

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

CURSO DE SISTEMAS RADIANTES

Profesor: Ing. Mario Cevallos

Bibliografía:

Radiación Electromagnética y Antenas:	Jorge R. Sosa Pedroza
Ondas Electromagnéticas y Sistemas Radiantes:	E. C. Jordan & K. C. Balmain
Antenas:	J. D. Kraus
Antenna Engineering Hand book:	H. Jasik (R.C. Johnson & H. Jasik)
Antenna Theory and Practice:	S. A. Schelkunoff
Antenna Theory Analysis and Design	Constantine A. Balanis

INTRODUCCION

En general las antenas corresponden a dispositivos que pueden presentarse en una infinidad de formas, cuya función principal es la de transformar energía electromagnética guiada por algún medio físico: conductores, líneas de transmisión, guías de onda, etc., en energía electromagnética radiante que se propague por el espacio y la función recíproca, esto es transformar energía electromagnética radiante en energía electromagnética guiada.

Esta forma de comportamiento que tiene este dispositivo a dado lugar a varias definiciones, todas ellas derivadas de su función y que se indican a continuación.:

DEFINICIONES.-

- Una antena es esencialmente un dispositivo metálico (como barra o alambre) para radiar o recibir ondas de Radio.
- Antena es un dispositivo para radiar o recibir ondas de radio.
- La antena es un medio de transición entre el espacio libre y un medio guiante.
- Antena es un componente que transforma ondas electromagnéticas guiadas en ondas radiales y viceversa.

De estas definiciones la última es la más completa y por consiguiente será la que utilizaremos en el desarrollo de este curso. Sin embargo de esta adaptación, observamos que en todas las definiciones se hace referencia a ondas electromagnéticas, esto es perturbaciones compuestas por campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo y relacionados entre sí por las ecuaciones de Maxwell.

En cursos anteriores los campos electromagnéticos se estudiaron las relaciones entre los vectores del campo electromagnético sin considerar los medios o las fuentes por las cuales fueron generados. De acuerdo con la definición escogida aceptamos que la antena transforma energía electromagnética guiada en energía radiante, lo que nos permite considerar a la antena como la fuente del campo electromagnético, por

consiguiendo el propósito de este curso es determinar las relaciones entre las antenas como fuente y los campos electromagnéticos que se radian al espacio.

Este estudio iniciará con la obtención de las expresiones para los campos eléctrico y magnético en función de las distribuciones de carga y/o corrientes existentes en una antena y a partir de estos campos obtener expresiones, para la densidad de flujo de potencia, potencia total radiada y otros parámetros y características importantes relacionadas con las antenas.

2.- POTENCIALES, FUENTES Y CAMPOS ESTATICOS

Revisando el caso de campos estáticos: eléctrico y magnético, se encontró que era más fácil derivarlos, si se definen funciones potenciales en términos de densidades de carga eléctrica estática y de corriente continua. Una vez establecidos estos potenciales se obtenían las expresiones para los campos eléctrico y magnético.

En la figura 1, se muestra una región que puede corresponder indistintamente a una distribución de cargas con densidad $P(c/m^3)$ ó a una distribución de corriente continua con densidad $\bar{J} (A/m^2)$, un origen que puede estar en cualquier punto del espacio incluyendo la región de cargas o corrientes y un punto de observación P en cualquier lugar del espacio pero fuera de la región de cargas y corrientes.

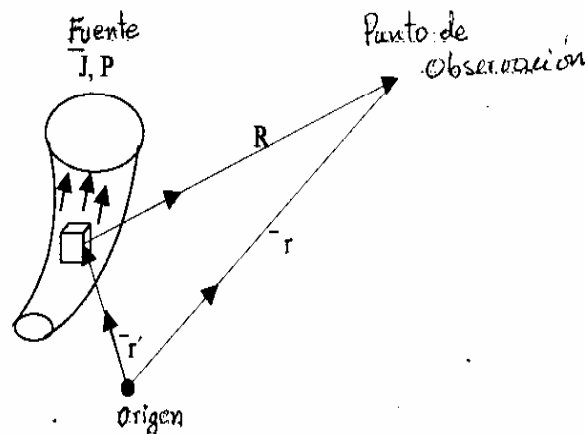


Fig.No.1 Disposición general de origen, fuente y punto de observación.

Para este esquema las funciones potenciales y las correspondientes expresiones para los campos eléctricos y magnéticos vienen determinados por las siguientes funciones:

$$\text{Potencial Escalar Eléctrico} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{P(\vec{r}')}{R} dV' \quad (1)$$

$$\text{Campo Eléctrico Estático} \quad \vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) \quad (2)$$

$$\text{Potencial Vectorial Magnético} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{J}(\vec{r}')}{R} dV' \quad (3)$$

Campo Magnético Estático
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla_r \mathbf{A}_{(r)} \quad (4)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

De estos resultados concluimos que las fuentes para los campos eléctrico y magnético estáticos son respectivamente distribuciones de cargas y corrientes eléctricas invariables en el tiempo.

3.- CASO ELECTROMAGNÉTICO

Para el caso electromagnético, es decir para campos variables en el tiempo, las fuentes que los generan constituirán también distribuciones de cargas o corrientes variables en el tiempo, pero con la diferencia que en este caso los campos eléctrico y magnético no son independientes entre sí sino que están ligados uno a otro, conforme lo expresan las ecuaciones de Maxwell así como también las fuentes (cargas y corrientes) no son independientes sino que están interrelacionadas por la ecuación de continuidad.

4.- FUNCIONES POTENCIALES POR GENERALIZACIÓN DEL CASO ESTÁTICO

Teniendo a mano las funciones potenciales para el caso estático podríamos generalizarlas para el caso de variación temporal y confirmar si estas nuevas funciones potenciales satisfacen las ecuaciones de Maxwell. De la misma manera que se determinó que distribuciones de carga y corrientes estáticas corresponden a las fuentes de los campos estáticos, podremos establecer que distribuciones de cargas y corrientes variables con el tiempo son las fuentes del campo electromagnético por consiguiente podríamos proponer la siguiente generalización:

$$V_{(r,t)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho_{(r',t)} dV'}{R} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_{(r,t)} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_{(r',t)} dV'}{R} \quad (6)$$

Estas expresiones implican una variación simultánea entre las fuentes y los campos en el espacio; pero el principal resultado de la teoría de campos es la presencia de una velocidad finita de propagación de las ondas electromagnéticas. Esto implica que las funciones potenciales evaluadas fuera de las fuentes presentan un tiempo finito de retardo, determinado por la relación de la distancia del punto de observación a la fuente (R), a la velocidad de propagación de las ondas, estimada como v para cualquier medio. Introduciendo este retardo en las ecuaciones 4 y 5 tendremos:

$$V_{(r,t)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho_{(r',t-R/v)} dV'}{R} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{(r,t)} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_{(r',t-R/v)} dV'}{R} \quad (8)$$

Debido al retardo R/v que presentan estas nuevas expresiones respecto de sus respectivas fuentes, se denomina "*Potenciales Retardados*". Estas expresiones corresponden a las relaciones de las ecuaciones diferenciales de los potenciales como veremos más adelante.

5.- ECUACIONES DIFERENCIALES PARA LAS FUNCIONES POTENCIALES CON VARIACIÓN TEMPORAL

Una vez obtenido el resultado dado por las ecuaciones 7 y 8 faltaría demostrar que estas satisfacen las ecuaciones de Maxwell, para lo cual deberemos establecer en primer término las ecuaciones diferenciales para las funciones potenciales y luego comprobar que las ecuaciones 7 y 8 son su solución.

Iniciaremos este procedimiento partiendo de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, las relaciones constitutivas y la ecuación de continuidad.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de} \\ \text{Maxwell} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (9) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}} \quad (10) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (11) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{Constitutivas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (13) \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (14) \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (15) \end{array}$$

$$\text{Ecuación de Continuidad} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho}$$

Donde:

ϵ = permitividad o constante dieléctrica del medio (F/m)

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

ϵ_r = permitividad relativa

ϵ_0 = permitividad del vacío

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \left(\frac{F}{m} \right)$$

μ = permeabilidad del medio (H/m)

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \begin{array}{l} \mu_r = \text{permeabilidad relativa} \\ \mu_0 = \text{permeabilidad del vacío} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)} \end{array}$$

$\sigma =$ conductividad del medio (S/m)

Una observación importante sobre la ecuación 15 es que esta corresponde a una densidad de corriente para un medio conductor en el punto de observación de los campos por consiguiente nada tiene que ver con la densidad de corriente de la fuente que es la que crea los campos. Más aún en nuestro estudio de antenas estamos interesados en los campos que se propagan por la atmósfera o vacío, donde $\sigma \approx 0$. Igualmente si nos referimos al aire o vacío deberemos considerar las constantes ϵ_0 y μ_0 en lugar de ϵ y μ con lo cual la velocidad de propagación corresponderá a la velocidad de la luz, en efecto

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ para cualquier medio;}$$

Para el aire o vacío:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = C \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ velocidad de la luz} \quad (16)$$

6.- FORMULACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Considerando la relación vectorial que dice: "La divergencia del rotacional de cualquier vector es idénticamente cero"

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \approx 0 \quad (17)$$

Observamos que la ecuación 12 se satisface automáticamente si la inducción magnética \mathbf{B} viene del rotacional de algún vector, lo que nos faculta escribir

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{ó} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (18)$$

siendo \mathbf{A} el potencial vectorial.

Si reemplazamos este resultado en la ecuación 10 tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \dot{\mathbf{A}} \quad \text{ó} \\ \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

De manera similar otra relación vectorial establece que "El rotacional del gradiente de cualquier escalar es idénticamente cero"

$$\nabla \times \nabla V \approx 0 \quad (20)$$

relación que permite establecer que para que se satisfaga la ecuación 19 es suficiente que el término $(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}})$ represente la gradiente de un escalar.

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla V \quad (21)$$

donde V corresponde al potencial escalar. De la ecuación 21 obtenemos

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}} \quad (22)$$

Las ecuaciones 18 y 22 corresponden a las expresiones para la determinación de los campos H y E en función de los potenciales.

Reemplazando las ecuaciones 18 y 22 en la ecuación 9 tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{\mu} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} &= -\epsilon \left(\nabla \dot{\mathbf{V}} + \ddot{\mathbf{A}} \right) + \mathbf{J} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} &= -\mu \epsilon \left(\nabla \dot{\mathbf{V}} + \ddot{\mathbf{A}} \right) + \mu \mathbf{J} \end{aligned}$$

reemplazando la identidad $\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} = \nabla \nabla_{\cdot} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \ddot{\mathbf{A}} = -\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \nabla \dot{\mathbf{V}} + \nabla \nabla_{\cdot} \mathbf{A} \quad (23)$$

Introduciendo las ecuaciones 22 y 13 en la ecuación 11:

$$-\nabla_{\cdot} \nabla V - \nabla_{\cdot} \dot{\mathbf{A}} = \rho / \epsilon \quad (24)$$

Las ecuaciones 23 y 24 serían las ecuaciones diferenciales para los potenciales, pero tal como están presentadas son muy complicadas de resolver por tener las variables ligadas además que no dan una solución única. Para mejorar su presentación y tener una única solución apliquemos el teorema de Helmholtz: "Cualquier campo vectorial debido a una fuente finita tiene especificación única si tanto el rotacional como la divergencia de ese campo están especificados".

En nuestro desarrollo se ha especificado el rotacional del potencial A más no su divergencia. Si a esta la especificamos como:

$$\nabla_{\cdot} \mathbf{A} = -\mu \epsilon \dot{\mathbf{V}} \quad (25)$$

Se desacoplan las ecuaciones 23 y 24 y tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \ddot{\mathbf{A}} = -\mu \mathbf{J} \quad (26)$$

$$\nabla^2 V - \mu \epsilon \ddot{V} = -\rho/\epsilon \quad (27)$$

Que son las ecuaciones diferenciales de los potenciales para cualquier tipo de variación temporal. La definición particular dada por la ecuación 25 se conoce con el nombre de condición de norma de Lorentz y es la que permite desligar las variables y tener ecuaciones diferenciales independientes. Nótese que de las ecuaciones 26 y 27 obtenemos las mismas relaciones para las ecuaciones diferenciales que en el caso estático.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} \\ \nabla^2 V &= -\rho/\epsilon \end{aligned}$$

7.- ECUACIONES DIFERENCIALES PARA VARIACIÓN TEMPORAL SINUSOIDAL

En la generalidad de los casos de aplicación práctica se trabaja con señales que varían senoidalmente en el tiempo, consecuentemente los campos asociados varían también senoidalmente y aún cuando este no sea el caso, cualquier variación periódica puede analizarse en términos sinusoidales utilizando el análisis de Fourier. Con esta consideración se puede ampliar la notación fasorial tanto para los potenciales como para los campos.

Con esta notación los potenciales y sus respectivas derivadas están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 e^{j\omega t} & V &= V_0 e^{j\omega t} \\ \dot{\mathbf{A}} &= j\omega \mathbf{A}_0 e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{A} & \dot{V} &= j\omega V_0 e^{j\omega t} = j\omega V \\ \ddot{\mathbf{A}} &= -\omega^2 \mathbf{A}_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 \mathbf{A} & \ddot{V} &= -\omega^2 V_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 V \end{aligned}$$

Reemplazando estas relaciones en las ecuaciones 26 y 27 tenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \text{ó} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \beta^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (28)$$

$$\nabla^2 V + \omega^2 \mu \epsilon V = -\rho/\epsilon \quad \text{ó} \quad \nabla^2 V - \beta^2 V = -\rho/\epsilon \quad (29)$$

$$\text{donde} \quad \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad \text{ó} \quad \beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (30)$$

Estas últimas ecuaciones (28 y 29) corresponden a las ecuaciones diferenciales para los potenciales para variación temporal sinusoidal. Si expresamos la ecuación 28 en términos de sus componentes rectangulares, se obtienen tres ecuaciones escalares de la misma forma que la ecuación 29, con esto las ecuaciones diferenciales para los potenciales está constituido por un sistema de seis ecuaciones escalares todos de la misma forma de manera que si se resuelve para una componente, la solución para las demás será la misma.

