

TEORIA ELECTRONAGNETICA II

Ing. Edwin Nieto Ríos

20-10-1999

TEORIA ELECTROMAGNETICA II

CAPITULO 1 LAS ECUACIONES DE CAMPO	4
1-1 Campos vectoriales.....	4
1-2 Ecuaciones de campo en forma integral.....	8
1-3 Ecuaciones de campo en forma diferencial.....	8
1-4 Ecuación de la continuidad.....	10
1-5 Teorema de la energía.....	12
1-6 Potenciales escalar y vectorial.....	16
1-6-1 Ajuste de los potenciales.....	18
1-6-2 Las ecuaciones de potencial.....	20
CAPITULO 2 LA ONDA PLANA	22
2-1 La ecuación de onda.....	22
2-2 Solución de D' ALEMBERT.....	23
2-3 Transversalidad impedancia de onda.....	28
2-4 Onda armónica con dirección de propagación arbitraria.....	32
CAPITULO 3 ENERGIA DE UNA ONDA PLANA	37
3-1 Flujo de energía en medios sin perdida.....	37
CAPITULO 4 CONDICIONES DE BORDE	40
4-1 Condiciones de borde de \vec{E}	41
4-2 Condiciones de borde de \vec{H}	42
4-3 Condiciones de borde de \vec{D}	43
4-4 Condiciones de borde de \vec{B}	43
4-5 Condiciones de borde de \vec{J}	44
4.6 Condiciones de borde de \vec{S}	45
CAPITULO 5 POLARIZACION	47
CAPITULO 6 SUPERPOSICION DE ONDAS PLANAS	53
6-1 Onda estacionaria.....	53
6-2 Grupo de ondas.....	54
6.3 Dispersión.....	57
6.4 Velocidad de la señal.....	61
CAPITULO 7 ATENUACION DE ONDAS PLANAS	64
7-1 Atenuación Y Corrimiento De Fase.....	64
7.2 Características De Dispersión Del Conductor.....	69
7.3 Casos Limites De Los Conductores Metálicos Y Aislantes.....	72
7.4 Efecto Pelicular O Piel De Un Conductor Cilíndrico.....	76
7.6 Flujo De Energía En Medios Con Pérdidas.....	81

CAPITULO 8 REFLEXION Y REFRACCION	86
8.1 Ondas Parciales Y Condiciones De Frontera.....	86
8.2 Polarización De La Onda Incidente Paralela Al Plano Incidente.....	88
8.3 Polarización De La Onda Incidente Perpendicular Al Plano Incidente.....	93
CAPITULO 9 ONDAS EN GUIAS DE ONDA	95
9.1 Condiciones De Frontera	97
9.2 Onda Tem.....	99
9.3 Onda Tm.....	101
9.4 Onda Te.....	110
9.5 Guía De Onda Rectangular.....	112
9.6 Conductores De Ondas Dieléctricos.....	113
CAPITULO 10 ECUACIONES DE LINEAS DE TRANSMISIÓN	115
10.1 Ondas No Homogéneas En Conductores	115
10.2 La Primera Ecuación De La Línea.....	120
10.3 La Segunda Ecuación De La Línea.....	123
10.4 Ecuaciones De Una Línea De Transmisión Con Conductores Reales Y Sus Soluciones.....	126
CAPITULO 11 POTENCIALES ELECTRODINAMICOS	131
11.1 Definición Y Ajuste De Potenciales.....	131
11.2 Ecuaciones De Los Potenciales Y Sus Soluciones.....	134

1. LAS ECUACIONES DE CAMPO

Las ecuaciones de Maxwell describen el mundo de los campos vectoriales electromagnéticos. Se nos presenta aquí una doble dificultad: Primero, los campos electromagnéticos no son directamente captados por nuestros sentidos, con excepción de la luz; por eso, por mucho tiempo se han buscado analogías mecánicas para su visualización. Y segundo, un campo vectorial sobrepasa nuestras posibilidades imaginativas, por ello hemos recurrido a representaciones muy simplificadas, como los cuadros de líneas de campo, los cuales reproducen incompletamente los sucesos físicos reales en el espacio.

En este capítulo nos ocuparemos de los orígenes y propiedades de los campos vectoriales; de la estructura matemática y del contenido físico de las ecuaciones de campo de Maxwell.

1.1 CAMPOS VECTORIALES

Los orígenes de un campo vectorial \vec{A} tenemos que diferenciarlos entre fuentes (pozos o caídas) y torbellinos.

Fuentes o pozos son puntos en el espacio con la propiedad de que en ellos inician o terminan líneas de campo (fig.1a). Cuando existen fuentes o pozos del campo vectorial en un volumen V se tiene:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \neq 0 \quad (1.1)$$

El valor de esta integral es una medida del flujo del vector \vec{A} a través de la superficie o de la intensidad de la fuente encerrada en ella. Es la integral nula, entonces el volumen no contiene fuentes.

Los torbellinos, también denominados orificios, son líneas de campo con la propiedad de que estas se cierran alrededor de las líneas del torbellino (fig. 1b). Cuando los torbellinos del campo vectorial \vec{A} se distribuyen en una superficie S , se tiene:

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} \neq 0 \quad (1.2)$$

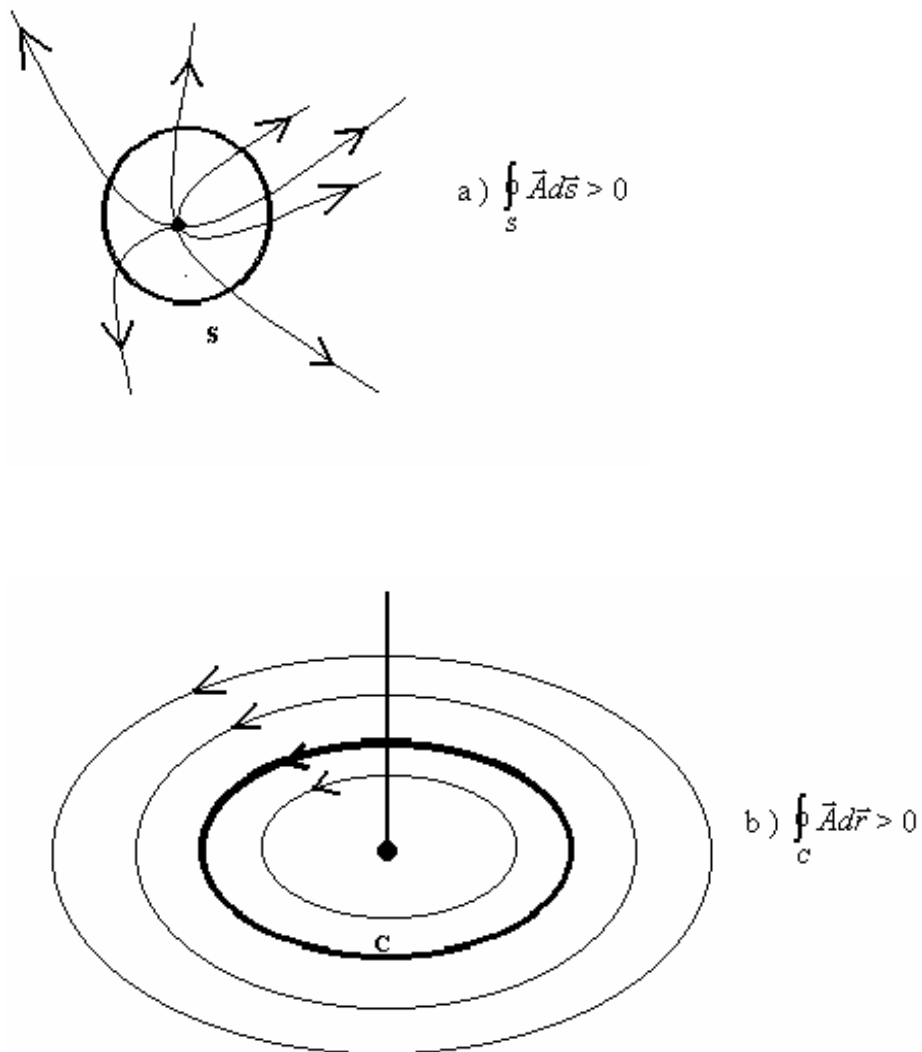


Fig. 1 Fuente y Torbellino

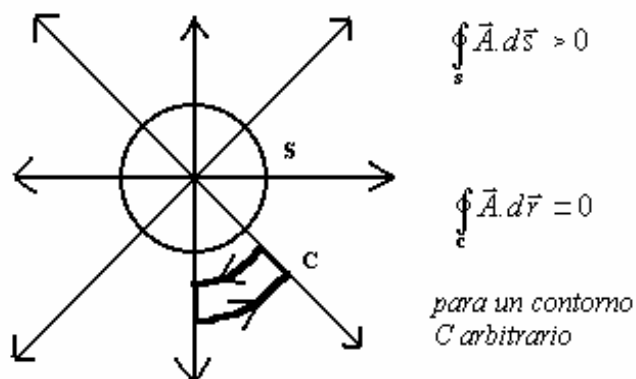
El valor de esta integral es una medida de la circulación del vector \vec{A} a lo largo del contorno C o de la intensidad del torbellino. Si esta integral es nula, la superficie S, delimitada por C, está libre de torbellinos.

A los campos vectoriales podemos diferenciarlos según su origen en:

- Campos Fuente Puros (Campos libres de torbellinos)
- Campos Torbellinos Puros (Campos libres de fuentes)
- Campos Mixtos

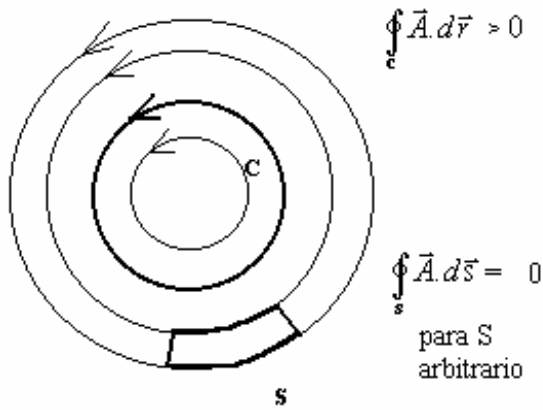
Un campo libre de fuentes y torbellinos (Campo Homogéneo) puede existir únicamente en un recinto finito, en donde la causa u origen del campo está fuera de este recinto, en el caso ideal en infinito. Todo campo vectorial es aproximadamente homogéneo si está lo suficientemente alejado de la fuente y torbellino que lo producen.

En las figuras (2a) y (2b) se indica por medio de la integral de flujo (1.1) y de la integral de circulación (1.2) cuáles son los orígenes de ciertos campos vectoriales.

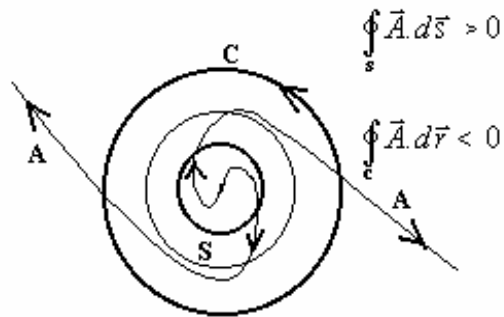


Campo Fuente Puro

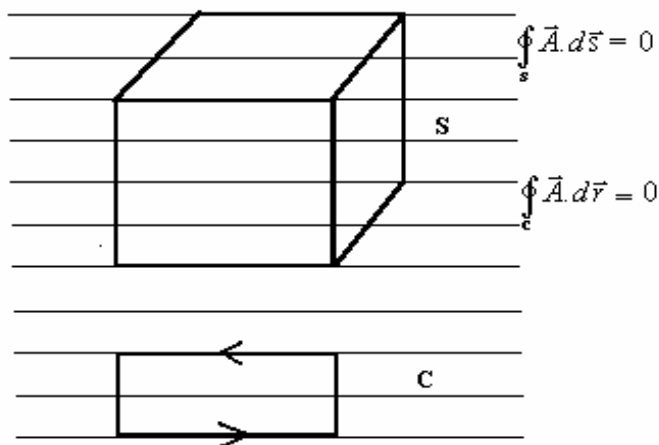
Fig. 2a Clasificación de los campos vectoriales



Campo Torbellino Puro



Campo Fuente-Torbellino



Campo Homogéneo

Fig. 2b Clasificación de los campos vectoriales

1.2 ECUACIONES DE CAMPO EN FORMA INTEGRAL

Las ecuaciones de campo no son otra cosa que las ecuaciones de Maxwell , es decir :

Forma Integral	Forma Diferencial
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S}$	$rot\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ (1.3)
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{J} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{S}$	$rot\vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$ (1.4)
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$	$div\vec{D} = \rho$ (1.5)
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$div\vec{B} = 0$ (1.6)
Ecuaciones para la materia	$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ (1.7)
	$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ (1.8)
	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$ (1.9)

Las dos primeras ecuaciones de la tabla (1.3 – 1.4) describen la circulación de una variable de campo eléctrico y de una variable de campo magnético; o sea los torbellinos de los dos campos: Líneas u orificios con $\dot{\vec{B}} \neq 0$ son torbellinos de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y líneas u orificios con $\vec{J} + \dot{\vec{D}} \neq 0$ son torbellinos de la intensidad de campo magnético \vec{H} .

El otro par de ecuaciones de campo (1.5 – 1.6) describe el flujo de unas variables de campo eléctrico y magnético; es decir las fuentes de los dos campos.

Las ecuaciones de campo describen entonces las fuentes y los torbellinos como el origen o la causa de los campos eléctrico y magnético. Dado que un campo vectorial recién a través de la información de sus fuentes y torbellinos es determinado de una manera única -

hasta un campo homogéneo aditivo o sea un campo espacial constante -, el número de cuatro ecuaciones de campo no es un resultado de la experiencia, sino que es matemáticamente necesario y suficiente.

Se debe resaltar que en las ecuaciones de campo las fuentes y los torbellinos se describen cada uno con diferentes variables de campo; de tal manera que tenemos también 4 variables de campo, dos eléctricas y dos magnéticas. Esto no es necesario pero si facilita el poder separar las propiedades de los materiales de las propiedades de los campos.

En resumen: El campo eléctrico es un campo fuente - torbellino. Las causas más simples son las cargas, pero también una inducción que cambia con el tiempo produce campos eléctricos.

El campo magnético es un campo torbellino libre de fuentes. La causa más simple de un campo magnético es una corriente circuital (malla), la cual corresponde a un dipolo magnético. Cargas magnéticas, hasta lo que se sepa, no hay.

1.3 ECUACIONES DE CAMPO EN FORMA DIFERENCIAL

Por medio de los teoremas de Integral de Stokes y Gauss, podemos pasarnos a la forma diferencial de las ecuaciones de campo partiendo de las ecuaciones en forma integral.

Para un vector \vec{A} continuo según los dos teoremas de integral se tiene :

$$\text{Stokes: } \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.10)$$

$$\text{Gauss: } \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{A} \cdot dV \quad (1.11)$$

El vector $\text{rot } \vec{A}$ describe pues, la circulación diferencial de \vec{A} alrededor de un elemento de superficie $d\vec{S}$, y el escalar $\text{div } \vec{A}$ describe el flujo diferencial de \vec{A} a través de un volumen diferencial dV .

Aplicamos el teorema de Stokes al lado izquierdo de las ecuaciones de campo (1.3– 1.4) y el teorema de Gauss de igual forma a (1.5 – 1.6); así obtenemos la forma diferencial de las ecuaciones de campo.

Esta forma diferencial es en su formulismo matemático especialmente corta y clara. Aunque la solución de las ecuaciones de campo con frecuencia se presenta difícil, siempre tenemos que ocuparnos de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales vectoriales no homogéneas y acopladas. Se facilita solamente cuando se trata de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La linealidad permite aplicar el principio de superposición para obtener la solución: se superponen fuentes y torbellinos, se superponen también sus campos.

Para la solución de las ecuaciones de campo se parte en general de la forma diferencial. La forma integral es, físicamente hablando, más “visual” y para la solución ventajosa cuando se presentan geometrías sencillas. Esto es especialmente del caso, cuando un campo vectorial posee solamente una única componente que no desaparece, la cual en el intervalo de integración es constante.

1.4 ECUACION DE LA CONTINUIDAD

En este subcapítulo y el siguiente trataremos, como primera consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, los teoremas de conservación de la carga eléctrica y de la energía electromagnética .

Obteniendo la divergencia en la ecuación de campo (1.4) en la forma diferencial se tiene:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = \text{div}(\vec{J} + \dot{\vec{D}})$$

y considerando que para un campo vectorial \vec{A} arbitrario, continuo y diferenciable, permanentemente se satisface la siguiente identidad: $div(rot\vec{A}) = 0$

$$\text{se obtiene que: } div(\vec{J} + \dot{\vec{D}}) = 0 \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) se conoce como la ecuación de la continuidad, la cual se compone de la densidad de corriente de conducción \vec{J} y la densidad de corriente de desplazamiento $\dot{\vec{D}}$. Introduzcamos en (1.12) la ecuación (1.5), se tiene:

$$\begin{aligned} div\vec{J} + div\dot{\vec{D}} &= 0 \\ div\vec{J} + \dot{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

En esta formulación, la ecuación de la continuidad es el teorema de la conservación de la carga eléctrica. Con el propósito de obtener la forma integral de (1.13), se obtiene la integral de volumen a los dos lados, o sea:

$$\int_V div\vec{J}dv + \int_V \dot{\rho}.dv = 0$$

Aplicando luego el teorema de Gauss se tiene

$$\oint_S \vec{J}d\vec{s} + \int_V \dot{\rho}.dv = 0 \quad (1.14)$$

En un volumen V (contorno del campo), la carga puede cambiar temporalmente solamente según la corriente de carga a través de la carcasa S.

La forma integral de (1.12):

$$\int_V div(\vec{J} + \dot{\vec{D}})dv = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_S (\vec{J} + \dot{\vec{D}})d\vec{s} = 0 \quad (1.15)$$

se utilizará más adelante para determinar las condiciones de frontera de la densidad de corriente.

1.5 TEOREMA DE LA ENERGIA

En este capítulo queremos tratar el equilibrio de potencia para un volumen finito en el contorno del campo. El contorno del campo considerado debe poseer tanto conductividad, o sea pérdidas (las cuales tienen que constar en el un lado de la ecuación de equilibrio), como también fuentes de energía, o sea fuentes de voltaje, pues al resultado que se llega con fuentes de corriente es el mismo, siguiendo un camino análogo.

La corriente también puede tener naturaleza no eléctrica, como por ejemplo origen químico en elementos galvánicos. Tales orígenes no eléctricos podemos describirlos a través de un modelo eléctrico equivalente con una variable de campo equivalente, específicamente como una fuente de voltaje por medio de una intensidad de campo \vec{E}_{eq} o como una fuente de corriente, por medio de una densidad de corriente \vec{J}_{eq} . Si se presentan tales fuentes en el entorno del campo considerado, tenemos que añadir en la ecuación de los materiales este efecto, así:

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{eq}) \quad (1.16)$$

ó

$$\vec{J} + \vec{J}_{eq} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.17)$$

Además tenemos que tomar en cuenta que el volumen del campo finito considerado puede tener una interacción con su entorno, esto es, puede aceptar o entregar energía a través de su superficie.

Desarrollaremos la ecuación de equilibrio en la forma diferencial y utilizaremos para ello la densidad de potencia p como variable descriptiva .

La densidad de potencia generada por la fuente es:

$$p_{eq} = \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{E}}_{eq}$$

e introduciendo (1.16) se obtiene:

$$p_{eq} = \bar{\mathbf{J}} \left(\frac{\bar{\mathbf{J}}}{\sigma} - \bar{\mathbf{E}} \right) \rightarrow p_{eq} = \frac{1}{\sigma} \bar{\mathbf{J}}^2 - \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{E}}$$

con la ecuación de campo

$$\bar{\mathbf{J}} = \text{rot} \bar{\mathbf{H}} - \dot{\bar{\mathbf{D}}}$$

se tiene

$$p_{eq} = \frac{1}{\sigma} \bar{\mathbf{J}}^2 - (\text{rot} \bar{\mathbf{H}} - \dot{\bar{\mathbf{D}}}) \bar{\mathbf{E}}$$

$$p_{eq} = \frac{1}{\sigma} \bar{\mathbf{J}}^2 + \bar{\mathbf{E}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{D}}} - \bar{\mathbf{E}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{H}} \quad (1.18)$$

La última relación puede transformarse por medio de la siguiente relación vectorial:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) &= \nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{E}}) \\ \text{div}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) &= (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{\mathbf{H}} - (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot \bar{\mathbf{E}} \\ \text{div}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) &= \bar{\mathbf{H}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

(la flecha indica el término sobre el cual actúa el operador Nabla)

$$p_{eq} = \frac{1}{\sigma} \bar{\mathbf{J}}^2 + \bar{\mathbf{E}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{D}}} + \text{div}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) - \bar{\mathbf{H}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{E}}$$

y con la ecuación de campo $\text{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ se tiene

$$P_{eq} = \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (1.20)$$

Integrando sobre el volumen de campo considerado obtendremos el equilibrio de potencia:

$$P_{eq} = P_J + P_e + P_m + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

es decir, la potencia generada por la fuente es igual a la suma de la potencia debida al efecto Joule.

$$P_J = \int_V \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 dv \quad (1.22)$$

más la potencia eléctrica

$$P_e = \int_V \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} dv \quad (1.23)$$

más la potencia magnética

$$P_m = \int_V \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} dv \quad (1.24)$$

y más la potencia radiada a través de la superficie.

Para un medio lineal : $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

$$P_e = \int_V (\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}) dv = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 \right) dv$$

$$p_e = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 \right) \quad \rightarrow \quad w_e = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 \quad : \quad \text{Densidad de energía eléctrica}$$

de igual forma para $P_m \rightarrow w_m = \frac{1}{2} \mu \cdot \vec{H}^2$: Densidad de energía magnética

La densidad de flujo de potencia a través de la superficie

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{1.25}$$

se denomina el vector de Poynting. El significado físico del vector de Poynting no está libre de dificultades. Nosotros podemos superponer un campo electrostático en un campo magnetostático de tal manera que sea $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \neq 0$. Entonces significaría este producto vectorial una densidad de flujo de potencia que no desaparece, aunque esto no es del caso en campos electrostáticos. En realidad, se tiene como consecuencia de (1.19), y con las ecuaciones en campos electrostáticos libres de corriente que:

$$\text{div} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = 0$$

y con ello también que: $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = 0$

para cualquier superficie S, coincidiendo esto con la experiencia.

La divergencia de \vec{S} , la cual aparece en el equilibrio de potencia, es físicamente libre de malentendidos. El vector \vec{S} , por sí mismo en cambio, se debe usar con precaución pues no está definido de una manera única al conocer solamente sus fuentes a través de (1.21) y no sus torbellinos.

Apliquemos enseguida el equilibrio de densidades de potencia a un entorno de campo (rango del campo), que no posee fuentes, esto es que $p_{eq} = 0$, y con un material libre de pérdidas ($\sigma = 0$, ϵ y μ reales) con funciones locales únicas $\vec{D}(\vec{E})$ y $\vec{H}(\vec{B})$. Debido a la unicidad de las ecuaciones del material, las diferenciales totales son :

$$dw_e = \vec{E}.d\vec{D} \quad \text{y} \quad dw_m = \vec{H}.d\vec{B}$$

e integrando podemos definir una densidad de energía

$$w_e = \int_0^D \vec{E}.d\vec{D} \quad w_m = \int_0^B \vec{H}.d\vec{B}$$

con lo que obtenemos :

$$\frac{d}{dt}(w_e + w_m) = -\text{div}\vec{S} \quad (1.26)$$

Que es el teorema de conservación de la energía: En cualquier punto del entorno la variación temporal de la densidad de energía es igual al flujo diferencial de la “densidad de flujo de potencia”.

1.6. POTENCIALES ESCALAR Y VECTORIAL

La ecuación de campo $\text{div}\vec{B} = 0$, satisfagamos con la siguiente consideración :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.27)$$

reemplacemos ésta en la ecuación de campo $\text{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

$$\text{rot}\vec{E} = -\text{rot}\dot{\vec{A}} \quad \rightarrow \quad \text{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \quad (1.28)$$

y así mismo satisfagamos esta ecuación con la siguiente consideración:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \dot{\vec{A}} \quad (1.29)$$

Las ecuaciones (1.27) y (1.29) son las definiciones del potencial vectorial magnético y del potencial escalar eléctrico, respectivamente.

Formulando (1.27) en forma integral se tiene:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

y aplicando Stokes se llega a:

$$\oint_C \vec{A} d\vec{r} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.30)$$

o sea que el vector \vec{A} es un campo-torbellino. Las líneas de inducción son líneas tipo torbellino de \vec{A} . O formulando de otra manera: Las líneas de campo de \vec{A} encierran a las líneas de campo de \vec{B} (ver figura 3).

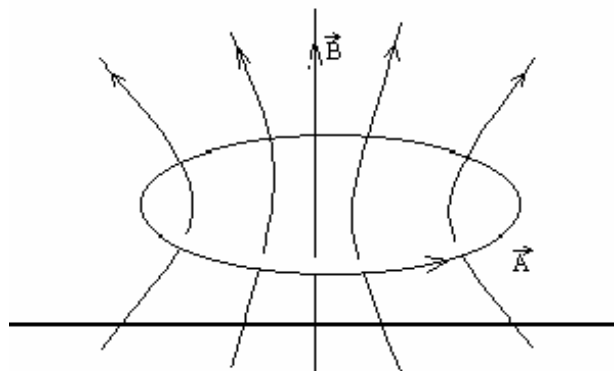


Fig. 3 Líneas de inducción como líneas de torbellino del potencial vectorial

La circulación del potencial vectorial a lo largo de una curva cerrada "c" es igual al flujo magnético ϕ a través de la superficie S encerrada por la curva "c".

1.6.1. AJUSTE DE LOS POTENCIALES

Los dos potenciales no son definidos en forma única por (1.27) y por (1.29). Para el potencial vectorial \vec{A} reconocemos enseguida que hasta aquí solamente se han definido sus torbellinos pero no sus fuentes. Dado que los campos continuos son únicos y que los potenciales son solamente variables auxiliares para calcular los campos, los que deben satisfacer las ecuaciones de campo, debemos imponer condiciones adicionales a los potenciales para hacerlos únicos. Se define este proceso como ajuste de los potenciales.

