

# OSCILACIONES Y ONDAS

## CONFERENCIA N° 1

### OSCILACIONES

#### 1.- M.A.S.

Sea una masa  $m$  que puede deslizarse en una superficie, sin fricción, sujeta a un resorte de constante de recuperación  $k$ , cuyo otro extremo se halla fijo en un muro, tal como indica la figura 1.

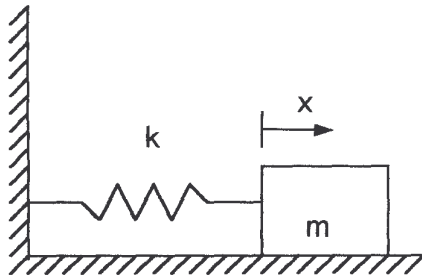


fig. 1 OSCILADOR ARMONICO  
SIMPLE

Para analizar el sistema calculemos su Lagrangiano.

$$L = T - U \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3)$$

y  $x$  mide la deformación del resorte.  $T$  es la energía cinética y  $U$  la potencial. La ecuación de Lagrange será:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (4)$$

como

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

entonces (4) se transforma en:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad (5)$$

o lo que es lo mismo:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) describe la evolución en el tiempo de la deformación del resorte (y el desplazamiento de la masa), y se conoce como la ecuación diferencial del movimiento armónico simple (M. A.S.)

Tal ecuación acepta por solución:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_o t + \delta) \quad (7)$$

donde A y  $\delta$  son constantes que se determinan desde las condiciones iniciales. La magnitud  $\omega_o$  se llama frecuencia angular natural y es tal que:

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (8)$$

Sean las condiciones iniciales  $x = x_o$  y  $\dot{x} = V_o$  en  $t = 0$ . De la ecuación (7)

$$x_o = A \operatorname{sen} \delta \quad (9)$$

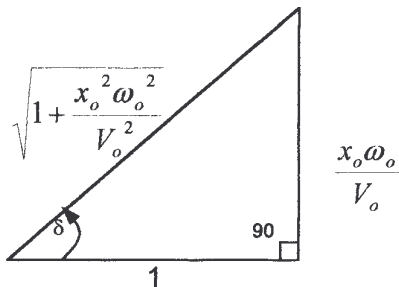
$$V_o = A \omega_o \cos \delta \quad (10)$$

vemos inmediatamente que:

$$\operatorname{tag} \delta = \frac{x_o \omega_o}{V_o} \quad (11)$$

$$y \quad A = \frac{x_o}{\operatorname{sen} \delta} \quad (12)$$

La expresión (11) nos permite hacer la construcción geométrica de la fig. 2, de lo cual vemos claramente:



$$\operatorname{sen} \delta = \frac{x_o \omega_o / V_o}{\sqrt{1 + \frac{x_o^2 \omega_o^2}{V_o^2}}}$$

Así que la solución de la ecuación del movimiento es:

fig 2. CONSTRUCCION GEOMÉTRICA

## DE LAS SOLUCIONES

$$x = \frac{V_o}{\omega_o} \sqrt{1 + \left(\frac{x_o \omega_o}{V_o}\right)^2} \text{sen}(\omega_o t + \delta) \quad (13)$$

$$\delta = \text{arctag} \frac{x_o \omega_o}{V_o} \quad (14)$$

Si hacemos un adecuado desplazamiento del tiempo tal que:

$$\omega_o t' = \omega_o t + \pi/2 \quad (15)$$

La ecuación (13) se escribirá en ese caso:

$$x = \frac{V_o}{\omega_o} \sqrt{1 + \left(\frac{x_o \omega_o}{V_o}\right)^2} \cos(\omega_o t' + \delta) \quad (16)$$

Nótese que esto no es sino

$$x = \text{Real } A e^{i\omega_o t'} \quad (17)$$

con A un número complejo tal que:

$$A = |A| e^{i\delta} \quad (18)$$

Por (17) y (18) vemos que:

$$x = |A| \cos(\omega_o t' + \delta) \quad (19)$$

Donde se ve claramente que:

$$|A| = \frac{V_o}{\omega_o} \sqrt{1 + \left(\frac{x_o \omega_o}{V_o}\right)^2} \quad (20)$$

La expresión (17) se llama notación fasorial del M.A.S.

Directamente vista, en el plano complejo  $Z = x + iy$ , con  $i$  (17 representa un vector en el plano complejo (llamado fasor), de módulo  $|A|$  que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con velocidad angular

co de modo que en  $t = 0$  el ángulo que forma con el eje real es el  $\delta$  & Tal ángulo se llama de desplazamiento inicial, y como podrá colegirse inmediatamente, depende de las condiciones iniciales del M.A.S.

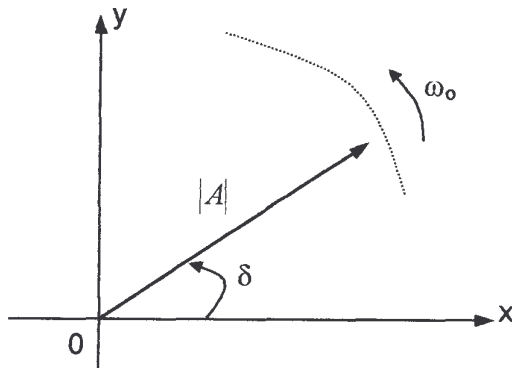


fig. 3 REPRESENTACIÓN FASORIAL DEL M.A.S.

De la expresión (19), la velocidad se escribirá:

$$v = -|A|\omega_o \text{sen}(\omega_o t' + \delta) \quad (21)$$

que en forma fasorial es:

$$v = \text{Re al} |A|\omega_o e^{i\delta'} \quad (22)$$

con:

$$\delta' = \omega_o t' + \delta + \frac{\pi}{2} + \pi \quad (23)$$

El ángulo de desplazamiento inicial de la velocidad, es decir, el ángulo medido respecto del eje real en  $t = 0$  es:

$$\delta + \frac{3\pi}{2}$$

y el desplazamiento relativo entre la velocidad y el desplazamiento será de  $\frac{3\pi}{2}$ . Velocidad y desplazamiento se hallan, pues, en curvatura y girando los dos con  $\omega_o$  en sentido antihorario. Esto se indica en la fig. 4

La interpretación física del abirragado diagrama de la fig. 4 es que el desplazamiento adelanta a la velocidad en  $90^\circ$ , lo que es lo mismo, en un cuarto del período. Esto significa que si el oscilador parte desde el reposo con un desplazamiento inicial, después de un tiempo igual al de un cuarto del período, el desplazamiento será nulo y la velocidad tomará su máximo valor.

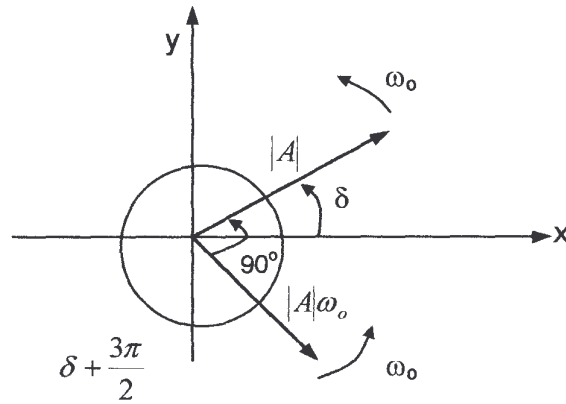


fig. 4 DESFAZAMIENTOS DEL DESPLAZAMIENTO Y LA VELOCIDAD.

## 2.- PROCESOS ENERGÉTICOS EN EL M.A.S.

Vemos que el resorte almacena la energía potencial y la masa la energía cinética. La energía total en un momento dado de tiempo es:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (24)$$

escribiendo esto en términos de la cantidad de movimiento:

$$p = m\dot{x}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (25)$$

que también es:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E} = 1 \quad (26)$$

la cual es la ecuación de una elipse.

$$\frac{p^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (27)$$

con  $a$  y  $b$  los ejes dados por  $a^2 = 2E/k$  y  $b^2 = 2mE$

Es obvio que el área de tal elipse será invariante en el tiempo, puesto que cuando éste transcurre el punto representativo del oscilador ( $x,p$ ) en el espacio de las fases describe la misma elipse (27).

El área de tal elipse, sabido es que vale:

$$A = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} = \text{constante}$$

$$A = \frac{2\pi E}{\omega_0}$$

De allí 
$$E = \frac{A}{2\pi} \omega_0 = H\omega_0 \quad (28)$$

Donde la constante  $H$  tiene las dimensiones de la acción.

La expresión (28) indica que en un oscilador la energía es proporcional a la frecuencia angular de oscilación. Tal expresión es válida incluso para el caso de que el oscilador esté en presencia de un medio interactuante con el que intercambia energía muy lentamente. La magnitud  $H$  se llama, en ese caso, invariante adiabático.

Volviendo a (24) y recordando que:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$E = \frac{1}{2} A^2 k (\sin^2(\omega_0 t + \delta) + \cos^2(\omega_0 t + \delta))$$

$$E = \frac{1}{2} A^2 k \quad (29)$$

o también: 
$$E = \frac{1}{2} mA^2 \omega_o^2 \quad (30)$$

que no hacen sino expresar al hecho de que la energía se almacena sólo en el resorte cuando la masa esté quieta, o sólo en la masa si no hay deformación del resorte. Calculemos los valores medidos en el tiempo, tanto de la energía cinética como la potencial.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} mA^2 \omega_o^2 \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \text{sen}^2(\omega_o t + \delta) dt = \frac{1}{4} mA^2 \omega_o^2 = \frac{E}{2}$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \text{cos}^2(\omega_o t + \delta) dt = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{E}{2} \quad (31)$$

De modo que a lo largo de un período T en promedio la energía se distribuye por igual tanto entre la energía cinética como la potencial.

De es hecho afirmaremos que el Lagrangiano promediado en el tiempo, a lo largo de un período, será cero.

### 3. COMPOSICION DE M.A.S.

Comencemos por el caso más general. Sea dos MA.S. oscilando perpendicularmente entre sí, de acuerdo con:

$$\begin{aligned} x &= A \text{cos}(\omega_o t + \delta) \\ y &= b \text{sen} \omega_o t \end{aligned} \quad (32)$$

De lo anterior,  $\text{sen} \omega_o t = \frac{y}{B}$       **y**

$$x = A \omega_0 t \cos \delta - A \sin \omega_0 t \sin \delta$$

$$\frac{x}{A} = \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t} \cos \delta - \sin \omega_0 t \sin \delta$$

$$\frac{x}{A} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} \cos \delta - \frac{y}{B} \sin \delta$$

De donde:

$$\left( \frac{x}{A} + \frac{y}{B} \sin \delta \right)^2 = \left( 1 - \frac{y^2}{B^2} \right) \cos^2 \delta$$

Que lleva finalmente a:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB} \sin \delta + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2 \delta \quad (33)$$

que corresponde a la ecuación de una elipse de ejes inclinados.

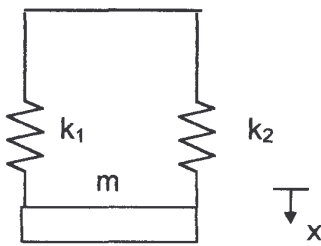
Para el caso particular en que  $\delta = 0$  y  $A = B$

$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (34)$$

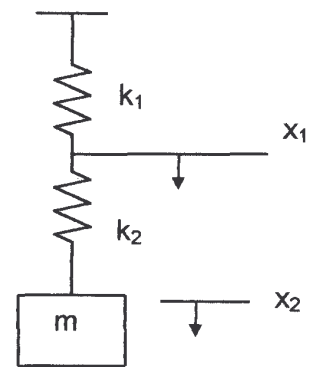
y tenemos un movimiento circular.

#### 4.- PROBLEMAS.

a.- Encuentre los resortes equivalentes de los sistemas mostrados en la figura.



(A)



(B)



Comencemos con A). Los resortes se deforman Jo mismo

$$U = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad y \quad k = k_1+k_2$$

En B) cada resorte se estira diferente

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

así que

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación

$$-k_1x_1 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0$$

$$k_2x_2 = (k_1 + k_2)x_1$$

y

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2$$

de la primera

$$m\ddot{x}_2 + k_2 \left( x_2 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2 \right) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 = 0$$

loquees lo mismo:  $m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$

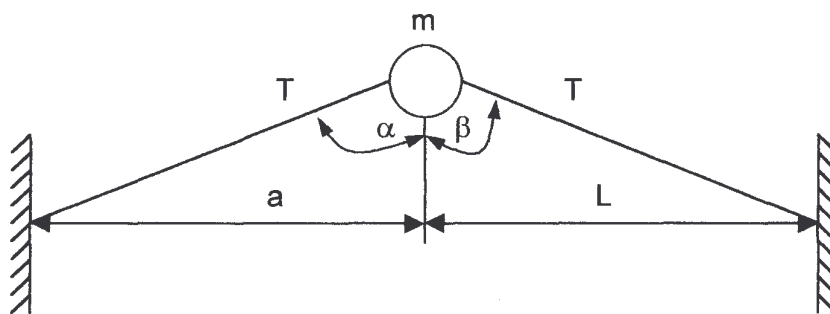
con

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

así que cuando los resortes están en serie

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

b.- La cuerda mostrada esta bajo una tensión T, la cual se puede suponer permanece constante para pequeños desplazamientos. Para oscilaciones pequeñas, encuentre la frecuencia natural de la vibración vertical de la cuerda.



