

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GENERADOR ANALOGICO DE LAS FUNCIONES LOGARITMO Y ANTILOGARITMO

TESIS DE GRADO

PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE

INGENIERO ELECTRONICO

DOUGLAS ERNESTO MOYA ALVAREZ

1975.

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado  
en su totalidad por el señor Douglas Ernesto Moya  
Alvarez.

Mauricio Vega V.

Ing. Mauricio Vega,  
DIRECTOR DE TESIS.

## AGRADECIMIENTO

Sinceramente este trabajo fue una aventura del pensamiento en donde con grandes dificultades se fue perfilando el desarrollo del tema, adquiriendo cada vez un nuevo matiz, ofreciendo siempre nuevas posibilidades. Desgraciadamente, por falta de un cabal conocimiento de la teoría de las ecuaciones integrales, no fue posible desarrollar la ambiciosa idea de reducir el ancho de banda sin perder la información; pero intuitivamente considero que es posible.

Mis agradecimientos más sinceros a los señores Profesores: Ing. Mauricio Vega, Director de Tesis; Ing. Herbert Jacobson, sin cuya ayuda quizás no hubiese sido posible cristalizar el trabajo; Ing. Jacinto Jijón, cuyos puntos de vista siempre fueron útiles; y, finalmente, al Sr. Dr. Bruce Hognaisen, quien me ha reafirmado en la idea de que sólo entendiendo físicamente los fenómenos se puede emprender un trabajo evitando perderse en el lenguaje abstracto del simbolismo matemático, sin desecharlo, sino utilizándolo para interpretar al mundo.

DEDICATORIA

Con todo cariño a mi esposa,  
a mis hijas Cristina y Mirca  
lla, a mi madre y a mi herma  
na.

\*\*\*\*\*

# I N D I C E

	<u>Página</u>
PROLOGO	
CAPITULO I:	
Introducción.....	1
CAPITULO II:	
Método de técnica de pulsos y sistemas lineales...	3
2.1. Logaritmo.....	3
2.2. Antilogaritmo.....	14
CAPITULO III:	
Elementos de curva de transferencia exponencial...	28
3.1. Introducción.....	28
3.2. Conducción eléctrica en una red cristalina...	28
3.2.1. Electrón libre.....	28
3.2.2. Densidad de estados.....	39
3.2.3. Efecto de la temperatura, distribución estadística de Fermi Dirac.....	43
3.2.4. Conducción eléctrica.....	48
3.2.5. Electrón en un potencial periódico....	53
3.2.6. Solución aproximada en la zona límite	61
3.2.7. Bandas de energía.....	66
3.3. Conductores y aislantes.....	68
3.4. Electrones, huecos y órbitas en el espacio K	70
3.5. Teoría de semiconductores.....	81
3.5.1. Introducción.....	81
3.5.2. Semiconductores de impureza.....	83
3.5.3. Concentración de portadores en semiconductores.....	85
3.5.4. Electrónica de semiconductores.....	90
3.5.5. Ecuación de transporte de Boltzmann...	94
3.5.6. Recombinación de pares electrón-hueco'	100
3.5.7. Ecuación de difusión.....	101
3.6.1. Diodos de unión pn.....	103
3.6.2. Distribución de portadores, Niveles de Fermi y cuasi Niveles de Fermi en la región espacial.....	109
3.6.3. Flujo de corriente en la unión pn.....	112
Efecto de recombinación en la zona de-sértica.....	117
3.7.1. Transistores bipolares.....	122
3.7.2. Flujo de corriente en transistores y las ecuaciones de Ebers-Moll.....	122

CAPITULO IV:

Generador logarítmico usando diodos semiconductores	129
4.1. Introducción.....	129
4.2. Principios generales del generador logarítmico con diodos.....	129
4.3.1. Amplificadores logarítmicos con diodos.....	135
4.3.2. Generador antilogarítmico usando diodos.....	137
4.3.2. Limitaciones de este tipo de circuitos.....	143

