

621.3 ***Moya, Douglas***
Sistemas Electromecánicos
Facultad de Ciencias - EPN
Quito - Ecuador, 1997

- Física Aplicada
- Electromecánica

Impreso en el Sistema Reprografico de la
Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional
marzo – 1997

Dirección
Casilla 17-01-2759
Ciencias@maiLepn.edu.ec
Quito-Ecuador

CONFERENCIA 1

SISTEMAS ELECTROMECA'NICOS

1.- Introducci3n:

Se presenta la teor3a de conversi3n de energ3a el3ctrica a mec3nica (y viceversa), haciendo una exposici3n r3pida de la teor3a de la Mec3nica Cl3sica en su formulaci3n Lagrangiana y Hamiltoniana, una visi3n resumida del electromagnetismo desde un punto de vista energ3tico, el estudio de la interacci3n electromagn3tica y el an3lisis de sistemas electromec3nicos, en el que se formulan algunos ejemplos de inter3s.

Se presenta al fin, un modelo computacional para resolver un problema electromec3nico particular, como ilustraci3n del procedimiento completo de an3lisis y s3ntesis.

2.- MEC3NICA RACIONAL.

2.1.- Sea un sistema fisico cuya representaci3n est3 dada por un punto en el espacio de configuraci3n (q_1, q_2, \dots, q_n) . La evoluci3n del sistema estar3 descrita por una trayectoria en tal espacio, sin embargo, si desconocemos cual es y s3lo sabemos dos configuraciones dadas en dos instantes de tiempo distintos, para poder determinarla ser3 necesario desarrollar toda una perspectiva teor3ica.

Para ello se3alemos que el estado mec3nico de un sistema est3 dado por el conjunto (q_i, \dot{q}_i, t) . Postularemos la existencia de una funci3n de estado por $L = L(q, \dot{q}, t)$, tal que cuyo conocimiento entra3a el de la evoluci3n din3mica del sistema.

Entre los dos puntos del espacio de configuraci3n que conocemos, pueden empalmarse un n3mero infinito de curvas, cada una representativa de una evoluci3n posible del sistema. Pero tan s3lo una de ellas sucede en la realidad. As3 que debemos construir un principio que nos posibilite discernirla de todas aquellas cuya existencia es tan s3lo especulativa. Para ello asignemos a cada curva un n3mero definido por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (1)$$

donde se sobreentiende que la integral es de l3nea. A S llamaremos acci3n del sistema.

Sea S la acci3n de la trayectoria real supuesta conocida y $S + \delta S$ la de otra infinitesimalmente pr3xima; que ser3 virtual. Tal trayectoria virtual ser3 real si s3lo si $\delta S = 0$. (2)

Sea, en general $S = S(a, t_3, y)$ con a, t_3, y , par3metros independientes. La condici3n (2) implica:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial S}{\partial \gamma} \delta \gamma \quad (3)$$

que será cierto para todo $(\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma) \neq (0,0,0)$ si

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0 \quad (4)$$

que es un criterio de optimidad. De modo que $\delta S = 0$ es el principio de objetividad de la física, que nos permite discernir entre lo que es y lo que pensamos que es. Tal es una super ley y se llama principio de **mínima acción**.

Por el hecho de que (1) está definido entre dos instantes de tiempo prefijados que señalan dos puntos que empalman en infinitas curvas continuas y uniformes, cada una asignada a un S particular, la variación δ es independiente del tiempo y entraña sólo variaciones de las coordenadas y velocidades.

Así pues, por lo anterior:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (5)$$

o lo que es lo mismo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i \right) dt \quad (6)$$

donde se ha utilizado el convenio de los índices repetidos de Einstein, para no escribir sumatorias.

En física se trabaja con funciones analíticas, continuas y uniformes. Las velocidades deben tener tal cualidad por lo tanto conmutarán los operadores δ y d/dt

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

Calculemos

$$I = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i dt$$

En vista a lo anterior

$$I = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d}{dt} \delta q_i dt$$

se integra por partes

$$I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (8)$$

así que (6) se escribirá

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt \quad (9)$$

Ahora $\delta S = 0$; y $\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0$ de modo que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0$$

como los δq_i son independientes deberán ser cero los coeficientes

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (10)$$

esta ecuación se llama de Euler - Lagrange.

Para la mecánica clásica, en un campo conservatorio tenemos:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (11)$$

Dado que $T = \sum (1/2)m_i(\dot{x}_i)^2$ y $U = U(x_j)$ son las energías cinética y potencial

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j = p_j$$

y

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = - \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

dado que por definición $(\partial T / \partial x_j) = 0$ y $(\partial U / \partial x_j) = 0$

llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (T - U) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} (T - U) = 0 \quad (12)$$

comparando con (10), donde $x_j \rightarrow q_j$ concluimos

$$L = T - U \quad (13)$$

es el lagrangiano de la mecánica clásica.

2.2.- Sistemas Interactuantes

Trataremos el caso más general de dos sistemas interactuantes que operan a través de un medio de interacción.

Sea L_0 el lagrangiano total del gran sistema, tal que

$$L_0 = L_1 + L_2 + L_{12} \quad (14)$$

siendo L_1 y L_2 los lagrangianos de los sistemas independientes y L_{12} el de interacción que los liga. Si llamamos $L_1 + L_2 = L$, desde la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

llegamos a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{12}}{\partial \dot{q}_i}$$

Si definimos la fuerza generalizada por

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{12}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}$$

llegamos a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (15)$$

Introduciremos la función de disipación de Rayleigh dada por

$$\mathcal{F} = \sum_i (1/2) f_i (\dot{q}_i)^2 \quad (16)$$

que representa la rapidez en la que el sistema pierde energía.

Si además hay una fuente de potencia externa desde por $\sum F_i \dot{q}_i$ que entrega energía (16) puede combinarse así

$$\mathcal{F} = \sum (1/2) f_i (\dot{q}_i)^2 + \sum F_i \dot{q}_i \quad (17)$$

Así que la fuerza generalizada será:

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = f_i \dot{q}_i - F_i \quad (18)$$

y encontramos que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = f_i \dot{q}_i - F_i \quad (19)$$

Para ilustrar esto consideraremos un oscilador armónico amortiguado y forzado, cuyo lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - \frac{1}{2} k (x)^2$$

en

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} f \dot{x}^2 - F \dot{x}$$

aplicando (19) llegamos a

$$F = m \ddot{x} + f \dot{x} + k x \quad (20)$$

2.3.- Formulismo de Hamilton.

Aquí se considera como función de estado a aquella que lo es del conjunto (q_i, p_i, t) donde p_i es el momento generalizado, cuya significación física es la siguiente:

a.) Si el espacio de configuración es homogéneo, el lagrangiano será función sólo de \dot{q}_i , dado que cada punto del espacio reproduce la misma configuración física.

$$L = L(\dot{q}_i)$$

de la ecuación de lagrange

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$\text{así que } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{const.} \quad (21)$$

será una magnitud física que se conserva y se llama momento generalizado.

Vemos que en términos de p , la ecuación de lagrange se mirará como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (22)$$

b.) Sea un sistema cuya trayectoria en el espacio de configuración es conocida entre t_1 y t_2 . Pero en el instante t_2 , el sistema es abierto, sufrirá una interacción $\delta S = 0$; así que de (9)

$$\delta S = \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt$$

La integral será cero en virtud de la ecuación de Lagrange, y porque $\delta q_i(t_2) = 0$, tenemos

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

que nos lleva a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad (23)$$

La función de estado dinámica que escogemos será construida del siguiente modo:

Sea

$$L = L(q_i, \dot{q}_i)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ y $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} p_i \dot{q}_i$$

así que

$$\frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i - L) = 0$$

Definimos

$$H = p_i \dot{q}_i - L \quad (24)$$

que será una magnitud que se conserva cuando el tiempo es homogéneo, y a la que llamaremos Hamiltoniano.

Para ver su significado físico veamos una partícula unidimensional; en ese caso

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - U(x)$$

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{x}}$$

y $H = m (\dot{x})^2 - ((1/2) m (\dot{x})^2 - U(x)) = (1/2) m (\dot{x})^2 + U(x)$ que coincide con la energía del sistema.

c.) Ahora de

$$S(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) dt$$

dividiendo respecto al tiempo

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = L$$

reordenando

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i \quad (25)$$

como $\delta S = p_i \delta q_i = \delta(p_i q_i) - p_i \delta q_i$

que significa $\delta(S - p_i q_i) = -q_i \delta p_i$

o lo que es lo mismo $\frac{\partial}{\partial p_i} (S - p_i q_i) = -q_i$

así que $\frac{\partial S}{\partial p_i} = 0$

De modo que (25) se escribirá, reordenando la definición del Hamiltoniano, como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \quad (26)$$

que es la ecuación de Hamilton - Jacobi.

2.4.- Ecuaciones Canónicas de Hamilton.

De $H = H(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (27)$$

y de $H = \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L$

$$\frac{dH}{dt} = \mathbf{p}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{p}}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \ddot{\mathbf{q}}_i - \frac{\partial L}{\partial t}$$

recordando $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, tenemos

$$\frac{dH}{dt} = \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i - p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (28)$$

La ecuación (27) puede escribirse en términos diferenciales:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (29)$$

y de la definición de Hamiltoniano

$$dH = p_i dq_i + q_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = p_i dq_i + q_i dp_i - p_i dq_i - p_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = - p_i dq_i + q_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (30)$$

Desde (30) y (29) encontramos

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} ; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \quad (31)$$

que se llaman ecuaciones canónicas de Hamilton.