8.- SOLUCION DE LAS ECUACIONES POTENCIALES

Si consideramos la componente en z de la ecuación 28 tenemos:

$$\nabla^2 A_z - \beta^2 A_z = -\mu J_z \quad (31)$$

El procedimiento de solución consiste en determinar un valor particular para la función μJ_z que es la que genera el campo. La función más sencilla para μJ_z es la de una fuente puntual. Una vez encontrada la solución para esta función se pueden obtener soluciones para distribuciones más complicadas por superposición.

El concepto de fuente puntual implica que toda la función esta concentrada en un punto y puede compararse con la función impulso empleada en circuitos. Si la fuente está concentrada en el origen se tiene:

$$J_z = \delta_{(x)}\delta_{(y)}\delta_{(z)}J_{oz} \quad (32)$$

donde $\delta_{(x)}$, $\delta_{(y)}$ y $\delta_{(z)}$ las funciones impulso para $x=0$, $y=0$ y $z=0$ de manera que para cualquier punto fuera del Origen (fuente) la densidad de corriente es cero, puesto que toda la densidad de corriente está concentrada en el origen, entonces para cualquier punto fuera del origen

$$\nabla^2 A_z - \beta^2 A_z = 0 \quad (33)$$

Para encontrar la solución, conviene utilizar coordenadas esféricas en cuyo origen se encuentra concentrada la fuente puntual. Por simetría la solución para A debe ser la misma para cualquier valor de las variables θ y ϕ , o dicho de otra manera la solución es independiente de θ y ϕ , o sea que A corresponderá de superficies equipotenciales esféricas siendo dependientes únicamente del radio (o distancia) de estas superficies.

Expresando la ecuación 33 en coordenadas esféricas tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} = \beta^2 A_z$$

introduciendo las condiciones de simetría se reduce a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \beta^2 A_z \quad (34)$$

Introduciendo el siguiente cambio de variable

$$A_z = \frac{F}{r}$$

se tiene: $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F$ y

$$\frac{r^2 \partial A_z}{\partial r} = \frac{r \partial F}{\partial r} - F, \quad \text{de modo que}$$

$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ con lo que finalmente obtenemos una ecuación en F de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial r^2} = \beta^2 F \quad (36)$$

cuya solución es:

$$F = C_1 e^{-\beta r} + C_2 e^{\beta r}$$

reemplazando en esta última relación la ecuación 35

$$Az = \frac{C_1}{r} e^{-\beta r} + \frac{C_2}{r} e^{\beta r} \quad (37)$$

como la función $e^{\beta r}$ crece indefinidamente si $r > 0$ se requiere que $C_2 = 0$ y

$$Az = \frac{C_1}{r} e^{-\beta r} \quad (38)$$

Esta solución debe satisfacer la ecuación 31 en el origen, es decir

$$\nabla^2 Az = \beta^2 Az - \delta_{(x)} \delta_{(y)} \delta_{(z)} \mu J_{oz} \quad (39)$$

Si integramos ambos miembros sobre un volumen muy pequeño ($r \rightarrow 0$) se tiene:

$$\int_V \nabla^2 Az dv = \beta^2 \int_V Az dv - \int_V \delta_{(x)} \delta_{(y)} \delta_{(z)} \mu J_{oz} dv \quad (40)$$

por definición $\int_V \delta_{(x)} \delta_{(y)} \delta_{(z)} dv = 1$ (en el origen), con lo que llegamos a:

$$\int_V \delta_{(x)} \delta_{(y)} \delta_{(z)} \mu J_{oz} dv = \mu J_z \quad (41)$$

Para la otra integral del segundo miembro con $dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$;

$$\int_V Az dv = e \int_V \frac{e^{-\beta r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

tiende a cero cuando r tiende a cero, quedando

$$\int_V \nabla^2 Az dv = -\mu J_z \quad (42)$$

reemplazando $\nabla^2 = \nabla_s \cdot \nabla$ y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_V \nabla^2 Az dv = \int_V \nabla_s \cdot \nabla Az dv = \int_S \nabla Az \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla Az \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (43)$$

donde \hat{r} es un vector unitario en la dirección r .

O también

$$\int_V \nabla \cdot \nabla A z dv = C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \nabla \left(\frac{e^{-\beta r}}{r} \right) \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (44)$$

desarrollando el gradiente del integrando para coordenadas esféricas tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \nabla A z dv = C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{\beta e^{-\beta r}}{r} - \frac{e^{-\beta r}}{r^2} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (45)$$

integrando e introduciendo los límites de integración obtenemos:

$$\int_V \nabla \cdot \nabla A z dv = 4\pi C_1 (r\beta e^{-\beta r} - e^{-\beta r}) \quad (46)$$

llevando al límite cuando $r \rightarrow 0$

$$\int_V \nabla^2 A z dv = \int_V \nabla \cdot \nabla A z dv = -4\pi C_1 \quad (47)$$

restituyendo estos resultados parciales en la ecuación 40, llegamos a

$$-4\pi C_1 = -\mu J \quad \text{por lo que}$$

$$C_1 = \frac{\mu}{4\pi} J \quad (48)$$

con lo que la solución final para la componente A_z es:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{J e^{-\beta r}}{r} \right) \quad (49)$$

esta forma de solución tendrá todas las componentes del potencial vectorial \mathbf{A} , lo que nos permite dar la solución total para \mathbf{A} de la ecuación 28, cuyo resultado es:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{J} e^{-\beta r}}{r} \right) \quad (50)$$

ecuación que nos indica que la dirección del potencial vectorial es la misma que la de la distribución de corriente de la fuente \mathbf{J} .

Como se indicó anteriormente para una distribución más complicada de corriente se puede aplicar superposición, lo que equivale a tener la suma de los efectos de cada fuente individual que constituya la distribución total para obtener el efecto total, o sea que

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_n e^{-\beta r}}{r} \quad (51)$$

donde:

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ correspondiente a la fuente n -ésima

\mathbf{J}_n = densidad de corriente en la fuente n -ésima

N = número total de fuentes

Para un número infinito de fuentes $N \rightarrow \infty$ y para una distribución volumétrica se tiene:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{vol} \frac{\mathbf{J}e^{-\beta r}}{r} dv \quad (52)$$

La solución para el potencial escalar tendrá una forma similar, la misma que relacionándola con la ecuación 29 dará como resultado:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{vol} \frac{\rho e^{-\beta r}}{r} dv \quad (53)$$

Introduciendo la equivalencia dada por la ecuación 30 podemos escribir:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}e^{-i\beta r}}{r} dv \quad (54)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\beta} \int_v \frac{\rho e^{-i\beta r}}{r} dv \quad (55)$$

Ecuaciones que proporcionan los potenciales vectorial magnético y escalar eléctrico debidos respectivamente a densidades de corriente y de cargas variables en el tiempo dentro de un volumen arbitrario V , centrado en el origen del sistema de coordenadas. Como se observa en ambas ecuaciones esta presente el factor $e^{-i\beta r}$ que representa un defasamiento temporal (en retorno) entre el efecto que se obtiene en el punto de observación donde se evalúan los potenciales y el que ocurre en la fuente. Este defasamiento se debe a la velocidad finita de propagación de las ondas electromagnéticas, recordemos que según la ecuación 30

$$\beta r = \omega \sqrt{\mu\epsilon} r = \frac{\omega}{v} r = \frac{2\pi}{v} fr = \frac{2\pi}{\lambda} r \quad (56)$$

Habíamos anticipado que las ecuaciones 7 y 8 correspondían a las soluciones de las ecuaciones diferenciales de los potenciales, pero como se observa no tienen la misma forma que las soluciones encontradas ecuaciones 54 y 55, sin embargo si expresamos las funciones de las fuentes de otra manera, sin pérdida de generalidad podemos decir que las fuentes son el producto de dos funciones: una del tiempo; para el caso de variación senoidal tenemos:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(r,t)} = \mathbf{J}_{(r)} e^{j\omega t} \quad (57)$$

$$\rho = \rho_{(r,t)} = \rho_{(r)} e^{j\omega t} \quad (58)$$

Introduciendo en ecuaciones 54, 55

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(r) e^{j\omega t} e^{-j\beta r}}{r} dv$$

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(r) e^{j\omega(t-\frac{r}{v})}}{r} dv \quad (59)$$

$$V = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\rho(r) e^{j\omega(t-\frac{r}{v})}}{r} dv \quad (60)$$

Escribiendo estas ecuaciones de forma más general para cualquier tipo de variación temporal obtenemos:

$$A_{(r,t)} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(r, t-\frac{r}{v})}{r} dv \quad (61)$$

$$V_{(r,t)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(r, t-\frac{r}{v})}{r} dv \quad (62)$$

De acuerdo al desarrollo realizado estas soluciones consideran a las fuentes en el origen del sistema de coordenadas, si las fuentes se encuentran desplazadas del origen como se muestra en la figura 2 estas ecuaciones se reducen

$$A_{(r,t)} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(r, t-\frac{R}{v})}{R} dv \quad (63)$$

$$V_{(r,t)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(r, t-\frac{R}{v})}{R} dv \quad (64)$$

que corresponden a las mismas soluciones encontradas anteriormente.

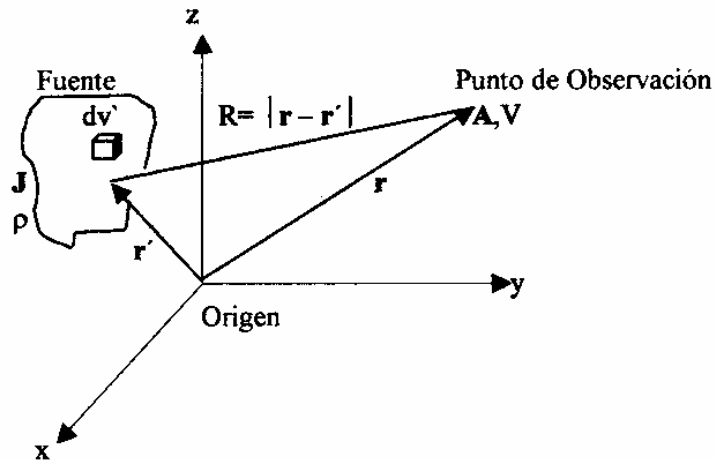


Figura 2: Disposición para las ecuaciones 63 y 64.

9.- CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS DERIVADOS DE LAS FUNCIONES POTENCIALES.

Las ecuaciones 18 y 22 nos proporcionan las expresiones que relacionan los campos: eléctrico y magnético obtenidos de las funciones potenciales, para cualquier tipo de variación temporal:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}$$

Estas ecuaciones sugieren que es necesario contar con las dos funciones potenciales \mathbf{A} y V para la evaluación de los campos pero en realidad es únicamente necesario evaluar la función \mathbf{A} y con la ayuda de la condición de norma de Lorentz ó de las ecuaciones de Maxwell llegamos a soluciones para \mathbf{E} en términos de \mathbf{A} . En efecto de la ecuación 25 podemos escribir:

$$V = -\frac{1}{\mu\epsilon} \int \nabla \cdot \mathbf{A} dt \quad \text{ó} \quad (65)$$

$$\nabla V = -\frac{1}{\mu\epsilon} \int \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} dt \quad (66)$$

introduciendo esta última expresión en la ecuación del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\epsilon} \int \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} dt - \dot{\mathbf{A}} \quad (67)$$

para el caso de variación temporal tipo sinusoidal $e^{j\omega t}$

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} - j\omega\mathbf{A} \quad (68)$$

otra forma alternativa consiste en utilizar la ecuación de Maxwell (ec. 9) para cualquier punto fuera de la fuente.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (69)$$

de donde:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt \quad (70)$$

para el caso sinusoidal

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon} \quad (71)$$

ó en términos de A

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\epsilon} \int \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} dt \quad (72)$$

para el caso sinusoidal

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \quad (73)$$

II - RADIACIÓN DEBIDA A UN ELEMENTO DE CORRIENTE ALTERNA

Un excelente ejemplo del uso de las funciones potenciales es la obtención del campo electromagnético debido a un elemento de corriente alterna en el espacio libre. Un elemento de corriente Idl se define como una corriente filamentaria I fluyendo a lo largo de una longitud elemental dl . Si bien esta definición corresponde a un caso hipotético, en la práctica podría aproximarse a una corriente I que fluye por una muy pequeña longitud de conductor de sección despreciable. La longitud de este conductor debe ser tan pequeña que se puede considerar la distribución de corriente, esencialmente constante a lo largo de toda la longitud, esta condición es particularmente importante para limitar las variables en el proceso de integración para obtener los potenciales.

Otra razón que nos lleva a considerar este elemento ficticio e inmaterial, es que en la práctica una antena real puede considerarse como compuesta por un infinito número de estas corrientes elementales, de manera que si se conoce el campo electromagnético producido por esta fuente elemental, se puede determinar el campo electromagnético de una antena o radiador práctico con cualquier distribución de corriente.

1.- EVALUACIÓN DEL POTENCIAL VECTORIAL

Para obtener el potencial vectorial, a partir del cual derivaremos el campo electromagnético, consideremos el elemento de corriente centrado en el origen de un sistema de coordenadas esférico, combinado con un rectangular, como se muestra en la figura 2.1 y cuya variación temporal esta dada por la función:

$$I_z = I_m \cos \omega t \quad (1)$$

Se asume que el medio circundante al elemento de corriente es el aire o vacío cuyas características son:

$$\epsilon = \epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

$$v \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

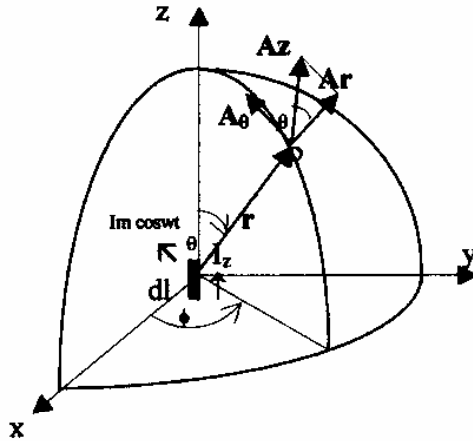


Figura 2.1

De las diferentes soluciones para el potencial vectorial encontradas en la sección anterior se determinó que la dirección del potencial es igual a la dirección de la fuente, para el caso presente según la figura 2.1, la fuente o densidad de corriente está en dirección del eje z por consiguiente el potencial estará en la misma dirección o lo que es lo mismo tendrá una sola componente, A_z , cuya solución será:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} dv \quad (2)$$

La integración de volumen puede ser considerada como la integración sobre el área transversal del elemento y una integración a lo largo de su longitud, por tanto:

$$\int J_z da = I_z \quad (3)$$

con lo cual:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{dl}{2}}^{\frac{dl}{2}} \frac{I_m \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} dz$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi r} I_m dl \cos \omega t \quad (4)$$

por comodidad de notación utilicemos la variable $t' = t - r/c$

El resultado obtenido nos da una componente rectangular del potencial de la cual puede derivarse las componentes esféricas por:

$$A_r = A_z \cos \theta \quad (5a)$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta \quad (5b)$$

$$A_\phi = 0 \quad (5c)$$

La disposición utilizada en la figura 2.1 presenta simetría cilíndrica alrededor del eje z por consiguiente las componentes esféricas son independientes de la variable ϕ , además de que no existe componente en esa dirección como lo indica la ecuación 5c.