CAPITULO V:

Generador analógico logarítmico usando transistores.....	145
5.1. Generalidades.....	145
5.2. Problemas de confiabilidad en la apreciación de logarítmico.....	151
5.3. Problemas de inestabilidad en amplificadores logarítmicos con transistores.....	154
5.4. Amplificadores logarítmicos con compensación de temperatura .....	170
5.5. Otros errores que se introducen en este tipo de circuitos.....	172

CAPITULO VI:

Aplicación de los generadores exponenciales....	176
6.1. Introducción.....	176
6.2. Multiplicador y divisor de señales.....	176
6.2.1. Módulo.....	179
6.2.2. Detector de signo.....	180
6.2.3. Ley de Signos.....	181
6.2.4. Sistema de restitución de signo....	193
6.3. Generador de funciones.....	196
6.4. Grafizador de respuesta de frecuencia.....	200

CAPITULO VII:

Diseño y construcción de un amplificador logarítmico.....	208
---	-----

	<u>Página</u>
7.1. Introducción.....	208
7.2. Diseño de un amplificador logarítmico....	209
7.3. Diseño de un amplificador antilogarítmico	218
7.4. Fuentes de alimentación y fuentes de vol- taje de referencia.....	221
CAPITULO VIII	
Resultados experimentales y conclusiones.....	233
BIBLIOGRAFIA .....	244

## P R O L O G O

El problema de la ciencia es epistemológico. La respuesta frente a él es la objetividad, es decir el partir de la definición de que existen seres en el Universo y que su existencialidad es independiente de nuestro pensamiento. Pensamiento y objeto son dos manifestaciones cualitativamente distintas, pero para que el pensamiento sea científico debe necesariamente estar condicionado a la realidad, a lo existencial en su contenido y desarrollo. Por lo tanto, toda concepción científica es materialista y es la síntesis dialéctica entre el objeto y el sujeto, lo cual implica que no ha existido un pensamiento anterior a las cosas y que fue necesario que aparezca el hombre para que en determinado momento del desarrollo social se plantee como problema la objetividad de los conceptos, se preocupe si es que las palabras definen realmente las cosas.

De allí que la ciencia es un producto humano, condicionado al hombre y a la sociedad. Al igual que todas las disciplinas como el arte, la filosofía, la ciencia es una parte de la vida espiritual humana. Es por ello que la ciencia es humanizante y es el producto más alto del pensamiento.

Pero todo lo que aparece ante nuestra vista dentro del actual contexto, simula desmentir lo que aquí se afirma, y es porque la ciencia al igual que muchas otras disciplinas del espíritu, es desarrollada con una intencionalidad de clase, como una arma muy efectiva para que una clase social ex--



plote a otra y para que este tipo de relaciones en lo posible se perennicen en el tiempo. Por ello no es raro oír que la ciencia es culpable de todos los males de la humanidad: la polución ambiental, nuevas armas para la guerra, la bomba termonuclear. Se dice que la ciencia es deshumanizante, que mecaniza al hombre, que destruye cualidades espirituales distintas de la inteligencia. Esa es la reacción desesperada de quienes viendo y viviendo las contradicciones sociales no se ubican, no objetivizan las causas que las producen. Culpan a la pista la y no al asesino. Es la reacción de quienes no quieren o no pueden plantearse el conocimiento objetivo, científico, de las leyes sociales que rigen las relaciones de los hombres como producto de determinadas relaciones materiales que se establecen entre ellos. Marx desarrolló esta idea con gran rigurosidad y radiografió el capitalismo independientemente de cualquier posición subjetivista. Su rigurosidad científica en el análisis, el método y la síntesis levantan los pilares de la nueva sociedad a la que hay que alcanzar mediante la resolución de las contradicciones de las dos clases en enfrentamiento irreconciliable.

Los problemas actuales de la humanidad no se deben a la ciencia, sino son consecuencia de la propia dinámica de la actual sociedad que es la deshumanizante.