CONFERENCIA II

CRITERIOS ENERGÉTICOS SOBRE EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

1.- Energía del Campo Magnético.

Partamos desde las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

y la ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5)$$

La potencia realizada por el campo electromagnético es

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

el último término se elimina por ser un producto combinado

De allí

$$P = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (6)$$

señala que sólo el campo eléctrico efectúa trabajo.

La ecuación (1), llamada Ley de Faraday, puede escribirse como

$$-\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds \quad (7)$$

que nos indica que para que el campo magnético puede ejercer un trabajo, este deberá mediante una evolución temporal, generar un campo eléctrico y es por medio de este último que se realiza trabajo por unidad de carga en una trayectoria cerrada c , originando una fuerza electromotriz

$$V = -\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$

y dado que el flujo magnético es

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds \quad (9)$$

obtenemos

$$V = \frac{d\Phi}{dt} \quad (10)$$

prestaremos atención a los sistemas cuasi-estacionarios, aquellos en los cuales la longitud de onda del campo electromagnético puede considerarse mucho mayor que las dimensiones del circuito eléctrico. En ese caso las ecuaciones de Maxwell se reescriben así:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (12)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (15)$$

Encontremos algunas relaciones de interés

De $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ derivamos que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, llamado \vec{A} vector potencial magnético. Reemplazando la última relación en (13)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

por una identidad vectorial. Escogemos ahora la condición de medida de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ y

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

que es una ecuación de Poisson vectorial que tiene por solución

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (16)$$

Para una corriente unifilar

$$\vec{J}(\vec{r}') d^3 x' \Rightarrow i d\vec{r}' \quad (17)$$

siendo i la corriente y $d\vec{r}'$ el elemento de arco, de modo que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (18)$$

Ahora, el flujo magnético

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (19)$$

por el teorema de Stokes. De modo que por 18

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \oint_c \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot i \quad (21)$$

llamado fórmula de Neumann. El parámetro

$$L = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint \frac{\vec{dr} \cdot \vec{dr}'}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (21)$$

depende de la geometría del sistema y se llama autoinducción.
Así que

$$\Phi = Li \quad (22)$$

de modo que por la ley de Faraday (10)

$$V = L \frac{di}{dt} \quad (23)$$

el trabajo por unidad de tiempo realizado para mantener la corriente i es

$$P = Vi = Li \frac{di}{dt} = \frac{dw}{dt} \quad (24)$$

así que la energía almacenada en el campo magnético será

$$\int dw = \int Li di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (25)$$

Una función cuadrática de la corriente.

Demostraremos que tal energía es cinética.

De $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y de la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})) \quad (26)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

y tomando sólo la componente en x, $\vec{v}_x(\nabla_x \vec{A})$ es igual a

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}_x =$$

$$v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) =$$

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

en donde hemos sumado y, restado el término $v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$. Los tres primeros términos de la izquierda pueden escribirse así:

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot \vec{v})$$

Por otro lado, $A_x = A_x(x,y,z,t)$, de modo que su derivada total respecto del tiempo es

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

de donde

$$-\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z = \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt}$$

así que la fuerza de Lorentz se escribe

$$\vec{F}_x = q \left(E_x + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{A} \cdot \vec{v}) + \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt} \right) \quad (27)$$

$B = \nabla \times A$ y de la ecuación(1)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

que puede reescribirse así

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (28)$$

Hemos permutado las operaciones $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\nabla \times$ por considerar que A es una función continua y uniforme.

Desde (28) podemos decir, en consecuencia al límite electrostático, que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (29)$$

de donde

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (30)$$

Para sólo la componente x de (27) obtenemos

$$F_x = q \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{A} \cdot \vec{v}) + \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt} \right)$$

y dado que $F_x = \frac{dP_{xmech}}{dt}$

Siendo $P_{x \text{ mec}}$, la cantidad de movimiento mecánico la penúltima ecuación podemos escribirle así

$$\frac{d}{dt} (P_{x \text{ mec}} + q A_x) = - \frac{\partial}{\partial x} [qV - q \vec{A} \cdot \vec{v}] \quad (31)$$

vemos que el campo electromagnético tiene una cantidad de movimiento $q A_x$. Así pues, dado que la cantidad de movimiento mide la inercia de un sistema, el campo magnético representa la inercia del sistema electromagnético, y la energía en el almacenado es pues, una energía cinética.

Tal energía es a todas luces $q\vec{A} \cdot \vec{v}$, de modo que el Lagrangiano puede escribirse.

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + q \vec{A} \cdot \vec{v} - qV \quad (32)$$

del cual

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} + q \vec{A}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (q \vec{A} \cdot \vec{v} - qV)$$

Puesto que la ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} (q \vec{A} \cdot \vec{v} - qV) - \frac{d}{dt} (m \vec{v} + q \vec{A}) = 0$$

que es la misma ecuación (31) si tomamos sólo la componente en x.

Tenemos ahora el término $q\vec{A} \cdot \vec{v} = T$

$$dT = dq \vec{A} \cdot \vec{v} = dq \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dq}{dt} \vec{A} \cdot d\vec{r}' = i \vec{A} \cdot d\vec{r}'$$

$$dT = i d\Phi = iLdi \quad (33)$$

$$T = \frac{I}{2} Li^2 \quad (34)$$

de modo que T es la energía cinética.

La expresión (34) indica que la energía cinética es una expresión bilineal de la corriente. Usando este hecho y el adicional de que las ecuaciones de Maxwell son lineales, para un sistema de circuitos acoplados magnéticamente veremos que la energía cinética puede expresarse como

$$T = \frac{I}{2} \sum_k \sum_n M_{kn} i_k i_n \quad (35)$$

donde i_k e i_n son las corrientes de los circuitos k y n y M_{kn} la inducción magnética entre los dos. $M_{kn} i_k i_n$ representa la energía de la interacción de los dos, y el factor 1/2 se introduce pues los índices de sumatoria k y n tomen en cuenta dos veces tal interacción. Además se ve $M_{kn} = M_{nk}$

Como un ejemplo para dos circuitos acoplados magnéticamente tenemos

$$T = \frac{I}{2} M_{11} i_1^2 + \frac{I}{2} M_{22} i_2^2 + \frac{I}{2} M_{12} i_1 i_2 + \frac{I}{2} M_{21} i_2 i_1 \quad (35)$$

o lo que es lo mismo

$$T = \frac{I}{2} L_1 i_1^2 + \frac{I}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (36)$$

con $M_{11} = L_1$, $M_{22} = L_2$, las autoinducciones y M la inducción mutua de los dos circuitos. Veamos otro punto de vista. Sabemos que

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (37)$$

y que la potencia realizada por un campo electromagnético es

$$P = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La densidad de potencia \mathcal{P} será la expresión anterior multiplicada por el número de cargas por unidad de volumen N

$$\mathcal{P} = NP = q N \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (38)$$

y como

$$\vec{J} = q N \vec{v} \quad (39)$$

$$\mathcal{P} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (40)$$

Tomemos la expresión (37); entonces

$$\mathcal{P} = \vec{J} \cdot \vec{E} = -\nabla V \cdot \vec{J} - \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \vec{J} \quad (40)$$

que en forma integral es

$$\int_{\nu} \vec{E} \cdot \vec{J} d^3 x = -\int_{\nu} J \Delta V d^3 x - \int_{\nu} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \vec{J} d^3 x \quad (41)$$

pero

$$\nabla \cdot V \vec{J} = \vec{J} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \vec{J} \quad (42)$$

para el caso cuasi-estacionario $\nabla \cdot \vec{J} = 0$; puesto que $\nabla_x \vec{H} = \vec{J}$ y $\nabla \cdot (\nabla_x H) = \nabla \cdot \vec{J} = 0$; así que con esta consideración (41) queda

$$\int_{\nu} \vec{E} \cdot \vec{J} d^3 x = -\int_{\nu} \nabla \cdot V \vec{J} d^3 x - \int_{\nu} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \vec{J} d^3 x$$

y usando el teorema de Gauss vemos que

$$\int_{\nu} \nabla \cdot V \vec{J} d^3 x = \int_s \vec{J} V \cdot \vec{n} ds = V \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} ds = -VI \quad (44)$$

Si S es una superficie equipotencial y la corriente circula en la dirección de la subida de potencial, como corresponde a una fuente de tensión.