La fuerza de deformación de la cuerda esta dirigida hacia abajo y vale

$$-T \cos \alpha - T \cos \beta$$

que es la fuerza total externa aplicada sobre la masa  $m$ , que de acuerdo a la segunda ley de Newton

$$-T \cos \alpha - T \cos \beta = m\ddot{y}$$

con

$$\cos \alpha \approx \frac{y}{a} \quad \text{y} \quad \cos \beta = \frac{y}{L}$$

asi que

$$m\ddot{y} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L}\right)yT = 0$$

o

$$\ddot{y} + \frac{1}{m} \left(\frac{a+L}{aL} T\right) y = 0$$

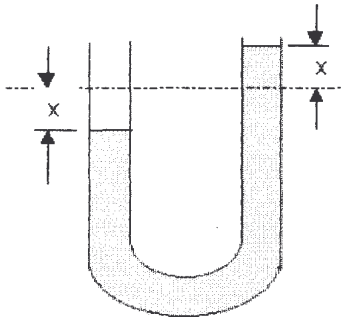
que no es sino

$$\ddot{y} + \omega_o^2 y = 0$$

y

$$\omega_o^2 = \frac{(a+L)T}{maL}$$

c.- Un manómetro tiene una sección transversal uniforme de área A. Si la columna de líquido de longitud L y densidad se pone en movimiento, encuentre la frecuencia del movimiento resultante.



La energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (L A \delta) \dot{x}^2$$

La energía potencial

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} (2 A x \delta g/x) x^2$$

$$U = A \delta g x^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} LA \delta \dot{x}^2 - A \delta g x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2A\delta g \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = LA\delta \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad ; \quad -2A\delta g x - LA\delta \ddot{x} = 0$$

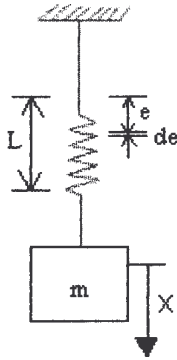
lo que da:

$$\ddot{x} + \frac{2g}{L} x = 0$$

y

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

d.- Encuentre la frecuencia normal de oscilación del sistema indicado, donde la masa del resorte no es pequeña.



La energía cinética del resorte.

$$T_R = \int_0^L \frac{1}{2} \delta de \left( \frac{e}{L} \dot{x} \right)^2$$

Donde  $(e/L) \dot{x}$  es el desplazamiento (deformación) de un punto intermedio del resorte, a una distancia  $e$  del extremo superior de éste, y su densidad longitudinal.

Así que la energía cinética total

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\text{máx}}^2 + \frac{1}{2} \delta \left( \frac{\dot{x}_{\text{máx}}}{L} \right)^2 \int_0^L e^2 de$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\text{máx}}^2 + \frac{1}{6} \delta L \dot{x}_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} \delta L \right) \dot{x}_{\text{máx}}^2$$

la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2} k x_{\text{máx}}^2$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} \delta L \right) \dot{x}_{\text{máx}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\text{máx}}^2$$

Con

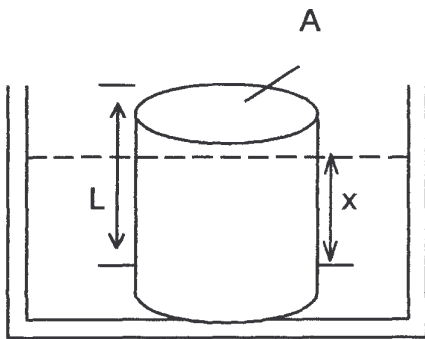
$$\frac{\partial L}{\partial x_{\text{máx}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{máx}}} = 0$$

$$-kx_{\text{máx}} - \left(m + \frac{1}{3} \delta L\right) \ddot{x}_{\text{máx}} = 0$$

donde la frecuencia de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3} \delta L}}$$

e.- Un cilindro sólido de madera, de radio R, está sumergido parcialmente en un baño de agua destilada. Si el cilindro se hunde ligeramente y luego se deja en libertad, encuentre la frecuencia natural de oscilación del cilindro si este permanece vertical todo el tiempo.



Si  $x$  es el desplazamiento hacia abajo, aparece una fuerza restauradora, que es el empuje, dado por:

$$E = -\rho_L A x g$$

Por la segunda ley de Newton:

$$-\rho_L A x g = m \ddot{x}$$

$$-\rho_L A g x = \rho_c A L \ddot{x}$$

De donde

$$\ddot{X} + \frac{\rho_L g x}{\rho_c L} = 0$$

Y

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_C}}$$

O lo que es lo mismo

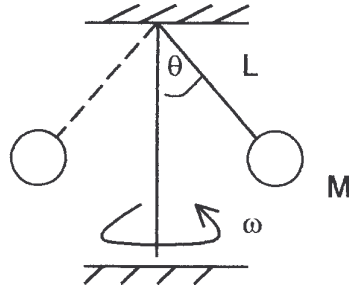
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \rho_{C,L}}}$$

en  $\rho_{C,L} \equiv \rho_C / \rho_L$  la densidad relativa respecto al agua destilada.

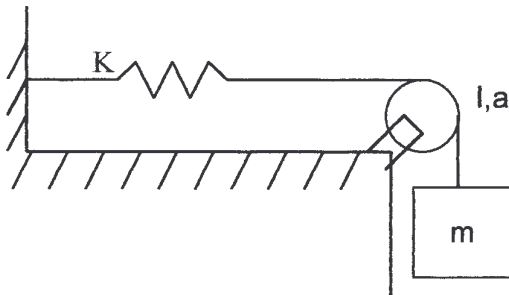
PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Demostrar que la frecuencia de rotación de un péndulo cónico es tal que

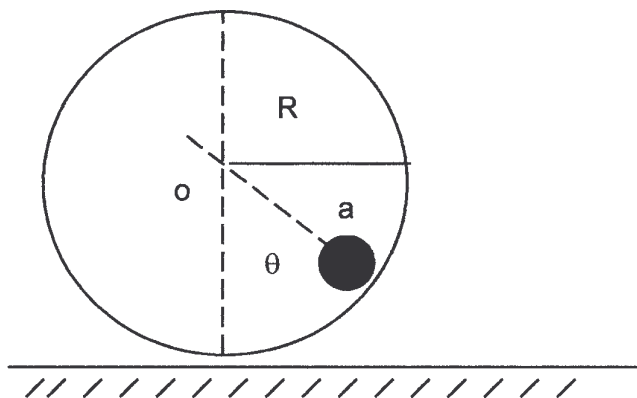
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$$



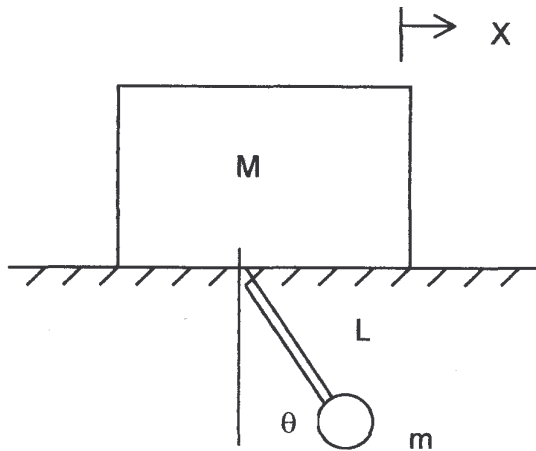
2.- Encontrar la frecuencia normal de oscilación del sistema indicado, tal que no podemos despreciar la masa de la pulea de radio a.



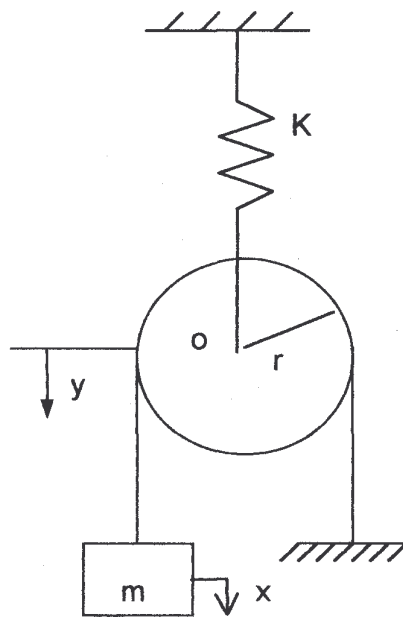
3.- Encontrar las ecuaciones del movimiento y la frecuencia de oscilación para pequeños desplazamientos del cilindro al que hemos pegado una masa puntual m en el punto que se indica. El cilindro puede rodar sin resbalar.



4.- Lo mismo que el problema anterior, pero para el sistema de la figura, donde la masa  $M$  se desliza sin fricción y la varilla de longitud  $L$  es de masa despreciable.



5.- Sea el sistema de la figura, formado por una polea sujeta en su eje por un resorte de constante de recuperación  $K$  y la masa  $m$  está sujeta por un hilo inextensible. Calcular la frecuencia de oscilación.

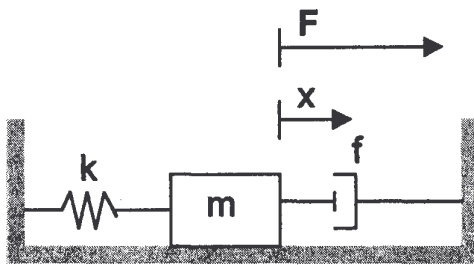


## CONFERENCIA N°2

### MAS. AMORTIGUADO Y FORZADO

#### 1.- Ecuación del Movimiento.

Sea el sistema indicado en la Fig. N°1. Representa un oscilador forzado y a la izquierda. La realiza mediante un elemento viscoso, representado como un embolo de un freno, y de constante  $f$ . La masa puede deslizarse en el plano horizontal sin fricción.



El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

y la función de disipación de Rayleigh

**Fig. N°1.**

$$F = \frac{1}{2}f\dot{x}^2 - Fx \quad (2)$$

La ecuación del movimiento es

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3)$$
$$-kx - m\ddot{x} = f\dot{x} - F$$

Que reordenando términos

$$F = m\ddot{x} + f\dot{x} + kx \quad (4)$$

Donde  $F$  es la fuerza externa, que fuerza al sistema.  
Reduzcamos (4) a la representación de la frecuencia.



Para ello, dado que, en general,  $F=F(t)$  entonces la integral

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

representa la transformación de Fourier entre  $F(t)$  y su imagen  $\Phi(\omega)$ . Dado el carácter lineal de (4); es de suponer que también

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

Ahora (4) puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = m \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 X(\omega) e^{i\omega t} d\omega + f \int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega + k \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7)$$

que puede resumirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(\omega) + m\omega^2 X(\omega) - i\omega f X(\omega) - kX(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (8)$$

De donde se ve, inmediatamente, que

$$\Phi(\omega) = [-m\omega^2 + i\omega f + k] X(\omega) \quad (9)$$

Esta última ecuación es la versión algebraica de la ecuación diferencial (4). De ella

$$X(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{-m\omega^2 + i\omega f + k} \quad (10)$$

Calculemos la velocidad

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

donde  $v(\omega) = i\omega X(\omega)$

Desde (10)

$$v(\omega) = \frac{i\omega\Phi(\omega)}{-m\omega^2 + i\omega f + k} \quad (12)$$

Definimos a la impedancia mecánica como

$$Z(\omega) \equiv \frac{\Phi(\omega)}{v(\omega)} \quad (13)$$

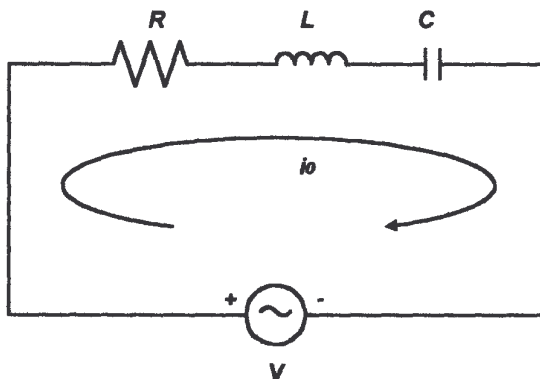
De allí, en nuestro caso,

$$Z(\omega) = \frac{-m\omega^2 + i\omega f + k}{i\omega} = im\omega + f - \frac{ik}{\omega}$$

o lo que es lo mismo

$$Z(\omega) = f + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad (14)$$

La parte real de  $Z(\omega)$  representa el elemento físico en el que se dan procesos de conversión de energía de carácter irreversible, como la degeneración en calor. La parte imaginaria representa los elementos en los que se almacena energía tales como la masa (energía cinética) y el resorte (energía potencial). En este punto podemos abordar la analogía que existe con los circuitos eléctricos. En efecto, de la figura 2, aplicando las ecuaciones de Kirchoff.



$$V = L \frac{di_0}{dt} + Ri_0 + \frac{1}{C} \int i_0 dt \quad (15)$$

De allí vemos que en el dominio de la frecuencia:

$$V(\omega) = i\omega L I(\omega) + R I(\omega) - \frac{i I(\omega)}{C\omega} \quad (16)$$

**Fig. N° 2.- Circuito RLC en serie**

De allí vemos que la impedancia eléctrica es:

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right) \quad (17)$$

Ahora si escribiremos (15) en términos de la carga.

$$V = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (18)$$

tiene exactamente la misma forma que la ecuación (4).

Diremos que el circuito RLC es una representación analógica del oscilador amortiguado y forzado si podemos establecer los reemplazos:

$$\left. \begin{aligned} F &= aV \\ m &= aL \\ f &= aR \\ k &= \frac{a}{c} \\ v &= ai_0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

donde  $a$  es un factor de proporcionalidad.

Así podemos emular el funcionamiento de un sistema mecánico por un circuito eléctrico.

## 2.- POTENCIA COMPLEJA, RESONANCIA.

Para un sistema mecánico la potencia compleja se define por:

$$S = F(\omega) v(\omega)^* \quad (20)$$

Y para un circuito eléctrico:

$$S = V(\omega) I(\omega)^* \quad (21)$$

El asterisco tiene la interpretación de la operación complejo conjugado. Dado que la impedancia mecánica es  $Z=F/v$ , podemos ver que:

$$S = Z |v|^2 \quad (22)$$

$$S = f |v|^2 + i \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) |v|^2$$

o finalmente 
$$S = P_0 + iQ_0 \quad (23)$$

con  $P_0 = f|v|^2$ , la potencia activa y  $Q_0 = \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) |v|^2$  la potencia reactiva.