Nosotros mostraremos a continuación de una manera explícita la no unicidad de los potenciales. Para ello consideremos que conocemos un par de potenciales V', \vec{A}' con sus respectivos campos :

$$\vec{E}' = -gradV' - \dot{\vec{A}}'$$

$$\vec{B}' = rot\vec{A}'$$

Construyamos con una función escalar $F(\vec{r}, t)$ arbitraria, que posea la segunda derivada, el par de potenciales nuevo de la siguiente manera :

$$V = V' - \dot{F}$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + gradF$$

Esto conduce al mismo campo, así :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \dot{\vec{A}} = -\text{grad} (V' - \dot{F}') - (\dot{\vec{A}}' + \text{grad } \dot{F}')$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V' + \text{grad } \dot{F}' - \dot{\vec{A}}' - \text{grad } \dot{F}' = -\text{grad } V' - \dot{\vec{A}}' = \vec{E}'$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot} (\vec{A}' + \text{grad } F') = \text{rot } \vec{A}' + \text{rot. grad } F' = \text{rot } \vec{A}' = \vec{B}'$$

El potencial escalar es así único (invariante) a la derivada con respecto al tiempo de un campo escalar F arbitrario, y el potencial vectorial es invariante al gradiente del mismo campo escalar. Nosotros podemos utilizar entonces el campo escalar F para ajuste de los potenciales, esto es introducir una condición más, la cual debe satisfacer las ecuaciones de campo. Al definir solamente las ecuaciones, como hemos visto, los torbellinos del potencial vectorial \vec{A} , nosotros podemos elegir libremente las fuentes de \vec{A} . La consideración más sencilla es:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \tag{1.31}$$

que es conocida como el “ajuste de Coulomb”.

Debemos demostrar enseguida que por medio de este ajuste, la función de ajuste F(r, t) está determinada. Para ello supongamos que el par de potenciales V', \vec{A}' no satisfacen el ajuste del Coulomb:

$$\text{div } \vec{A}' \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces :} \quad \text{div } \vec{A} &= \text{div}(\vec{A}' + \text{grad } F') = 0 \\ &= \text{div } \vec{A}' + \nabla^2 F = 0 \\ \rightarrow \quad \nabla^2 F &= -\text{div } \vec{A}' \end{aligned}$$

En el caso que se conozcan los potenciales desajustados V', \vec{A}' , lo cual significa también que se conoce la $\text{div } \vec{A}'$, obtenemos la función de ajuste como solución de la ecuación diferencial de Poisson. En todo caso, debemos disponer de una constante por medio de una normalización apropiada.

LAS ECUACIONES DE POTENCIAL

Con:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} = \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\text{grad}V - \dot{\vec{A}}$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \sigma \left(\text{grad}V - \dot{\vec{A}} \right) + \epsilon \left(\text{grad} \dot{V} - \ddot{\vec{A}} \right)$$

además con:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) &= \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned}$$

$$\text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\mu \sigma \cdot \text{grad}V - \mu \sigma \cdot \dot{\vec{A}} - \mu \epsilon \text{grad} \dot{V} - \mu \epsilon \ddot{\vec{A}}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \sigma \dot{\vec{A}} - \mu \epsilon \ddot{\vec{A}} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) + \mu \sigma \cdot \text{grad}V + \mu \epsilon \text{grad} \dot{V}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \sigma \dot{\vec{A}} - \mu \epsilon \ddot{\vec{A}} = \text{grad} \left[\text{div} \vec{A} + \mu \sigma V + \mu \epsilon \dot{V} \right]$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \ddot{\vec{A}} = \mu \sigma \left(\dot{\vec{A}} + \text{grad}V \right) + \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \mu \epsilon \dot{V})$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \ddot{\vec{A}} = -\mu \sigma \vec{E} + \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \mu \epsilon \dot{V}) \quad (1.32)$$

Por otro lado:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} V - \dot{\vec{A}}) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$-\nabla^2 V - \operatorname{div} \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 V + \operatorname{div} \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.33)$$

Introduciendo la condición de Lorentz: $\operatorname{div} \vec{A} = -u \in \dot{V}$ (1.34)

se tiene :

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \in \ddot{\vec{A}} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (1.32)$$

$$\nabla^2 \vec{V} - \mu \in \ddot{\vec{V}} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.33)$$

Sea $f(x,y,z,t)$ una onda que se propaga con velocidad v , entonces la ecuación diferencial de esa onda es :

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \ddot{f} = g(x, y, z, f)$$

comparando se tiene : $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$ (1.35)

Para el espacio libre $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon_0}}$ *velocidad de la luz en el espacio libre*

Se define $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m} \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

2. LA ONDA PLANA

En este capítulo queremos deducir las ecuaciones de onda para los vectores de intensidad de campo \vec{E} y \vec{H} a partir de las ecuaciones de Maxwell.

2.1 LA ECUACION DE ONDA

Nos limitaremos a un medio ilimitado, isotrópico, homogéneo y lineal. Las variables del material son escalares, independientes de la posición en todo el entorno del campo infinito:

$$\epsilon, \mu, \sigma = cte.$$

Además supondremos que en el finito no hay distribuciones de carga que puedan originar un campo, fuentes de voltaje o de corriente.

$$\rho = 0, \quad \vec{E}_{eq} = 0, \quad \vec{J}_{eq} = 0$$

Con ello las ecuaciones de Maxwell resultan ser:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \text{div} \vec{D} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Como se vio en el capítulo anterior podemos obtener un desacoplamiento de los campos magnético y eléctrico por medio de la realización de un rotacional en las dos primeras ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} \text{rot.rot}\bar{E} &= -\text{rot}\dot{\bar{B}} \\ &= \text{rot}.\mu\dot{\bar{H}} = -\mu.\text{rot}\dot{\bar{H}} = -\mu.\left(\dot{\bar{J}} + \ddot{\bar{D}}\right) \\ &= -\mu.\left(\sigma\dot{\bar{E}} + \epsilon\ddot{\bar{E}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot.rot}\bar{H} &= \text{rot}\left(\dot{\bar{J}} + \ddot{\bar{D}}\right) = \sigma.\text{rot}\bar{E} + \epsilon.\text{rot}\dot{\bar{E}} = -\sigma.\dot{\bar{B}} - \epsilon\ddot{\bar{B}} \\ &= -\left(\mu\sigma.\dot{\bar{H}} + \mu\epsilon\ddot{\bar{H}}\right) \end{aligned}$$

Además con $\text{rot.rot}\bar{A} = \text{grad.div}\bar{A} - \nabla^2\bar{A}$ se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\bar{E} &= \mu\epsilon.\ddot{\bar{E}} + \mu\sigma.\dot{\bar{E}} \\ \nabla^2\bar{H} &= \mu\epsilon.\ddot{\bar{H}} + \mu\sigma.\dot{\bar{H}} \end{aligned} \right\} \quad (2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon, \mu, \sigma &= \text{cte} \\ \rho &= 0 \\ \bar{E}_{eq} &= 0; \quad \bar{J}_{eq} = 0 \end{aligned} \right.$$

Para medios aislantes $\sigma = 0$, los campos de ondas son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\bar{E} - \mu\epsilon.\ddot{\bar{E}} &= 0 \\ \nabla^2\bar{H} - \mu\epsilon.\ddot{\bar{H}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{Mas condiciones de (2.2)}$$

\Rightarrow Si Ψ es una componente cartesiana arbitraria de los vectores de campo \bar{E} o \bar{H} , se tiene:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{v^2}\ddot{\Psi} = 0 \quad \text{siendo } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon.\mu}} \quad (2.4)$$

A la ecuación (2.4) se la conoce como ecuación de onda.

2.2 SOLUCION DE D'ALEMBERT

Como una solución sencilla e inicial de la ecuación de onda (2.4), que muestra las propiedades de una onda, busquemos una solución, en la que a más del tiempo t , dependa

de una sola coordenada cartesiana z :

$$\Psi = \Psi(z, t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

o sea

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial vt} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial vt} \right) \Psi = 0$$

con el cambio de variables $\left. \begin{array}{l} \xi = vt + z \\ \eta = vt - z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \eta}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \eta}{\partial vt} \end{array} \right. \quad (2.6)$

obtenemos:
$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial vt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial vt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial vt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

y con esto la ecuación de onda queda como:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \Psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Su solución:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= f(\eta) + g(\xi) \\ \Psi(z, t) &= f(vt - z) + g(vt + z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

se denomina la solución de D'Alembert.

Siendo f y g dos funciones arbitrarias y diferenciables dos veces en forma continua. En la solución general aparece una constante de integración, la cual no consideramos pues ésta describe un campo constante en posición y tiempo.

Analizaremos enseguida una de las soluciones parciales:

$$\Psi = f(vt - z) \quad (2.8)$$

En la fig. 4 se tienen dos eventos de esta solución para los tiempos t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$ como función de la variable posicional z .

$$\Psi_1 = f(vt_1 - z)$$

$$\Psi_2 = f(vt_2 - z) = f(v\Delta t + vt_1 - z)$$

al desplazarse Ψ_1 en $\Delta z = z_2 - z_1 = v\Delta t$ se superponen los dos sucesos pues le toma el tiempo Δt , es decir,

$$f(vt_1 - z_1) = f(vt_1 + v\Delta t - z_1 - v\Delta t) = f(vt_2 - z_2)$$

Puntos correspondientes a los dos sucesos tienen también la separación constante $v\Delta t$. Con otras palabras: La función de posición se ha movido $\Delta z = v\Delta t$ en la dirección positiva de z durante el tiempo Δt sin distorsión.

Definición de onda: Si existe algún evento en alguna región espacial a un cierto tiempo, y si dicho evento se presenta en alguna otra región espacial después de haber transcurrido cierto tiempo y si la distancia entre los dos sitios de ocurrencia de dicho evento es proporcional a la diferencia de tiempo ($\Delta z \sim \Delta t$), se dice que dicho evento constituye una

onda. La constante de proporcionalidad entre la separación y el tiempo constituye la velocidad de propagación (fase).

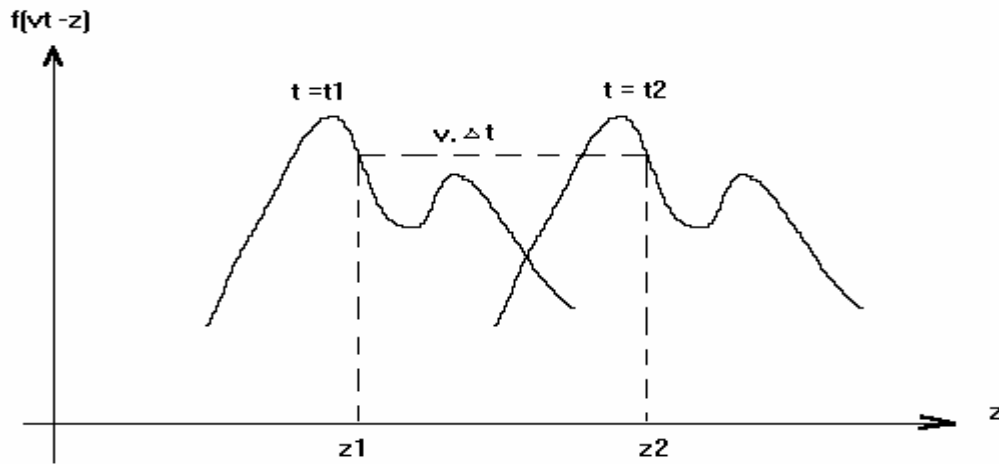


Fig. 4 Sucesos de la solución $f(vt - z)$

A esto es lo que se denomina una onda y al argumento $(vt - z)$ de la función posición - tiempo se le llama fase de la onda. Superficies de fase constante se denominan superficies de fase. En el presente caso son planos de fase:

$$vt - z = \text{constante} \quad (2.9)$$

Una onda con superficies de fase planas se denomina onda plana. La velocidad con la que las superficies de fase se mueven a través del espacio se denomina como velocidad de fase, la cual, de (2.9) resulta ser:

$$vdt - dz = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = v \quad (2.10)$$

La velocidad de fase de la onda según la ecuación (2.4) depende de las variables del material del medio de propagación. En el vacío es la velocidad de fase de una onda electromagnética idéntica a la velocidad de la luz $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

La onda parcial $f(vt-z)$ de la solución general (2.7) tiene así un plano de fase $z = \text{cte}$ que se mueve en la dirección positiva de z con velocidad v . La onda parcial $g(vt+z)$ tiene el mismo plano de fase con la misma magnitud de la velocidad de fase, la cual también, como es obvio, depende solamente del medio de propagación. La única diferencia es que para el plano de fase para esta onda parcial se tiene :

$$v dt + dz = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -v$$

es decir el plano de fase se mueve en la dirección negativa de z .

La solución total de D'Alambert (2.4) consiste de la superposición de las dos ondas parciales las cuales se propagan a lo largo del eje z , la una en el sentido positivo y la otra en el sentido negativo. Dado que la causa del campo de las ondas lo habíamos colocado en infinito y que nos habíamos limitado únicamente a la dependencia espacial de z , en efecto hay estas dos posibilidades: que el transmisor se encuentre en $z \rightarrow -\infty$ y que la onda se propague en el sentido positivo de z ; o que el transmisor se encuentre en $z \rightarrow +\infty$ y que la onda se propague en el sentido negativo de z . Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell se superponen estas dos ondas parciales aditivamente. Tal superposición de ondas conduce a una multiplicidad de manifestaciones como: Ondas estacionarias, dispersión e interferencia de ondas, de lo cual nos ocuparemos más adelante.

La solución total (2.4) al poseer dos ondas parciales las cuales se diferencian únicamente por el sentido de propagación, nos permite manejar una de las dos. Nos limitaremos, en lo que viene a continuación, a la propagación de las ondas en el sentido positivo de z .

Entonces para los dos vectores de campo se tiene:

$$\vec{E} = \vec{E}(vt - z) \tag{2.11}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(vt - z)$$

Dado que el campo en el plano de fase es constante, o sea homogéneo, se denomina a la onda como “onda homogénea plana”. Para ondas no homogéneas, a más de la función de fase, se tiene una dependencia espacial de la amplitud; por ejemplo $E = A(x, y)f(vt - z)$ (ejemplo : dipolo de Hertz-onda esférica no homogénea).

2.3 TRANSVERSALIDAD E IMPEDANCIA DE ONDA

Introduciendo ahora la solución de D’Alambert (2.11) en las ecuaciones de Maxwell (2.1), específicamente en las dos divergencias se tiene :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 0 &\rightarrow \frac{\partial E_x(vt - z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(vt - z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(vt - z)}{\partial z} = 0 &\rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 &\rightarrow \frac{\partial H_x(vt - z)}{\partial x} + \frac{\partial H_y(vt - z)}{\partial y} + \frac{\partial H_z(vt - z)}{\partial z} = 0 &\rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} (2.12)$$

$$\text{con } \frac{\partial E_z}{\partial vt} = \frac{\partial E_z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial vt} = - \frac{\partial E_z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} = - \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\text{se tiene que } \frac{\partial E_z}{\partial vt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial H_z}{\partial vt} = 0 \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) expresan que en la dirección de propagación solamente puede existir un campo independiente de tiempo y de la posición; es decir, un campo estático homogéneo. Este tipo de campo carece de interés en el proceso de una onda y por ello lo separamos y podríamos asumir que:

$$E_z = 0 \quad \text{y} \quad H_z = 0$$

expresando en forma vectorial :

$$\vec{E} = \{E_x, E_y, 0\} \quad (2.14)$$

$$\vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}$$

Los vectores de campo están perpendiculares a la dirección de propagación. Por ello a este tipo de onda se denomina onda transversal.

De las ecuaciones de Maxwell del rotacional ($\sigma = 0$) se tiene:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{a}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu \partial H_x}{\partial t} \vec{a}_x - \frac{\mu \partial H_y}{\partial t} \vec{a}_y + 0 \vec{a}_z$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\mu \nu \partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\mu \nu \partial H_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.15a)$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{\varepsilon \partial E_x}{\partial t} \vec{a}_x - \frac{\varepsilon \partial E_y}{\partial t} \vec{a}_y + 0 \vec{a}_z$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{a}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon \nu \partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon \nu \partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.15b)$$

Dado que para cada componente cartesiana $\psi (vt - z)$ se tiene que :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial vt} = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.16)$$

y que según (2.4) $\mu v = 1/\epsilon v$ se tiene que los dos pares de ecuaciones 2.15a y 2.15b son idénticas en cruz.

Entonces de (2.15a) y de (2.16) obtenemos:

$$\frac{\partial Ey}{\partial z} = \frac{\mu v \partial Hx}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(Ey - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Hx \right) = 0$$

$$\frac{\partial Ex}{\partial z} = - \frac{\mu v \partial Hy}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(Ex + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Hy \right) = 0$$

Según (2.16) desaparece también la derivada con respecto a vt en la expresión entre paréntesis. Separando nuevamente aquí un campo estático homogéneo del proceso de una onda, obtenemos:

$$Ex = + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Hy \quad \wedge \quad Ey = - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Hx \quad (2.17)$$

$$\text{la variable} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.18)$$

tiene la dimensión de una impedancia y se denomina impedancia de onda del medio de propagación. La impedancia de onda para el vacío es $Z_0 \approx 377 \Omega$.

Es decir, tenemos dos pares de constantes del vacío que son equivalentes uno respecto al otro, específicamente ϵ_0 y μ_0 , y c , Z_0 . Resumiendo los resultados, se tiene para la onda transversal, homogénea, plana:

$$\vec{E} = \{ Ex (vt - z), Ey (vt - z), 0 \} \quad (2.19)$$

$$\vec{H} = \left\{ -\frac{Ey (vt - z)}{Z}, \frac{Ex (vt - z)}{Z}, 0 \right\}$$

Para una onda electromagnética las intensidades de campo eléctrico y magnético no son independientes una de la otra, sino que están relacionadas por medio de la impedancia de onda. O sea que se tiene dos grados de libertad, específicamente Ex y Ey o magnitud y dirección del vector de campo eléctrico. Los dos dependen del transmisor a través de su intensidad y polarización.

Con (2.17) y (2.19) podemos obtener la magnitud y la dirección de la intensidad de campo magnético:

$$H = \sqrt{Hx^2 + Hy^2} = \frac{\sqrt{(-Ey)^2 + (Ex)^2}}{Z} = \frac{E}{Z} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{H} &= \left(Ex \cdot \vec{ax} + Ey \cdot \vec{ay} \right) \cdot \left(Hx \cdot \vec{ax} + Hy \cdot \vec{ay} \right) = ExHx + EyHy \\ &= -Ex \frac{Ey}{Z} + Ey \frac{Ex}{Z} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los dos vectores no solo que son perpendiculares a la dirección de propagación, sino que también son perpendiculares entre sí. Los dos vectores conjuntamente con la dirección de propagación forman un eje de simetría tridimensional ortogonal.

El conocimiento que la onda electromagnética es una onda transversal y que su velocidad de fase en el vacío es igual a la velocidad de la luz condujo a Maxwell en 1864 a la suposición que las ondas de luz son ondas electromagnéticas. La comprobación experimental la logró, en 1888, Heinrich Hertz.

2.4 ONDA ARMÓNICA CON DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN ARBITRARIA

A continuación queremos considerar ondas periódicas continuas con una función de fase armónica. Dado que el argumento (fase) tiene la dimensión de longitud, obtenemos con una longitud de normalización λ lo siguiente:

$$\psi(z, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)$$

donde A es la amplitud de la onda y λ la longitud periódica espacial o longitud de onda (ver figura 5). El número de longitudes de onda contenido en un camino de 2π unidades de longitud se denomina como número de onda y es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.22)$$

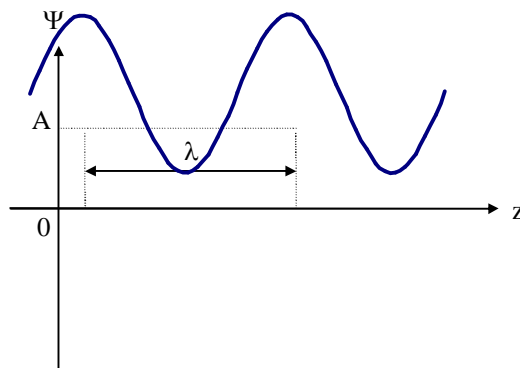


Fig. 5 Periodicidad Espacial de Onda Armónica

La longitud periódica temporal se denomina duración de la oscilación o período

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (2.23)$$

y la cantidad de oscilaciones en 2π unidades temporales se denomina frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.24)$$

con estas tres relaciones (2.22 – 2.24), se tiene para la onda armónica:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (2.25a)$$

o en su representación compleja, la cual para ondas armónicas es apropiada:

$$\Psi(z, t) = \text{Re} \cdot \left\{ A e^{j(\omega t - kz)} \right\} \quad (2.25b)$$

Para la velocidad de fase de la onda armónica obtenemos:

$$v = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\text{fase=cte}} = \frac{\omega}{k} \quad (2.26)$$

Fig. 6 Onda plana armónica con una dirección de propagación

Una onda armónica tiene una frecuencia y un número de onda fijo y con ello, según (2.26), una velocidad de fase fija. Por ello, también se denomina a esta onda como onda monocromática. Una onda monocromática pura es una abstracción, pues ella es ilimitada espacial y temporalmente. En la realidad se tiene que ver con la superposición de ondas monocromáticas. La relación (2.26) entre las magnitudes de periodicidad ω y k se denomina relación de dispersión, aunque las manifestaciones de dispersión recién aparecen con la superposición de ondas de frecuencia diferente.

Nosotros queremos tratar enseguida una onda plana, homogénea, transversal y armónica para cualquier dirección de propagación, la cual no coincide con un eje cartesiano. Designemos con \bar{n} al vector unitario en la dirección de propagación, el cual al mismo tiempo es la normal al plano de fase, y denominemos como vector número de onda o también vector de onda \bar{k} : (ver fig 6)

$$\bar{k} = k \bar{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} \quad (2.27)$$

Planos de fase son los lugares geométricos de todos los puntos P, para los cuales se tiene:

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = cte$$

con lo que obtendremos para los vectores de campo:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{H} &= \vec{H}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Al ser el producto escalar invariante con respecto a las transformaciones de coordenadas ortogonales se tiene también aquí:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0; \quad \vec{E} \cdot \vec{H} = 0$$

Así podemos resumir estas relaciones de dirección con la relación de magnitud (2.20)

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k Z} \quad (2.29)$$

Para una dependencia armónica del tiempo podemos asumir que:

$$\vec{E} = \bar{E} \cdot e^{j(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \bar{E} \cdot e^{-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{j \omega \cdot t}$$

$$\vec{H} = \bar{H} \cdot e^{j(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \bar{H} \cdot e^{-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{j \omega \cdot t}$$

$$\dot{\vec{E}} = j \cdot \omega \cdot \vec{E} \quad ; \quad \dot{\vec{H}} = j \cdot \omega \cdot \vec{H}$$

$$\ddot{\vec{E}} = -\omega^2 \cdot \vec{E} \quad ; \quad \ddot{\vec{H}} = -\omega^2 \cdot \vec{H}$$

Las Ecuaciones de Maxwell, quedarían como:

$$\text{rot } \vec{E} = \dot{\vec{B}} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \vec{E} = j\omega \vec{B} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \bar{E} = j\omega \bar{B}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Para (2.2), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= -\mu \in \omega^2 \vec{E} + j\omega \mu \sigma \cdot \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{H} &= -\mu \in \omega^2 \vec{H} + j\omega \mu \sigma \cdot \vec{H} \end{aligned} \right\} \epsilon, \mu, \sigma = \text{cte} \quad ; \quad \rho = 0 \quad ; \quad \vec{E}_{eq} = 0 \quad ; \quad \vec{J}_{eq} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{E} &= -\mu \in \omega^2 \bar{E} + j\omega \mu \sigma \cdot \bar{E} \\ \nabla^2 \bar{H} &= -\mu \in \omega^2 \bar{H} + j\omega \mu \sigma \cdot \bar{H} \end{aligned} \right\}$$

Para (2.3), se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{H} = 0 \end{array} \right\} \sigma = 0 + \text{condiciones} \quad \text{de} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{H} = 0 \end{array} \right\}$$

3. ENERGIA DE UNA ONDA PLANA

Toda onda está relacionada con el transporte de energía. Para la onda electromagnética se describe este mediante el campo del vector de Poynting.

3.1.FLUJO DE ENERGIA EN MEDIOS SIN PERDIDAS

Para una onda plana transversal con una dirección de propagación arbitraria \vec{k} se tiene la relación (2.29) entre los vectores de campo. Con esto obtenemos para el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E})}{k Z}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

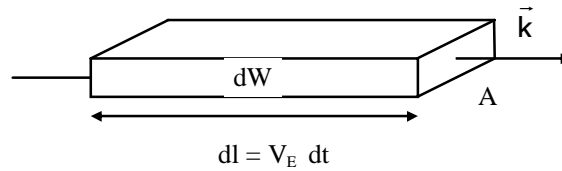
$$\vec{E} \times \vec{k} \times \vec{E} = \vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{k}) = \vec{k} E^2$$

$$\vec{S} = \frac{E^2}{Z} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = Z H^2 \frac{\vec{k}}{k} \quad (3.1)$$

El transporte de energía se lleva a cabo en la dirección de propagación, como físicamente se espera.

La velocidad del transporte de energía ligado con la onda denominémosla velocidad de la energía V_E . Con el propósito de obtener una expresión para V_E consideremos un elemento de volumen (ver fig. 4.1) de longitud dl en la dirección de propagación, de área transversal A y cuyo contenido de energía es:

$$dW = w A \cdot dl$$

**Fig.4.1** Elemento de volumen para

La magnitud de la densidad de flujo de potencia S es la energía por unidad de tiempo que pasa por la unidad de superficie.

