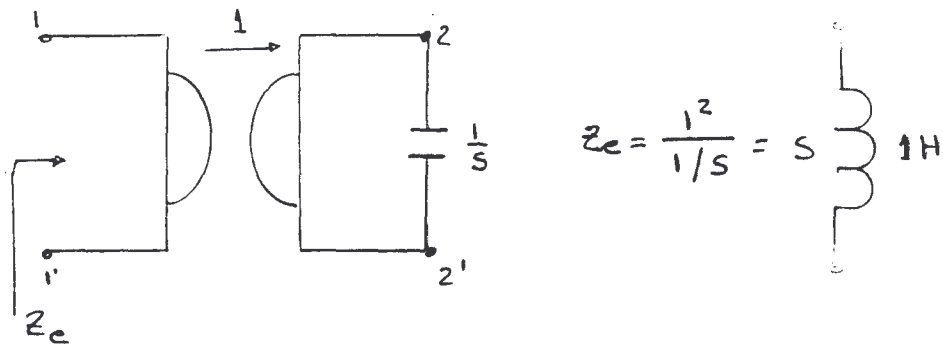
Lo que Implica que el girador puede ser considerado como un invertidor de impedancia. Caso particular de $\alpha = 1$, la impedan-

cia de entrada es el dual de la impedancia de carga.

Una realización ideal del girador puede verse en la figura siguiente:



EJEMPLO Transformación de un capacitor en un inductor:



c) EL CONVERTIDOR DE INMITANCIAS NEGATIVO (NIC) IDEAL

El convertidor de inmitancias negativo (NIC) es un dispositivo de dos pares de terminales que cuando se coloca una carga Z_L en los terminales de salidas muestra una impedancia de entrada Z_L tal como se ilustra en la figura 2.3.4.

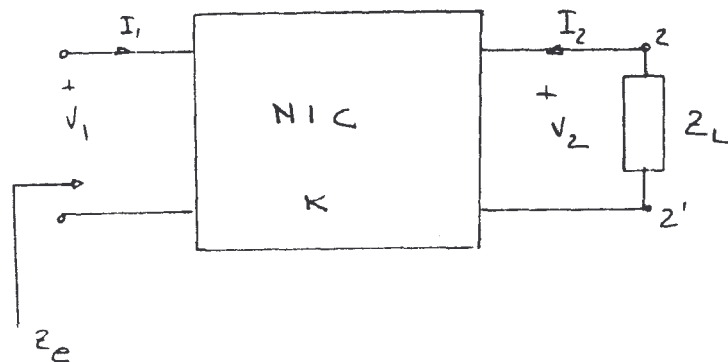


FIGURA 2.3.4.

(NIC: NEGATIVE IMPEDANCE CONVERTER) (K GANANCIA)

Usando las polaridades indicadas en la figura 2.3.4 existen básicamente dos tipos de NIC: el convertidor de corriente INIC definida por las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.3.8.}$$

y el convertidor de voltajes VNIC definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.3.9.}$$

$$Z_{en} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{k V_2}{-k (-I_2)} = -Z_L$$

El concepto de inmitancia negativa (resistencia negativa) tiene muchas aplicaciones en circuitos prácticos.

Por ejemplo, consideremos una línea telefónica construida por un par de alambres que conecta a dos centrales, figura 2.3.5. (a)

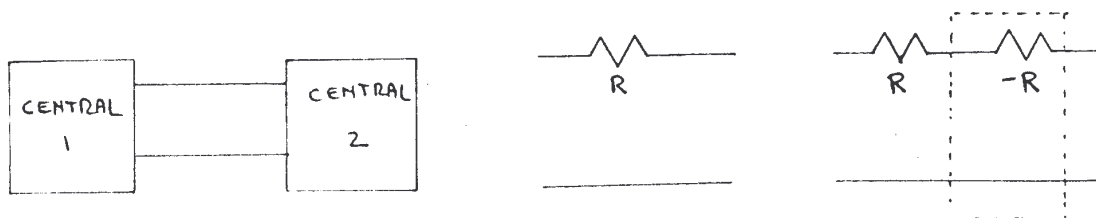


FIGURA 2.3.5.

Los cables poseen a su vez cierta resistencia que tiende a atenuar las señales eléctricas que por ellas pasen.

La línea se puede representar esquemáticamente por el cuadripolo de la fig. 2.3.5. (b). Ahora si a uno de los extremos de la línea telefónica colocamos una red compensatoria consistente de un resistor de valor $-R$; la combinación de red con esta compensación nos permite tener una red sin atenuaciones.

Este es el principio básico del amplificador de resistencia negativo usado en telefonía moderna.

La red $(-R)$ se puede obtener obviamente mediante un NIC y un resistor positivo.

EJEMPLO

Calcular la impedancia de entrada de la Red, si $Z_1 = 1 \Omega$

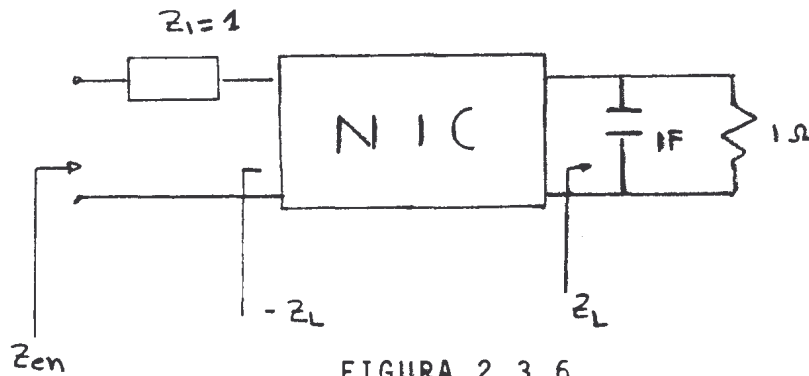


FIGURA 2.3.6.

SOLUCION:

$$Z_L = \frac{1}{s + 1}$$

$$Z_{en} = 1 - \frac{1}{s + 1} = \frac{s}{s + 1}$$

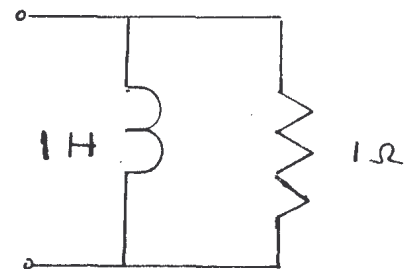


FIGURA 2.3.7.

$$Z_{en} = \frac{s}{s + 1}$$

Sintetizada esta impedancia de entrada; corresponde al circuito de la figura 2.3.7

d) EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL (AO)

Uno de los elementos de dos pares de terminales más utilizados es el amplificador operacional (AO)

Este elemento tiene aplicación en computadores analógicos, circuitos lógicos, sistemas de control con realimentación y en muchos otros dispositivos electrónicos.

La representación simbólica de un amplificador operacional se muestra en la figura 2.3.8 (a).

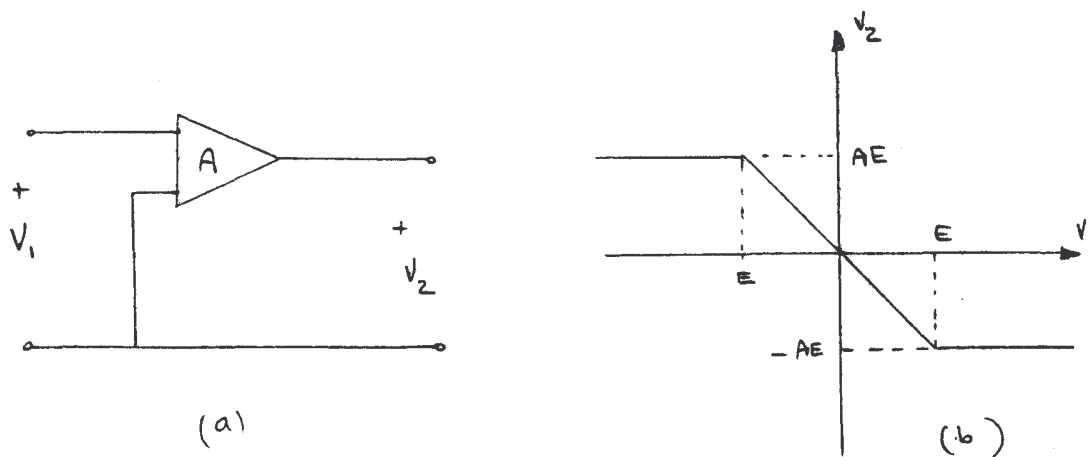


FIGURA 2.3.8.

La característica idealizada $v_2 = v_1$ se tiene en la figura 2.3.8 (b). Nótese que si $|v_1| \leq E$; el voltaje v_2 es una función lineal de V_1 :

$$v_2 = - A v_1$$

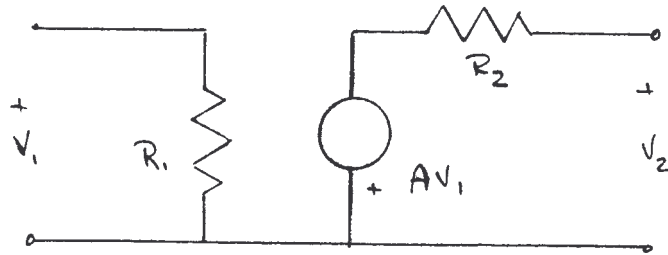
donde A se denomina ganancia de lazo abierto del AO.

Para $|v_1| \leq E$ se produce saturación y la salida se mantiene constante.

El rango de ganancia A varía entre valores de 10.000 a 20.000. Así pequeñas perturbaciones en el voltaje de entrada provoca grandes cambios en la salida.

Por esta razón la utilización del AO en lazo abierto encuentra limitadas aplicaciones.

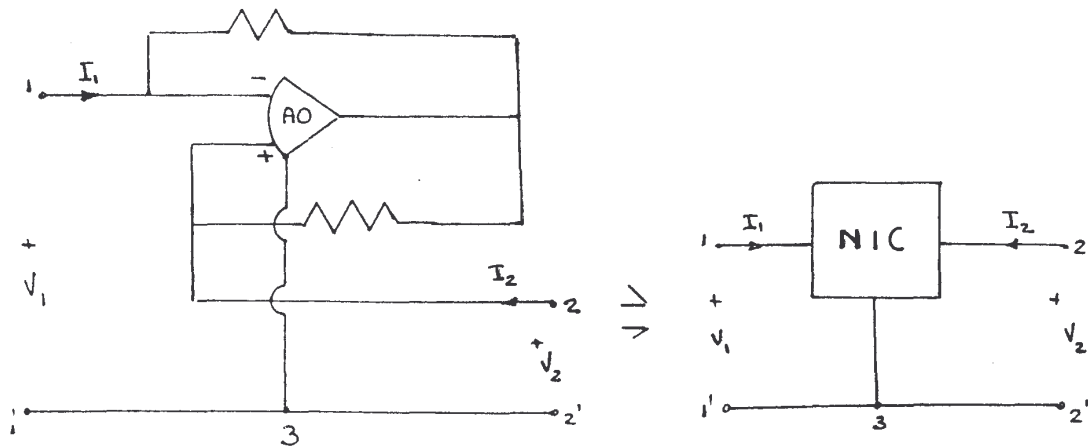
Un circuito equivalente de un AO en lazo abierto se muestra en la figura.



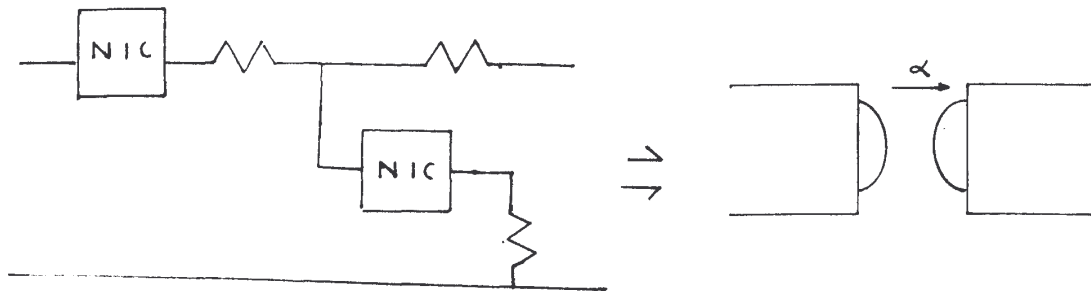
Idealmente R_1 tiende a ∞ y R_2 tiende a cero, sin embargo en los AO prácticos, valores típicos son para $R_1 = 50 \text{ K}\Omega$ y $R_2 = 100\Omega$

e) REALIZACIONES DE DISPOSITIVOS DE DOS PARES DE TERMINALES

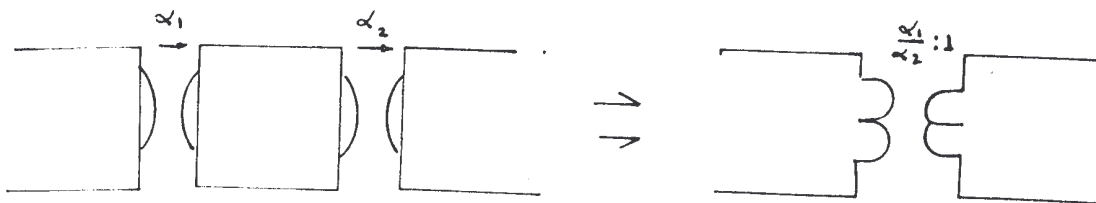
1) REALIZACION DE UN CONVERTIDOR DE INMITANCIAS NEGATIVO (NIC)



2) REALIZACION DE UN GIRADOR



3) REALIZACION DE UN TRANSFORMADOR IDEAL



2.4 INTERCONEXION DE CUADRIPOLOS

Se estudiarán las cinco conexiones posibles de cuadripolos:

- a) Conexión serie-serie
- b) Conexión paralelo-paralelo
- c) Conexión serie-paralelo
- d) Conexión paralelo-serie
- e) Conexión cascada.

a) CONEXION SERIE-SERIE

Donde V_e e I_e son la tensión y corriente de entrada.
Y V_s e I_s son la tensión y corriente de salida.

De la figura 2.4.1 se relaciona lo siguiente:

$$V_e = V_1 + V_3$$

$$V_s = V_2 + V_4$$

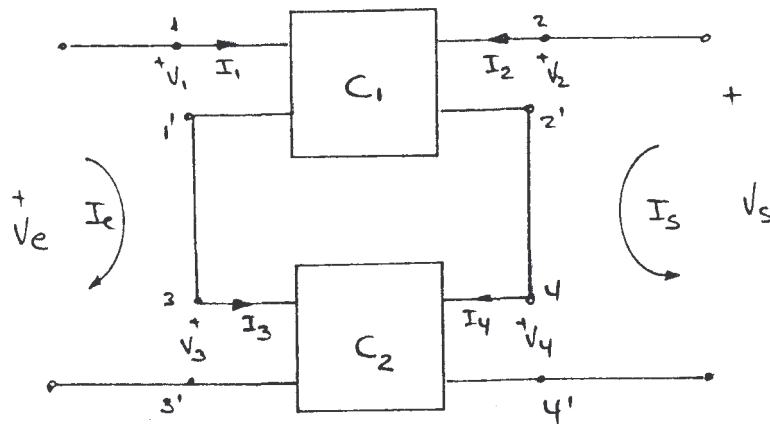


FIG. 2.4.1.

que en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

por lo que será:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(1)} & Z_{12}^{(1)} \\ Z_{21}^{(1)} & Z_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11}^{(2)} & Z_{12}^{(2)} \\ Z_{21}^{(2)} & Z_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \left[Z^{(1)} + Z^{(2)} \right] \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$$

De donde se deduce que dos cuadripolos en serie equivalente a otro cuadripolo cuya matriz $[Z]$ es:

$$[Z] = [Z^{(1)} + Z^{(2)}]$$

En general si tenemos n cuadripolos en serie, será:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \left[Z^{(1)} + Z^{(2)} + \dots + Z^{(n)} \right] \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.1}$$

b) CONEXION PARALELO-PARALELO

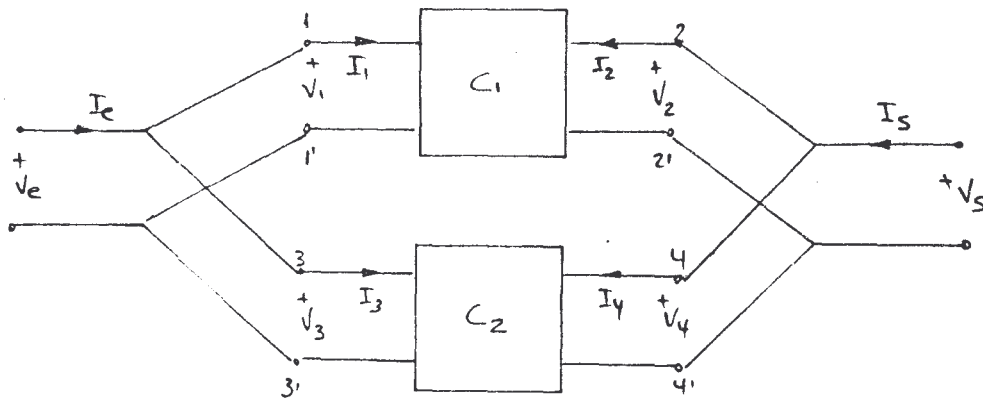


FIG. 2.4.2

En esta conexión se observa que:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

y que

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Pero sabemos que:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior resulta:

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} + y^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

Generalizando para una Conexión de n cuadripolos en paralelo:

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} + y^{(2)} \dots y^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.2}$$

c) CONEXION SERIE-PARALELO

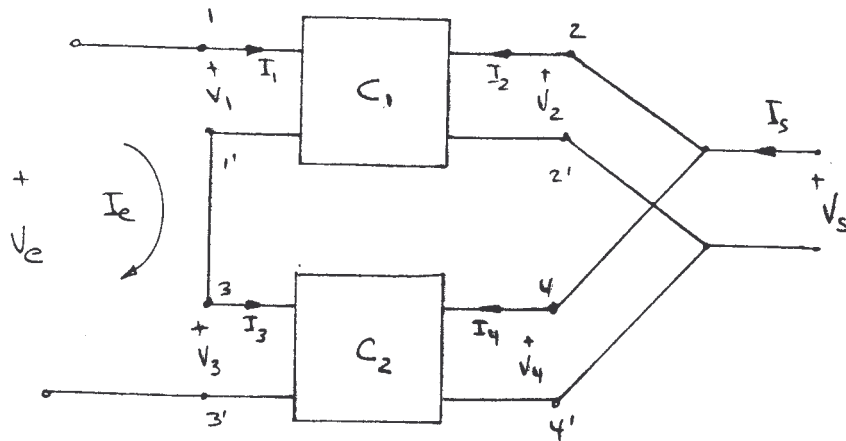


FIG. 2.4.3

Se cumple que:

$$V_e = V_1 + V_3$$

$$I_s = I_2 + I_4$$

$$I_e = I_1 = I_3$$

$$V_s = V_2 = V_4$$

Pero:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

sumando será:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} + h^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 + V_3 \\ I_2 + I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} + h^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

Generalizando queda la expresión final:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} + h^{(2)} + \dots + h^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.3}$$

d) CONEXION PARALELO-SERIE

Ahora tendremos las siguientes condiciones:

$$V_e = V_1 = V_2$$

$$I_e = I_1 + I_3$$

$$I_s = I_2 = I_4$$

$$V_s = V_2 + V_4$$

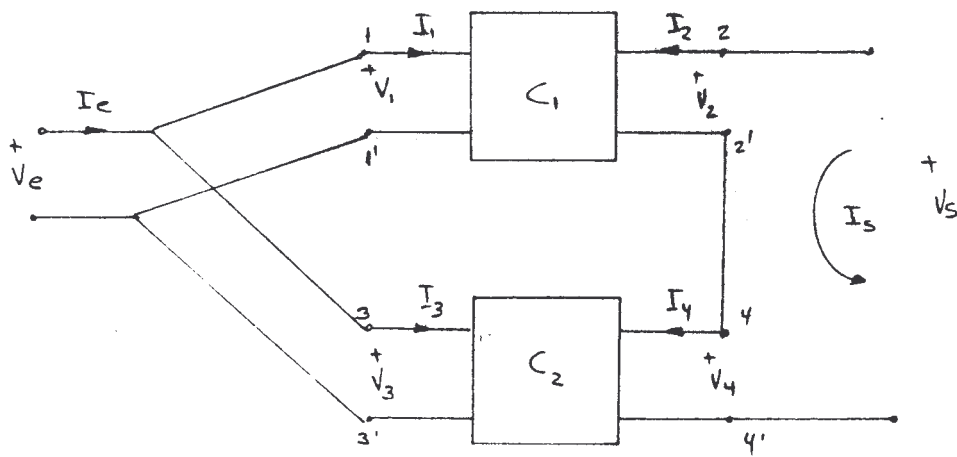


FIG. 2.4.4.

Con un desarrollo similar a los casos anteriores se concluye que

$$\begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix} = \left[g^{(1)} + g^{(2)} + \dots + g^{(n)} \right] \begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.4.}$$

e) CONEXION EN CASCADA

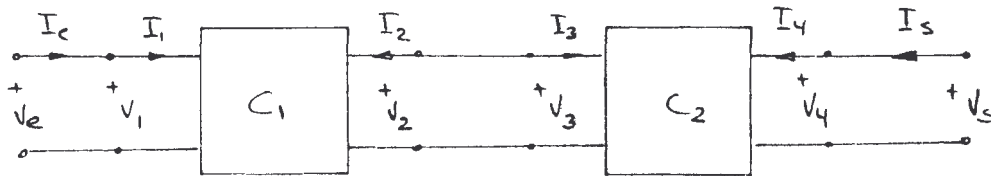


FIG. 2.4.5.

Las relaciones son:

$$V_e = V_1$$

$$I_e = I_1$$

$$I_s = I_4$$

$$V_5 = V_4$$

$$V_2 = V_3$$

$$I_2 = -I_3$$

Los terminales de salida del primero coinciden con los terminales de entrada del segundo.

Recordando que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$$

sustituyendo,

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$$

Generalizando para n cuadripolos en cascada.

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.5}$$

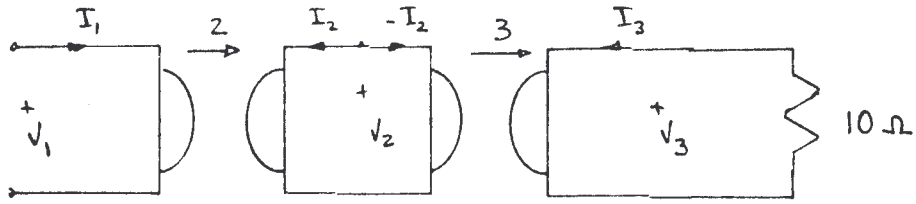
y si deseamos la salida en función de la entrada

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(1)} & b^{(2)} & \dots & b^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ -I_e \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.4.6}$$

EJEMPLO: En la red de la figura. Hallar un cuadripolo equivalente al dado.