2.- CAMPO ELECTROMAGNÉTICO DERIVADO DEL POTENCIAL VECTORIAL.

En el desarrollo que viene a continuación aparecen frecuentemente derivaciones e integraciones de la variable wt' por lo que consideramos conveniente presentar las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \text{sen } wt' &= -\frac{w}{c} \cos wt'; & \int \text{sen } wt' dt &= -\frac{1}{w} \cos wt' \\ \frac{\partial}{\partial r} \cos wt' &= -\frac{w}{c} \text{sen } wt'; & \int \cos wt' dt &= \frac{1}{w} \text{sen } wt' \end{aligned} \right\} (6)$$

Evaluaremos en primer término el campo magnético aplicando la ecuación 18 derivada en la sección anterior:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (7)$$

para lo cual presentamos la operación rotacional en coordenadas esféricas para cada componente:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \text{sen } \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen } \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] = \mu H_r \quad (8a)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} = \mu H_\theta \quad (8b)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \mu H_\phi \quad (8c)$$

Introduciendo en las ecuaciones 8 los resultados obtenidos para las componentes de \mathbf{A} (ecuaciones 5) y la condición de independencia respecto a la variable ϕ tenemos:

$$H_r = 0 \text{ por cuanto } A_\phi = 0 \text{ y } A_\theta \text{ es independientemente de } \phi \quad (9)$$

$$H_\theta = 0 \text{ por cuanto } A_\phi = 0 \text{ y } A_r \text{ es independientemente de } \phi \quad (10)$$

$$H_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-\text{Im } dl \text{ sen } \theta}{4\pi} \cos wt' \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{Im } dl \cos \theta}{4\pi r} \cos wt' \right) \right]$$

desarrollando las derivaciones indicadas con la ayuda de ecuaciones (8) y agrupando términos llegamos a:

$$H_{\phi} = \frac{\text{Im dl sen } \theta}{4\pi} \left[-\frac{w \text{sen } w t'}{cr} + \frac{\text{cos } w t'}{r^2} \right] \quad (11)$$

resultado que nos indicará que tenemos una sola componente de campo magnético en la dirección de ϕ .

Para la obtención del campo eléctrico utilizamos la ecuación 70 de la sección anterior

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \nabla \times \mathbf{H} dt \quad (12)$$

ecuación que requiere la realización del rotacional de \mathbf{H} , cuyas componentes podemos obtenerlas utilizando el resultado de ecuación 11 en las ecuaciones 8, con el cambio de funciones A por H , así tenemos.

De la ecuación 8a, con $H_{\theta} = 0$:

$$(\nabla \times \mathbf{H})_r = \frac{1}{r \text{sen } \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen } \theta H_{\phi}) \right] \quad (13)$$

de la ecuación 8b, con $H_r = 0$:

$$(\nabla \times \mathbf{H})_{\theta} = \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\phi}) \right] \quad (14)$$

de la ecuación 8c con $H_{\theta} = 0$ y $H_r = 0$:

$$(\nabla \times \mathbf{H})_{\phi} = 0 \quad (15)$$

Introduciendo las ecuaciones 13 a 15 en la ecuación 12 tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int \left(\frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen } \theta H_{\phi}) \right) dt \hat{r} - \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\phi}) dt \hat{\theta} \right] \quad (16)$$

donde \hat{r} y $\hat{\theta}$ corresponden a vectores unitarios en direcciones r y θ respectivamente.

Desarrollando individualmente cada componente incluyendo las derivadas indicadas tenemos:

$$E_r = \frac{2 \text{Im dl cos } \theta}{4\pi \epsilon_0} \int \left(-\frac{w \text{sen } w t'}{r^2 c} + \frac{\text{cos } w t'}{r^3} \right) dt$$

$$E_{\theta} = \frac{\text{Im dl sen } \theta}{4\pi \epsilon_0} \int \left(-\frac{w \text{cos } w t'}{rc^2} - \frac{w \text{sen } w t'}{r^2 c} + \frac{\text{cos } w t'}{r^3} \right) dt$$

$$E_{\phi} = 0$$

finalmente desarrollando las integrales:

$$E_r = \frac{2 \text{Im} \, dl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \omega t'}{r^2 c} + \frac{\text{sen} \omega t'}{r^3 \omega} \right) \quad (17)$$

$$E_\theta = \frac{\text{Im} \, dl \text{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\omega \text{sen} \omega t'}{rc^2} + \frac{\cos \omega t'}{cr^2} + \frac{\text{sen} \omega t'}{\omega r^3} \right) \quad (18)$$

$$E_\phi = 0 \quad (19)$$

Los resultados obtenidos nos indican que el campo electromagnético creado en el espacio por un elemento de corriente ó antena dipolo elemental consiste de tres componentes H_ϕ , E_r y E_θ perpendiculares entre si con la distribución espacial indicada en la figura 2.2.

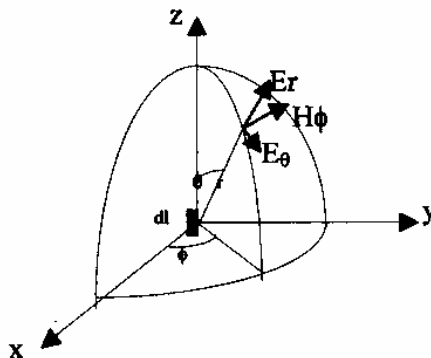


figura 2.2 Distribución del campo electromagnético creado por un elemento de corriente o antena elemental

Un análisis de las funciones del campo electromagnético en cuanto a su dependencia con la distancia (r) nos lleva a las siguientes conclusiones:

Considerando la componente H_ϕ (ecuación 11), esta consiste de dos términos: uno que varía inversamente con r y el otro inversamente con r^2 . Este segundo término que se denomina campo de inducción, predomina en puntos muy cercanos al elemento de corriente cuando r es pequeño, mientras que a grandes distancias se vuelve despreciable respecto al primero. Este término que varía inversamente con r y que se denomina campo de radiación o campo lejano es despreciable respecto del campo de inducción para valores muy pequeños de r mientras tiene un valor significativo para grandes distancias. Como se verá posteriormente únicamente este término o campo de radiación contribuye para que exista un flujo neto de potencia fuera de la fuente (antena elemental). El campo de inducción en cambio contribuye a un almacenamiento de energía oscilante entre el campo en las cercanías inmediatas de la fuente y la fuente.

Respecto de las componentes del campo eléctrico, la componente E_θ presenta tres términos que respectivamente varían inversamente con r , r^2 y r^3 , los dos primeros tendrán el mismo comportamiento que el analizado para el componente H_ϕ . Análogamente el término que varía inversamente con r que corresponderá al campo eléctrico de radiación y será el número que constituya a un flujo neto de potencia en forma de una onda electromagnética que nace en la fuente y se desplaza por todas las

direcciones del espacio con una velocidad igual a la de la luz. El término que varía inversamente con r^3 se denomina campo electrostático y no tiene ningún aporte en el proceso de radiación. La componente E_r esta constituida únicamente por campos de inducción y electrostático que no contribuyen al flujo neto de energía.

3.- FLUJO DE POTENCIA EN LOS CAMPOS PRODUCIDOS POR EL ELEMENTO DE CORRIENTE.

Sabemos que en cualquier problema electromagnético el flujo de potencia por unidad de área está dado por el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \left[\frac{w}{m^2} \right] \quad (20)$$

recordemos que el vector \mathbf{S} es perpendicular al plano formado por los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} .

Introduciendo en (20) las componentes de campo producidas por el elemento de corriente tenemos:

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi \end{vmatrix} = E_\theta H_\phi \hat{r} - E_r H_\phi \hat{\theta}$$

resultado que nos indica que el vector de Poynting presenta dos componentes S_r y S_θ ; evaluando separadamente cada una:

$$S_r = \left[\frac{Im \, dl \, \sin \theta}{4\pi \sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left[\left(-\frac{w \, \text{sen} \, wt'}{rc^2} + \frac{\cos \, wt'}{r^2 c} + \frac{\text{sen} \, wt'}{wr^3} \right) \left(-\frac{w \, \text{sen} \, wt'}{rc} + \frac{\cos \, wt'}{r^2} \right) \right]$$

$$S_\theta = \left[\frac{Im \, dl \, \sin \theta}{4\pi \sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left(-\frac{w^2 \, \text{sen} \, wt' \, \cos \, wt'}{r^3 c^2} + \frac{w^2}{r^2 c^3} \, \text{sen}^2 \, wt' + \frac{\text{sen} \, wt' \, \cos \, wt'}{wr^5} + \frac{\cos^2 \, wt'}{r^4 c} - \frac{\text{sen}^2 \, wt'}{r^4 c} \right)$$

introduciendo en esta expresión las siguientes relaciones trigonométricas

$$\text{sen} \, x \, \cos \, x = \frac{1}{2} \, \text{sen} \, 2x$$

$$\cos^2 \, x - \text{sen}^2 \, x = \cos \, 2x$$

$$\text{sen}^2 \, x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \, \cos \, 2x$$

Arreglando términos se obtiene:

$$S_r = \left[\frac{Im \, dl \, \sin \theta}{4\pi \sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left(-\frac{w \, \text{sen} \, 2wt'}{r^3 c^2} + \frac{\text{sen} \, 2wt'}{wr^5} + \frac{\cos \, 2wt'}{r^4 c} - \frac{w^2 \, \cos \, 2wt'}{2r^2 c^3} + \frac{w^2}{2r^2 c^3} \right) \quad (21)$$

Para la componente S_θ :

$$S_\theta = - \left[\frac{\sqrt{2} \text{Im } dl \cos \theta}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left[\left(\frac{\cos wt'}{r^2 c} + \frac{\text{sen } wt'}{wr^3} \right) \left(-\frac{w \text{sen } wt'}{rc} + \frac{\cos wt'}{r^2} \right) \right]$$

$$S_\theta = \left[\frac{\sqrt{2} \text{Im } dl \cos \theta}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left(-\frac{w \text{sen } wt' \cos wt'}{r^3 c^2} + \frac{\cos^2 wt'}{r^4 c} - \frac{\text{sen}^2 wt'}{r^4 c} + \frac{\text{sen } wt' \cos wt'}{wr^5} \right)$$

aplicando las relaciones trigonométricas anteriores llegamos a

$$S_\theta = - \left[\frac{\sqrt{2} \text{Im } dl \cos \theta}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \right]^2 \left(-\frac{w \text{sen } 2wt'}{2r^3 c^2} + \frac{\cos 2wt'}{r^4 c} + \frac{\text{sen } 2wt'}{2wr^5} \right) \quad (22)$$

Las expresiones 21 y 22 representan la densidad de potencia. En la práctica, sin embargo, el parámetro de mayor utilidad es la densidad de potencia promedio que se define como:

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt \quad (23)$$

donde T corresponde al periodo de la señal

Aplicando la ecuación 23 en las ecuaciones 21 y 22 observamos lo siguiente:

Los cuatro primeros términos dentro del paréntesis curvo de la ecuación 21 corresponden a señales senoidales de frecuencia $2w$, que integradas en un período dan resultado nulo. Igual cosa ocurre con todos los términos de la ecuación 22 con lo cual la densidad de potencia promedio se reduce a:

$$S_{av} = 0 \quad (24)$$

$$S_{r_{av}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}^2 dl^2 \text{sen}^2 \theta w^2 dwt'}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3}$$

$$S_{r_{av}} = \frac{\text{Im}^2 dl^2 w^2 \text{sen}^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \left[\frac{\text{Wats}}{\text{m}^2} \right] \quad (25)$$

De esta última ecuación para la densidad de potencia promedio debida a la fuente se observa que existe una sola componente de radiación y que está en el sentido radial desde la fuente. Un resultado importante es que a esta expresión final se puede llegar si se consideran únicamente las componentes de radiación o de campo lejano cuyas expresiones derivadas de las ecuaciones 11 y 18 son:

$$H_\phi = \frac{-w \text{Im } dl \text{sen } \theta \text{sen } wt'}{4\pi cr} \quad (26)$$

$$E_\theta = \frac{-w \text{Im } dl \text{sen } \theta \text{sen } wt'}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \quad (27)$$

Si utilizamos solo estas componentes en la ecuación 23 tenemos:

$$S_{rav} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{\theta} H_{\phi} dwt'$$

$$S_{rav} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w^2 \text{Im}^2 dl^2 \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 wt' dwt'}{16\pi^2 c^3 r^2 \epsilon_0}$$

reemplazando $\text{sen}^2 wt' = \frac{1}{2} - \cos 2wt'$ y realizando la integración llegamos a:

$$S_{rav} = \frac{\text{Im}^2 dl^2 w^2 \text{sen}^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \left[\frac{\text{Wal}}{\text{m}^2} \right] \quad (28)$$

Que corresponde exactamente a la expresión 25 que fue derivada aplicando todas las componentes del campo electromagnético. En consideración a que únicamente las componentes de radiación ecuaciones 26 y 27 contribuyen a dar un promedio neto de flujo de potencia fuera de la fuente, serán las únicas que utilizaremos en el futuro, sino se especifica otra cosa.