Sabiendo que $dl = v_E dt$

$$\text{se obtiene para } S = \frac{dW}{A dt} = \frac{w A dl}{A dt} = w v_E$$

$$\text{Entonces: } v_E = \frac{S}{w} \quad (3.2)$$

$$\text{En un medio lineal se tiene: } \vec{E}^2 = Z^2 \vec{H}^2 = \frac{\mu}{\epsilon} \vec{H}^2$$

con lo que la densidad de energía:

$$w = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 = \epsilon \vec{E}^2 = \mu \vec{H}^2$$

Con (3.1) se tiene para la velocidad de la energía:

$$v_E = \frac{S}{w} = \frac{Z \vec{H}^2}{\mu \vec{H}^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = v \quad (3.3)$$

Finalmente queremos tratar la dependencia del tiempo y la densidad de flujo de energía de una onda armónica.

De (3.1) con $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ se tiene:

$$\vec{S} = \frac{1}{Z} \vec{E}_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{\vec{k}}{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2Z} \vec{E}_0^2 [1 + \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r})] \cdot \frac{\vec{k}}{k} \quad (3.4)$$

La densidad de flujo energético cambia con el doble de la frecuencia de la onda. Debido a la componente DC, la magnitud de \vec{S} nunca es negativa. De especial interés es el valor promedio en el tiempo de la magnitud sobre un período completo de la onda, el cual se le denomina como Intensidad de la onda.

$$I = \overline{S(t)} = \frac{1}{2Z} E_0^2 = \frac{Z}{2} H_0^2 \quad (3.5)$$

4. CONDICIONES DE BORDE

En este capítulo queremos obtener para las variables de campo más relevantes las condiciones de borde a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Para ello consideremos una superficie que limite a dos medios 1 y 2 como una pared de espesor finito h (ver figura 4.1). Separemos al vector de campo \vec{A} a los dos lados, en una componente normal A_n , la cual describe el flujo de \vec{A} a través de la pared; y en una componente tangencial A_t la cual describe la circulación de \vec{A} alrededor de la pared.

Para estudiar el comportamiento de A_n (A_t) en la separación debemos aplicar una ecuación de integral de flujo (una ecuación de circulación para el vector \vec{A}) a una parte diferencial de la pared y el espesor de la pared dejarle que tienda a cero. Con ello deben considerarse solamente las propiedades de la pared de separación y no de los medios.

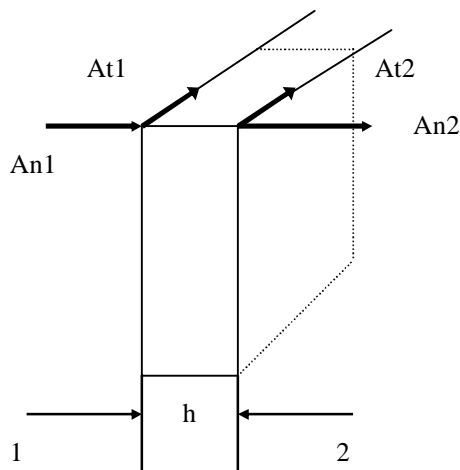


Fig. 4.1 Gráfico para demostrar las condiciones de Borde

4.1 CONDICIONES DE BORDE DE \vec{E}

Utilizando la ecuación de campo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ a un contorno infinitesimal (ver fig. 4.2) y considerando que la superficie de separación, cuando $h \rightarrow 0$, no puede llevar ningún flujo magnético.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_P^Q \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_Q^P \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \\ &= \int_P^Q (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot d\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

Dado que esto es independiente de los límites de integración P y Q; se tiene que la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico es continua en la separación de los medios, pues:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (4.1)$$

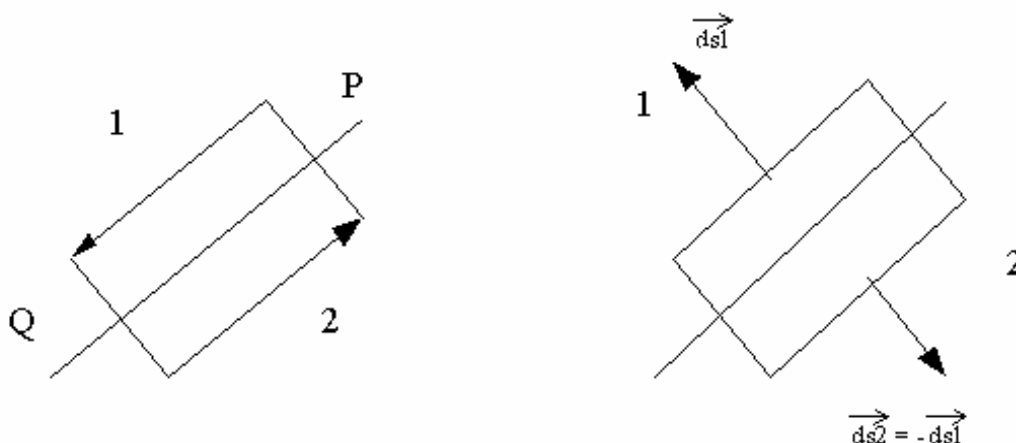


Fig. 4.2 Contorno y superficies infinitesimales

4.2. CONDICIONES DE BORDE DE \vec{H}

En un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) la intensidad de campo es cero para cualquier densidad de corriente finita. La mayoría de conductores poseen un valor finito para la conductividad. Sin embargo, la conductividad puede ser muy grande y para muchas aplicaciones prácticas es útil asumir que ella es infinita. Como demostraremos más adelante, la profundidad de penetración en un conductor de un campo eléctrico alterno y la corriente producida por el campo decrece con el incremento de la conductividad. Así, en un conductor bueno una corriente de alta frecuencia fluirá en una placa (pelicular) cerca de la superficie. La profundidad de esta placa se aproxima a cero conforme la conductividad se aproxima a infinito. Esto da lugar a un nuevo concepto útil: *la placa de corriente*. En una placa de corriente fluye una corriente finita por unidad de espesor J_s pero se requiere una densidad de corriente J infinitamente grande.

En forma análoga, partiendo de $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{J} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{s}$, y considerando que la superficie de separación para el caso $\sigma \rightarrow \infty$, esto es $\vec{J} \rightarrow \infty$, puede fluir una densidad de corriente superficial, es decir:

$$\vec{J}_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} \vec{J} h; [\vec{J}_s] = \frac{A}{m}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_P^Q (H_{t_1} - H_{t_2}) dr = \int J_s \perp dr$$

$$H_{t_1} - H_{t_2} = 0 \text{ para } \sigma < \infty$$

$$\mathbf{J}_s \perp \sigma \rightarrow \infty$$

$\mathbf{J}_s \perp$ es la componente de la densidad de corriente superficial perpendicular a \mathbf{H}_t .

4.3 CONDICIONES DE BORDE DE \vec{D}

La ecuación de campo $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \cdot dV$ apliquémosla a una superficie infinitesimal (cascara o carcaza) y considerando que la superficie de separación puede llevar una densidad de carga superficial.

$$\rho_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \rho \cdot h$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_V \rho \cdot dV$$

$$\int_S (Dn_1 - Dn_2) ds = \int_S \rho_s ds \quad \rightarrow \quad Dn_1 - Dn_2 = \rho_s$$

$$Dn_1 - Dn_2 = \rho_s \tag{4.3}$$

4.4 CONDICIONES DE BORDE DE \vec{B}

Análogamente, si aplicamos la ecuación de campo homogénea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ a una superficie infinitesimal obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (Bn_1 - Bn_2) ds = 0$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (4.4)$$

4.5. CONDICIONES DE BORDE DE \vec{J}

Asimismo, si aplicamos la ecuación homogénea de la continuidad a una superficie infinitesimal obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S (\vec{J} + \dot{\vec{D}}) d\vec{s} = 0$$

$$\int_S [(\vec{J} + \dot{\vec{D}})_{n1} - (\vec{J} + \dot{\vec{D}})_{n2}] d\vec{s} = 0$$

$$(\vec{J} + \dot{\vec{D}})_{n1} - (\vec{J} + \dot{\vec{D}})_{n2} = 0 \quad (4.5)$$

Introduciendo (4.3) en (4.5) se tiene:

$$(J_{n1} - J_{n2}) + (\dot{D}_{n1} - \dot{D}_{n2}) = 0$$

$$(J_{n1} - J_{n2}) + \dot{\rho}_s = 0$$

$$(J_{n1} - J_{n2}) = -\dot{\rho}_s \quad (4.6)$$

La componente normal de la densidad de corriente total es continua, según (4.5). La componente normal de la densidad de corriente de conducción, al contrario, cambia en la superficie de separación con una densidad de carga superficial dependiente del tiempo.

4.6 CONDICIONES DE BORDE DE \vec{S}

Aquí apliquemos la integral de equilibrio de potencia (1.21) a una superficie infinitesimal y considerando que la superficie de separación no puede llevar campos eléctrico y magnético, fuentes de potencia y que puede disipar potencia (Efecto Joule) solamente para $\sigma \rightarrow \infty$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_v \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 dV + \oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} \right) = 0$$

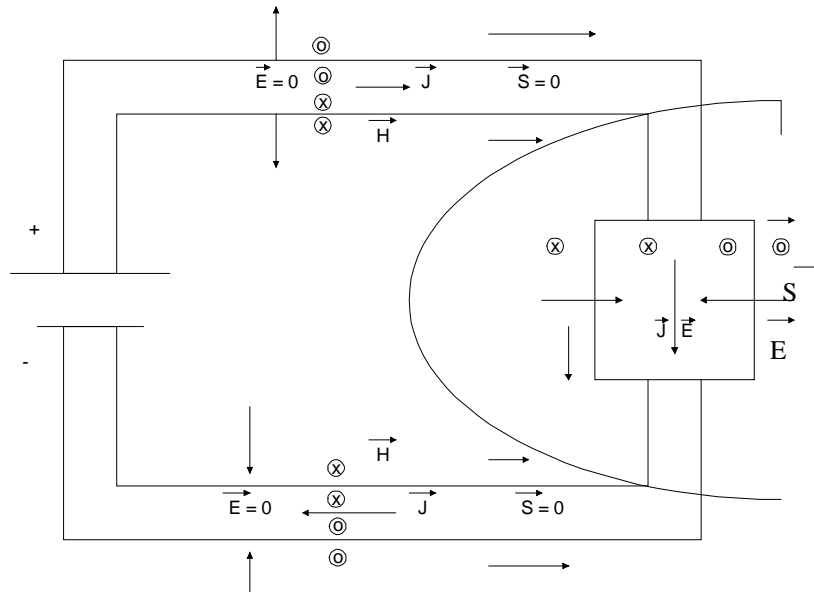
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_v \vec{E} \vec{J} dV + \oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} \right) = 0$$

$$\int_s \vec{E} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_s \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$E_t J_{s\perp} + (S_{n_1} - S_{n_2}) = 0$$

$$S_{n_1} - S_{n_2} = \begin{cases} 0 & \text{para } \sigma \text{ finito} \\ E_t J_{s\perp} & \text{para } \sigma \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.7)$$

Ejemplo: Una resistencia se conecta por medios conductores ideales ($\sigma \rightarrow \infty$) a una fuente DC. Dar la dirección de los vectores de campo: \vec{J} , \vec{E} , \vec{H} y \vec{S} en la resistencia, en los conductores y en el medio circundante si ($\sigma = 0$).



5. POLARIZACION

Aunque la magnitud y la dirección de la oscilación de las intensidades de campo electromagnético, como lo habíamos anotado ya, son determinadas por el transmisor, podemos aquí discutir las posibles direcciones de oscilación.

El tipo de onda más simple que se presenta es cuando la dirección de oscilación de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y con ella también la intensidad de campo magnético \vec{H} se conserva espacialmente para cualquier tiempo. Tal tipo de onda se denomina onda con polarización lineal. Escojamos un sistema de coordenadas cartesianas de tal manera que la dirección de propagación sea en el sentido de z y que la dirección de oscilación de \vec{E} sea en el sentido de x ; así según: $\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{kZ}$, la dirección de oscilación de \vec{H} debe ser en el sentido de y : (ver fig. 5.1)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \{E_x(\omega.t - kz), 0, 0\} \\ \vec{H} &= \left\{0, \frac{E_x(\omega.t - kz)}{Z}, 0\right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

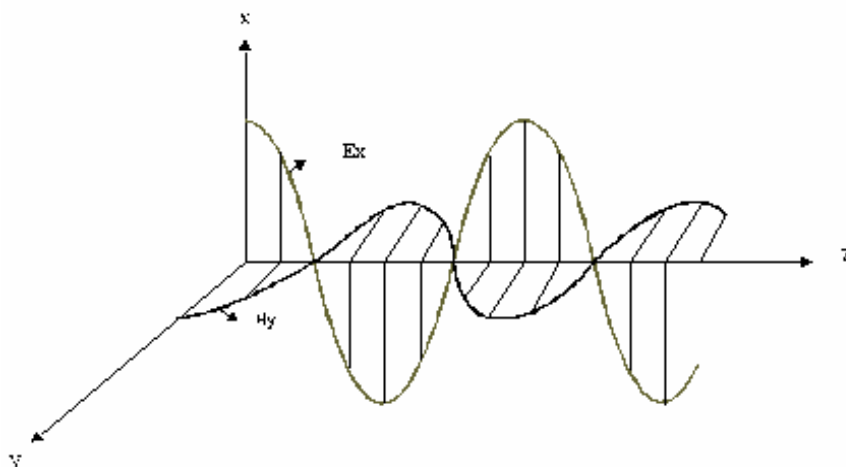


Fig. 5.1 Onda plana con polarización lineal

En cambio, para el caso más general, la intensidad de campo eléctrico de una onda plana transversal que se propaga en la dirección de z puede poseer las dos componentes E_x y E_y con amplitudes diferentes A , B y un ángulo de fase δ , es decir:

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= B \cos(\omega t - kz + \delta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Es suficiente que consideremos solamente el caso de \vec{E} , pues el \vec{H} es correspondiente. Nosotros debemos agrupar las dos componentes para obtener el vector de intensidad de campo resultante. Queremos determinar la curva que describe la flecha de este vector en un plano espacial fijo $z = z_0$ mientras transcurre el tiempo, la cual nos proporcionara un gráfico de la variación temporal de la dirección de oscilación.

En lugar del parámetro del tiempo t introduzcamos un nuevo parámetro μ para la curva, de la siguiente manera:

$$\omega t - k z_0 = \mu - \frac{\delta}{2}$$

con esto las dos ecuaciones (5.2) se vuelven simétricas.

$$\frac{E_x}{A} = \cos\left(\mu - \frac{\delta}{2}\right) = \cos\frac{\delta}{2} \cos\mu + \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \operatorname{sen}\mu.$$

$$\frac{E_y}{B} = \cos\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right) = \cos\frac{\delta}{2} \cos\mu - \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \operatorname{sen}\mu.$$

De lo que obtenemos una representación paramétrica de la curva buscada.

$$\frac{E_x}{A} + \frac{E_y}{B} = 2 \cos\frac{\delta}{2} \cos\mu$$

$$\frac{E_x}{A} - \frac{E_y}{B} = 2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \mu.$$

Que es la representación paramétrica de una elipse cuyo eje principal no está en las direcciones de los ejes de coordenadas “X” y “Y”. Efectivamente con la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \mu + \operatorname{cos}^2 \mu = 1$ obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\left(\frac{\frac{E_x}{A} + \frac{E_y}{B}}{2 \operatorname{cos} \frac{\delta}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{E_x}{A} - \frac{E_y}{B}}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}} \right)^2 = 1 \quad (5.3)$$

La flecha del vector \vec{E} de una onda plana armónica en general describe una elipse (ver fig. 5.2) en un plano que es perpendicular a la dirección de propagación. Lo mismo es válido para el vector de intensidad de campo magnético \vec{H} . Por ello, a este tipo de onda se la denomina onda polarizada elípticamente.

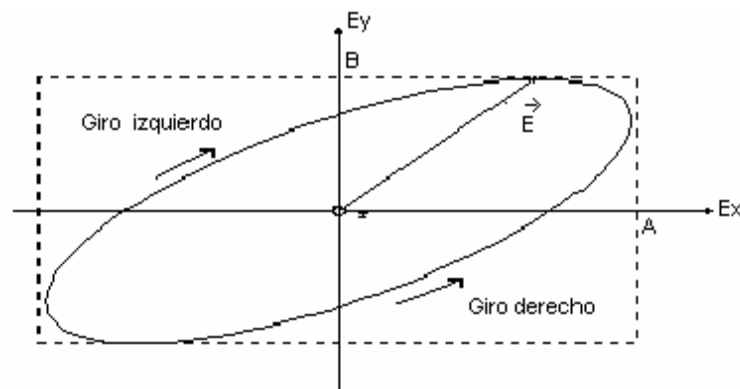


Fig. 5.2 Dirección de oscilación de una onda con polarización.

Se habla de una polarización elíptica de giro izquierdo cuando mirando en la dirección de propagación la flecha del vector \vec{E} gira hacia la izquierda, o sea en contra de las manecillas del reloj y de una polarización elíptica de giro derecho cuando sucede lo

opuesto. La frecuencia de giro, naturalmente, es idéntica a la frecuencia de la onda. El sentido de giro de la polarización depende del ángulo de fase. Esta dependencia la discutiremos a continuación para los casos especiales de la polarización elíptica general, a los cuales pertenece también la polarización lineal.

1) $\delta = 0$ (π)

$$\operatorname{sen} \frac{\delta}{2} = 0 \quad (1) \quad ; \quad \operatorname{cos} \frac{\delta}{2} = 1 \quad (0)$$

con lo que la ecuación de la elipse (5.3) se reduce a:

$$\frac{Ex}{A} \mp \frac{Ey}{B} = 0$$

que corresponde a ecuaciones de una recta; es decir obtenemos una onda con polarización lineal (ver fig. 5.3)

2)

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} = \operatorname{cos}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación (5.3) quedaría como:

$$\frac{Ex^2}{A^2} \mp \frac{Ey^2}{B^2} = 0$$

Que es la ecuación de una elipse en la representación de ejes principales (ver fig. 5.3). Los dos casos $\delta = \pi/2$ y $\delta = 3\pi/2$ se diferencian únicamente mediante el sentido de giro contrario del vector.

Esta dirección de giro se obtiene al suponer que la componente E_y se adelante a la componente E_x en el ángulo de fase δ . Con lo que se obtiene para el sentido de giro de la polarización visto en el sentido de la dirección de propagación:

$0 < \delta < \pi$ polarización con giro izquierdo

$\pi < \delta < 2\pi$ polarización con giro derecho

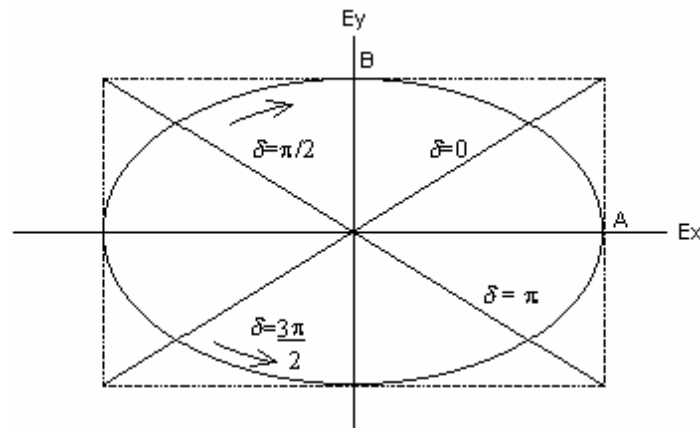


Fig.5.3 Casos especiales de polarización Elíptica

Además si $B = A$, entonces la flecha del vector \vec{E} dibuja el círculo:

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2$$

y la onda se denomina con polarización circular.

Finalmente se puede añadir que la onda polarizada elípticamente (5.2) y también el caso especial de polarización circular puede generarse por medio de la superposición de dos ondas, las que son linealmente polarizadas y perpendiculares una con respecto a la otra.

Para la intensidad de campo eléctrico, las dos ondas parciales serían según (5.2):

$$\vec{E}_1 = \{A \cos(\omega.t - kz), 0, 0\}$$

$$\vec{E}_2 = \{0, B \cos(\omega.t - kz), 0\}$$

A la inversa, podemos dividir también la onda polarizada elípticamente en dos ondas parciales polarizadas linealmente y perpendiculares entre sí. Al incidir una onda plana perpendicularmente en una reja, la que está construida de alambres paralelos, la componente de la onda cuya polarización es paralela a los alambres de la reja se absorbe, mientras que la componente cuya polarización es perpendicular a dichos alambres atraviesa la reja (ver fig. 5.4). A esto es lo que se denomina un filtro polarizado. La constante de la reja debe ser del orden de la longitud de onda. Al incidir la onda, en general, con polarización elíptica sobre un filtro polarizado en cruz o sobre una malla aparece una completa absorción; es decir un blindaje del campo electromagnético.

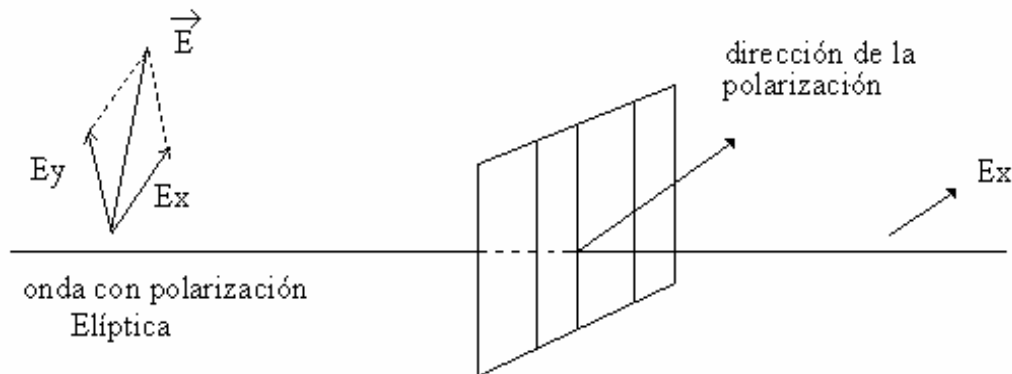


Fig. 5.4 Acción de un filtro polarizado

6. SUPERPOSICION DE ONDAS PLANAS.

En este capítulo nos ocuparemos de las manifestaciones de aparecen con la superposición de ondas planas.

Para lo cual en general no tiene importancia si las ondas parciales se originan en fuentes independientes o por medio de un división de un campo de onda de una sola fuente.

A este tipo de manifestaciones o fenómenos pertenecen junto a las ondas estacionarias en especial ondas periódicas y señales, las cuales las podemos juntar como grupos de onda o conformar como un paquete de ondas constituidos de componentes armónicas (componentes de Fourier).

6.1 ONDA ESTACIONARIA

Un tipo especial de onda aparece con la superposición de dos ondas planas armónicas y linealmente polarizadas, las cuales únicamente difieren en que poseen una velocidad de fase en magnitud igual pero de dirección contraria y una diferencia de fase δ . Hagamos para las dos ondas parciales la consideración:

$$Ex^1 = A.\cos(\omega.t - kz)$$

$$Ex^2 = A.\cos(\omega.t + kz + \delta)$$

cambiando de variable

$$kz = kz' - \frac{\delta}{2}$$

obtenemos:

$$Ex^1 = A.\cos\left(\omega.t + \frac{\delta}{2} - kz\right)$$

$$Ex^2 = A.\cos\left(\omega.t + \frac{\delta}{2} + kz\right)$$

y la onda resultante será:

$$\begin{aligned} Ex &= Ex^1 + Ex^2 \\ &= 2A.\cos\left(\omega.t + \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(kz + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Esto es un proceso ondulatorio con una amplitud dependiente del tiempo y con planos de fase espacialmente fijos, es decir, estacionarios. Así:

$$kz + \frac{\delta}{2} = \text{constante}$$

A este tipo de onda se denomina onda estacionaria.

La ecuación (6.1) representa en especial una onda estacionaria linealmente polarizada. Superponiendo dos ondas estacionarias cuyas polarizaciones lineales son perpendiculares se puede obtener también ondas estacionarias con polarización circular o elíptica.

Ondas estacionarias se producen, por ejemplo, cuando una onda plana incide perpendicularmente sobre una superficie – límite plana reflectora.

7.2 GRUPO DE ONDAS

Como ya hemos visto, la onda plana armónica y monocromática es una abstracción, pues ella es sin límites temporal y espacial, debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell podemos obtener una solución, o sea una onda no armónica, como una composición de Fourier de ondas armónicas con diferente frecuencia ω o número de onda o también

separar en las componentes individuales de Fourier. He aquí la importancia de las ondas armónicas.

La superposición de ondas armónicas de diferente frecuencia o número de onda se denomina como un grupo de ondas o también como un paquete de ondas.

Por simplicidad tratemos aquí solamente la superposición de ondas armónicas con la misma dirección de propagación y la misma polarización lineal, pero con diferente número de onda y amplitud. Entonces la intensidad de campo del grupo de ondas resultante escrita en forma compleja se expresa como:

$$E(z, t) = \operatorname{Re} \int_{k \text{ mín}}^{k \text{ máx}} A(k) e^{j(\omega \cdot t - kz)} dk \quad (6.2)$$

Se hace caer en cuenta que en la relación (2.26) la frecuencia ω depende complicadamente de la variable de integración de la siguiente forma:

$$\omega = vk = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}} \quad (6.3)$$

Dado que las funciones $\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ no pueden darse en términos generales, debemos aquí renunciar a la integración explícita y nos limitamos a una discusión cualitativa del paquete de ondas.

Considerando un grupo de ondas con una banda k

$$k \text{ mín} < k < k \text{ máx}$$

cuyo ancho es pequeño comparado con el número de ondas k_0 en el medio de la banda.

Con una transformación de variables se tiene:

$$k = k_0 + \partial k \quad ; \quad \partial k \ll k_0 \quad (6.4)$$

Entonces la ecuación (6.3), supuestamente conocidas las funciones $\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$, podemos desarrollarla en una serie de Taylor y ésta interrumpirla después del término lineal, es decir:

$$\begin{aligned} \omega(k) &\approx \omega(k_o) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o} (k - k_o) \\ &\approx \omega(k_o) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o} \partial k \end{aligned} \quad (6.5)$$

Introduciendo (6.4) y (6.5) en (6.3) se tiene:

$$\omega(k) = \omega_o + \omega' \partial k \quad ; \quad \omega' = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o}$$

y para (6.2)

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \text{Re} \int_{k \text{ mín}}^{k \text{ máx}} A(k_o + \partial k) e^{j[(\omega_o + \omega' \cdot \partial k)t - (k_o + \partial k)z]} d(k) \\ E(z, t) &= \text{Re} \left\{ e^{j(\omega_o t - k_o z)} \int_{k \text{ mín} - k_o}^{k \text{ máx} - k_o} A(k_o + \partial k) e^{j(\partial k \omega' t - \partial k z)} d(\partial k) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como resultado hemos obtenido una onda portadora con modulación de amplitud (ver figura 6.1). La onda portadora es la onda cuya función de fase es constante, es decir la onda con los valores centrales de la banda (ω_o, k_o).