SOLUCION: Las relaciones que se establecen son:

$$\begin{aligned} V_1 &= -2 I_2 & V_2 &= -3 I_3 \\ V_2 &= 2 I_1 & V_3 &= 3 (-I_2) \end{aligned}$$



Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente para v_1 e I_1 en función de v_3 e I_3 sale:

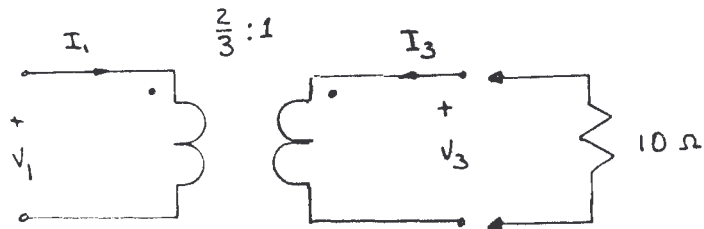
$$V_1 = \frac{2}{3} V_3$$

$$I_1 = \frac{3}{2} I_3$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$$

Que es la ecuación matricial de un transformador ideal con $n = \frac{2}{3}$ en cuyo caso corresponde al siguiente cuadripolo



$$Z_{in} = n^2 Z_L = \frac{40}{9} \Omega$$

2.5 RESTRICCIONES DE LAS CONEXIONES. PRUEBA DE BRUNE

Con excepción de la conexión en cascada; las cuatro anteriores tienen restricciones puesto que al hacer el cambio de dichas conexiones hemos supuesto que cada uno de los cuadripolos opera como verdadero cuadripolo, es decir, que si por el terminal 1 entra la corriente I_1 por el terminal 1' debe salir I_1 y lo mismo podemos decir respecto a los terminales 2 - 2' y la corriente I_2 .

Sin embargo al conectar los cuadripolos se crean nuevas mallas y tanto los dos terminales de entrada 1 - 1' como los de salida 2 - 2' pueden no pertenecer a las mismas mallas por lo que la corriente que pasa por 1 no tiene por qué ser igual a la corriente en 1' y lo mismo podemos decir respecto a 2 y 2'.

EJEMPLO Véase que la conexión en serie de los dos cuadripolos de la figura 2.5.1 hace que aparezca una nueva malla a la que pertenecen los terminales 1', 2', 3 y 4 en la cual existirá una corriente I por lo que da lugar a que no sean iguales las corrientes a través de 1 - 1', 2 - 2', 3 - 3' y 4 - 4' en otras palabras, que en este caso los cuadripolos iniciales no están trabajando después de la conexión como cuadripolos

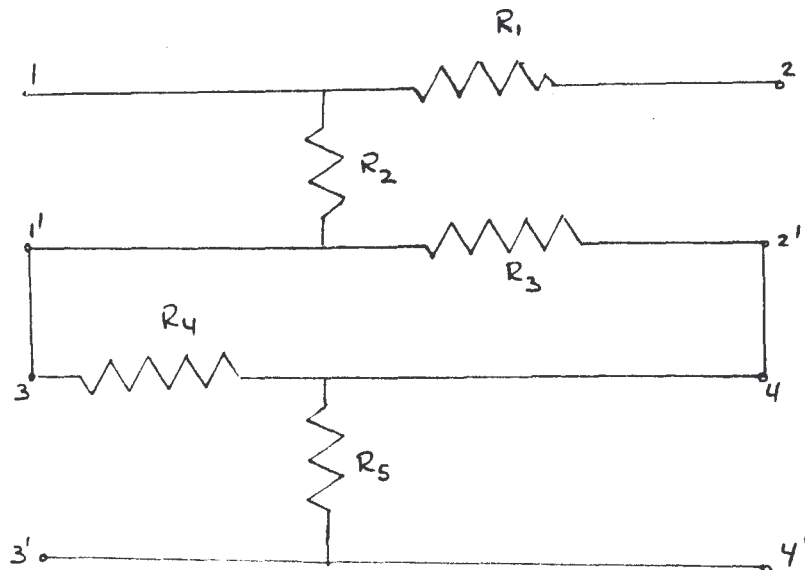


FIG. 2.5.1

PRUEBA DE BRUNE

Existen unas reglas sencillas que permiten ver si dos cuadripolos, después de conectados van a trabajar como cuadripolos independientes (Para su demostración consultar a Guillemin, Communication Networks Vol II, Pág. 148).

- 1) Cuando dos cuadripolos tienen conexión en serie por uno de los lados (entrada o salida) se dejan estos terminales abiertos e independizados y se excita el conjunto por los otros terminales (que pueden estar unidos en serie o en paralelo).

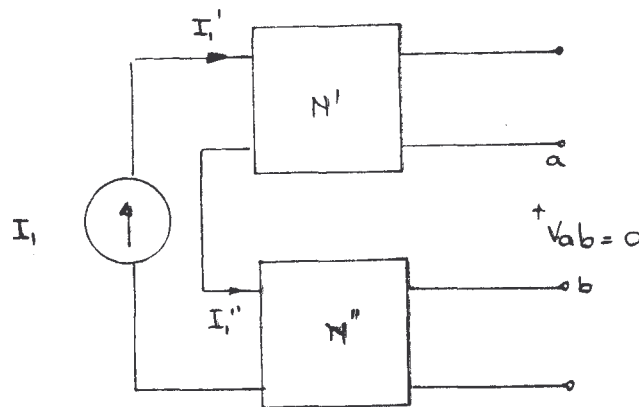


FIG. 2.5.2

Si como muestra la figura 2.5.2 la d.d.p. entre los terminales a y b es $V_{ab} = 0$; los cuadripolos trabajan como cuadripolos propios e independientes

En la figura 2.5.3 (a) la prueba de Brune falla en ambos terminales mientras que la figura 2.5.3 (b) se satisface para ambos

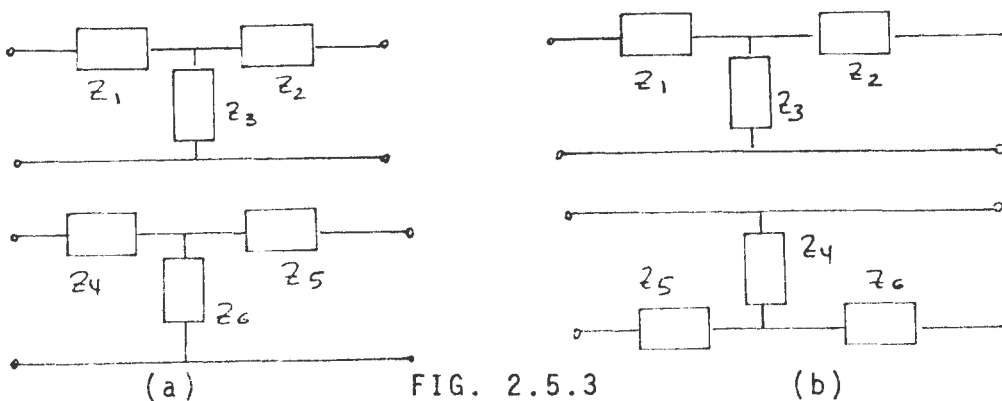


FIG. 2.5.3

- 2) Cuando los cuadripolos tienen conexión en paralelo por uno de los lados (entrada o salida) se cortocircuitan independientemente dichos terminales de cada uno de los cuadripolos y se excita el conjunto por los otros terminales (que pueden estar unidos en serie o en paralelo) Fig. 2.5.4.

Y como muestra la fig. 2.5.4 la d.d.p. entre los terminales cortocircuitados es $V_{ab} = 0$ los cuadripolos trabajan como independientes.

Para ver si dos cuadripolos conectados están trabajando como propios cuadripolos es necesario aplicar la prueba de Brune a los terminales tanto de entrada como de salida

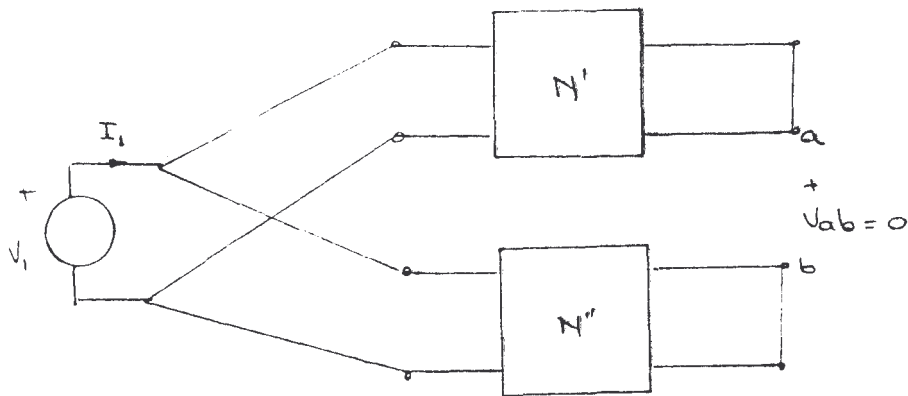


FIG. 2.5.4

Nótese que para el ejemplo de la figura 2.5.5 (a) la prueba de Brune es positiva mientras que la 2.5.5 (b) no se puede conectar.

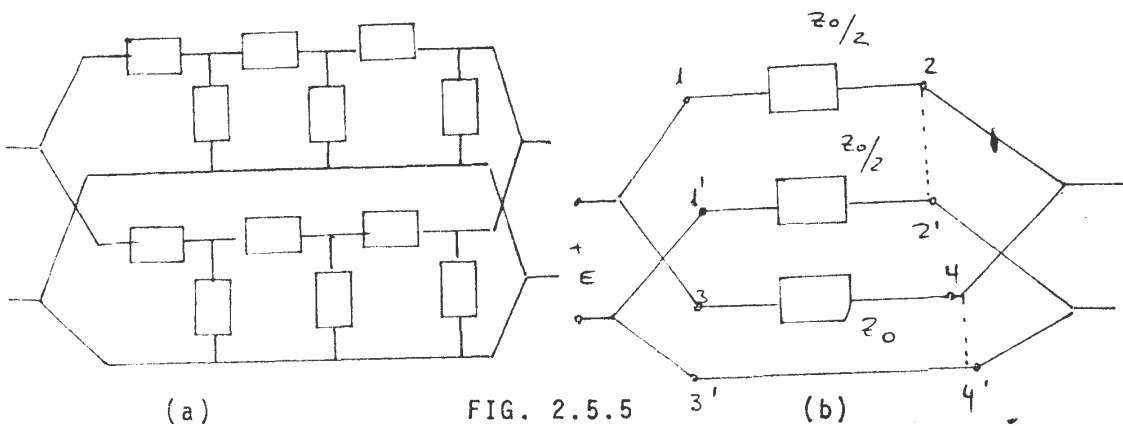
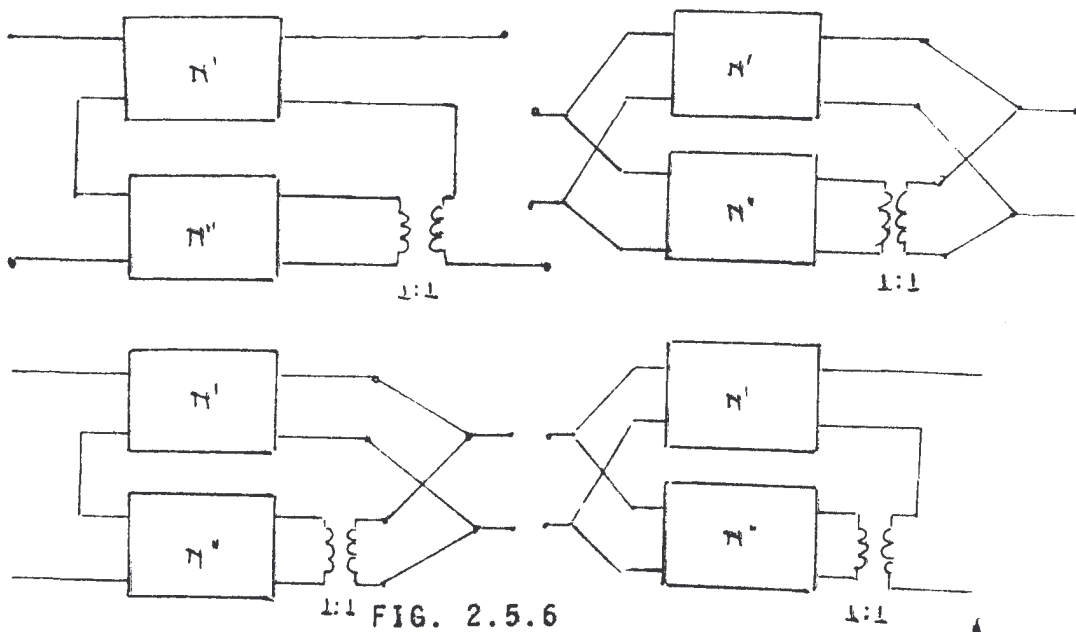


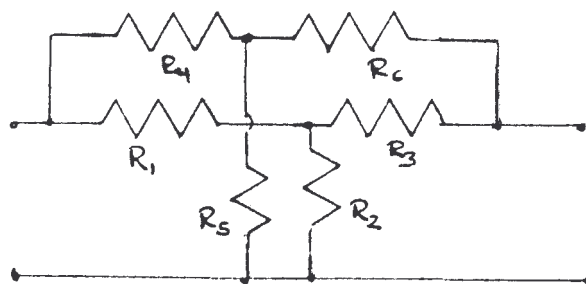
FIG. 2.5.5

- 3) Si en una situación las pruebas de Brune no fueran satisfechas para la conexión de cuadripolos; se puede solucionar el problema utilizando un transformador ideal (relación de transformación 1:1) para forzar que se satisfagan las condiciones necesarias.

Las configuraciones resultantes son las siguientes:



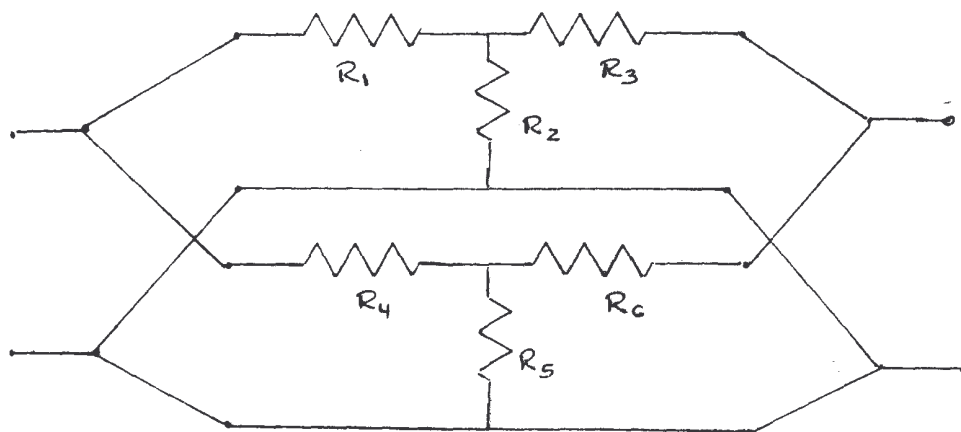
EJEMPLO 1 Determinar la matriz [Y] del circuito de la figura



SOLUCION: La red de la figura se puede redibujar como el paralelo de dos redes: N' (compuesta por R₁ R₂ y R₃) y N'' (Compuesta por R₄ R₅ y R₆).

Para N' será:

$$[Z'] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}; \Delta Z' = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$$



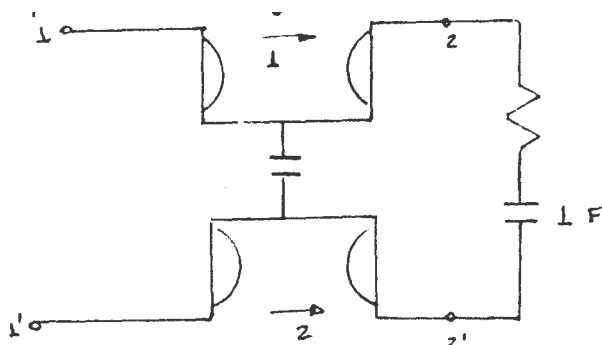
y para N'':

$$[Z''] = \begin{bmatrix} R_4 + R_5 & R_5 \\ R_5 & R_5 + R_6 \end{bmatrix}; \Delta Z'' = R_4 R_5 + R_4 R_6 + R_5 R_6$$

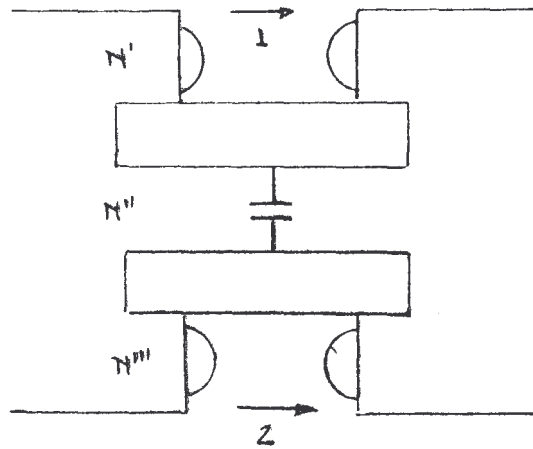
Mediante la tabla de conversión obtendremos $[y']$ y $[y'']$ luego sumando obtendremos finalmente

$$[y] = [y'] + [y''] \begin{bmatrix} \frac{R_2 + R_3}{\Delta Z'} + \frac{R_5 + R_6}{\Delta Z''} & -\frac{R_2}{\Delta Z'} - \frac{R_5}{\Delta Z''} \\ -\frac{R_2}{\Delta Z'} - \frac{R_5}{\Delta Z''} & \frac{R_1 + R_2}{\Delta Z'} + \frac{R_4 + R_5}{\Delta Z''} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 En la red de la figura hallar la matriz $[Z]$ del cuadripolo de la figura



SOLUCION: La red anterior la podemos considerar como la conexión de tres redes en serie como se detalla en la siguiente figura.



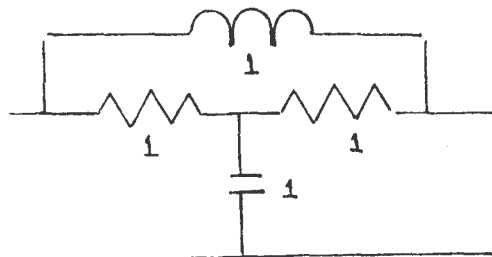
Como se puede observar esta conexión satisface las pruebas de Brune y la matriz $[Z]$ es la suma de las matrices individuales.

$$[Z] = [Z'] + [Z''] + [Z''']$$

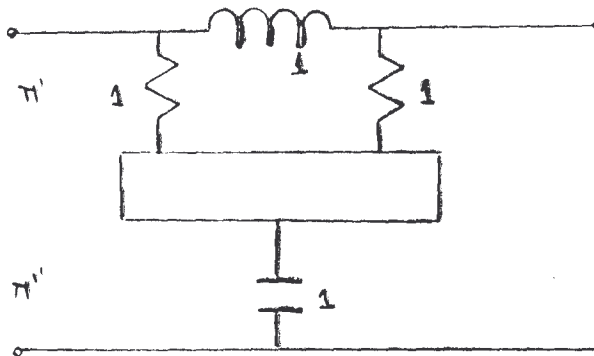
$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1-3s}{s} \\ \frac{1+3s}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3 Hallar la matriz $[Z]$ del cuadripolo de la figura.



SOLUCION: La red anterior se puede redibujar como la conexión en serie de dos cuadripolos. La prueba de Brune en este caso es satisfactoria.



Los parámetros [y] para N' son:

$$Y'_{11} = Y'_{22} = 1 + \frac{1}{s}$$

$$Y'_{12} = Y'_{21} = -\frac{1}{s}$$

$$\Delta y' = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} = 1 + \frac{1}{s}$$

Mediante la transformación que dan las tablas se obtiene | Z' |

$$Z'_{11} = Z'_{22} = \frac{1+s}{2+s} \quad Z'_{12} = Z'_{21} = \frac{1}{2+s}$$

y para la red N'' tendremos:

$$Z''_{11} = Z''_{22} = Z''_{21} = Z''_{12} = \frac{1}{s}$$

y finalmente

$$[Z] = [Z'] + [Z''] = \begin{bmatrix} \frac{1+s}{2+s} + \frac{1}{s} & \frac{1}{2+s} + \frac{1}{s} \\ \frac{1}{2+s} + \frac{1}{s} & \frac{1+s}{2+s} + \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

2.6 CUADRIPOLOS ACTIVOS

Los cuadripolos activos pueden poseer fuentes ya sean independientes o fuentes controladas en este ultimo caso el valor del voltaje o de la corriente depende de un voltaje o corriente de una rama.

Las redes con fuentes controladas son generalmente redes equivalentes de circuitos electrónicos y de ahí su importancia.

Como los cuadripolos con fuentes controladas no son bilaterales (pues generalmente los dispositivos electrónicos como los diodos, tubos y transistores no lo son)

Por ello se tienen las siguientes observaciones:

$$Z_{12} \neq Z_{21}$$

$$Y_{12} \neq Y_{21}$$

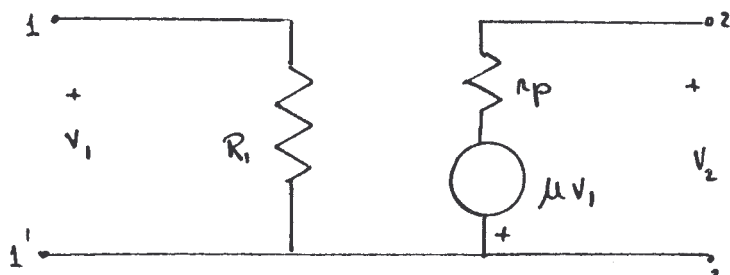
$$h_{12} \neq -h_{21}$$

$$g_{12} \neq -g_{21}$$

$$AD - BC \neq 1$$

Ello obliga a tener que calcular independientemente todos los parámetros.

EJEMPLO: Hallar las matrices [Z], [y], [a] y [h] del circuito equivalente del diodo de la figura 2.6.1.



SOLUCION: Se observa que el cuadripolo no es bilateral ya que si se aplica una señal V_1 a la entrada aparece una μV_1 a la salida pero si se aplica una señal V_2 esta no se transmite a la entrada.

Los parámetros $| Z |$ son:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} ; \quad Z_{11} = R_1$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} ; \quad Z_{22} = r_p$$

puesto que si $I_1 = 0$ no habrá caída de tensión $V_1 = 0$ y luego $\mu V_1 = 0$.