4.- POTENCIA RADIADA.

Como hemos demostrado un elemento de corriente genera a su alrededor en todas direcciones una densidad promedio de flujo de potencia, si integramos este flujo de potencia sobre una superficie esférica de radio r centrada en el elemento de corriente, obtendremos la potencia total que el elemento radia al espacio ó en otras palabras la potencia radiada por la antena elemental.

Refiriéndonos a la figura 2.3, por la independencia que tiene la función S_{rav} respecto a la variable ϕ podemos escoger como diferencial de área un sector de superficie esférica como el indicado; con lo cual:

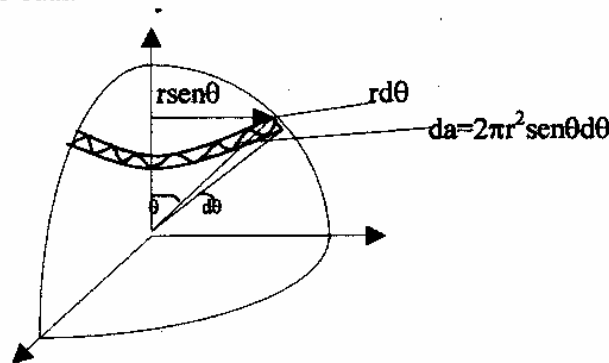


Figura 2.3

$$P_{rad} = \int_0^{\pi} S_{rav} da = \int_0^{\pi} \frac{\text{Im}^2 dl^2 w^2 \text{sen}^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^3} 2\pi r^2 \text{sen} \theta d\theta$$

$$P_{rad} = \frac{W^2 dl^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} I_m^2 \quad [\text{wats}] \quad (29)$$

En la última expresión de la potencia radiada esta dada en términos de la corriente pico I_m ; lo común es más bien conocer la corriente eficaz o rms cuya radiación con I_m es:

$$I_m = \sqrt{2} I_{ef} \quad (30)$$

Introduciendo esta ecuación en 29 y con las siguientes relaciones:

$$W = 2\pi f; \quad \lambda = \frac{c}{f}; \quad c\epsilon_0 = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\eta_0} \quad (31)$$

Donde η_0 se conoce con el nombre de independencia intrínseca del medio y cuyo valor es:

$$\eta_0 = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

obtenemos finalmente:

$$P_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 I_{ef}^2 \quad (\text{Wats}) \quad (32)$$

5.- RESISTENCIA DE RADIACIÓN

Recordando la expresión para la potencia en circuitos de corriente alterna.

$$P = RI_{ef}^2$$

concluiremos que el factor afecta a I_{ef}^2 en la ecuación 32 debe corresponder a una resistencia, efectivamente tiene dimensiones de ohmios y se denomina resistencia de radiación, cuya expresión es:

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega) \quad (33)$$

Este parámetro es muy importante y está presente en toda antena ó elemento radiante, pero puede dar lugar a interpretaciones erróneas por lo que conviene aclarar que no se trata de ningún elemento físico sino de una resistencia ficticia que se define como una resistencia ohmica equivalente que conectada al mismo generador que excita un antena, disipa la misma potencia que la antena radia al espacio.

6.- RELACION ENTRE LOS CAMPOS DE RADIACIÓN O LEJANOS

Considerando las ecuaciones 26 y 27 correspondientes a los campos de radiación ó lejanos, encontramos la relación de campo eléctrico a campo magnético.

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = \frac{(-w \text{Im dl sen } \theta \text{ sen wt}) 4\pi cr}{\epsilon_0 4\pi c^2 r (-w \text{Im dl sen } \theta \text{ sen wt})} = \frac{1}{c \epsilon_0} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0$$

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = \eta_0 = 120\pi \quad (\Omega) \quad (34)$$

Esta ecuación indica que los campos de relación están relacionados entre si por la impedancia intrínseca ó característica del medio en el cual radia una antena, vale decir esta relación se cumple para toda antena, además de proporcionar una relación simple para encontrar uno de los campos de radiación una vez conocido el otro, o para obtener una relación más cómoda para el vector de Poynting promedio mediante la ecuación.

$$S_{av} = \frac{1}{2} \frac{|E_{\theta}|^2}{\eta_0} \quad (\text{si } E_{\theta} \text{ esta en valor pico}) \quad \text{ó} \quad (35)$$

$$S_{av} = \frac{|E_{\theta}|^2}{\eta_0} \quad \text{o en general} \quad S_{av} = \frac{|E|^2}{\eta} \quad (36)$$

cuando E_{θ} o en general E se expresan en valor r.m.s.

RADIACIÓN DE UN LAZO DE CORRIENTE

Una forma de determinar los campos radiados por un pequeño lazo de corriente es utilizando su equivalente con un dipolo magnético corto, mediante el cual un pequeño lazo de área A por la cual circula una corriente eléctrica uniforme y en fase de magnitud I_e , puede reemplazarse por un dipolo magnético equivalente de longitud l por el cual circula una corriente magnética ficticia I_m , como se muestra en la figura 1.

La equivalencia

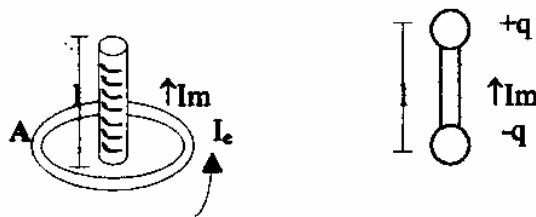


Figura 1: Equivalencia entre un lazo de corriente y un dipolo magnético

Para determinar la equivalencia entre el lazo y el dipolo magnético consideramos el momento magnético dipolar de cargas magnéticas ficticias de valor $\pm q_m$ separadas una distancia a l.

$$m = q_m l \quad (1)$$

$$\mathbf{m} = q_m \mathbf{l} \quad (1)$$

La corriente magnética debida a la variación temporal de carga magnética es:

$$I_m = -\mu \frac{dq_m}{dt} \quad (2)$$

Para el caso de variación sinusoidal consideremos

$$I_m = I_m o e^{j\omega t} \text{ y } I_e = I_{oe} e^{j\omega t} \quad (3)$$

Integrando la ecuación 2 respecto al tiempo; introduciendo la ecuación 3

$$q_m = \frac{-I_m}{j\omega\mu} \quad (5)$$

El correspondiente momento dipolar magnético de un lazo de área A por el que circula una corriente eléctrica I_e es:

$$m = I_e A \quad (6)$$

igualando con ecuación 1;

$$q_m \mathbf{l} = I_e A;$$

introduciendo ecuación 5

$$\frac{-I_m \mathbf{l}}{j\omega\mu} = I_e A$$

Para condiciones de espacio libre

$$\omega\mu_0 = 2\pi f \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0}} \sqrt{\mu_0} \sqrt{\epsilon_0} = \frac{2\pi\eta_0}{\lambda}; \eta_0 = 120\pi$$

que nos da

$$I_m \mathbf{l} = -j \frac{2\pi\eta_0}{\lambda} I_e A = -j 240\pi^2 I_e \frac{A}{\lambda} \quad (7)$$

incluyendo la variación temporal;

$$I_m \mathbf{l} e^{j\omega t} = -j 240\pi^2 I_{oe} e^{j\omega t} \frac{A}{\lambda} \quad (8)$$

Consideremos ahora el lazo de corriente centrado en sistema de coordenadas como su equivalente momento dipolar magnético.

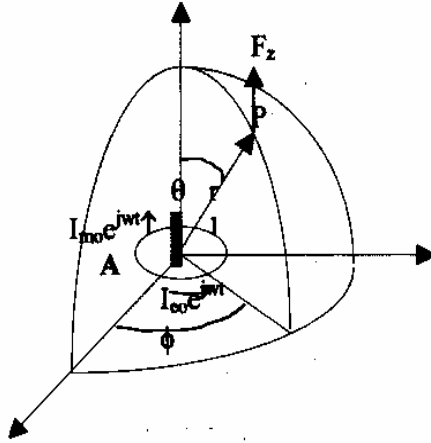


Figura 2.

Para este caso es posible definir un potencial vectorial eléctrico mediante el cual se defina el campo eléctrico producido por ~~el momento dipolar magnético~~ *la densidad de corriente* y que tiene la forma general

$$\mathbf{F}_{(r,t)} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}', t - r/c)}{r} dv \quad (9)$$

y
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{F} \quad (10)$$

Relación que indica que la dirección del potencial vectorial eléctrico es la misma que la densidad de corriente magnética.

Para la disposición de fuente en la figura 2 y considerando la variación temporal de la forma $e^{j\omega t}$, tenemos:

$$F = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I_{m0} e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dz \quad (11)$$

cuya solución es:

$$F_z = \frac{\mu I_{m0} e^{-j\omega r} e^{j\omega t}}{4\pi r} = \frac{\mu I_{m0} e^{-j\omega r} \mathcal{L}}{4\pi r} \quad (12)$$

Las componentes esféricas correspondientes son:

$$E_r = F_z \cos\theta; \quad E_\theta = -F_z \sin\theta; \quad F_\phi = 0 \quad (13)$$

La solución de la ecuación 10 en coordenadas esféricas da como resultado

$\mathbf{E} = E_{\theta} \hat{\mathbf{a}}_{\theta}$ siendo

$$E_{\theta} = \frac{I_m \sin \theta}{4\pi} e^{-j\beta r} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (14)$$

Utilizando la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

obtenemos:

$$H_{\theta} = \frac{I_m \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r \epsilon_0 c} \left[j\beta + \frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2} \right] \quad (15)$$

$$H_r = \frac{I_m \cos \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r \epsilon_0 c} \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{j\beta r^2} \right] \quad (16)$$

CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LAS ANTENAS

CONFIGURACIÓN DE RADIACIÓN.- Corresponde a la distribución especial, generalmente en diagrama polar, del campo de radiación o de la densidad de potencia radiada en forma relativa, esto es en términos del valor en una dirección especificada respecto del máximo valor posible.

En general la intensidad de campo radiado o la densidad de flujo de potencia radiada al espacio para cualquier antena se expresan mediante ecuaciones más o menos complejas de las variables esféricas que para generalizar se expresan por las ecuaciones:

$$E = K_1 g(\theta, \phi) \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1)$$

$$S = \frac{E^2}{\eta} = \frac{K_1^2}{\eta} g^2(\theta, \phi) = K_2 f(\theta, \phi) \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (2)$$

donde: K_1, K_2 son valores dependientes de la excitación, tipo de antena y distancia.
Fijados estos valores, son constantes.

$g(\theta, \phi)$ y $f(\theta, \phi)$ son funciones arbitrarias de las variables θ y ϕ .

η corresponde a la impedancia intrínseca del espacio.

Cuando la configuración de radiación corresponde a la variación de la intensidad de campo, se denomina **configuración de campo**, cuando representa la densidad de potencia radiada se llama **configuración de potencia**. Matemáticamente tenemos:

Para la configuración de campo:

$$E_r = \frac{E}{E_{m\acute{a}x}} = \frac{g(\theta, \phi)}{g_{m\acute{a}x}(\theta, \phi)} \quad (3)$$

para la configuración de potencia:

$$S_r = \frac{S}{S_{m\acute{a}x}} = \frac{f(\theta, \phi)}{f_{m\acute{a}x}(\theta, \phi)} = \left[\frac{g(\theta, \phi)}{g_{m\acute{a}x}(\theta, \phi)} \right]^2 \quad (4)$$

donde: $g_{m\acute{a}x}(\theta, \phi)$ y $f_{m\acute{a}x}(\theta, \phi)$ corresponden a los máximos posibles valores de las funciones $g(\theta, \phi)$ y $f(\theta, \phi)$.

De lo anterior se concluye que la configuración de potencia corresponde al cuadrado de la configuración de campo.

Para las ecuaciones anteriores el rango de variación de la magnitud está entre cero y la unidad, como se muestra en la fig. 1.

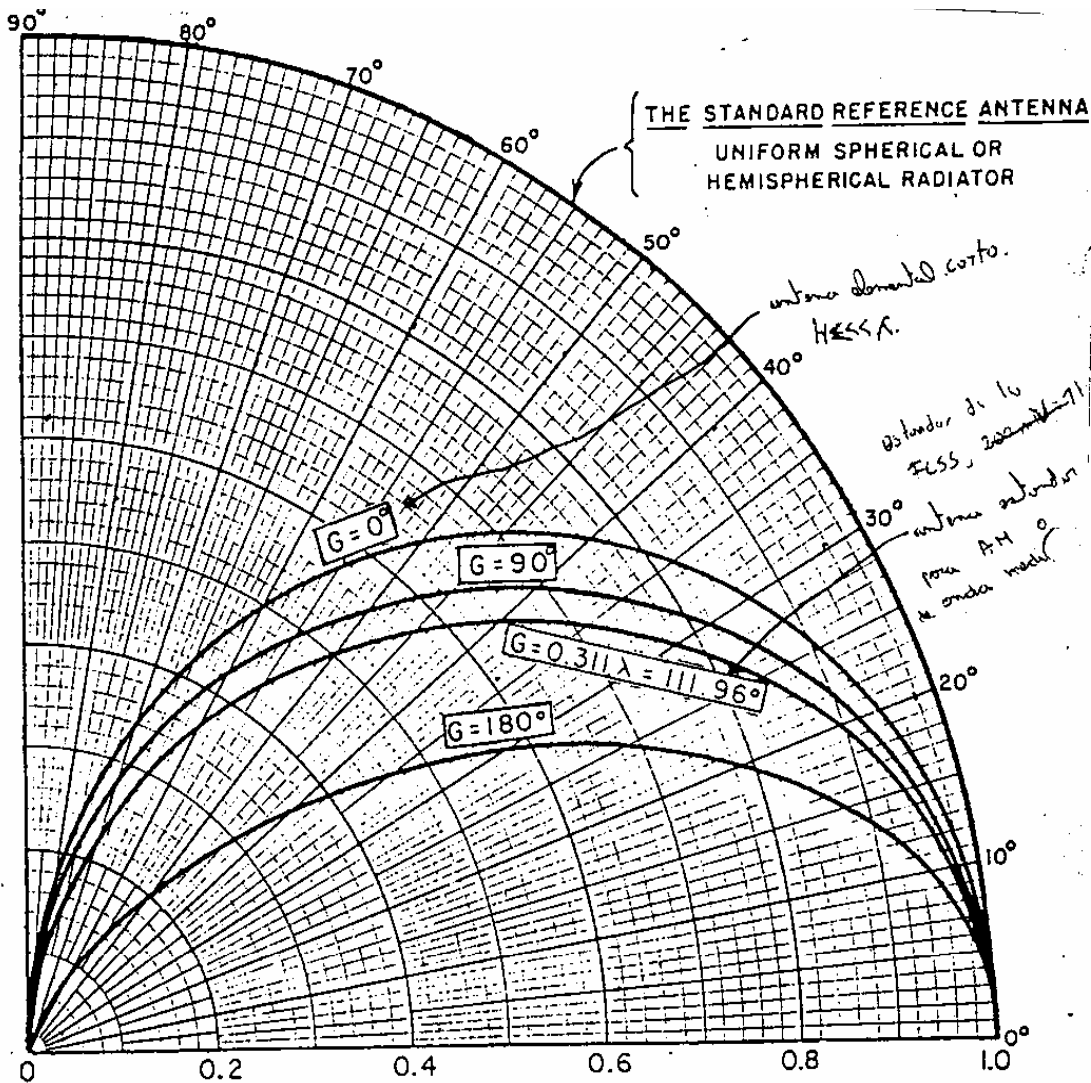


Fig. 1 Configuración de radiación para un monopolo vertical en función de la altura eléctrica $G = \beta H$, mostrada en un solo cuadrante.