Diremos que el sistema está en resonancia si  $Q_0 = 0$  Esto sucede a una sola frecuencia, tal que:

$$m\omega_0 - \frac{k}{\omega_0} = 0$$

$$\text{o } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (24)$$

que se llama frecuencia de resonancia. En tal condición toda la energía que entrega la fuente se disipa, y no existe retorno de potencia hacia la fuente desde los elementos reactivos de la inercia  $m$  y del resorte  $k$ ; así que toda la energía que se almacena en  $m$ , luego se la transfiere al resorte.

Definiremos como factor de calidad  $Q$ , a la relación:

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \quad (25)$$

en la condición de resonancia.

Ahora, la energía máxima almacenada, por ejemplo en la masa, es  $\frac{1}{2}m|v_{\max}|^2$ ,

en tanto que la energía disipada por ciclo es  $\frac{1}{2}f|v_{\max}|^2 * T$ , con T en el periodo. De allí:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}m|v_{\max}|^2}{\frac{1}{2}f|v_{\max}|^2 T} = \frac{2\pi m}{T f} = \frac{m\omega_0}{f} \quad (26)$$

El factor % de la energía disipada por ciclo se debe al hecho de que calculamos la energía media disipada por una señal sinusoidal.

El factor de calidad mide la magnitud de energía almacenada en los elementos reactivos en comparación con la disipada.

Para tener una idea más clara de este fenómeno interesante, retornemos al circuito RLC en serie. De la ecuación (17) en condición de resonancia:

$$Z(\omega_0) = R = \frac{V(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{V}{I}$$

de donde  $I = V/R$

El potencial en uno de los elementos reactivos, la bobina, por ejemplo es:

$$V_L = \omega_0 L I = \frac{\omega_0 L}{R} V = Q V \quad (27)$$

así que sobre la bobina en resonancia, el voltaje es Q veces el valor de la fuerza electromotriz de la fuente de voltaje de excitación. El resultado (27) puede ser usado como una técnica para medir Q.

Para el oscilador mecánico, la fuerza que se ejerce sobre el resorte en condiciones de resonancia, será:

$$F = \frac{k}{\omega_0} v = \omega_0 m v \quad (28)$$

la velocidad se puede calcular desde (14) en  $\varpi = \varpi_0$

$$\frac{\Phi(\omega_0)}{v(\omega_0)} = f \quad ;$$

$$v(\omega_0) = \frac{\Phi(\omega_0)}{f} \quad (29)$$

así que la fuerza sobre el resorte es:

$$F = \frac{m\omega_0}{f} \Phi(\omega_0)$$

$$F = Q \Phi(\omega_0) \quad (30)$$

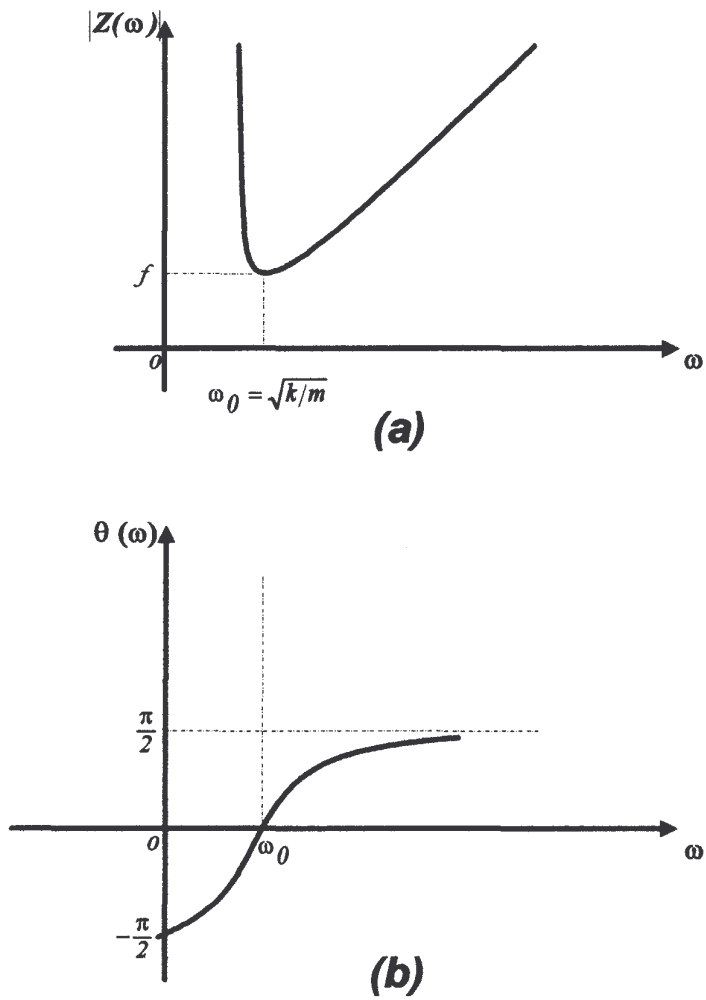
Es Q veces el valor de la fuerza excitatriz. Los esfuerzos a los que está sometido son así peligrosamente grandes. Este es el mecanismo por el cual los edificios se destruyen en un terremoto, cuando éste excita una de las frecuencias naturales de oscilación de la estructura.

Desde la ecuación (14) podemos hacer un diagrama que indique la variación del módulo y del argumento de la impedancia mecánica con la frecuencia. Es decir:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{f^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} \quad (31)$$

$$y \quad \theta(\omega) = \arctag \frac{m\omega - k/\omega}{f} \quad (32)$$

Esto podemos verlo en la figura 3(a) y 3(b).



**Fig. N° 3.- Diagrama de Bode de  $Z(\omega)$**

2.- Técnicas de Medición de Q. Las más importantes son:

La determinación de la diferencia de potencial en uno de los elementos reactivos del circuito RLC, en resonancia. Este valor es Q veces el valor de la fuente de voltaje de excitación. Sobre este método ya hablamos.

- El método de la media potencia.
- El método de la respuesta transitoria.

Describamos el segundo método. La potencia activa del oscilador mecánico puede verse desde (23)

$$P_o = f|V|^2$$

con

$$V = \frac{\phi}{Z(\omega)} = \frac{\phi}{f + i(m\omega - k/\omega)}$$

así que

$$P_o = \frac{f|\phi|^2}{f^2 + (m\omega - k/\omega)^2} \quad (33)$$

La potencia en resonancia es

$$P_o \text{ máx} = \frac{|\phi|^2}{f} \quad (34)$$

si nos desplazamos desde la condición de resonancia de modo que la potencia consumida por el sistema disminuya a la mitad

$$\frac{f|\phi|^2}{f^2 + (m\omega - k/\omega)^2} = \frac{|\phi|^2}{2f} \quad (35)$$

que nos lleva a la ecuación

$$2f^2 = f^2 + (m\omega - k/\omega)^2$$

$$o \quad m\omega - k/\omega = \pm f$$



que lleva a la ecuación de segundo grado

$$\omega^2 \mp \frac{f}{m} \omega - \frac{k}{m} = 0 \quad (36)$$

cuya solución es

$$\omega = \pm \frac{f}{2m} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} \quad (37)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Prestemos atención para el caso  $\omega_0 \gg f / 2m$ . Para ello la ecuación (37) da

$$\omega \approx \pm \frac{f}{2m} \pm \omega_0 \quad (38)$$

tomando las soluciones  $\omega > 0$  veremos que hay dos

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{f}{2m}$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{f}{2m}$$

El ancho de banda  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = f / m$  y recordando que  $Q = m\omega_0 / f$ , resulta

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (39)$$

En términos prácticos lo que se hace es medir la velocidad máxima, que se obtiene en la condición de resonancia, y determinar la frecuencia mayor y menor en la que esta velocidad disminuye a ii del valor máximo.

El intervalo de frecuencias definidas por esos dos valores es el ancho de banda.

Ahora veamos la técnica de la respuesta transitoria. Desde la ecuación (4) si  $F = F_0\delta(t)$ ; con  $\delta(t)$  la función delta de Dirac

$$F_0\delta(t) = m\ddot{x} + f\dot{x} + kx \quad (40)$$

para  $t > 0$

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0 \quad (41)$$

Que es la ecuación homogénea. Para resolverla es necesario dar las condiciones iniciales.

Las supondremos las siguientes

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Para resolver (41) supondremos  $x = e^{\lambda t}$ . De allí

$$m\lambda^2 + f\lambda + k = 0 \quad (42)$$

es la ecuación característica. La podemos escribir así

$$\lambda^2 + \frac{f}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

de solución

$$\lambda = -\frac{f}{2m} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} \approx -\frac{f}{2m} \pm \omega \quad (43)$$

así que la solución buscada es de la forma

$$x = A e^{\frac{-f}{2m}t} \cos(\omega t + \delta) \quad (44)$$

usando las condiciones iniciales

$$x_0 = A \cos \delta \quad (45)$$

$$\dot{x} = -\frac{f}{2m} A e^{-\frac{f}{2m}t} \cos(\omega_0 t + \delta) - A \omega_0 e^{-\frac{f}{2m}t} \text{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

$$\dot{x} = 0 = -\frac{f}{2m} A \cos \delta - A \omega_0 \text{sen} \delta$$

que nos lleva a  $\text{tag} \delta = -1/Q$ , de donde

$$\cos \delta = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}} \approx 1 \quad \text{si } Q \gg 1$$

y basta que  $Q \geq 5$  para que ello se cumpla aproximadamente. De lo anterior,  $\delta \approx 0$  y

$$x \approx x_0 e^{-\frac{f}{2m}t} \cos \omega_0 t \quad (46)$$

El tiempo empleado para que la envolvente exponencial de (46) decaiga a  $1/e$  su valor inicial es

$$\frac{f}{2m} t_0 = 1$$

de donde

$$\omega_0 t_0 = \frac{2m \omega_0}{f} = 2Q$$

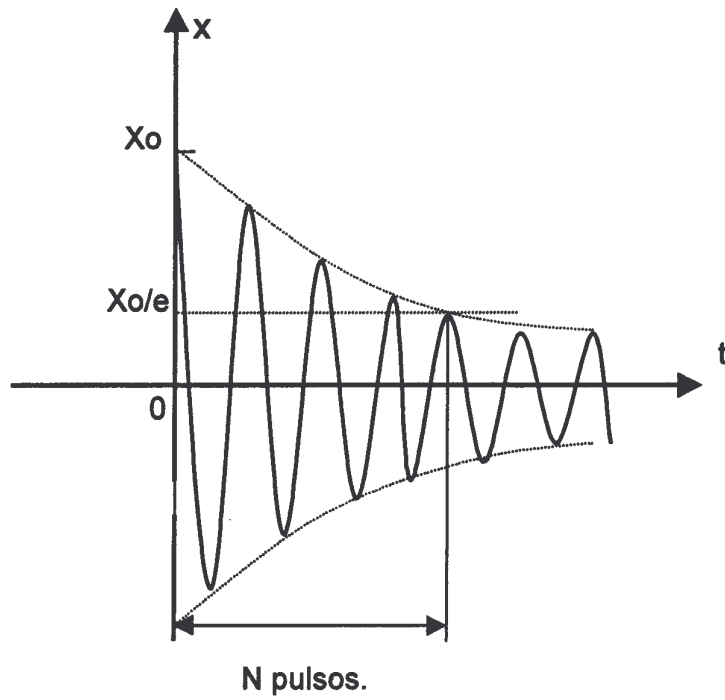
$$\text{o } \frac{2\pi}{T} t_0 = 2Q$$

$$\text{y } Q = \pi \frac{t_0}{T} \quad (47)$$

y  $t_0/T = N$  es el número de pulsaciones para que la amplitud decrezca a  $1/e$  del valor inicial. Así que

$$Q = \pi N \quad (48)$$

Esto podemos verlo pictóricamente en la Fig.N °4 , donde  $N = 5$  y  $Q \approx 5\pi$  .



**Fig.N°4. Técnica del transitorio para medir Q.**

## CONFERENCIA Nro. 3

### SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

#### 1.- Molécula lineal de $\text{CO}_2$

Tomemos como problema el describir el comportamiento mecánico de una molécula lineal de  $\text{CO}_2$ . Tal molécula tiene la estructura indicada en la figura 1a.

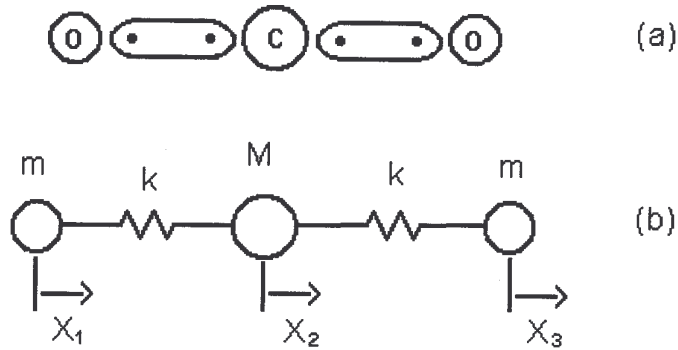


Fig. 1.- Molécula lineal de  $\text{CO}_2$   
(a) Estructura de enlace covalente.  
(b) Modelo mecánico para pequeñas oscilaciones.

Los átomos de oxígeno se enlazan mediante electrones covalentes.

Sea  $U(x)$  la energía potencial de un átomo de oxígeno. La representación gráfica de  $U$  versus la distancia se indica en la fig. 2.