La ciencia como la más alta expresión de la racionalidad humana, está en contradicción con la sociedad actual; es por ello que es un elemento liberizador, revolucionario. Hay que combatir la imagen alienante que de ella presenta el sistema y volver a redeintificarla como la herramienta más poderosa de la libertad del hombre.



condensador o una bobina, es siempre de tipo exponencial. El método b) utiliza como elementos de transferencia de tipo exponencial a diodos y transistores. En el c) lo que se hace es diseñar un amplificador de ganancia que varíe en forma aproximadamente exponencial, lo que se logra utilizando resistencias y diodos en serie, de modo que se aprovechan las características de conmutación de los diodos para conectar o desconectar las resistencias que determinan la ganancia del circuito.

En el presente trabajo se analizará exhaustivamente los métodos a) y b). El c) se obviará porque a todas luces presentará siempre un elevado nivel de distorsión.

## CAPITULO II

### METODO DE TECNICA DE PULSOS Y SISTEMAS LINEALES

El tratamiento que hay que dar a la señal puede resumirse como sigue: se muestra a la señal de modo que a cada punto le hacemos corresponder unicamente un pulso cuyo ancho es una función lineal del logaritmo o del antilogaritmo del valor de la función en ese punto, obtenidos esos pulsos basta tomar el valor medio de todos los pulsos para obtener señales que varían linealmente con estas funciones exponenciales. Para objetivar mejor el método, vamos a tratar el problema de sacar logaritmo y antilogaritmo en forma separada.

#### 2.1. LOGARITMO.

Supongamos un circuito sencillo como el de la Fig. (2.1.1), el cual está formado por una resistencia y un condensador conectados en serie como un filtro pasa altos.

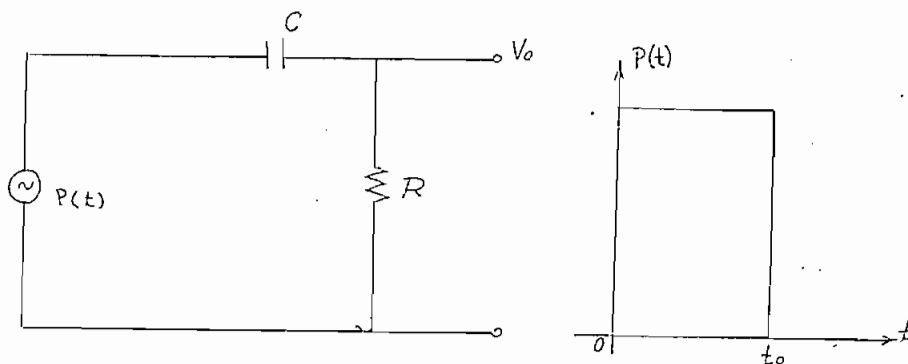


Fig. (2.1.1.) circuito pasa altos RC y el pulso de voltaje de la fuente.

Excitamos al circuito con una fuente de voltaje que genere un pulso rectangular y averiguamos en estas condiciones cuál va a ser el voltaje a la salida.

El pulso adopta la forma:

$$p(t) = V [\mu(t) - \mu(t-t_0)]$$

Por otro lado la ecuación de malla establece que:

$$p(t) = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Si la carga inicial del condensador es cero, tomando la transformada de Laplace a la ecuación anterior tenemos que:

$$P(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{CS}$$

Pero  $V_0(s) = RI(s)$

y como la transformada de Laplace del pulso es:

$$P(s) = V \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} \right]$$

Lo que nos lleva a concluir que

$$V_0(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} \mu(t) - V e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \mu(t-t_0)$$

Gráficamente el voltaje en la resistencia R y su variación en el tiempo se expresa como en la Fig. (2.1.2.)