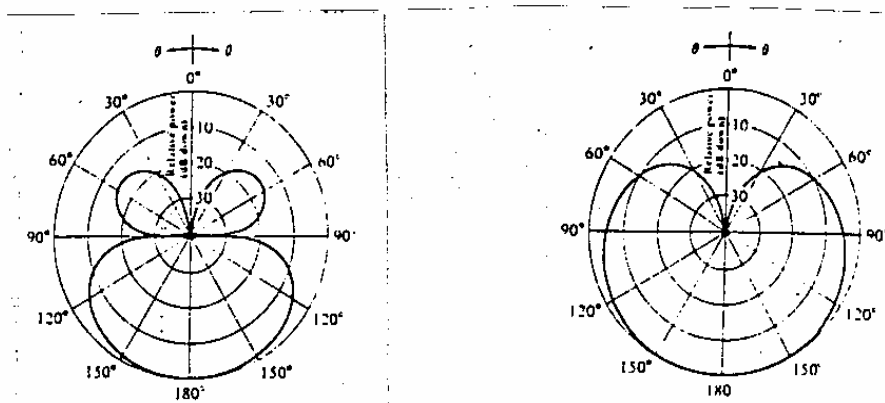


Fig. 2 Diagramas de radiación en representación logarítmica o en decibeles

$$0 \leq E_{rel} \leq 1$$

$$0 \leq S_{rel} \leq 1$$

Existe otra forma de expresar la variación de las ecuaciones 3 y 4 y es en términos de decibelios mediante las relaciones:

$$E_r(d_B) = 20 \log E_r \quad (5)$$

para la configuración de campo:

$$S_r(d_B) = 10 \log S_r \quad (6)$$

para la configuración de potencia.

Utilizando estas relaciones las configuraciones de campo y de potencia son iguales pero el rango de variación está entre menos infinito y cero d_B por lo que generalmente se la reduce a tres décadas como se muestra en la fig. 2.

En la mayoría de los casos las características más importantes de las configuraciones de radiación se especifican mediante el ancho del lóbulo principal y la posición y nivel de los lóbulos laterales o secundarios en los dos planos principales conocidos como plano E y plano H.

El plano E corresponde al plano paralelo al vector de campo eléctrico que pasa a través de la antena en la dirección del máximo principal.

El plano H es el plano perpendicular al plano E que pasa a través de la antena en la dirección del máximo principal.

El ancho del lóbulo en el plano principal de la configuración de radiación se define como el ángulo subtendido entre el centro del diagrama y las posiciones de $-3d_B$ (mitad de potencia o 0.707 de campo) del valor máximo del lóbulo principal. Normalmente se lo conoce también con el nombre de ancho del lóbulo de media potencia.

Posición de los lóbulos secundarios o laterales se da por el valor en decibelios del máximo del lóbulo secundario respecto del lóbulo principal. En la fig. 3 se muestran estas características.

CONFIGURACIONES TÍPICAS COMUNES.- Si bien las antenas pueden presentar una infinidad de configuraciones de radiación se especifican cuatro tipos básicos de configuraciones de radiación:

Configuración omnidireccional o de radio difusión, muy utilizada para radiodifusión comercial: radio AM, FM, y TV presenta una distribución uniforme (circular) de la intensidad de campo en el plano horizontal y una distribución directiva en el plano vertical, con máximo en la dirección horizontal.

Lóbulo tipo lápiz, propiedad de las antenas de alta directividad, el lóbulo principal presenta una sección transversal circular es decir, igual en los planos principales.

Lóbulo tipo abanico, presenta una sección transversal elíptica con el lóbulo principal angosto en un plano y ancho en el otro.

Lóbulo conformado, principalmente utilizado en radar de localización, se caracteriza porque el lóbulo principal es angosto en un plano y de una forma particular de acuerdo a las necesidades en el otro plano.

En la fig. 4 se muestran algunos ejemplos.

GANANCIA, DIRECTIVIDAD, GANANCIA DIRECTIVA, GANANCIA DE POTENCIA. - Estos términos pueden considerarse como sinónimos, pues en la mayoría de aplicaciones no existe una diferencia numérica significativa.

En la practica corresponden a la habilidad que tiene una antena para concentrar la energía radiada en una determinada dirección.

Con el objeto de encontrar expresiones que permitan determinarlas matemáticamente se presentan varias formas de definición que llevan a iguales resultados, a continuación presentamos algunas:

DIRECTIVIDAD

$$D = \frac{\text{Intensidad de radiación en una dirección dada}}{\text{Intensidad de radiación promedio de una antena de referencia}} \quad (7)$$

para iguales potencias.

Como antena de referencia generalmente se considera una antena isotrópica.

Antes de comentar esta definición veamos a que se refiere el término intensidad de radiación. Refiriéndose a la fig. 5 y la definición de potencia radiada.

$$P_r = \int_S S_{av} da \quad (8)$$

para la diferencial de área considerada:

$$da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (9)$$

con lo cual

$$P_r = \int_S S_{av} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \int_S S_{av} r^2 d\Omega \quad (10)$$

siendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ la diferencial de ángulo sólido.

El producto $S_{av} r^2$ se conoce como intensidad de radiación, es independiente de la distancia y que se la representa por:

$$U = S_{av} r^2 = \left[\frac{W}{\text{Ster radián}} \right] \quad (11)$$

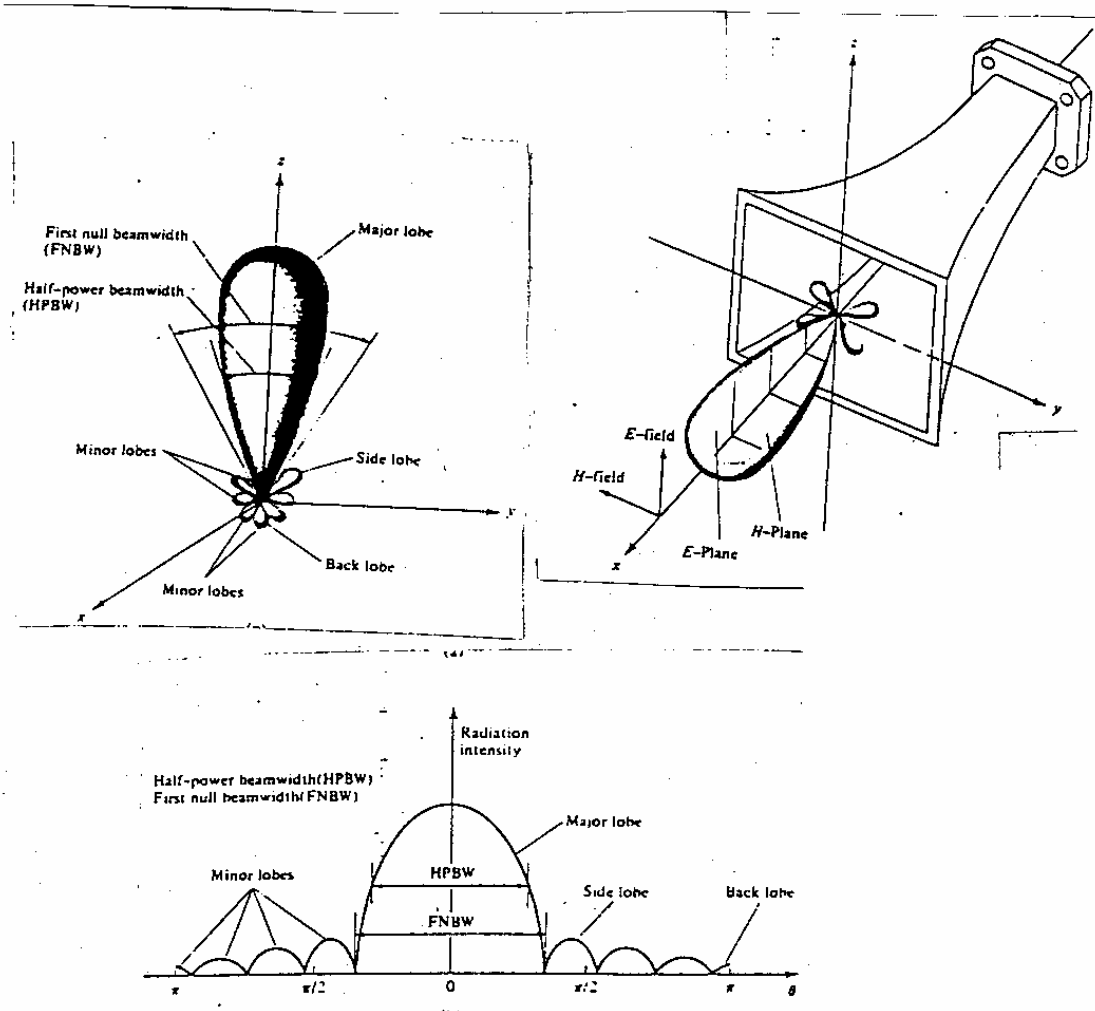


Fig. 3. Características básicas de las configuraciones de radiación, a) representación polar espacial, en la que se muestran el ancho de lóbulo a media potencia HPBW (por sus siglas en inglés, ancho de lóbulo entre los primeros ceros (o primeros mínimos) FNBW (siglas en inglés) y posición de los lóbulos laterales; b) la misma información anterior pero en un diagrama rectangular y un solo plano principal; c) información sobre la forma de radiación de una bocina utilizada en micro ondas.

La representación de la configuración de radiación en diagrama rectangular se utiliza cuando se trata de antenas de alta directividad o ganancia, en las cuales las características básicas como ancho del lóbulo para media potencia, ancho de lóbulo entre los primeros ceros y posición de los lóbulos secundarios, corresponden a valores de pocos grados para los cuales la resolución de los diagramas polares no es muy precisa, además de que se pueden elegir a voluntad las escalas para el eje horizontal, lo que no es posible en los diagramas polares donde la circunferencia completa tiene invariablemente 360 grados.

Lóbulo tipo abanico, presenta una sección transversal elíptica con el lóbulo principal angosto en un plano y ancho en el otro.

Lóbulo conformado, principalmente utilizado en radar de localización, se caracteriza porque el lóbulo principal es angosto en un plano y de una forma particular de acuerdo a las necesidades en el otro plano.

En la fig. 4 se muestran algunos ejemplos.

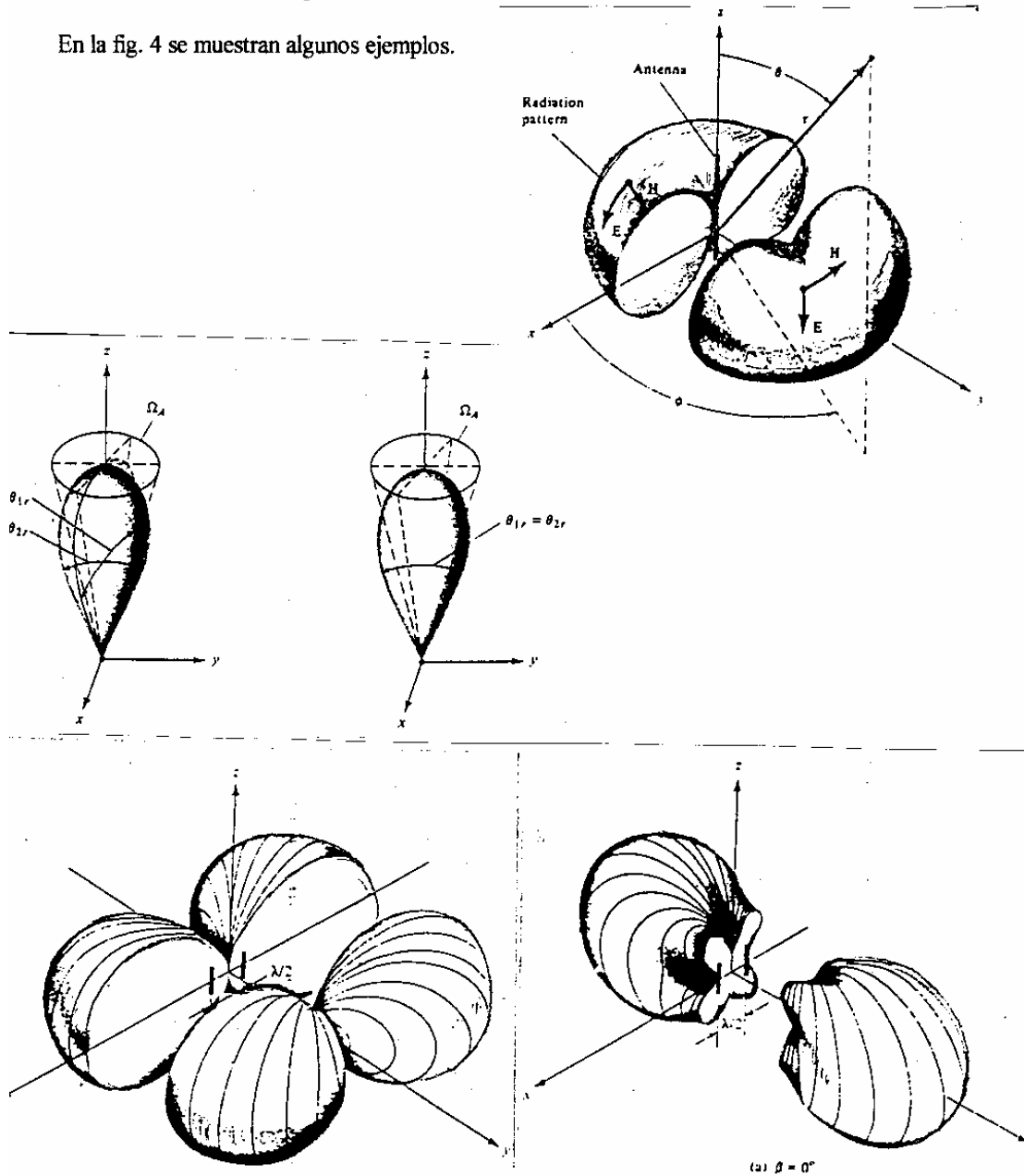


Fig. 4. Configuraciones típicas de radiación, a) tipo radiodifusión, b) tipo abanico, c) tipo lápiz, d) tipo conformado