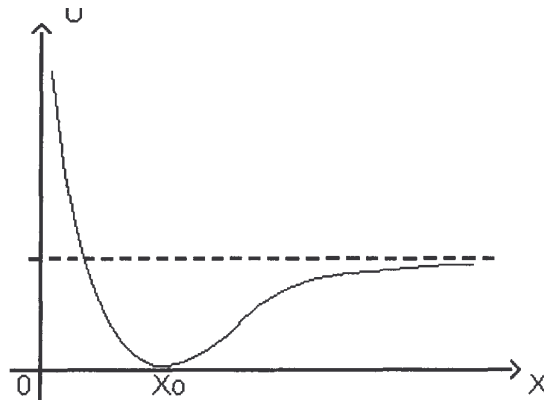


Fig. 2.- Energía potencial del oxígeno en la molécula de  $\text{CO}_2$

Hay un valor  $x = x_0$  en el cual se cumple

$$U(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_0 = 0$$

es un punto de equilibrio y es estable, pues la energía potencial es mínima.

Para  $0 < x < x_0$  la energía potencial es tal que  $\frac{dU}{dx} < 0$  y hay una fuerza de repulsión.

Esta se debe al principio de exclusión de Pauli, que exige la realización de trabajo para aproximar más el átomo de oxígeno al de carbono, dado que como no puede existir dos electrones en el mismo estado cuántico, estos deben discriminarse trepando a mayores niveles de energía si se sobrelapan más los orbitales.

Para  $x_0 < x < \infty$ ,  $\frac{dU}{dx} > 0$  y hay una fuerza de atracción, la cual es de origen eléctrico y

la responsable de la formación del enlace covalente.

Si desarrollamos  $U$  en torno a  $x$  para pequeños desplazamientos

$$U(x) = U(x_0 + \zeta) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_0 \zeta + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_0 \zeta^2 + \dots \quad (1)$$

como  $U(x) = 0$  y  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_0 = 0$

además de que  $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_0 = K > 0$

por ser un mínimo, encontramos que para  $\zeta$  pequeños

$$U(x) = \frac{1}{2} K \zeta^2 \quad (2)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} K (x - x_0)^2 \quad (3)$$

Que es la ecuación de la energía potencial almacenada en un resorte. Esto nos sugiere un modelo mecánico bastante sencillo para la molécula de  $\text{CO}_2$  Los

átomos de oxígeno y el de carbono son enlazados por medio de resortes, tal como indica la figura 1(b).

Para el análisis del sistema llamemos  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  los desplazamientos relativos del sistema respecto a un marco inercial de referencia. La energía potencial total será.

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K(x_3 - x_2)^2 \quad (4)$$

y la cinética.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad (5)$$

El Lagrangiano

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}K(x_3 - x_2)^2 \quad (6)$$

Hay tres grados de libertad y deberán plantearse tres ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = K(x_2 - x_1) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1$$

Ordenando términos

$$-m \ddot{x}_1 - K x_1 + K x_2 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_2) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = M \dot{x}_2$$

$$-K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_2) - M \ddot{x}_2 = 0$$

Ordenando términos

$$K x_1 - 2K x_2 - M \ddot{x}_2 + K x_3 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = -K(x_3 - x_2) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = m \dot{x}_3$$

$$-K(x_3 - x_2) - m \ddot{x}_3 = 0$$

Ordenando términos

$$K x_2 - K x_3 - m \ddot{x}_3 = 0 \quad (9)$$

Las ecuaciones (7),(8), y (9) forman un sistema de ecuaciones diferenciales. Para resolverlas hagamos.

$$x_1 = A e^{i\omega t} \quad , \quad x_2 = B e^{i\omega t} \quad , \quad x_3 = C e^{i\omega t} \quad (10)$$

Que las reduce al sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$\left. \begin{aligned} (m\omega^2 - K)A + KB &= 0 \\ KA + (M\omega^2 - 2K)B + KC &= 0 \\ KB + (m\omega^2 - K)C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



para soluciones diferentes de la trivial, el determinante del sistema debe ser cero

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - K & K & 0 \\ K & M\omega^2 - 2K & K \\ 0 & K & m\omega^2 - K \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Desarrollando tal determinante

$$(m\omega^2 - K)[(M\omega^2 - 2K)(m\omega^2 - K) - K^2] - K[(m\omega^2 - K)] = 0$$

$$(m\omega^2 - K)[(M\omega^2 - 2K)(m\omega^2 - K) - K^2 - K^2] = 0$$

$$(m\omega^2 - K)[(M\omega^2 - 2K)(m\omega^2 - K) - 2K^2] = 0$$

que se descompone en

$$m\omega^2 - K = 0 \quad (13)$$

$$(M\omega^2 - 2K)(m\omega^2 - K) - 2K^2 = 0 \quad (14)$$

La ecuación (13) da por solución

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (15)$$

y la ecuación (14) al desarrollar términos

$$\begin{aligned} Mm\omega^4 - MK\omega^2 - 2Km\omega^2 + 2K^2 - 2K^2 &= 0 \\ \omega^2[Mm\omega^2 - K(M + 2m)] &= 0 \end{aligned}$$

que da  $\omega_2 = 0 \quad (16)$

y  $Mm\omega^2 - K(M + 2m) = 0$

Que da 
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{K(M+2m)}{Mm}} \quad (17)$$

Las frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  son las frecuencias normales de oscilación, llamadas también frecuencias naturales.

Calculemos los modos normales de vibración. Para  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  del sistema (11) tenemos:

$$(m\omega_1^2 - K)A + KB = 0 \quad \text{que implica } B = 0$$

y de  $KA + (M\omega_1^2 - 2K)B + KC = 0$  que implica  $A + C = 0$  y  $A = -C$  lo cual define el vector de estado correspondiente a  $\omega_1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} A$$

Cuya interpretación física señala el siguiente modo de oscilación que se indica en la figura 3

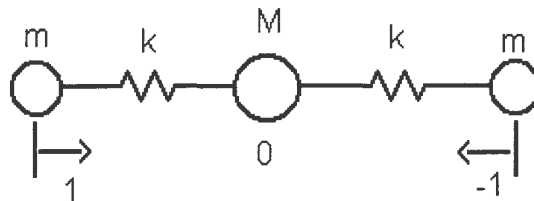


Fig. 3 .- Modo de oscilación dado por el vector de estado (1,0,-1) correspondiente a la frecuencia natural  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Las masas de los extremos oscilan en contrafase, opuestas, y la central permanece en reposo.

Para  $\omega_2 = 0$  el sistema de ecuaciones (11) se reduce a:

$$-KA + KB = 0$$

$$KB - KC = 0$$

de donde  $A=B$  y  $B = C$  Entonces corresponde al vector de estado

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} A$$

cuya interpretación física señala el modo de oscilación indicado en la figura 4

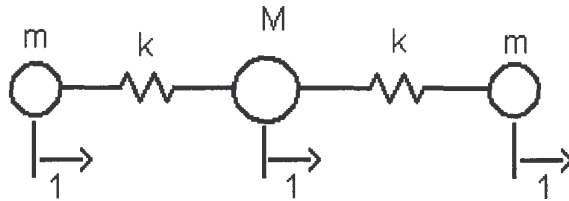


Fig. 4.- Modo de oscilación para el vector de estado  $(1,1,1)$  correspondiente a la frecuencia natural  $\omega_2 = 0$

En este modo todas las masas se desplazan en una sola dirección y en la misma magnitud. Corresponde al movimiento de la molécula como cuerpo rígido y con velocidad de desplazamiento constante con M. R. U.

Ahora para  $\omega_3 = \sqrt{\frac{K(M+2m)}{Mm}}$

el sistema de ecuaciones es ahora:

$$(m\omega_3^2 - K)A + KB = 0$$

$$KA + (m\omega_3^2 - K)B + KC = 0$$

$$KB + (m\omega_3^2 - K)C = 0$$

De la primera ecuación

$$\left[ \frac{K(M+2m)}{M} - K \right] A + KB = 0$$

encontramos  $-\frac{2m}{M} A = B$  (18)

De la tercera ecuación

$$KB + \left[ \frac{K(M+2m)}{M} - K \right] C = 0$$

$$B + \frac{2m}{M} C = 0 \quad (19)$$

y por la ecuación (18)

$$-\frac{2m}{M} A + \frac{2m}{M} C = 0$$

dedonde  $C=A$

Así encontramos el vector de estado

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2m}{M} \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{bmatrix} A$$

que señala el modo de oscilación indicado en la figura 5.

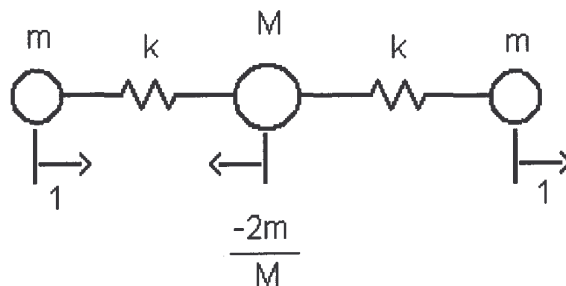


Fig. 5.- Modo de oscilación para el vector de estado  $(1, -2m/M, 1)$  correspondiente a la frecuencia natural  $\omega_3 = \sqrt{K(M+2m)/Mm}$

Al modo  $\omega_2 = 0$  corresponde la solución trivial del desplazamiento global de la molécula de un movimiento rectilíneo uniforme. Se dice que se trata de un modo degenerado.

Para los otros dos modos, vemos que el producto escalar de los vectores de estado que los representan

$$[1,0,-1] \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0 \quad (20)$$

es cero. Por lo tanto son vectores ortogonales y linealmente independientes. Así la solución más general se escribirá:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{bmatrix} A_2 e^{i\omega_3 t} \quad (21)$$

Que indica que cualquier oscilación del sistema se descompone en la combinación lineal de los modos normales de vibración, los cuales al ser vectores linealmente independientes, forman las bases de un espacio vectorial en el que se representa las oscilaciones.

# ONDAS

## CONFERENCIA 1

### CONCEPTOS FUNDAMENTALES

**1.- CAMPO:** Es una región del espacio en la que a cada uno de sus puntos se le hace corresponder una magnitud física.

Si tal magnitud es un escalar, hablamos de un campo escalar. Si es una magnitud vectorial, hablamos de un campo vectorial.

Si tal magnitud solo se puede representar con una matriz o un tensor en general, tal campo se llama tensorial.

**2.- ONDAS:** Son perturbaciones inducidas en los campos, las cuales se propagan a velocidad finita, y por medio de las cuales se transportan energía, ímpetu y momentum angular; sin que esto signifique una traslación del medio físico sobre el que se sustenta el campo.

### **3.- DESCRIPCION MATEMÁTICA DE CAMPOS Y ONDAS.**

Puesto que un campo es un medio continuo, tiene infinitos grados de libertad, el campo se representa por una función continua escalar, vectorial o, en general, tensorial de las coordenadas del espacio, las velocidades relativas y el tiempo.

$$\phi = \phi \left( \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{t} \right) \quad (1)$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}} \left( \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{t} \right) \quad (2)$$

Producida una perturbación del campo se desencadena un proceso físico que depende de la rapidez de variación espacio-temporal del campo, es decir, solo será función de las derivadas ( para el caso particular del campo escalar)

$$\partial\phi / \partial x_i, \quad \partial\phi / \partial t$$

En la consideración que estamos interesados en una perturbación distribuida en el contorno del espacio, es conveniente trabajar con la densidad lagrangiana.

$$\int L d^3\mathbf{x} = L \quad (3)$$

con

$$L = L \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (4)$$

de modo que la acción es:

$$S = \int \int_{t_1}^{t_2} L \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) d^3\mathbf{x} dt \quad (5)$$

Las ondas son un proceso objetivo, por lo que obedeceran al principio de mínima acción

$$\delta S = 0 \quad (6)$$

Donde las variaciones son tomadas respecto a la función  $\phi$  que describe el campo; en efecto

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right\} d^3x dt \quad (7)$$

como

$$\delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \phi$$

y

$$\delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi \quad (8)$$

dada la continuidad y homogeneidad de  $\phi$ , que se expresa por la conmutación de operadores  $(\partial/\partial x)$  y  $\delta$ , tenemos que, por ejemplo, al integrar por partes



$$I = \int \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \phi \, d^3 x = \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \delta \phi \right] - \delta \phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right] \right\} d^3 x$$

La primera integral puede reducirse a una de superficie por el teorema de Gauss.

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \delta \phi \right] d^3 x = \oint_s \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \delta \phi \, dA_i$$

si suponemos una superficie A fija, la última expresión será

$$\oint_s \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \delta \phi \, dA_i = 0$$

puesto que los 4 se eliminaran en los límites: Todas las soluciones virtuales se desarrollan desde  $\delta \phi = 0$  en la superficie.

De allí:

$$I = - \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right] \delta \phi \, d^3 x_i$$

De modo análogo podemos encontrar que

$$\int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi \, dt = - \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \right) \delta \phi \, dt$$

De modo que la ecuación (7) queda, en la consideración  $\delta S = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \right\} \delta \phi \, d^3x \, dt = 0$$

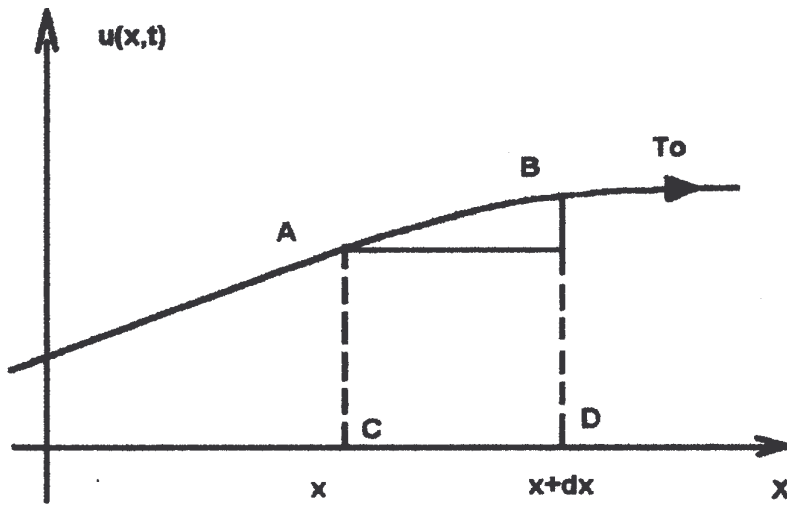
y dado que los  $\delta \phi$  son arbitrarios al interior del volumen de integración

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} = 0 \quad (9)$$

será la ecuación diferencial de la propagación de la perturbación en el campo.