Así, de (44) obtenemos

$$VI = \int_{\nu} \vec{E} \cdot \vec{J} d^3 x + \int_{\nu} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \vec{J} d^3 x \quad (45)$$

En el primer miembro de la ecuación es la potencial entregada por la fuente de tensión, y los términos restantes del segundo miembro son la potencia disipada (en forma de calor) y la entregada en el campo magnético. Así que

$$\frac{dU_m}{dt} = \int_v \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{J} d^3 x \quad (46)$$

y

$$dU_m = \int_v \vec{J} \cdot d\vec{A} d^3 x \quad (47)$$

es la energía almacenada en el campo magnético. De allí

$$U_m = \iiint_v \vec{J} \cdot d\vec{A} d^3 x \quad (48)$$

La relación entre \vec{J} y \vec{A} es lineal además que \vec{J} y \vec{A} son paralelos; así que el producto $\vec{J} \cdot d\vec{A}$ es el área de un triángulo rectángulo de base $|\vec{A}|$ y altura $|\vec{J}|$. De ese modo

$$U_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{J} \cdot \vec{A} d^3 x \quad (49)$$

válido solo para medios lineales.
De la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \quad (50)$$

y dado que $\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$, vemos que

$$\vec{J} \cdot d\vec{A} = d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot [\vec{H} \times d\vec{A}] + \vec{H} \cdot (\nabla \times d\vec{A}) = \nabla \cdot [\vec{H} \times d\vec{A}] + \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (51)$$

así la energía magnética puede escribirse

$$U_m = \int_v \left[\int_o^A \nabla \cdot (\vec{H} \times d\vec{A}) \right] d^3 x + \int_v \left[\int_o^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right] d^3 x \quad (52)$$

usando el teorema de Gauss

$$U_m = \int_s \int_o^A (\vec{H} \times d\vec{A}) \cdot \vec{n} ds + \int_v \int_o^B \vec{H} \cdot d\vec{B} d^3 x \quad (53)$$

extendiendo S a todo el espacio la integral de superficie es cero y

$$U_m = \int_v \int_o^B \vec{H} \cdot d\vec{B} d^3 x \quad (54)$$

y para un medio lineal, usando un razonamiento análogo al derivar la ecuación (49)

$$U_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{H} \cdot \vec{B} d^3 x \quad (55)$$

ydado que $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$U_m = \int_v \frac{\mu}{2} H^2 d^3 x \quad (56)$$

que es una energía cinética, $U_m = T$

Consideremos ahora dos circuitos fluentes de los campos \vec{H}_1 y \vec{H}_2
El campo total es

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \quad (57)$$

así que por (56)

$$T = \int \frac{\mu}{2} H_1^2 d^3 x + \int \frac{\mu}{2} H_2^2 d^3 x + \int \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 d^3 x \quad (58)$$

Ahora, \vec{H}_1 es proporcional a I_1 , \vec{H}_2 lo es a I_2 y $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 = H_1 H_2 \cos \theta$ es proporcional a $I_1 I_2 \cos \theta$. Entonces

$$\frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \int \frac{\mu}{2} H_1^2 d^3 x \quad (59)$$

es el término de interacción magnética.

Así que en general.

$$\frac{I}{2}L_2I_2^2 = \int \frac{\mu}{2}H_2^2 d^3x \quad (60)$$

y

$$\int \mu H_1 H_2 \cos\theta d^3x = M_{12} \cos\theta I_1 I_2 \quad (61)$$

es el término de interacción magnética.

Así que en general

$$T = \frac{I}{2}L_1I_1^2 + \frac{I}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2\cos\theta \quad (62)$$

Esto demostrará a la ecuación (35) con más rigurosidad.

CONFERENCIA III

CRITERIOS ENERGETICOS SOBRE EL CAMPO ELECTROMAGNETICO (II parte)

1.- ENERGIA DEL CAMPO ELECTRICO

La ecuaciones de Maxwell para la electrostática son:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (2)$$

$$\vec{F} = q' \vec{E} \quad (3)$$

La ultima expresión es la fuerza de Lorentz.
de(1)

$$\vec{E} = - \nabla V$$

y por (2)

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

ecuación de Poisson que tiene por solución

$$V = \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3 x'}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (5)$$

para una carga puntual

$$\rho = q \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

la ecuación (5) queda

$$V = \int \frac{q \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3 x'}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_o |\vec{x}|}$$

$$V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_o r} \quad (6)$$

De (6) y por la definición de E tenemos que (3) se escribe

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q' \vec{E} = -q' \nabla V \\ &= + \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_o r^2} \vec{e}_r \end{aligned} \quad (7)$$

y la energía potencial

$$U = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$

$$U = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_o r} \quad (9)$$

Consideremos un sistema de cargas. La energía de interacción entre un par arbitrario será

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4 \pi \epsilon_o |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (10)$$

y la energía total

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4 \pi \epsilon_o |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (11)$$

El factor 1/2 se introduce por el hecho de que los índices consideran dos veces las interacciones por pares de cargas.

La expresión (11) se escribe como:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_j \frac{q_j}{4 \pi \epsilon_o |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (12)$$

que para el caso de una distribución continua de cargas

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}') d^3 x' \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{x}) d^3 x}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (13)$$

que por (5) podemos escribir

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}') V(\vec{x}') d^3 x'$$

como

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

la ecuación anterior es:

$$U = - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} V \nabla^2 V d^3 x$$

y dado que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V \nabla V) &= V \nabla^2 V + \nabla V \cdot \nabla V \\ &= V \nabla^2 V + |\nabla V|^2 \end{aligned}$$

$$U = - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \nabla V) d^3 x + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} |\nabla V|^2 d^3 x$$

Por el teorema de Gauss

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \nabla V) d^3 x = \oint_{\mathcal{S}} V \nabla V \cdot \vec{n} ds$$

que es cero en el infinito, de modo que al integrar sobre todo el espacio, y dado que:

$$\vec{E} = - \nabla V$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3 x \quad (14)$$

Es la energía almacenada en el campo eléctrico.

Por el principio de dualidad, dado que E es el dual de B, si la energía cinética es la del campo magnético, el potencial será la del campo eléctrico.

De la expresión (12) podemos analizar un sistema de conductores sometidos a potencial V_j , su energía será:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (15)$$

Dada la característica lineal de las ecuaciones de Maxwell, la carga q_i inducida en un conductor debe ser la combinación lineal de todos los potenciales.

$$q_i = \sum_j C_{ij} V_j \quad (16)$$

así

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} V_i V_j \quad (17)$$

los coeficientes C se llaman capacidades mutuas. Por ser (17) bilineal en V , $C_{ij} = C_{ji}$

la expresión (17) puede escribirse en forma matricial

$$U = \frac{1}{2} \vec{V}^t \mathbf{C} \vec{V} \quad (18)$$

por (16);

$$\vec{Q} = \mathbf{C} \vec{V} \quad (19)$$

así que

$$\vec{V} = \mathbf{C}^{-1} \vec{Q} \quad (20)$$

La ecuación (18) se escribe ahora en termino de \vec{Q}

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{-1} \vec{Q})^t \mathbf{C} (\mathbf{C}^{-1} \vec{Q})$$

$$U = \frac{1}{2} \vec{Q}^t (\mathbf{C}^{-1})^t (\mathbf{C} \mathbf{C}^{-1}) \vec{Q}$$

$$U = \frac{1}{2} \vec{Q}^t \mathbf{C}^{-1} \vec{Q} \quad (21)$$

dado que C es matriz simétrica. Para los conductores de carga iguales y opuestos

$$U = \frac{q^2}{2C} \quad (22)$$

La expresión (21) dice que U es una función bilineal de las cargas; así que

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j d_{ij} q_i q_j \quad (23)$$

Esta última relación se justifica por (14). En efecto para un sistema de conductores cargados, por el principio de superposición

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

así pues

$$\begin{aligned} E^2 &= \sum_j \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j \\ &= \sum_i \sum_j E_i E_j \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$

pero E_i es proporcional a q_i y E_j a q_j , en tanto $\cos \theta_{ij}$ es el ángulo formado entre E_i y E_j . Así que el cuadrado del campo es función bilineal de las cargas y por (14), U también lo es.

2.- LEY DE CONSERVACION DE LA ENERGIA PARA EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

De la ley de Ampere – Maxwell

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (24)$$

La potencia por unidad de volumen

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (25)$$

y dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}|^2 &= 2 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \vec{J} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}|^2 \quad (26) \end{aligned}$$

de la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

y de la ecuación de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

La ecuación (26) se escribe

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = - \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

de allí que

$$\vec{E} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) \quad (27)$$

De allí que tomando una integral de volumen y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_v \vec{E} \cdot \vec{J} \, d^3x + \int_s (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \, ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) d^3x \quad (28)$$

que dice que la energía por unidad de tiempo consumido en el volumen Y más el flujo de potencia que sale a través de la superficie cerrada S es igual a la rapidez de disminución de la energía almacenada en el campo electromagnético. Tal es la ley de conservación de la energía y se llama teorema de Poynting.

CONFERENCIA IV

1.- INTERACCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO CON CORRIENTES LOCALIZADAS.

Sean dos circuitos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 como indica la figura:

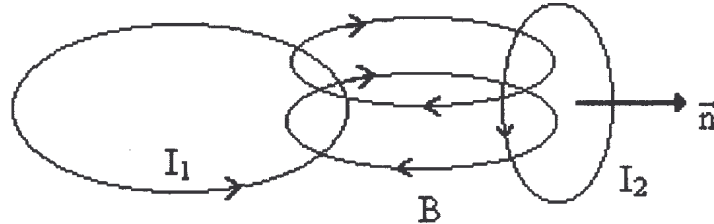


Fig 1. Circuitos acoplado

De lo visto en las anteriores conferencias (II- ecuación (62))

$$T = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \cos\theta \quad (1)$$

El flujo magnético que cruza el segundo circuito originado en el primero es:

$$\Phi_{12} = M I_1 \cos\theta \quad (2)$$

y por otro lado

$$F_{12} = \int_s \vec{B}_{12} \cdot \vec{n} \, ds \quad (3)$$

Así que

$$T_i = I_2 \int_s \vec{B}_{12} \cdot \vec{n} \, ds = \int_s \vec{B}_{12} \cdot I_2 \vec{n} \, ds \quad (4)$$

Si el circuito 2 es pequeño y B_{12} se puede considerara aproximadamente uniforme a través de él, la energía magnética es:

$$T_i = \vec{B}_{12} \cdot \int_s I_2 \vec{n} \, ds \quad (5)$$

Definimos momento magnético por:

$$\vec{m} = \int_s I_2 \vec{n} \, ds \quad (6)$$

y tenemos

$$T_i = \vec{B}_{12} \cdot \vec{m} \quad (7)$$

Calculemos la fuerza sobre un circuito magnético. Considerando tan sólo los términos de interacción en el lagrangiano del sistema, si la espira localizada tiene una masa m entonces

$$L = T_i + \frac{1}{2} m v^2 \quad (8)$$

que por (7)

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \vec{B} \cdot \vec{m} \quad (9)$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \quad (10)$$

Que en forma vectorial

$$\nabla L - \frac{d}{dt} \nabla_v L = 0 \quad (11)$$

$$\text{con } \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{y } \nabla_v = \vec{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial v_z}$$

$$\text{Así pues } \nabla \vec{B} \cdot \vec{m} - \frac{d}{dt} m \vec{v} = 0$$

$$\text{así que } \frac{d}{dt} m \vec{v} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (12)$$

es la fuerza buscada.