GANANCIA, DIRECTIVIDAD, GANANCIA DIRECTIVA, GANANCIA DE POTENCIA.-

Estos términos pueden considerarse como sinónimos, pues en la mayoría de aplicaciones no existe una diferencia numérica significativa. En la práctica corresponden a la habilidad que tiene una antena para concentrar la energía radiada en una determinada dirección. Con el objeto de encontrar expresiones que permitan determinarlas matemáticamente se presentan varias formas de definición que llevan a iguales resultados, a continuación presentamos algunas:

DIRECTIVIDAD

$$D = \frac{\text{Intensidad de radiación en una dirección dada}}{\text{Intensidad de radiación promedio de una antena de referencia}} \quad (7)$$

para iguales potencias radiadas

Como antena de referencia generalmente se considera una antena isotrópica.

Antes de comentar esta definición veamos a que se refiere el término **intensidad de radiación**. Refiriéndose a la fig. 5 y la definición de potencia radiada.

$$P_r = \int S_{av} da \quad (8)$$

para la diferencial de área indicada:

$$da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (9)$$

con lo cual

$$Pr = \int S_{av} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \int S_{av} r^2 d\Omega \quad (10)$$

siendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ la diferencial de ángulo sólido.

El producto $S_{av} r^2$ se conoce como intensidad de radiación, cantidad que es independiente de la distancia para la cual se define el vector de densidad de flujo de potencia, y que se la representa por:

$$U = S_{av} r^2 = \left[\frac{W}{\text{Ster radián}} \right] \quad (11)$$

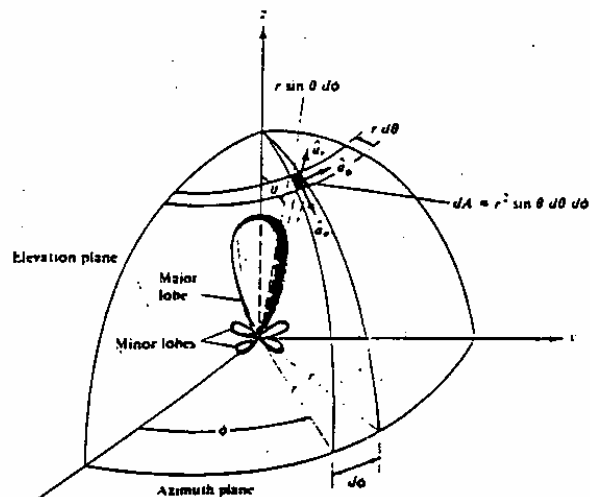


Fig. 5 Cálculo de potencia radiada

En general la intensidad de radiación es dependiente de las variables esféricas θ y ϕ y se la escribe:

$$U = U_a f(\theta, \phi) \quad (12)$$

donde: U_a es la amplitud de la intensidad de radiación. Es un valor constante para cada antena y depende entre otras de potencia radiada, tamaño, frecuencia, etc.

$f(\theta, \phi)$ es una función generalizada de las variables θ y ϕ .

Se indicó que generalmente como antena de referencia se utiliza la antena isotrópica, cabe preguntarnos que es una antena isotrópica?

Se define como antena isotrópica una antena ideal que radia por igual en todas las direcciones del espacio, esto implica que la intensidad de radiación de una antena isotrópica es independiente de la variable θ y ϕ , y la denominamos como U_{iso} .

$$U_{iso} = \frac{E_{iso}^2}{\eta} r^2 \left[\frac{W}{\text{Ster radián}} \right] \quad (13)$$

Como en una esfera hay 4π ángulos sólidos o ster radians, la potencia transmitida por una antena isotrópica será:

$$P_T = 4\pi U_{iso} \quad (14)$$

Puede en ocasiones resultar importante conocer el campo eléctrico debido a una antena isotrópica que radia cierta potencia, en este caso:

$$P_T = 4\pi \frac{E_{iso}^2}{\eta} r^2 \quad \text{de donde } E_{iso} = \frac{\sqrt{30P_T}}{r} \left[\frac{V}{m} \right] \quad (15)$$

Aplicando estos conceptos a la definición de la máxima directividad, tenemos de la ecuación 7.

$$U_{máx} = U_a f_{máx}(\theta, \phi) \quad (16)$$

con lo cual

$$D_{máx} = D = \frac{U_{máx}}{U_{iso}} = \frac{4\pi U_{máx}}{4\pi U_{iso}} \quad (17)$$

pero $4\pi U_{iso}$ es la potencia total transmitida, por consiguiente:

$$D = \frac{4\pi U_{máx}}{P_T} \quad (18)$$

expresión que nos permite dar otra definición para la directividad

$$D = \frac{4\pi \text{ Intensidad de radiación máxima}}{\text{Potencia total radiada}} \quad (19)$$

Trabajando con esta última relación podemos escribir

$$D = \frac{4\pi U_{\text{máx}}}{\int U d\Omega} = \frac{4\pi U_a f_{\text{máx}}(\theta, \phi)}{\int U_a f(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{\frac{\int f(\theta, \phi) d\Omega}{f_{\text{máx}}(\theta, \phi)}} = \frac{4\pi}{B} \quad (20)$$

donde $B = \frac{\int f(\theta, \phi)}{f_{\text{máx}}(\theta, \phi)}$ (21)

Se conoce como área del lóbulo de radiación y se define como el ángulo sólido equivalente en el cual se concentraría isotrópicamente toda la potencia que la antena efectivamente radía al espacio.

En antenas de alta direccionalidad esta área del lóbulo de radiación es aproximadamente igual al producto de los anchos de los lóbulos de radiación en los planos E y H, θ_{-3dB} y ϕ_{-3dB} .

$$B \cong \theta_{-3dB} \phi_{-3dB} \quad (22)$$

con lo cual:

$$D \cong \frac{4\pi}{\theta_{-3dB} \phi_{-3dB}} \quad \text{para ángulos en radianes} \quad (23)$$

$$D \cong \frac{41253}{\theta_{-3dB} \phi_{-3dB}} \quad \text{para ángulos en grados} \quad (24)$$

Se tiene otra definición de directividad en términos de potencia que se expresa como:

$$D = \frac{\text{Potencia} \cdot \text{máxima} \cdot \text{isotrópicamente} \cdot \text{radiada}}{\text{Potencia} \cdot \text{isotrópica}} \quad (25)$$

para iguales potencias radiadas.

Donde la potencia máxima isotrópicamente radiada corresponde a una potencia isotrópica calculada con la máxima intensidad de radiación o con la máxima intensidad de campo producida por la antena.

Esta definición al igual que la primera exige que las potencias radiadas por la antena real y la isotrópica sean iguales.

Utilizando las relaciones anteriores tenemos:

$$D = \frac{4\pi U_{m\acute{a}x}}{4\pi U_{iso}} \Big|_{Pot's} \frac{U_{m\acute{a}x}}{U_{iso}} \Big|_{Pot's} \frac{E_{m\acute{a}x}^2 r^2 / \eta}{E_{iso}^2 r^2 / \eta} \Big|_{Pot's} = \frac{E_{m\acute{a}x}^2}{E_{iso}^2} = \left[\frac{E_{m\acute{a}x}}{E_{iso}} \right]^2 \quad (26)$$

para iguales potencias radiadas.

Para la aplicación de esta última ecuación en antenas dipolo y monopolo se utiliza la fig.6, en la cual en la escala de la derecha se representa la intensidad de campo eléctrico sobre el plano horizontal para un monopolo que radia 1 KW de potencia considerando una distancia de una milla (1,609 Km.) en función de la altura eléctrica de la antena ($G=\beta H$). En el mismo gráfico se presenta la variación de la resistencia de radiación de los monopolos en función de la altura βH .

Del ejercicio planteado más abajo se demostrará que la directividad o ganancia de un monopolo es el doble de la ganancia del correspondiente dipolo.

GANANCIA.- En las definiciones anteriores de la directividad o direccionalidad de una antena se ha considerado a la antena como un elemento ideal en el cual toda la potencia con la que se la alimenta se radia del espacio. En la práctica esto no ocurre porque cuanto la antena al ser un elemento material presentará una cierta resistencia óhmica la que al ser recorrida por la corriente de excitación de la antena producirá pérdidas alóricas del tipo

$$P_{per} = I_{rms}^2 R_{(\Omega)} \quad (27)$$

Considerando estas pérdidas la potencia de alimentación o de entrada será:

$$P_{in} = P_{rad} + P_{per} \quad (28)$$

La eficiencia de una antena se define como:

$$\eta\% = 100 \frac{\text{potencia radiada por la antena}}{\text{potencia total de entrada}} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{per}} 100 \quad (29)$$

El término ganancia incluye también las pérdidas o el rendimiento o eficiencia y su definición se da por la relación:

$$G = \eta D \quad (\eta \text{ numérico}) \quad (30)$$

En la mayoría de aplicaciones especialmente en el rango de frecuencias VHF superiores el rendimiento de una antena es cercano al 100%, consiguientemente el valor

numérico de la direccionalidad y la ganancia son prácticamente iguales y no hay distingo entre los dos como indicamos previamente.

Las relaciones anteriores nos dan simplemente valores numéricos de D y G, en la práctica estos se expresan en dB mediante las relaciones:

$$D_{(dB)} = 10 \log D \quad G_{(dB)} = 10 \log G \quad (31)$$

EJERCICIO.- Aplicando todas las definiciones anteriores determine la ganancia de un dipolo elemental y de una antena corta operando como dipolo y como monopolo.

IMPEDANCIA.- Se refiere al comportamiento circuital de una antena y es de primordial importancia, ya que está directamente relacionada con la eficiencia de transmisión de potencia desde o hacia la antena. Para entender este significado recordemos el funcionamiento de una antena. Generalizando los resultados de la antena elemental a cualquier antena tenemos que se producen campos de radiación y campos de inducción. Los campos de radiación sabemos dan como resultado un flujo promedio de potencia y finalmente una potencia radiada.

$$P_T = P_{rad} = I_{rms}^2 R_{rad} \quad (32)$$

Cabe la pregunta qué pasa con los campos de inducción?. Indicamos que estos causan

un flujo de potencia oscilante entre la antena y los campos con un promedio nulo o cero, como una potencia reactiva similar a la presente en circuitos con elementos resistivos y reactivos (impedancias o admitancias).

Este comportamiento de la antena nos lleva a pensar que circuitalmente ésta se comporta como una impedancia, cuya parte real estará relacionada con la resistencia de radiación y que además presentará un comportamiento reactivo sea inductivo o capacitivo.

Existe una variedad de tratamientos electromagnéticos rigurosos para desarrollar fórmulas que permitan determinar numéricamente los valores de las partes real e imaginaria de la impedancia de una antena pero tales métodos si bien tienen importancia científica están fuera del alcance de este curso, por lo cual nos limitaremos a presentar los resultados de mayor aproximación con los valores medidos en infinidad de antenas y que provienen de un trabajo desarrollado por S.A. Schelkunoff, "Theory of Antennas of Arbitrary Size and Shape", Proc. IRE, Vol. 29, Sep. 1941. Estos valores se presentan en las figs. 7 y 8, están calculados para antenas monopolo y provienen de las siguientes expresiones:

$$Z_b = Z_{oav} \frac{H \operatorname{sen} G + j(F - N) \operatorname{sen} G - j(2Z_{oav} - M) \cos G}{(2Z_{oav} + M) \operatorname{sen} G + (F + N) \cos G - jH \cos G} \quad (33)$$

donde: Z_{oav} se conoce como la impedancia características promedio de la antena y corresponde a un parámetro que relaciona el largo de una antena a su respectivo radio mediante las ecuaciones:

$$Z_{oav} = 60 \left(\ln \frac{2H}{a} - 1 \right) \quad \text{para monopolo} \quad (34)$$

$$Z_{oav} = 120 \left(\ln \frac{2H}{a} - 1 \right) \quad \text{para dipolo} \quad (35)$$

H = altura del monopolo o semilongitud del dipolo
a = radio de la antena.

$Z_b = R_b + jX_b$ impedancia de base o del punto de excitación de la antena.
 R_b = resistencia de base o de excitación
 X_b = reactancia de base o de excitación

G = βH altura eléctrica del monopolo o semilongitud eléctrica del dipolo (grados o radianes)

$F = 60Si2G + 30(Ci4G - \ln G - \gamma) \text{sen}2G - 30\text{cos}2G(Si4G)$
 $H = 60(\gamma + \ln 2G - Ci2G) + 30(\gamma + \ln G - 2Ci2G + Ci4G) \text{cos}2G +$
 $30(Si4G - 2Si2G) \text{sen}2G$
 $M = 60(\ln 2G - Ci2G + \gamma - 1 + \text{cos}2G)$
 $N = 60(Si2G - \text{sen}2G)$
 $\gamma = 0,5772 \dots \dots \dots$ constante de Euler
Si = función seno integral
Ci = función coseno integral

Se indicó que los valores de las figs. 7 y 8, correspondían a antenas monopolo, para el caso de antenas dipolo simplemente se duplican estos valores.