#### 4.- ONDAS EN UNA CUERDA TENSA

El problema más sencillo es el de una cuerda tensa, deformado, como indica la fig.1



**FIG 1. SECCION DEFORMADA DE CUERDA TENSA.**

Consideremos la cuerda homogénea, su longitudinalmente con una densidad de masa se distribuirá

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l} \quad (10)$$

siendo  $l$  y  $m$  la longitud y masa total de la cuerda.

En el contexto clásico en nuestro caso,

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

donde  $\mathcal{T}$  es la energía cinética por unidad de longitud y  $\mathcal{U}$  es la energía potencial por unidad de longitud, así que:

$$L = \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (11)$$

en un punto de la cuerda.

Si la cuerda se deforma, su longitud elemental cambia hasta

$$dl = \sqrt{dx^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2}$$

$$dl = dx \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \quad (12)$$

en un instante de tiempo dado. La deformación de la cuerda equivale a un estiramiento.

$dl - dx$

y a la realización de un trabajo  $To(dl - dx) = dU$ , que se almacena como energía potencial.

Así:

$$dU = To \left[ dx \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - dx \right] = To \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) dx \quad (13)$$

para pequeñas deformaciones y tomando en consideración  $\partial u / \partial x \ll 1$  que se obtiene al desarrollar la raíz como un binomio de Newton.

De esa expresión

$$u = \frac{dU}{dx} = \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (14)$$

y el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (15)$$

Calculando

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = -T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (16)$$

y considerando que (9) en nuestro caso se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} = 0 \quad (17)$$

llegamos a

$$-T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

que puede escribirse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

esta es la ecuación diferencial buscada

## 5.- SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDAS EN CUERDA TENSA INFINITA.

Unamos el método de operadores. La ecuación (18) puede escribirse simbólicamente por

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0 \quad (19)$$

con

$$c \equiv \frac{T_0}{\lambda} \quad (20)$$

Si miramos a los operadores con los mismos atributos que los números reales, (19) se escribe

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \quad (21)$$

Haciendo la transformación de variables

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{x} + \mathbf{ct} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x} - \mathbf{ct} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Podemos afirmar que para cualquier función  $f$

$$f(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{w},\mathbf{z}) \quad (23)$$

así

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}$$

que nos lleva a las ecuaciones operacionales

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}$$

y por (22)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = 1 & \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} = 1 \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = -\mathbf{c} & \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{c} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

así que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= c \frac{\partial}{\partial w} - c \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

que reemplazando en (21)

$$\left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0$$

$$\frac{4 \partial^2 u}{\partial w \partial z} = 0 \quad (27)$$

o

$$\frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

integrando

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi(z)$$

y finalmente

$$u = \int \phi(z) dz + f_2(w)$$

haciendo

$$\int \phi(z) dz = f_1(z)$$

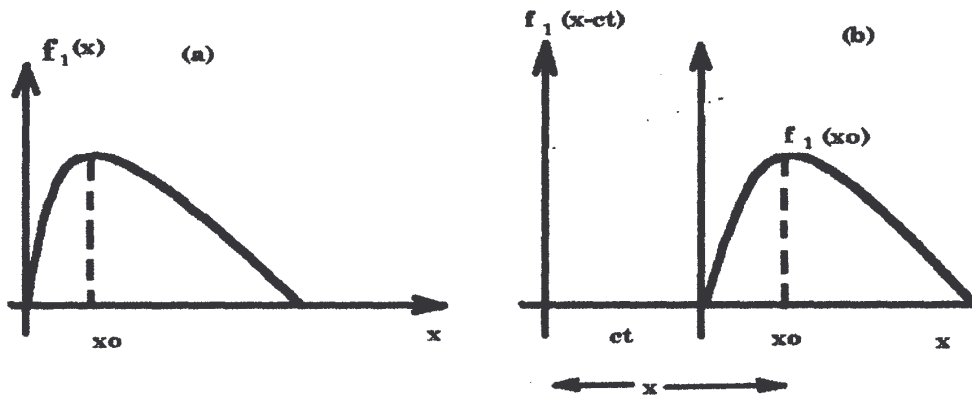
y recordando (22)

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (28)$$



es la solución de la ecuación de ondas.

Trabajamos con  $f_1(x-ct)$  y consideremos dos instantes de tiempo  $t=0$  y  $t = (t \neq 0)$ , al remitirnos a la fig 2.



**FIG 2. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA**

La fig 2-b es la 2-a desplazada su origen en  $ct$ . Podemos ver que  $x_0 = x - ct$ .

De modo que  $f_1(x_0) = f_1(x-ct)$  y la función  $f_1(x-ct)$  se ve como la  $f_1(x)$  desplazándose solidariamente en un eje de coordenadas que se mueve con velocidad constante  $c$ .

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}} \quad (29)$$

así que

representa la velocidad de desplazamiento de  $f_1$  en el espacio.  $f_1$  es la onda que se mueve de izquierda derecha.

$f_2$  representa otra onda que se mueve de derecha a izquierda.

Dada la naturaleza lineal de la ecuación de onda (28) es la superposición lineal de  $f_1$  y  $f_2$ , dos ondas que se propagan sin interactuar, pues son soluciones lineales independientes.

Ahora resolvamos el problema de manera distinta, usando el método de separación de variables. Para ello suponemos

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (30)$$

que sustituida en la ecuación diferencial parcial

$$T \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{X}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

o más simplemente

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \quad (31)$$

siendo  $k$  un número real. La ecuación (31) se desgloza en

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0 \quad (32)$$

que tienen por una solución

$$X = e^{ikx} \quad , \quad T = e^{i k c t}$$

así pues

$$u = e^{i(kx-ct)} \quad (33)$$

se ve que (33) es una solución periodica en el espacio y el tiempo, en efecto, hay un X real tal que:

$$u(x) = u(x + \lambda)$$

que nos lleva a

$$e^{ik\lambda} = 1$$

donde

$$k\lambda = 2\pi$$

y

$$k = 2\pi/\lambda \quad (35)$$

$\lambda$  se denomina longitud de onda y k el número de ondas.

Del mismo modo

$$u(t) = u(t + T)$$

implica

$$e^{ik\lambda} = 1$$

De donde

$$k\lambda T = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi/T = \omega \quad \text{frecuencia angular (36)}$$

$$c = \omega/k \quad \text{la velocidad de propagación}$$

de modo que (33) puede escribirse

$$u = e^{i(kx - \omega t)} \quad (37)$$

la solución más general; puesto que  $k$  es continua y  $\omega = \omega(k) = ck$ , será la suma continua de (37) en el parametro  $k$ , por razón del principio de superposición, así que:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (38)$$

Supongamos un caso particular ilustrado en la figura 3. Digamos que en  $t=0$   $u(x,0)$  representa el pulso rectangular de la fig 3-a

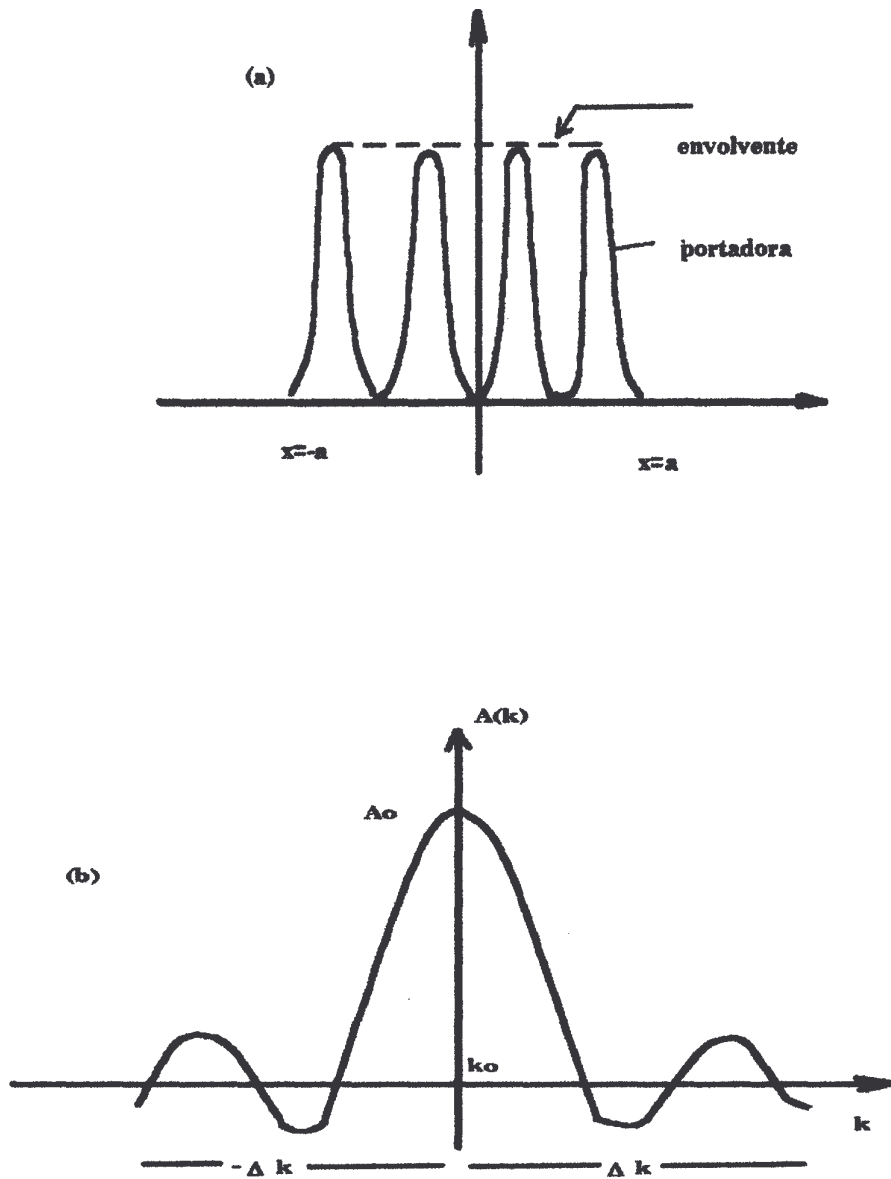


Fig3.- (a) pulso rectangular en el espacio, (b) representación del mismo en el espacio de Fourier  $k$ .

Vemos entonces

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx} dk \quad (39)$$

multiplicando por  $e^{-ik'x}$  e integrando en todo  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ik'x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(k-k')x} dx dk \quad (40)$$

La integral de la derecha puede escribirse así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(k-k')x} dx dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \quad (41)$$

pero por una identidad matemática

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \quad (42)$$

en  $\delta(k - k')$  la función Delta de Dirac. De modo que (40) se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ik'x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi A(k)\delta(k - k') = 2\pi A(k') \quad (43)$$

así

$$A(k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-ik'x} dx \quad (44) \quad \mathbf{54}$$

que en nuestro caso representa la función dibujada en 3-b, en donde se ha cambiado  $k'$  por  $k$ .

La información de  $A(k)$  esta fundamentalmente centrada en  $k_0$  y comprendido en el intervalo

$$k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k$$

además que se ve que (44) es una función par de  $k'$ .

Así que si hacemos  $k = k_0 + \Delta k$ , y si recordamos que

$$\omega = \omega(k) = \omega(k_0 + \Delta k) \cong \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 \Delta k \quad (45)$$

Donde hemos desarrollado  $\omega(k)$  en series de Taylor en torno a  $k_0$ , tomando en consideración solo los dos términos significativos.

La fase de (38), o sea el exponente de  $e$  se escribió

$$kx - \omega t = (k_0 + \Delta k)x - \left( \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 \Delta k \right) t = (k_0 x + \omega_0 t) - \Delta k \left( x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t \right)$$

Así pues

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k_0 X - \omega_0 t)} e^{i \Delta k \left( x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t \right)} dk$$

$$u(x, t) = e^{i(k_0 X - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i \Delta k \left( x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t \right)} dk \quad (46)$$

vemos que  $u(x, t)$  se puede ver como una onda de alta frecuencia  $\omega_0$  y número de ondas  $k_0$  modulada por la envolvente dada por la integral restante de (46).

Se llama velocidad de fase la velocidad de onda portadora tal que su fase es constante

$$k_0 x - \omega_0 t = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} = V_f \quad (47)$$

y la velocidad de grupo la velocidad de la envolvente o modulante, que puede calcularse tomando su fase constante.

$$\begin{aligned} x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 &= \text{constante} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 &= V_g \end{aligned} \quad (48)$$



La velocidad de grupo es la velocidad de propagación de la información y representa en amplio margen de casos, la de propagación de la energía.

