PROBABILIDAD

1.- Elementos Conceptuales Básicas

- Espacio Muestral Ω
- Evento $\omega \in \Omega$; $A \subseteq \Omega$
- Álgebra de eventos $\mathcal{A}$; $A \in \mathcal{A}$

$$p: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]\ R$$
$$A \longrightarrow p(A)$$

Axioma	A1	$0 \leq p(A) \leq 1$
	A2	$p(\Omega) = 1$
	A3	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ CuandoA y B son excluyentes

COMBINATORIA

Variaciones $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Combinaciones $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Permutaciones $P_n = n!$

INDEPENDENCIA

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Condicionalidad $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

TEOREMA

P Completa $P(A) = \Sigma P(B_k)P(A \mid B_k)$

Bayes $P(B_K \mid A) = P(B_K)\ P(A \mid B_K)/P(A)$

2.- Variables Aleatorias (V.A.)

$$\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow \xi(\omega)$$
$$\xi(\Omega) \subsetneq \mathbb{Z} \Longrightarrow \text{V.A. Discreta}$$
$$\xi(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \text{V.A. Continua}$$

V.A. Discreta

- Función de densidad f

  $f(x_j) = P(\xi = x_j)$

- Función de Distribución F

  $F(t) = P(\xi \leq t) = \sum_{x_j \leq t} f(x_j)$

V.A. Continuas

- Función de densidad f
- Función de Distribución F

  $F(t) = P(\xi \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

  $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

FUNCION DE V.A.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "x"'] & A \subsetneq \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$Y = g(x)$

$= g_0 x$

3.- Esperanza y Varianza

ESPERANZA E (x)

$E(x) = \Sigma\ P_k\, x_k$ (D)

$E(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} x\, f(x)\, d x$ (C)

Propiedades:

$E(x+y) = E(x) + E(y)$

$E(\lambda x) = \lambda E(x)$

$E(c) = c$

VARIANZA Var (x)

$Var(x) = E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - E(x)^2$

$Var(x) = \Sigma\, p^k (x_k - E(x))^2$ (D)

$Var(x) = \int (x - E(x))^2 f(x)\, d x$ (C)

- Desviación Estándar σ
- Covarianza COV (x,y)
  $\sigma^2 = Var(x)$
- $Var(\lambda x) = \lambda^2\, Var(x)$
- $Var(x + y) = Var(x) + Var(x) + 2Cov(x,y)$

4.- Distribuciones de Pbdd

DISCRETA

- Uniforme $P(x = x_k) = {}^1/n$
- Bernoulli $P(x = 1) = p \quad P(x = 0) = q$
- Binomial $P(x = \kappa) = Cn^k\, p^k\, q^{n-k}$
- Hipergeometrica $P(x = \kappa) = \dfrac{Cn1^k\ Cn2^{r-k}}{Cn1+n2^r}$
- * Poisson $P(x = \kappa) = \dfrac{e^{-\lambda}\, \lambda^k}{k!}$

CONTINUAS

- Uniforme $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \in [a,b] \end{cases}$
- Exponencial
  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- Normal
  $f(x) = \dfrac{e^{-(x-m)^2/2\sigma 2}}{\sqrt{2}\, \pi\sigma}$

ESTADISTICA

7.- Medidas de Tendencia Central y Dispersión

TENDENCIA CENTRAL

- <u>Media Muestral</u> $\bar{x} = (\Sigma xi) / n$
- <u>Mediana</u> (Med) es el valor que se encuentra en el punto medio cuando se ordenan los datos.
- <u>Moda</u> (Mo) es el valor de mayor frecuencia.

DISPERSION

- <u>Varianza Muestral</u> $S^2 = \dfrac{\Sigma (xi - \bar{x})^2}{(n-1)}$

- <u>Rango</u> = Xmax – Xmin
- <u>Desviación Absoluta de la Mediana</u>

  DAM = Med $\{ | xi - Med | \; i = 1 \ldots n \}$

TEOREMAS

$\boxed{T1}$ Limite Central $\bar{x} \rightarrow N(\mu, \sigma^2/n)$

$\boxed{T2}$ Aproximación Normal a la Distribución Binomial $\beta(n, p) \simeq N(m, \sigma^2)$ $m = p$

$\sigma^2 = pq / n$

$\boxed{T3}$ Varianza Muestral

$(n-1)\ S^2 / \sigma^2 \rightarrow X^2 (n-1)$

8.- Estimación de Parámetros

- Estimador $\hat{\Theta}$ de Θ
- Insesgado $E(\hat{\Theta}) = \Theta$
- **ESTIMACIÓN PUNTUAL**

  $\hat{U} = x$ $\hat{\sigma}^2 = S^2$
- **ESTIMACIÓN POR INTERVALOS**

  $1 - \alpha$ = Nivel de Confianza

  $P(Lic \leq \Theta \leq LSC) = 1 - \alpha$

- Estimación de la Media

  a) $\left(\bar{x} - Z \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + z \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

  b) $\left(\bar{x} - t \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{S}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + t \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