Después:

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} ; \quad Z_{12} = 0$$

Igual que antes si $I_1 = 0$, y $V_1 = 0$ y así $Z_{12} = 0$ y por último:

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Entonces excitamos la entrada con

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

y en los terminales 2 – 2'

$$V_2 = - \mu V_1$$

$$V_2 = - \mu I_1 R_1$$

Así:

$$Z_{21} = \frac{-\mu I/1 R_1}{I/1} = -\mu R_1$$

Haciendo uso de la tabla podemos determinar todos los otros parámetros.

$$[z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -\mu R_1 & r_p \end{bmatrix}$$

2.7 CUADRIPOLOS TÍPICOS

a) CUADRIPOLO EN T

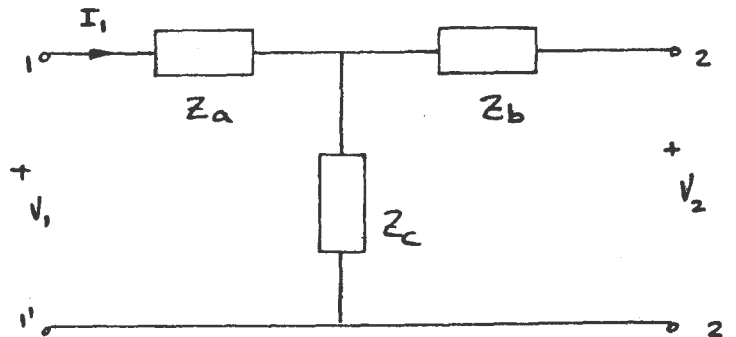


FIG. 2.7.1

En realidad la red de la fig. 2.7.1 es una red de tres terminales (estrella) ya que los terminales 1' y 2' son el mismo.

La matriz $|Z|$ es:

$$Z_{11} = Z_a + Z_c$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_c$$

$$Z_{22} = Z_b + Z_c$$

Por ello

$$[Z_T] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

En caso de simetría las impedancias serie se escriben $(Z_1/2)$ Fig. 2.7.2.

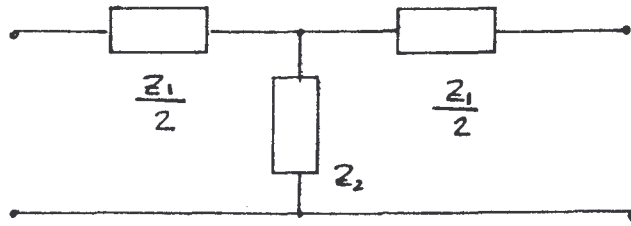


FIG. 2.7.2

y entonces será:

$$|Z_T|_s = \begin{vmatrix} \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right) & Z_2 \\ Z_2 & \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right) \end{vmatrix}$$

Las matrices [y] y [a] se dan en la tabla 1.7.1

b) CUADRIPOLO EN π

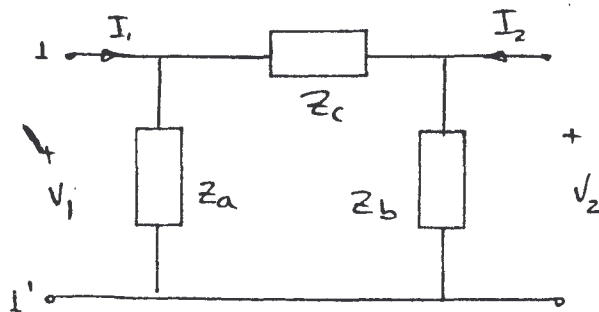
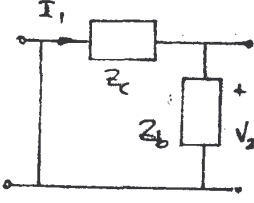


FIG. 2.7.3

Este caso es el dual del anterior (triángulo) luego trabajaremos con la matriz [Y]

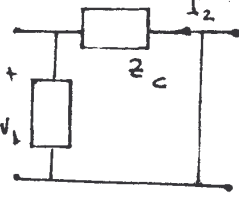
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} ; Y_{11} = Y_a + Y_c$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} ; Y_{22} = Y_b + Y_c$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$


$$I_1 Z_c + V_2 = 0$$

$$\frac{I_1}{V_2} = -Y_c \quad Y_{12} = -Y_c$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$


$$Z_c I_2 + V_1 = 0$$

$$\frac{V_1}{I_2} = -Z_c \quad Y_{21} = -Y_c$$

Luego:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

En caso de simetría se representa la π como lo indica la fig. 2.7.4.

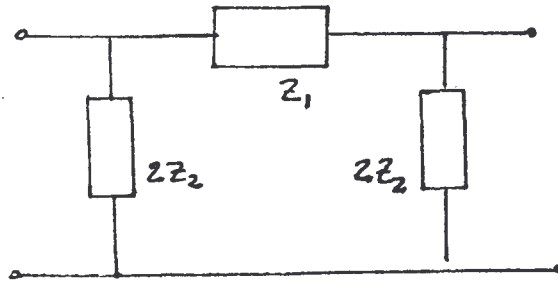
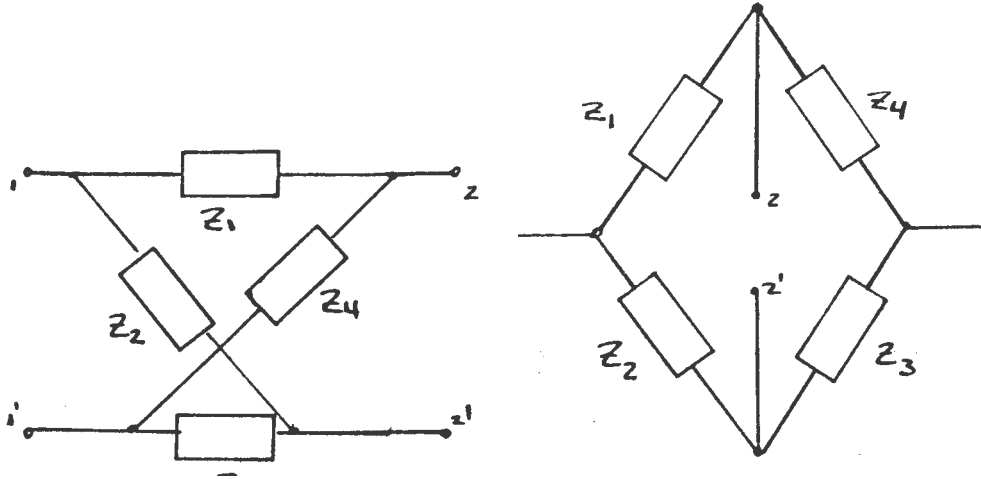


FIG. 2.7.4

$$[Y_\pi]_s = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + 2Z_2}{2Z_1 Z_2} & \frac{-1}{Z_1} \\ \frac{-1}{Z_1} & \frac{Z_1 + 2Z_2}{2Z_1 Z_2} \end{bmatrix}$$

Las matrices [y] y [a] se dan en la tabla 2.7.1

c) CUADRIPOLOS EN CELOSIA O PUENTE



La matriz [Z] será:

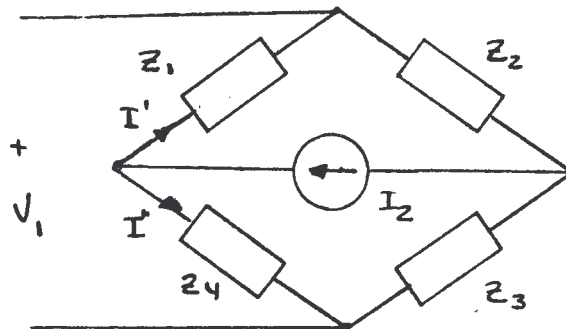
$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} ; \quad Z_{11} = \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} ; \quad Z_{22} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} ;$$

Las ecuaciones auxiliares son:

$$\begin{aligned} I_2 &= I' + I'' \\ V_1 &= -Z_1 I' + Z_4 I'' \\ V_1 &= Z_2 I' - Z_3 I'' \end{aligned}$$



$$a) \quad Z_2 V_1 = -Z_2 Z_1 I' + Z_2 Z_3 I'' \quad b) \quad Z_3 V_1 = -Z_3 Z_1 I' + Z_3 Z_4 I''$$

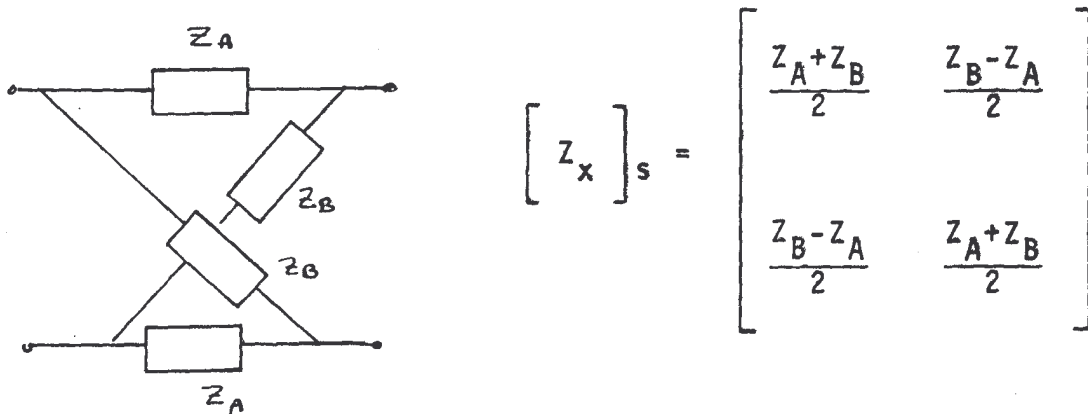
$$\frac{Z_1 V_1 = Z_1 Z_2 I' - Z_1 Z_3 I''}{(Z_1 + Z_2) V_1 = (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3) I''}$$

$$\frac{Z_4 V_1 = Z_4 Z_2 I' - Z_4 Z_3 I''}{(Z_3 + Z_4) V_1 = (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3) I''}$$

$$I_2 = \left[\begin{array}{c} \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3} \end{array} \right] V_1$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

En caso de simetría.



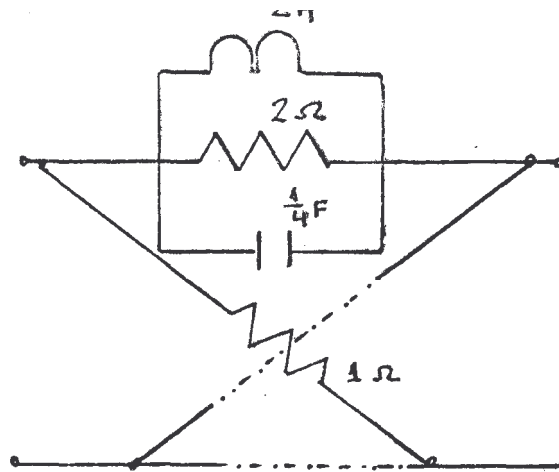
Para otras matrices ver tabla 2.7.1

EJEMPLO: Sea hallar la matriz [Z] del cuadripolo celosía simétrica de la figura

SOLUCION: Como el cuadripolo es simétrico calcularemos \$Z_A\$ y \$Z_B\$

$$Z_A = \frac{4s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Z_B = 1$$



Y utilizando las relaciones de la tabla 2.7.1 de donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

Tendremos:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{s^2 + 6s + 2}{2(s^2 + 2s + 2)}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2} \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

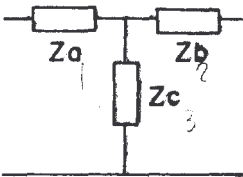
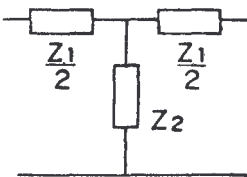
	CUADRIPOLO T	CUADRIPOLO T SIMETRICO
		
Z	$Z_{11} = Z_a + Z_c$ $Z_{12} = Z_c$ $Z_{21} = Z_c$ $Z_{22} = Z_b + Z_c$	$Z_{11} = \frac{Z_1}{2} + Z_2$ $Z_{12} = Z_2$ $Z_{21} = Z_2$ $Z_{22} = \frac{Z_1}{2} + Z_2$
Y	$\Delta z = Z_a Z_b + Z_c(Z_a + Z_b)$ $Y_{11} = \frac{Z_b + Z_c}{\Delta z}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_c}{\Delta z}$ $Y_{22} = \frac{Z_a + Z_c}{\Delta z}$	$\Delta'z = Z_1 \left(\frac{Z_1 + Z_2}{4} \right)$ $Y_{11} = \frac{Z_1/2 + Z_2}{\Delta'z}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_2}{\Delta'z}$ $Y_{22} = \frac{Z_1/2 + Z_2}{\Delta'z}$
a	$A = 1 + \frac{Z_a}{Z_c}$ $B = \frac{Z_a Z_b}{Z_c} + Z_a + Z_b$ $C = 1/Z_c$ $D = 1 + \frac{Z_b}{Z_c}$	$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ $B = Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$ $C = 1/Z_2$ $D = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$

TABLA 1.7.1

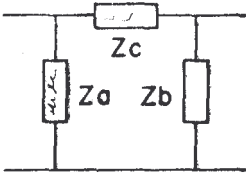
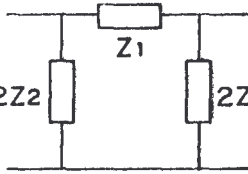
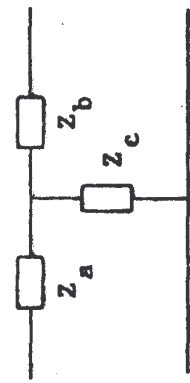
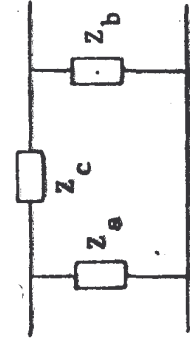
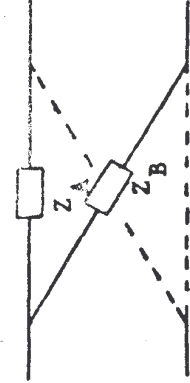
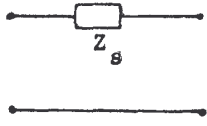
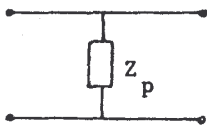
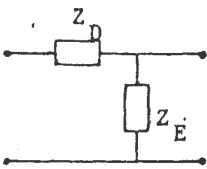
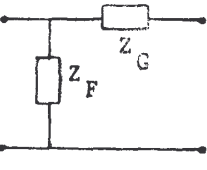
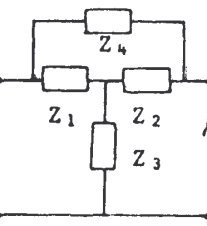
	CUADRIPOLO Π	CUADRIPOLO Π SIMETRICO
		
$ Z $	$Z_{11} = \frac{Z_a(Z_b + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$ $Z_{22} = \frac{Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c}$	$Z_{11} = \frac{2Z_2(Z_1 + 2Z_2)}{Z_1 + 4Z_2}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{4Z_2^2}{Z_1 + 4Z_2}$ $Z_{22} = \frac{2Z_2(Z_1 + 2Z_2)}{Z_1 + 4Z_2}$
$ Y $	$Y_{11} = Y_a + Y_c$ $Y_{12} = Y_{21} = -Y_c$ $Y_{22} = Y_b + Y_c$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{Z_1 + 2Z_2}{2Z_1Z_2}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{-1}{Z_1}$
$ a $	$A = 1 + \frac{Z_c}{Z_b}$ $B = Z_c$ $C = \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{Z_a Z_b}$ $D = 1 + \frac{Z_c}{Z_a}$	$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ $B = Z_1$ $C = \frac{Z_1 + 4Z_2}{4Z_2^2}$ $D = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$

TABLA 2.7.1

	CUADRIPOLO CELOSÍA	CUADRIPOLO CELOSIA SIMETRICO
$ Z $	$Z_{11} = \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$ $Z_{22} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_A + Z_B}{2}$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_B - Z_A}{2}$
$ Y $	$Y_{11} = \frac{(Y_2 + Y_1)(Y_3 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$ $Y_{22} = \frac{(Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{Y_A + Y_B}{2}$ $Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Y_A + Y_B}{2}$
$ a $	$A = \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}$ $B = \frac{\Sigma zzz}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}$ $C = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 Z_4}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}$ $D = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}$ $\Sigma zzz = Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3$	$A = \frac{Z_A + Z_B}{Z_B - Z_A}$ $B = \frac{2 Z_A Z_B}{Z_B - Z_A}$ $C = \frac{2}{Z_B - Z_A}$ $D = \frac{Z_A + Z_B}{Z_B - Z_A}$

PARAMETROS EN FUNCION DE	CUADRIPOLO EN T			CUADRIPOLO EN π			CUADRIPOLO CELOSIA SIMETRICO		
	Z_a	Z_b	Z_c	Z_a	Z_b	Z_c	Z_A	Z_B	Z_B
MATRIZ [a]	$\frac{A-1}{C}$	$\frac{D-1}{C}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{B-1}{D-1}$	$\frac{B}{A-1}$	B	$\frac{A-1}{C}$	$\frac{A+1}{C}$	
MATRIZ [z]	$Z_{11} - Z_{12}$	$Z_{22} - Z_{12}$	Z_{12}	$\frac{\Delta_z}{Z_{22} - Z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{Z_{11} - Z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{Z_{21}}$	$Z_{11} - Z_{12}$	$Z_{11} + Z_{12}$	
MATRIZ [Y]	$\frac{Y_{22} + Y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{Y_{11} + Y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{-Y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{1}{Y_{11} + Y_{12}}$	$\frac{1}{Y_{22} + Y_{11}}$	$\frac{-1}{Y_{12}}$	$\frac{Y_{22} + Y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{Y_{22} - Y_{12}}{\Delta_y}$	
MATRIZ [h]	$\frac{\Delta_h - h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1 - h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{h_{11}}{1 - h_{12}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h - h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h - h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{\Delta_h + h_{12}}{h_{22}}$	
MATRIZ [g]	$\frac{1 + g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g + g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{-g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{g_{22}}{\Delta_g + g_{12}}$	$\frac{g_{22}}{1 + g_{12}}$	$\frac{-g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{1 + g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{1 - g_{12}}{g_{11}}$	
									

CUADRIPOLO	MATRIZ [a]	MATRIZ [z]
	$A = 1$ $B = Z_s$ $C = 0$ $D = 1$	<p>* En este caso la matriz Z no es utilizable ya que todos sus parámetros son infinitos.</p>
	$A = 1$ $B = 0$ $C = 1/Z_p$ $D = 1$	$Z_{11} = Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = Z_p$
	$A = \frac{Z_D + Z_E}{Z_E}$ $B = Z_D$ $C = 1/Z_E$ $D = 1$	$Z_{11} = Z_D + Z_E$ $Z_{12} = Z_{21} = Z_E$ $Z_{22} = Z_E$
	$A = 1$ $B = Z_G$ $C = 1/Z_F$ $D = \frac{Z_G + Z_F}{Z_F}$	$Z_{11} = Z_F$ $Z_{12} = Z_{21} = Z_F$ $Z_{22} = Z_F + Z_G$
	$A = 1 + \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_3 \Sigma Z \pi}$ $B = \frac{Z_4 \Sigma Z_T Z_T}{Z_1 Z_2 + Z_3 \Sigma Z \pi}$ $C = \frac{\Sigma Z \pi}{Z_1 Z_2 + Z_3 \Sigma Z \pi}$ $D = 1 + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_3 \Sigma Z \pi}$	$Z_{11} = \frac{Z_1 (Z_2 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_4} + Z_3$ $Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_4} + Z_3$ $Z_{22} = \frac{Z_2 (Z_1 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_4} + Z_3$

$$\Sigma Z \pi = Z_1 + Z_2 + Z_4$$

$$\Sigma Z_T Z_T = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4$$

2.8 IMPEDANCIAS DE ENTRADA Y SALIDA

Consideremos un cuadripolo que está alimentado por una fuente de tensión o de corriente a la entrada y con una impedancia de carga Z_L a la salida (Fig. 2.8.1).

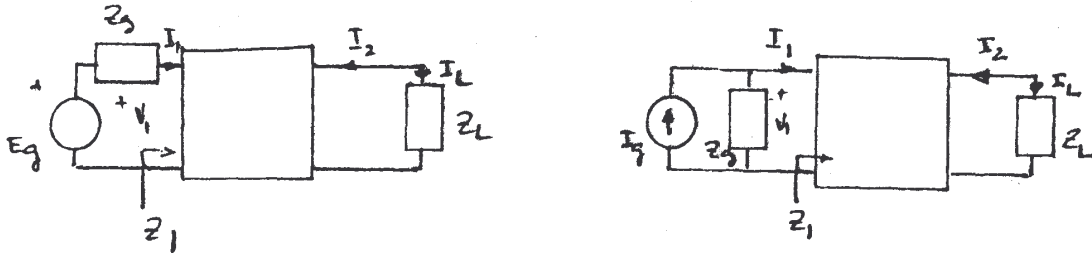


FIG. 2.8.1

Por impedancia de entrada entendemos la impedancia Z_1 que presenta el cuadripolo visto desde los terminales 1 - 1'.

Es decir

$$Z_1 \triangleq \frac{V_1}{I_1}$$

En relación a la matriz $|a|$

$$V_1 = A V_2 - B I_2$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2$$

de donde:

$$Z_1 = \frac{A V_2 - B I_2}{C V_2 - D I_2}$$

De la figura 2.8.1 se deduce que:

$$Z_L = \frac{V_2}{-I_2}$$

ya que

$$I_L = - I_2$$

Sustituyendo queda:

$$Z_1 = \frac{A Z_L + B}{C Z_L + D} \quad \text{ec. 2.8.1}$$

El conocimiento Z_1 nos permite sustituir el cuadripolo por dicha impedancia.

De igual manera podemos definir la impedancia de salida como la impedancia que presenta el cuadripolo visto desde los terminales 2-2'.

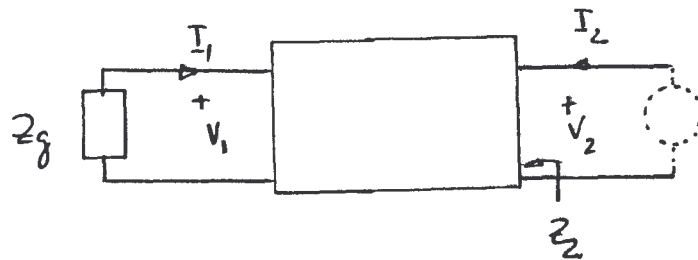


FIG. 2.8.2

Para su determinación es necesario por un momento considerar E_g cortocircuitado o I_g abierto, es decir, estimar que entre los terminales 1-1' existe una carga Z_g y que excitamos los 2-2' con un generador que produce V_2 e I_2 en ellos.