## 16.- PROPAGACIÓN DE LA ENERGÍA EN ONDAS. INTENSIDAD MOMENTUM.

Tomemos una componente armónica

$$u = u_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

La energía cinética y potencial son

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\lambda \cdot u_0^2 \omega^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) \\ \mathcal{U} &= \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{T_0 \cdot k^2}{2} u_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} &= \left( \frac{\lambda u_0^2 \omega^2}{2} - \frac{T_0 \cdot k^2 u_0^2}{2} \right) \cos^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{\lambda \cdot u_0^2 \cdot \omega^2}{2} \left( 1 - \frac{T_0 \cdot k^2}{\lambda \omega^2} \right) \cos^2(kx - \omega t) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

pues

$$\frac{T_0 \cdot k^2}{\lambda \omega^2} = c^2 \cdot \frac{1}{c^2} = 1$$

De donde

$$T = \mathcal{U} \quad (50)$$

Y la densidad de energía

$$\mathcal{E} = L + \mathcal{U} = \left( \frac{\lambda \mathcal{U}_0 \omega^2}{2} + \frac{T_0 k^2 \mathcal{U}_0^2}{2} \right) \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\mathcal{E} = L + \mathcal{U} = T_0 k^2 \mathcal{U}_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

La energía media transportable por la onda

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} dt = \frac{T_0 k^2 \mathcal{U}_0^2}{2} \quad (51)$$

Ahora

$$\bar{\mathcal{E}} \cdot dl = d\mathcal{E}$$

es la diferencial de energía transportada por la onda. Como  $dl = C \cdot dt$

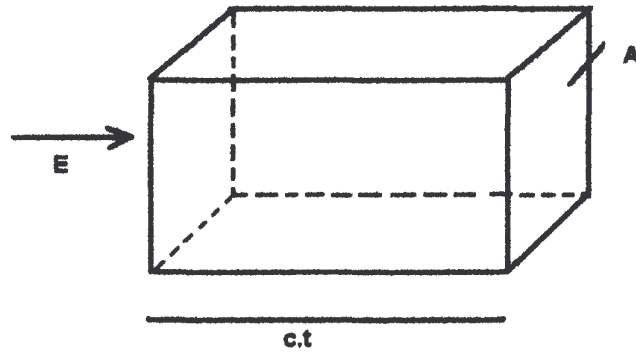
$$\bar{\mathcal{E}} \cdot C = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = P \quad (52)$$

es la potencia transferida.

Para el caso de una onda tridimensional si  $\bar{E}$  media es la energía por unidad de volumen transportada, en un prisma rectangular de eje paralelo a la dirección de propagación, como indica la fig4, la energía que atraviesa el área  $A$  en el tiempo  $t$  es

$$\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} V$$

$$\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} \cdot A \cdot c \cdot t$$



**FIG.4**

De allí la energía por unidad de área y tiempo, llamada intensidad de la onda será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{A t} = \bar{\mathcal{E}} c \quad (53)$$

La intensidad puede verse como potencia por unidad de área, lo que es lo mismo

$$I = \frac{P}{A} = \frac{F \cdot c}{A} \quad (54)$$

siendo E la fuerza que se ejerce sobre el área A.

Así

$$I = C \cdot \bar{E} = \frac{F}{A} C \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} = \bar{E} = P \quad (55)$$

de modo que la presión que ejerce el campo sobre la superficie es la densidad de energía. Pero la presión

$$P = \frac{\Delta \Pi}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A} \quad (56)$$

es el flujo de cantidad de movimiento es decir , la cantidad de movimiento por unidad de área por unidad de tiempo.

La cantidad de movimiento por unidad de volumen es

$$\Pi_v = \frac{\Delta \Pi}{V} = \frac{\Delta \Pi}{A \cdot C \cdot \Delta t} = \frac{\bar{E}}{C} = \frac{I}{C^2} \quad (57)$$

asi pues

$$\Pi_v = \frac{I}{C^2} \quad (58)$$

Ademas que

$$\Pi_v \cdot C = \bar{E} \quad (59)$$

## 7.- MOMENTUM ANGULAR.

La relación  $u = u_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$  es ilustrativo. Tomemos el punto  $x=0$ . Para él la evolución de  $u$  es:

$$u = - u_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$$

y dado que

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

vemos que

$$u = \frac{u_0}{2i} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \quad (60)$$

la expresión  $e^{i\omega t}$  representa un fasor unitario que gira en sentido antihorario generando el círculo trigonométrico en el plano complejo, y con velocidad angular  $\omega$ .

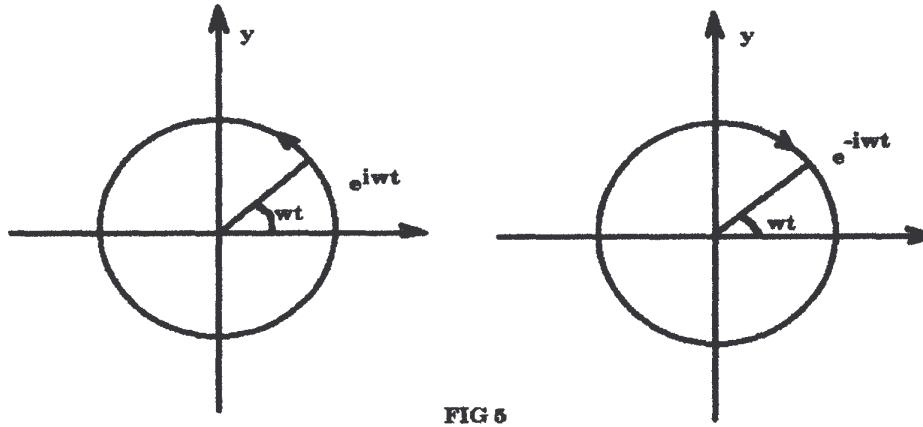


FIG 5

Fig 5.- Representación geométrica de  $e^{i\omega t}$  y  $e^{-i\omega t}$  en el plano complejo

Así la oscilación  $u$  puede considerarse como la superposición de dos movimientos circulares de velocidad angular  $\omega$ . Tomemos en consideración uno de ellos; sea

$$S = \frac{U_0}{2i} e^{i\omega t} = \frac{U_0}{2} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (61)$$

La energía de oscilación es proporcional al cuadrado de la amplitud. Así pues

$$\mathcal{E} = \frac{k \cdot U_0^2}{4} \cdot e^{i(2\omega t - \pi)} \quad (62)$$

por la de ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{E} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (63)$$

de donde

$$S = -\frac{k \cdot u^2_0}{8i\omega} e^{i(2\omega t - \pi)} \quad (64)$$

que le corresponde un momentum angular

$$L\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\omega} \left\{ -\frac{k \cdot u^2_0}{4} e^{i(2\omega t - \pi)} \right\}$$

$$L\phi = -\frac{k \cdot u^2_0}{4\omega} e^{i(2\omega t - \pi)} \quad (65)$$

es decir

$$L\phi = -\frac{\mathcal{E}}{\omega} \quad (66)$$

así, hay un momentum angular por unidad de volumen cuya relación con la densidad de energía es

$$\pm L\phi \cdot \omega = \mathcal{E} \quad (67)$$

Vemos que naturalmente la onda tiene dos momentum angulares posibles, circular a derechos o a izquierdas.

A este hecho se lo describe como dos formas posibles de polarización circular paralelo a la cuerda.

Cuando la cuerda se mueve en un plano, el desplazamiento se contiene en en el plano y decimos que la está polarizada linealmente



## ONDAS

### CONFERENCIA II

#### 1) ONDAS ESTACIONARIAS

Consideremos una cuerda tensa sujeta firmemente por sus extremos. El problema es resolver la ecuación.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Sujeta a las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \quad (2) \text{ en los extremos.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{array} \right\} (3)$$

Como condiciones iniciales, en las que supondremos que la cuerda parte desde la deformación  $f(x)$  en el reposo.

Si resolvemos el problema por el método de separación de variables obtenemos que.

$$u(x,t) = XT \quad (4)$$

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \quad (5)$$

$$-\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = k^2 \quad (6)$$

De (5) encontramos  $X = A \cos(kx) + B \sin(kx)$  y de (6)

$$T = C \cos(kct) + D \sin(kct) ; \text{ así pues}$$

$$u(x,t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)][C \cos(kct) + D \sin(kct)]$$

Por las condiciones de borde

$$0 = u(0,t) = A[C \cos(kct) + D \sin(kct)]$$

Donde:  $A = 0$

$$\text{y } 0 = u(a,t) = B \sin(ka)[C \cos(kct) + D \sin(kct)]$$

Donde:

$$\sin(ka) = 0$$

$$ka = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{a} ; n = 0,1,2,3,\dots \quad (7)$$

De allí que:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left( C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{a} t\right) \right)$$

De las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{con: } \overline{B}_n = B_n C_n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(-\overline{B}_n \frac{n\pi c}{a} \cdot 0 + \overline{D}_n \frac{n\pi c}{a}\right)$$

$$\text{con: } \overline{D}_n = B_n D_n$$

Reordenando y reescribiendo las dos últimas ecuaciones:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (8)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n \frac{n\pi c}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (9)$$

Vemos claramente que  $\overline{D}_n = 0$ . El valor  $\overline{B}_n$  puede calcularse como sigue:

$$\int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{a}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \int_{-a}^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{a}x\right) dx$$

La integral de la derecha se hace cero a no ser que  $n = l$ ; en cuyo caso:

$$I = \int_{-a}^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{l\pi}{a}x\right) dx = \int_{-a}^a \frac{1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{a}x\right)}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_{-a}^a - \int_{-a}^a \cos\left(\frac{2l\pi}{a}x\right) dx$$

$I = a$  así que:

$$a\overline{B}_l = \int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{a}x\right) dx$$

$$\overline{B}_l = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{a}x\right) dx \quad (10)$$

Así pues:

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \overline{B}_l \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{l\pi c}{a}t\right) \quad (11)$$

$$\text{Pero: } \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi c t}{a}\right)$$

Puede verse como la superposición de dos ondas viajeras. En efecto, de la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

haciendo:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{l\pi x}{a} \quad \frac{A-B}{2} = \frac{l\pi c}{a}t$$

$$\text{sumando tenemos: } A = \frac{l\pi}{a}(x+ct)$$

$$\text{restando tenemos: } B = \frac{l\pi}{a}(x-ct)$$

Así pues:

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\overline{B}_l}{2} \left\{ \operatorname{sen} \frac{l\pi}{a}(x+ct) + \operatorname{sen} \frac{l\pi}{a}(x-ct) \right\} \quad (12)$$

(11) Indica que no es una onda viajera. La cuerda oscila manteniendo los mismos nodos y vientres estacionarios en los mismos lugares. Tales son las ondas estacionarias.

(12) Nos indica que tales ondas estacionarias se deben a la superposición de dos ondas viajeras que viajan en direcciones opuestas y se reflejan permanentemente en los extremos.

El flujo medio de energía a lo largo de una onda estacionaria es cero. En efecto, desde  $x = ct$ , la ecuación (11) puede mirarse como un proceso por el cual hay dos flujos de energía:

$$P_1 = \bar{E}c ; \text{ Para la primera onda viajera, y}$$

$$P_2 = -\bar{E}c : \text{ Para la onda viajera opuesta.}$$

Así que la potencia total es:  $P_1 + P_2 = 0$ .

**ONDAS**  
**CONFERENCIA II**  
**ONDAS EN EL ESPACIO**

1. - Algunas definiciones importantes.

Frente de ondas Se denomina frente de ondas el lugar geométrico de todos los puntos de una onda que tienen la misma fase.

Según la geometría de los frentes de onda, estos clasifican a las ondas en planas, esféricas, cilíndricas, etc.

**2.- ONDAS PLANAS**

Un frente de ondas planas cumple con la ecuación:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constante} \quad (1)$$

Se ve que  $\vec{k}$  es el vector directriz del plano que contiene a los puntos descritos por (1).

En efecto, si  $t = 0$  (1) toma la forma:

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = C_0 \quad (2)$$

Que es, claramente, la ecuación del plano.

La expresión (1) puede a su vez escribirse como:

$$k \cdot r \cos\theta - \omega t = C_0 \quad (3)$$

Donde se ve que  $\theta$  es el ángulo entre el vector  $\vec{k}$  y el vector  $\vec{r}$ .

Si  $\vec{k}$  es paralelo a  $\vec{r}$ ,  $\cos \theta = 1$ .

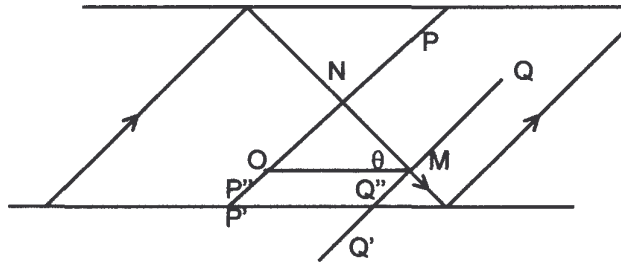
$$k \cdot r - \omega t = C_0$$

$$\frac{dr}{dt} k - \omega = 0$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Es la velocidad de propagación de la onda. (Que es la de fase para el caso especial  $e = 0$ ).

Supongamos una guía de ondas como se indica en la figura 1. Las ondas son reemplazadas por rayos que se reflejan en su interior.



Figural Guía de ondas. PP' y QQ' son frentes de onda separados una longitud de onda  $\lambda = NM$ .

Del gráfico podemos hacer las siguientes afirmaciones:

$\Delta ONM$ , rectángulo, por lo tanto:

$$\frac{NM}{OM} = \cos \theta$$

O lo que es lo mismo:

$$\lambda = OM \cos \theta \quad (5)$$

De allí  $\lambda f = f OM \cos\theta = c$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación de la onda y  $OM$  la longitud de onda aparente paralela a las caras de la guía, la que haremos  $OM = \lambda'$ .

Así pues:

$$c = \lambda' f \cos\theta$$

Pero  $\lambda' f = v$ , es la velocidad de fase de la onda, según la dirección paralela a la guía:

$$V = \frac{c}{\cos\theta} > c \quad (7)$$

La cual es mayor que la velocidad de propagación de la onda. En el caso de ser ondas luminosas no se viola el principio de la relatividad pues los puntos  $O$  y  $M$ , como los  $P''$  y  $Q''$  no son conectados casualmente.