- Estimación de la Varianza

  $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{X^2 \frac{\alpha}{2} (\nu)}, \ \dfrac{(n-1)S^2}{X^2 (1 - \alpha/2)(\nu)} \right]$

- Estimación de la Proporción

  $\left[\hat{p} - Z \dfrac{\alpha}{2} \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \ \hat{p} + Z \dfrac{\alpha}{2} \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right]$

9.- Prueba de Hipótesis

Sistema

C1.- Hipótesis Nula H_0

C2.- Hipótesis Alternativa H_1

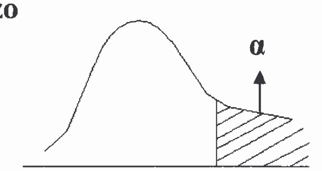
C3.- Estadística de Prueba

C4.- Región de Rechazo ω

Tipo de Errores

Dcc	H_0: V	H_0: F
Rech H_0	E I	Decisión Correcta
No Rech H_0	Decisión Correcta	E II

Región de Rechazo



Región de Aceptación

Región de Rechazo

Tipos de Test de Hipótesis

- Media poblacional
- Varianza
- Proporción
- Diferencia de Medias
- Razón entre Varianzas
- Diferencia entre proporciones
- Prueba X^2 Bondad de Ajuste
- Tablas de Contingencia
- Hipótesis de Independencia

10.- Regresión Lineal

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$

$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$

$$b_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{\sum (X_i - \bar{x})^2} = \frac{SC_{xy}}{SC_{xx}}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

- **Coeficiente de Correlación r**

$$r = \frac{SC_{xy}}{(SC_{xx}\, SC_{yy})^{1/2}}$$

$-1 \leq r \leq 1$

- Presentación Matricial
- Análisis de Varianza
- Transformación de Modelos no Lineales a Lineales

1.- Elementos Conceptuales Básicos de Probabilidad

* **Evento** es el resultado de un experimento
* **Espacio Muestral** Ω es el conjunto de todos los eventos
* **Evento Elemental** $\omega \in \Omega$
* **Evento** $A \subseteq \Omega$

Lógica de Eventos es similar a la **Lógica de Conjuntos**

* Por lo menos uno de los eventos A ó B ocurren	$x \in A \cup B$
* Ambos eventos A y B ocurren	$x \in A \cap B$
* No ocurre A	$x \in A^c$
* Si ocurre también B	$A \subseteq B$
* A y B eventos excluyentes	$A \cap B = \emptyset$

Álgebra de Eventos

$A \in \mathcal{A}$ $\qquad \Omega \in \mathcal{A}$ $\qquad \emptyset \in \mathcal{A}$

si $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

si $A_i \in \mathcal{A}$, $c = 1 \ldots n$ $\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \cup A_i \in \mathcal{A} \\ \cap A_i \in \mathcal{A} \end{array} \right.$

Probabilidad p

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] \subseteq R$$
$$A \longrightarrow p(A)$$

Axiomas

$$\left| \begin{array}{ll} A_1 & 0 \leq p(A) \leq 1 \\ A_2 & p(\Omega) = 1 \\ A_3 & p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset \end{array} \right.$$

Teorema $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Análisis Combinatorio

$B = (b_i | \ i = 1 \ldots n)$

- **Variaciones.-** El número de Conjuntos Ordenados de K elementos que pueden obtenerse a partir de un conjunto de n elementos An^k.
- **Combinaciones.-** El número de Conjuntos no Ordenados de K elementos que pueden obtenerse a partir de un conjunto de n elementos Cn^k.
- **Permutaciones.-** Son variaciones de n elementos a partir de un conjunto de n elementos Pn.

$$An^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad Cn^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad Pn = An^n = n!$$

Parejas card $A \times B = n_1 \cdot n_2$

$A = \{ a_i \mid i = 1 \ldots n_1 \} \qquad B = \{ b_j \mid j = 1 \ldots n_2 \}$

$A \times B = \{ (a_i, b_j) \mid a_i \in A \ \ b_j \in B \}$ card $A = n_1$ card $B = n_2$

- **Arreglos Multiples** card $(A_1 \times A_{2 \ldots} \times A_p) = ?$

$A_i = \{ a_{ij} \mid j = 1 \ldots n_i \}$ card $(A_i) = n_i \quad i = 1..p$

$A_1 \times A_{2x} \ldots A_p = \{ (a_{1i1}, a_{2i2} \ldots a_{pip}) \mid a_{jij} \in A_j \}$

card $(A_1 \times A_{2x} \ldots x A_p) = \prod_{i=1}^{p} n_i$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA pbdd

$$P(A) = \frac{\mathcal{M}(A)}{\mathcal{M}(\Omega)} = \frac{\text{Medida Eventos Favorables}}{\text{Medida Eventos Posibles}}$$

INDEPENDENCIA DE EVENTOS

A y B se llaman eventos independientes si $p(A \cap B) = p(A) \ p(B)$

Condicionalidad $p(A|B) = p(A \cap B) / p(B)$

Formula de Bayes $p(A \cap B) = p(A|B) \ P(B)$

Teoremas Pbd Completa $p(A) = \Sigma \ p(B_i) \ p(A|B_i)$

Bayes $P(B_k|A) = [P(A|B_k) \ P(B_k)] / P(A)$

Variables Aleatorias (VA)

Def ξ Una Variable Aleatoria es una función que va del espacio Muestral en los Reales.