Como una observación, podemos escribir (12) del siguiente modo

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = - \nabla (-\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (13)$$

así $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ tendría la interpretación de una energía potencial, que es lo que sostienen los textos tradicionales de electrodinámica.

Ahora calculemos el torque que se realiza sobre un circuito localizado. Supongamos que puede rotar en un eje de simetría y que la espira tiene momento de inercia I . El lagrangiano en tal caso es

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + m \cdot B \cos\theta$$

La ecuación de lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

lleva a

$$- m \cdot B \sin \theta - \frac{d}{dt} I \dot{\theta} = 0$$

así pues

$$\frac{dI \dot{\theta}}{dt} = - mB \sin \theta \quad (14)$$

Haciendo una referencia a la fig. 2, para una espira sencilla vista de canto El torque hace girar el sistema tal que su momentum angular apunte hacia adentro del plano del papel, intentando alinearse con el campo exterior \vec{B} en \vec{n} . Esto lleva inmediatamente a reconocer

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B} = \vec{T}_\theta \quad (15)$$

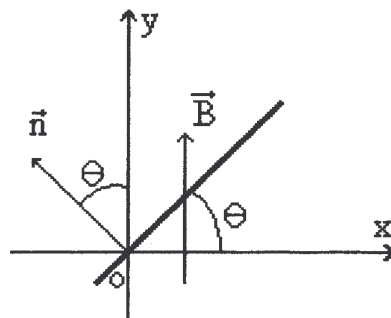


Fig 2 Espira en campo externo B

2.- CIRCUITOS MAGNETICOS.

Consideremos un núcleo de hierro de permeabilidad magnética $\mu \gg \mu_0$. Por efecto del apantallamiento magnético, las líneas de campo se concentran fundamentalmente en el hierro y se dispersan poco hacia el aire. Tal dispersión puede despreciarse. Si colocamos

una bobina de N vueltas en uno de sus lados, como indica la fig.3, y usamos la ley de Ampere

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS \quad (16)$$

siendo Γ camino magnético promedio en el núcleo y S el área encerrada por Γ .

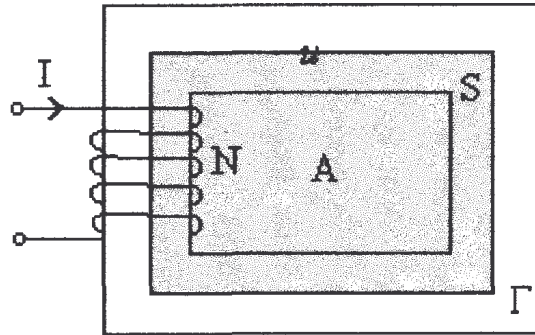


Fig.3 Circuito magnético.

Así que de la última relación encontramos $Hl = NI$ (17)

Como $H = \frac{B}{\mu}$ y $\Phi = BA$

siendo A el área transversal del núcleo de hierro; encontramos

$$\Phi = \frac{\mu A}{l} NI \quad (18)$$

a la magnitud $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu A}$ (19)

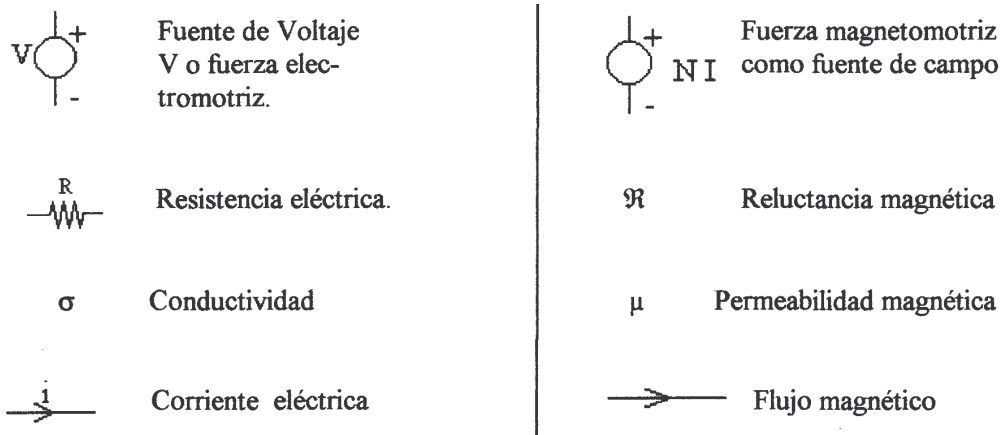
se le llama reluctancia. Su forma es análoga a la de la resistencia eléctrica, con la salvedad de que se reemplaza a la conductividad σ . Si NI se ve como una fuerza magnetomotriz y Φ como la respuesta del sistema, la expresión (18) es análoga a la ley de Ohm, siendo Φ el análogo correspondiente a la corriente. Esto toma más fuerza aún desde

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (20)$$

que implica que el flujo que entra a la superficie cerrada S, debe ser igual al que sale de la misma; así que el flujo se conserva, y (20) es análogo a la ley de circuitos eléctricos que dice que las corrientes que entran a un nodo deben ser igual a las salen.

Del mismo modo (18), puede verse como el análogo a la ley de circuitos que afirma la suma de las subidas de potencial es igual a las caídas de potencial.

Así, en sistemas magnéticos podemos hablar de circuitos magnéticos, obedeciendo a las mismas leyes de los circuitos eléctricos, con las correspondencias:



Con lo anterior, la fig. 3 en el lenguaje de circuitos se vería como la fig. 4.

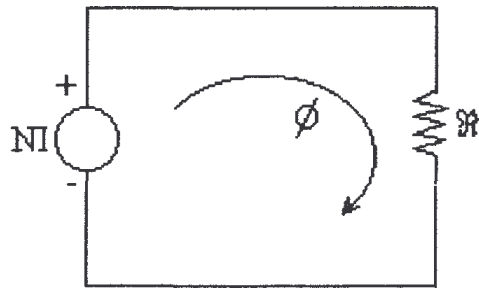
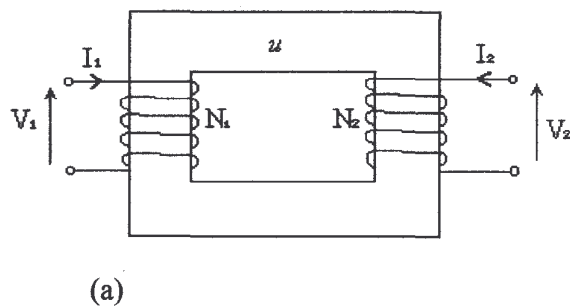
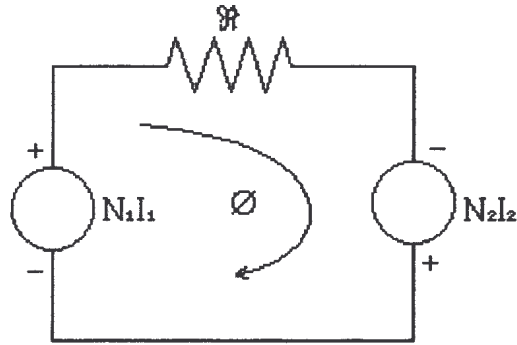


Fig.4. Diagrama esquemático del circuito magnético de (3).

3.- UN EJEMPLO: EL TRANSFORMADOR

Sea el transformador indicado en la fig. 5-a, con su esquema de circuito magnético 5-b.





(b)

Fig 4 Transformador y su circuito magnético.