Así tenemos que

$$V_2 = D V_1 - B I_1$$

$$I_2 = C V_1 - A I_1$$

pero como es:

$$Z_2 \triangleq \frac{V_2}{I_2} ; Z_g = \frac{V_1}{-I_1}$$

luego tendremos:

$$Z_2 = \frac{D Z_g + B}{C Z_g + A} \quad \text{ec. 2.8.2}$$

En la tabla 2.8.1 se expresan las impedancias de entrada y salida en la función de las matrices $|Z|$, $|Y|$, $|g|$ y $|h|$.

TABLA 2.8.1

Impedancia de entrada y salida expresados en función de las matrices $|a|$, $|Z|$, $|Y|$, $|g|$ y $|h|$.

MATRIZ	(Z_1) IMPEDANCIA DE ENTRADA	(Z_2) IMPEDANCIA DE SALIDA
a	$\frac{A Z_L + B}{C Z_L + D}$	$\frac{D Z_g + B}{C Z_g + A}$
Z	$\frac{\Delta_Z + Z_{11} Z_L}{Z_{22} + Z_L}$	$\frac{\Delta_Z + Z_{22} Z_g}{Z_{11} + Z_g}$
Y	$\frac{1 + Y_{22} Z_L}{Y_{11} + \Delta_y Z_L}$	$\frac{1 + Y_{11} Z_g}{Y_{22} + \Delta_y Z_g}$
h	$\frac{\Delta_h Z_L + h_{11}}{Z_L h_{22} + 1}$	$\frac{Z_g + h_{11}}{Z_g h_{22} + \Delta_h}$
g	$\frac{Z_L + g_{22}}{g_{11} Z_L + \Delta_g}$	$\frac{\Delta_g Z_g + g_{22}}{g_{11} Z_g + 1}$

EJEMPLO 1: Sabiendo que un cuadripolo tiene una matriz $| Z |$ igual:

$$| Z | = \begin{vmatrix} 2 \left(\frac{s+1}{s} \right) & 2 \\ 2 & 2 \left(\frac{s+1}{s} \right) \end{vmatrix}$$

y que la carga en los terminales 2-2' es $Z_L = 2$ ohmios, mientras que la d.d.p. en los terminales 1-1' es $V_1 = 5$ voltios. Calcular:

- a) La impedancia de entrada.
- b) Las corrientes I_1 e I_2 y la tensión V_2

SOLUCION

De la matriz se obtienen las siguientes tablas:

$$Z_{22} = Z_{11} = 2 \left(\frac{s+1}{s} \right)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = 2$$

$$\Delta Z = \frac{4(s^2+2s+1)}{s^2} - 4 = 4 \frac{2s+1}{s^2}$$

$$Z_1 = \frac{\Delta Z + Z_{11}Z_L}{Z_{22} + Z_L} = \frac{s^2 + 3s + 1}{2s^2 + s}$$

Pero también,

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{5}{I_1} \quad \therefore \quad I_1 = \frac{5(2s^2 + s)}{2(s^2 + 3s + 1)}$$

Ahora también,

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \quad Z_L = \frac{V_2}{-I_2} \quad \therefore \quad \frac{V_1}{-I_2} = A Z_L + B$$

$$-I_2 = \frac{V_1}{A Z_L + B} \quad \text{pero: } A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{s+1}{s} \quad B = \frac{\Delta z}{Z_{21}} = \frac{2(2s+1)}{s^2}$$

$$-I_2 = \frac{5}{2} \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1} \quad \therefore \quad I_2 = -\frac{5}{2} \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

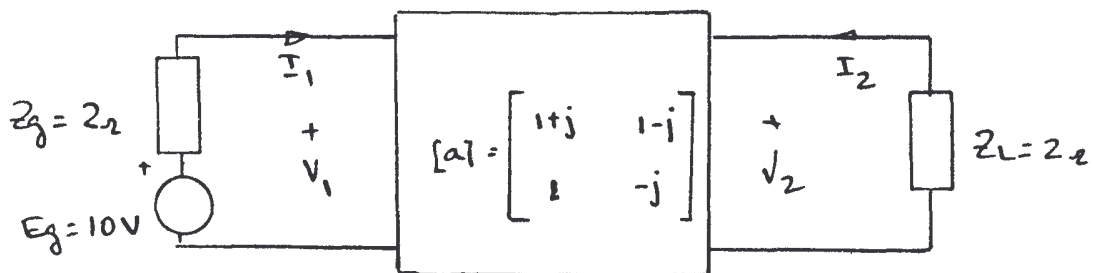
$$\frac{V_2}{-I_2} = Z_L \quad \therefore \quad V_2 = -I_2 Z_L = 5 \frac{s^2}{2s^2 + 3s + 1}$$

$$V_2 = 5 \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

EJEMPLO 2: Analizar si el circuito de la figura debe estar constituido por elementos pasivos sólo o tiene que tener también elementos activos. Después calcular las corrientes I_1 e I_2 y las tensiones V_1 y V_2 .

SOLUCION:

$$\Delta a = A D - B C = -j(1+j) - (1-j) = 0$$



Si estuviera constituido sólo por elementos pasivos debería ser $\Delta a = 1$; por lo tanto el circuito es activo.

$$Z_1 = \frac{A Z_L + B}{C Z_L + D} = \frac{(1 + j)2 + (1 - j)}{2 - j} = 1 + j$$

$$I_1 = \frac{E_g}{Z_g + Z_1} = \frac{10}{2 + 1 + j} = 3 - j$$

$$V_1 = I_1 Z_1 = (3 - j)(1 + j) = 4 + 2j$$

Pero,

$$V_1 = A V_2 - B I_2$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2$$

$$\therefore I_1 = -(C Z_L + D) I_2$$

$$V_2 = -I_2 Z_L$$

Luego:

$$I_2 = -(2 - j) I_2$$

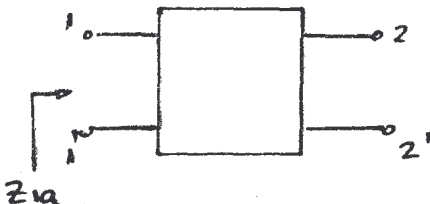
$$I_2 = -\left(\frac{7 + j}{5}\right)$$

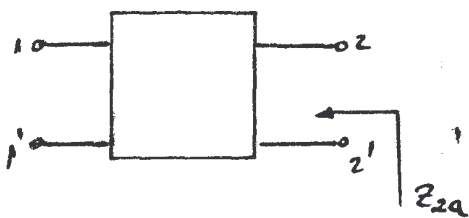
$$V_2 = \frac{2}{5} (7 + j)$$

No se puede utilizar $|b|$ porque $\Delta a \neq 1$

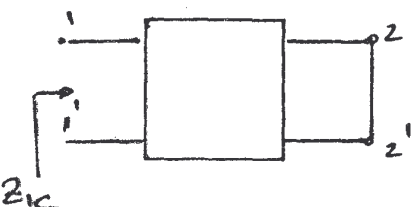
2.9 IMPEDANCIAS DE ENTRADA Y SALIDA EN C.A. Y C.C

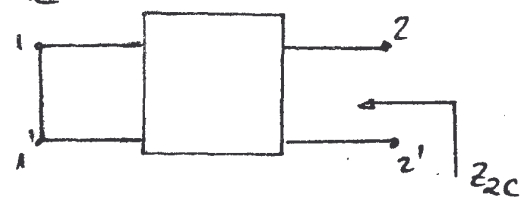
Para circuito abierto, bastará hacer en Z_1 y Z_2 ; Z_L y Z_g infinito, con lo cual tenemos

$$Z_{1a} = \frac{A}{C} = Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta y} = \frac{\Delta h}{h_{22}}$$


$$Z_{2a} = \frac{D}{C} = Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta y} = \frac{1}{h_{22}}$$


Para circuito cerrado será tanto Z_L como Z_g igual a cero:

$$Z_{1c} = \frac{B}{D} = \frac{\Delta z}{Z_{22}} = \frac{1}{Y_{11}} = h_{11}$$


$$Z_{2c} = \frac{B}{A} = \frac{\Delta z}{Z_{11}} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$$


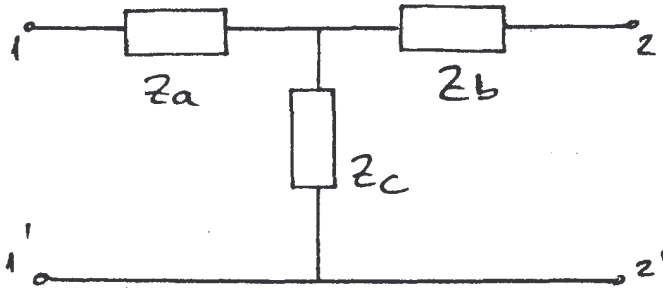
Podemos ver que estas cuatro impedancias no son pues independientes

$$Z_{1a} Z_{2c} = Z_{2a} Z_{1c} = \frac{B}{C} = \Delta z = \frac{1}{\Delta y} = \frac{h_{11}}{h_{22}}$$

En el laboratorio pueden medirse Z_{1a} , Z_{2a} , Z_{1c} para cualquier frecuencia $S = j\omega$

EJEMPLO: En el circuito de la figura determinar:

Z_{1a} , Z_{2a} , Z_{1c} y Z_{2c}



$$Z_a = \frac{s}{s+2}$$

$$Z_b = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

$$Z_c = \frac{1}{s}$$

SOLUCION

$$Z_{1a} = Z_{11} = Z_a + Z_c = \frac{s^2 + s + 2}{s(s+2)}$$

$$Z_{2a} = Z_{22} = Z_b + Z_c = \frac{2s + 3}{s(s+2)}$$

$$Z_{1c} = Z_a + \frac{Z_b Z_c}{Z_b + Z_c} = \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{s(2s+3)(s+2)}$$

$$Z_{2c} = \frac{Z_{2a} Z_{1c}}{Z_{1a}} = \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{s(s+2)(s^2 + s + 2)}$$

10 IMPEDANCIAS ITERATIVAS

Una impedancia se dice iterativa Z_I cuando al aplicarla de carga entre dos terminales de un cuadripolo, la Impedancia que presenta dicho cuadripolo entre los otros dos terminales es también Z_I Fig. 2.10.1.

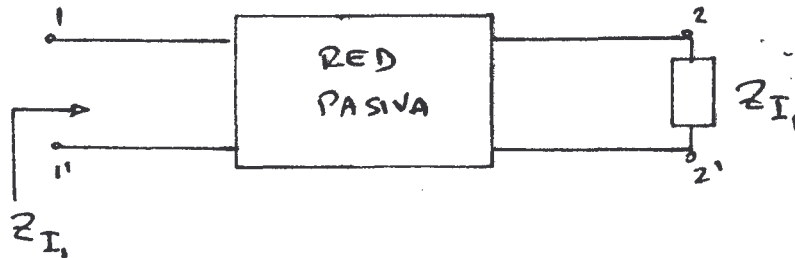


Figura 2.10.1

Para el cálculo de la impedancia iterativa Z_I entre los terminales 1-1' haremos:

$$Z_1 = Z_L = Z_{I_1}$$

de forma que tenemos:

$$Z_{I_1} = \frac{A Z_{I_1} + B}{C Z_{I_1} + D}$$

$$C Z_{I_1}^2 + (D - A) Z_{I_1} - B = 0$$

Despejando:

$$Z_{I_1} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4(C)(-B)}}{2C} \quad \text{ec. 2.10.1}$$

pues deberá recordarse que:

$$\Delta_a = AD - BC = 1 \quad \text{Red pasiva}$$

Con respecto a la ec. 2.10.1 cuando se trabaja con $S = j\omega$ tomaremos que el signo que haga positiva la parte real de $Z_{I1}(j\omega)$ puesto que debe cumplir con las condiciones de Función de Red la cual nunca puede ser negativa en una red pasiva.

Por otro lado, también podemos definir la impedancia iterativa de los terminales 2-2' (Fig. 2.10.2),

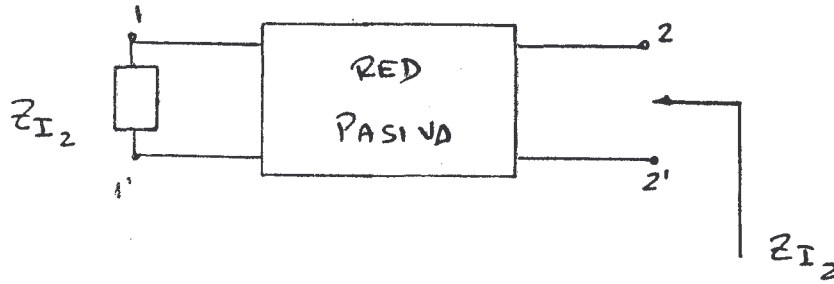


Figura 2.10.2

Si en la ec. 2.8.2 correspondiente a la Impedancia de salida, hacemos $Z_2 = Z_g = Z_{I2}$ tendremos la impedancia iterativa vista desde los terminales 2 - 2'.

$$Z_{I2} = \frac{D - A \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}}{2C} \quad \text{ec. 2.10.2}$$

Estas dos ecuaciones expresadas en función de la matriz $|Z|$ y son:

$$Z_{I1} = \frac{Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4\Delta_z}}{2} \quad \text{ec. 2.10.3}$$

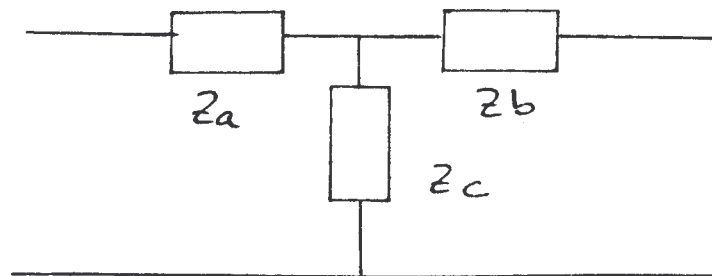
$$Z_{I2} = \frac{Z_{22} - Z_{11} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4\Delta_Z}}{2}$$

$$Z_{I1} = \frac{Y_{22} - Y_{11} \pm \sqrt{(Y_{22} - Y_{11})^2 + 4\Delta_Y}}{2 \Delta_Y} \quad \text{ec. 2.10.4}$$

$$Z_{I2} = \frac{Y_{11} - Y_{22} \pm \sqrt{(Y_{22} - Y_{11})^2 + 4\Delta_Y}}{2 \Delta_Y}$$

Obsérvese que Z_{I1} y Z_{I2} son dos impedancias irracionales, lo que nos dice que ni son sintetizables, es decir que no podremos, en general encontrar dipolos cuyas impedancias sean las impedancias iterativas de un cuadripolo. Sin embargo a cada valor particular de $S = j\omega$ corresponde un valor de Z_{I1} y Z_{I2} realizable.

EJEMPLO: Calcular las impedancias iterativas del cuadripolo de la figura 2.10.3 y después hallar su valor para $S = j$.



$$Z_a = \frac{s}{s+2} \quad Z_b = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad Z_c = \frac{1}{s}$$

SOLUCION:

$$Z_{11} = \frac{s^2 + s + 2}{s(s + 2)}$$

$$Z_{22} = \frac{2s + 3}{s(s + 2)}$$

$$Z_{12} = \frac{1}{s}$$

$$\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = \frac{2s^3 + 4s^2 + 5s + 2}{s^2 (s + 2)^2}$$

$$Z_{11} - Z_{22} = \frac{s^2 - s - 1}{s(s + 2)}$$

Luego utilizando las ec. 2.10.3

$$Z_{I1} = \frac{s^2 - s - 1 \pm \sqrt{s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 14s + 9}}{2s (s + 2)}$$

$$Z_{I2} = \frac{-s^2 + s + 1 \pm \sqrt{s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 14s + 9}}{2s (s + 2)}$$

Que para $S = j$ será:

$$Z_{I1} = \frac{-2-j + \sqrt{-5 + 8j}}{2(-1 + 2j)}$$

$$Z_{I2} = \frac{2+j + \sqrt{-5 + 8j}}{2(-1 + 2j)}$$

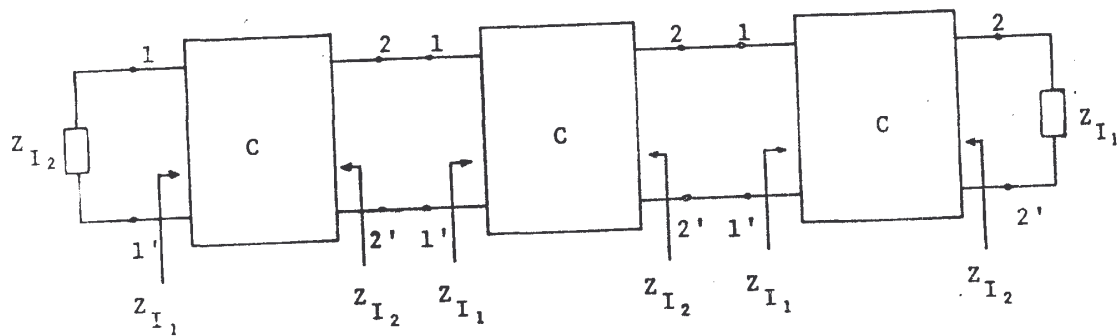
Realizando las operaciones correspondientes y la raíz del numerador queda:

$$Z_{I1} = \frac{5j \pm (-3,89 + 5,67j)}{10}$$

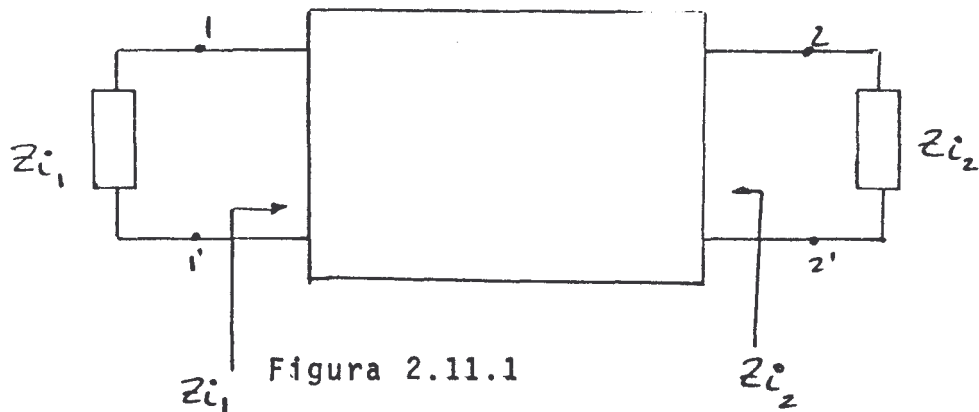
Para que tenga parte real positiva tomaremos signo negativo

$$Z_{I1} = 0,389 - 0,067 j \quad Z_{I2} = 0,389 - 1,067 j$$

Debemos ver que si tenemos un sistema de n cuadripolos iguales en cascada y cerramos pares de terminales extremos mediante sus propias impedancias iterativas, desde cualquier par de terminales veremos, hacia la izquierda la impedancia Z_{I1} y hacia la derecha la impedancia Z_{I2} como lo muestra la siguiente figura.



2.11 IMPEDANCIAS IMAGEN



Las impedancias imagen Z_{i1} y Z_{i2} son dos impedancias tales que cuando están respectivamente colocadas entre los terminales 1 - 1' y 2 - 2' las impedancias de entrada y salida que presenta el cuadripolo son precisamente dichas impedancias Z_{i1} y Z_{i2} , tal como se muestra en la figura 2.11.1.

Para su determinación, igual que antes utilizaremos las ecuaciones de la impedancia de entrada y salida ec. 2.8.1 y ec. 2.8.2 tendremos

$$Z_{i1} = \frac{A Z_{i2} + B}{C Z_{i2} + D} \qquad Z_{i2} = \frac{D Z_{i1} + B}{C Z_{i1} + A}$$

resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C Z_{i1} Z_{i2} + D Z_{i1} - A Z_{i2} - B = 0$$

$$C Z_{i1} Z_{i2} - D Z_{i1} + A Z_{i2} - B = 0$$

y mediante suma y resta

$$Z_{i_1} + Z_{i_2} = \frac{B}{C} \quad \text{y} \quad \frac{Z_{i_1}}{Z_{i_2}} = \frac{A}{D}$$

con lo que queda:

$$Z_{i_1} = \sqrt{\frac{A B}{C D}}, \quad Z_{i_2} = \sqrt{\frac{D B}{C A}} \quad \text{ec. 2.11.1}$$

En términos de las otras matrices tendremos:

$$Z_{i_1} = \sqrt{\Delta_z \frac{Z_{11}}{Z_{22}}}, \quad Z_{i_2} = \sqrt{\Delta_z \frac{Z_{22}}{Z_{11}}} \quad \text{ec. 2.11.2}$$

En función de la matriz | Y |

$$Z_{i_1} = \sqrt{\frac{1}{\Delta_y} \frac{Y_{22}}{Y_{11}}}; \quad Z_{i_2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta_y} \frac{Y_{11}}{Y_{22}}} \quad \text{ec. 2.11.3}$$

Las expresiones anteriores se pueden simplificar teniendo en cuenta que:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_z} \quad \text{e} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_z}$$

Sustituyendo,

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} \quad \text{y} \quad Z_{i2} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} \quad \text{ec. 2.11.4.}$$

y finalmente en función de las impedancias de entrada y salida en c.a. y cc

$$Z_{11} = Z_{1a}$$

$$Z_{22} = Z_{2a}$$

$$\frac{1}{Y_{11}} = Z_{1c}$$

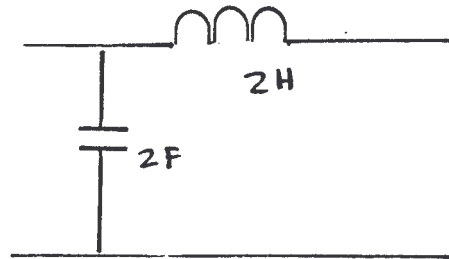
$$\frac{1}{Y_{22}} = Z_{2c}$$

Con lo que es:

$$Z_{i1} = \sqrt{Z_{1a}Z_{1c}} \quad Z_{i2} = \sqrt{Z_{2a}Z_{2c}} \quad \text{ec. 2.11.5.}$$

Para las impedancias imagen, lo mismo que para las iterativas, podemos decir que como no son racionales no se pueden sintetizar, a excepción de valores particulares de $S = j\omega$, y tomando siempre la raíz con la parte real positiva. Las expresiones ec. 2.11.5., nos dicen que experimentalmente puede determinarse Z y Z midiendo las impedancias de entrada y salida en circuito abierto y cerrado.