$\xi : \Omega \rightarrow R$ $\quad\quad$ ω Evento Elemental

$\quad \omega \rightarrow \xi(\omega)$

Im $\xi = \xi(\Omega) \subseteq R$ → Subconjunto | Finito α ; Infinito | Num β ; ~~Num~~ δ

Subconjunto Finito
Subconjunto Infinito Numerable | Variable Aleatoria Discreta

Subconjunto Infinito No Numerable

↓

Variable Aleatoria Continua

---

2 Variable Aleatorias Discretas

$\Omega = | w_1, w_2, \ldots w_n |$ $\quad\quad$ $\Omega = | w_1, w_2, \ldots wi \ldots |$

Def f Función de densidad discreta

$F(t) = P \; | \xi = t | \geq 0$ $\quad\quad$ $\sum_{i01}^{n} pi = 1$ $\quad\quad$ $\sum_{i=1}^{\infty} pi = 1$

Def F Función de Distribución discreta

$\forall \; t \in R$ $\quad\quad$ $F(t) = P(\xi \leq t)$

Ppds p1 F es creciente $\quad\quad$ p2 $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$

p3 $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$ $\quad\quad$ p4 $F(t) = P(\xi \leq t) = \sum_{x_j \leq t} f(xj)$

p5 $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) + P(\xi = a)$

p5´ $P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$

3.- Variables Aleatorias Continuas

$P \mid \xi = x \mid = 0$

Def F Función de Distribución continua

$\forall t \in R \qquad F(t) = P(\xi \leq t)$

Ppds p1 F es creciente $\qquad$ p2 $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$

p3 $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$ $\qquad$ p4 $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$

Def f Función de densidad $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \qquad f(x) = F^1(x)$

$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

---

4 Distribuciones de Funciones de V_S A_S

Tenemos 2 variables Aleatorias $X \wedge Y$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"'] & A \subseteq B \subseteq R \arrow[d, "g"] \\ & R \end{tikzcd}$$

$Y = g(x)$

g es inversible $\Rightarrow$

$g^{-1} = h \quad \begin{cases} Y = g(x) \text{ ssi} \\ x = h(y) \end{cases}$

$Y(\omega) = g(x(\omega))$

$F_y(t) = P(Y \leq t) = P(g(x) \leq t) = P(x \leq h(t)) = F_x(h(t))$

Resumiendo $\quad F_y(t) = F_x(h(t))$

$F_y^{\prime}(t) = F_x^{\prime}(h(t))\, h'(t) = f_y(t) = f_x(h(t)) \,.\, h'(t)$

Capitulo 4

Esperanza y Varianza

Prof.: Mat. Edgar Gordón Luna

Esperanza Matemática

Def.: $E(x) = \sum_{k-1}^{b} p_k X_k$

$E(x) = \sum_{k-1}^{\infty} p_k X_k$

V.A Discreta

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

V.A Continuas

Propiedades

- $E(c) = c$
- $E(x+y) = E(x) + E(y)$
- $E(\lambda x) = \lambda E(x)$

Esperanza es una Aplicación Lineal

- $E(y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\, dx$
- $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x)\, dx$

Def.: X y Y son Variables Aleatorias Independientes

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

Varianza

$\boxed{D}$ $\quad Var(x) = E(x-E(x))^2$
$= E(X)^2 - (E(x))^2$

$$Var(x) = \sum_{k=1}(x_k - E(x))^2\, p_k$$
$$= \sum_{k=1} X_k^2\, p_k - (\sum X_k\, p_k)^2$$

V.A
Discreta

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(x))^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f'(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx\right)^2$$

Definición.- Desviación Estandar σ

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

Ppds.-

$Var(C) = 0 \qquad C = kte$

$Var(\lambda x) = \lambda^2 Var(x)$

$Var(x+y) = Var(x) + Var(y) + 2\, Cov(x,y)$

Definición.- Covarianza x,y

$COV(x,y) = E[(x - E(x))\,(y - E(y))]$

$= E(xy) - E(x)\, E(y)$

Ppd

Si X, Y son V.A Independientes $\Longrightarrow$ $COV(x,y) = 0$

Capitulo 5

Principales Distribuciones Probabilísticas

D1 Discretas
Cj Continuas

D1 Uniforme Discreta

- Posible valores = $\{1, 2, \ldots k_1, \ldots n\}$
- $P(x = k) = p_k = 1/n$
- $E(x) = (n + 1) / 2$ $Var(x) = (n^2 - 1) / 6$

