Ejemplo:

Basándose en ciertos estudios una compañía a clasificado de acuerdo con la posibilidad de encontrar petróleo en tres tipos de formaciones. La compañía quiere perforar un pozo en determinado lugar al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.4 y 0.25; para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia se sabe que el petróleo está en un 40% en tipo 1, 20% en formaciones de tipo 2, y 30% en el tipo 3.

Se hace perforar el pozo, y la compañía descubre a su pesar que no había petróleo. Determinar las probabilidades de que ese lugar pertenece al tipo 3.

47

Solución

Denominando P = " Se encuentra Petróleo" y

Ti = "Formación tipo i" para i = 1,2,3

P(T1) = 0.35 P(T2) = 0.4 P(T3) = 0.25

P(P/T1) = 0.4 P(P/T2) = 0.2 P(P/T3) = 0.3

Se pide calcular P(T3/NP)

$$P(T3/NP) = \frac{P(NP/T3)*PT3}{P(NP/T1)*PT1+ P(NP/T2)*PT2 + P(NP/T3)*PT3}$$

Donde:

P(NP/T1) = 1-P(PT1) = 1-0.4 = 0.6

P(NP/T2) = 1-P(PT2) = 1-0.2 = 0.8

P(NP/T3) = 1-P(PT3) = 1-0.3 = 0.7

P(T3/NP) = 0.2482

48

VARIABLES ALEATORIAS Y FUNCIONES DE PROBABILIDAD

- Consideremos un interruptor de una línea de transmisión cuyo espacio muestral puede ser simplemente S={I funciona; I no funciona} a los que se les puede asignar un valor de 1 para el 1er caso y 0 para el segundo, (se deben asignar números a los estados de los espacios muestrales)
- Una variable aleatoria es cualquier variable cuyo valor depende del resultado de realizar un experimento aleatorio, es decir cuyo resultado no es predictible de antemano
- Se utiliza las letras X,Y,Z para designar las VA.
- Se utiliza las letras x,y,z para designar los valores posibles de las VA
- Ejemplo : si lanzo un dado la VA es X y sus posibles valores son: x=1, x=2, x=3, x=4, x=5, x=6 , cada uno con una probabilidad de 1/6

49

CLASIFICACIÓN DE LAS VA

- Si el número de posibles resultados (rango) de una VA es finito o infinito numerable y cada valor tiene una probabilidad mayor que cero la VA es discreta
- Si en cambio los posibles resultados (rango) de la VA es infinito no numerable y cada valor tiene una probabilidad igual a cero la VA es continua
- De ejemplos de ambos casos

50

Distribución o función de Probabilidad

Supongamos que X es una VA cuyo valor x es uno de sus posibles valores (X=x)

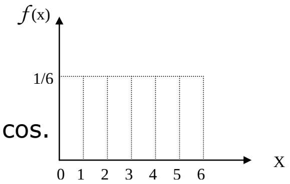
La probabilidad de que X tome el valor de x es:

$P_x(x) = P(X=x)$ donde la función de probabilidad es la representación algebraica, gráfica o tabular de todos los posibles valores de X

Ejemplo si lanzamos un dado la función de probabilidad es:

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Una representación gráfica sería:
Se la conoce también como
Función de Masa de Probabilidad
por analogía con los parámetros físicos.

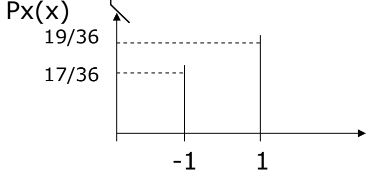


51

Ejemplo

- Una ruleta tiene 36 casilleros numerados del 0 al 35. Si un jugador realiza una apuesta en la que gana $1 si el resultado es par, y pierde $1 en caso contrario. Represente la ganancia del jugador mediante la variable aleatoria y encuentre la función de distribución de probabilidad (Fdp).