Del diagrama vemos que

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \Phi \mathcal{R}$$

con $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$

asi que $\Phi = \frac{\mu A N_1}{l} I_1 + \frac{\mu A N_2}{l} I_2$

El flujo magnético total concatenado para la primera y segunda bobina es

$$\Psi_1 = N_1 \Phi$$

$$\Psi_2 = N_2 \Phi$$

y por la ley de Faraday, el voltaje inducido en el primario y secundario del transformador es

$$V_1 = \frac{d\Psi_1}{dt}$$

$$V_2 = \frac{d\Psi_2}{dt}$$

que nos lleva a

$$V_1 = \frac{\mu A N_1^2}{l} \frac{dI_1}{dt} + \frac{\mu A N_1 N_2}{l} \frac{dI_2}{dt}$$

$$V_2 = \frac{\mu A N_1 N_2}{l} \frac{dI_1}{dt} + \frac{\mu A N_2^2}{l} \frac{dI_2}{dt}$$

que puede escribirse sencillamente como

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 &= M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{con} \quad L_1 = \frac{\mu N_1^2 A}{l}, \quad L_2 = \frac{\mu N_2^2 A}{l}, \quad M = \frac{\mu N_1 N_2 A}{l} \quad (22)$$

trabajando en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} v_1 &= i\omega L_1 i_1 + i\omega M i_2 \\ v_2 &= i\omega M i_1 + i\omega L_2 i_2 \end{aligned}$$

dividiendo las dos ultimas ecuaciones

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1 i_1 + M i_2}{M i_1 + L_2 i_2} = \frac{L_1}{M} \cdot \frac{1 + \frac{M i_2}{L_1 i_1}}{1 + \frac{L_2 i_2}{M i_1}} \quad (23)$$

pero se ve que por (22) $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$\begin{aligned} \frac{M i_2}{L_1 i_1} &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{i_2}{i_1} \\ \frac{L_2 i_2}{M i_1} &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{i_2}{i_1} \end{aligned}$$

así que numerador y denominador de la fracción derecha de (23) son iguales

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

por el principio de conservación de la energía, la energía que entra al primario por unidad de tiempo es la que sale del secundario por unidad de tiempo, así

$$\begin{aligned} V_1 I_1 &= V_2 I_2 \\ \frac{V_1}{V_2} &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora de (24) es evidente que

$$\begin{aligned}
I_2\sqrt{L_2} &= I_1\sqrt{L_1} \\
(I_1\sqrt{L_1} - I_2\sqrt{L_2})^2 &= 0 \\
L_1I_1^2 + L_2I_2^2 &= 2\sqrt{L_1L_2}I_1I_2
\end{aligned}
\tag{25}$$

y de la energía cinética del transformador

$$T = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + m \cos\theta I_1I_2 \geq 0$$

Si $\cos \theta = -1$ (bobinas en contrafase)

$$L_1I_1^2 + L_2I_2^2 \geq 2MI_1I_2 \tag{26}$$

así que por (26) y (25)

$$\begin{aligned}
\sqrt{L_1L_2} &\geq M \quad \text{y} \\
M &= \alpha\sqrt{L_1L_2}
\end{aligned}
\tag{27}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, llamado factor de acoplamiento magnético.

4. EJEMPLO : RELAY

Sea el sistema electromecánico de la figura

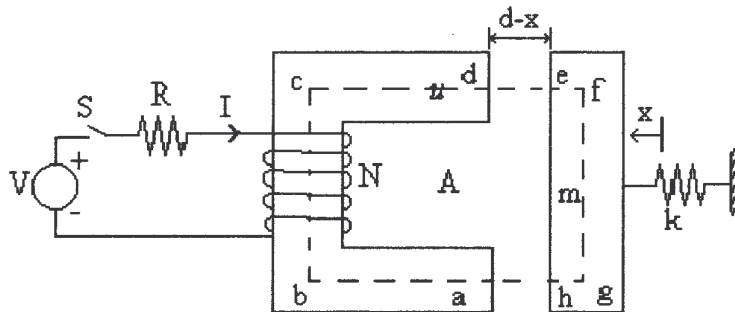


Fig. 6 Estructura de un Relay.

Resolvemos primero el circuito magnético del sistema. Las reluctancias

$$\mathfrak{R}_{abcd} = \frac{l_1}{\mu A} = \mathfrak{R}_1$$

$$\mathfrak{R}_{efgh} = \frac{l_2}{\mu A} = \mathfrak{R}_2$$

de modo que por el diagrama (7)

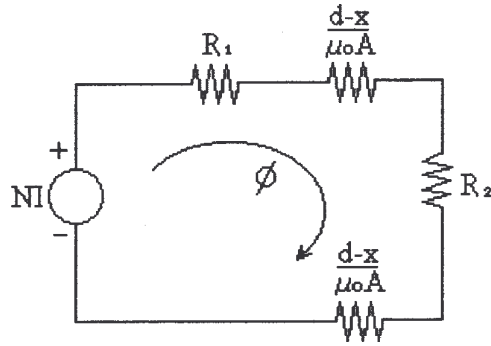


fig 7.- Circuito magnetico del Relay

Vemos pues
$$NI = \left(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A} \right) \phi$$

haciendo por simplicidad $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0$

$$NI = \left(\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A} \right) \phi$$

así que

$$\phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}}$$

y el flujo concatenado en la bobina

$$\Psi = N\phi$$

$$\Psi = \frac{N^2 I}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}} = L_1 I$$

así que

$$L_1 = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}} \tag{28}$$

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_1 I^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{N^2 I^2}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}} - \frac{1}{2} K x^2; I = \dot{q}$$

con la función de disipación de Rayleigh

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - V_0 q$$

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q}$$

donde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{N^2 I^2}{\mu_0 A \left(\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A} \right)^2} - Kx \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

de modo que
$$m \ddot{x} = \frac{N^2 I^2}{m_0 \left(\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{m_0 A} \right)^2} - Kx \qquad (29)$$

es la ecuación mecánica del sistema. Para la eléctrica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{N^2 \dot{q}}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} = R \dot{q} - V_0$$

asi que
$$V_0 = R \dot{q} + \frac{d}{dt} \frac{N^2 \dot{q}}{\mathfrak{R}_0 + \frac{2(d-x)}{\mu_0 A}} \qquad (30)$$

se ve por (28) $L_1 = L_1(x)$ y $x = x(t)$; de modo que (30) nos dice

$$V_0 = RI + L_1 \frac{dI}{dt} + I \frac{dL_1}{dt} \quad (31)$$

El termino $I \frac{dL_1}{dt}$ se llama efecto motor del sistema electromecánico, y juega el papel de una flierza contra-electromotriz que tiende a reducir la corriente.

El sistema de ecuaciones (29) y (30) son acopladas y no son lineales. Su única forma de resolución es por métodos numéricos y la utilización de un programa de computador.

Para condiciones estacionarias $\ddot{x} = 0$, de modo que la corriente mínima para sujetar el hierro es

$$\frac{N^2 I_{\min}^2}{\mu_0 \mathfrak{R}_0 A} = Kd$$

además que $I_{\min} = V_{0 \min} / R$

$$\text{de alli } \frac{N^2 V_{0 \min}^2}{\mu_0 (\mathfrak{R}_0) R^2} = Kd$$

lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \frac{\mu N^2 V_{0 \min}^2}{\mu_0 (I_1 + I_2) R^2} &= Kd \\ V_{0 \min} &= \frac{R}{N} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu} (I_1 + I_2) Kd} \end{aligned} \quad (32)$$

5. Definir las ecuaciones diferenciales de un transformador desde su lagrangiano. Hallar desde la conservación de la energía las relaciones entre los voltajes y corrientes entre el primario y el secundario.

De

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \\ \mathfrak{S} &= -i_1 V_1 - i_2 V_2 \end{aligned}$$

desde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t_2}$$

llegamos a

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

La energía entre el primario y el secundario que se transfiere es

$$\frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

de allí
$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

CONFERENCIA V

1.- Motor lineal

Sea un cochecito formado por dos ruedas de radio a y momento de inercia Y , sujetos por su eje por una barra conductora de masa m . Las ruedas están en rieles y no se deslizan, tal como indica la fig. 1.

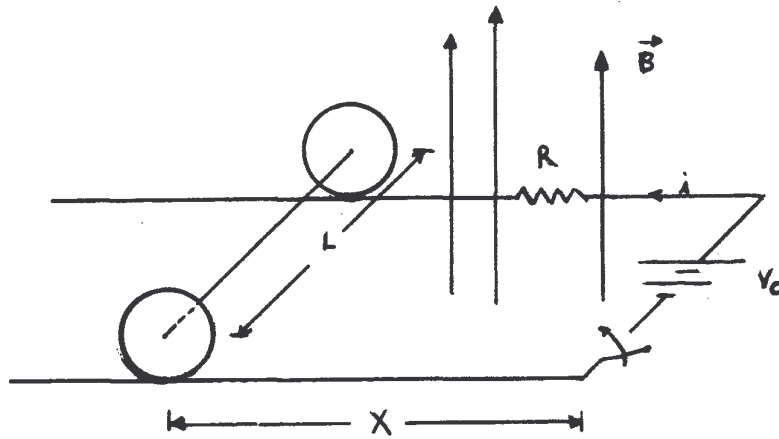


Fig. 1.- Motor lineal elemental

La energía de interacción del sistema con el campo externo es:

$$T_i = \vec{m} \cdot \vec{B} = i l x B = \dot{q} l B x$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 + \dot{q} l B x$$

con $\dot{x} = a \dot{\theta}$, de modo que

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{I}{a^2} \dot{x}^2 + \dot{q} l B x$$

y la función de disipación de Rayleigh

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - V_0 \dot{q}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}}$$

Para la primera

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{q} l B, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{2I}{a^2} \right) \dot{x}$$

llegamos a

$$\left(m + \frac{2I}{a^2} \right) \ddot{x} = \dot{q} l B \quad (1)$$

para la ecuación eléctrica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = l B \dot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = R i - V_o$$

así pues $- l B \dot{x} = R i - V_o$ donde

$$V_o = R i + l B \dot{x} \quad (2)$$

(1) y (2) son un par de ecuaciones diferenciales lineales acopladas.
De (2)

$$i = \left(\frac{V_o + l B \dot{x}}{R} \right) \quad (3)$$

Se ve que $l B \dot{x}$ juega el rol de una fuerza contraelectromotriz.
Reemplazando (3) en (1)

$$\left(m + \frac{2I}{a^2} \right) \ddot{x} = \left(\frac{V_o + l B \dot{x}}{R} \right) l B$$

de donde

$$\left(m + \frac{2I}{a^2} \right) \ddot{x} + \frac{l^2 B^2}{R} \dot{x} = \frac{V_o l B}{R} \quad (4)$$

para régimen estacionario $\dot{x} = 0$ y

$$\dot{x} = \frac{V_o}{lB} \quad (5)$$

Así que vemos que la velocidad crece (como solución cualitativa) desde 0 hasta asintóticamente V_o / lB , como indica la figura 2-a.