En la fig. 8, los signos indican regiones de comportamiento capacitivo (-) o inductivo (+) de la antena. El punto de tope de las curvas con el eje de las abscisas da la altura o longitud de resonancia de la antena.

FACTOR DE CALIDAD, FACTOR Q.- Esta relacionado con la respuesta de frecuencia de la antena. Se presentan varias definiciones pero la más usual es la que se da en términos de las frecuencias de media potencia radiada respecto a la potencia radiada a la frecuencia de resonancia, asumiendo que se excita la antena con un generador ideal de frecuencia variable.

$$Q_A = \frac{f_o}{f_2 - f_1} \quad (36)$$

$$P_1 = \frac{V^2 R_1}{|Z_1|^2} = \frac{V^2 R_1}{R_1^2 + X_1^2} \quad (37)$$

$$P_o = \frac{V^2}{R_{bres}} \quad (38)$$

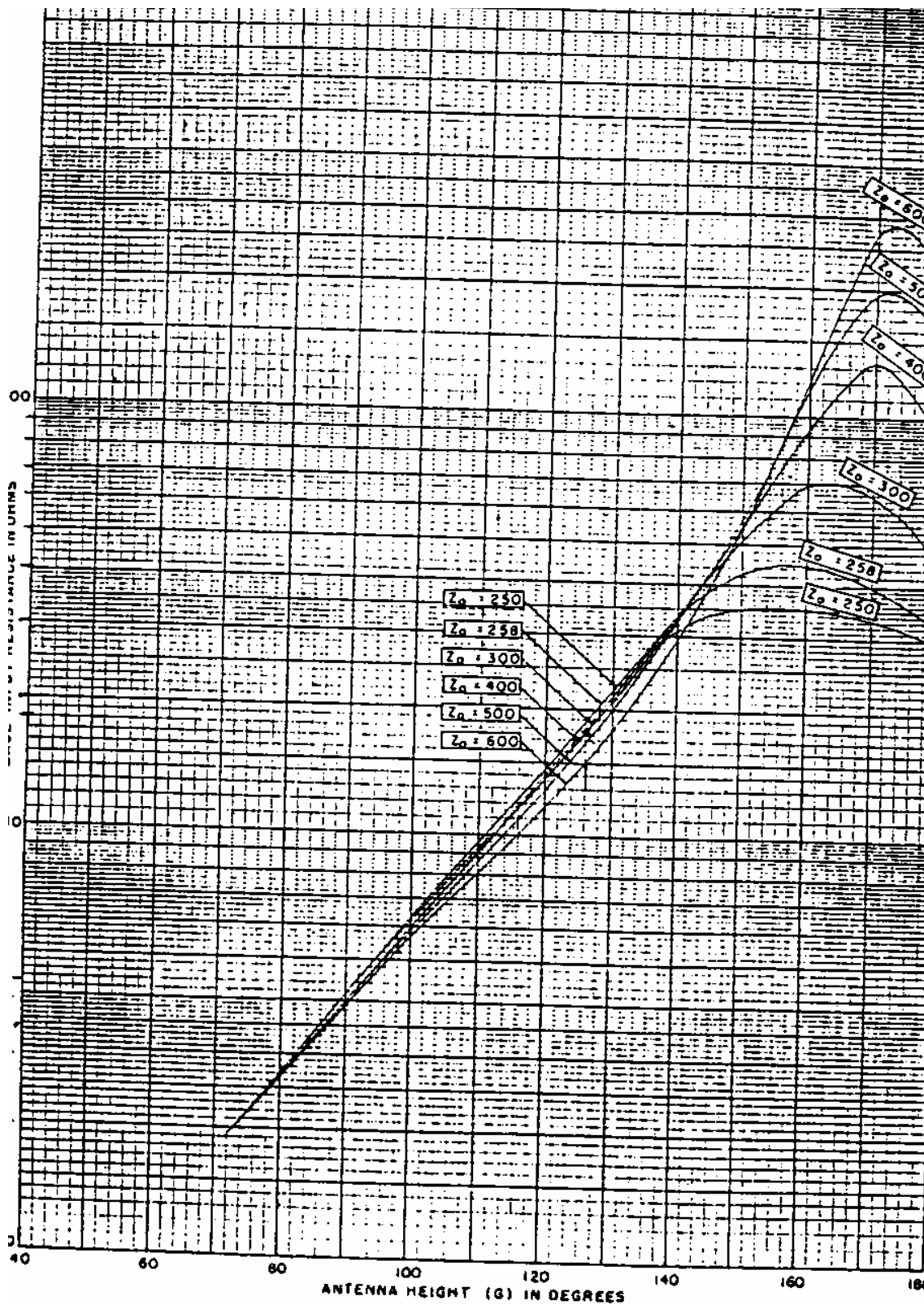


Fig.7.- BASE INPUT RESISTANCE OF CYLINDRICAL ANTENNAS OVER A PERFECTLY CONDUCTING GROUND PLANE

Fig.7 Familia de curvas de la resistencia de base de una antena monopolo, en función de la altura eléctrica, teniendo como parámetro la impedancia característica promedio de la antena. Tómese en cuenta las escalas: vertical - logarítmica, horizontal - lineal

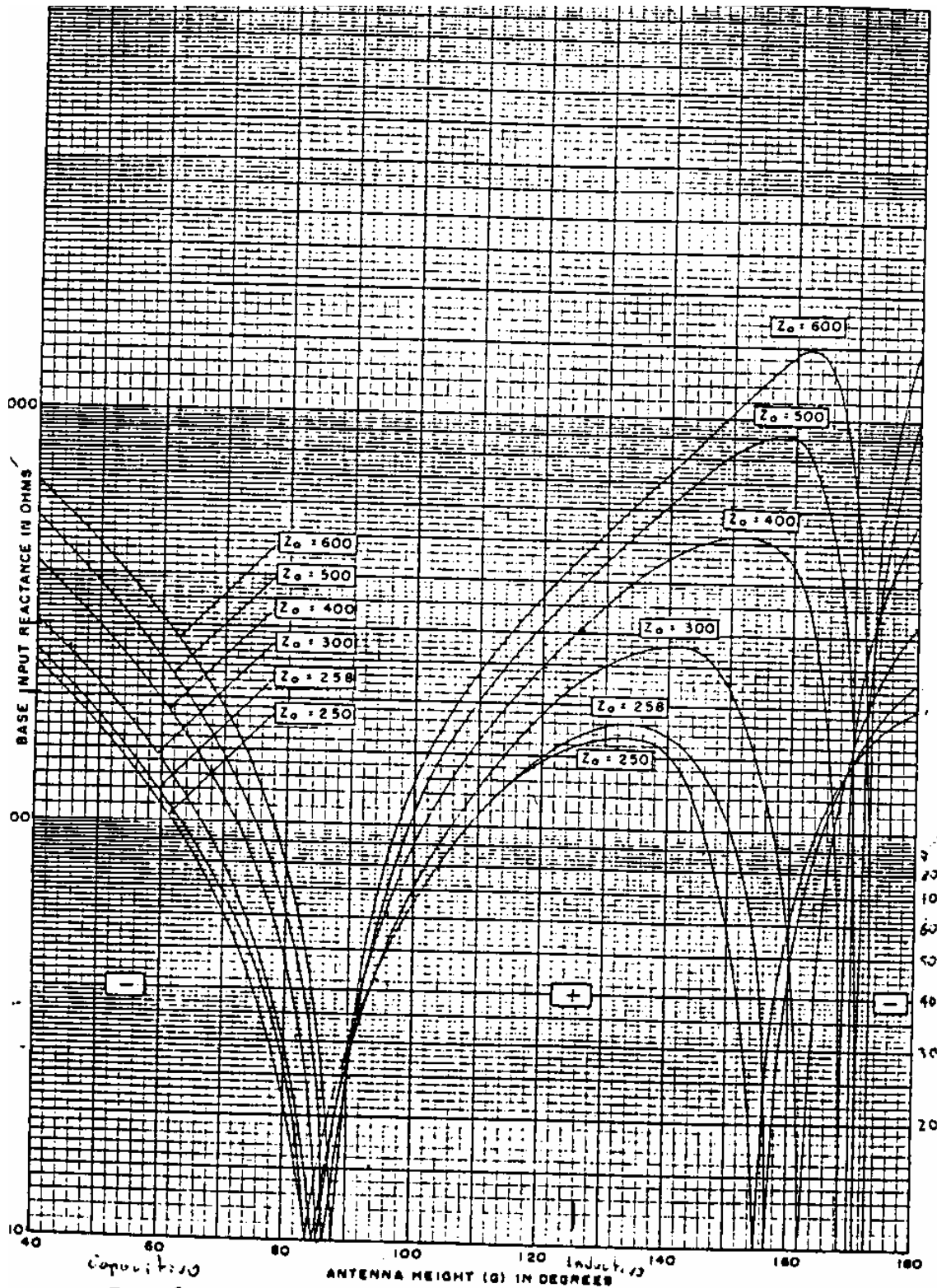


Fig. 8. — BASE INPUT REACTANCE OF CYLINDRICAL ANTENNAS OVER A PERFECTLY CONDUCTING GROUND PLANE

Fig. 8 Familia de curvas de reactancia de base para una antena monopolo, en función de la altura eléctrica G, teniendo como parámetro la impedancia característica promedio, en diagrama log-lineal. Los signos indican las regiones de comportamiento capacitivo (-) o inductivo (+)

$$P_1 = \frac{V^2 R_2}{|Z_2|^2} = \frac{V^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} \quad (39)$$

donde: P_1 potencia a la frecuencia f_1 a la cual la potencia radiada es la mitad de la de resonancia.

P_0 potencia radiada a la frecuencia f_0 ó de resonancia

P_2 potencia a la frecuencia f a la cual la potencia radiada es la mitad de la de resonancia.

$Z_1 = R_1 - jX_1$ impedancia de base de la antena a la frecuencia f_1 .

$Z_2 = R_2 - jX_2$ impedancia de base de la antena a la frecuencia f_2 .

R_{bres} = Resistencia a la frecuencia de resonancia f_0 .

Para determinar las frecuencias f_1 y f_2 se deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\frac{P_0}{P_1} = 2 \frac{\frac{V^2}{R_{bres}}}{\frac{V^2 R_1}{|Z_1|^2}} \Rightarrow R_1^2 + X_1^2 = 2R_1 R_{bres} \quad (40)$$

$$\frac{P_0}{P_2} = 2 \frac{\frac{V^2}{R_{bres}}}{\frac{V^2 R_2}{|Z_2|^2}} \Rightarrow R_2^2 + X_2^2 = 2R_2 R_{bres} \quad (41)$$

POLARIZACION.- Corresponde al comportamiento temporal de las componentes rectangulares del campo eléctrico de radiación. Se define en términos de la orientación del campo eléctrico en la dirección de máxima radiación tomando como referencia el plano de tierra o el eje polar. La polarización depende del tipo de antena y de su posición respecto a la referencia.

Se presentan los siguientes tipos de polarización y sus respectivas condiciones, Fig. 9:

Polarización lineal: el vector de campo eléctrico tiene dos componentes rectangulares en fase.

Polarización vertical: el vector de campo eléctrico tiene una sola componente paralela al eje polar ó perpendicular al plano de tierra.

Polarización horizontal: el vector de campo eléctrico tiene una sola componente perpendicular al eje polar ó paralela al plano de tierra.

Polarización elíptica: el vector de campo eléctrico presenta dos componentes rectangulares de diferente amplitud y con diferencia de fase arbitraria, excepto en fase.

Polarización circular: el vector de campo eléctrico presenta dos componentes rectangulares de igual amplitud y con diferencia de fase de 90 grados.

Segun el sentido de giro del vector de campo electrico en las polarizaciones eliptica y circular se distinguen dos posibilidades: polarización de la mano derecha y polarización de mano izquierda.

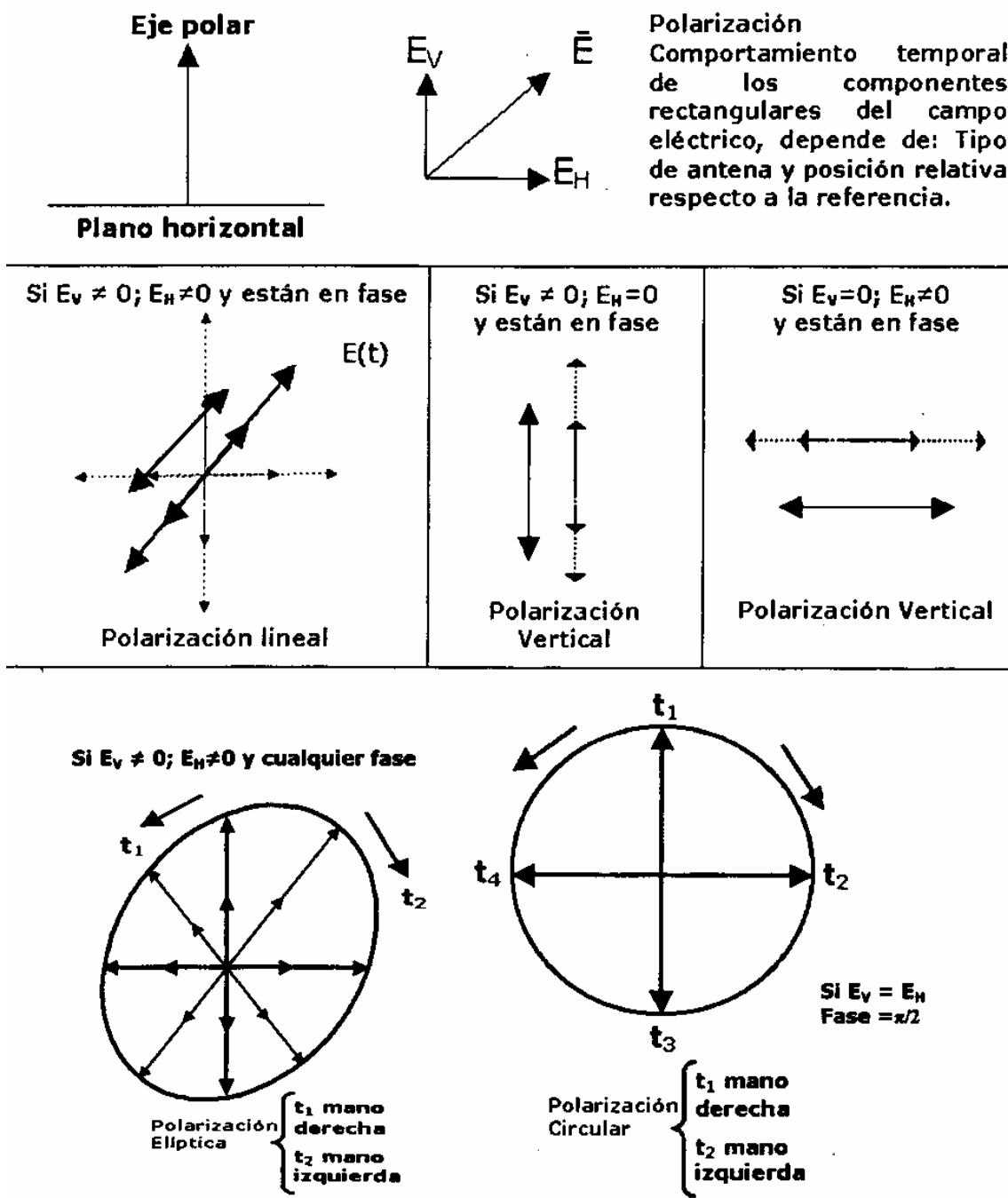


Fig. 9

En la Fig. 9 diferentes tipos de polarización en la aplicación de antenas.