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el re resultado es par} \\ 1 & \text{si el re resultado es par} \end{cases}$$



52

Función de probabilidad acumulada

Esta función representa la probabilidad de que la variable X tome valores menores a x0 como función de x0

Fx(x0)=(PX<0=x0)

Veamos la aplicación para el ejemplo del dado:

Fx(xo = 0) = P(X ≤ 0) = 0 es decir es cero la probabilidad de que el valor de la cara obtenida sea cero. X<1

Fx(xo = 1) = P(X ≤ 1) = 1/6 es decir 1≤x0<2

Fx(xo = 2) = P(X ≤ 2) = 2/6 = 1/3 es decir 2≤x0<3

Fx(xo = 3) = P(X ≤ 3) = ½ es decir 3≤x0<4

Fx(xo = 4) = P(X ≤ 4) = 2/3 es decir 4≤x0<5

Fx(xo = 5) = P(X ≤ 5) = 5/6 es decir 5≤x0<6

Fx(xo = 6) = P(X ≤ 6) = 1 es decir x0≥6

53

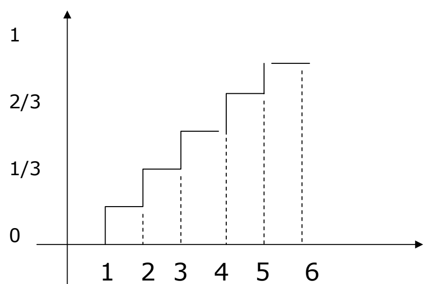
Función de probabilidad acumulada

La Función de probabilidad acumulada puede escribirse como:

0 si x<1

j/6 si j≤x0<j

1 si x0≥7



Se puede concluir que Si X es una VAD con función de densidad acumulada Fx(x0)

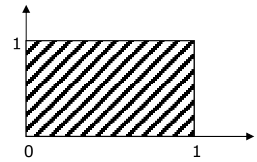
1) 0≤Fx(x0)<1
2) Si x0<x1 entonces: Fx(x0)<Fx(x1)

54

Ejercicio 1

Ejercicio: Se tiene un cable de fibra óptica de 1 Km de largo. Del cual se está| estudiando sus posibles averías. Sea la Variable Contínua "X", el puerto en el cual ocurre la falla, medido en km desde una de las entradas y supongamos que en cualquier tramo del cable de longitud dada. La probabilidad de falla es idéntica en cualquier otro tramo. Definir "X", y hacer el gráfico de la función de densidad de probabilidad.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$$



Se desea averiguar la probabilidad de que se presente una avería en el tramo que va desde el km ¼ hasta el km ¾.

P(¼ ≤ x ≤ ¾) = ∫ (1) dx = ¾ -¼ = ½

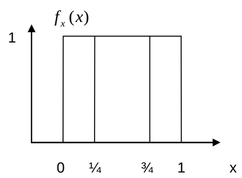
55

SOLUCION

Si se desea determinar la probabilidad que se presente una avería en el tramo que va desde el kilómetro ¼ hasta el kilómetro ¾, se aplica la propiedad siguiente:

$$P(1/2 \le X \le 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f_x(x)dx$$

Donde $f_x(x) = 1$. Por lo tanto, la probabilidad buscada es ½.



56

Ejercicio 2

Ejemplo: Sea la variable aleatoria continua “tiempo de vida en horas, de una lámpara eléctrica”. Suponga que la función de densidad de probabilidad de “X” está dada por: fx (X) $= a/x^3$ para $1500 \leq x \leq 2500$ 0 en otro caso

$$f_x(X) = \begin{cases} a/x^3 & \text{para } 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule el valor de “a”, y haga el gráfico de la función de probabilidad.

57

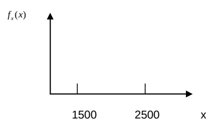
SOLUCION

Para poder calcular la probabilidad de cualquier intervalo, es necesario conocer el valor de a, para lo cual, se utiliza la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$$

Para el caso de la fdp se tiene: $\int_{1500}^{2500} (a/x^3)dx = 1$

Al resolver se obtiene que $a = 7.031 * 10^{-6}$. El gráfico sería:



58

Ejercicio 3

Ejemplo: Un equipo de reparaciones es responsable de un tramo de fibra óptica de 2 Km. La función de densidad de la variable aleatoria puede representarse como:

$$f_x(X) = \begin{cases} 0.5 & \text{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de probabilidad acumulada de esta variable aleatoria; así como la probabilidad de que ocurra una avería entre los km 0.5 y 1.5

59