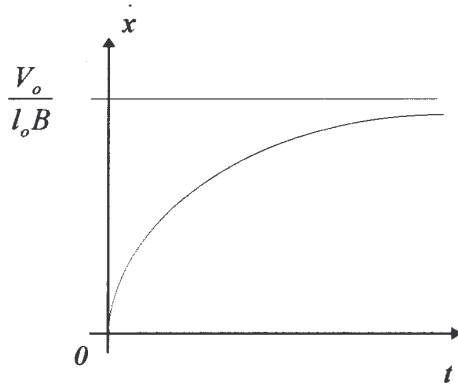


Fig. 2-a. Evolución de la velocidad.

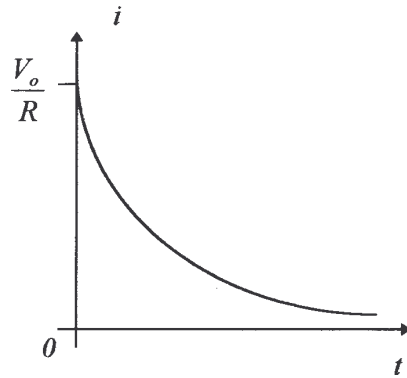


Fig. 2-b. Evolución de la corriente

La corriente estacionaria es

$$i = \frac{V_o - lB \left(\frac{V_o}{lB} \right)}{R} = 0 \quad (6)$$

se ve entonces, que en el caso de ausencia de pérdidas viscosas mecánicas, la fuerza centro electromotriz iguala a V y la corriente decrece a 0.

2.- Galvanómetro

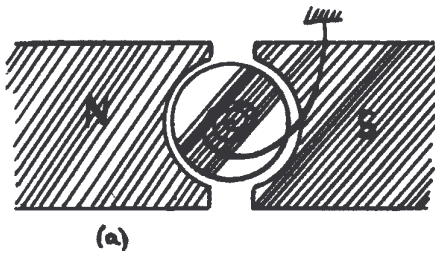


Fig. 3-a. Estructura básica del galvanómetro.

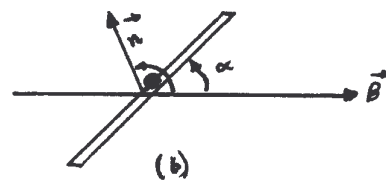


Fig. 3-b. Diagrama.

La figura 3-a. es la estructura básica del galvanómetro: constituye un cilindro que puede girar en torno a su eje de simetría, sirviendo de núcleo a una bobina de N vueltas por la que circula la corriente sujeta a un resorte de torsión helicoidal de constante de recuperación r en un medio de viscosidad f .

La figura 3.b es el diagrama esquemático de los campos con el vector normal a la espira.

La energía de interacción es

$$T_i = \vec{m} \cdot \vec{B} = iANB \cos \theta$$

y dado que $\theta = \pi/2 + \alpha$

$$T_i = iANB \operatorname{sen} \alpha$$

así pues el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 - iANB \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} \tau \alpha^2$$

en la función de disipación de Rayleigh

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} f \dot{\alpha}^2$$

de allí

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -iANB \cos \alpha - \tau \alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = I \dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\alpha}} = f \dot{\alpha}$$

Que nos lleva

$$\begin{aligned} -iANB \cos \alpha - \tau \alpha - I \ddot{\alpha} &= f \dot{\alpha} \\ -iANB \cos \alpha &= I \ddot{\alpha} + f \dot{\alpha} + \tau \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

para $\alpha \ll 1$

$$-iANB = I \ddot{\alpha} + f \dot{\alpha} + \tau \alpha \quad (8)$$

Para el caso estacionario $\ddot{\alpha} = 0$ y $\dot{\alpha} = 0$, de modo que

$$\alpha = -\frac{ANB}{\tau} i \quad (9)$$

el desplazamiento del ángulo del resorte de torsión es proporcional a la corriente.

Podemos también construir un galvanómetro balístico, es decir, que mide carga eléctrica. Basta con hacer

$$f \dot{\alpha} \gg I \ddot{\alpha} + \tau \alpha$$

así la ecuación (8) se reduce a

$$\dot{q} ANB \cong f \dot{\alpha}$$

y

$$\alpha = \frac{ANB}{f} q \quad (10)$$

3.- Voltímetro Electrostático

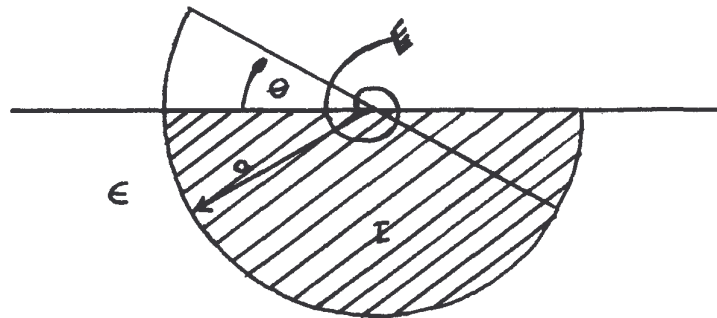


Fig. 4.- Kilovoltímetro electrostático.

Vamos a analizar el sistema formado por un condensador plano de placas semicirculares paralelas, sujetas a un soporte en el eje de simetría y agarrada firmemente una de ellas, mientras que la otra puede rotar libremente en el interior de un medio dieléctrico de permitividad $\epsilon > \epsilon_0$ y de coeficiente de viscosidad f . La placa móvil está sujeta a un resorte en espiral de constante de torsión τ .

La capacidad de las placas es

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

con

$$A = \frac{a^2}{2} (\pi - 2\theta)$$

y d la distancia de separación de las dos. Así pues

$$C = \frac{\epsilon a^2 (\pi/2 - \theta)}{d}$$

Ahora, el circuito eléctrico es el siguiente:

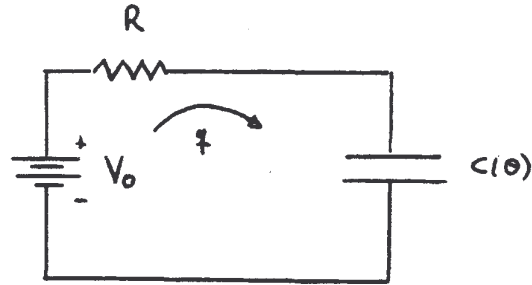


Fig. 5 Circuito del Kilovoltímetro.

La ecuación de Lagrange se escribirá en base a las siguientes consideraciones:

$$U = \frac{q^2}{2C(\theta)} + \frac{1}{2} \tau \theta^2 = \frac{q^2 d}{2 \epsilon a^2 (\pi/2 - \theta)} + \frac{1}{2} \tau \theta^2$$

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{q^2 d}{2 \epsilon a^2 (\pi/2 - \theta)} - \frac{1}{2} \tau \theta^2$$

con

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - V_0 q + \frac{1}{2} f \theta^2$$

así tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}} = R \dot{q} - V_0, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{q d}{\epsilon a^2 (\pi/2 - \theta)}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

así

$$-\frac{q d}{\epsilon a^2 (\pi/2 - \theta)} = R \dot{q} - V_0$$

$$V_o = R\dot{q} + \frac{qd}{\epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \quad (11)$$

por otro lado

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} = f \dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{q^2 d}{2 \epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta}$$

así que
$$-\frac{q^2 d}{2 \epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} - \tau \theta - I \ddot{\theta} = f \dot{\theta}$$

$$I \ddot{\theta} + f \dot{\theta} + \tau \theta = \frac{-q^2 d}{2 \epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} \quad (12)$$

en condiciones estacionarias $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{q} = 0$, de (11)

$$V_o = \frac{qd}{\epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \quad (13)$$

$$\tau \theta = -\frac{q^2 d}{2 \epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} \quad (14)$$

elevando la primera expresión al cuadrado y dividiendo para la segunda:

$$\frac{V_o^2}{\tau \theta} = -\frac{q^2 d^2}{\epsilon^2 a^4 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} \cdot \frac{2 \epsilon a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}{q^2 d}$$

$$\frac{V_o^2}{\tau \theta} = -\frac{2d}{\epsilon a^2}$$

de allí

$$\boxed{\theta = -\frac{\epsilon a^2}{2\tau d} V_o^2} \quad (15)$$

El ángulo de desplazamiento es proporcional al cuadrado del voltaje

Como otro ejemplo calculemos la dinámica de un Kilovoltímetro más práctico. Consiste en dos semicírculos solidarios paralelos separados una distancia d , sumergidos en un medio dieléctrico líquido de constantes ϵ y f , de modo que pueden girar en torno a su eje de simetría, que se halla firmemente sujeto a una resorte helicoidal de constante de recuperación τ , como indica la fig. 6

La capacidad es en este caso la compuesta entre dos condensadores paralelos de valores.