La modulación de amplitud está dada por medio de la integral en la expresión (6.6). Para un observador que viaja en la envolvente del grupo de ondas, la modulación de amplitud es constante, o sea:

$$\partial k \cdot \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o} t - \partial k z = cte$$

De ahí se obtiene para su velocidad:

$$Vg = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{MA=cte} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (6.7)$$

Esta velocidad de la envolvente del grupo de ondas se denomina velocidad de grupo.

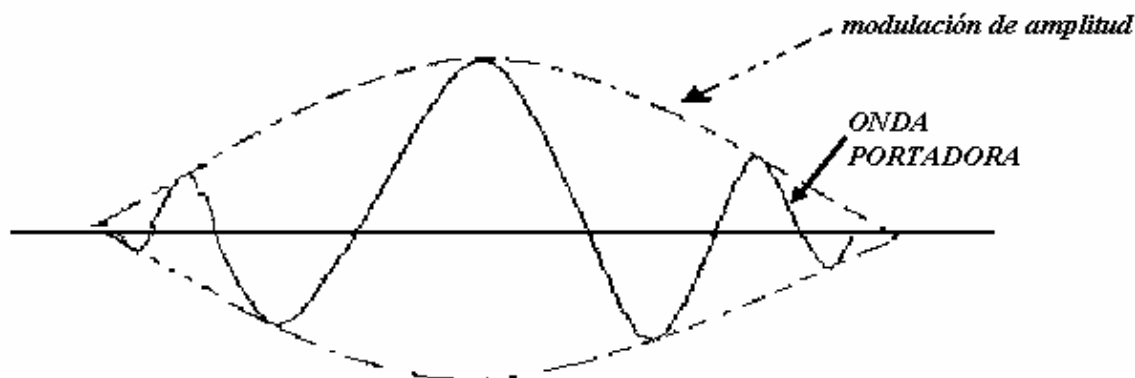


Fig. 6.1 Grupo de onda

6.3 DISPERSION

En un grupo de ondas de la velocidad de fase v de cada componente de Fourier puede ser independiente de la frecuencia es decir constante, o dependiente de la frecuencia según el medio en el cual se propaga el grupo de ondas.

En el primer caso se denomina al medio sin dispersión y en el segundo dispersivo. Por lo tanto:

$$\frac{dv}{d\omega} \begin{cases} = 0 & \text{para medios libres de dispersión} \\ \neq 0 & \text{para medios dispesivos} \end{cases} \quad (6.8)$$

En medios no dispersivos, tienen todas las componentes de Fourier la misma velocidad de fase y con ella la envolvente del grupo de ondas la misma velocidad; esto es, la velocidad de grupo y la velocidad de fase son idénticas:

$$V_g = v \quad (6.9)$$

En cambio, si el medio es dispersivo tienen las ondas individuales del grupo diferente velocidad de fase, la cual es dependiente de la frecuencia. La velocidad de grupo debe depender, a más de la velocidad de fase, también de la variación de la velocidad de fase con respecto a la frecuencia.

$$V_g = f\left(v, \frac{dv}{d\omega}\right)$$

Con el propósito de establecer esta relación entre las velocidades de grupo y de fase en un medio dispersivo arbitrario introduzcamos la ecuación (2.26) para la velocidad de fase en la relación (6.7) para la velocidad de grupo (todos los cocientes diferenciales se consideran para ω_0 o k_0).

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} \\ &= v + \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega} \cdot v_g \end{aligned}$$

Resolviendo con respecto a v_g :

$$v_g = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}} \quad (6.10)$$

Se puede ver que la ecuación (6.9) para medios no dispersivos, es un caso especial de la relación (6.10) para medios dispersivos.

Si utilizamos la longitud de onda, como se acostumbra en óptica, en lugar de la frecuencia ω como variable independiente, obtenemos:

$$v_g = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda \quad ; \quad \frac{dk}{k} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \tag{6.11}$$

Para una función de dispersión $v(\lambda)$ dada, permite (6.11) una determinación gráfica sencilla de la velocidad de grupo (ver fig. 6.2). La tangente a la función de dispersión en el punto de la onda portadora $\lambda = \lambda_0$ corta el eje de ordenadas en el valor de la velocidad de grupo $v_g(\lambda_0)$.

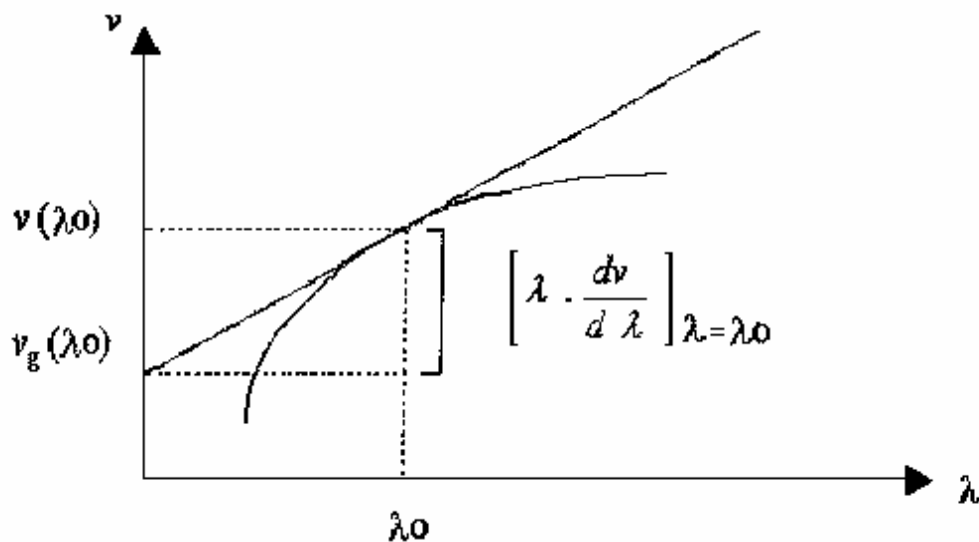


Fig. 6.2 Relación entre las velocidad de fase y de grupo

En la figura 6.2 apreciamos muy bien que la aproximación lineal (6.5), la cual utilizamos para introducir el concepto de velocidad de grupo, es admisible solamente para grupos de ondas con bandas de frecuencia o de longitud de onda estrechas.

Grupos de ondas con anchos de banda grande debemos dividirlos en muchos grupos estrechos, los cuales en general poseen velocidad de grupo diferentes. La consecuencia de esto es una dispersión de los grupos de ondas. Solamente en el caso que $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, la velocidad de grupo es independiente de la longitud de onda; de tal manera que los grupos de ondas de gran ancho de banda son estables, es decir no dispersos.

De (6.10) ó de (6.11) obtenemos finalmente los tres casos que deben diferenciarse:

$$v_g \begin{cases} < v & \text{para } \frac{dv}{d\omega} < 0 \quad \left(\frac{dv}{d\lambda} > 0 \right) & \text{dispersión normal} \\ = v & \text{para } \frac{dv}{d\omega} = 0 \quad \left(\frac{dv}{d\lambda} = 0 \right) & \text{sin dispersión} \\ > v & \text{para } \frac{dv}{d\omega} > 0 \quad \left(\frac{dv}{d\lambda} < 0 \right) & \text{dispersión anormal} \end{cases}$$

En la figura (6.3) podemos apreciar la dependencia de ε en función de la frecuencia, pudiendo distinguirse los tres casos de dispersión, pues en general μ no depende de la frecuencia y para el caso de materiales no ferromagnéticos $\mu = \mu_0$. Entonces, para esta consideración obtenemos para la velocidad de fase:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)}} \quad (6.12)$$

y para el índice de refracción óptico de un medio resulta:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} \quad (6.13)$$

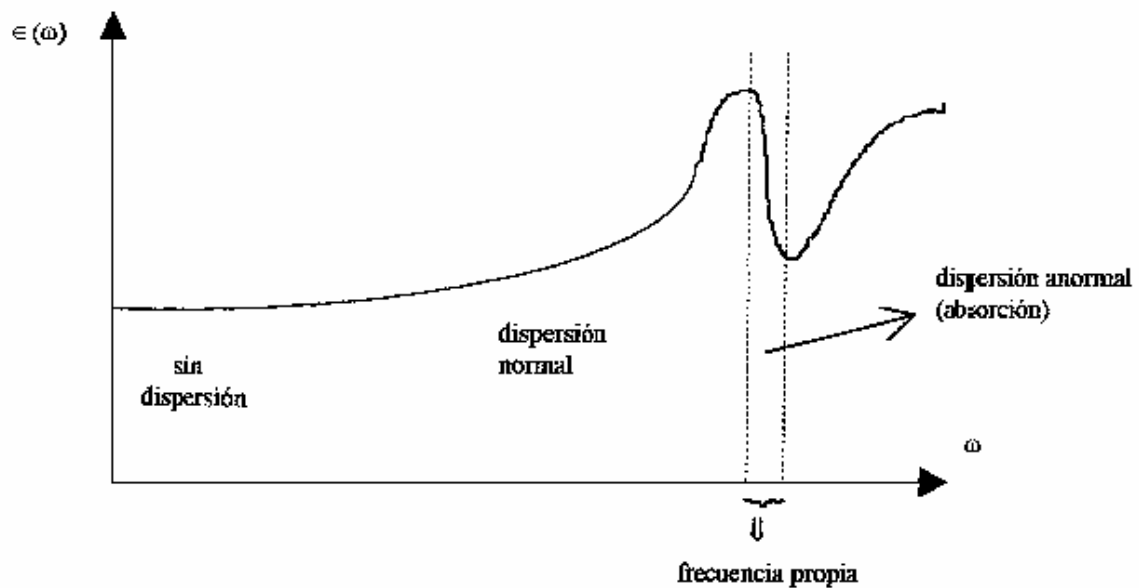


Fig. 6.3 Dispersión

Para la refracción en una superficie límite se divide el grupo de ondas en las componentes de Fourier individuales, o expresados con otras palabras se dispersa en el espectro de colores. Por ello se habla de dispersión.

Para materiales disipativos, la dependencia de la frecuencia de la dielectricidad compleja $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$ no puede darse en términos generales, como sucede también con v y n . Dado que la parte imaginaria está relacionada con la absorción, esto establece la relación entre absorción y dispersión.

6.4 VELOCIDAD DE LA SEÑAL

La propagación de ondas en el espacio libre que hemos manejado la podemos utilizar para transmitir información. La velocidad con la que la información se transmite desde un transmisor hasta un receptor, la denominaremos velocidad de señal v_s . Queremos intentar relacionar esta velocidad de la señal con las velocidades de propagación que hasta aquí hemos aprendido; es decir, con la velocidad de fase y de grupo.

Una onda monocromática no puede utilizarse para la transmisión de información; esto es debido a que, por ser ilimitada temporal y espacialmente, posee un contenido de energía

infinito, el cual no puede suministrar transmisor alguno. Información de energía finita debe ser limitada temporal y espacialmente. Además, una onda armónica no puede transmitir información, con excepción de la única información que es su amplitud, longitud de onda y frecuencia.

Una onda monocromática puede usarse como “portadora” de una información, por ejemplo apagando y encendiendo intermitentemente el transmisor. Este control del transmisor representa la clave de la información; el cual produce una modulación de la onda portadora. La información es pues empaquetada en un paquete de onda o grupo de ondas.

La velocidad de la señal parece ser idéntica a la velocidad de grupo. Esto es válido sin embargo, únicamente para medios libres de dispersión y con una muy buena aproximación para medios con una dispersión normal débil. Para dispersiones fuertes, es especial anormales, la información con un amplio ancho de banda no posee una única velocidad de grupo. Los grupos de onda se dispersan y arriban al receptor fuertemente distorsionados (ver fig. 7.4). La velocidad de la señal depende substancialmente a más del medio de propagación también de la misma señal, especialmente del ancho de banda, y del receptor, especialmente de su sensibilidad.



Fig. 6.4 Dispersión de paquetes de onda en medios de transmisión dispersivos

Resumiendo, se puede decir que la velocidad de la señal no puede expresarse en términos generales. Solamente en medio libres de dispersión, las velocidades de propagación son idénticas; o sea:

$$v_s = v_g = v_E = v \quad (6.14)$$

En medios dispersivos, si no se posee un conocimiento preciso de la señal y del receptor, lo único que se puede hacer es establecer límites. Así:

$$v_E \leq v_s \leq v$$

7. ATENUACION DE ONDAS PLANAS

Hasta aquí hemos tratado la propagación de ondas planas en medios aislantes ilimitados. Enseguida trataremos las ondas planas en conductores, es decir buscaremos para este caso las soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Nos limitaremos a las ondas armónicas, pues es de especial utilidad la representación compleja para el tratamiento de la propagación de ondas en conductores.

El procedimiento será similar al de aislantes. La diferencia substancial es que las dos variables que describen el comportamiento de la fase y la amplitud, específicamente el número de onda y la impedancia de onda, en conductores son complejos. El número de onda complejo produce una atenuación de la onda y la impedancia de onda compleja un corrimiento de fase entre las intensidades de campo eléctrico y magnético.

7.1 ATENUACION Y CORRIMIENTO DE FASE

La ecuación de onda para un medio conductor arbitrario es:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\epsilon \mu \ddot{\vec{E}} + \sigma \mu \dot{\vec{E}} \quad (7.1)$$

Con la suposición de que se trata de una onda armónica, tenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (7.2)$$

$\vec{E}(\vec{r})$ es un vector cuyas componentes son funciones espaciales complejas. Dado que nosotros hemos separado únicamente la dependencia del tiempo, $\vec{E}(\vec{r})$ contiene también la parte espacial de la función de fase compleja.

Continuaremos con el tratamiento complejo del campo de onda para luego al final regresar al campo de onda físico obteniendo la parte real.

Introduciendo (7.2) en (7.1), tenemos:

$$\nabla^2 \bar{E}(\vec{r}) + (\epsilon \mu \omega^2 - j\sigma \mu \omega) \bar{E}(\vec{r}) = 0$$

con la definición de:

$$k^2 = \epsilon \mu \omega^2 - j\sigma \mu \omega \quad (7.3)$$

se llega a:

$$\nabla^2 \bar{E}(\vec{r}) + k^2 \bar{E}(\vec{r}) = 0 \quad (7.4)$$

Para la intensidad de campo magnético \vec{H} vale una ecuación correspondiente.

Al coeficiente complejo de (7.3), k , se denomina número de onda complejo. La parte real de (7.3), coincide con el cuadrado del número de onda en un medio aislante:

$$\epsilon \mu \omega^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

Esta parte real del cuadrado del número de onda complejo es producida por la corriente de desplazamiento y la parte imaginaria por la corriente de conducción. Para estas dos partes de la densidad de corriente se tiene:

$$-j\mu\omega (\vec{J} + j\omega\vec{D}) = (\epsilon \mu \omega^2 - j\sigma\mu\omega) \vec{E}$$

La magnitud del cociente entre la parte de la corriente de conducción y la parte de la corriente de desplazamiento se denomina como factor de pérdidas del medio (ver fig. 7.1):

$$b = \left| \frac{J}{\omega D} \right| = \left| \frac{Im g k^2}{Re k^2} \right| = \frac{\sigma}{\epsilon \omega} = \frac{1}{\omega \tau_r} \quad (7.5)$$

siendo τ_r el tiempo de relajación. Para el caso de pérdidas eléctricas o magnéticas debe tomarse en cuenta en la separación de k^2 , en su parte real e imaginaria, que ϵ y μ son complejos. Estas pérdidas se añaden al numerador de b . Aquí nos limitaremos a las pérdidas por efecto Joule o consideraremos a σ como un parámetro equivalente que considera todas las pérdidas. Una segunda medida para las pérdidas es el ángulo de pérdidas:

$$\beta = \arctan b \quad (7.6)$$

Para un condensador que posee pérdidas con un ángulo de pérdidas pequeño obtengamos la densidad de potencia debida a efecto Joule, si consideramos J_w como la densidad de corriente total.

$$P_J = \vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot \vec{J}_w \cdot \text{sen} \beta \approx \vec{E} \cdot \vec{J}_w \cdot \beta \approx \vec{E} \cdot \vec{J}_w \cdot b$$

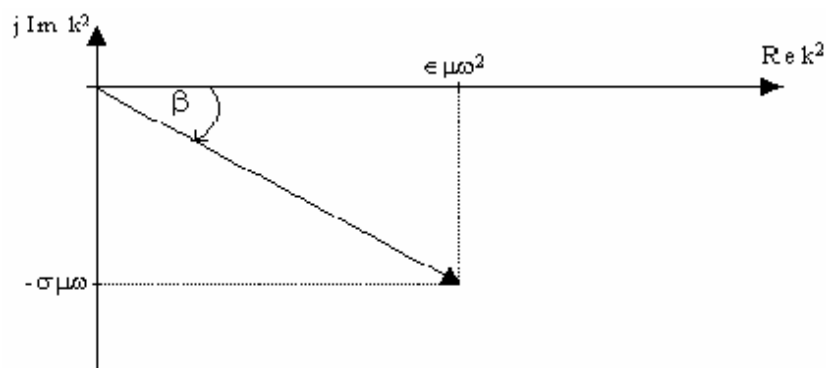


Fig.7.1 Diagrama Vectorial del número de onda complejo

Como la solución más sencilla de la ecuación diferencial (7.4) queremos tratar aquí nuevamente una onda plana homogénea que dependa únicamente de la coordenada

espacial en la dirección de propagación, escojamos nuevamente la coordenada z .

Entonces tenemos:

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + k^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad (7.7)$$

que su solución es:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 \cdot e^{\pm j \cdot k \cdot z} \quad (7.8)$$

siendo la amplitud \vec{E}_0 en general un vector complejo. Nos limitaremos en esta vez a una onda transversal polarizada linealmente en el sentido positivo de z , es decir:

$$\vec{E}(z) = \{ E_0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot z}, 0, 0 \} \quad (7.9)$$

$$\vec{H}(z) = \{ 0, H_0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot z}, 0 \}$$

siendo E_0 y H_0 escalares complejos. Las dos ecuaciones de la divergencia (2.1) se satisfacen.

Las dos ecuaciones del rotacional (2.1) proporcionan:

$$+\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \epsilon E_x + \sigma E_x$$

introduciendo la consideración de onda (7.9), obtenemos:

$$-jk E_0 = -j\omega\mu H_0 \quad (7.10)$$

$$jkH_0 = (j\omega\epsilon + \sigma) E_0$$

Las dos ecuaciones permiten determinar la impedancia de onda del conductor como la relación entre las intensidades de campo eléctrico y magnético. Ellas son consistentes, pues producen el mismo resultado. Así si multiplicamos estas dos ecuaciones correspondientemente se obtiene la relación (7.3) para k^2 . De (7.10) obtenemos la impedancia de onda compleja:

$$Z = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{\epsilon\mu\omega^2 - j\sigma\mu\omega}} \quad (7.11)$$

o en función del factor de pérdidas b de (7.5):

$$Z = \sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{\epsilon\mu\omega^2 - j\sigma\mu\omega}} = \sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{\epsilon\mu\omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma\mu\omega}{\epsilon\mu\omega^2}}}$$

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\epsilon\omega}}}; \quad b = \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1}{\omega\tau_r}; \quad \tau_r = \frac{\omega}{\sigma}$$

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - jb}} \quad (7.12)$$

Con ello la solución (7.9), tomando la parte real queda:

$$E_x(z, t) = \text{Re} \{ E_0 e^{j(\omega t - k z)} \} \quad (7.13)$$

$$H_y(z, t) = \text{Re} \{ (E_0/Z) \cdot e^{j(\omega t - k z)} \}$$

La impedancia compleja $Z = |Z| e^{j\varphi}$ produce un corrimiento de fase entre las dos intensidades de campo, \vec{E} adelanta a \vec{H} el ángulo de fase φ .

Además para obtener la parte real de (7.13) se debe considerar que el argumento de la función exponencial también posee el número de onda complejo. Considerando que:

$$k = k' - j k'' \quad (7.14)$$

se obtiene:

$$E_x(z, t) = E_0 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z) \quad (7.15)$$

\vec{E} y \vec{H} experimentan en el conductor una atenuación en la dirección de propagación. Debido a la pasividad de la materia no es posible un incremento de la onda sino una atenuación, por lo tanto:

$$k'' \geq 0 \quad (7.16)$$

es decir, que la parte imaginaria del número de onda complejo es negativa. El recíproco de la magnitud de la parte imaginaria de k representa la distancia a lo largo de la dirección de propagación en la que la intensidad de campo eléctrico ha disminuido al valor $1/e$.

7.2 CARACTERISTICAS DE DISPERSION DEL CONDUCTOR

Enseguida queremos estudiar si un medio conductor es dispersivo. Esto es, según (7.8), el caso cuando la velocidad de fase es dependiente de la frecuencia.

De la ecuación. (7.15) obtenemos para la velocidad de fase:

$$v = \frac{dz}{dt} \text{ fase cte} = \frac{\omega}{k'} \quad (7.17)$$

Dado que $v > 0$ (propagación de la onda en el sentido positivo de z) y $\omega > 0$ se tiene siempre que:

$$k' > 0 \quad (7.18)$$

La relación (7.17) es bastante parecida a la (2.26) para el aislante; solamente que en el conductor, la velocidad de fase es inversamente proporcional a la parte real del mismo número de onda complejo.

Según (7.17) la velocidad de fase es pues, dependiente de la frecuencia, esto es el medio es dispersivo, cuando la parte real del número de onda complejo posee una dependencia de la frecuencia de la forma:

$$k' = \omega f(\omega) \quad (7.19)$$

siendo $f(\omega)$ una función arbitraria. Para comprobar esto, debemos separar la parte real y la parte imaginaria del número de onda compleja; o sea determinar k' y k'' de (7.14).

De (7.14) y (7.3) y considerando también que se excluirán las pérdidas dieléctricas y magnéticas (o incluidas en σ) de tal manera que ϵ y μ sean reales, se obtiene:

$$(k' - jk'')^2 = k'^2 - k''^2 - 2jk'k'' = \epsilon\mu\omega^2 - j\sigma\mu\omega$$

es decir:

$$k'^2 - k''^2 = \epsilon\mu\omega^2 \quad (7.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k'k'' = \frac{\sigma\mu\omega}{2} = \frac{1}{\delta^2} \\ \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \end{array} \right. \quad (7.21)$$

siendo δ la profundidad de penetración.

Introduciendo (7.17) en (7.21) obtendremos para la parte imaginaria del número de onda complejo:

$$k'' = \frac{1}{\delta^2 k'} = \frac{\nu}{\omega \delta^2} \geq 0 \quad (7.22)$$

Reemplazando (7.22) en (7.20) obtenemos una ecuación bicuadrática para la parte real del número de onda complejo.

$$k'^2 - \left(\frac{1}{\delta^2 k'} \right)^2 = \epsilon \mu \omega^2 \quad \rightarrow \quad k'^2 - \frac{1}{\delta^4 k'^2} = \epsilon \mu \omega^2 \quad \rightarrow \quad k'^4 - \epsilon \mu \omega^2 k'^2 - \frac{1}{\delta^4} = 0$$

cuya solución es:

$$k' = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \omega^2 \pm \sqrt{(\epsilon \mu \omega^2)^2 + \frac{4}{\delta^4}}}{2}} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \omega^2 \pm \sqrt{(\epsilon \mu \omega^2)^2 + (\sigma \mu \omega)^2}}{2}}$$

$k' > 0$ se escoge el signo positivo de la raíz cuadrada externa

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\sigma \mu \omega)^2}{(\epsilon \mu \omega^2)^2}}}$$

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma \mu \omega}{\epsilon \mu \omega^2} \right)^2}} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2}}$$

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + b^2}}$$

se escoge el signo positivo, pues k' es real y tenemos:

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + b^2}} \quad (7.23)$$

La expresión (7.23) tiene la forma supuesta en (7.19), pues el factor de pérdidas b es función de la frecuencia, y en general la constante dieléctrica ϵ es también función de la frecuencia.

Es decir, todo medio conductor es dispersivo. En la figura (7.2) tenemos la representación gráfica de (7.17) en función de la frecuencia ω , para el caso que ϵ , μ , σ sean independientes de la frecuencia. Esta última suposición en general no se cumple y da lugar a la dispersión anormal.