EJEMPLO: Calcular las impedancias imagen del cuadripolo de la figura, especificando su valor para $S = 5j$



SOLUCION: Las impedancias en circuito abierto y cerrado son:

$$Z_{1a} = \frac{1}{2s} ; \quad Z_{2a} = \frac{4s^2+1}{2s} ; \quad Z_{1c} = \frac{2s}{4s^2+1} ; \quad Z_{2c} = 2s$$

Luego:

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{1}{4s^2+1}} \quad \text{y} \quad Z_{i2} = \sqrt{4s^2+1}$$

que para $S = 5j$ será:

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{-1}{99}} = \pm 0.1005j \quad ; \quad Z_{i2} = \sqrt{-99} = \pm 9.95j$$

Así tendremos dos posibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{i1} = + 0.1005 j \\ Z_{i2} = - 9.95 j \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_{i1} = - 0.1005 j \\ Z_{i2} = 9.95 j \end{array} \right.$$

ya que debe cumplir que:

$$Z_{i1} \cdot Z_{i2} = \Delta_z = \frac{1}{2s} \left(\frac{4s^2+1}{2s} \right) - \frac{1}{4s^2} = 1$$

2.12. IMPEDANCIA CARACTERISTICA

Teniendo en cuenta que en todo cuadripolo simétrico es $Z_{11} = Z_{12}$ vemos que sus impedancias iterativas son iguales.

$$Z_{i1} = Z_{i2} = \sqrt{\Delta_z} \quad \text{ec. 2.12.1.}$$

y en cuanto a las impedancias imagen, vemos que también se verifica:

$$Z_{i1} = Z_{i2} = \sqrt{\Delta_z} \quad \text{ec. 2.12.2.}$$

Por ello podemos decir además que las impedancias iterativas y las imagen son iguales y podemos designar a todos ellos con denominada impedancia característica.

$$Z_0 = Z_{i1} = Z_{i2} = Z_{i1} = Z_{i2} \quad \text{ec. 2.12.3.}$$

otras expresiones válidas para Z_0 son:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\Delta_z} = \sqrt{\frac{1}{\Delta_y}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} = \sqrt{Z_{ca}Z_{cc}} \quad \text{ec. 2.12.4.}$$

donde es:

$$Z_{ca} = Z_{1a} = Z_{2a}$$

$$Z_{cc} = Z_{1c} = Z_{2c}$$

2.13. FUNCION DE PROPAGACION IMAGEN

Se representa por γ_i y se define por la expresión:

$$e^{-2\gamma_i} = \frac{V_2(-I_2)}{V_1 I_1} \left| \begin{array}{l} Z_g = Z_{i_1} \\ Z_L = Z_{i_2} \end{array} \right. \quad \text{ec. 2.13.1.}$$

que representa la razón entre el producto volt-amperios de la salida con respecto a la entrada.

Si el cuadripolo esta terminado con sus impedancias imagen

$$Z_L = Z_{i_2} = Z_2 \quad \text{ec. 2.13.2.}$$

$$Z_g = Z_{i_1} = Z_1$$

$$y \quad V_1 = Z_{i_1} I_1 \quad \text{ec. 2.13.3.}$$

$$V_2 = Z_{i_2} (-I_2)$$

Sustituyendo las ec. 2.13.3. en la ec. 2.13.1. tendremos:

$$e^{-2\gamma_i} = \frac{Z_{i_2} (-I_2)^2}{Z_{i_1} (I_1)^2}$$

$$\frac{-I_2}{I_1} \left| \begin{array}{l} Z_g = Z_{i_1} \\ Z_L = Z_{i_2} \end{array} \right. = e^{-\gamma_i} \sqrt{\frac{Z_{i_1}}{Z_{i_2}}} \quad \text{ec. 2.13.4.}$$

y sustituimos las corrientes y obtendremos:

$$\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{\substack{Z_g = Z_{i_1} \\ Z_L = Z_{i_2}}} = \sqrt{\frac{Z_{i_2}}{Z_{i_1}}} e^{-\gamma l} \quad \text{ec. 2.13.5.}$$

Para la determinación de γ . recordemos las siguientes ecuaciones

$$V_1 = \left(A + \frac{B}{Z_{i_2}} \right) V_2$$

$$I_1 = (C Z_{i_2} + D) (-I_2)$$

Pero como:

$$Z_{i_2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}$$

Sustituyendo queda:

$$\frac{V_1}{V_2} = A + \sqrt{\frac{A B C}{D}}$$

$$\frac{I_1}{-I_2} = \sqrt{\frac{C D B}{A}} + D$$

Por otra parte es:

$$\frac{Z_{i_1}}{Z_{i_2}} = \frac{\sqrt{\frac{A B}{C D}}}{\sqrt{\frac{D B}{C A}}} = \sqrt{\frac{A^2 \cdot BC}{D^2 \cdot BC}} = \frac{A}{D}$$

Por ello la ec. 2.13.5. resulta ser:

$$e^{\gamma_i} = \frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}} = \left(A + \sqrt{\frac{ABC}{D}} \right) \sqrt{\frac{D}{A}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}$$

ec.2.13.6.

Pero

$$e^{\gamma_i} = \text{ch } \gamma_i + \text{sh } \gamma_i$$

y se cumple también que:

$$\text{ch}^2 \gamma_i - \text{sh}^2 \gamma_i = 1$$

Más como para cuadripolos pasivos se recordará que:

$$AD - BC = 1$$

Por lo que:

$$\text{ch } \gamma_i = \sqrt{AD}$$

$$\text{sh } \gamma_i = \sqrt{BC}$$

$$y \quad \text{th } \gamma_i = \sqrt{\frac{BC}{AD}}$$

Vamos a considerar:

$$\text{th } \gamma_i = \sqrt{t}$$

ec. 2.13.7.

Pudiendo ser:

$$t = \frac{BC}{AD} = \frac{\Delta_z}{Z_{11}Z_{22}} = \frac{\Delta_y}{Y_{11}Y_{22}} = \frac{1}{Z_{11}Y_{11}} = \frac{1}{Z_{22}Y_{22}} = \frac{Z_{1c}}{Z_{1a}} = \frac{Z_{2c}}{Z_{2a}}$$

ec. 2.13.8.

En general es γ_i función de S , más para $S=j\omega$ es:

$$\gamma_i(j\omega) = \alpha_i(\omega) + j \beta_i(\omega) \quad \text{ec. 2.13.9.}$$

donde:

$\alpha_i(\omega)$: Es la función de atenuación imagen midiéndose en "neper".

$\beta_i(\omega)$: Es la función de fase imagen midiéndose en radianes.

Recordando las definiciones exponenciales de las funciones hiperbólicas,

$$\text{th } \gamma_i = \frac{e^{\gamma_i} - e^{-\gamma_i}}{e^{\gamma_i} + e^{-\gamma_i}} = \frac{e^{2\gamma_i} - 1}{e^{2\gamma_i} + 1} = \sqrt{t} \quad \text{ec. 2.13.10.}$$

de donde obtendremos:

$$e^{2\gamma_i} = \frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} \quad \text{ec. 2.13.11.}$$

Para el cálculo de $\gamma_i(j\omega)$ tendremos en cuenta que es:

$$\sqrt{t} = p + j q$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \ln \frac{1+p+jq}{1-p-jq} = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{(1+p)^2+q^2}{(1-p)^2+q^2} \right)^{1/2} e^{j \arctg \frac{2q}{1-p^2-q^2}} \right]$$

$$\gamma_i = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+p)^2 + q^2}{(1-p)^2 + q^2} + j \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-p^2-q^2}$$

donde es:

$$\alpha_i = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+p)^2 + q^2}{(1-p)^2 + q^2} \quad \text{ec. 2.13.12}$$

$$\beta_i = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-p^2-q^2} \quad \text{ec. 2.13.13}$$

Si existieran m cuadripolos conectados en cascada con respecto a su función propagación imagen se cumple que:

$$\gamma_i = \sum_1^m \gamma_{ik}$$

Si los m cuadripolos son iguales:

$$\gamma_i = m \gamma_i'$$

EJEMPLO Un cuadripolo tiene a una frecuencia dada una matriz | Y |

$$|Y| = \begin{vmatrix} e^{j30^\circ} & \sqrt[4]{3}e^{-j135^\circ} \\ \sqrt[4]{3}e^{-j135^\circ} & 2e^{j30^\circ} \end{vmatrix}$$

Calcular sus impedancias imagen y la constante de propagación.

SOLUCION

$$\Delta_y = 2e^{j60^\circ} - \sqrt{3} e^{-j270^\circ} = 2 \angle 60^\circ - \sqrt{3} \angle 90^\circ = 1 + \sqrt{3}j - \sqrt{3}j = 1$$

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{1}{\Delta_y} \frac{Y_{22}}{Y_{11}}} = \sqrt{\frac{2e^{j30^\circ}}{e^{j30^\circ}}} = \sqrt{2}$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta y} \frac{Y_{11}}{Y_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{th} \gamma_i = \sqrt{\frac{\Delta y}{Y_{11} Y_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{e^{j30^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 0.612 - 0.353 j$$

$$p = 0.612$$

$$q = -0.353$$

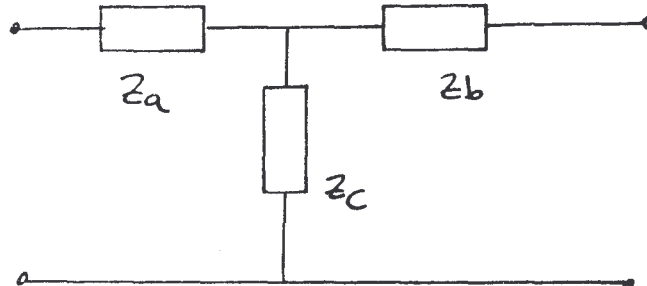
$$\alpha_i = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+p)^2 + q^2}{(1-p)^2 + q^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1.5 + 1.224}{1.5 - 1.224} \right| = 0.575 \text{ nepers.}$$

$$\beta_i = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2q}{(1-p)^2 - q^2} = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{arctg}(-\sqrt{2})$$

$$\beta_i = -27^\circ 22'$$

2.14. DEDUCCION DE Z_{i1} , Z_{i2} Y γ EN FUNCION DE LAS IMPEDANCIAS DE CUADRIPOLOS TÍPICOS Y VICEVERSA

a) CUADRIPOLO T



$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{(Z_a + Z_c)(Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a)}{Z_b + Z_c}}$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\frac{(Z_b + Z_c)(Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a)}{Z_a + Z_c}}$$

$$\text{cth } \gamma_i = \sqrt{\frac{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_c)}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}}$$

Las operaciones inversas dan:

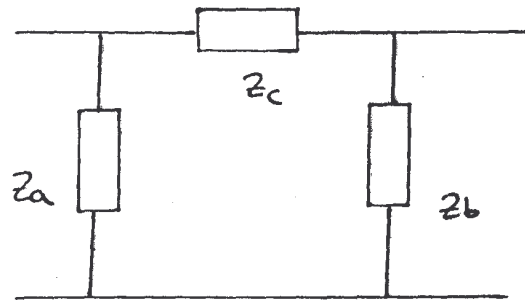
$$Z_c = \frac{\sqrt{Z_{i1} \cdot Z_{i2}}}{\text{sh } \gamma_i}$$

$$Z_a = Z_{i1} \text{cth } \gamma_i - \frac{\sqrt{Z_{i1} \cdot Z_{i2}}}{\text{sh } \gamma_i}$$

$$Z_b = Z_{i2} \text{cth } \gamma_i - \frac{\sqrt{Z_{i1} \cdot Z_{i2}}}{\text{sh } \gamma_i}$$

+

b) CUADRIPOLO EN π



$$Z_{i_1} = Z_a \sqrt{\frac{Z_c (Z_b + Z_c)}{(Z_a + Z_c) \Sigma Z}}$$

$$\text{ch } \gamma_i = \sqrt{\frac{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_c)}{Z_a Z_b}}$$

$$Z_{i_2} = Z_b \sqrt{\frac{Z_c (Z_a + Z_c)}{(Z_b + Z_c) \Sigma Z}}$$

$$\text{sh } \gamma_i = \sqrt{\frac{Z_c \Sigma Z}{Z_a Z_b}}$$

$$\text{tg } \gamma_i = \sqrt{\frac{Z_c \Sigma Z}{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_c)}}$$

Procedimiento a la inversa:

$$Z_c = \sqrt{Z_{i_1} \cdot Z_{i_2}} \text{ sh } \gamma_i$$

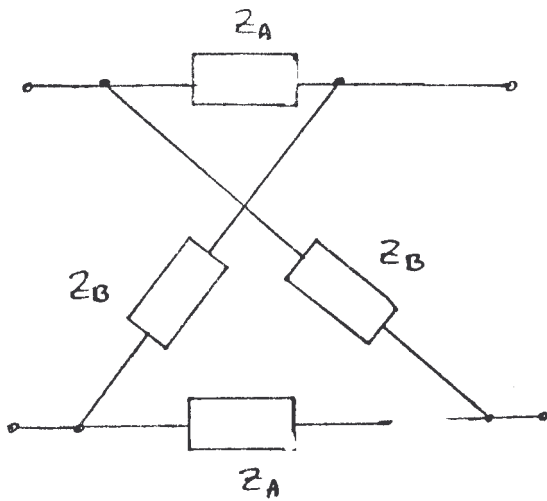
$$Z_a = \frac{\sqrt{Z_{i_1} Z_{i_2}} \text{ sh } \gamma_i}{\sqrt{\frac{Z_{i_2}}{Z_{i_1}} \text{ ch } \gamma_i - 1}}$$

$$Z_b = \frac{\sqrt{Z_{i_1} Z_{i_2}} \text{ sh } \gamma_i}{\sqrt{\frac{Z_{i_1}}{Z_{i_2}} \text{ ch } \gamma_i - 1}}$$

NOTA:

$$\Sigma Z = Z_a + Z_b + Z_c$$

c) CUADRIPOLO EN CELOSIA O PUENTE



Se Cumple que:

$$A = D = \frac{Z_A + Z_B}{Z_B - Z_A}$$

$$B = \frac{2 Z_A Z_B}{Z_B - Z_A}$$

$$C = \frac{2}{Z_B - Z_A}$$

De modo que:

$$Z_0 = \sqrt{Z_A Z_B}$$

$$\text{ch}\gamma_0 = \frac{Z_A + Z_B}{Z_B - Z_A}$$

$$\text{sh}\gamma_0 = \frac{2\sqrt{Z_A Z_B}}{Z_B - Z_A}$$

$$\text{th}\gamma_0 = \frac{2\sqrt{Z_A Z_B}}{Z_A + Z_B}$$

En forma inversa se obtiene:

$$Z_A + Z_B = \frac{2 Z_0}{\text{th}\gamma_0}$$

$$Z_B - Z_A = \frac{2 Z_0}{\text{sh}\gamma_0}$$

Luego:

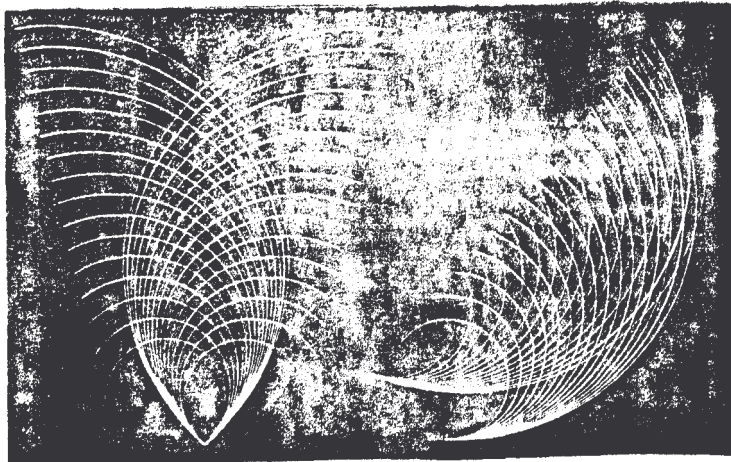
$$Z_A = Z_0 \text{th} \frac{\gamma_0}{2}$$

$$Z_B = Z_0 \text{cth} \frac{\gamma_0}{2}$$

capitulo 3

ANALISIS MATRICIAL

DE



REDES

CAPITULO N° 3 ; ANALISIS MATRICIAL DE REDES

C O N T E N I D O

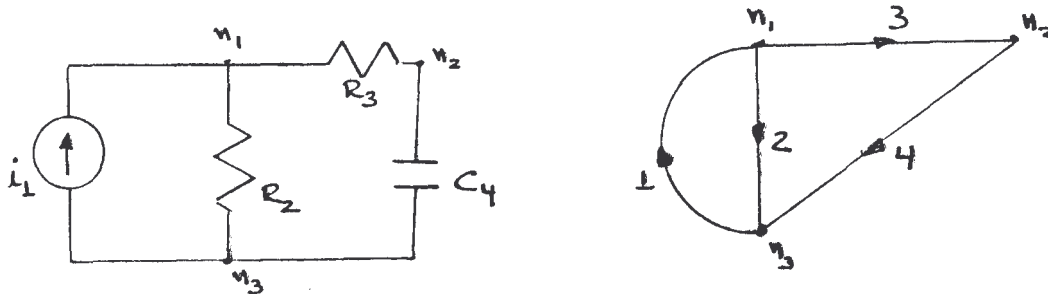
3.1	Teoria de gráficos de redes	165
3.2	Matriz de incidencia aumentada	169
3.3	Matriz de conjuntos de corte aumentada	172
3.4	Matriz de lazos aumentada	176
3.5	Matriz de mallas	179
3.6	Condiciones de ortogonalidad	181
3.7	Relaciones entre voltajes de ramas y nodos	183
3.8	Relaciones entre las corrientes de ram y malla	185
3.9	Implicación del Teorema de Tellegen	188
3.10	Circuitos equivalentes de elementos reactivos	192
3.11	Rama generalizada	195
3.12	Metodo de la matriz de impedancia primitiva	198
3.13	Método de la matriz de admitancia primitiva	203
3.14	Análisis por nodos	209
3.15	Analisis por lazos	214

3.1. TEORIA DE GRAFICOS DE REDES (TOPOLOGIA)

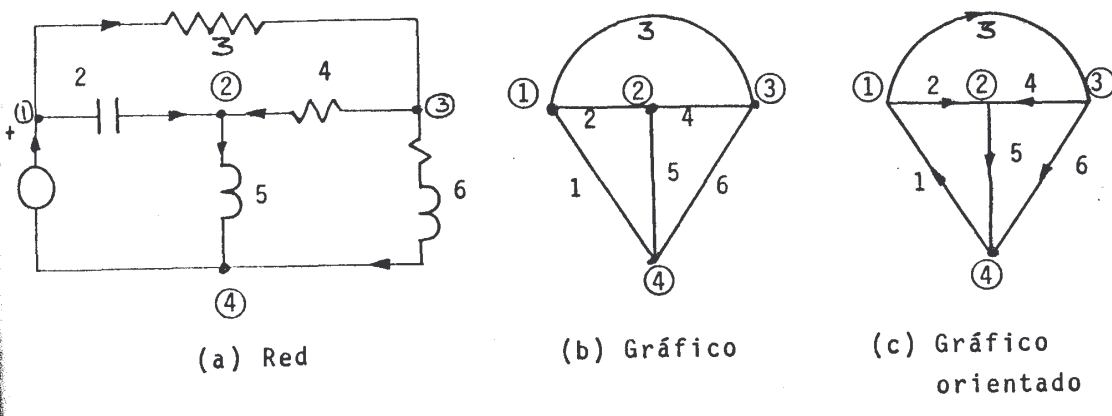
Topología es una rama de la matemática que se describe como el estudio de las propiedades de las formas geométricas que permanecen invariables bajo ciertas transformaciones. La Topología o geometría de la red tiene que ver con la manera como están interconectados los elementos en la red y no con su naturaleza

La red se representa mediante un grafico lineal que se obtiene reemplazando cada elemento por una línea o segmento y las uniones por nodos.

Por ejemplo

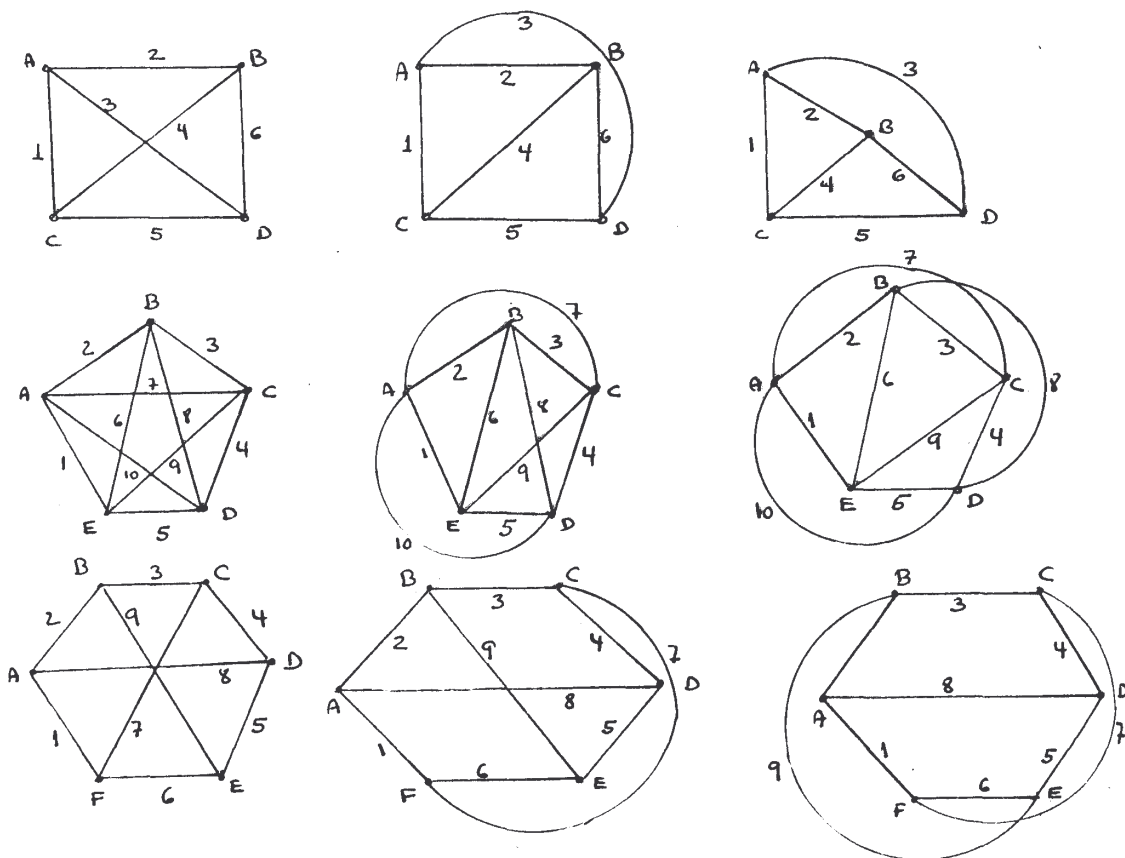


El gráfico de una red es un diagrama simple donde se muestra cada elemento mediante un segmento de línea llamado rama y cada terminal es un punto denominado nodo. Los gráficos pueden ser orientados si se asume un sentido de corriente en las ramas.