D2 Bernoulli

* Posible valores = $\{0, 1\}$ = {Éxito, Fracaso}
  $P[x = 0] = 1 - p = q$ $P[x = 1] = p$
  $E(x) = p$ $Var(x) = pq$

D3 Binomial $\beta(n, p)$

Posibles Valores = $\{0,1,2 \ldots k \ldots n\}$
X = # de éxitos en n intentos
$p[x = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$
$E(X) = np$ $Var(X) = npq$

D4 Hipergeometrica

Posibles valores = $\{0, 1, 2, \ldots k \ldots \min\{n_1, r\}\}$
n1 = Bolas rojas n2 = Bolas negras
n = n1 + n2 = # total de bolas
Evento = Encuentro k bolas rojas
En un montón de r bolas

$Pr(x=k) = \frac{C_{n1}^{k} C_{n-n1}^{r-k}}{C_n^r}$ $E(x) = n_1 = np$

$Var(x) = npq \frac{n - n_1}{n_1 - 1}$

D5 Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Posibles Valores = $\{0, 1, 2, \ldots k, \ldots n \ldots \infty\}$
$P[x = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$E(x) = \lambda$ $Var(x) = \lambda$

CONTINUAS

C1 Uniforme $\mathcal{U}$(a,b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \angle a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

E(x) = (a + b) /2 Var(x)= (b - a)^2 / 12

C2 Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

E(x) = 1 / λ Var (x) = 1 / λ^2

C3 Normal $\mathcal{N}$(m. σ^2)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \ell^{-(x-m^2/2\sigma^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \ell^{-(x-m)^2} / 2\sigma^2 dx$$

E(x) = m Var(x) = σ^2

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-X^2/2}$$

$$\theta(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \ell^{-t^2/2} dt$$

$\mathcal{N}(0,1)$

$$F(x) = \theta\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$\Pr(m - n\sigma \leq x \leq m + n\sigma) = \int_{m-n\sigma}^{m+n\sigma} f(x) dx = \begin{cases} 0.68 & \text{si } n = 1 \\ 0.95 & \text{si } n = 2 \\ 0.99 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

ESTADISTICA
Capitulo I

Medidas y Distribuciones de Muestreo

1.- Medidas de Tendencia Central

Se tiene un conjunto de n mediciones
$X_1, X_2, \ldots X_n$

Media Muestral $x = (\sum_{1=1}^{n} Xi)/n$

Mediana.- Es el valor que se encuentra en el punto medio cuando se ordenan los datos.

(Si n impar $\Rightarrow$ Med = $X_{\frac{n+1}{2}} = Q_2$)

(Si n par $\Rightarrow$ Med = $\frac{1}{2}\left(X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}\right) = Q_2$)

Moda (Mo).- Es el valor de mayor frecuencia Absoluta.

Media Segada.- Es la media de los datos que quedan luego de eliminar el mismo porcentaje (generalmente 5) en los valores más altos y en los más bajos.

2.- Medidas de Dispersión

Varianza Muestral $S^2 = \sum_{1=1}^{n}(Xi - X)^2/(n-1)$

Desviación Estandar $S = \sqrt{S^2}$

Rango = Val Max – Val min

Cuartil Inferior (superior) es la mediana de la mitad inferior (superior) de los datos (Q_1, Q_3)

Rango Intercuartil RiQ = $Q_3 - Q_1$
RIQ = CuartilSup – CuartilInferior

Desviación Absoluta de la Mediana

DAM = Med $\{x_i - Q_2 \; i = 1....n\}$

Distribuciones ~~Desviaciones~~ Muestrales

T1.- Teorema del Límite Central
Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n de una población cuya media es μ y su varianza σ^2, entonces la V.A. media muestral $\bar{x}$ tiene aproximadamente una distribución normal con media igual a μ y varianza = σ^2/n

$$x \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \qquad P_x(\bar{x} \le b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

T2.- Aproximación Normal a la Distribución Binomial
Supóngase que tenemos $X_1, X_2, \ldots X_n$ observaciones provenientes de una ley de Bernoulli.

Xi	Pi
1	p
0	q

p + q = 1

Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} Xi$

Y mide el n° de éxitos en n intentos.

La proporción de éxitos es $\frac{y}{n} = \frac{1}{n}\sum Xi = \hat{p}$

$Y \rightsquigarrow \beta(n, \hat{p})$ por el teorema de Limite Central $\hat{p} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

T3.- Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ Variables Indepen $N(U, \sigma^2)$

La Variable Aleatoria $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ tiene la función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} x^{(n-3)/2} \ell^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow X^2(n-1) \qquad \text{Var}(S^2) = 2\sigma^4/(n-1)$$

CAPITULO 8
ESTIMACION DE PARAMETROS

Def. Un Estimador es una medida estadistica que permite conocer o tener una idea del valor de un parametro descocido basandose en la información muestral.