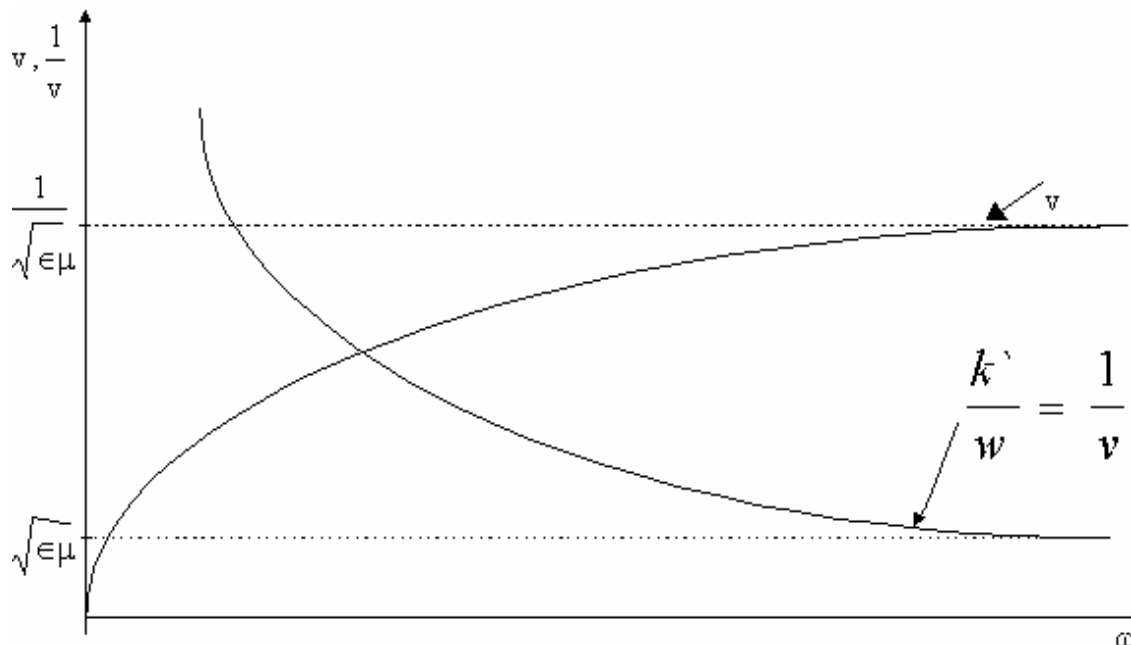


Fig. 7.2 Velocidad de fase en medios conductores

7.3 CASOS LIMITES DE LOS CONDUCTORES METALICOS Y AISLANTES

Obtenemos dos casos límites, cuando en la densidad de corriente total predomina, ya sea la densidad de corriente de desplazamiento o la densidad de corriente de conducción, o en

otros términos en el cuadrado del número complejo predomina la parte real o la parte imaginaria. Según (7.5), el primer caso límite es hablar de un pequeño y el segundo caso límite de un gran factor de pérdidas.

1.- Pequeñas pérdidas (Aislador)

Este caso es descrito por medio de:

$$b = \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega Tr} \ll 1 \quad \rightarrow \quad Tr \gg \frac{1}{\omega} \quad (7.24)$$

Desarrollando (7.23) en serie de potencias de b obtenemos:

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + b^2}}$$

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[+ (1 + b^2)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} b^2 + \dots \right) \right]^{1/2}$$

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[2 + \frac{b^2}{2} + \dots \right]^{1/2}$$

$$k' = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left[1 + \frac{b^2}{4} + \dots \right]^{1/2}$$

$$k' \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left(1 + \frac{b^2}{8} \right) \quad (7.25)$$

Con lo que, de (7.20) obtenemos:

$$k'' = \sqrt{k'^2 - \epsilon \mu \omega^2} \approx \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu \left(1 + \frac{b^2}{8}\right) - \epsilon \mu \omega^2}$$

$$k'' \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{8}\right)^2 - 1} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 + \frac{b^2}{4} + \left(\frac{b^2}{8}\right)^2 - 1}$$

$$k'' \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu} \frac{b}{2} \quad (7.26)$$

Para la impedancia de onda compleja, a partir de (7.12) y procediendo de igual forma, obtenemos:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - jb}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sqrt{1 + jb}}{\sqrt{1 + b^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\left(1 + j\frac{b}{2} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}b^2 + \dots\right)}$$

$$Z \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j\frac{b}{2}\right) \quad (7.27)$$

Para pérdidas nulas, esto es para aislador ideal, obtenemos con $b = 0$:

$$k' = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad v = \frac{\omega}{k'} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$k'' = 0 \quad (7.28)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\vec{E} \text{ y } \vec{H} \text{ en fase})$$

Dispersión aparecerá para este caso ideal solamente si ϵ y/o μ dependen de la frecuencia.

2.- Grandes Pérdidas (conductor metálico)

Este caso se describe por medio de:

$$b = \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1 \quad \rightarrow \quad Tr \ll \frac{1}{\omega}$$

Manipulando (7.23), (7.21) y (7.12) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} k' &= \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{1 + (1 + b^2)^{1/2}} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \sqrt{b} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \\ k' &\approx \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}} = \frac{1}{\delta} \quad ; \quad v = \omega \delta \\ k'' &= \frac{1}{\delta^2 k'} \quad \rightarrow \quad k'' \approx \frac{1}{\delta} \\ k^2 &\approx (k' - j k'')^2 = \frac{1}{\delta^2} (1 - j)^2 = -\frac{2j}{\delta^2} = -j \sigma \mu \omega \\ Z &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j b}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{j}{b}} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon \omega}{\epsilon \sigma}} \cdot j = \frac{1}{\sigma \delta} \sqrt{2j} \\ Z &\approx \frac{1 + j}{\sigma \delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma \delta} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \sqrt{j} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

La impedancia de onda compleja ocasiona el adelanto de 45° de \vec{E} con respecto a \vec{H} . El cuadrado del número de onda compleja es un imaginario puro, esto es, no hay densidad de corriente de desplazamiento. La constante de atenuación es igual al recíproco de la profundidad de penetración y la velocidad de fase es proporcional a la profundidad de penetración. Para las intensidades de campo de una onda transversal polarizada linealmente obtenemos:

$$E_x(z, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad (7.31)$$

$$H_y(z, t) = \frac{\sigma \delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

para un conductor ideal tenemos:

$$\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow b \rightarrow \infty ; \quad \delta = 0 ; \quad v = 0 \quad \text{y} \quad Z = 0$$

7.4 EFECTO PELICULAR O PIEL DE UN CONDUCTOR CILINDRICO

Queremos tratar aquí el efecto pelicular de un conductor cilíndrico para los dos casos límites de frecuencias altas (efecto pelicular fuerte) y de frecuencias bajas (efecto pelicular débil).

En los dos casos queremos determinar la impedancia compleja $R + j\omega Li$ de un conductor cilíndrico de radio a y de longitud l en la dirección z . Como una medida de la intensidad del efecto pelicular introduzcamos la siguiente relación:

$$\gamma = \frac{a}{2\delta} = \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega a^2}{8}} \quad (7.32)$$

1.- Efecto Pelicular fuerte

Este caso límite se presenta para altas frecuencias o para $\gamma \gg 1$. Esto es, que la profundidad de penetración es muy pequeña comparada con el radio a .

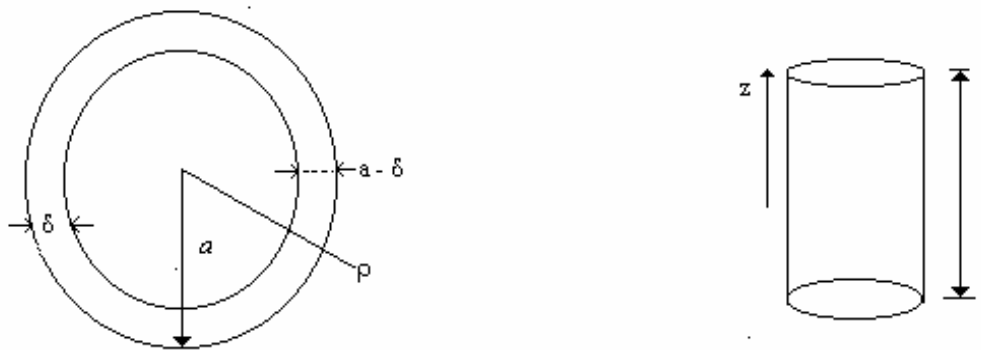


Fig. 7 Efecto pelicular en conductores para $\delta \ll a$

Aproximaremos las superficies cilíndricas límites del entorno del campo con planos tangenciales (Onda plana transversal). La coordenada en la dirección de propagación, ubicando el origen en la superficie del conductor, es $a - \rho$.

Para el campo complejo y con los valores de un conductor metálico para k y Z obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} E_z(\rho) &= E_0 e^{-jk(a-\rho)} = E_0 e^{-\frac{(1+j)a-\rho}{\delta}} \\ H_\phi(\rho) &= \frac{E_z(\rho)}{Z} = \sigma \delta \frac{E_z(\rho)}{(1+j)} \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Con ello tenemos, para el voltaje y la corriente en la periferia del conductor:

$$v = \int_0^l E_z(a) dz = E_0 l$$

$$i = \int_0^{2\pi} H_\phi(a) a d\phi = \frac{E_0}{Z} \cdot 2\pi a$$

Para la impedancia del conductor obtenemos:

$$\frac{v}{i} = R + j\omega Li = \frac{Z.l}{2\pi.a} = (1 + j) \frac{l}{2\pi.a\sigma\delta}$$

comparando las partes real e imaginaria:

$$R = \omega Li = \frac{l}{2\pi a \sigma \delta} \quad (7.34)$$

Esto es la impedancia óhmica de la zona de penetración; es decir, de la piel de espesor δ que posee campo. Refiriendo nosotros el resultado con respecto a la resistencia de DC, tenemos:

$$R_o = l / \sigma \pi a^2 \quad \rightarrow \quad \frac{R}{R_o} = \frac{\omega Li}{R_o} = \gamma \quad (7.35)$$

Para un efecto pelicular fuerte, las pérdidas debidas a corrientes torbellino son proporcionales a la raíz cuadrada de la frecuencia.

Nuestra solución aproximada para efecto pelicular fuerte coincide con el primer término de un desarrollo en series en potencias de $1/\gamma$ de la solución exacta, la cual la introducimos sin demostración:

$$\frac{R}{R_o} = \gamma + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\gamma} + \dots$$

$$\frac{\omega Li}{R_o} = \gamma - \frac{3}{64\gamma} + \frac{3}{128\gamma^2} - \dots$$

2.- Efecto Pelicular Débil

Este caso límite se presenta en bajas frecuencias o para $\gamma \ll 1$. La profundidad de penetración abarca todo el interior del conductor y debemos calcular el campo interno como una función de ρ . Nosotros queremos obtener una solución aproximada sin utilizar las funciones de Bessel.

La ecuación diferencial (7.4) del campo complejo en coordenadas cilíndricas con k^2 según (7.30) es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) - \frac{2j}{\delta^2} E_z = 0 \quad (7.36)$$

Ensayemos la siguiente solución serial:

$$E_z(\rho) = E_0 \left[1 + \frac{\alpha \rho}{2\delta} + \beta \left(\frac{\rho}{2\delta} \right)^2 + \dots \right] = E_0 (1 + \alpha \rho + \beta \rho^2 + \dots) \quad (7.37)$$

la cual es permitida debido a :

$$\frac{\rho}{2\delta} \leq \frac{a}{2\delta} = \gamma \ll 1$$

Reemplazando (7.37) en (7.36) se tiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) - \frac{2j}{\delta^2} E_z = 0$$

$$\frac{\alpha}{\rho} + 4\beta - \frac{2j}{\delta^2} - \frac{2j\alpha}{\delta^2} \rho - \frac{2j\beta}{\delta^2} \rho^2 + \dots = 0$$

Esta ecuación se cumple, al ser ρ arbitrario, únicamente cuando los coeficientes de todas las potencias de ρ desaparecen, o sea:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{j}{2\delta^2}$$

y con ello la solución aproximada para la intensidad de campo complejo es :

$$E_z(\rho) = E_o \left(1 + j \frac{\rho^2}{2\delta^2} \right)$$

Además :

$$v = \int_0^l E_z(a) dz = E_o \left(1 + j \frac{a^2}{4\delta^2} \right) l = E_o l (1 + 2j\gamma^2)$$

$$i = 2\pi\sigma \int_0^a E_z(\rho) \cdot \rho d\rho = \sigma\pi a^2 \left(1 + j \frac{a^2}{4\delta^2} \right) E_o$$

$$i = \sigma\pi a^2 E_o (1 + j\gamma^2)$$

Para la impedancia del conductor obtenemos:

$$R + j\omega Li = \frac{1 + 2j\gamma^2}{1 + j\gamma^2} R_o = \frac{1 + 2\gamma^4 + j\gamma^2}{1 + \gamma^4} R_o$$

$$\frac{R}{R_o} = 1 + A_1(\gamma^4) + \dots \quad ; \quad \frac{\omega Li}{R_o} = \gamma^2 + A_2(\gamma^6) + \dots$$

Para el efecto pelicular débil, crecen las pérdidas debidas a las corrientes torbellino con el cuadrado de la frecuencia.

Esta solución aproximada para el efecto pelicular débil coincide con el desarrollo en series en potenciales de γ de la solución exacta:

$$\frac{R}{R_o} = 1 + \frac{\gamma^4}{3} + \dots$$

$$\frac{\omega Li}{R_o} = \gamma^2 - \frac{\gamma^6}{6} + \dots$$

7.6 FLUJO DE ENERGIA EN MEDIOS CON PERDIDAS

A continuación analizaremos en un medio que posee pérdidas, la intensidad de una onda armónica, para ello utilizaremos la representación compleja:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \bar{E}(\bar{r}) e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) \\ \bar{H}(\bar{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \bar{H}(\bar{r}) e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} (\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t})\end{aligned}\quad (7.40)$$

con lo que:

$$\begin{aligned}\bar{S}(t) &= \bar{E} \times \bar{H} = \frac{1}{4} (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) \times (\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t}) \\ \bar{S}(t) &= \frac{1}{4} (\bar{E} \times \bar{H}) e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} (\bar{E}^* \times \bar{H}^*) e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} (\bar{E}^* \times \bar{H} + \bar{E} \times \bar{H}^*)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\bar{E}^* \times \bar{H} + \bar{E} \times \bar{H}^* &= 2 \text{Re} \left\{ \bar{E} \times \bar{H}^* \right\} \\ \bar{S} &= \bar{E} \times \bar{H}^* \\ \bar{S}^* &= \bar{E}^* \times \bar{H}\end{aligned} \right\} \rightarrow \bar{S} + \bar{S}^* = 2 \text{Re} \bar{S}$$

entonces:

$$S(t) = \frac{1}{4} \overline{E} \times \overline{H} e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} \overline{E}^* \times \overline{H}^* e^{-j2\omega t} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \overline{E} \times \overline{H}^* \right\}$$

Definiendo el vector de Poynting complejo de la siguiente manera:

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}^* \quad (7.41)$$

obtenemos el valor promedio en el tiempo de \overline{S} , definido como la intensidad:

$$\overline{\overline{S}(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\overline{S}) \quad (7.42)$$

Además con $H = \frac{E}{Z}$ tenemos para la magnitud de \overline{S}

$$S = \frac{E \cdot E^*}{Z^*} = Z \cdot H \cdot H^*$$

Obtengamos el valor promediado del cuadrado de una variable de campo armónica:

$$H = \frac{1}{2} (\overline{H} e^{j\omega t} + \overline{H}^* e^{-j\omega t})$$

$$H^2 = \frac{1}{4} (\overline{H} e^{j\omega t} + \overline{H}^* e^{-j\omega t}) \cdot (\overline{H} e^{j\omega t} + \overline{H}^* e^{-j\omega t})$$

$$\text{entonces} \quad H^2 = \frac{1}{4} (\overline{H}^2 e^{j2\omega t} + \overline{H} \cdot \overline{H}^* + \overline{H}^* \cdot \overline{H} + \overline{H}^{*2} e^{-j2\omega t})$$

$$\overline{\overline{H}^2(t)} = \frac{1}{4} (\overline{H} \cdot \overline{H}^* + \overline{H}^* \cdot \overline{H}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\overline{H} \cdot \overline{H}^*) \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{H}^2(t)} = \frac{1}{2} \overline{H} \cdot \overline{H}^* \quad (7.43)$$

Con (7.42) obtenemos para la intensidad:

$$\overline{S}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \overline{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ Z H \cdot H^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \overline{H^2}(t) \cdot Z \}$$

$$\overline{S}(t) = \overline{H^2}(t) \cdot \operatorname{Re} Z = \overline{E^2}(t) \cdot \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}$$

Para un conductor metálico con (7.30) tenemos:

$$Z \approx \frac{\sqrt{2}}{\sigma \delta} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \rightarrow \quad \operatorname{Re} Z \approx \frac{1}{\sigma \delta}$$

$$\overline{S}(t) = \frac{1}{\sigma \delta} \overline{H^2}(t) = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} \cdot \overline{H^2}(t) \quad (7.44)$$

La intensidad de la onda es más pequeña mientras más grande sea la conductividad del medio de propagación.

Para analizar las pérdidas consideremos finalmente el valor promediado en el tiempo de la divergencia del vector Poynting.

$$\overline{\operatorname{div} S}(t) = \operatorname{div} \overline{S}(t) = \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} S \right)$$

$$\overline{\operatorname{div} S}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\operatorname{div} S) \quad (7.45)$$

Un medio que posee pérdidas lo describimos a través de las variables del material.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' - j\varepsilon'' \\ \mu &= \mu' - j\mu'' \\ \sigma & \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Con lo que:

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{div}(\bar{E} \times \bar{H}^*) = \frac{1}{2} [\bar{H}^* \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{H}^* (-\mu \dot{H}) - \bar{E} (\sigma \bar{E} + \varepsilon \cdot \dot{E})^*]$$

$$= -\frac{1}{2} [j\omega\mu \cdot \bar{H} \bar{H}^* + (j\omega\varepsilon)^* \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \sigma \bar{E} \cdot \bar{E}^*]$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{S} = -\frac{1}{2} [j\omega(\mu' - j\mu'') \bar{H} \cdot \bar{H}^* - j\omega(\varepsilon' + j\varepsilon'') \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \sigma \bar{E} \cdot \bar{E}^*]$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{S} = -\frac{1}{2} [\omega\mu'' \bar{H} \cdot \bar{H}^* + \omega\varepsilon'' \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \sigma \bar{E} \cdot \bar{E}^* + j\omega(\mu' \bar{H} \cdot \bar{H}^* + \varepsilon' \bar{E} \cdot \bar{E}^*)]$$

La parte real es pues, negativa, es decir describe “caídas”, o sea pérdidas del flujo de energía.

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{div} \bar{S}) = -\frac{1}{2} [\sigma + \omega\varepsilon'' \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \omega\mu'' \bar{H} \cdot \bar{H}^*]$$

$$\overline{\operatorname{div} \bar{S}(t)} = -\frac{1}{2} \left[(\sigma + \omega\varepsilon'') \overline{2\bar{E}^2(t)} + \omega\mu'' \overline{2\bar{H}^2(t)} \right]$$

$$\overline{\operatorname{div} \bar{S}(t)} = - \left[(\sigma + \omega\varepsilon'') \overline{\bar{E}^2(t)} + \frac{\omega\mu''}{|Z|^2} \overline{\bar{E}^2(t)} \right]$$

$$\overline{\operatorname{div} \bar{S}(t)} = - \left(\sigma + \omega\varepsilon'' + \frac{\omega\mu''}{|Z|^2} \right) \overline{\bar{E}^2(t)} \quad (7.45)$$

Las pérdidas dieléctricas y magnéticas son directamente proporcionales a la frecuencia. Dado que todas las pérdidas contribuyen a un calentamiento del medio, podemos expresar a la expresión entre paréntesis de (7.45) como una conductividad específica equivalente, la que representa la suma de todas las pérdidas.

La misma conductividad específica equivalente obtenemos cuando en el cuadrado del número de onda compleja consideramos que los parámetros del material son complejos y luego extraemos su parte imaginaria. Así:

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 - j\sigma\mu\omega = (\epsilon' - j\epsilon'')(\mu' - j\mu'')\omega^2 - j\sigma(\mu' - j\mu'')\omega$$

$$= \epsilon'\mu'\omega^2 - \epsilon''\mu''\omega^2 - \sigma\mu''\omega - j[\epsilon''\mu' + \epsilon'\mu'']\omega^2 + \sigma\mu'\omega$$

$$Im k^2 = -\omega\mu' \left(\sigma + \omega\epsilon'' + \frac{\epsilon'}{\mu'}\omega\mu'' \right)$$

8. REFLEXION Y REFRACCION

Hasta aquí hemos estudiado la propagación de ondas en espacios ilimitados. Enseguida nos dedicaremos a campos de ondas limitados que son interesantes en la electrotecnia.

Inicialmente nos ocuparemos, en este capítulo, de la reflexión y de la refracción de una onda en la superficie de separación de dos medios. Nos limitaremos aquí, como anteriormente, a una onda plana y a una superficie de separación también plana, pudiendo ser los medios completamente arbitrarios, o sea poseer impedancias de ondas complejas.

Junto a este caso de medios arbitrarios nos ocuparemos especialmente de dos casos límites: el de medios dieléctricos (fórmula de Fresnel) y el de un espejo ideal.

8.1 ONDAS PARCIALES Y CONDICIONES DE FRONTERA

Consideremos el medio 1 y el 2, con impedancias de ondas complejas Z_1 y Z_2 ; y una superficie de separación plana la cual coincide con el plano (x, y) de un sistema de coordenadas cartesianas (ver fig. 8.1).

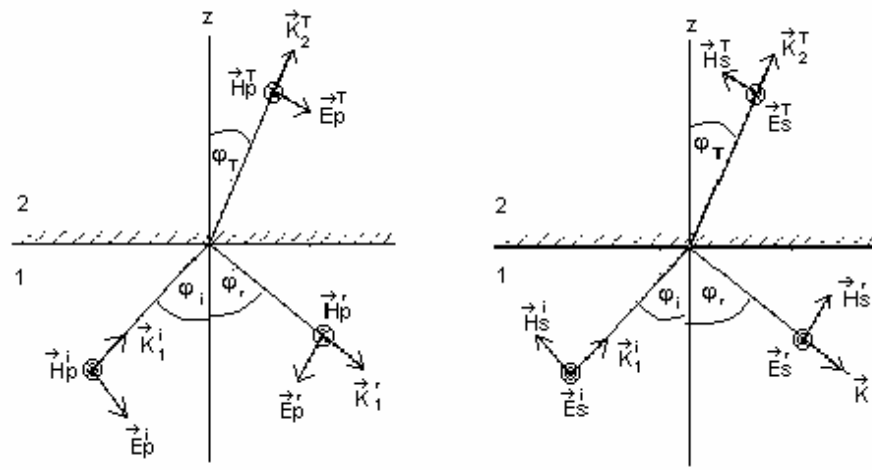
En el medio 1 se tiene una onda incidente con la dirección de propagación \vec{k}_1^i . El plano que forman ésta dirección de propagación y la normal a la superficie de separación, - para nuestro caso el eje z - se denomina como plano de incidencia. Hemos elegido como plano de incidencia el plano $(x - z)$.

El ángulo φ_i entre la dirección de propagación y la normal se denomina ángulo de incidencia.

En general, la onda plana incidente será polarizada elípticamente. Podemos separarla entonces en dos ondas polarizadas linealmente, perpendiculares entre sí, las cuales hay

que tratarlas separadamente, pues ellas no tienen un comportamiento idéntico en lo que es reflexión y refracción. De este modo consideramos dos situaciones:

1. La intensidad de campo eléctrico de la onda incidente tiene una polarización lineal que es paralela al plano de incidencia (ver. fig. 8.1a).
2. La intensidad de campo eléctrico de la onda incidente tiene una polarización lineal que es perpendicular al plano de incidencia. (ver fig. 8.1b).



a) paralela al plano de incidencia

b) perpendicular al plano de incidencia

Fig. 8.1 Polarización lineal

En óptica, es usual identificar la dirección de oscilación de la luz con la dirección de polarización del vector de intensidad de campo eléctrico \vec{E} . Para diferenciar al primer caso se utilizará el subíndice “p” (fig. 8.1a) y para el segundo, el subíndice “s” (fig. 8.1b).

En la superficie de separación, la onda incidente experimentará un disturbio (perturbación), pues ella no continuará inalterable en el medio 2. El cómo esta perturbación aparece, se determina por medio de las condiciones de frontera de las variables del campo electromagnético. El campo total resultante en el medio 1 y en el medio 2 debe cumplir con todas las condiciones de borde o frontera. Nosotros suponemos para ello una onda reflejada en el medio 1 (índice r en la fig. 8.1) con un factor de

reflexión R y un ángulo de reflexión φ_r desconocidos y una onda transmitida en el medio 2 (índice T en la fig. 8.1) con un factor de transmisión T y un ángulo de transmisión φ_T también desconocidos por el momento. Estos cuatro parámetros φ_r , φ_T , R y T los determinaremos satisfaciendo las condiciones de frontera. Nosotros veremos que esto siempre es posible si aceptamos que también las direcciones de propagación \vec{k}_1^r y \vec{k}_2^T de las ondas reflejada y transmitida, están en el plano de incidencia (ver fig. 8.1). Debido a la unicidad de las ecuaciones de Maxwell esta consideración siempre se cumple.

Además, tomemos en cuenta lo siguiente: en el caso que las condiciones de frontera se las considere sin una onda reflejada, es decir cada medio con una onda parcial, entregaría nuestra consideración el resultado haciendo $R = 0$. Nosotros veremos que esto sólo se presenta para el caso de que los dos medios sean idénticos. En la superficie de separación entre dos medios diferentes ($Z_1 \neq Z_2$) se origina, para una onda polarizada elípticamente, a más de la onda transmitida, la onda reflejada.

8.2 POLARIZACION DE LA ONDA INCIDENTE PARALELA AL PLANO INCIDENTE

Consideraremos primero el caso representado en la fig. 8.1a, esto es, que la intensidad del campo eléctrico de la onda incidente es paralela al plano incidente.