La onda en la guía se descompone en dos, una vertical a la pared de la guía y otra paralela a la misma. La primera genera un patrón de ondas estacionarias, y la segunda una onda viajera de velocidad

$$V_g = c \cdot \cos\theta < c \quad (8)$$

Que es menor a la velocidad de propagación de la onda en el vacío. Es la velocidad con la que se propaga la energía.

Entre (7) y (8) encontramos

$$V_g V = c^2 \quad (9)$$

De la definición de la velocidad de fase y de grupo

$$\frac{d\omega}{dk} \frac{\omega}{k} = c^2 \quad (10)$$



Que da por solución

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + A} \quad (11)$$

Es decir, es un proceso de dispersión bilineal.

### PRINCIPIO DE FERMAT

Expresa que los rayos de ondas recorren distancias en tiempos extremales. Lo usaremos para describir la reflexión y la refracción.

#### REFLECCIÓN

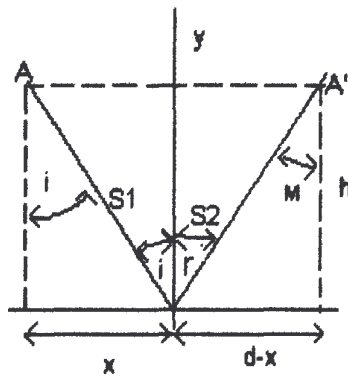


Fig. 2 Reflexión de ondas

De la figura 2 vemos que:

$S_1 + S_2 = S_{tot}$ , la distancia total recorrida.

Ahora

$$S_1 = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$S_2 = \sqrt{h^2 + (d-x)^2}$$

V = velocidad de la onda.

El tiempo total,  $t_T$  será:

$$\frac{1}{V} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{1}{V} \sqrt{h^2 + (d-x)^2} = \frac{S_T}{V} = t_T$$

luego

$$\frac{dt_T}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}$$

sen  $i$  = sen  $r$  = sen  $M$

$$i = r \quad (12)$$

Vemos que:

- La reflexión se hace en el mismo plano en el que se contienen los rayos incidentes, reflejados y la normal a la superficie espejo.
- El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

## REFRACCION

Ahora tenemos dos medios distintos, donde las ondas se propagan a velocidades diferentes, como indica la figura 3.

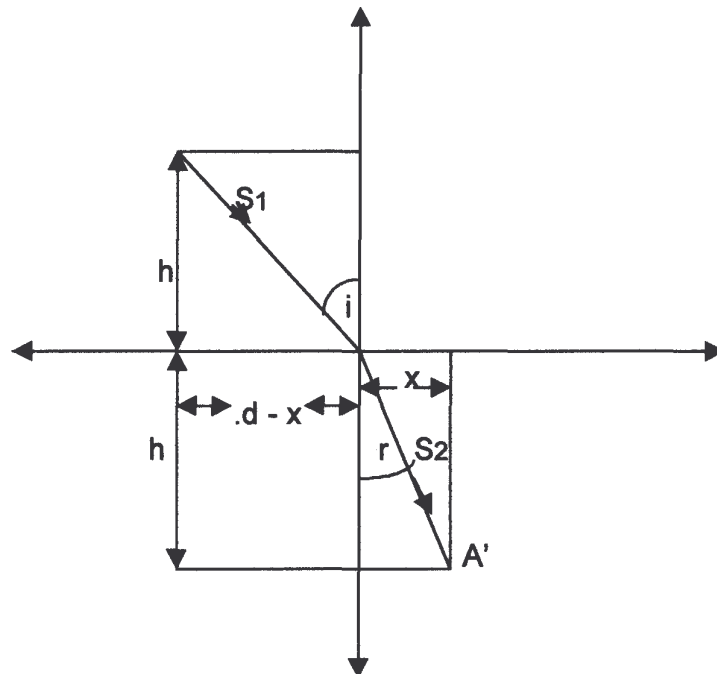


Figura 3: Refracción de ondas.

$$S_1 = \sqrt{h^2 + (d-x)^2}$$

$$S_2 = \sqrt{h^2 + x^2}$$

*El tiempo total es:*

$$t_T = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2}$$

$$t_T = \frac{1}{v_1} \sqrt{h^2 + (d-x)^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{h^2 + x^2}$$

El tiempo extremal:

$$\frac{dt_T}{dx} = 0$$

Por lo tanto:

$$-\frac{(d-x)}{v_1 \sqrt{h^2 + (d-x)^2}} + \frac{x}{v_2 \sqrt{h^2 + x^2}} = 0$$

$$-\frac{\text{sen } i}{v_1} + \frac{\text{sen } r}{v_2} = 0$$

Llamando  $c$  a la velocidad de propagación de la onda.

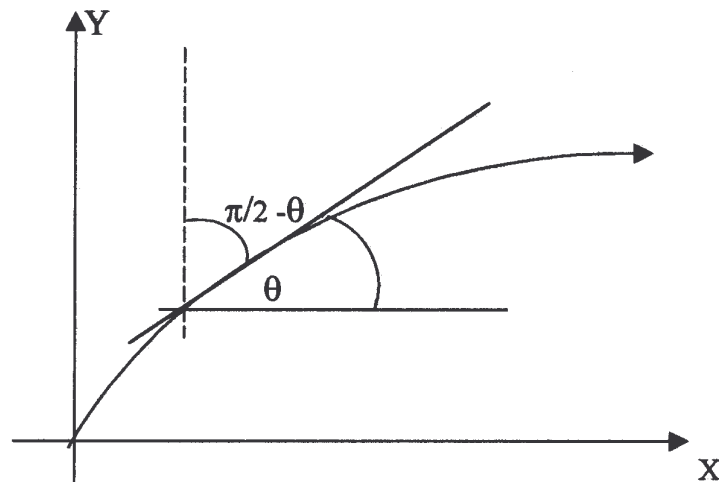
$$\frac{c}{v_1} \text{sen } i = \frac{c}{v_2} \text{sen } r$$

$$n_1 \text{sen } i = n_2 \text{sen } r$$

Ejemplo: Un medio no homogéneo estratificado tiene un índice de refracción que varía según la dirección  $Y$ , esto es  $n = n(y)$ . Demostrar que la ecuación de camino de un rayo es:

es:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{n^2(y)}{c^2} - 1}}$$



La pendiente del haz es:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tag} \theta$$

Pero:  $n(y) \operatorname{sen} \alpha(y) = c$

Donde:  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$n(y) \cos \theta = c$$

$$\cos \theta = \frac{c}{n(y)}$$

$$\operatorname{tag} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{c^2} - 1} = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{n^2(y)}{c^2} - 1}}$$

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{n^2(y)}{c^2} - 1}}$$

### 3.- ONDAS ESFÉRICAS.

Cumplen con la ecuación:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \frac{v}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\text{Así: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( -v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \left\{ -\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\} - \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Es la ecuación de una onda plana, cuya solución es:

$$v = f_1(r + ct) + f_2(r - ct)$$

$$y \quad u = \frac{f_1(r + ct)}{r} + \frac{f_2(r - ct)}{r} \quad (16)$$

Son esferas que se propagan según  $r = \pm ct$  desde el origen de coordenadas. Tomemos solo la solución:

$$u = \frac{f(r - ct)}{r}$$

La energía cinética es:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho c^2}{r^2} \left( \frac{df}{d\phi} \right)^2$$

Con  $\phi = r - ct$  y  $\rho$  = la densidad.

La energía por unidad de volumen es el doble de este valor.

$$E = \frac{2c^2 \rho}{r^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^2$$

El valor medio de esta energía es:

$$\bar{E} = \frac{2c^2 \rho}{r^2} \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^2} \quad (17)$$

Y la intensidad de la onda:

$$I = \bar{E}c$$

$$I = \frac{2c^3 \rho}{r^2} \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^2} \quad (18)$$

Es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, de allí:

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \quad (19)$$

$$\text{Si: } f = u_0 \text{ sen}(kr - \omega t) = u_0 \text{ sen } \phi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = u_0 \cos \phi = u_0 \cos(kr - \omega t)$$

$$e: \quad I = \frac{2c^3 \rho}{r^2} u_0^2 \overline{\cos^2(kr - \omega t)}$$

$$I = \frac{\rho c^3}{r^2} u_0^2 \quad (20)$$

**CONFERENCIA IV**  
**INTERFERENCIA DE ONDAS**

Como punto de partida estudiemos el importantísimo caso de las ondas electromagnéticas,

**1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS (OEM)**

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (4)$$

Que definen las relaciones espacio temporales entre  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , en tanto que las propiedades dinámicas están dadas por la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (5)$$



Si tomamos el rotacional de (1)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

Y aplicamos la identidad vectorial

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$$

Vemos que

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

con  $c^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  la velocidad de la OEM

Podemos demostrar de forma análoga que.

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Hemos visto que el campo eléctrico almacena energía potencial y el magnético energía cinética, y que en el caso de las ondas electromagnéticas es.

$$\mathcal{E}_P = \frac{\mu_0}{2} H^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8)$$

de allí  $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 \quad (9)$

$Z_0$  es la impedancia característica del vacío y  $\mathcal{E}_p$  es la densidad de energía distribuida tanto en el campo eléctrico como en el magnético. La densidad de energía total del campo es el doble de (8); es decir.

$$\mathcal{E} = 2 \mathcal{E}_P = \epsilon_0 E^2 \quad (10)$$

Y la energía promedio es

$$\overline{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \quad (11)$$

La intensidad de la luz es

$$I = \overline{\mathcal{E}} c = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{Z_0} \quad (12)$$

Donde  $\langle E \rangle$  denota el promedio cuadrático del campo eléctrico en el tiempo.

Como complemento a este párrafo demostramos que  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son normales. En efecto, dados (6) y (7)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (13)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (14)$$

Que reemplazadas en las ecuaciones de Maxwell obtenemos.

$$\left. \begin{aligned} i\vec{K} \times \vec{E}_0 &= +i\mu_0 \omega \vec{H}_0 \\ i\vec{K} \cdot \epsilon_0 \vec{E}_0 &= 0 \\ i\vec{K} \times \vec{H}_0 &= -i\omega \epsilon_0 \vec{E}_0 \\ i\vec{K} \cdot \vec{H}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Obsérvese que es equivalente al reemplazo de los operadores

$$\nabla \longrightarrow i\vec{K} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega \quad (16)$$

Reescribiendo el sistema (15)

$$\left. \begin{aligned} \vec{K} \times \vec{E}_0 &= \mu_0 \omega \vec{H}_0 \\ \vec{K} \cdot \vec{E}_0 &= 0 \\ \vec{K} \cdot \vec{H}_0 &= 0 \\ \vec{K} \times \vec{H}_0 &= -\omega \epsilon_0 \vec{E}_0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Vemos entonces que  $\vec{K} \perp \vec{E}_0$  y  $\vec{K} \perp \vec{H}_0$ , además que  $\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0$  de modo que  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  y  $\vec{K}$  forman una triada ortogonal de vectores.

El vector  $\vec{K}$  indica la dirección de propagación de la energía, en efecto, el vector de Poynting es el flujo de energía y está dado por.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (18)$$

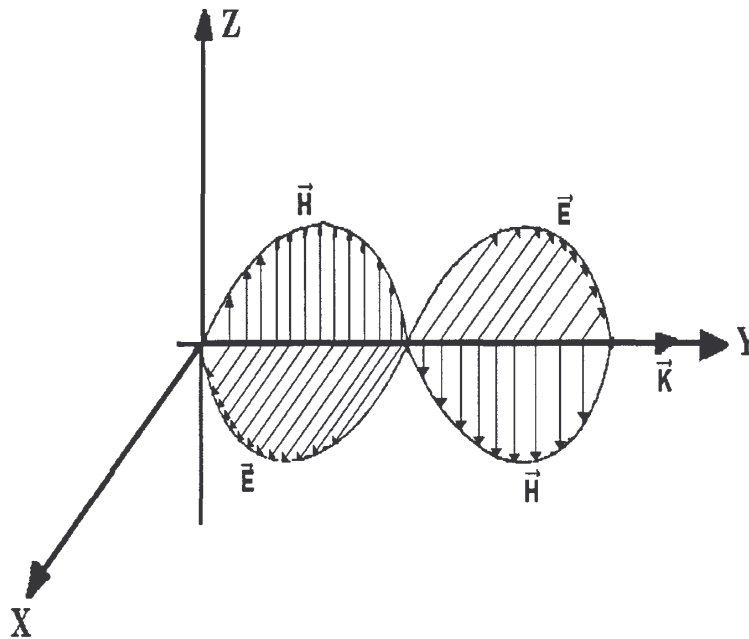
Que en nuestro caso es.

$$\vec{S}_0 = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 = \vec{E}_0 \times \left( \frac{\vec{K} \times \vec{E}_0}{\mu_0 \omega} \right)$$

$$\vec{S}_0 = \frac{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0)}{\mu_0 \omega} \vec{K} - \frac{(\vec{E}_0 \cdot \vec{K})}{\mu_0 \omega} \vec{E}_0 = \frac{E_0^2 \vec{K}}{\mu_0 \omega} \quad (19)$$

Además  $I_0 = |\vec{S}| = \frac{E_0^2 \vec{K}}{\mu_0 \omega} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{Z_0}$  (20)

Que es la misma relación (12), salvo el promedio en el tiempo. En la fig. 1. Podemos ver la evaluación de una OEM, paralela al eje y



**Fig. 1. Representación de una OEM monocromática plana.**

## 2. INTERFERENCIA DE OEM PLANAS

Sean dos OEM planas monocromáticas de la misma frecuencia tales que.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \quad (21)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2) \quad (22)$$

Con  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  constantes.