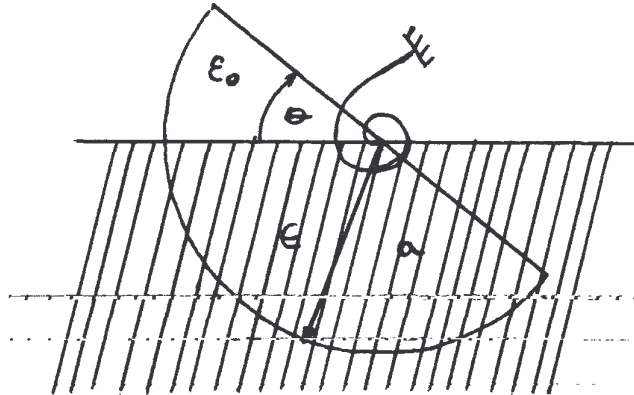


Fig. 6.-Kilovoltímetro mejorado.

$$C_1 = \frac{a^2 \theta}{2a} \epsilon_0$$

$$C_2 = \frac{a^2 (\pi - \theta)}{2d} \epsilon$$

la capacidad total es $C = C_1 + C_2$

$$C = \frac{a^2 \epsilon_0}{2d} \theta + \frac{a^2 \epsilon}{2d} (\pi - \theta) = \frac{a^2 \epsilon \pi}{2d} - \frac{a^2}{2d} \theta (\epsilon - \epsilon_0)$$

Si conectamos directamente a una fuente de tensión, dado que el medio presente pérdidas, el circuito equivalente es el mismo de la fig. 5.

La ecuación de la energía potencial es

$$U = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} \tau \theta^2 = \frac{q^2}{\frac{a^2}{d} [\epsilon \pi - \theta (\epsilon - \epsilon_0)]} + \frac{1}{2} \tau \theta^2$$

y el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{q^2 d}{\frac{a^2}{d} [\epsilon \pi - \theta (\epsilon - \epsilon_0)]} - \frac{1}{2} \tau \theta^2$$

con la función de distribución de Rayleigh:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - V_0 \dot{q} + \frac{1}{2} f \dot{\theta}^2$$

La ecuación mecánica es:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial \theta} &= - \frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} - \tau \theta \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= I \dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} &= f \dot{\theta} \end{aligned}$$

De modo que

$$- \frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} = I \ddot{\theta} + f \dot{\theta} + \tau \theta \quad (16)$$

y la eléctrica

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial q} &= - \frac{2qd}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]} \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}} &= R \dot{q} - V_0 \end{aligned}$$

de allí

$$- \frac{2qd}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]} = R \dot{q} - V_0$$

o

$$V_0 = R \dot{q} + \frac{2qd}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]} \quad (17)$$

Para condiciones estacionarias $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{q} = 0$, de modo que:

$$V_0 = \frac{2qd}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]} \quad (18)$$

$$\tau\theta = -\frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} \quad (19)$$

elevando (18) al cuadrado y dividiendo para (19)

$$\frac{V_0^2}{\tau\theta} = \frac{4q^2 d^2}{a^4 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} \cdot \frac{-a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2}{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}$$

$$\frac{V_0^2}{\tau\theta} = \frac{-4d}{a^2(\epsilon - \epsilon_0)}$$

asi

$$\theta = -\frac{a^2(\epsilon - \epsilon_0)}{4\tau d} V_0^2 \quad (20)$$

5.- Fuerzas de Interacción puras

Muchas veces, sólo interesa saber el valor de la fuerza de interacción electromagnética sobre un sistema, en condiciones estáticas. Para ello nos remitimos a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Es decir simplemente calculamos la energía, y por (31)

$$F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (21)$$

Siendo q_1 una coordenada generalizada.

Por ejemplo, en el problema anterior si sólo nos interesa el torque sobre las placas:

$$T_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2}$$

$$T_\theta = -\frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} \quad (22)$$

que es precisamente el torque que es compensado por el resorte de torsión, de modo que

$$\tau\theta + \frac{q^2 d(\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 [\epsilon \pi - \theta(\epsilon - \epsilon_0)]^2} = 0 \quad (23)$$

Otros ejemplos

- Una espira circular de radio R , recorrida por una corriente I_1 , está situada en un plano perpendicular a un conductor rectilíneo en el cual la corriente es I_2 . Suponiendo la distancia d del centro de la espiral al conductor es mucho mayor que R , calcular el par y la fuerza que se ejerce sobre la espira.

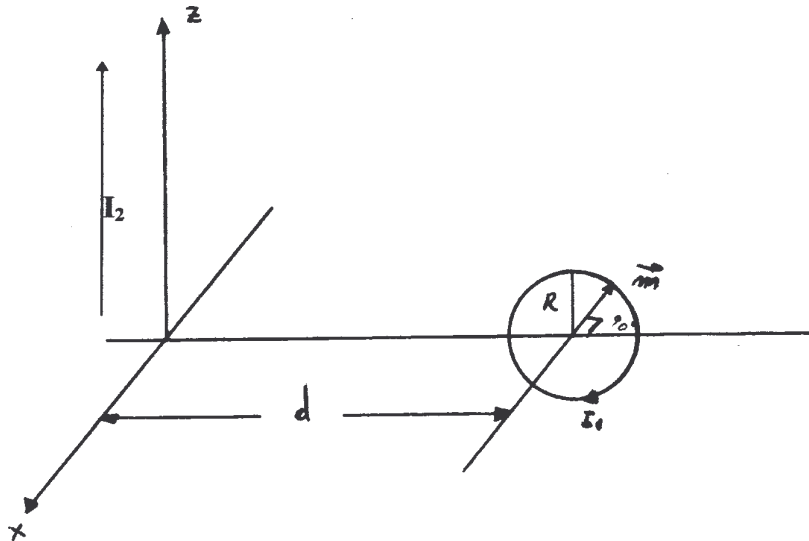


Fig. 7. Espira con corriente en presencia de corriente unifilar lejana.

Puesto que $d \gg R$ se puede reemplazar la espira por su momento magnético.

$$\vec{m} = -I_1 \pi R^2 \vec{i}$$

el campo promedio en el lugar donde se halla la espira es:

$$\vec{B} = \frac{I_2 \mu}{2\pi d} \vec{k}$$

El torque puede calcularse por:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{T} = \frac{\mu I_1 I_2 R^2}{2d} \vec{j}$$

En cuanto a la fuerza resulta es: $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = 0$; pues \vec{m} y \vec{B} son perpendiculares donde hemos hecho uso de IV- 13 y IV- 15.

Por último otro problema: dos espiras iguales de radio R , recorridas por una corriente I , están colocadas paralelas entre si, a una distancia $d \gg R$. Hallar la fuerza que experimentan.

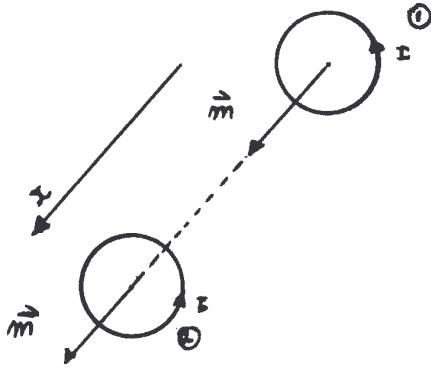


Fig. 8-a.

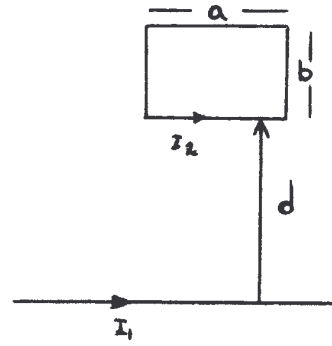


Fig. 8-b.

El campo producido (1) de Fig. 8-a es

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}$$

El lugar en que se halla la espira (2) de Fig. 8-a., en su centro

$$\vec{r} = d \vec{i}$$

$$\vec{m} = I\pi R^2 \vec{i}$$

así que

$$\vec{B}|_d = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{3I\pi R^2 d^2}{d^5} \vec{i} - \frac{I\pi R^2}{d^3} \vec{i} \right\} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2\pi I R^2}{d^3} \vec{i}$$

La fuerza ejercida sobre la espira (2) es:

$$\vec{F}_2 = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{\mu R^4 I^2 \pi}{2d^3}$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{3\mu R^4 I^2 \pi}{2d^4} \vec{i}$$

Ahora, veamos el caso de una bobina rectangular por la que circula una corriente I_2 alejada de un hilo conductor que lleva una corriente I_1 , como indica la Fig. 8-b. Calcularemos la fuerza que sobre ella se ejerce. La inducción creada por el hilo es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{j}$$

El momento magnético del segundo circuito es $\vec{m} = I_2 ab \vec{j}$

El torque se realiza sobre él es

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = 0$$

La energía es

$$H = U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi r}$$

Y la fuerza que se ejerce es

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=d} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d^2}$$

Hay una fuerza de atracción entre los dos.

A continuación proponemos un problema que fue resuelto mediante métodos numéricos, para lo cual se usó el lenguaje de programación BASICA.