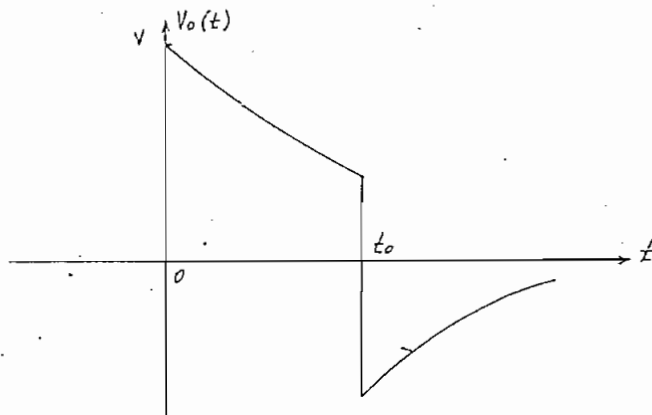


Fig. (2.1.2.) Variación en el tiempo del voltaje de salida de un circuito RC pasa altos.

Ahora bien, si consideramos que el circuito se ha modificado como en la Fig. (2.1.3.), sólo veremos a la salida el pulso positivo, ya que el sistema de diodos recorta el pulso negativo. Así nos vemos obligados a definir un nuevo voltaje de salida al que llamaremos  $V_1(t)$  y que adoptará la forma:

$$V_1(t) = e^{-\frac{t}{RC}} [\mu(t) - \mu(t-t_0)] V$$

Definimos ahora  $0 \leq a(t) \leq t-t_0$

entonces podemos escribir:  $V_1(t) = V e^{-\frac{a(t)}{RC}}$

$$t' = a(t)$$

despejando a  $t$  veremos que  $a(t) = -RC \ln \frac{V_1[a(t)]}{V}$  (2.1.1.)

Así para nuestro efecto podríamos sacar logaritmo de  $V_1[a(t)]$  en el punto  $a(t)$  si fuese posible, de algún modo, hacer un pulso de ancho  $a(t)$ , de magnitud cualquiera  $V$  y de pe-

ríodo T fijo. El valor medio de este pulso estará dado por:

$$\bar{V} = - \frac{RC}{T} V \log \frac{V_1 [a(t)]}{V} \quad (2.1.2)$$

Tomemos el mismo circuito de la Fig. (2.1.3) y conectemos a la entrada una fuente de pulsos rectangulares. Plantado así el problema encontremos el voltaje de salida  $V_1$ . Matemáticamente el pulso adopta la forma:

$$P(t) = V \sum_{n=0}^m \mu(t - n\tau) - \mu[t - (n\tau + t_0)]$$

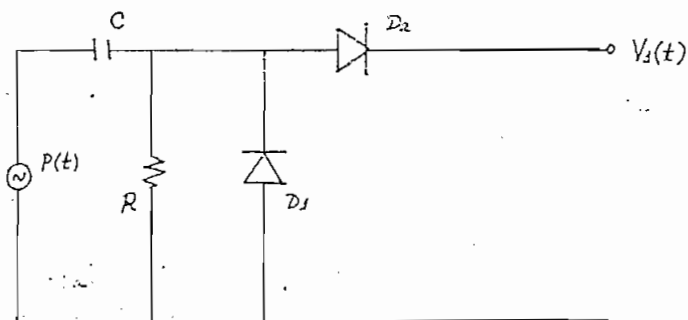


Fig. (2.1.3). Circuito filtro pasa altos rectificador de media onda.

Haciendo un análisis similar al que se empleó anteriormente, tenemos que si no existieran diodos:

$$V_o(t) = V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{t-n\tau}{RC}} \mu(t-n\tau) - e^{-\frac{t-(n\tau+t_0)}{RC}} \mu[t-(n\tau+t_0)]$$

-y con los diodos adoptará la forma:

$$V_1(t) = V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{t-n\tau}{RC}} \{ \mu(t-n\tau) - \mu(t-[n\tau+t_0]) \}$$

Este resultado se expone gráficamente en la Fig. (2.1.4.).