Def. Un Estimador Puntual ~~Dando~~ Dadas las observaciones $X_1, X_2, \ldots.. X_n$ un estimador puntual $\hat{\theta}_n$ de un parametro θ de la población, es un valor númerico que permite conocer aproximadamente el verdadero valor de θ.

Def. Estimador Insesgado $E(\hat{\theta}) = \theta$

$\hat{U} = x \qquad \hat{\sigma}^2 = S^2$

Def. Estimador por intervalo de un parametro desconocido θ es (a,b) tal que

$$a \le \hat{\theta} \le b$$

Un Intervalo de Confianza es un intervalo en el que existe una pbdd (1-α) de que contenga el verdadero valor de θ del parametro estimado. 1- α se denomina nivel de confianza $\Pr(LIC \le \theta \le LSC) = 1- \alpha$

a) Estimación de la Media Poblacional (M. grande).

Supongase que se desea estimar la media poblacional de un parametro u cuyo varianza σ^2 nos es ~~conocer~~ conocida y se dispone de una muestra de n ~~medidas~~ mediciones $X_1, X_2, \ldots.. X_n$

$$\cup \in \left(x - Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x + Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

para un nivel de confianza (1- α)

b) Estimación de la media poblacional (caso general)

σ es desconocido o el tamaño de la muestra es pequeño.

$$T = \frac{x-u}{s/\sqrt{n}}$$

Este estadistica significa una distribución t de Student con (n-1) grados de libertad

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(n-1)} \\ \xrightarrow{\alpha/2} \end{array} \boxed{} \longrightarrow t_{\alpha/2}^{(n-1)}$$

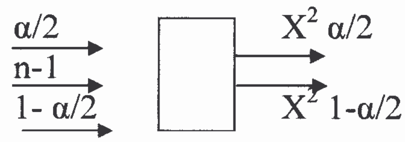
$$\cup \in \left(x - t\frac{\alpha}{2}\frac{S}{\sqrt{n}}, x + t\frac{\alpha}{2}\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

para un nivel de confianza (1-α)

c) Estimación de la Varianza (Distrib-Normal)

$$X^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \qquad\qquad X^2_{\gamma} \qquad \nu = n-1 g.l$$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\alpha/2}(\nu)}, \frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\alpha/2}(\nu)} \right)$$



para un nivel de confianza (1-α)

d) Estimación de la Proporción

$$p \in \left(\hat{p} - Z\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

para un nivel de confianza (1- α)
Por el teorema de Límite Central.

Regresión Lineal

$Y = \beta_0 + \beta_1 x$ (Deter) $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \in$ (Est)

$E(\in) = 0$ $\quad Var(\in) = \sigma^2$ $\quad \in \quad N(0, \sigma^2)$

Mínimos Cuadrados

$\hat{Y} = b_0 + b_1 x$ $\quad b_0 = ?$ $\quad b_1 = ?$

$\hat{Y}i = b_0 + b_1 Xi$

SCE = $\sum (yi - \hat{Y}i)^2 = \sum [yi - (b_0 + b_1 Xi)]^2$

Queremos que SCE sea mínimo $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial SCE}{\partial b_0} = 0 \\ \dfrac{\partial SCE}{\partial b_1} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b_1 = \dfrac{\sum (Xi - \bar{x})(Yi - \bar{y})}{\sum (Xi - \bar{x})^2} = \dfrac{SCxy}{SCxx} \\ \\ b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{array}\right.$$

Coeficiente de Correlación

$$\rho = \frac{SCxy}{\sqrt{SCxxSCyy}} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

Test de Hipótesis $\begin{array}{ll} H_0 & \rho = 0 \\ H_1 & \rho \neq 0 \end{array}$

Estadística de prueba $\quad tab = \dfrac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$

Región de Aceptación $\left(-t\dfrac{\alpha}{2}(n-2), t\dfrac{\alpha}{2}(n-2)\right)$

Transformación de Ms no Lineales en Lineales

Exponencial I $\quad Y = \ell^{\beta_0 + \beta_1 x} \in \quad [\ln y = \beta_0 + \beta_1 x + \ln \in]$

Reciproco $\quad Y = 1/[\beta_0 + \beta_1 x + \in] \quad \left[\dfrac{1}{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \in\right]$

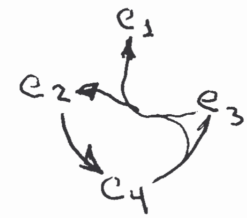
Multiplicativo $\quad Y = \alpha x^{\beta} \in \quad [\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x + \ln \in]$

Exponencial II $\quad Y = 1/\left[\ell^{\beta_0 + \beta_{1x+\in}}\right] \quad \left[\ln \dfrac{1}{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \in\right]$