Para las intensidades de campo de las tres ondas parciales dadas en la fig. 8.1a hacemos las siguientes consideraciones:

$$\vec{E}^i = E_o e^{-j \cdot \vec{k}_1^i \cdot \vec{r}} \vec{a}_E = \{ E_o \cos \varphi_i \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^i \cdot \vec{r}}, 0, -E_o \sin \varphi_i \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^i \cdot \vec{r}} \}$$

$$\vec{H}^i = (E_o / Z_1) \vec{a}_y = \{ 0, (E_o / Z_1) \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^i \cdot \vec{r}}, 0 \}$$

$$\vec{E}^r = \{ -E_o R_p \cos \varphi_r \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^r \cdot \vec{r}}, 0, -E_o R_p \sin \varphi_r \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^r \cdot \vec{r}} \}$$

$$\vec{H}^r = \{ 0, (E_o R_p / Z_1) \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_1^r \cdot \vec{r}}, 0 \}$$

$$\vec{E}^T = \{ E_o T_p \cos \varphi_D \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_2^T \cdot \vec{r}}, 0, -E_o T_p \sin \varphi_T \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_2^T \cdot \vec{r}} \}$$

$$\vec{H}^T = \{ 0, (E_o T_p / Z_2) \cdot e^{-j \cdot \vec{k}_2^T \cdot \vec{r}}, 0 \}$$

Para ello hemos separado la función del tiempo compleja $e^{j\omega t}$, pues ella es la misma para todas las ondas parciales al poseer la misma frecuencia que la onda incidente. De otra manera las condiciones de frontera no se podrían cumplir para cualquier tiempo. Escribiremos ahora la continuidad de las componentes tangenciales de E y H en la superficie de separación $z = 0$, de tal manera que en el producto escalar $\vec{k} \cdot \vec{r}$ solamente aparezca la coordenada x :

$$\cos \varphi_i \cdot e^{-j \cdot k_1 \cdot x \cdot \sin \varphi_i} - R_p \cos \varphi_r \cdot e^{-j \cdot k_1 \cdot x \cdot \sin \varphi_r} = T_p \cos \varphi_T \cdot e^{-j \cdot k_2 \cdot x \cdot \sin \varphi_T}$$

$$(1/Z_1) \cdot e^{-j \cdot k_1 \cdot x \cdot \sin \varphi_i} + (R_p / Z_1) \cdot e^{-j \cdot k_1 \cdot x \cdot \sin \varphi_r} = (T_p / Z_2) \cdot e^{-j \cdot k_2 \cdot x \cdot \sin \varphi_T}$$

Estas dos condiciones pueden ser satisfechas, si x es arbitrario, solamente si:

$$k_1 \sin \varphi_i = k_1 \sin \varphi_r = k_2 \sin \varphi_T$$

De aquí se obtiene la ley de reflexión:

$$\varphi_r = \varphi_i \tag{8.1}$$

y la ley de refracción:

$$k_2 \operatorname{sen} \varphi_T = k_1 \operatorname{sen} \varphi_I \quad (8.2)$$

Hay que aclarar que, en general k_1 y k_2 , y con ello el ángulo de refracción son complejos. Estas particularidades, que se presentan en especial en la óptica del metal, no las vamos a tratar. Si los dos medios son no conductores, los números de onda son reales e igual al cociente ω/v . Considerando la definición del índice de refracción $n = c/v$, obtenemos la ley de Snell:

$$\begin{aligned} (\omega/v_2) \operatorname{sen} \varphi_T &= (\omega/v_1) \operatorname{sen} \varphi_I \quad \rightarrow \quad (n_2/c) \operatorname{sen} \varphi_T = (n_1/c) \operatorname{sen} \varphi_I \\ n_2 \operatorname{sen} \varphi_T &= n_1 \operatorname{sen} \varphi_I \end{aligned} \quad (8.3)$$

y con (8.1) y (8.2) se tiene para las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \cos \varphi_i - R_p \cos \varphi_r = T_p \cos \varphi_t \\ \frac{1}{Z_1} + \frac{R_p}{Z_1} = \frac{T_p}{Z_2} \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} 1 - R_p = T_p \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} \\ 1 + R_p = T_p \frac{Z_1}{Z_2} \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} (a) + (b) \quad \rightarrow \quad -2 &= T_p \left(\frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \\ \rightarrow \quad T_p &= \frac{2Z_2 \cos \varphi_i}{Z_1 \cos \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_t} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} (b) - (a) \quad \rightarrow \quad 2R_p &= T_p \left(\frac{Z_1}{Z_2} - \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} \right) \\ 2R_p &= \frac{2Z_2 \cos \varphi_i}{Z_1 \cos \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_t} \left(\frac{Z_1 \cos \varphi_i - Z_2 \cos \varphi_t}{Z_2 \cos \varphi_i} \right) \end{aligned}$$

$$R_p = \frac{Z_1 \cos \varphi_i - Z_2 \cos \varphi_t}{Z_1 \cos \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_t} \quad (8.5)$$

$T_p =$ Factor o coeficiente de transmisión

$R_p =$ Factor o coeficiente de reflexión

Consideraremos los siguientes casos especiales:

1) $Z_1 = Z_2$

Los medios son idénticos y se tiene de la ley de refracción que $\varphi_t = \varphi_i$ y con ello:

$$R_p = 0 \quad \wedge \quad T_p = 1 \quad (8.6)$$

2) $Z_2 = 0$

Si la impedancia de onda es cero, esto significa que se trata de un conductor ideal con $\sigma \rightarrow \infty$ y con ello se tiene:

$$R_p = 1 \quad \wedge \quad T_p = 0 \quad (8.7)$$

El conductor metálico ideal actúa como un espejo ideal, en el cual la onda incidente completamente se refleja. (Tomar en cuenta que en este caso la componente tangencial de H no es continua, como muestra también la fig. (8.1)).

$$3) \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \quad \wedge \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}}$$

Los dos medios son también dieléctricos puros. Luego de algunas manipulaciones algebraicas y considerando la ley de refracción, tenemos:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_t)}{\operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi_t)} \quad (8.8)$$

$$T_p = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi_t \operatorname{cos} \varphi_i}{\operatorname{sen}(\varphi_i + \varphi_t) \operatorname{cos}(\varphi_i - \varphi_t)}$$

que constituyen las fórmulas de Fresnel, las cuales fueron obtenidas primero por Fresnel de su teoría de la luz elástica.

Finalmente debe tomarse en cuenta que la continuidad de la componente \vec{B} en la superficie de separación para el caso que estamos tratando no es necesario, pues \vec{H} y con ello \vec{B} solamente posee una componente tangencial. La condición de frontera de \vec{D} es idéntica con la condición de frontera para \vec{H} para medios dieléctricos como consecuencia de la ley de refracción. En superficies metálicas hay que calcular considerando una carga superficial.

8.3 POLARIZACION DE LA ONDA INCIDENTE PERPENDICULAR AL PLANO INCIDENTE

El tratamiento del caso representado en la fig. (8.1b), esto es la intensidad de campo eléctrico de la onda incidente, es polarizado perpendicularmente al plano de incidencia, es completamente análogo al caso dual ya tratado, de tal manera que nosotros aquí lo podemos resumir:

La consideración de las ondas parciales es:

$$\begin{aligned}\vec{E}_s^i &= \left\{ 0, E_0 e^{-j\vec{k}_1^i \cdot \vec{r}}, 0 \right\} \\ \vec{H}_s^i &= \left\{ -\frac{E_0}{Z_1} \cos \varphi_i e^{-j\vec{k}_1^i \cdot \vec{r}}, 0, \frac{E_0}{Z_1} \operatorname{sen} \varphi_i e^{-j\vec{k}_1^i \cdot \vec{r}} \right\} \\ \vec{E}_s^r &= \left\{ 0, E_0 R_s e^{-j\vec{k}_1^r \cdot \vec{r}}, 0 \right\} \\ \vec{H}_s^r &= \left\{ \frac{E_0 R_s}{Z_1} \cos \varphi_r e^{-j\vec{k}_1^r \cdot \vec{r}}, 0, \frac{E_0 R_s}{Z_1} \operatorname{sen} \varphi_r e^{-j\vec{k}_1^r \cdot \vec{r}} \right\} \\ \vec{E}_s^t &= \left\{ 0, E_0 T_s e^{-j\vec{k}_2^t \cdot \vec{r}}, 0 \right\} \\ \vec{H}_s^t &= \left\{ -\frac{E_0 T_s}{Z_2} \cos \varphi_t e^{-j\vec{k}_2^t \cdot \vec{r}}, 0, \frac{E_0 T_s}{Z_2} \operatorname{sen} \varphi_t e^{-j\vec{k}_2^t \cdot \vec{r}} \right\}\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para \vec{E} y \vec{H} en $z = 0$ conducen aquí también nuevamente a la ley de reflexión (8.1) y a la ley de refracción (8.2) y con ello además:

$$1 + R_s = T_s$$

$$1 - R_s = T_s \frac{Z_1 \cos \varphi_t}{Z_2 \cos \varphi_i}$$

y de estas dos ecuaciones resulta para los coeficientes de reflexión y de transmisión lo siguiente:

$$R_s = \frac{Z_2 \cos \varphi_{ii} - Z_1 \cos \varphi_T}{Z_2 \cos \varphi_{ii} + Z_1 \cos \varphi_T} \quad (8.9)$$

$$T_s = \frac{2Z_2 \cos \varphi_i}{Z_2 \cos \varphi_i + Z_1 \cos \varphi_T} \quad (8.10)$$

Consideremos nuevamente los mismos casos especiales que para la situación dual de la polarización de la onda incidente:

1) $Z_1 = Z_2$

Aquí también se tiene:

$$R_s = 0 \quad \text{y} \quad T_s = 1 \quad (8.11)$$

2) $Z_2 = 0$

$$\text{Se tiene: } R_s = -1 \quad \text{y} \quad T_s = 0 \quad (8.12)$$

El signo negativo en R_s significa que la onda polarizada perpendicularmente con respecto al plano de incidencia se refleja en un espejo ideal con un salto (cambio) de fase de π .

$$3) \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \quad \wedge \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}}$$

Luego de transformaciones trigonométricas se obtienen las fórmulas de Fresnel para una onda polarizada perpendicularmente al plano de incidencia.

$$T_s = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi_T \cos \varphi_i}{\operatorname{sen}(\varphi_i + \varphi_T)} \quad (8.13)$$

$$R_s = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_i - \varphi_T)}{\operatorname{sen}(\varphi_i + \varphi_T)}$$

Hay que aclarar que para una onda incidente perpendicular con $\varphi_i = 0$ resulta también que $\varphi_t = 0$. Las expresiones de Fresnel (8.8) y (8.13) resultan ser impracticables, pues se obtiene una expresión indeterminada. Las ecuaciones (8.4), (8.5) ó (8.9) y (8.10) según el caso, conducen a resultados correctos; para este caso, como era de esperarse:

$$R_p = -R_s = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_p = T_s = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Los dos casos de polarización conducen al mismo resultado, con excepción del signo en R.

9. ONDAS EN GUIAS DE ONDA

Previamente determinaremos E en el medio y para la figura (8.1a)

$$E_p^i = \left[E_o \cos \varphi_i e^{-jK_1^i r}, 0, -E_o \operatorname{sen} \varphi_i e^{-jK_1^i r} \right]$$

$$E_p^r = \left[E_o R_p \cos \varphi_i e^{-jK_1^r r}, 0, -E_o R_p \operatorname{sen} \varphi_i e^{-jK_1^r r} \right]$$

$$E_p = E_p^i + E_p^r$$

$$E_p = E_o \left[\cos \varphi_i \left(e^{-jK_1^i r} - e^{-jK_1^r r} \right), 0, -\operatorname{sen} \varphi_i \left(e^{-jK_1^i r} - e^{-jK_1^r r} \right) \right]$$

$$k_1^i = \left[k_{1X}^i, 0, k_{1Z}^i \right] \quad k_1^r = \left[k_{1X}^r, 0, k_{1Z}^r \right]$$

$$r = [x, 0, z]$$

$$k_{1X}^i = k_1 \operatorname{sen} \varphi_i; k_{1Z}^i = k_1 \cos \varphi_i$$

$$k_{1X}^r = k_1 \operatorname{sen} \varphi_i; k_{1Z}^r = -k_1 \cos \varphi_i$$

$$E_p = E_o \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \left(e^{-j(xK_1 \operatorname{sen} \varphi_i + zK_1 \cos \varphi_i)} - e^{-j(xK_1 \operatorname{sen} \varphi_i - zK_1 \cos \varphi_i)} \right) \\ \operatorname{sen} \varphi_i \left(e^{-j(xK_1 \operatorname{sen} \varphi_i + zK_1 \cos \varphi_i)} + e^{-j(xK_1 \operatorname{sen} \varphi_i - zK_1 \cos \varphi_i)} \right) \end{bmatrix} 0,$$

$$k_{1X}^i = k_{1X}^r = k_{1X}$$

$$k_{1Z}^i = -k_{1Z}^r = k_{1Z}$$

$$k_{1X}^i = k_1 \operatorname{sen} \varphi_i; k_{1Z}^i = k_1 \cos \varphi_i$$

$$E_p = E_o \left[\cos \varphi_i \left(e^{-j(xK_{1x} + zK_{1z})} - e^{-j(xK_{1x} - zK_{1z})} \right), 0, -\operatorname{sen} \varphi_i \left(e^{-j(xK_{1x} + zK_{1z})} + e^{-j(xK_{1x} - zK_{1z})} \right) \right]$$

$$E_p = E_o \left[\cos \varphi_i \left(e^{-jzK_{1z}} - e^{jzK_{1z}} \right) e^{-jxK_{1x}}, 0, \sin \varphi_i \left(e^{-jzK_{1z}} + e^{jzK_{1z}} \right) e^{-jxK_{1x}} \right]$$

$$E_p = E_o \left[-2j \cos \varphi_i \sin z k_{1z} e^{-jxK_{1x}}, 0, -2 \sin \varphi_i \cos z k_{1z} e^{-jxK_{1x}} \right]$$

$$E_p = -2E_o \left[j \cos \varphi_i \sin z k_{1z} e^{-jxK_{1x}}, 0, \sin \varphi_i \cos z k_{1z} e^{-jxK_{1x}} \right]$$

Es una onda que se propaga en el sentido positivo de x y que tiene las componentes E_x y E_z .

$$E_p = \{ E_x, 0, E_z \}$$

$$k_{1z} = k_1 \cos \varphi_i \qquad k_{1x} = k_1 \sin \varphi_i$$

Definiendo como $k_{1z} = k_c$ ^ $k_{1x} = k_g$

$$k_1^2 = k_c^2 + k_g^2$$

Por razones que se verán más adelante definiremos a k_g como el número de onda en la guía y k_c como número de onda de corte. Para el caso que el medio 1 sea el espacio libre:

$$k = 2\pi / \lambda$$

Entonces:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

λ es la longitud de onda en el espacio libre y λ_g será conocida como la longitud de onda en la guía, y λ_c como la longitud de onda de corte.

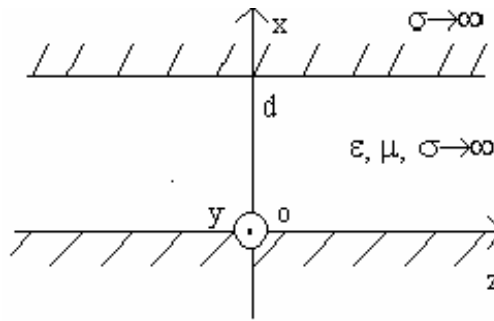
En este capítulo nos dedicaremos a la propagación de una onda en guías de onda. Estas son tubos metálicos de área transversal arbitraria. Ellas se utilizan para microondas en el rango de los GHz como medios de transporte.

Aquí no podemos ocuparnos, sin embargo, de los componentes modernos y de los circuitos de la técnica de microondas, si no que nos limitaremos más bien al caso más sencillo, o sea a la guía de onda rectangular y especialmente a la guía de onda rectangular con un lado ilimitado; es decir, a conductores paralelos con paredes conductoras ideales y con un medio libre de pérdidas de separación entre las dos paredes. En ellas podremos estudiar lo más importante de las ondas en guías de onda, específicamente la aparición de tipos de onda diferentes - las ondas TE, TM y TEM - así como también la condición de propagación y la frecuencia límite de las ondas en guías de onda.

9.1 CONDICIONES DE FRONTERA

Consideremos una guía de onda, que consiste de dos planos metálicos paralelos separados entre sí una distancia d (ver figura 9.1). El medio en la guía de onda es libre de pérdidas ($\epsilon, \mu, \sigma = 0$), las paredes del metal son conductores ideales ($\sigma \rightarrow \infty$).

De estas consideraciones se desprende enseguida que una onda que se alimenta a una guía de onda de ninguna manera experimenta una atenuación. Pues al ser el medio libre de pérdidas es sin atenuación y las paredes conductoras ideales actúan como un espejo ideal, de tal manera que solamente una onda reflejada pueda a parecer mas no una onda transmitida en la pared de la guía de onda (ver la ecuaciones 8.7 o 8.12 del ultimo capitulo). En las paredes de la guía de onda desaparecen pues el campo magnético y el eléctrico.

**Fig. 9.1** Guía de Onda con paredes ideales

Con ello las condiciones de frontera en la guía de onda para el sistema de coordenadas seleccionados en la fig. (9.1) en $x = 0$ y $x = d$ son:

$$\begin{aligned}
 E_y = E_z &= 0 \\
 H_x &= 0 \\
 D_x &= \rho_s \\
 H_y &= J_{sz} ; H_z = J_{sy}
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

Las dos primeras condiciones, las cuales se derivan de la continuidad de E_t y B_n , limitan el grado de libertad de la propagación de una onda en una guía de onda. Aquellas ondas que satisfacen estas dos condiciones de frontera son capaces de propagarse. De aquí se obtienen las condiciones de propagación para las ondas en guías de onda. Las otras dos condiciones expresan que en las paredes de la guía de onda aparecerán, en general, una densidad de carga superficial ρ_s y una densidad de corriente superficial J_s , las cuales pueden determinarse de estas dos condiciones.

En situaciones reales, una pared de la guía es realizable solamente con $\sigma < \infty$ y $|Z| > 0$, con excepción de los superconductores. Con lo que el campo penetra en la pared de la guía una pequeña cantidad δ y experimenta ahí una atenuación en la dirección de la propagación. En tal superficie de separación son E_t y H_t continuas. En la pared de la guía aparece una placa de densidad de corriente espacial J de grosor δ .

A continuación estudiaremos solamente el caso ideal con $\sigma \rightarrow \infty$. Para el caso real puede distribuirse, en primera aproximación, homogéneamente la densidad de corriente superficial J_s sobre la profundidad de penetración; es decir, estimar las pérdidas con una resistencia superficial $R = 1 / \sigma\delta$, esto es la resistencia de un pedazo de pared de iguales dimensiones en y y en z .

9.2 ONDA TEM

Inicialmente consideraremos una onda plana transversal polarizada linealmente, la cual se alimenta a la guía de la fig. (9.1) en la dirección positiva de z :

$$\vec{E} = \{ E_0 e^{j(\omega t - kz)}, 0, 0 \} \quad (9.2)$$

$$\vec{H} = \left\{ 0, \frac{1}{Z} E_0 e^{j(\omega t - kz)}, 0 \right\}$$

siendo Z la impedancia de onda del medio. Esta onda satisface las dos primeras condiciones (9.1), es decir es capaz de propagarse (ver fig. 9.2). Dado que en ella tanto el campo eléctrico como el magnético son transversales a la dirección de propagación, se denomina a esta onda como Onda TEM.

Las otras dos condiciones de frontera de (9.1) producen densidades de carga superficial y de corriente superficial que fluctúan espacial y temporalmente (ver fig. 9.2)

$$\rho_s = D_x = \epsilon E_x = \epsilon E_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

$$J_{sz} = Hy = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (9.3)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

100

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

La densidad de corriente de conducción continúa en el medio, con una corriente libre de divergencia ($\text{div} = 0$), a través de una densidad de corriente de desplazamiento:

$$\dot{\vec{D}} = \{j\omega\epsilon E_0 e^{j(\omega t - kz)}, 0, 0\}$$

La densidad de corriente de desplazamiento está corrida en fase $\pi/2$ con respecto a la intensidad de campo eléctrico (ver fig. 9.2). Finalmente obtenemos de (9.2) el vector de Poynting, el cual siempre tiene una componente positiva:

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \times \vec{H} \quad \rightarrow \quad S_z(z, t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 e^{j2(\omega t - kz)} \right\}$$

$$S_z(z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos 2(\omega t - kz) \quad (9.5)$$

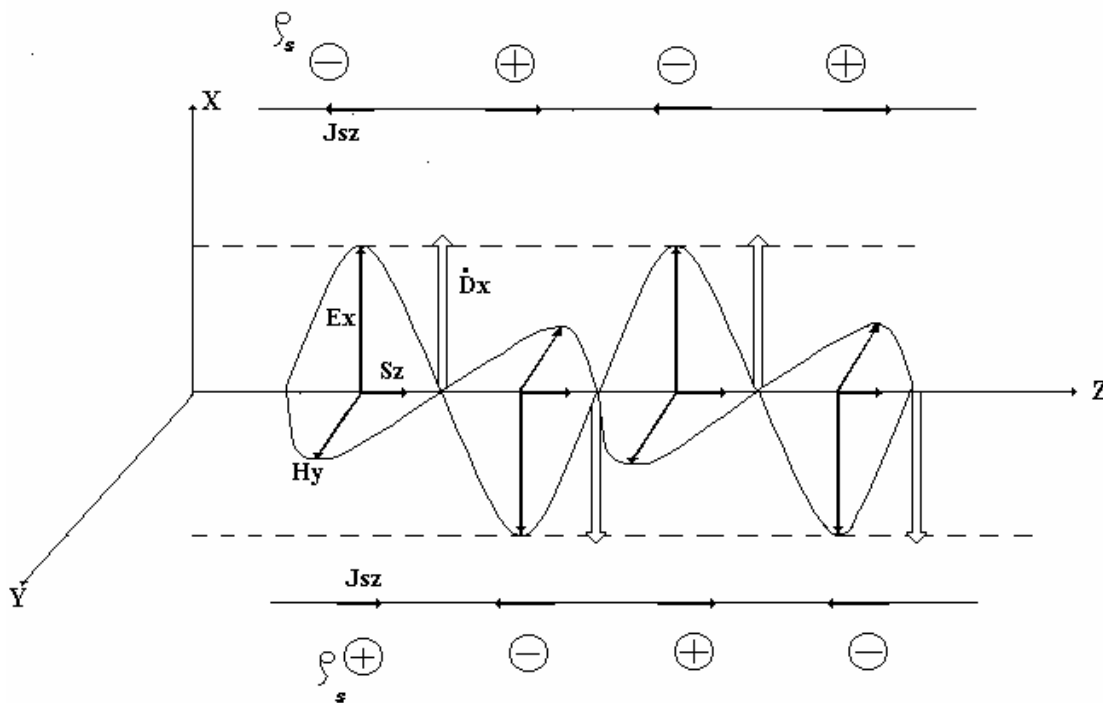


Fig. 9.2 Onda TEM entre dos planos paralelos

El flujo de energía sucede pues siempre en la dirección de propagación.

La figura (9.2) indica la relación entre todas estas variables para un tiempo específico.

9.3 ONDA TM

Consideremos una onda plana transversal polarizada linealmente que se alimenta en la guía de onda de la fig. (9.1) con un ángulo α con respecto al eje z . Para ello, la polarización de la intensidad de campo eléctrico se considera paralela al plano de incidencia (ver fig. 9.3).

1) Solución Visual

Enseguida queremos establecer las condiciones de propagación por medio de una discusión visual y después obtener una solución analítica.

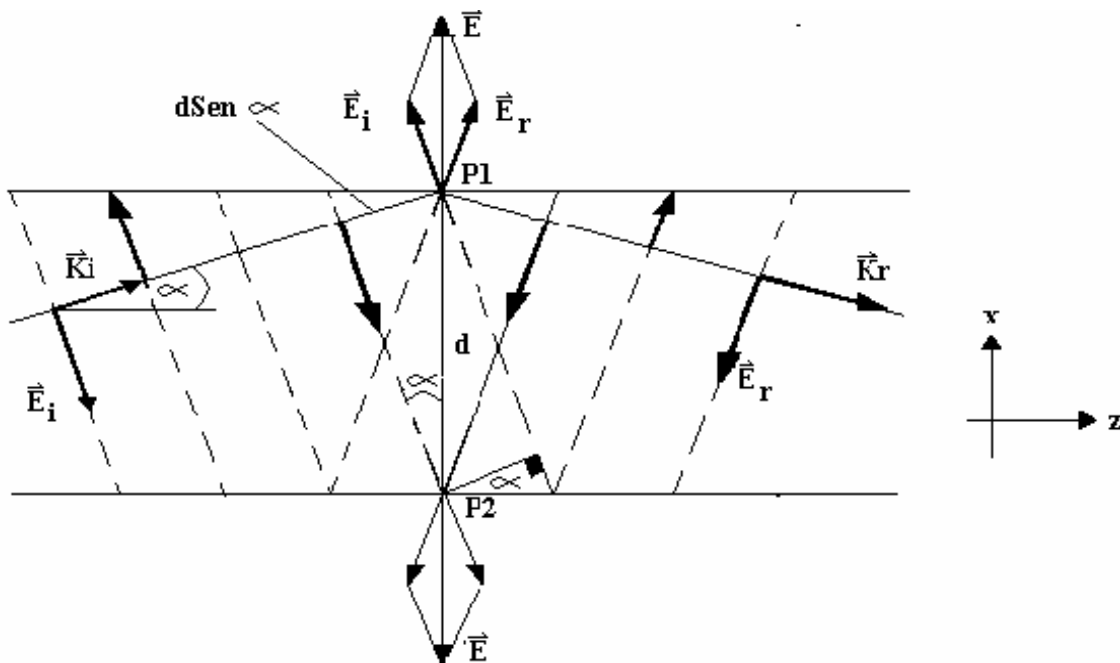


Fig. 9.3 Onda TM en una guía de onda idealizada

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

102

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

La onda incidente cumple las condiciones de borde $E_y = 0$ y $H_x = 0$ pero no $E_z = 0$. Ella se refleja en cada punto de las paredes ideales de la guía con igual amplitud e igual fase. La superposición de la onda incidente con la onda reflejada en la pared superior produce una onda resultante, la cual satisface la condición de frontera $E_z = 0$ en todos los puntos P_1 de la pared superior (ver fig. 9.3). Solamente cuando la reflexión se da en un espejo, el campo total satisface todas las condiciones de frontera independientemente del ángulo α de la onda incidente.

Tenemos que satisfacer todavía la condición de frontera $E_z = 0$ en la segunda pared de la guía. Debemos considerar para ello las relaciones de fase de las ondas incidente y reflejada no solamente en puntos arbitrarios P_1 de la pared superior sino también en todos los puntos opuestos P_2 de la pared inferior. En el punto P_2 la fase de la onda incidente con respecto a P_1 es $kd \cdot \text{sen } \alpha$ adelantada, ésta a su vez adelanta a la onda reflejada $kd \cdot \text{sen } \alpha$. Para una fase de $\pi / 2$ ó $3\pi / 2$ en P_1 conduce nuevamente este corrimiento de fase simétrico en P_2 a una intensidad de campo eléctrico resultante normal a la pared.