DEFINICIONES

- 1.- NODO: punto, en el cual dos o más elementos tienen conexión común.
- 2.- RAMA: camino aislado, conteniendo un elemento simple, que conecta un nodo con otro nodo cual quiera.
- 3.- MALLA O LAZO: conjunto de ramas formando un camino cerrado que no pasa por ningún nodo más de una vez.
- 4.- MALLA ADYACENTE: un lazo que no contiene otros lazos en su interior.
- 5.- CIRCUITO PLANAR: un circuito que se puede dibujar sobre una superficie plana en tal forma que ninguna rama pase por debajo o por encima de cualquier otra rama.
- 6.- CIRCUITO NO PLANAR: cualquier circuito que no es plano.



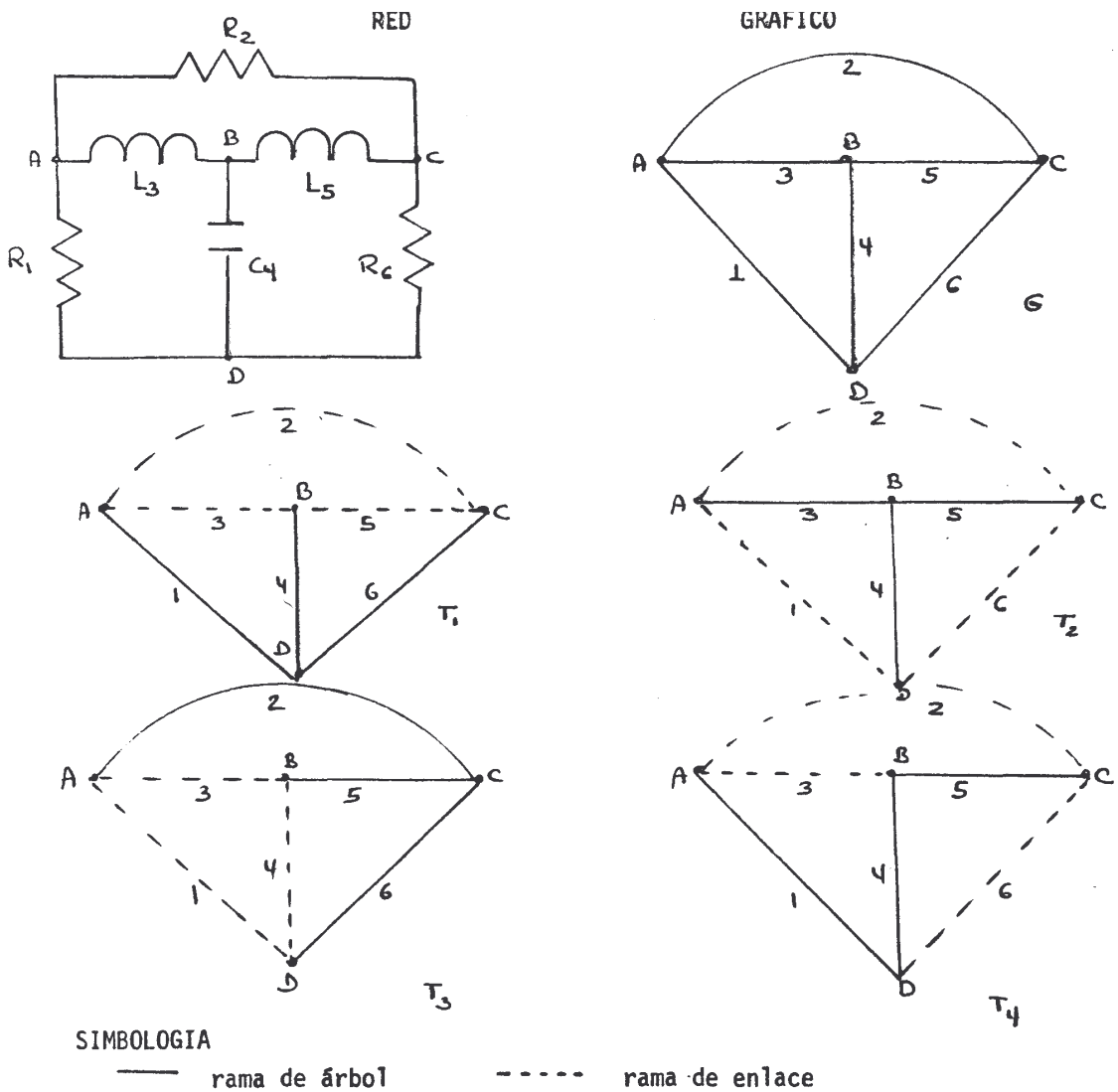
Cuadrilátero planar
 Pentágono no planar de Kuratowski
 Hexágono no planar de Kuratowski

b) ARBOL

Así llamaremos a un árbol 'T' del gráfico conectado G, un subgráfico conectado de G que tiene las siguientes propiedades:

- a) T contiene todos los nodos de G
- b) T no tiene ningún lazo

Las ramas del gráfico que pertenecen al árbol se denominan "ramas de árbol" y las que no pertenecen se denominan "ramas de enlace"

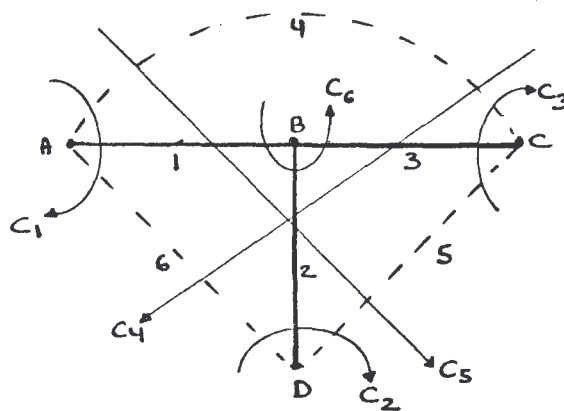


c) CONJUNTO DE CORTE

Un conjunto de corte de un gráfico de una red es una colección de ramas y nodos tal que, si estas ramas se remueven del gráfico, este se convierte en dos partes o subgráficos separados. Para su dibujo en el gráfico se procederá a formar grupos de ramas tomando:

- una rama de árbol a la vez y cualquier número de ramas de enlace
- dos ramas de árbol a la vez y cualquier número de ramas de enlace
- etc.

EJEMPLO:



Los conjuntos que se forman son:

- a.- Tomando una rama de árbol a la vez: C_1, C_2, C_3
- b.- Tomando dos ramas de árbol a la vez: C_4, C_5
- c.- Tomando tres ramas de árbol a la vez: C_6

Se podría calcular el número total de conjuntos de corte mediante el análisis combinatorio.

3.2. MATRIZ DE INCIDENCIA AUMENTADA $|Aa|$

Asumiendo el siguiente convenio

El elemento a_{kj} será:

+ 1 cuando r_j salga del nodo n_k

- 1 cuando r_j entre al nodo n_k

0 cuando r_j no sea incidente al nodo n_k

La matriz de incidencia aumentada será:

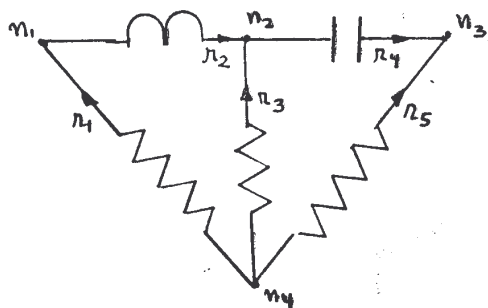
$\begin{bmatrix} A \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ kj \end{bmatrix}$

de orden $(N+1) \times R$

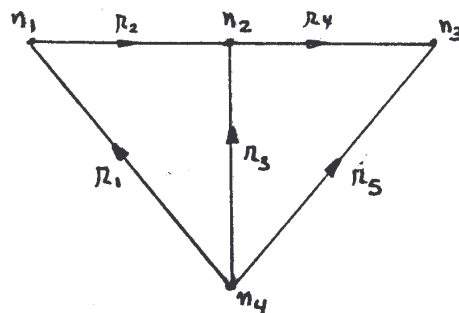
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
n_1	-1	0	0	1	1	0	0	0	0
n_2	1	1	0	0	0	-1	0	0	0
n_3	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	1
n_4	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
n_5	0	0	0	0	-1	1	1	0	0
n_6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

$\begin{bmatrix} A \\ a \end{bmatrix} =$

a) MATRIZ DE INCIDENCIA [A]



(a) Red



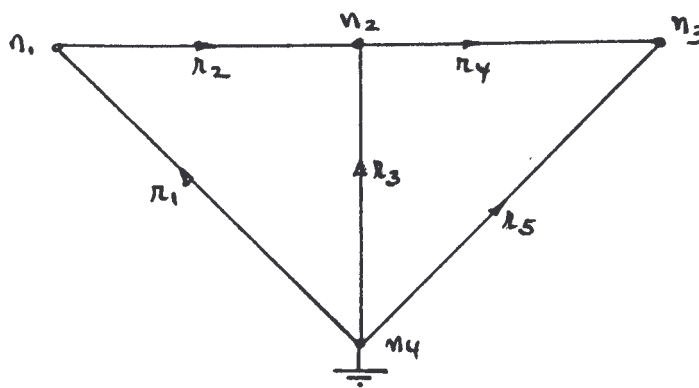
(b) Gráfico orientado

La matriz de incidencia aumentada la red es

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{r} \\
 \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{n} \\
 \text{1} \\
 \text{2} \\
 \text{3} \\
 \text{4}
 \end{array}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccccc}
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array} \right|$$

Si quitamos una de las filas obtenemos la matriz |A|

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$



n4 nodo de referencia

b) LEY DE KIRCHHOFF DE CORRIENTES y [A]

Si en los gráficos orientados anteriores; a cada rama del gráfico se le asigna una corriente obtendremos la ecuación matricial de Kirchhoff de corrientes.

a.- con la matriz de incidencia aumentada [Aa]

$$[Aa] \begin{matrix} [i \\ r \end{matrix}] = 0$$

donde el número de ecuaciones no son linealmente independientes.

b.- con la matriz de incidencia [A]

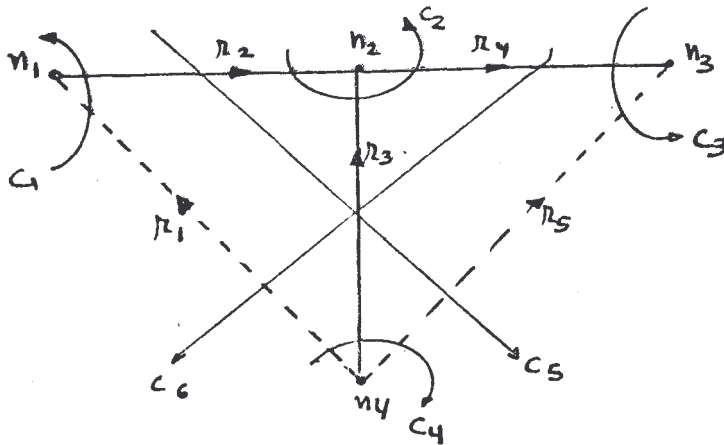
$$[A] \begin{matrix} [i \\ r \end{matrix}] = 0$$

representa las ecuaciones linealmente independientes de nodos.

Del ejemplo anterior:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

3.3 MATRIZ DE CONJUNTOS DE CORTE AUMENTADA [Qa]



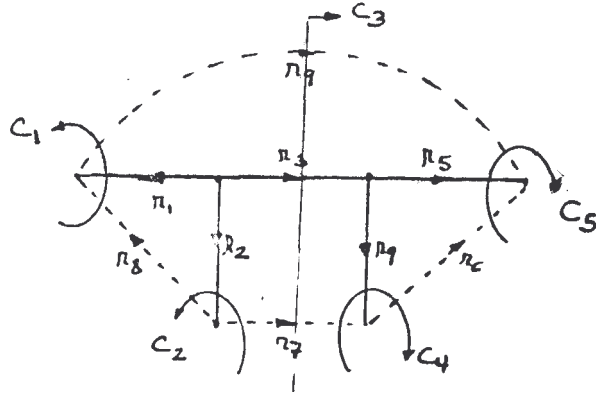
Convenio: sentido positivo las entrantes al conjunto de corte

$$[Q_a] = \begin{array}{c|ccccc} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \hline C_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C_4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ C_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ C_6 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Donde [Qa] es la llamada " Matriz aumentada de los conjuntos de corte".

a) MATRIZ DE CONJUNTOS DE CORTE FUNDAMENTAL [Qf]

Para un árbol dado tomando una rama de árbol a la vez que forma el denominado 'Conjunto de Corte Fundamental'.



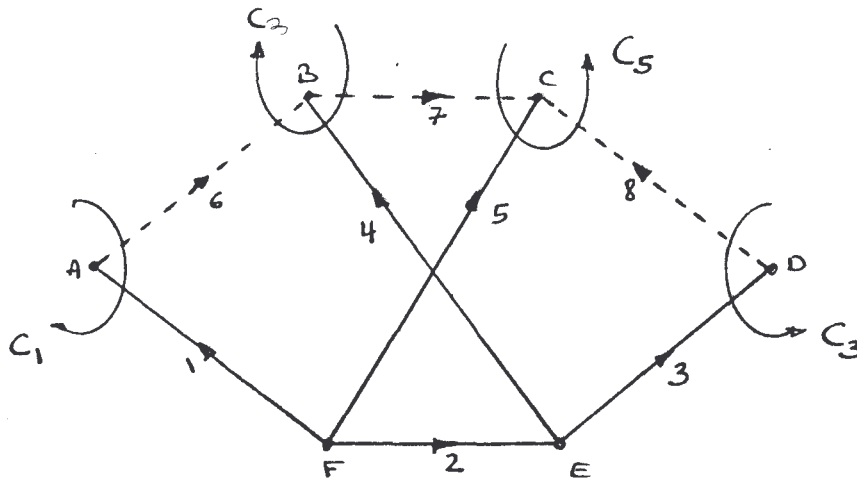
$$Q_f = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

CONVENIO:

- $Q_{kj} = 1$ cuando r_j pertenece a C_k y tiene la misma orientación.
- $Q_{kj} = -1$ cuando r_j pertenece a C_k y tiene orientación opuesta.
- $Q_{kj} = 0$ cuando r_j no pertenece a C_k .

Se puede observar, dado que el rango de Q_f es N , que tiene una matriz $N \times N$ no singular (submatriz unitaria). En el ejemplo se tiene una submatriz 5×5 unitaria.

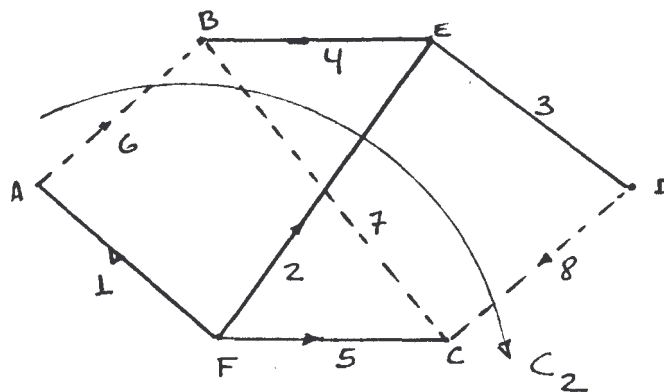
EJEMPLO



Los conjuntos de corte fundamental son cinco:

- C₁ (ramas 1, 6)
- C₂ (ramas 2, 6, 7, 8)
- C₃ (ramas 3, 8)
- C₄ (ramas 4, 6, 7)
- C₅ (ramas 5, 7, 8)

Se deberá observar que no se puede dibujar el conjunto C₂ sin antes haber redibujado el grafico como en la figura siguiente.



b) LEY DE KIRCHHOFF DE CORRIENTES y [Qf]

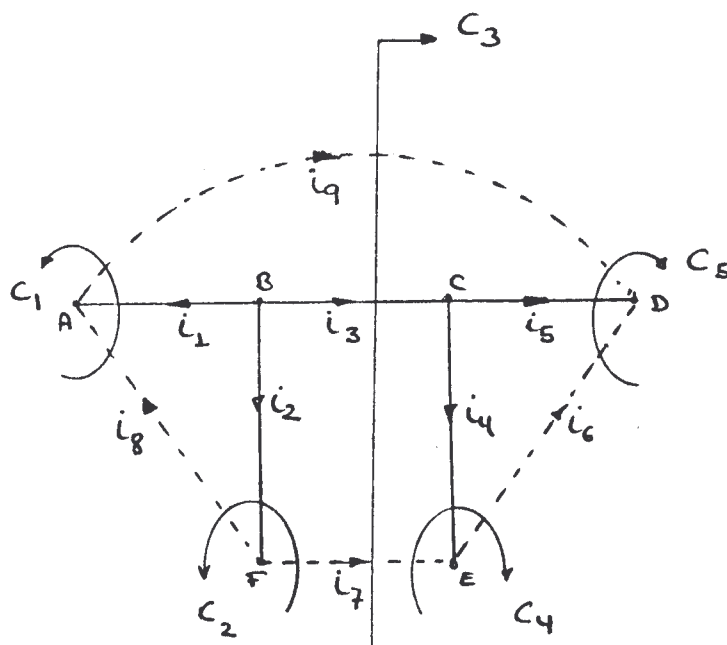
Si en el ejemplo anterior a cada rama asignamos una corriente de rama, se tendrá que el producto matricial:

$$\begin{bmatrix} Q \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} = 0$$

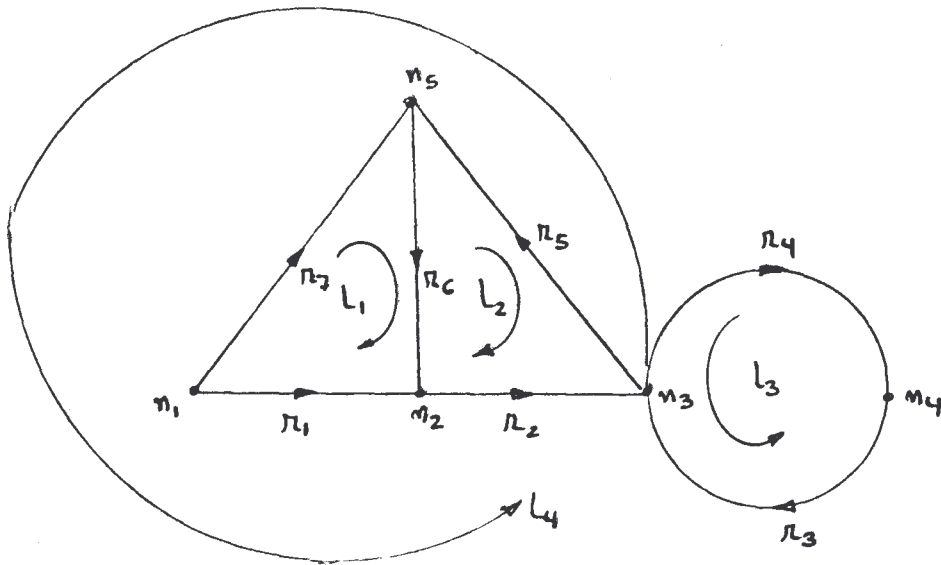
Representa la ley de Kirchhoff de corrientes.

$$\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5 \quad \pi_6 \quad \pi_7 \quad \pi_8 \quad \pi_9$



3.4. MATRIZ DE LAZOS AUMENTADA [Ba]

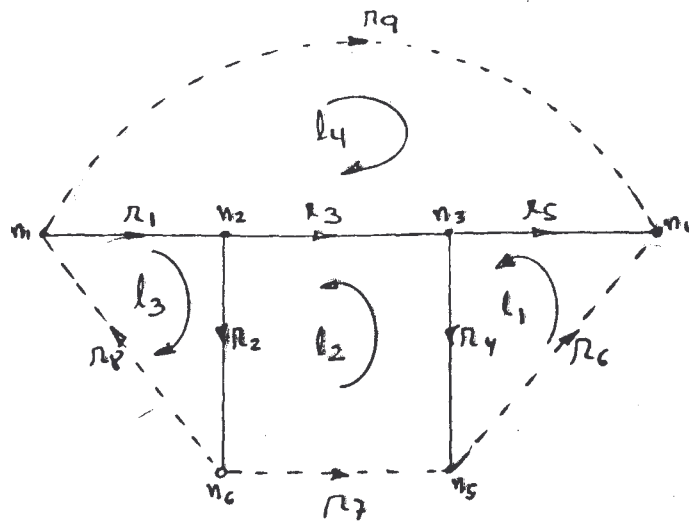


CONVENIO:

- $b_{kj} = 1$ cuando la rama r_j está contenida en el lazo L_k y tiene la misma orientación.
- $b_{kj} = -1$ cuando la rama r_j está contenida en el lazo L_k y tiene orientación opuesta.
- $b_{kj} = 0$ cuando la rama r_j no pertenece al lazo L_k .

$$\begin{bmatrix} B \\ a \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) MATRIZ DE LAZOS FUNDAMENTALES [B_f]+



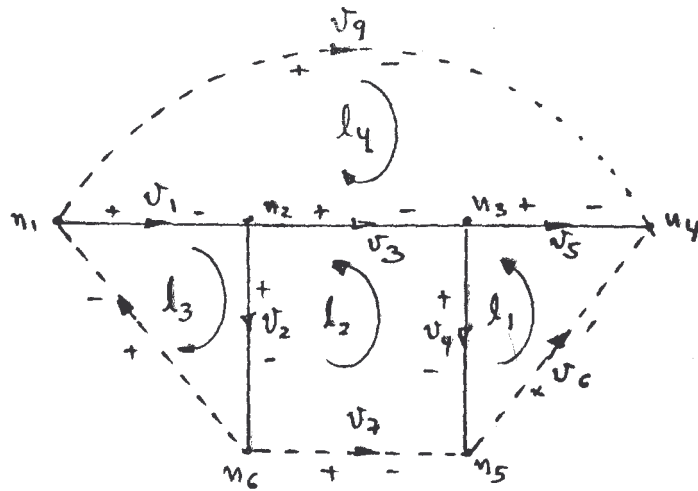
Así la matriz de lazos fundamentales [B_f] de un grafico orientado G que tiene (N+1) nodos y R ramas correspondientes a un árbol T es una matriz (R-N) x R.

$$\begin{matrix}
 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 \\
 \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

DEFINICION:

Se considera un lazo fundamental aquel camino cerrado que posee una rama de enlace a la vez y cualquier número de ramas de árbol.

b) LEY DE VOLTAJE DE KIRCHHOFF [Bf]



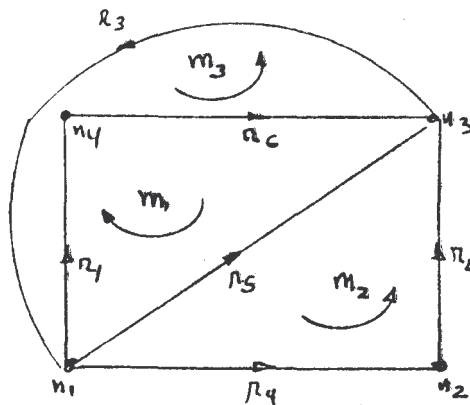
Si en el ejemplo anterior a cada rama asignamos un voltaje de rama se tendrá que el producto matricial

$$[B]_f [v]_r = 0$$

Representa la ley de voltaje de Kirchhoff

$$\begin{matrix}
 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6 \\
 v_7 \\
 v_8 \\
 v_9
 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

3.5 MATRIZ DE MALLAS [M]



[M] se denomina matriz de mallas del gráfico considerado y es una matriz $(R - N) \times R$

$$[M] = [m_{kj}]$$

donde: $m_{kj} = 1$ cuando b_j pertenece a la malla m_k y coincide con su orientación.