CAPITULO 9
PRUEBA DE HIPOTESIS

Sistema Prueba de Hipotesis

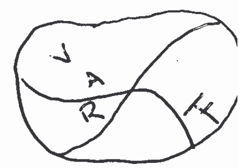
C1 Hipotesis Nula H_0
C2 Hipotesis Alternativa H_1
C3 Estadístico de Prueba
C4 Región de Rechazo ω



Tipos de Errores

Hipotesis Nula H

Decisión	V	F
Rechazo H_0	Error I	Decisión Correcta
Aceptar H_0	Decisión Correcta	Error II

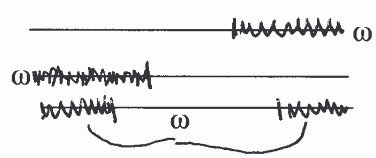


Prob (EI) = α Prob (EII) = β

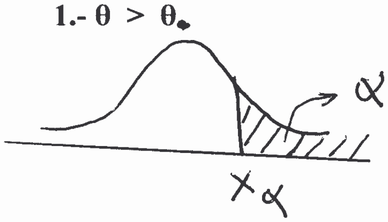
α Nivel de Significacion de la Prueba Estadistica

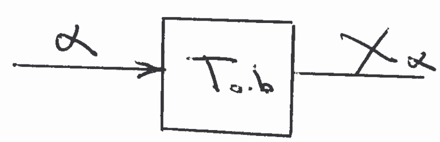
Región de Rechazo ω

C1 $^{1}_{2}$ Unilateral
C2 $_{3}$ Bilateral

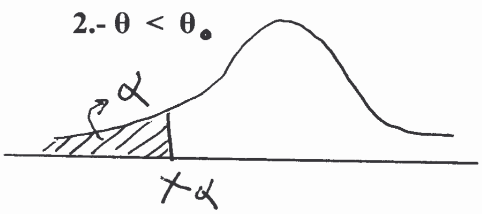


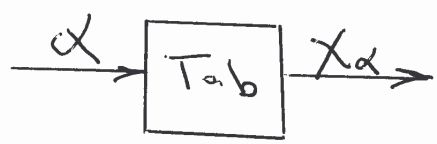
1.- $\theta > \theta_0$



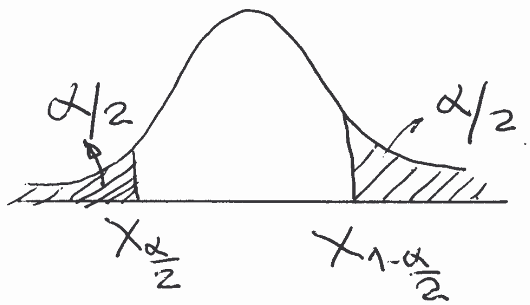


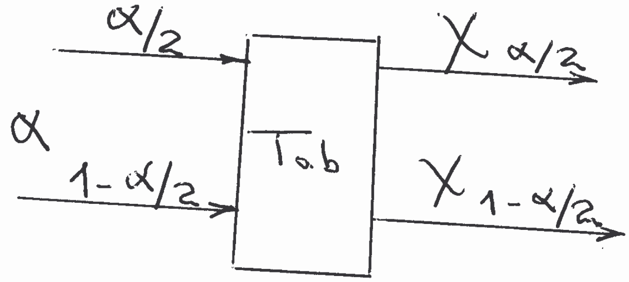
2.- $\theta < \theta_0$





3.- $\theta \neq \theta_0$





	ω^c **Región Aceptación**	ω **Region de Rechazo**
1	$(-\infty, x\alpha)$	$[x\alpha, \infty)$
2	$(x\alpha, \infty)$	$(-\infty, x\alpha]$
3	$\left(x\frac{\alpha}{2}, X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$	$\left(-\infty, x\frac{\alpha}{2}\right] \cup \left[x_1 - \frac{\alpha}{2}, \infty\right]$

Ejemplo

	Media Poblacional	
C1	H_0	$u = u_0$
C2	H_1	$u \neq u_0$

C3 Estadistica de Prueba $Z_0b_3 = \dfrac{x-u}{\sigma / \sqrt{n}}$

C4 Región de Rechazo $= \omega = \left(-\infty, Z - \frac{\alpha}{2}\right] \cup \left[Z\frac{\alpha}{2}, \infty\right)$

$Z_{0bs} \in \omega \Rightarrow \text{Re}chazo H_0$ $\quad Z_{obs} \notin \omega \Rightarrow Acepta H_0$