Esto no sirve para fases arbitrarias en P_1 ni para cualquier punto P_2 de la pared inferior. Para satisfacer la condición de frontera $E_z = 0$ en todos los puntos de la pared inferior debe cumplirse la condición de propagación:

$$2kd \cdot \text{sen } \alpha = 2\pi n ; \quad n = 0, 1, 2, \quad (9.6)$$

Para una frecuencia o longitud de onda preestablecida son posibles solamente determinadas direcciones de incidencia α , y para una dirección preestablecida de la onda incidente son capaces de propagarse solamente determinadas frecuencias o longitudes de onda:

$$\frac{2\pi f}{v} \text{sen } \alpha = 2\pi n \quad \rightarrow \quad f = n \frac{v}{2d \text{sen } \alpha} = n f_\alpha$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{n} 2d \text{sen } \alpha = \frac{1}{n} \lambda_\alpha \quad (9.7)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

103

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Debido a que $\text{sen}\alpha \leq 1$, existe una frecuencia mínima o una longitud de onda máxima (onda fundamental):

$$f_{\min} = \frac{v}{2d} \quad (9.8)$$

$$\lambda_{\max} = 2d$$

Fuera de estos valores límites las ondas no son capaces de propagarse. Estos límites se obtienen para una onda incidente perpendicular ($\alpha = 90^\circ$). Las ondas incidente y reflejada se superponen y el resultado es una onda estacionaria entre las dos paredes, la cual tiene nodos de onda en las dos paredes.

En todos los casos $0 < \alpha < \pi$ se superponen la onda incidente y reflejada para conformar una onda en la guía de onda que avanza en la dirección z . Para la longitud de onda en la guía obtenemos de la fig. (9.3) con la condición de propagación (9.7) lo siguiente:

$$\cos\alpha = \frac{d\text{sen}\alpha}{\lambda_g/2} \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda_g}{2} = \frac{d\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$kd\text{sen}\alpha = \pi \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} d\text{sen}\alpha = \pi$$

$$d\text{sen}\alpha = \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{nv}{2df}\right)^2}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos\alpha} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{nv}{2df}\right)^2}} \geq \lambda \quad (9.9)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

104

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Para la velocidad de fase de la onda en la guía tenemos :

$$v_g = f\lambda_g = \frac{v}{\cos\alpha} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{nv}{2df}\right)^2}} \geq v \quad (9.10)$$

La velocidad de fase de la onda en la guía asoma como dependiente de la frecuencia; esto es la guía de onda se comporta como un medio dispersivo. Con lo que la velocidad de grupo no es idéntica con la velocidad de fase, sino que nosotros obtenemos:

$$v_G = v_g + k_g \frac{dv_g}{dk_g}$$

$$= \frac{v}{\cos\alpha} + k \cos\alpha \cdot \frac{dv_g}{d\alpha} \cdot \left(\frac{dk_g}{d\alpha}\right)^{-1} ; \quad k_g = k \cos\alpha$$

con :

$$\frac{dv_g}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{v}{\cos\alpha} \right) = \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{dk_g}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} (k \cos\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos\alpha \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\left(\frac{2\pi n}{2d \operatorname{sen}\alpha} \right) \cos\alpha \right)$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi \cdot n}{d} \operatorname{ctg}\alpha \right) = -\frac{\pi \cdot n}{d} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

se obtiene:

$$v_G = \frac{v}{\cos\alpha} + k \cos\alpha \cdot \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \left(-\frac{d}{\pi \cdot n} \operatorname{sen}^2\alpha \right)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

105

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$v_G = v \left[\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{2\pi \cdot n \cdot d \cdot \sin^3\alpha}{2d \sin\alpha \cdot \pi \cdot n \cdot \cos\alpha} \right]$$

$$v_G = \frac{v}{\cos\alpha} [1 - \sin^2\alpha] \quad \rightarrow \quad v_G = v \cos\alpha \leq v_g \quad (9.11)$$

En la fig. (9.4) se indica la relación entre las diferentes velocidades. Para una onda incidente perpendicular con $\alpha = \pi/2$, v_g tiende a infinito y $v_G = 0$

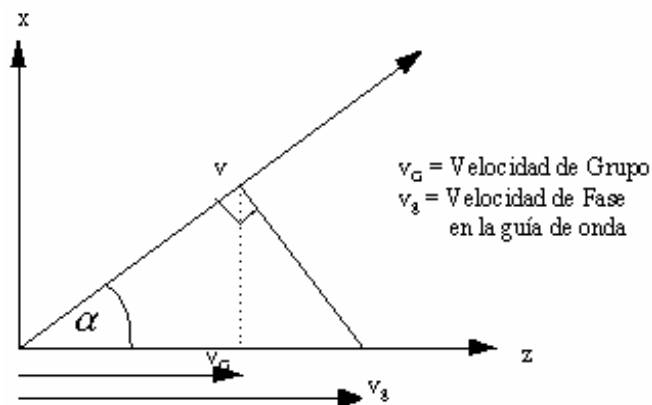


Fig. 9.4 Velocidad de fase y de grupo de una onda TM

A través de la condición de propagación (9.6) hemos satisfecho la condición $E_z = 0$ en todos los puntos de las paredes. En el interior de la guía de onda es válido en general que:

$$E_z \neq 0 \quad (9.12)$$

Esto es, la onda en la guía que avanza en la dirección de z no es una onda transversal pura. Ella posee una componente longitudinal de la intensidad del campo eléctrico. Tal onda,

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

106

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

para la cual solamente el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación, se denomina onda TM.

2) Solución Analítica

Después de esta solución visual podemos ocuparnos de la solución analítica. Junto al sistema de coordenadas x, y, z , utilicemos, por facilidad para describir la onda incidente y la onda reflejada, sistemas de coordenadas cartesianas x', y', z' y x'', y'', z'' respectivamente (ver fig. 9.5) con un eje "y" común.

$$z' = z \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha \quad (9.13)$$

$$z'' = z \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha$$

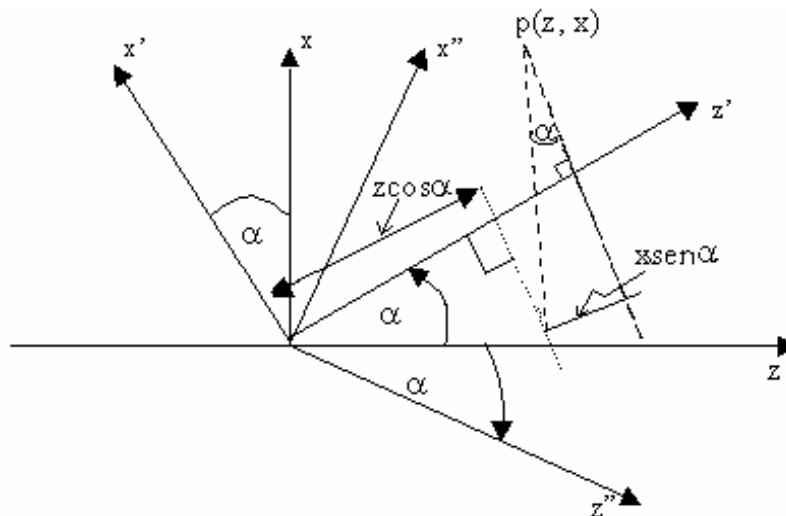


Fig. 9.5 Sistema de Coordenadas x', y', z' de la onda incidente y x'', y'', z'' de la onda reflejada.

Con lo que obtenemos (sin la función del tiempo compleja $e^{j\omega t}$)

$$\vec{E}^i = \left\{ E_0 e^{-j.kz'}, 0, 0 \right\}$$

$$\vec{H}^i = \left\{ 0, \frac{E_0}{Z} e^{-j.kz'}, 0 \right\}$$

$$\vec{E}^r = \left\{ E_0 e^{-j.kz''}, 0, 0 \right\}$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

107

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\vec{H}^r = \left\{ 0, \frac{E_0}{Z} e^{-j.kz}, 0 \right\}$$

Superponiendo las dos ondas parciales se obtiene la onda en la guía de onda.

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xI}^i \cos \alpha + E_{xII}^r \cos \alpha \\ &= E_0 e^{-jkz \cos \alpha} \left(e^{-jkx \sin \alpha} + e^{-jkx \sin \alpha} \right) \cos \alpha \\ &= 2E_0 \cos(kx \sin \alpha) \cos \alpha e^{-jkz \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$E_y = 0$$

$$\begin{aligned} E_z &= -E_{xI}^i \sin \alpha + E_{xII}^r \sin \alpha \\ &= E_0 e^{-jkz \cos \alpha} \left(e^{-jkx \sin \alpha} - e^{-jkx \sin \alpha} \right) \sin \alpha \\ &= 2j \sin(kx \sin \alpha) \sin \alpha e^{-jkz \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$H_x = 0$$

$$\begin{aligned} H_y &= H_{yI}^i + H_{yII}^r \\ &= \frac{2E_0}{Z} \cos(kx \sin \alpha) e^{-jkz \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$H_z = 0$$

Las condiciones de frontera $E_y = 0$ y $H_x = 0$ se satisfacen, también la condición de frontera $E_z = 0$ en la pared $x = 0$. Para $x = d$ obtenemos de $E_z = 0$ la condición de propagación (9.6):

$$E_z = 0 = 2jE_0 \sin(kd \sin \alpha) \sin \alpha e^{-jkz \cos \alpha}$$

$$\sin(kd \sin \alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad kd \sin \alpha = n \pi$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

108

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

De la función se fase de la componente de campo que no desaparece obtenemos como número de onda de la onda en la guía de onda lo siguiente:

$$k_g = k \cdot \cos \alpha = k \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = k \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kd} \right)^2}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot f}{v}$$

$$k_g = k \sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot v}{2df} \right)^2}$$

Esto coincide con la ecuación (9.9) para la longitud de onda en la guía. Además se tiene que:

$$1 - \left(\frac{nv}{2df} \right)^2 > 0 \quad \rightarrow \quad 1 > \left(\frac{nv}{2df} \right)^2 \quad \rightarrow \quad 1 > \frac{nv}{2df}$$

$$f = n \frac{v}{2d} > n \cdot f_{min}$$

Para el caso que el radical del número de onda en la guía sea menor que cero, el número de onda en la guía será un número imaginario puro y todos los componentes del campo que no desaparecen ya no representan términos de onda sino oscilaciones amortiguadas. Por debajo de esta frecuencia límite que depende del parámetro n no es posible una propagación de una onda en la guía.

Resumiendo obtenemos nosotros para la onda TM_n .

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

109

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\left. \begin{aligned}
 E_x(z,t) &= 2E_o \frac{vk_g}{\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{d}\alpha\right) \cos(\omega.t - k_g z) \\
 E_y(z,t) &= 0 \\
 E_z(z,t) &= 2E_o \frac{n\pi.v}{\omega.d} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}\alpha\right) \cos\left(\omega.t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right) \\
 H_x(z,t) &= 0 \\
 H_y(z,t) &= 2 \frac{E_o}{Z} \cos\left(\frac{n\pi}{d}\alpha\right) \cos(\omega.t - k_g z) \\
 H_z(z,t) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

La onda TM_n es una onda no homogénea en contraposición con la onda TEM. Para la relación de los componentes transversales de las intensidades de campo eléctrico y magnético no obtenemos aquí la impedancia de onda del espacio libre, sino,

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{kg v}{w} z = \frac{kg}{w} \frac{1}{\sqrt{u \epsilon}} \sqrt{u} = \frac{kg}{w \epsilon}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{kg}{\epsilon w} \quad (9.15)$$

El parámetro n en la condición de programación en (9.6) y en la solución (9.14) se denomina “modo de la onda” y va como subíndice. La onda TM₀ es idéntica con la onda TEM homogénea, pues para $n = 0$ se tiene de la condición de propagación (9.6) que $\alpha = 0$ y con ello $k_g = k$; $E_z = 0$ y $H_y = E_x/Z$. Visualmente, el modo de la onda TM_n informa sobre el número de las uniones de onda - o de medias ondas - en el interior de un corte transversal en la dirección de x (ver. Fig. 9.6).

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

110

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

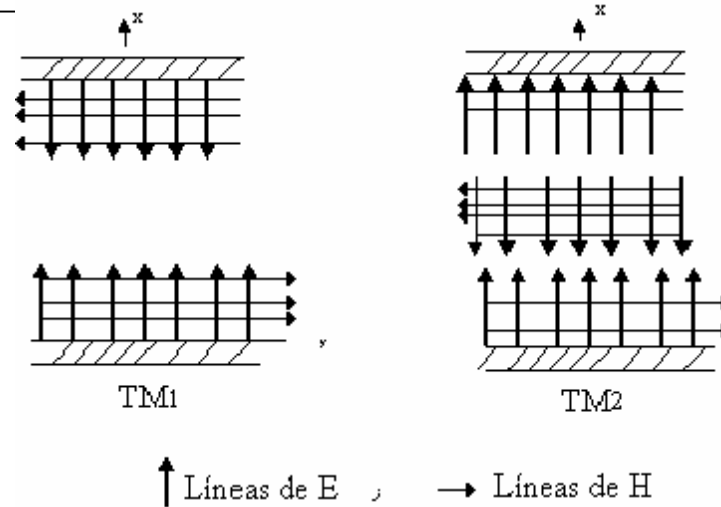


Fig. 9.3 Líneas de campo de las ondas TM_1 y TM_2

El vector de Poynting posee componentes en la dirección de x y en la dirección de z , pero en valor promedio solamente en la dirección de propagación.

$$\overline{S}_z(t) = \overline{E_x H_y} = 2 \frac{E_0^2}{Z} \frac{kg v}{w} \cos\left(\frac{n\pi}{d} x\right) \quad (9.16)$$

Para la onda incidente perpendicular, $\alpha = \pi/2$, es $kg = 0$ y con ello $S_z = 0$.

9.4 ONDA TE

Consideremos ahora el caso de una onda plana transversal que incide con el ángulo α y cuya intensidad de campo magnético está polarizada paralela al plano de incidencia.

$$\vec{H}^i = \{ H_0 e^{-jkz}, 0, 0 \}$$

$$\vec{E}^i = \{ 0, -ZH_0 e^{-jkz}, 0 \}$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

111

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

~~Esta onda incidente no satisface ni la condición de frontera $H_x = 0$, como tampoco $E_x = 0$;~~
 sino únicamente $E_z = 0$. Para satisfacer todas las condiciones de frontera consideremos en la onda reflejada un parámetro arbitrario, propiamente el salto de fase ϕ , desconocido por el momento.

$$\vec{H}^i = \{ H_o e^{-jkz} + j\phi, 0, 0 \}$$

$$\vec{E}^i = \{ 0, -ZH_o e^{-jkz} + j\phi, 0 \}$$

Superponiendo estas dos ondas obtenemos la onda resultante en la guía de onda:

$$H_x = H_x^i \cos\alpha + H_x^r \cos\alpha$$

$$H_x = H_o e^{-jkz \cos\alpha} (e^{-jkx \sin\alpha} + e^{+jkx \sin\alpha} e^{j\phi}) \cos\alpha$$

Para $x = 0$, $H_x = 0$; entonces:

$$H_o e^{-jkz \cos\alpha} (1 + e^{j\phi}) \cos\alpha = 0$$

por lo que $\phi = \pi$, y con ello tenemos:

$$H_x = H_o e^{-jkz \cos\alpha} (e^{-jkx \sin\alpha} - e^{+jkx \sin\alpha}) \cos\alpha = -2jH_o \sin(kx \sin\alpha) \cos\alpha e^{-jkz \cos\alpha}$$

De la condición de frontera $H_x = 0$ para $x = d$, nuevamente se obtiene la condición de propagación (9.6), con la que se satisface también la condición de frontera $E_x = 0$ para $x = d$.

La onda TE_n que obtenemos, con una componente longitudinal de las intensidades de campo magnético, es:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

112

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$H_x(z,t) = -2H_o \frac{k_g v}{\omega} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \cos\left(\omega.t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_y(z,t) = 0$$

$$H_z(z,t) = -2H_o \frac{n\pi v}{\omega d} \cos\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \cos(\omega.t - k_g z)$$

$$E_x(z,t) = 0$$

$$E_y(z,t) = 2H_o Z \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \cos\left(\omega.t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_z(z,t) = 0$$

9.5 GUIA DE ONDA RECTANGULAR

En una guía de sección transversal rectangular cuyas medidas son b y d (ver fig. 9.4), las ondas capaces de propagarse son en todo caso ondas TE y TM.

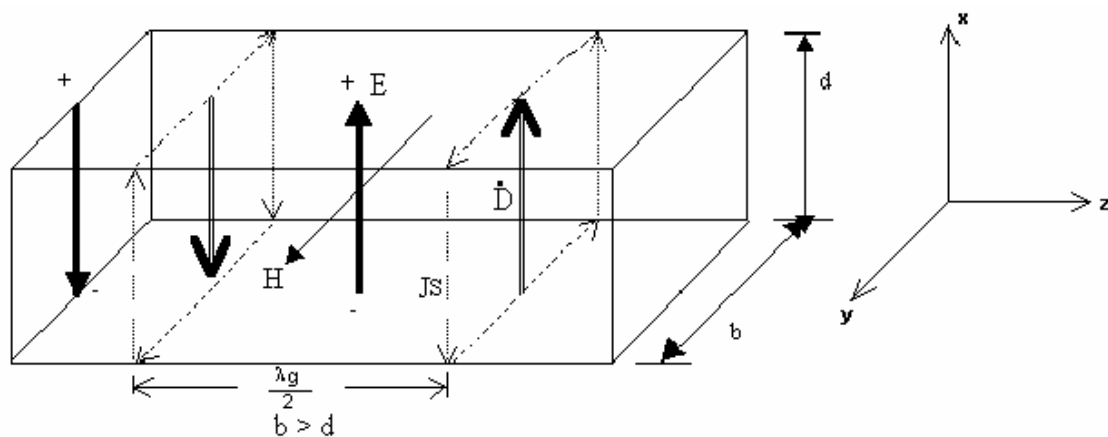


Fig. 9.4 Guía de onda rectangular y modo TE₁₀

Ellas poseen una dependencia obvia de las dos coordenadas x e y en el área transversal, pues las condiciones de frontera $E_t = 0$ y $H_n = 0$ deben satisfacerse en todas las cuatro

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

113

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

paredes. Por ello aparecen dos condiciones de propagación de la forma (9.6) con los parámetros m y n :

$$kbsen\alpha_1 = m\pi \quad (9.18)$$

$$kbsen\alpha_2 = n\pi$$

Para todo par entero (m, n) hay soluciones con el campo eléctrico o magnético transversal, los cuales se denominan para $b > d$, como ondas TE_{mn} o TM_{mn} . El subíndice del lado más grande es nombrado primero. El par $(0, 0)$ se debe excluir, pues todas las componentes desaparecen. Significando esto que, en una guía de onda rectangular, una onda TEM no es capaz de propagarse. Para una TM_{mm} ninguno de los subíndices puede ser cero. Para la frecuencia límite de la onda de modo (m, n) se tiene en analogía con (9.7) y (9.8):

$$f_{m,n} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (9.19)$$

La onda capaz de propagarse con la frecuencia más baja se llama onda fundamental. Esto es, debido a que $b > d$, la onda TE_{10} (ver fig. 9.4). (Para las ondas TM el modo más bajo es $m = n = 1$).

9.6 CONDUCTORES DE ONDAS DIELECTRICOS

En la técnica de comunicaciones ópticas se utiliza como conductores de ondas para las señales de luz films dieléctricos (conductores en forma de tiras) y alambres (cables) dieléctricos (fibras ópticas).

A los dos corresponde ampliamente lo que se ha dicho de guías de onda, pues también aquí la onda de luz acoplada es conducida por medio de una reflexión total en las superficies de separación.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

114

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Los conductores en forma de tiras (ver fig. 9.5a) consisten de un film delgado transparente con un índice de refracción óptica n_F , colocado sobre un sustrato con un índice de refracción más pequeño $n_S < n_F$ y rodeado de aire ($n_o = 1$) o de una cubierta transparente ($n_M < n_F$). Ello corresponde a una guía de onda rectangular con las paredes que reflejan totalmente en todos los lados. Aparecen correspondientemente las condiciones de propagación y los modos de onda capaces de propagarse. Tales conductores en forma de tiras constituyen los elementos base de los circuitos para el procesamiento de la información óptica.

La transmisión de información óptica a través de grandes distancias se consigue con cables de fibra óptica. La fibra óptica (ver fig. 9.5b) consiste de un núcleo de vidrio con un área transversal circular y con el índice de refracción n_k rodeado de una cubierta óptica delgada ($n_M < n_k$). Ella corresponde a una guía de onda cilíndrica. El análisis matemático riguroso conduce a funciones cilíndricas. También aquí se presentan modos TE y TM con doble subíndice, en donde el primer subíndice cuenta los nodos de onda asimutales y el segundo los radiales en el interior del área transversal.

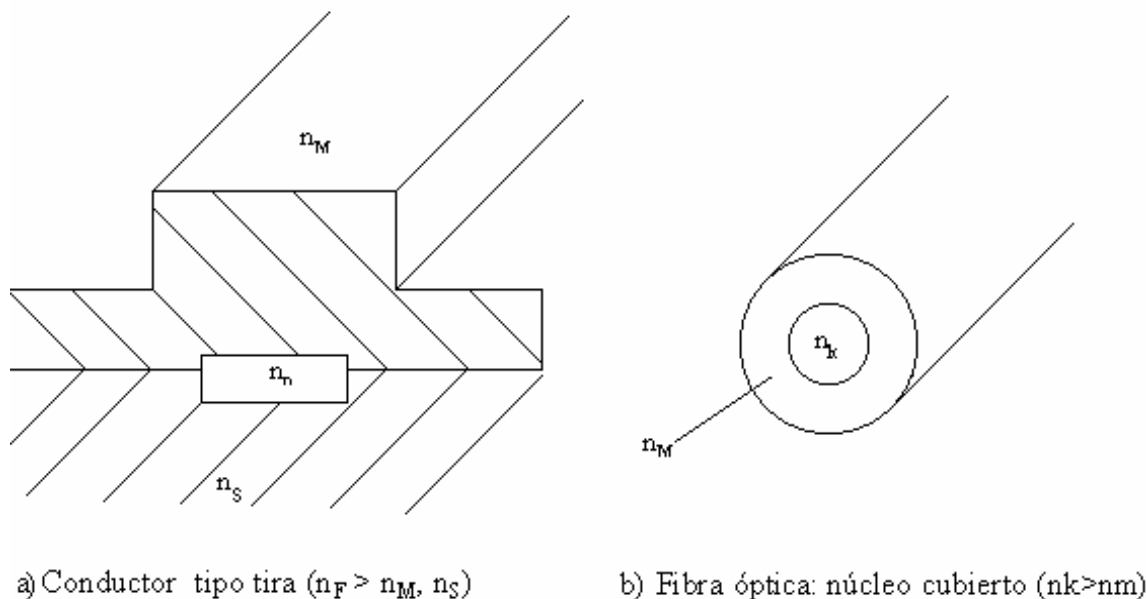


Fig. 9.5 Conductores de onda dieléctrica

10. ECUACIONES DE LINEAS DE TRANSMISIÓN

Las guías de onda son apropiadas solamente para guiar o conducir campos de onda con una frecuencia mayor a la frecuencia límite crítica f (de corte) $= v / 2d$. Mientras más pequeña la frecuencia de la onda, más grande deben ser las dimensiones d del área transversal de la guía de onda. En el rango de los MHz y más abajo tales guías de onda no son realizables. Aquí se utiliza para la guía o conducción de ondas, líneas de transmisión de dos conductores múltiples su rango de transmisión respecto a la frecuencia teóricamente es ilimitada. En la práctica existe una frecuencia límite superior debido al incremento de las pérdidas con el incremento de la frecuencia.

En este capítulo queremos ocuparnos de tales sistemas de líneas de transmisión. Por medio de un ejemplo de líneas de transmisión de conductores paralelos queremos obtener las ecuaciones de las líneas de transmisión, y por medio de un circuito equivalente visualizarlas. Importante aquí es que las líneas de transmisión poseen inductancias, capacidades y resistencias uniformemente distribuidas. Con el aumento de la frecuencia, esto es con la disminución de la longitud de la onda, los segmentos de una línea de transmisión que pueden describirse suficientemente bien por medio de dispositivos o elementos concentrados se tornan mas pequeños. Las líneas de transmisión largas deben describirse como conductores en cascada o en cadena.

10.1 ONDAS NO HOMOGENEAS EN CONDUCTORES

Consideramos una línea de transmisión de dos conductores largos, rectos y paralelos de área transversal arbitraria (ver fig. 10.1). A continuación supondremos un conductor ideal ($\sigma \rightarrow \infty$) y un medio sin pérdidas ($\sigma_M = 0$). Para ello podemos pensar en la línea de transmisión de conductores paralelos como una guía de onda con dos paredes metálicas ideales y paralelas. Ondas que son guiadas a lo largo de este tipo de líneas se las conoce

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

116

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

como ondas en conductores. Queremos analizar si también para esta situación la onda

TEM cumple con las condiciones de frontera:

$$E_t = 0, \quad H_n = 0 \quad (10.1)$$

las cuales deben satisfacerse en toda la superficie externa del conductor. Las componentes en las direcciones x y y de los vectores de campo deben depender, a más de la dirección de propagación z , también de las coordenadas x y y . Las condiciones de frontera son satisfechas únicamente por ondas no homogéneas.

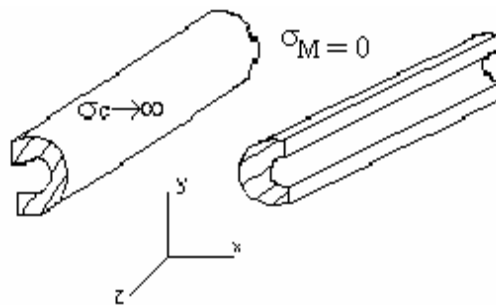


Fig. 10.1 Línea de transmisión de conductores paralelos sin pérdidas.

Hagamos por ello la siguiente consideración:

$$\vec{E} = \{ E_x(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}, E_y(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}, 0 \} \quad (10.2)$$

$$\vec{H} = \{ H_x(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}, H_y(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}, 0 \}$$

siendo k el número de onda en conductores, el cual todavía es desconocido.