$= -1$ cuando b_j pertenece a la malla m_k y tiene orientación opuesta.

$= 0$ cuando b_j no pertenece a la malla m_k .

El rango de la matriz de mallas de un gráfico planar de $(N + 1)$ nodos y R ramas es $(R - N)$

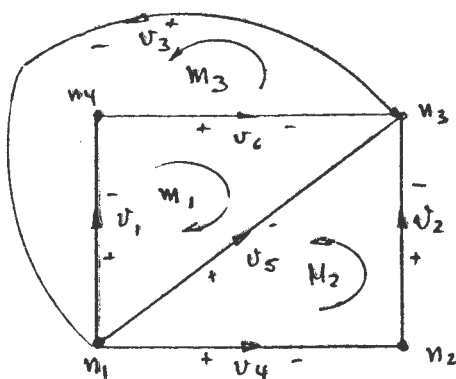
$$[M] = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

a) LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF y [M]

Si en el ejemplo anterior a cada rama le asignamos un voltaje de rama, se tendrá que el producto matricial:

$$[M] [v] = 0$$

Representa la ley de voltaje de Kirchhoff.



$$\begin{matrix}
 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\
 \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

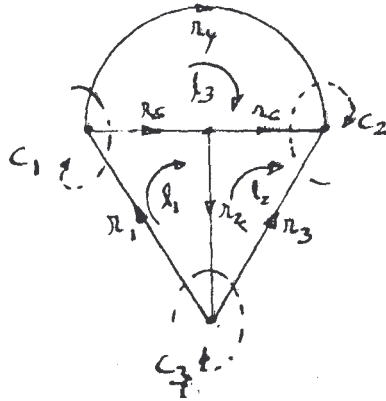
3.6 CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Las condiciones de ortogonalidad son las siguientes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix}^T &= 0 & \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ f \end{bmatrix}^T &= 0 \\ \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix}^T &= 0 & \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}^T &= 0 \end{aligned}$$

Donde el superíndice T, representa la traspuesta.

Consideremos el gráfico G tomando el nodo n_4 como referencia.



La matriz de incidencia $[A]$ se puede escribir.

$$[A] = \begin{matrix} & & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Luego escogeremos un árbol T constituido por las ramas r_2, r_5 y r_6 ; los lazos fundamentales serán l_1, l_2, l_3 .

La matriz de lazos –fundamental será:

$$[B_f] = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se demostrará que:

$$[A_f] [B_f]^T = 0$$

En efecto:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz [Qf] puede escribirse considerando los conjuntos de corte fundamentales correspondientes al árbol que escogido anteriormente.

$$[Q_f] = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Con lo que se demuestra que

$$[Q_f] [B_f]^T = 0$$

Así para el ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7 RELACIONES ENTRE VOLTAJE DE RAMA Y VOLTAJES DE NODOS

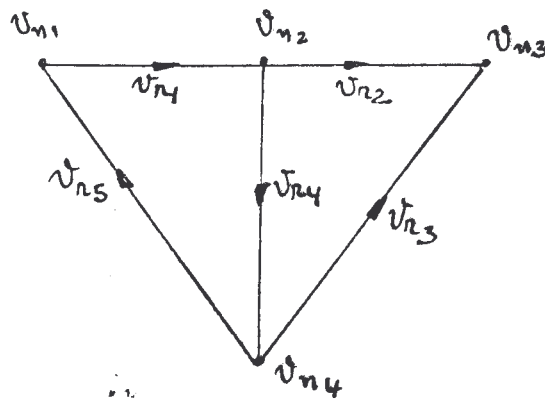
Considérese una red que tiene $(N + 1)$ nodos y R ramas. Si referimos los voltajes a uno de referencia la notación será.

$$v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nN}, v_{nN+1}$$

Y los voltajes de las ramas serán

$$v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rR}$$

Luego cada voltaje de rama v_{rj} puede escribirse en función de dos voltajes de nodos. Por ejemplo:



Del grafico se puede escribir:

$$\begin{array}{rcl} v_{r1} & = & v_{n1} - v_{n4} \\ v_{r2} & = & v_{n2} - v_{n4} \\ v_{r3} & = & v_{n3} - v_{n4} \\ v_{r4} & = & v_{n1} - v_{n2} \\ v_{r5} & = & v_{n2} - v_{n1} \end{array}$$

En general se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} v \\ r_1 \\ v \\ r_2 \\ \vdots \\ v \\ r_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & \dots & P \\ 11 & \dots & 1(N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ P & \dots & P \\ r_1 & \dots & R(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ n_1 \\ v \\ n_2 \\ \vdots \\ v \\ n_{N+1} \end{bmatrix}$$

Donde P_{jk} se define como:

- $P_{jk} = 1$ cuando r_j es incidente al nodo n_k y se aleja de él.
- $P_{jk} = -1$ cuando r_j es incidente al nodo n_k y se acerca a él.
- $P_{jk} = 0$ cuando r_j no es incidente al nodo n_k .

Sea:

$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} v_{r_1} & v_{r_2} & \dots & v_{r_R} \end{bmatrix}^T$$

$$Y \quad \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} v_{n_1} & v_{n_2} & \dots & v_{n_{N+1}} \end{bmatrix}^T$$

Entonces se podrá escribir que:

$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix}$$

Donde $[P]$ es una matriz $R \times (N + 1)$

Comparando P_{jk} con a_{kj} se reconoce de inmediato que:

$$P_{jk} = a_{kj}$$

De allí que la matriz $[P]$ es la transpuesta de la matriz de incidencia aumentada $[Aa]$ es decir:

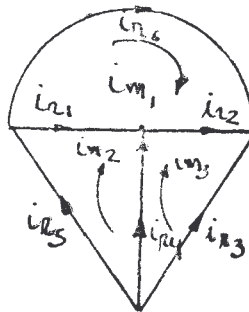
$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} = [Aa]^T \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix}$$

3.8 RELACION ENTRE LAS CORRIENTES DE RAMA Y CORRIENTES DE MALLA

Considérese una red planar con $(N + 1)$ nodos y R ramas. Existe $(R - N)$ mallas en esta red. Sean estas mallas:

$$m_1, m_2, \dots, m_{R-N}$$

Y asignemos una dirección arbitraria a cada malla, y designemos una corriente ficticia i_{mk} a cada malla; estas corrientes ficticias de malla circulan en las ramas correspondientes a dicha malla y se asume que pueden tener orientación coincidente a ella.



Así de la figura anterior podemos escribir:

$$i_{r1} = i_{m2} - i_{m1}$$

$$i_{r2} = i_{m3} - i_{m1}$$

$$i_{r3} = -i_{m3}$$

$$i_{r4} = i_{m3} - i_{m2}$$

$$i_{r5} = i_{m2}$$

$$i_{r6} = i_{m1}$$

En general podremos escribir:

$$\begin{bmatrix} i_{r_1} \\ \vdots \\ i_{r_2} \\ \vdots \\ i_{r_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1(R-N)} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{R1} & \dots & P_{R(R-N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m_1} \\ \vdots \\ i_{m_2} \\ \vdots \\ i_{m(R-N)} \end{bmatrix}$$

Donde P_{jk} se define por:

- $P_{jk} = 1$ cuando r_j pertenece a m_k y tiene su misma orientación.
- $P_{jk} = -1$ cuando r_j pertenece a m_k y tiene orientación opuesta.
- $P_{jk} = 0$ cuando r_j no pertenece a m_k .

Y as llamamos:

$$\begin{aligned}
 [i_r] &= [i_{r_1}, i_{r_2}, i_{r_3}, \dots, i_{r_R}]^T \\
 [i_m] &= [i_{m_1}, i_{m_2}, i_{m_3}, \dots, i_{m_{R-N}}]^T
 \end{aligned}$$

Y $[P] = [P_{jk}]$

Entonces:

$$[i_r] = [P] [i_m]$$

Comparando P_{jk} y m_{jk} tendremos que:

$$P_{jk} = m_{kj}$$

luego podremos escribir que:

$$[i_r] = [M]^T [i_m]$$

Asignando corrientes ficticias a cada lazo al igual que en el caso de las corrientes de malla.

$$\text{Si } [i_r] = [i_1, i_2, \dots, i_{(R-N)}]^T$$

De manera similar al caso de redes planares se puede demostrar que:

$$[i_r] = [B_f]^T [i_f]$$

3.9 IMPLICACION DEL TEOREMA DE TELLEGEN

Consideremos una red que tiene $(N + 1)$ nodos y R ramas Sea:

$$[v_r] = [v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rR}]^T$$

$$[i_r] = [i_{r1}, i_{r2}, \dots, i_{rR}]^T$$

Donde v_{rk} y i_{rk} son los voltajes y las corrientes de rama.

Luego:

$$[v_r]^T [i_r] = 0$$

$$\text{o} \quad \sum_{k=1}^R v_{rk} i_{rk} = 0$$

Para su demostración transpondremos ambos miembros de la ecuación que relaciona los voltajes de rama con los de nodos.

$$[v_r]^T = [v_n]^T [A_a]$$

NOTA: Reglas de transposición

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A B)^T = B^T A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Postmultiplicando por $[i_r]$ se tiene.

$$[v_r]^T [i_r] = [v_n]^T [A] [i_r]$$

Pero se sabe que:

$$[A] [i_r] = 0$$

Luego se puede escribir:

$$[v_r]^T [i_r] = 0$$

Que es la formulación matricial del Teorema de Tellegen cuyo significado físico es la conservación de la potencia.

A continuación consideremos dos redes cuyos gráficos son iguales.

Designamos sus voltajes y corrientes de ramas por:

$$\begin{aligned} v_r, i_r & \text{ para la red 1} \\ \hat{v}_r, \hat{i}_r & \text{ para la red 2} \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} [v_r]^T [\hat{i}_r] &= 0 \\ [\hat{v}_r]^T [i_r] &= 0 \end{aligned}$$

Para su demostración deberemos observar igual que antes que:

$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix}$$

$$\text{ó} \quad \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}$$

Donde $[A]$ es la matriz de incidencia de la red 1.

Postmultiplicando ambos lados por $\begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix}$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix}$$

Por hipótesis del Teorema podemos asumir que los dos gráficos de las redes son idénticos es decir:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}$$

Tendremos que:

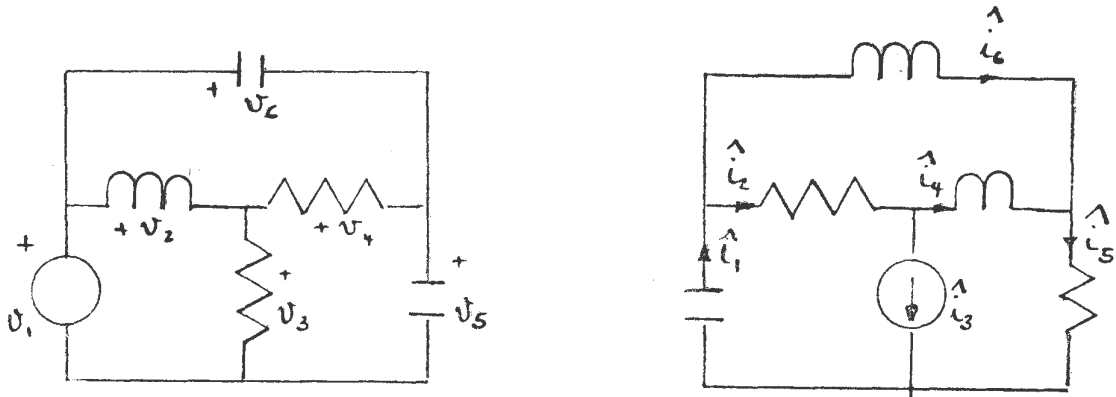
$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix} = 0$$

Luego la ecuación queda:

$$\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{i} \\ r \end{bmatrix} = 0$$

La segunda parte se puede demostrar en forma análoga.

Nótese que la conclusión establecida, no pueden seguirse interpretando como una conservación de la potencia; es simplemente una relación matemática que existe entre los voltajes de rama de uno de los circuitos y las corrientes de rama del otro circuito que tiene igual topología



El teorema implica que:

$$v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + v_3 \hat{i}_3 + v_4 \hat{i}_4 + v_5 \hat{i}_5 + v_6 \hat{i}_6 = 0$$

Independientemente de la naturaleza de los elementos que constituyen cada rama

3 CIRCUITO EQUIVALENTES DE ELEMENTOS REACTIVOS CON CONDICIONES INICIALES

En los puntos anteriores se introdujo un procedimiento sistemático para obtener N ecuaciones lineales independientes de la Ley de corrientes de Kirchhoff y (R — N) ecuaciones linealmente independientes de la Ley de voltaje de Kirchhoff para una red de (NI + 1) nodos y R ramas

Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} [A] \quad [i] &= 0 \\ & \quad r \\ [B] \quad [v] &= 0 \\ & \quad f \quad r \end{aligned}$$

Que en total proveen R ecuaciones de las 2R incógnitas (R voltajes de rama y R corrientes de rama).

Solo dependen de la topología de la red y no de la naturaleza de sus elementos.

Ahora bien las relaciones voltamperimétricas de cada elemento proporcionan las R restantes ecuaciones necesarias para resolver el sistema.

Consideremos una red constituida de elementos lineales e invariantes en el tiempo y por fuentes independientes. Para mayor simplicidad, los voltajes iniciales de los capacitores se pueden considerar como fuentes de voltajes en serie con los capacitores y las corrientes iniciales como fuentes de corriente en paralelo con los inductores.

a) INDUCTORES

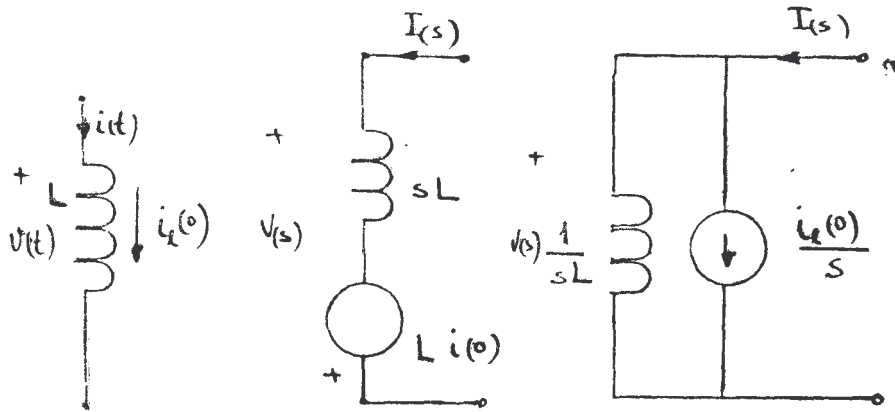
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Se transforman en:

$$V(s) = L [s I(s) - i_L(0)]$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i_L(0)}{s}$$

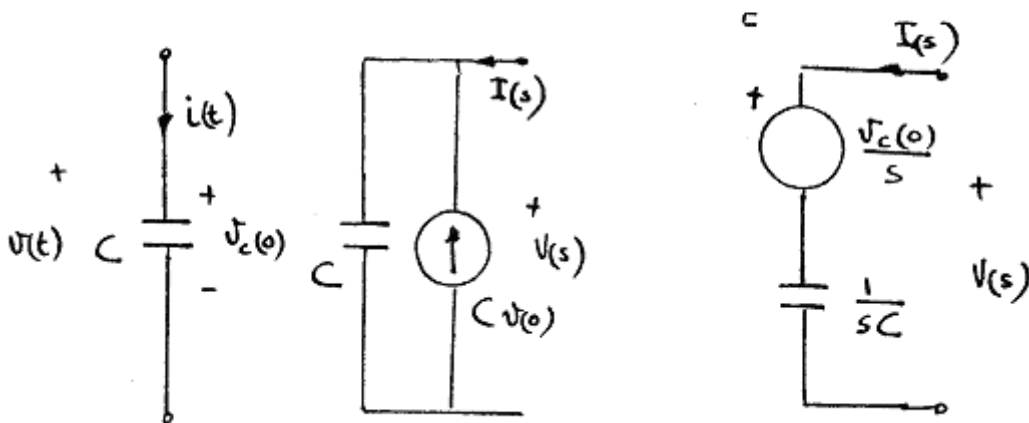
Circuitalmente:



b) CAPACITORES

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$I(s) = C [s V(s) - v_C(0)]$$



c) INDUCTANCIA MUTUA:

Las ecuaciones en el tiempo:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

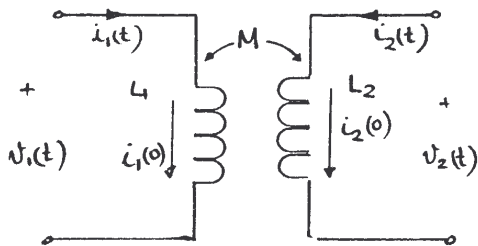
$$v_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Las ecuaciones en frecuencia:

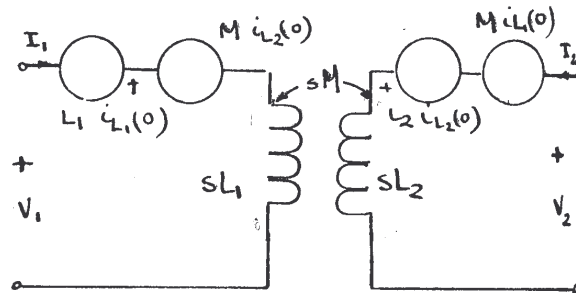
$$V_1(s) = L_1 [s I_1(s) - i_{1(0)}] + M [s I_2(s) - i_{2(0)}]$$

$$V_2(s) = -M [s I_1(s) - i_{1(0)}] + L_2 [s I_2(s) - i_{2(0)}]$$

Circuito en el tiempo:



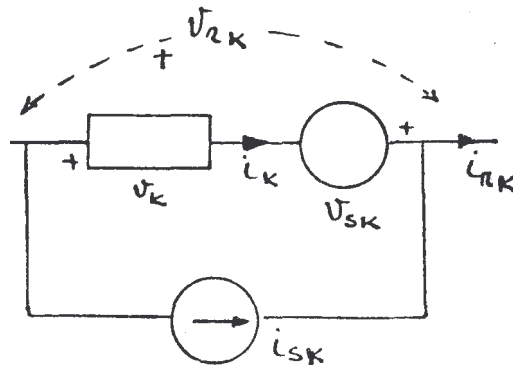
CIRCUITO EN FRECUENCIA



3.11 RAMA GENERALIZADA

Analizaremos la rama r_k en forma generalizada donde podremos asumir que las condiciones iniciales están incluidas en las fuentes independientes.

Luego se tiene que:



$$i_{rk} = i_k + i_{sk} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, R$$

Donde i_k es la corriente del elemento i_{sk} es la fuente de corriente asociada al elemento.

Y el voltaje de la rama v_{rk} será la suma algebraica de las caídas de tensión a través de la fuente v_{sk} y d.d.p. del elemento v_k .

$$v_{rk} = v_k - v_{sk} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, R$$

En forma más concisa, hagamos:

$$\begin{bmatrix} i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{r1} & i_{r2} & \dots & i_{rR} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} & i_{s2} & \dots & i_{sR} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_R \end{bmatrix}^T$$

Entonces tendremos:

$$\begin{bmatrix} i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_s \end{bmatrix}$$

Donde $\begin{bmatrix} i_r \end{bmatrix}$ es la matriz columna de corrientes de rama.

$\begin{bmatrix} i_s \end{bmatrix}$ es la matriz columna de corrientes de elementos de las ramas.

$\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$ es la matriz columna de las fuentes de corrientes de rama.

Similarmente

$$\begin{bmatrix} v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rR} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} & v_{s2} & \dots & v_{sR} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_R \end{bmatrix}^T$$

Entonces

$$[v_r] = [v] - [v_s]$$

Donde:

$[v_r]$ es matriz de columna de las tensiones de ramas.

$[v_s]$ es la matriz de columna de las fuentes de tensión de la rama.

$[V]$ es la matriz de columna de voltajes de los elementos de la rama.

La relación entre los voltajes del elemento v_k y la corriente i_k será:

a) Si la rama r_k es un resistor:

$$v_k = R_k i_k$$

b) Si la rama r_k es un capacitor:

$$v_k = \frac{1}{s C_k} I_k = \frac{1}{s} S_{kj} I_j$$

c) Si la rama r_k es un inductor:

$$v_k = s L_k I_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^R s M_{kj} I_j$$

Donde V_k e I_k son las transformadas de Laplace

3. 12 METODO DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA PRIMITIVA

En forma general es:

$$[V] = [Z] [I]$$

Donde [Z] es una matriz cuadrática, llamada matriz de impedancia primitiva de la red definida por:

$$[Z] = [R] + \frac{1}{s} [S] + s [L]$$

[R] y [S], son matrices diagonales y [L] es una matriz que tienen los valores de las autoinductancias en la diagonal principal y fuera de ella las inductancias mutuas.

Con estas relaciones podemos definir la RVA (Relaciones Voltamperimétricas) de rama como:

$$[V]_r = [Z] [I]_R - [Z] [I]_s - [V]_s$$

o equivalente:

$$[V]_r = [Z] [I]_R - \{ [\hat{V}]_s + [V]_s \}$$

Donde:

$$[\hat{V}]_s = [Z] [I]_s$$

Que representa la transformación de las fuentes de corriente en Fuentes de tensión.

Sustituyendo tendremos:

$$\begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [S] \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior representa el conjunto de R — N ecuaciones linealmente independientes, combinando esta otra que nos da N ecuaciones con lo que quedaría:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} \\ \hline [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} \\ \hline [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [S] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \\ \hline [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [S] \end{bmatrix}$$

Donde la línea punteada indica la partición de la matriz.