El problema consiste en hallar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema representado en la figura 8, y resolverlas mediante un método numérico, dadas ciertas condiciones

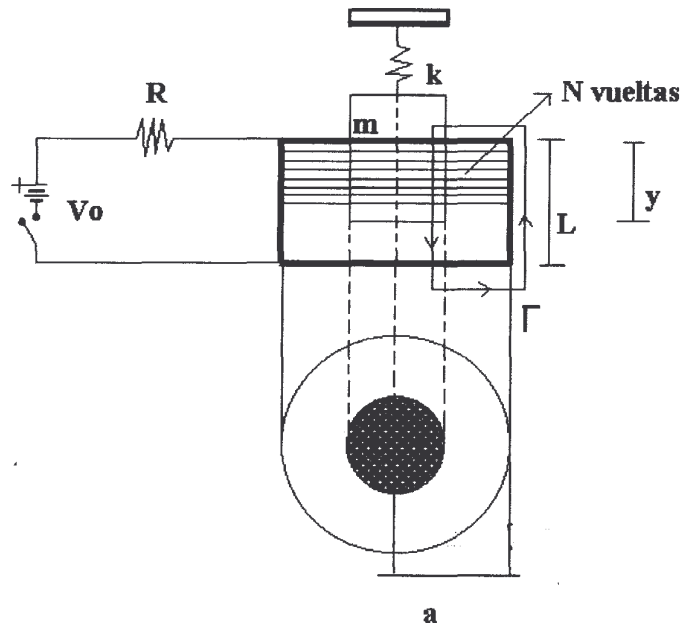


Fig. 9

$$\oint_s \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} \Delta s + \vec{B}_2 \cdot (-\vec{n}) \Delta s = 0$$

Luego $B_1 = B_2$ conocemos además que $H = B/\mu$. y que $\oint_{\Gamma} H \cdot dl = NI$ donde Γ es un camino de integración a lo largo del tubo hueco. Tenemos entonces que $H_1(1-y) + H_2y = NI$

Como $H_1 = B/\mu_0$ y $H_2 = B/\mu$ (recordemos que $B = B_1 = B_2$) tenemos que

$$B = \frac{NI}{\frac{1}{\mu_0} + y\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)}$$

y reacomodando los términos obtenemos la expresión

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l\mu - y(\mu - \mu_0)}$$

Por lo tanto,

$$\Phi = BA = \frac{\mu\mu_0 NIA}{l\mu - y(\mu - \mu_0)}$$

Ahora bien,

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu\mu_0 AN^2 I}{l\mu - y(\mu - \mu_0)} = L^* I$$

Así, $L^* = \frac{\mu\mu_0 AN^2}{l\mu - y(\mu - \mu_0)}$

De hecho, si $y = 0$, $L^* = \frac{\mu_0 a N^2}{l}$, y si $y = 1$, $L^* = \frac{\mu a N^2}{l}$

Por otro lado

$$T = \frac{1}{2} \left[L^* \dot{q}^2 + m \dot{y}^2 \right] \quad y \quad U = \frac{1}{2} k y^2$$

Entonces nuestro lagrangiano queda

$$L = \frac{1}{2} \frac{\mu\mu_0 AN^2}{l\mu - y(\mu - \mu_0)} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2$$

Para la fuerza disipativa de Rayleigh tenemos la expresión

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - qV_0$$

Ahora hallamos la ecuación de Euler del sistema, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -ky + \frac{1}{2} \mu \mu_0 AN^2 \left[\frac{\mu - \mu_0}{(l\mu - y(\mu - \mu_0))^2} \right] \dot{q}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m \dot{y} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m \ddot{y} \end{aligned}$$

Y además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \frac{\mu \mu_0 AN^2}{l\mu - y(\mu - \mu_0)} \dot{q} \end{aligned}$$

Con lo que finalmente obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema representado en la figura 9:

$$\begin{aligned} -ky + \frac{1}{2} \mu \mu_0 AN^2 \dot{q}^2 \frac{\mu - \mu_0}{(l\mu - y(\mu - \mu_0))^2} - m \ddot{y} &= 0 \\ -\frac{\mu \mu_0 AN^2}{l\mu - y(\mu - \mu_0)} \ddot{q} - \frac{\mu \mu_0 AN^2 (\mu - \mu_0)}{(l\mu - y(\mu - \mu_0))^2} \dot{q} \dot{y} &= R \dot{q} - V_0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales lo resolvemos por un método numérico que exponemos a continuación.

```

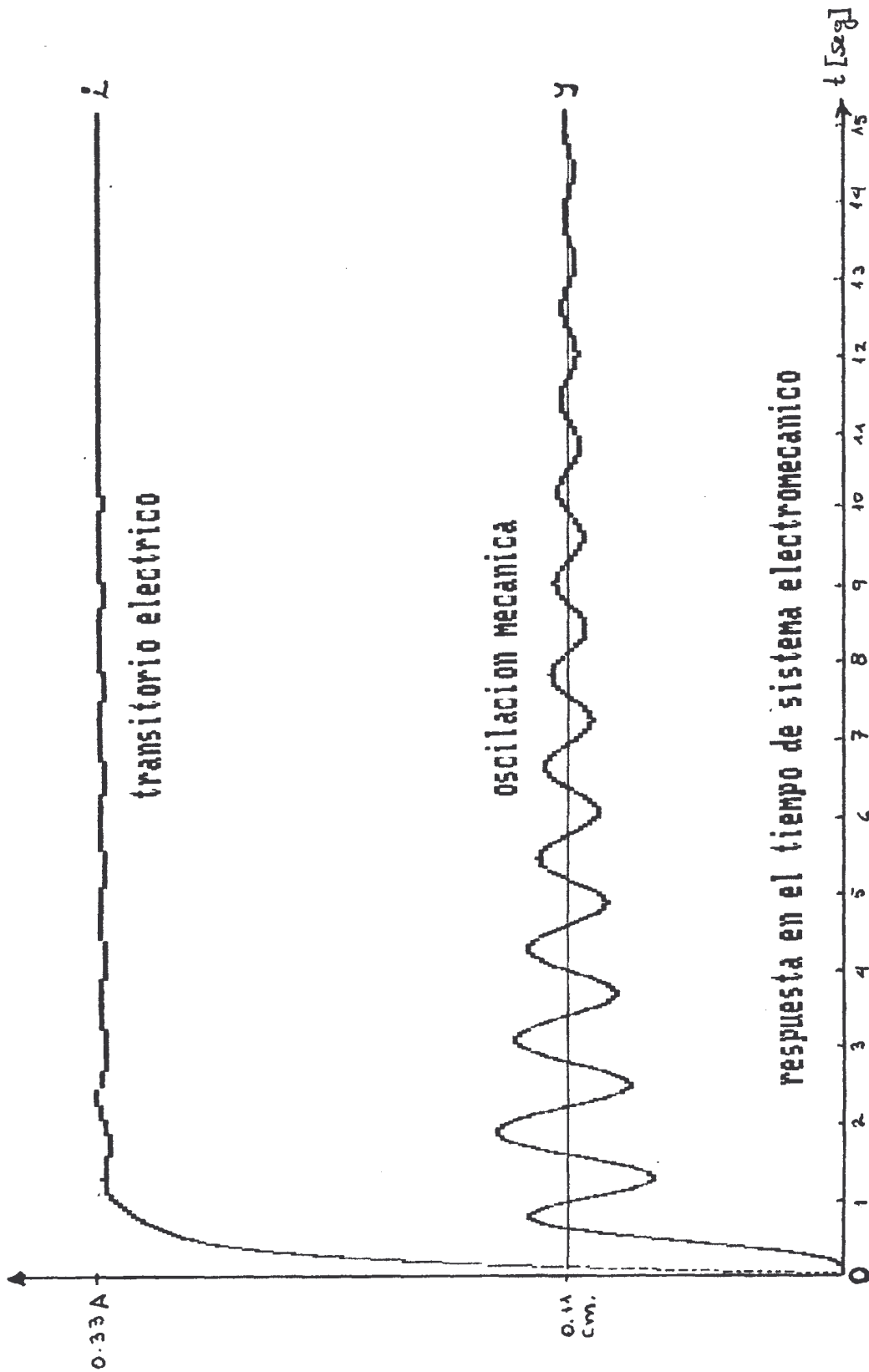
10 REM programa para simular un sistema electromecánico
20 REM datos de entrada
30 CLS
40 KEY OFF
50 SCREEN 2,1
60 L=.5
70 N=10000
80 A=.01
90 R=30
100 V0=10
    
```

```

110 K= 4
120 M= 1
130 PI= 3.1416
140 Uo= 4*PI*10 ^(-7)
150 U= 10000*Uo
160 REM valores iniciales
170 Y=0
180 DY=0
190 I=0
200 DI=VO*( L*U-Y*(U-Uo ) ) / ( U*Uo*A*N^2) + ( -R*( L*U-Y*(U-Uo ) ) /
(U*Uo*A*N^ 2 ) -DY*(U-Uo ) / ( L*U-Y*(U-Uo ) ) *I
210 I=I+DI*.001
220 REM integración por el método Euler
230 D2Y / M+U*Uo*A*N^2*I*I*( U-Uo ) / ( 2*M* (L*U-Y*(U-Uo ) )^2)
240 DY=DY+D2Y*.01
250 Y=Y+DY*.01
260 T=T+.01
270 PSET (T*10, 200-Y*500)
280 PSET (T*10, 200-I*500)
290 GOTO 200

```

D. Moya A. 15/12/96



BIBLIOGRAFIA:

- **MOYA DOUGLAS**, “El Campo de Acción”, Cap. II. Editorial Escuela Politécnica Nacional, 1993.
- **E. DURAND**, “Magnetostatique”, Masson ET C Editeurs, 1968.
- **GOLDSTAIN**, “Mecánica Clásica”, Editorial, Madrid, 1966.
- **FANO, CHU, ADLER**, “Electromagnetic Fields, Energy and Forces”, John Waley & Sons, Inc. New York, London. Second Print 1963.
- **WELLS DARE A.**, “Dinámica de Lagrange”. Ediciones Shaums, McGraw-Hill.
- **JACKSON**, “Electrodinámica Clásica”. Editorial Alhambra, II Edición Española.
- **JOHN, CARL**, “Engineering Electromagnetic, Fields & Waves”. Wiley International Edition, 1975.
- **BEMTO, E.**, ‘Problemas de Campos Electromagnéticos’, Editorial AC, Madrid, Reimpresión 1976.