LONGITUD EFECTIVA : Aún que no es una característica de mayor utilidad conviene conocerla y corresponde a la longitud que tendría una antena equivalente a la antena con distribución sinusoidal de corriente, pero con una distribución uniforme de corriente igual a la corriente en el punto de excitación, como se muestra en la fig. 10.

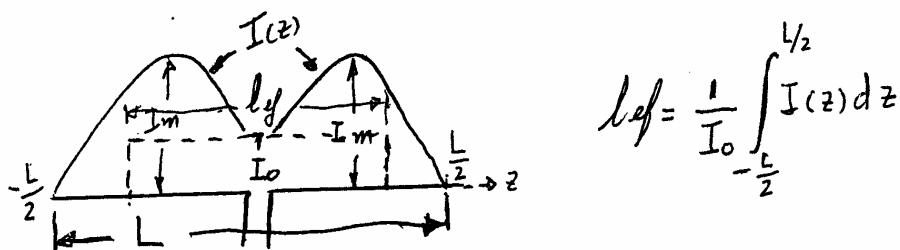


Fig. 10 Evaluación de la longitud efectiva de una antena

AREA EFECTIVA: Establece una relación muy importante especialmente para antenas que actúan como receptoras y parte del siguiente principio: en la Fig. 11 se muestra un enlace entre una antena transmisora y una receptora, la antena Tx transforma la energía guiada en energía radiante produciendo en el sitio de la antena Rx una densidad de flujo de potencia S [w/m²] por su parte la antena Rx convierte esta densidad de flujo de potencia en potencia de entrada P_{in} [w] para excitación del receptor, esta transformación de unidades de w/m² a w, permite concebir a la antena Rx como una área o apertura [m²] que se define como área efectiva de la antena para condiciones de máxima transferencia de potencia mediante la relación:

$$A_{ef} = \frac{g \lambda^2}{4\pi}$$

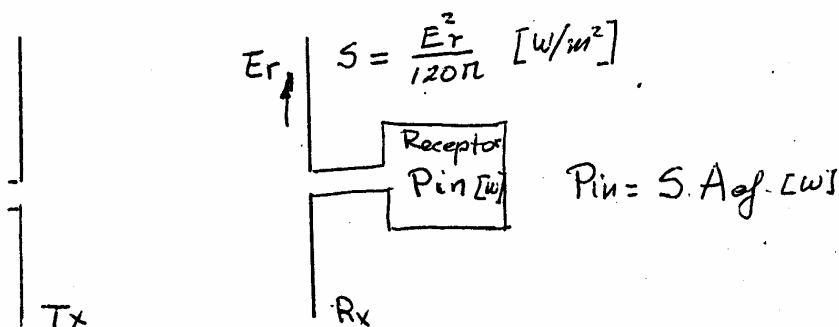


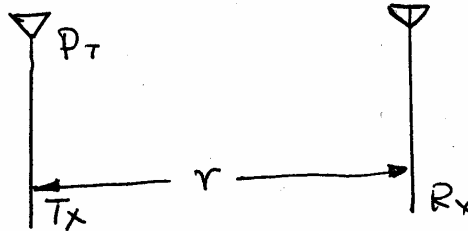
Fig. 11 Evaluación del área efectiva de una antena

MÁXIMA INTENSIDAD DE CAMPO ELECTRICO: corresponde a la intensidad del campo eléctrico que produce una antena transmisora que radia una potencia P_t y tiene una ganancia g_t , en la dirección de máxima radiación, para su evaluación consideremos la fig. 12 con las siguientes condiciones: en primer término asumamos que la antena Tx es isotrópica y radia una potencia P_t , produciendo a una distancia r una densidad de flujo de potencia S_{iso} [w/m²], en segundo término si en lugar de tener una antena isotrópica se tiene una antena con ganancia g_t , pero que radia la misma potencia en el

mismo sitio producirá una densidad de flujo de potencia $S_{iso} \text{ gt}$ [w/m²], relacionando entre si estas cantidades, se tiene:

$$E_{max} = \frac{\sqrt{30 P_T g_t}}{r} \quad [V/m]$$

S_{iso} para antena isotropica



$g_t S_{iso}$ para antena con ganancia

$$g_t S_{iso} = \frac{E_{max}^2}{120\pi}$$

$$g_t \frac{P_T}{4\pi r^2} = \frac{E_{max}^2}{120\pi}$$

$$E_{max} = \frac{\sqrt{30 P_T g_T}}{r} \quad V/m$$

Fig.12 Evaluación de la intensidad máxima de campo eléctrico

CONCLUSIÓN IMPORTANTE: TODAS LAS CARACTERÍSTICAS DE LAS ANTENAS QUE SE HAN DETALLADO SON IDÉNTICAS SI LAS MISMAS TRABAJAN EN CONDICIÓN DE TRANSMISORAS O DE RECEPTORAS

IMPEDANCIA MUTUA: resistencia y reactancia entre antenas lado a lado

$$R_{12} = \frac{15}{\text{sen}G_1\text{sen}G_2} \left\{ \begin{aligned} &\cos(G_2 - G_1) \{ Ciu_1 - Ciu_o \\ &+ Civ_1 - Civ_o + 2Ciy_o - Ciy_1 - Cis_1 \} \\ &+ \text{sen}(G_2 - G_1) \{ Siu_1 - Siu_o + Siv_o \\ &- Siv_1 - Siy_1 + Sis_1 \} \\ &+ \cos(G_2 + G_1) \{ Ciw_1 - Civ_o + Cix_1 \\ &- Ciu_o + 2Ciy_o - Ciy_1 - Cis_1 \} \\ &+ \text{sen}(G_2 + G_1) \{ Siw_1 - Siv_o + Siu_o \\ &- Six_1 - Siy_1 + Sis_1 \} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$x_o = u_o, \quad \text{rad}$$

$$x_1 = \sqrt{S^2 + (G_2 + G_1)^2} - G_2 - G_1, \text{rad}$$

$$y_o = S = \beta d$$

$$y_1 = \sqrt{S^2 + G_2^2} + G_2, \text{rad}$$

$$S_o = y_o = S = \beta d$$

$$s_1 = \sqrt{S^2 + G_2^2} - G_2, \text{rad}$$

$$X_{12} = \frac{15}{\text{sen}G_1\text{sen}G_2} \left\{ \begin{aligned} &\cos(G_2 - G_1) \{ Siu_o - Siu_1 \\ &+ Siv_o - Siv_1 + Siy_1 - 2Siy_o + Sis_1 \} \\ &+ \text{sen}(G_2 - G_1) \{ Ciu_1 - Ciu_o + Civ_o \\ &- Civ_1 - Ciy_1 + Cis_1 \} \\ &+ \cos(G_2 + G_1) \{ Siv_o - Siw_1 + Siu_o - Six_1 \\ &+ Siy_1 - 2Siy_o + Sis_1 \} \\ &+ \text{sen}(G_2 + G_1) \{ Ciw_1 - Civ_o + Ciu_o \\ &- Cix_1 - Ciy_1 + Cis_1 \} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

If the antennas are of equal height

($G=G_1=G_2$) Eq. (21) and (22) reduce to,

$$R_{12} = \frac{15}{\text{sen}^2G} \left\{ \begin{aligned} &4Ciu_1 - 2Ciu_o - 2Civ_o \\ &+ \cos 2G \{ Ciw_1 - 2Civ_o + Cix_1 \\ &- 2Ciu_o + 2Ciu_1 \} \\ &+ \text{sen} 2G \{ Siw_1 - 2Siv_o \\ &- Six_1 + 2Siu_o \} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

R_{12} = mutual base resistance between antennas

No. 1 and No. 2 ohms

X_{12} = mutual base reactance between antennas

No. 1 and No. 2 ohms

G_1 = height of No. 1 antenna, βH_1 , rad.

G_2 = height of No. 2 antenna, βH_2 , rad.

Si = sine integral function

Ci = cosine integral function

S = spacing between antennas, βd , rad.

$$u_o = \sqrt{S^2 + G_1^2} - G_1, \text{rad}$$

$$u_1 = \sqrt{S^2 + (G_2 - G_1)^2} + G_2 - G_1, \text{rad}$$

$$v_o = \sqrt{S^2 + G_1^2} + G_1, \text{rad}$$

$$v_1 = \sqrt{S^2 + (G_2 - G_1)^2} - G_2 + G_1, \text{rad}$$

$$w_o = v_o$$

$$w_1 = \sqrt{S^2 + (G_2 + G_1)^2} + G_2 + G_1, \text{rad}$$

$$X_{12} = \frac{15}{\text{sen}^2G} \left\{ \begin{aligned} &-4Siu_1 + 2Siu_o + 2Siv_o \\ &+ \cos 2G \{ -Siw_1 + 2Siv_o - Six_1 \\ &+ 2Siu_o - 2Siu_1 \} \\ &+ \text{sen} 2G \{ Ciw_1 - 2Civ_o \\ &- Cix_1 + 2Ciu_o \} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

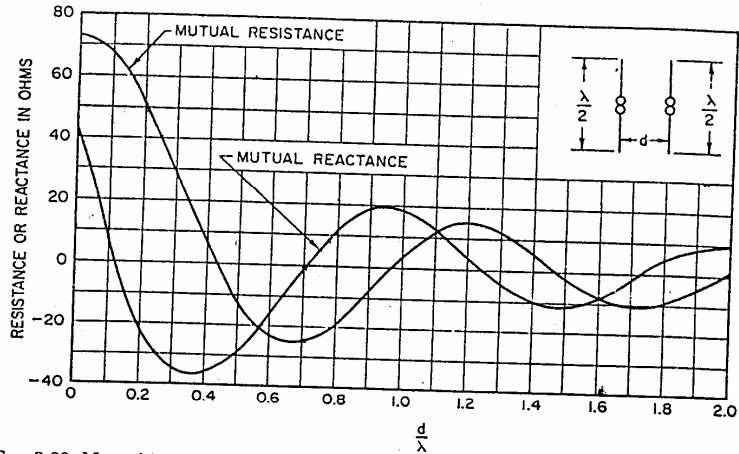


Fig. 3-30. Mutual impedance between two parallel half-wave antennas placed side by side.

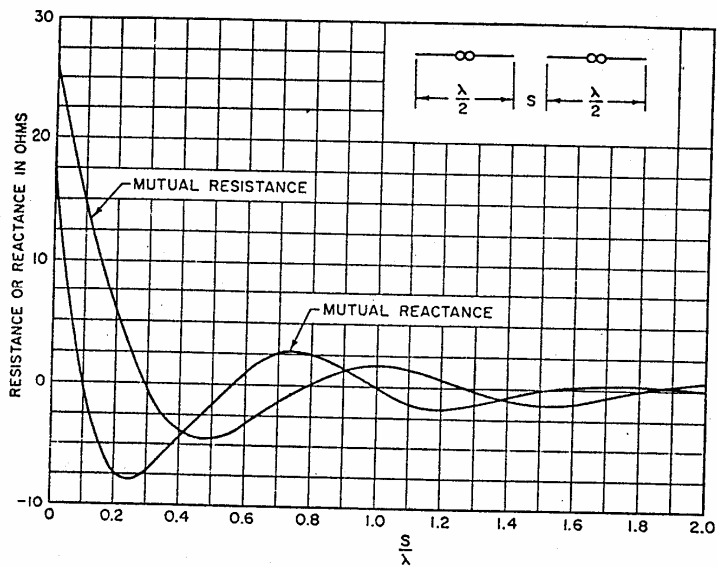


Fig. 3-31. Mutual impedance between two collinear half-wave antennas.

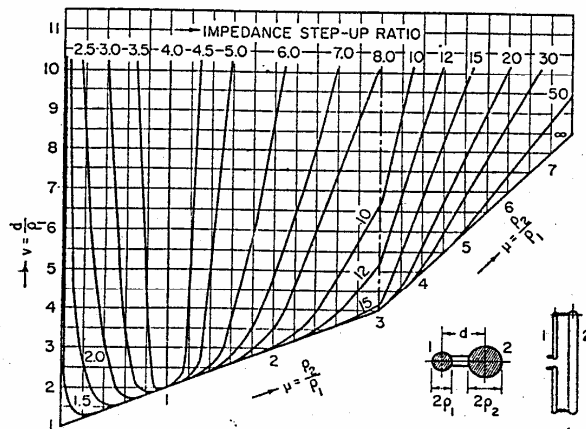


Fig. 3-20. Step-up transformation chart for a folded dipole.