Test de Hipótesis

Tipo de Pruebas

Prueba	Distribución
1.- Media H_0: $U = U_0$ a.- Muestras Grandes b.- Muestras Pequeñas	 Normal t de Student
2.- Varianza H_0: $\sigma^2 = \cancel{\sigma_0^2} = \sigma_0^2$	X^2 (n-1)
3.- Proporción H_0: $p = p_0$	Normal
4.- Diferencia H_0: $U_1 = U_2$ entre dos medias poblacionales	Normal t Student
5.- Razón entre 2 varianzas H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	F de Senedecor
6.- Diferencia entre 2 proporciones H_0: $p_1 = p_2$	Normal
7.- Experimento Mutinomial H_0: $p_1 = p_{10}$.........$p_k = p_{k0}$	X^2 (n-1)
8.- Tabla de Contingencia H_0: Hipótesis Nula Hipótesis de Independencia Pij = pi . pj	X^2 (r-1)(c-1)
9.- Bondad de Ajuste a una ley H_0: Los datos siguen una ley L(p)	X^2 (k-1-L)

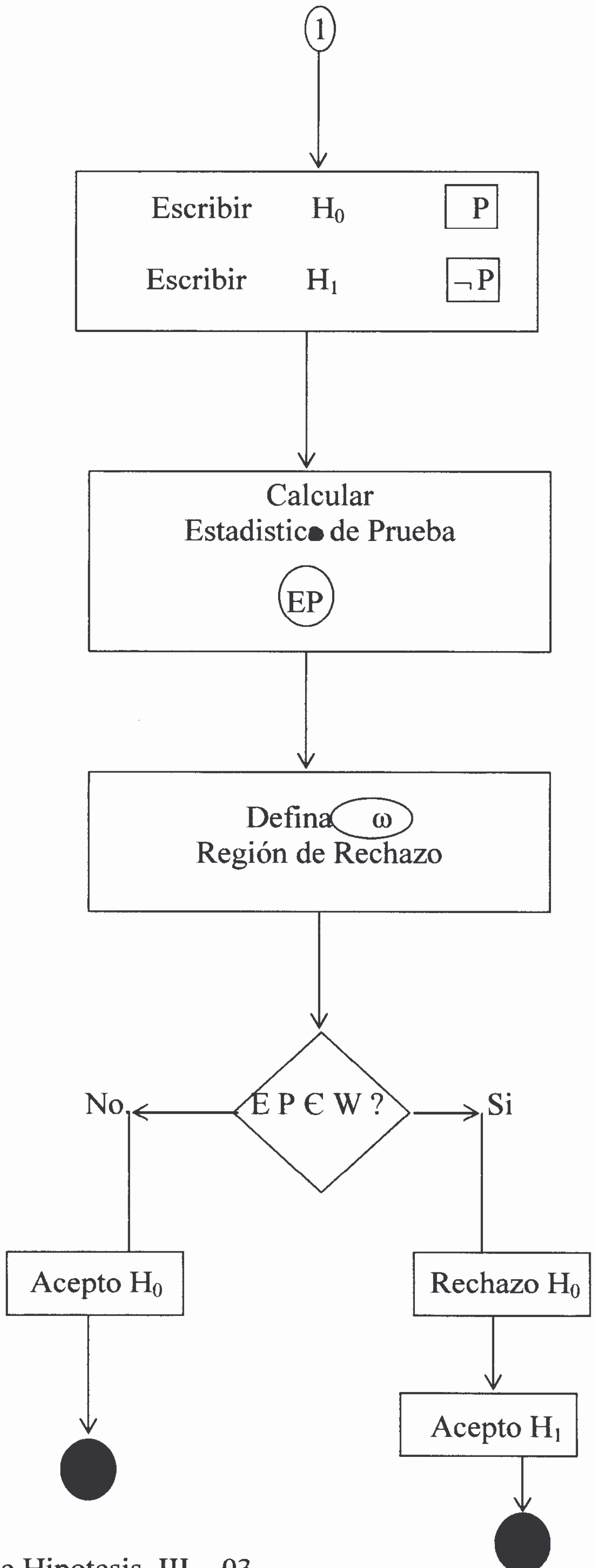


Diagrama Test de Hipotesis III – 03

GUIA DE ESTUDIO

MATEMATICA AVANZADA

Producción: Mat. Edgar Gordón

Escuela de Ingeniería

2003

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Bibliografía Básica

A.- Análisis de Fourier (Hwei Tsu)
B.- Análisis de Fourier (Murray Spiegel)
C.- Variable Compleja (Murray Spiegel)
D.- Transformada de Laplace (Murray Spiegel)

OBJETIVOS:

1. Pensar la representación Especial (D2, D2) en coordenadas Cartesianas, Polares, Cilíndricas, Esféricas.

2. Comprender y Aplicar los diferentes problemas de Frontera relacionados con las Ecuaciones en Derivadas Parciales (Onda, Calor, Laplace).

3. Pensar Complejos

4. Comprender y Aplicar los diferentes objetos conceptuales (α) del Análisis de Fourier en la Solución de Pbs de Fronteras.
   (α) Transformadass de Laplace, Transformadas de Fourier, Series de Fourier y Polinomios.