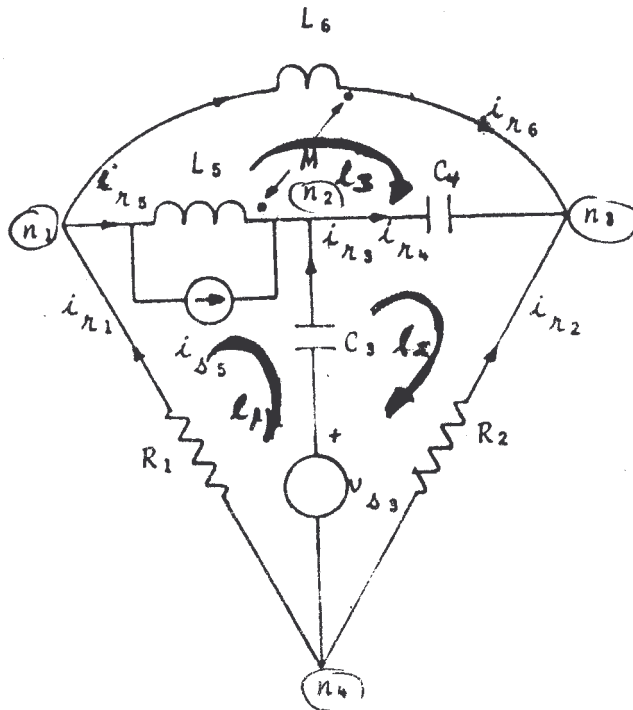
Si el coeficiente de $\begin{bmatrix} [I] \\ [R] \end{bmatrix}$ no es singular tendremos en definitiva:

$$\begin{bmatrix} [I] \\ [R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} \\ \hline [A] \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ [I] \end{bmatrix} \\ \hline [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [S] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \\ \hline [A] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] \\ f \end{bmatrix} \\ \hline [0] \end{bmatrix}$$

EJEMPLO1. Considerando un circuito. El problema consiste en hallar el conjunto de las ecuaciones linealmente independiente que resuelven todos los voltajes y corrientes de rama.

SOLUCION: Tornando n_4 como referencia, la matriz de incidencia [A]

	R 1	R 2	C 3	C 4	L 5	L 6
n_1	-1	0	0	0	1	1
n_2	0	0	-1	1	-1	0
n_3	0	-1	0	-1	0	-1



Si ahora elegimos el árbol T constituido por las ramas C_3 , C_4 y L_5 y asumimos sus lazos fundamentales correspondientes que son l_1, l_2, l_3 , orientado en sentido horario, la matriz de lazos fundamentales $[B_f]$ será:

$$[B_f] = \begin{matrix} & & R & R & C & C & L & L \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de fuente de corriente será:

$$[I_s] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad i_{s5} \quad 0]^T$$

y la matriz de fuentes de voltaje es:

$$[V_s] = [0 \quad 0 \quad v_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$|Z| = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s C_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 & sM \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sM & sL_6 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$|B_f| \quad |Z| = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & -\frac{1}{s C_3} & 0 & sL_5 & sM \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{s C_3} & \frac{1}{s C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s C_4} & s(M-L_5) & s(L_6-M) \end{bmatrix}$$

Esta última relación aumentada en la matriz |A|

Resulta

$$\left[\begin{array}{c} |B_f| \quad |Z| \\ \hline |A| \end{array} \right] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & -\frac{1}{s C_3} & 0 & sL_5 & sM \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{s C_3} & \frac{1}{s C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s C_4} & s(M-L_5) & s(L_6-M) \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz sólo se puede invertir si se conoce a que frecuencia compleja S esta trabajando la red.

3.13 METODO DE LA MATRIZ ADMITANCIA PRIMITIVA

Este es un método alternativo para resolver el sistema en términos de la matriz [Y] admitancia primitiva.

Recordando que la relación:

$$[I] = [Y] [V]$$

Donde [Y] es una matriz cuadrada definida por:

$$[Y] = [G] + s [C] + \frac{1}{s} [r]$$

E igual que antes podemos definir la RVA de la rama generalizada en términos de admitancia.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

Que resulta.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior representa N ecuaciones lineales independientes con R incógnitas que junto a las otras nos da:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_S \end{bmatrix}$$

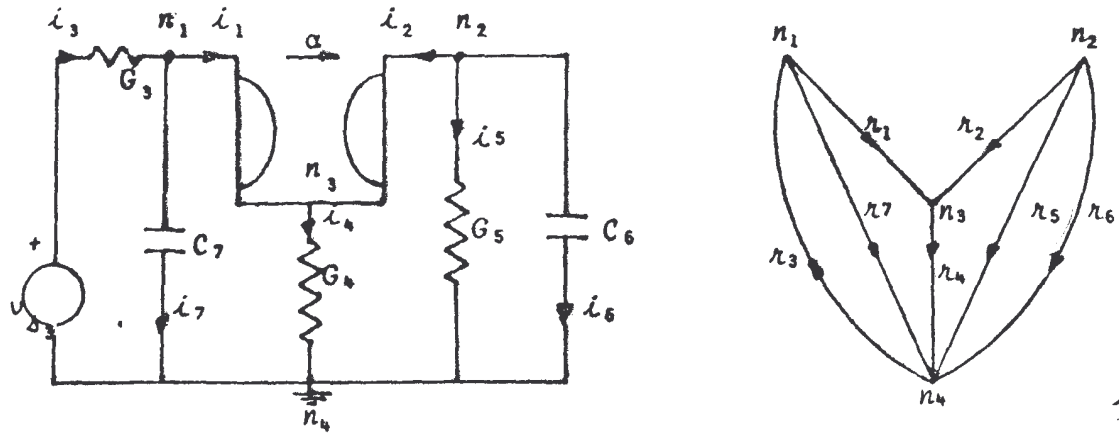
o equivalente:

$$\begin{bmatrix} V \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [Y] \\ \text{---} & \text{---} \\ [B] \\ f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [A] & [Y] \\ \text{---} & \text{---} \\ [O] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [Y] \\ \text{---} & \text{---} \\ [B_p] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [A] \\ \text{---} \\ [O] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}$$

Resumiendo si se da la matriz de admitancia primitiva [Y]; la ecuación se puede resolver y obtener los voltajes de rama y resolviendo luego de la tercera ecuación se pueden sacar los valores de las corrientes de rama

EJEMPLO:

Considérese el circuito con girador y su gráfico correspondiente.



Para hacer uso de la ecuación debemos previamente calcular:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} I \\ s \end{bmatrix}$$

También se sabe que para el girador se cumple que:

$$v_1 = -a_2 i_2 \quad \text{y} \quad v_2 = a_1 i_1$$

Tomando como referencia n_4 ; la matriz A se escribe así:

$$|A| = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para obtener la matriz de lazos fundamentales se elegirá un árbol T constituido por las ramas r_1, r_2 y r_3 ; y tomando la orientación de los lazos fundamentales igual a la de los enlaces constituidos por las ramas r_4, r_5, r_6 y r_7 tendremos la siguiente matriz.

[b]	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta z}{z_{12}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{12}}$	$\frac{-1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{-\Delta g}{g_{12}}$	$\frac{-g_{22}}{g_{12}}$	D	B
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$\frac{-\Delta y}{y_{12}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta h}{h_{12}}$	$\frac{-g_{11}}{g_{12}}$	$\frac{-1}{g_{12}}$	C	A

$$|B_f| = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz $|Y|$ es:

$$|Y| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC_7 \end{bmatrix}$$

$$|V_s| = |0 \quad 0 \quad V_{s_3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0|^T$$

$$|I_s| = 0$$

Para este caso particular resulta la ec. igual a:

$$|V_r| = - \left[\frac{|A| \quad |Y|}{|B_f|} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} |A| \quad |Y| \\ \hline \hline 0 \end{array} \right] |V_s|$$

O sea

$$|V_r| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} & -G_3 & 0 & 0 & 0 & sC_7 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & G_5 & sC_6 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -G_3 V_{s_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los voltajes de rama se determinan invirtiendo esta matriz y realizando la multiplicación y finalmente tomando la transformada inversa de Laplace.

3.14 ANALISIS POR NODOS

Si una red posee $(N + 1)$ nodos y R ramas y el numero de nodos es considerablemente menor que el numero de ramas, el análisis por nodos es mucho mas eficiente que cualquier otro método.

En el análisis nodal se hace uso de los voltajes de nodo como variable auxiliares y observar así un grupo de N ecuaciones linealmente independientes con N incógnitas; en contraste con las $2R$ ecuaciones que se determinaron anteriormente.

Llamemos voltajes de nodos los voltajes de los nodos de red referido a uno de ellos y tengamos el vector de voltajes de nodo $[v_n]$.

Si hemos referido al nodo $(N + 1)$ será:

$$[V_n] = [v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots, v_n]^T$$

Los voltajes de rama sera igual a:

$$[V_R] = [A]^T [V_n]$$

Pero:

$$[V_R] = [V] - [V_s]$$

Como lo que queda en:

$$[V] - [V_s] = [A]^T [V_n]$$

Y que

$$[I]_r = [I] + [I]_s$$

Luego:

$$[A] [I] = - [A] [I]_s$$

Pero [I] puede ser expresado en terminos la matriz [Y] o sea:

$$[A] [Y] [V] = - [A] [I]_s$$

Sustituyendo en esta última ecuación tendremos:

$$[A] [Y] [A]^T [V]_n = - [A] [Y] [V]_s - [A] [I]_s$$

O en forma equivalente:

$$[Y]_N [V]_N = - [A] [Y] [V]_s - [A] [I]_s$$

Donde:

$$[Y]_N \triangleq [A] [Y] [A]^T$$

Es una matriz cuadrada N x N llamada Matriz admitancia de nodos.

En la ecuación equivalente podemos multiplicar ambos miembros

por $[Y]_N^{-1}$ si esta existiera y sería:

$$[V]_N = - [Y]_N^{-1} [A] [Y] [V]_s - [Y]_N^{-1} [A] [I]_s$$

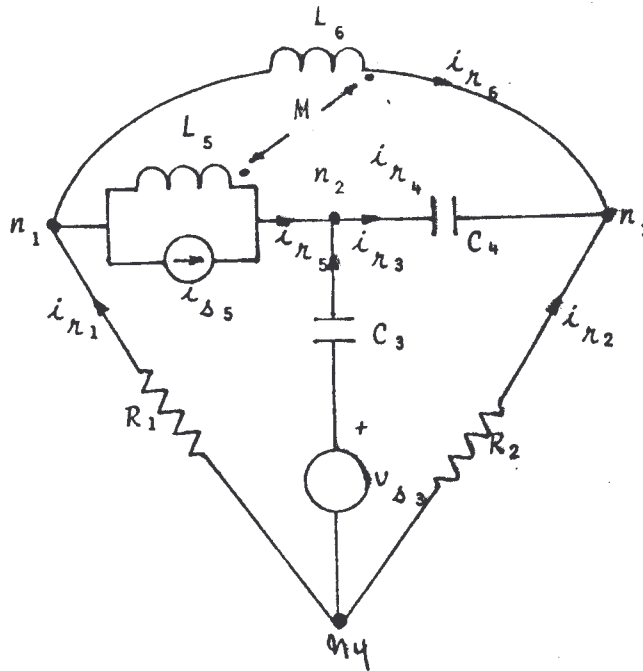
Esta ecuación representa un conjunto N de ecuaciones linealmente

independiente de V (Voltajes de nodos).

N

Consi dereaos el ej en o anterior.

EJEMPLO:



los voltajes de nodos serian si se toma el n de referencia:

4

$$v_{n1}, v_{n2}, \text{ y } v_{n3}$$

Para esta red la matriz de conductancias E_{6J} es de 6×6 donde son nulos todos sus elementos con e; <cepcion del primer y segundo elemento de la diagonal principal ($1/R_1$ y $1/R_2$).

2

1

La matriz de capacitancias [C] también es de 6 x 6 donde son nulos todos sus elementos con excepción de tercero y cuarto elementos de la diagonal principal (C₃ y C₄). La matriz [] rígidamente puede obtenerse invirtiendo la submatriz de inductancias [L].

$$[sL] = \begin{bmatrix} sL_5 & sM \\ sM & sL_6 \end{bmatrix}$$

Así la matriz admitancia primitiva [Y] será igual a:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sC_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sC_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_5}{s\Delta} & \frac{M}{s\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{s\Delta} & \frac{L_6}{s\Delta} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\Delta = L_5 L_6 - M^2$$

(Para la inversion de esta matriz ver el apendice A)

La matriz de incidencia $|A|$ ya fue hallada en el ejemplo anterior y utilizando la definición de la matriz admitancia de nodos será:

$$|Y_N| = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{L_5 + L_6 - 2M}{s\Delta} & \frac{M - L_6}{s\Delta} & \frac{M - L_5}{s\Delta} \\ \frac{M - L_6}{s\Delta} & s(C_3 + C_4) + \frac{L_6}{s\Delta} & -sC_4 - \frac{M}{s\Delta} \\ \frac{M - L_5}{s\Delta} & -sC_4 - \frac{M}{s\Delta} & \frac{1}{R_2} + sC_4 + \frac{L_5}{s\Delta} \end{bmatrix}$$

También se

$$|Y_N| |V_N| = - |A| |Y| |V_S| - |A| |I_S| = \begin{bmatrix} -i_{s_5} \\ -sC_3 v_{s_3} + i_{s_5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente tendremos que:

$$\begin{bmatrix} V_{n_1} \\ V_{n_2} \\ V_{n_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{L_5 + L_6 - 2M}{s\Delta} & \frac{M - L_6}{s\Delta} & \frac{M - L_5}{s\Delta} \\ \frac{M - L_6}{s\Delta} & s(C_3 + C_4) + \frac{L_6}{s\Delta} & -sC_4 - \frac{M}{s\Delta} \\ \frac{M - L_5}{s\Delta} & -sC_4 - \frac{M}{s\Delta} & \frac{1}{R_2} + sC_4 + \frac{L_5}{s\Delta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -i_{s_5} \\ -sC_3 v_{s_3} + i_{s_5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.15 ANALISIS POR LAZOS

En esta selección se introducirá una discusión detallada del análisis por lazos el cual no es mas que una generalización del análisis por mallas y que puede utilizarse para el estudio del comportamiento tanto de redes no planares como planares.

Este método es considerablemente útil cuando el número de lazos fundamentales es notablemente menor que el número de nodos debido a que el número de ecuaciones simultaneas que describen la red es el mismo que el número de lazos fundamentales.

Consideremos una red con $(N + 1)$ nodos y (R) ramas; escogiendo un árbol arbitrario T y designado con $i_1, i_2, \dots, i_{(R-N)}$; los lazos fundamentales y asignados una dirección arbitraria a cada lazo tendremos:

$$[i_1] = [i_{11}, i_{12}, i_{13}, \dots, i_{1(R-N)}]^T$$

Y según se vio antes:

$$[i_R] = [B_f]^T [I_1]$$

$$[i_r] = [i_r] - [i_s]$$

Tendremos que:

$$[i] = [B_f]^T [i_l] - [i_s]$$

Así mismo se sabe que:

$$[v_r] = [V] - [v_s]$$

$$\text{y } [B_f] [v_r] = 0$$

Donde:

$$[B_f] [V] = [B_f] [v_s]$$

Pero:

$$[V] = [Z] [i]$$

Luego:

$$[B_f] [Z] [i] = [B_f] [v_s]$$

Reemplazando [i] en la anterior ecuación tendremos:

$$[B_f] [Z] [B_f]^T [i_l] = [B_f] [Z] [i_s] + [B_f] [v_s]$$

Para simplificar la notación definiremos la matriz [Z_l] de impedancias de lazos como una matriz cuadrada de (R - N) x (R - N) como:

$$[Z_l] = [B_f] [Z] [B_f]^T$$

Quedando la anterior ecuación de la forma

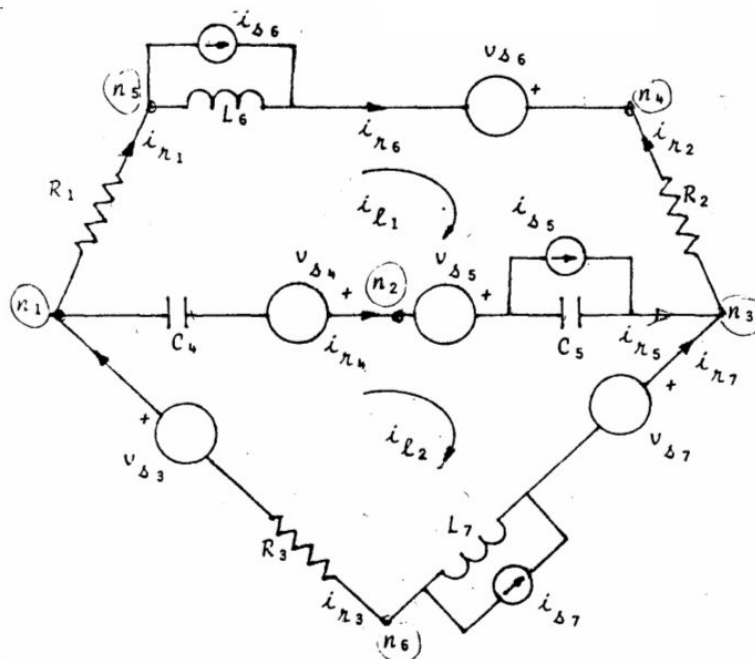
$$[Z_l] [i_l] = [B_f] [Z] [i_s] + [B_f] [v_s]$$

Que representa un conjunto de $(R - NI)$ ecuaciones independientes que pueden resolver para obtener las corrientes de lazos.

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ s \end{bmatrix}$$

Para obtener $[V_r]$ se utiliza la anterior ecuación.

EJEMPLO: En el circuito de la figura utilizar el análisis de lazos para obtener las corrientes: i_{l1} e i_{l2}



SOLUCION:

Para esta red $N = 5$, $R = 1$, luego $R - N = 2$; entonces el análisis por lazos es el método mas simple para esta red.

Escojamos un arbol T formado por las ramas r_6, r_1, r_4, r_5, r_6 , siendo los enlaces correspondientes las ramas r_2 y r_7

Existen dos lazos fundamentales l_1 y l_2

Deberá notarse que la red es planar y que puede utilizarse indistintamente el concepto de lazo o de malla.

Así tendremos:

$$[i_1] = \begin{bmatrix} i_1 \\ 1 \\ i_1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	
$[B_f]$	l_1	1	-1	0	-1	-1	1	0
	l_2	0	0	1	1	1	0	-1

Así mismo:

$$[i_s] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad i_s \quad i_s \quad i_s]^T$$

$$[v_s] = [0 \quad 0 \quad v_s \quad v_s \quad v_s \quad v_s \quad v_s]^T$$

La matriz de impedancias primitivas es una matriz diagonal por no existir inductancias mutuas en la red.

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & & & \\ & R_2 & & & & & & \\ & & R_3 & & & & & \\ & & & \frac{1}{sC_4} & & & & \\ & & & & \frac{1}{sC_5} & & & \\ & & & & & sL_6 & & \\ & & & & & & sL_7 & \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_4} + \frac{1}{sC_5} + sL_6 & -\frac{1}{sC_4} & -\frac{1}{sC_5} \\ -\frac{1}{sC_4} & -\frac{1}{sC_5} & R_3 + \frac{1}{sC_4} + \frac{1}{sC_5} + sL_7 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$= \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_4} + \frac{1}{sC_5} + sL_6 & -\frac{1}{sC_4} & -\frac{1}{sC_5} + sL_5 \\ -\frac{1}{sC_4} & -\frac{1}{sC_5} & R_3 + \frac{1}{sC_4} + \frac{1}{sC_5} + sL_7 \end{bmatrix}^{-1}$$

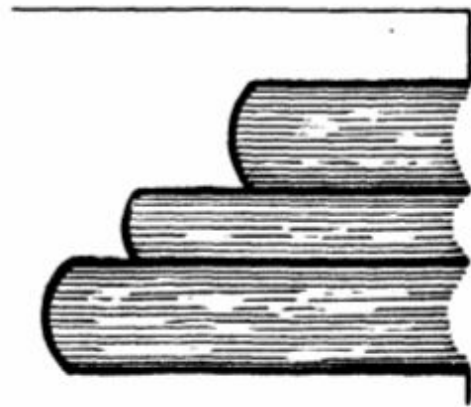
$$\left[\begin{array}{c} s i_{s6} - \frac{i_{s6}}{sC_6} - v_{s4} + v_{s5} + v_{s6} \\ -s i_{s6} - \frac{i_{s5}}{sC_6} + v_{s3} + v_{s4} + v_{s5} - v_{s7} \end{array} \right]$$

Tomando transformada da Laplace a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene

$$i_{11}(t) = e i_{12}(t)$$



B
I
B
L
I
O
G
R
A
F
I
A



Electric Networks : Functions, Filters Analysis
Rouston and Bordogna
Cap. 4 Pag. 206

Network Analysis
Van Valkenburg
3ª Edición Cap. 11 Pág. 325

Circuitos Eléctricos
Gonzalez Delgado Miguel
Cap. 4 y 5 Pág 174

Analysis of linear networks and systems
Chan, Chan and Chan
Cap. 6 Pág. 201

Basic Circuit Theory with digital computations
Huelsman
Cap. 9 Pág. 702

Electric Networks
Hugh Skilling
Cap. 12 Pág. 274

Basic Circuit Theory
Desoer and Kuh
Cap. 17 Pág. 712

Analysis of linear networks and systems

Chan, Chan, Chan

Cap. 3, Pág. 54.

Basic Circuit Theory

Desoer and KUH

Cap. 9, 10 y 11

Fundamental of Network Analysis and Synthesis

B. Peikari

Cap. 3 y 4, Pág. 91.

Network Analysis

Jensen and Watkins

Cap. 4, Pág. 100.

Electric Network

Hugh Skilling

Cap. 8 y 9.

Electrical Network Theory

Balabanian - Bickart

Cap. 2.

Network Theory

Carlin and Giordano

Cap. 1 y 2.

A P E N D I C E

2

INVERSION POR PARTICION DE MATRICES

Sea

$$[A] = \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [D] & [E] \end{bmatrix}$$

Siendo $[B]$ $[C]$ $[D]$ y $[E]$ submatrices de $[A]$

Entonces si existen $[B]^{-1}$ y $[E]^{-1}$

Será

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} [X] & [Y] \\ [Z] & [U] \end{bmatrix}$$

Donde

$$[X] = \left([B] - [C][E]^{-1}[D] \right)^{-1}$$

$$[U] = \left([E] - [D][B]^{-1}[C] \right)^{-1}$$

$$[Y] = - [B]^{-1}[C][U]$$

$$[Z] = - [E]^{-1}[D][X]$$