De las ecuaciones de Maxwell y con $E_z = 0$ y $H_z = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \vec{E} &= 0 \\ \text{rot}_z \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

117

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

En los planos $z = \text{cte}$, \vec{E} y \vec{H} son campos libres de torbellinos y allí pueden determinarse a partir de potenciales escalares eléctrico $v(x, y)$ y magnético $V_m(x, y)$. Hagamos para el plano $z = z_0$ la siguiente consideración: (lo mismo sirve para V_m , no se toma en cuenta la función temporal $e^{j\omega t}$)

$$V(x, y, z_0) = v(x, y) \cdot e^{-jkz_0} \quad (10.4)$$

y con ello:

$$\vec{E}(x, y, z_0) = -\text{grad}.V = -e^{-jkz_0} \text{grad}.v(x, y)$$

En un medio lineal, homogéneo y sin carga espacial, debido a que la divergencia de \vec{E} es nula, se tiene la ecuación de potencial de Laplace:

$$\nabla^2 v(x, y) = 0 \quad (10.5)$$

En la superficie exterior de un conductor debido a que $E_t = 0$ se tiene que $v = \text{cte}$. Con ello, la determinación del campo eléctrico en los planos $z = z_0$ pasa a ser una determinación de un potencial eléctrico v .

Las relaciones entre las densidades del campo eléctrico y magnético y el número de onda todavía desconocido, determinémoslas de las componentes x y y todavía no utilizadas de las ecuaciones rotacionales:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad \rightarrow \quad kE_y = -j\omega\mu H_x \quad (10.6a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad \rightarrow \quad -kE_x = -\mu\omega H_y \quad (10.6b)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\epsilon\omega E_x \quad \rightarrow \quad kH_y = \epsilon\omega E_x \quad (10.6c)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

118

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\epsilon\omega E_y \quad \rightarrow \quad -kH_x = \epsilon\mu E_y \quad (10.6d)$$

Estas ecuaciones se satisfacen mutuamente para:

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v} \quad (10.7)$$

y entregan:

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_y \quad ; \quad E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x \quad (10.8)$$

Como era de esperarse, obtenemos pues, una onda TEM no homogénea con el número de onda igual al del espacio libre. Las intensidades de campo eléctrico y magnético permanecen nuevamente perpendiculares entre sí y están acopladas por medio de la impedancia de onda del medio.

En la fig. (10.2) se indican las líneas de campo en un plano transversal $z=\text{cte}$, para una línea de transmisión de conductores paralelos cilíndricos. Como en el caso análogo de la guía de onda idealizada (ver fig. 9.2), existe también aquí una densidad de corriente superficial, esto se debe al salto de la componente tangencial de \vec{H} en la superficie de separación. Esta densidad tiene dirección contraria en los trozos de línea opuestos y su fase es una función del tiempo y de la posición, específicamente de la coordenada z . En la línea fluye pues, una corriente AC con una fase dependiente de la posición. En el medio se tiene una densidad de corriente de desplazamiento transversal a los conductores (comparar con la fig. 9.2).

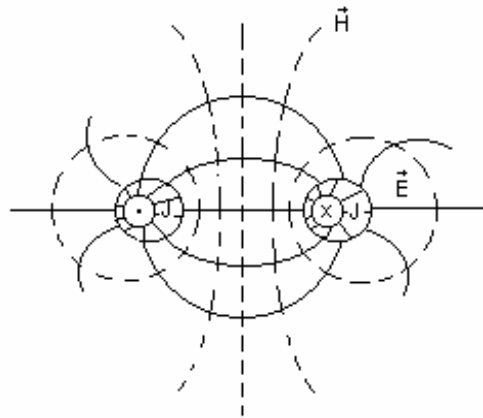


Fig. 10.2 Onda TEM en una línea de transmisión de conductores paralelos.

En una línea de transmisión real, que posee pérdidas con una conductividad específica $\sigma c < \infty$, aparece en lugar de la densidad de corriente superficial \vec{J}_s , una densidad de corriente espacial \vec{J} con una profundidad de penetración dependiente de la frecuencia y de la conductividad. Una corriente AC está relacionada siempre con una onda que está acoplada a lo largo con la línea de transmisión de conductores paralelos y viceversa, es decir una onda electromagnética que viaja a lo largo de la línea está relacionada con una corriente AC de alta frecuencia que se alimenta a la línea.

Debido a las pérdidas en la línea, la onda no es nunca más del tipo TEM, sino que tiene una componente longitudinal de la intensidad de campo eléctrico, pues en la superficie de separación E_t debe ser continua.

Finalmente, si también el medio posee pérdidas, esto es $\sigma_M \neq 0$, la corriente transversal entre los conductores a más de la corriente de desplazamiento posee también una corriente de conducción. Resumiendo, comprobamos lo siguiente:

En los planos $z = \text{cte}$ se presentan campos cuasiestacionarios. Un campo de onda existe únicamente en dependencia de la coordenada z . Para:

$$\Delta z \ll 2\pi / k \quad \text{ó} \quad \Delta z / \lambda \ll 1 \quad (10.9)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

120

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Los cambios de fase de los campos de onda son despreciables.

En trozos de línea, cuya longitud es pequeña en comparación con la longitud de onda, debe ser posible, pues, considerar al campo total como cuasi-estacionario, y precisamente en el medio como capacitivo y en el conductor como inductivo.

Entonces podríamos ahí, por medio de variables integrales de corriente i y de voltaje v , obtener las ecuaciones necesarias. Las ecuaciones que relacionan estas variables integrales, se denominan ecuaciones de una línea de transmisión. Ellas pueden representarse por medio de circuitos equivalentes los cuales consisten de una capacidad, una inductancia y de resistencias para las pérdidas óhmicas de la línea y del medio.

10.2 LA PRIMERA ECUACION DE LA LINEA

Consideremos un pedazo (trozo) de una línea de transmisión de longitud $\Delta z \ll \lambda$ y supongamos aquí también conductores ideales ($\sigma_c \rightarrow \infty$), para un medio que posee pérdidas ($\sigma_M > 0$).

Para obtener la primera ecuación de la línea, apliquemos la ecuación integral de Maxwell:

$$\oint_{(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{S} \quad (10.10)$$

en el entorno cerrado (s) a lo largo de una línea de campo magnético en un plano $z = z_0$ (ver fig. 10.3). En el conductor es $\dot{\vec{D}} \ll \vec{J}$, y en el medio se tienen las líneas de campo de la densidad de corriente de desplazamiento en el plano y ahí están, como la intensidad de campo eléctrico, perpendiculares a la intensidad de campo magnético.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

121

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

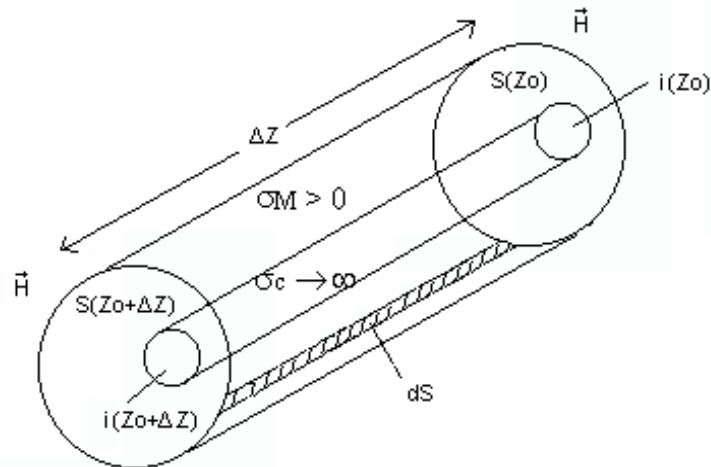


Fig. 10.3 Obtención de la primera ecuación de una línea de transmisión.

Considerando la integral de línea en el entorno (s) para la superficie $s(z_0)$ del plano $z = z_0$, tenemos:

$$\oint_{(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i(z_0) \quad (10.11)$$

En el mismo entorno podríamos considerar también una cubierta cilíndrica de longitud Δz que se cierra por medio de la superficie $s(z_0 + \Delta z)$ del plano $z = z_0 + \Delta z$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_{cubierta} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{cubierta} \vec{J} \cdot d\vec{s} + i(z_0 + \Delta z) \\ &= \dot{q} + i_M + i(z_0 + \Delta z) \end{aligned} \quad (10.12)$$

siendo \dot{q} la carga en el pedazo de conductor e i_M la corriente transversal a través del medio. Las ecuaciones (10.11) y (10.12) son iguales.

$$i(z_0) = \dot{q} + i_M + i(z_0 + \Delta z)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

122

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Desarrollando $i(z_0 + \Delta z)$ en series de Taylor tenemos:

$$i(z_0 + \Delta z) = \dot{q} + i_M + i(z_0) + \Delta z \frac{\partial i(z_0)}{\partial z} + \dots$$

$$\frac{\partial i(z_0)}{\partial z} = \frac{\dot{q}}{\Delta z} + \frac{i_M}{\Delta z} \rightarrow - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial i(z_0)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\dot{q}}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{i_M}{\Delta z}$$

Es decir: $-\frac{\partial i}{\partial z} = \dot{q} + i_M$ (10.13)

Con:

$$\dot{q} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\dot{q}}{\Delta z} \quad (10.14)$$

Que es la corriente de carga por unidad de longitud de la línea debido a las variaciones de carga en la línea y:

$$i_M' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{i_M}{\Delta z} \quad (10.15)$$

que es la corriente de pérdidas por unidad de longitud de la línea debida a la conductividad del medio. La pérdida diferencial de corriente en la línea es igual a la suma de las corrientes de carga y de pérdidas que fluye en el dieléctrico.

Debido al carácter cuasi-estacionario del campo en el medio se tiene que en el plano $z = \text{cte}$, una integral de línea arbitraria de la intensidad de campo eléctrico entre los dos conductores es:

$$v = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

123

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Y con ello en el caso estacionario (pasando al dominio de la frecuencia):

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = \dot{q} + i_M \quad (10.16)$$

$\dot{q} = C'v$ y $i_M = G'v$ y dependencia armónica

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = j\omega \cdot \dot{q} + i_M = j\omega \cdot C'v + G'v$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = (j\omega \cdot C' + G')v$$

Esta es la primera ecuación de una línea de transmisión; en donde C' y G' son la capacidad y la conductancia por unidad de longitud.

10.13 LA SEGUNDA ECUACION DE LA LINEA

Para obtener la segunda ecuación de la línea apliquemos la ecuación integral de Maxwell:

$$\oint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{s} \quad (10.17)$$

a un camino cerrado, el cual está conformado por los caminos Δz en la superficie de los conductores, a lo largo de los hilos de corriente, (ver fig. 10.4) y por los caminos a lo largo de las líneas de la intensidad de campo eléctrico en los planos $z = z_0$ y $z = z_0 + \Delta z$

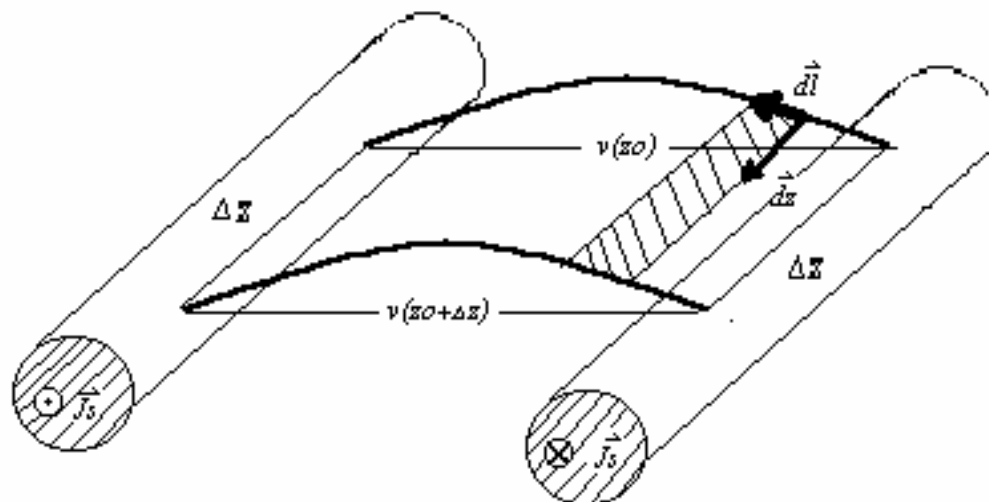


Fig.10.4 Obtención de la segunda ecuación de la línea

En el lado derecho de esta ecuación de Maxwell está la variación temporal del flujo total ϕ , el cual está relacionado con el hilo de corriente de la línea de transmisión, el cual se utiliza como camino de integración. Nosotros queremos demostrar a continuación que este flujo total es igual al flujo concatenado

$$\psi = \frac{1}{i} \int \phi \, di \quad (10.18)$$

el cual se define como el valor promedio del flujo de todos los hilos de corriente del conductor. Dado que suponemos que los conductores son ideales ($\sigma_c \rightarrow \infty$), la corriente se distribuye únicamente en la superficie exterior del conductor; de tal forma que la integración en (10.18) se ejecuta en hilos de corriente que están en la superficie externa. Para un corrimiento del camino Δz en la superficie exterior del conductor desde un hilo de corriente al próximo, debido a la condición de frontera $H_n = 0$, no se cortan hilos del campo magnético. Los otros dos caminos al moverse en los planos $z = \text{cte.}$ igualmente no cortan hilos de campo magnético, pues ellos son los mismos en estos planos. El flujo es

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

125

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

para todas los hilos de corriente el mismo y con ello el flujo concatenado es igual al flujo total.

$$\oint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10.19)$$

A la integral de contorno del lado izquierdo solamente contribuyen los caminos en los planos $z = z_0$ y $z = z_0 + \Delta z$, pues en un conductor ideal $E = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= v(z_0 + \Delta z) - v(z_0) \approx v(z_0) + \Delta z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_0} - v(z_0) \\ &\approx \Delta z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_0} \end{aligned}$$

$$\text{Es decir:} \quad - \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_0} \approx \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Psi}{\Delta z}$$

$$- \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (10.20)$$

Siendo:

$$\Psi' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Psi}{\Delta z} \quad (10.21)$$

el flujo magnético por unidad de longitud de la línea de transmisión. La pérdida de voltaje diferencial (caída de voltaje) de la línea es igual al incremento temporal del flujo magnético.

Debido al carácter cuasi-estacionario del campo en el trozo de la línea considerado se tiene:

$$\Psi = L_a i$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

126

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

y con ello en el caso estacionario (dominio de la frecuencia)

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = j\omega L_a' i \quad (10.22)$$

que es la segunda ecuación de una línea de transmisión con conductores ideales. L_a' es la inductancia externa por unidad de longitud de la línea.

10.4 ECUACIONES DE UNA LINEA DE TRANSMISION CON CONDUCTORES REALES Y SUS SOLUCIONES

En una línea de transmisión real ($\sigma_c < \infty$) con la impedancia compleja $Z = R + j\omega L_i$ (L_i = inductancia interna), tenemos que considerar todavía la contribución de voltaje $Z i$ del camino Δz izquierdo de la ecuación (10.19) para obtener la segunda ecuación de la línea. Con la inductancia total por unidad de longitud $L' = L_a' + L_i$, obtenemos:

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = (R' + j\omega L_i' + j\omega L_a') i$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial z} &= (R' + j\omega L') i \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= (G' + j\omega C') v \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Estas son las ecuaciones de una línea de transmisión con conductores reales. Para el pedazo de línea de longitud Δz obtenemos el circuito equivalente de la fig. (10.5):

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

127

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

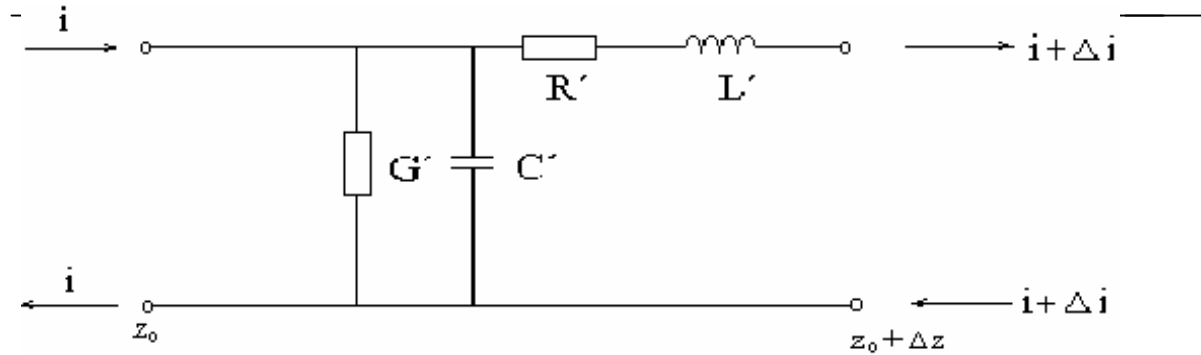


Fig. 10.5 Circuito equivalente de un pedazo de línea de transmisión de longitud $\Delta z \ll \lambda$

Para simular una línea de transmisión larga debemos utilizar en cascada, pedazos cortos de línea o el circuito equivalente de la fig. (10.5). Convenientemente la mayoría de circuitos equivalentes son cuádrupolos simétricos. Estos son el circuito T, en el cual los componentes longitudinales aparecen la mitad en la entrada y la otra mitad en la salida, y el circuito Π , en el cual los componentes transversales aparecen la mitad en la entrada y la otra mitad en la salida.

Derivando una vez más con respecto a z , la primera ecuación de la línea e introduciendo la segunda obtenemos la ecuación de onda de la línea:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = (R' + j\omega L') i \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (R' + j\omega L') \frac{\partial i}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C)v \quad (10.24)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

128

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Para la corriente se tiene la misma ecuación de onda.

La variable compleja en (10.24):

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (10.25)$$

$$= \alpha + j\beta$$

se denomina constante de propagación, su parte real α y su parte imaginaria β se denominan constante de atenuación y constante de fase, respectivamente. La constante de propagación γ juega el mismo rol en las variables integrales v e i que el número de onda complejo k para las variables de campo \vec{E} y \vec{H} , pero las partes real e imaginaria están intercambiadas. En la posición de $-\gamma^2$ en la ecuación de onda (10.24) aparece específicamente $+k^2$ en la ecuación de onda correspondiente (7.4).

Como soluciones a la ecuación de onda (10.24) obtenemos ondas de voltaje, las que se propagan en la línea en el sentido positivo o negativo de z . Nuevamente nos limitaremos a una propagación en el sentido positivo de z . Entonces se tiene:

$$v = v_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (10.26)$$

Como velocidad de fase obtenemos:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (10.27)$$

La relación entre voltaje y corriente es dada por medio de la impedancia de la línea de transmisión. Para lo cual, partiendo de las ecuaciones de la línea (10.23), se tiene:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

129

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$v = v_o \cdot e^{j(\omega \cdot t - \gamma z)}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = (R' + j\omega L')i \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial v_o e^{j(\omega \cdot t - \gamma z)}}{\partial z} = (R' + j\omega L')i$$

$$\gamma v = (R' + j\omega L')i$$

$$\frac{v}{i} = \frac{(R' + j\omega L')}{\gamma} = \frac{(R' + j\omega L')}{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}}}$$

$$\frac{v}{i} = Z_o = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (10.28)$$

Para una línea de transmisión sin pérdidas es $R' = 0$ y $G' = 0$ y se tiene que:

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' C'}$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (10.29)$$

La línea de transmisión sin pérdidas no presenta prácticamente dispersión, pues L' y C' son casi independientes de la frecuencia. En la línea de transmisión que posee pérdidas en cambio la velocidad de fase es dependiente de la frecuencia. Entonces obtenemos para la velocidad de grupo:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

130

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$v_G = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (10.30)$$

Cuando la velocidad de grupo es dependiente de la frecuencia, lo que casi siempre se encuentra, las señales de un gran ancho de banda experimentan retardos de tiempo de propagación en la línea.

11. POTENCIALES ELECTRODINAMICOS

Hasta aquí nos hemos ocupado únicamente de la propagación de ondas electromagnéticas. En este capítulo y en el próximo nos ocuparemos de su generación.

La solución general de las ecuaciones de Maxwell, en presencia de distribuciones arbitrarias de carga en alta frecuencia o de corriente como causa de ondas electromagnéticas se logra por medio de la introducción de Potenciales electromagnéticos. De ellos nos ocuparemos en este capítulo.

11.1 DEFINICION Y AJUSTE DE POTENCIALES

Partimos de las ecuaciones de Maxwell totales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = - \dot{\vec{B}} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (11.1)$$

La densidad de carga ρ y la densidad de corriente \vec{J} las trataremos como alimentación externa, es decir como fuentes dadas del campo. Nos limitaremos a un medio no conductor ilimitado externo a la fuente de corriente, de tal manera que la densidad de corriente proporcionada es:

$$\vec{J} = - \vec{J}_{eq}$$

En un medio conductor con $\sigma \neq 0$ se añade aditivamente el término $\sigma \vec{E}$ (ver ec.1.17).

Como se hace con campos inductivos, podemos también aquí satisfacer en forma idéntica la última y la primera ecuación de Maxwell por medio de:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

132

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \dot{\vec{A}} \quad (11.2)$$

Las definiciones del potencial escalar eléctrico V y del potencial vectorial magnético \vec{A} coinciden pues con las de los campos de variación lenta.

También aquí se tiene que las definiciones de los potenciales (11.2) todavía no son únicas, pues las variables de campo son invariantes respecto a las transformaciones:

$$\left. \begin{aligned} V &= V' - \dot{F} \\ \vec{A} &= \vec{A}' + \text{grad } F \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Siendo F nuevamente una función de ajuste arbitraria derivable dos veces. Escogeremos F de tal manera que desaparezca una posible combinación lineal de V y \vec{A} . Entonces podemos de esta condición adicional de acoplamiento entre los dos potenciales regresar del un potencial al otro y con ello alcanzar un desacoplamiento de las ecuaciones de potencial.

Respetando el carácter de la transformación (carácter escalar o vectorial), y las dimensiones de V y \vec{A} , podemos construir las cuatro combinaciones lineales siguientes:

$$\dot{\vec{A}} \pm \text{grad } V = 0 \quad (11.4)$$

$$\text{div } \vec{A} \pm \epsilon\mu \cdot \dot{V} = 0 \quad (11.5)$$

Las dos primeras son sin embargo excluyentes, pues en general no son compatibles con las ecuaciones de Maxwell. Con el signo positivo en (11.4) específicamente se tiene:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

133

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\vec{E} = -(\text{grad}V + \dot{\vec{A}}) = 0$$

Y con el signo negativo se tiene:

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \dot{\vec{A}} = -\text{rot} \text{grad} V = 0$$

Las ecuaciones (11.5) en cambio son compatibles siempre con las ecuaciones de campo, pues ahí se ha hecho únicamente una consideración sobre los torbellinos del potencial vectorial y sobre las fuentes de \vec{A} puede disponerse libremente. Para indicar explícitamente la compatibilidad de las ecuaciones (11.5) con las ecuaciones de Maxwell (11.1), supongamos que el par de potenciales V' , \vec{A}' no satisfacen la condición (11.5); o sea:

$$\text{div} \vec{A}' \pm \varepsilon \mu \dot{V}' \neq 0$$

Entonces de (11.3) y de (11.5) se tiene:

$$\text{div} \vec{A} = \text{div}(\vec{A}' + \text{grad} F) \rightarrow \mp \varepsilon \mu \dot{V} = \text{div}(\vec{A}' + \text{grad} F)$$

$$\mp \varepsilon \mu \dot{V} = \text{div} \vec{A}' + \nabla^2 F \rightarrow \text{div} \vec{A}' + \nabla^2 F \pm \varepsilon \mu \dot{V} = 0$$

$$\text{div} \vec{A}' + \nabla^2 F \pm \varepsilon \mu (\dot{V}' - \ddot{F}) = 0$$

$$\text{div} \vec{A}' + \nabla^2 F \pm \varepsilon \mu \dot{V}' \mp \varepsilon \mu \ddot{F} = 0$$

$$\nabla^2 F \mp \varepsilon \mu \ddot{F} = -(\text{div} \vec{A}' \pm \varepsilon \mu \dot{V}') \quad (11.6)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

134

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Para potenciales desajustados V' , \vec{A}' obtenemos la función de ajuste como solución de una ecuación de onda no homogénea. Es usual utilizar la ecuación de ajuste con el signo positivo.

$$\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \dot{V} = 0 \quad (11.7)$$

y se la denomina Ajuste de Lorentz. Ella contiene el ajuste de Coulomb que se utiliza para campos inductivos de variación lenta como un campo especial para $\dot{V} = 0$.

11.2 ECUACIONES DE LOS POTENCIALES Y SUS SOLUCIONES

Para obtener las ecuaciones de los potenciales partamos de las ecuaciones de campo (11.1) que todavía no las utilizamos; y sus resultados son las ecuaciones (1.32) y (1.33):

$$\nabla^2 V - \varepsilon \mu \ddot{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11.8)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \ddot{\vec{A}} = -\mu \vec{J}$$

Las ecuaciones de los potenciales son ecuaciones de onda con las variables fuentes ρ y \vec{J} como no homogeneidades. Del mismo tipo es la ecuación diferencial (11.6) para la función de ajuste F .

Las soluciones de las ecuaciones de los potenciales (11.8) son (renunciaremos aquí a su comprobación a través del teorema de Green):

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dv' \quad (11.9)$$

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

135

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dv'$$

en donde $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ es la separación entre el punto donde se halla la fuente y el punto en consideración, y

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (11.11)$$

es la velocidad de fase en el medio en consideración.

A estos potenciales se los denomina como electrodinámicos o retardados, pues su efecto en el punto en consideración no aparece al mismo tiempo con su causa en el punto fuente, sino que aparece retrasado el tiempo.

$$t - t' = \frac{R}{v} \quad (11.12)$$

que es el tiempo, que necesitaban las variaciones de campo que transcurra entre el punto fuente y el punto de consideración.

Cuando $v \rightarrow \infty$ los potenciales electrodinámicos pasan a ser los potenciales estáticos o estacionarios. Como una buena aproximación esto se cumple cuando la relación R / v es muy pequeña comparada con la duración del período de un campo armónico; pudiendo tratarse a los potenciales y a los campos como cuasiestáticos o cuasiestacionarios. Para campos variantes de alta frecuencia en cambio, deben considerarse los potenciales electrodinámicos.