TRANSFORMADAS
DE
LAPLACE T1

VARIABLE COMPLEJA

T2

TRANSFORMADAS
DE
FOURIER T3

PBS DE
FRONTERA T6

SERIES DE
FOURIER T4

POLINOMIOS
ORTOGONALES T5

Transformadas de Laplace

T1

* Transformada Directa

- Definición.
- T.L de Funciones elementales
- Definiciones y Teoremas importantes
- Propiedades importantes
- Funciones Especiales.

* Transformada Inversa

- Definición.
- Unicidad
- Propiedades importantes
- Teoremas importantes
- Convolución.

* Aplicaciones

- Sistema de Ecuaciones Diferenciales.
- Ecuaciones Integrales e Integro Diferenciales
- Pbs de Frontera.

Referencias Bibliográficas

D.- C1, C2, C3, C4, C8

Variable Compleja

T2

* Números Complejos

* Funciones, Límites y Continuidad

* Diferenciación Compleja
  - Ecuaciones de Cauchy Riemann

* Integración Compleja
  - Teorema DE CAUCHY

* Series De Taylor y Laurent

* Puntos Singulares
  - Polos Residuos

* Teorema del Residuo

* Aplicación Conforme.

Referencias Bibliográficas

1.- D C5 (Preliminar)
2.- C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8

Transformada de Fourier

T3

* Transformada Seno y Coseno
* Interpretación
* Propiedades de la Transformada de Fourier
* Convolución
* Teorema de Parseval
* Funciones de Correlación.

T.F. de Funciones Especiales

- Función Impulso
- Función Constante
- Función Escalón Unitario
- Función Periodica
- Función Generalizada
- Aplicaciones.

Referencias Bibliográficas

1.- A C3, C4, C5, C8, C9
2.- B C5

Series de Fourier

T4

* Funciones Periódicas
* Funciones Continuas por Intervalos
* Evaluación de los Coeficientes de Fourier
* Funciones Pares e Impares
* Series de Fourier de Seno y Coseno
* Condiciones de Dirichlet
* Integración y Diferenciación de Series de Fourier
* Notación Compleja
* Series Dobles
* Aplicaciones a Pbs de Frontera.

Referencias Bibliográficas

1.- A	**C1, C2**
2.- B	**C2**

Polinomios Ortogonales (T5)

*** Espacios Vectoriales de Funciones**

- Bases
- Bases Ortogonales (funciones de peso)
- Bases Ortonormales
- Representación de un vector en una Base
- Ortonormalización de Gram-Schmidt
- Aproximación en el Sentido de los mínimos cuadrados
- Identidad de Parseval

*** Aplicaciones**

- Funciones de Bassel
- Funciones de Legendre
- Polinomios de Hermite
- Polinomios de Laguerre.

Referencias Bibliográficas

1.- B C3, C6, C7, C8
2.- Álgebra Lineal Kolman

Pbs de Frontera

T6

* Formulas matemáticas y Soluciones de problemas físicos

- Definiciones Importantes
- Campos escalares
- Región de Solución
- EE DD PP Lineales
- EE DD PP Importantes (α)
    - Ecuación de Onda
    - Ecuación de Calor
    - Ecuación de Laplace

El Laplaciano en diferentes sistemas coordenadas
Solución de EE DD PP tipo (α) en Dimensiones (1, 2, 3) con diferentes sistemas de coordenadas (cartesianos, polares, cilíndricas, esféricas) (β)

Referencias Bibliográficas

B.- C1, C2, C3, C6, C7, C8

Ver Detalle β

Régimen de Evaluación

Bimestre I	T1 T2 T3
Bimestre II	T4 T5 T6

Problema de Frontera (β)

P0
P1. Ecuación de Onda
P2. Ecuación de Calor
P3. Ecuación de Laplace

Sistemas de Coordenadas

SC1.- Coordenadas Cartesianas
SC2.- Coordenadas Polares
SC3.- Coordenadas Cilíndricas
SC4.- Coordenadas Esféricas

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Problema Tipo	**Dimensión Física**	**Sistema de Coordenadas**	**Bibliografía (Libro, capitulo, pb)**
P2	1	SC1	(B, C1, P1.9)
			(, , 2.26) (, , 2.2)
P3	2	SC2	(B, C2, 2.28)
P2	2	SC1	(B, C2, 2.29)
P3	2	SC1	(B, C2, 2.30)
P1	1	SC1	(B, C2, 2.32)
P1	2	SC1	(B, C2, 2.33)
P3	2	SC1	(B, C5, 5.19)
P1	1	SC1	(B, C5, 5.23)
P2	3	SC3	(B, C6, 6.29)
P1	2	SC2	(B, C6, 6.31)
P2	3	SC3	(B, C6, 6.34)
P3	3	SC4	(B, C7, 7.1)
			(B, C7, 7.2)
			(B, C7, 7.3)
			(B, C7, 7.4)
			(B, C7, 7.5)
P3	3	SC4	(B, C7, 7.18)
			(B, C7, 7.19)
P3	3	SC4	(B, C7, 7.21)
			(B, C7, 7.28)
			(B, C7, 7.29)
			(B, C7, 7.30)