Si las Ondas se superponen.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (23)$$

La intensidad de la superposición será.

$$I = \frac{\langle E^2 \rangle}{Z_0}$$

$$y \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2 dt \quad (24)$$

Ahora

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

De allí concluimos.

$$I = I_1 + I_2 + I_{21} \quad (25)$$

con

$$I_1 = \frac{\langle E_1^2 \rangle}{Z_0}, \quad I_2 = \frac{\langle E_2^2 \rangle}{Z_0} \quad (26)$$

$$I_1 = \frac{1 E_{01}^2}{2 Z_0}, \quad I_2 = \frac{1 E_{02}^2}{2 Z_0} \quad (27)$$

Además

$$I_{21} = \frac{2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}{Z_0} \quad (28)$$

Es el término de interferencia. Supondremos que  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  tienen la misma polarización,

así que:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 &= E_{01} E_{02} \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2) \\
&= E_{01} E_{02} \left[ \left\{ \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \cos \omega t + \text{sen}(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \text{sen} \omega t \right\} \cdot \left\{ \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \cos \omega t + \text{sen}(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \text{sen} \omega t \right\} \right] = \\
&= E_{01} E_{02} \left[ \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \cos^2 \omega t + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \text{sen}(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \text{sen}^2 \omega t + \right. \\
&\quad \left. + \text{terminos con el producto } \cos \omega t \text{ sen} \omega t \right]
\end{aligned}$$

El valor medio

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle &= \frac{E_{01} E_{02}}{2} \left[ \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \text{sen}(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \right]
\end{aligned}$$

puesto que

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \langle \cos \omega t \text{ sen} \omega t \rangle = 0 \quad (29)$$

De allí

$$I_{21} = 2 \times \frac{E_{01} E_{02}}{2Z_0} \cos \left[ (\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) - (\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \right] \quad (30)$$

$$I_{21} = 2 \times \frac{E_{01} E_{02}}{2Z_0} \cos \delta \quad (31)$$

$$\text{con} \quad \delta = \left[ (\vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) - (\vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \right] \quad (32)$$

la diferencia de fase de las ondas

Tendremos entonces



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (33)$$

Puesto que

$$E_{01} = \sqrt{2I_1 Z_0} \quad , \quad E_{02} = \sqrt{2I_2 Z_0}$$

$$I_{21} = 2 \times \frac{E_{01} E_{02}}{2Z_0} \cos \delta = 2 \times \sqrt{\frac{2I_1 Z_0 \times 2I_2 Z_0}{4Z_0^2}} = 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Vemos que habrá una intensidad máxima

$$I_{\text{máx}} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad \text{para } \delta = 2n\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

y tenemos una interferencia constructiva.

También habrá una intensidad mínima para  $\cos \delta = -1$  ; es decir

$$I_{\text{min}} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad \text{para } \delta = (2n+1)\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Si

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (36)$$

de allí

$$\left. \begin{array}{l} I_{\text{min}} = 0 \\ I_{\text{max}} = 4I_0 \end{array} \right\} \quad (37)$$

### 3. INTERFERENCIA DE OEM ESFÉRICAS

Sean dos fuentes puntuales S y S de los que emergen OEM, entonces de la fig. 2

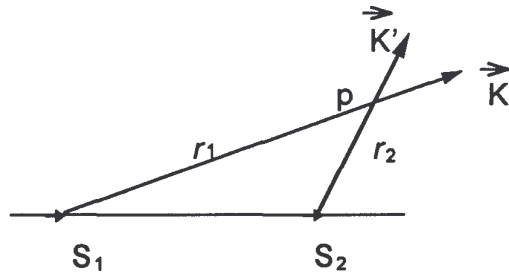


Fig.2 Emisión de OEM esféricas desde las fuentes puntuales S y S

$$\vec{E}_1(r_1, t) = \vec{E}_{01}(r_1) \exp(i k r_1 - \omega t)$$

$$\vec{E}_2(r_2, t) = \vec{E}_{01}(r_2) \exp(i k r_2 - \omega t)$$

y

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Si las intensidades de las fuentes son iguales el término de interferencia se escribirá.

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} [K(r_1 - r_2) + \epsilon_1 - \epsilon_2] \quad (38)$$

De allí que  $I_{max} = 4 I_0$ ,  $\delta = 2\pi m$ ,  $m = 0, 1, 2$  y si para simplificar  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  entonces

$$K(r_1 - r_2) = 2\pi m \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

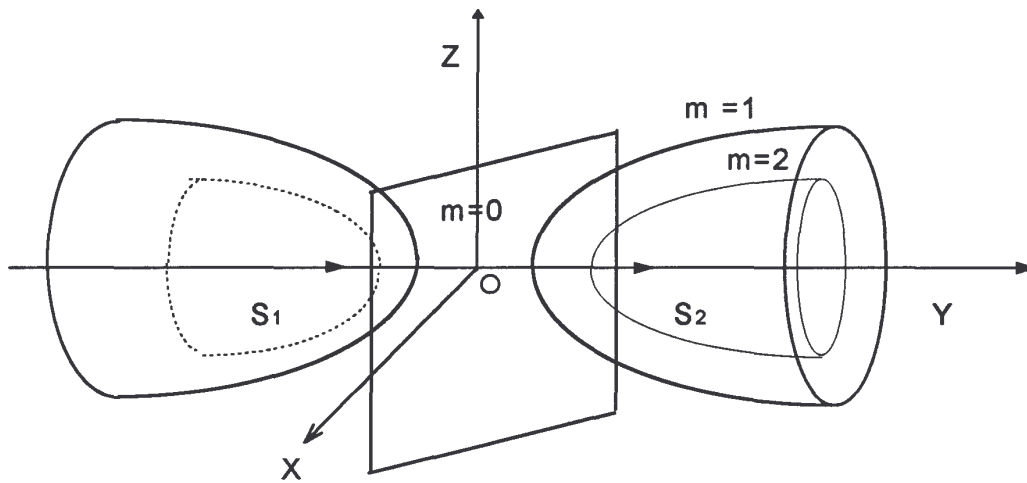
y dado que  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$

Tenemos  $r_1 - r_2 = m\lambda$  son los puntos de máxima intensidad.

Para  $I_{min} = 0$ ,  $K(r_1 - r_2) = (2m + 1)\pi$

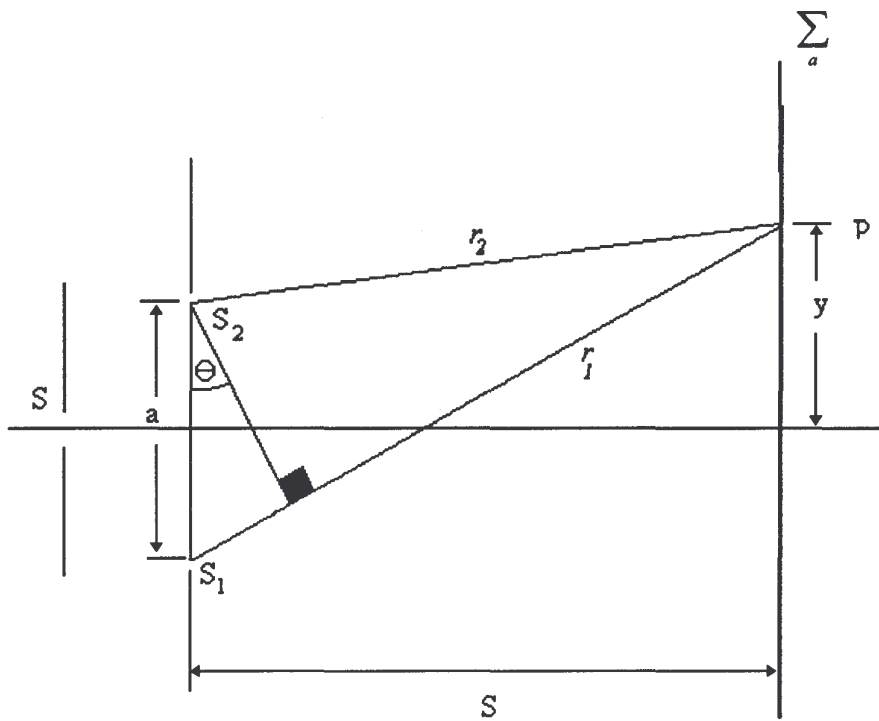
Nos lleva a  $r_1 - r_2 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$

El lugar geométrico de las isolumínicas de dos fuentes puntuales  $S_1$  y  $S_2$  son hiperboloides de revolución, como se indica en la fig. 3



**Fig. 3 Isolumínicos de dos fuentes puntuales**

#### 4. INTERFERÓMETRO DE YOUNG



**Fig. 4 Interferómetro de Young**

Este experimento fue crucial para determinar la naturaleza ondulatoria de luz. Las fuentes S, S<sub>1</sub> y S<sub>2</sub> son, o bien pequeños huecos o bien ranuras largas perpendiculares al plano del dibujo. La onda que emerge en S incide sobre S<sub>1</sub> y S<sub>2</sub> las cuales sirven como emisores coherentes de fase. Para cualquier punto P distante muy alejado del eje de simetría, la diferencia óptica es.

$$r_1 - r_2 \cong a \operatorname{sen} \theta \cong a\theta$$

y puesto que

$$\operatorname{tag} \theta \cong \theta \cong \frac{y}{S}$$

tenemos

$$\frac{ay}{S} = r_1 - r_2$$

Los máximos se hallan en  $r_1 - r_2 = m\lambda$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  así los máximos de interferencia ocurren siempre que

$$Y_m = \frac{Sm\lambda}{a} \quad (39)$$

Y los mínimos suceden cuando  $r_1 - r_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  es decir, para cuando

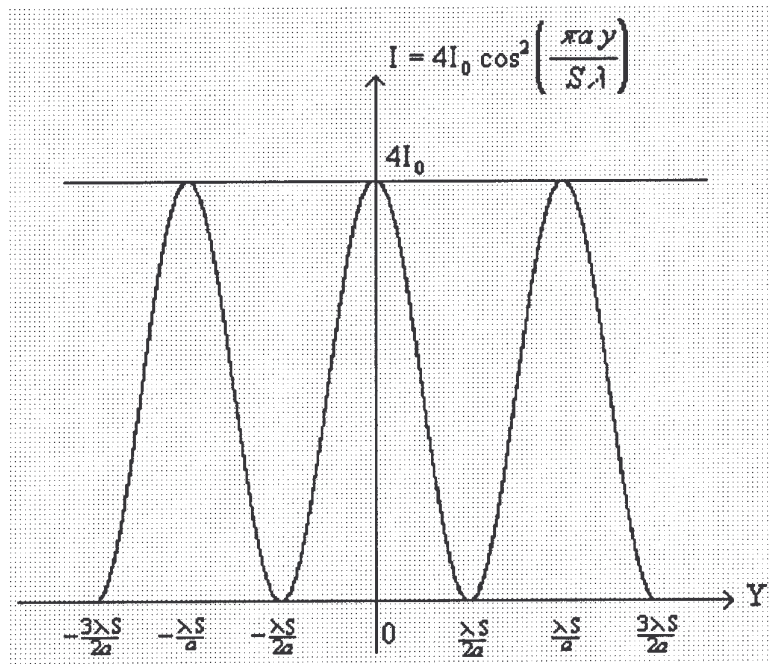
$$Y_m = \frac{S\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{a} \quad (40)$$

La intensidad luminosa está dada por

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi ay}{S\lambda} \right)$$

La figura resultante se muestra en la fig 5



**Fig. 5 Intensidades de interferencia de dos fuentes puntuales**

# INDICE

<b>Conferencia No. 1</b>	<b>Pág .</b>
1. Movimiento Armónico Simple MAS.....	1
2. Procesos energéticos en el M.A.S.....	5
3. Composición de M.A.S.....	7
4. Problemas.....	8
5. Problemas propuestos.....	14
 <b>Conferencia No. 2</b>	
1. M.A.S. amortiguado y forzado.....	16
2. Potencia compleja, resonancia.....	19
3. Técnicas de medición de Q.....	24
 <b>Conferencia No. 3</b>	
Sistemas con varios grados de libertad	
1. Molécula de CO <sub>2</sub> .....	29
 <b>ONDAS</b>	
 <b>Conferencia I</b>	
Conceptos fundamentales	
1. Campo.....	38
2. Ondas.....	38
3. Descripción matemática de campos y ondas.....	38
4. Ondas en una cuerda tensa.....	42
5. Solución de la ecuación de ondas en cuerda tensa infinita.....	46
6. Propagación de la energía en ondas, intensidad, momentum.....	57
7. Momentum angular.....	61
 <b>Conferencia II</b>	
1. Ondas estacionarias .....	65

### **Conferencia III**

#### **Ondas en el espacio**

1. Algunas definiciones importantes.....	70
2. Ondas planas.....	70
Principio de Fermat.....	73
Reflección.....	73
Refracción.....	75
3. Ondas esféricas.....	78

### **Conferencia IV**

#### **Interferencia de Ondas**

1. Ondas electromagnéticas (OEM).....	80
2. Interferencia de OEM Planas .....	86
3. Interferencia de OEM esféricas.....	90
4. Interferómetro de Young.....	91
 Bibliografía.....	 94

## **BIBLIOGRAFÍA:**

- 1. HECHT :** Optica. Ediciones Schaum. Mac Graw-Hill. 1976
- 2. SETO:** Vibraciones Mecánicas. Ediciones Schaum Mac Graw-Hill. 1970.
- 3. GOLDSTEIN :** Mecánica Clásica. Edit Aguilar. 1966
- 4. WELLS D. :** Dinámica de Lagrange. De. Shaum. Mac Graw -Hill. 1972.
- 5. HECHT-ZAJAC.:Optica.** Fondo Educativo Interamericano. 1974.
- 6. MOYA D. :** Sistemas Electromecánicos. Facultad de Ciencias, EPN. 1996
- 7. JORDAN -BALMAIN :** Ondas Electromagnéticas y Sistemas Radiantes. Paraninfo. Madrid, 1978.
- 8. RAMO, WHINNEERY, VAN DUZER** Campos y Ondas. De. Pirámide, Madrid, 1974.