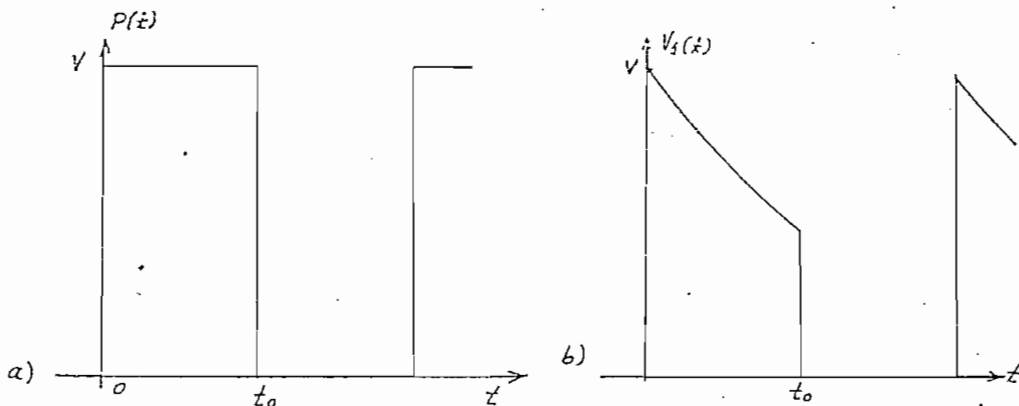


Fig. (2.1.4.) (a) Tren de pulsos rectangulares de ancho  $t_0$  y amplitud  $V$  conectados a la entrada del circuito de la Fig. 2.3.

Fig. (2.1.4.) (b) Respuesta del circuito al tren de pulsos rectangulares.



Ahora bien, como son pulsos periódicos a cualquier tiempo  $t = a(t) + n\tau$ , definimos el mismo  $V_1(t)$  como veremos en la Fig. (2.1.5). Si pudieramos realizar un tren de pulsos de ancho  $a(t)$ , de magnitud cualesquiera y de período  $T$  fijo, entonces estamos autorizados a decir que el valor medio de la señal estará dado por la ecuación (2-1-2). En todo caso, suponiendo que  $V_1$  varía con el tiempo mucho más lentamente que el tren de pulsos exponenciales, los pulsos de ancho  $a(t)$  deberán variar en su espesor y en consecuencia su valor medio según la ecuación (2-1-2).

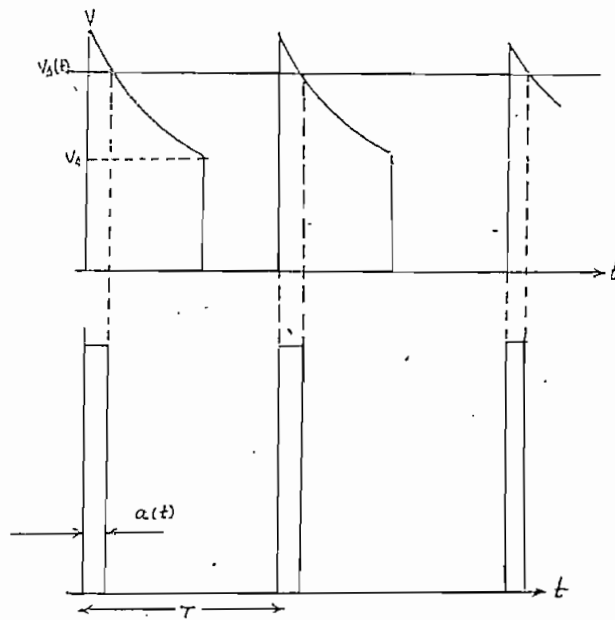


Fig. (2.1.5). Cómo se deben definir los pulsos de ancho  $a(t)$

Los pulsos de ancho variable se pueden obtener mediante un comparador o un detector de cero, el cual tiene una curva de transferencia de voltaje de entrada a voltaje de salida como se indica en la Fig. (2.1.6). En un comparador existen dos en-

tradas y una salida. En cada entrada se conectan dos voltajes:  $e_1$  y  $e_2$ . Cuando  $e_1 - e_2 > 0$  si la señal de salida es mayor que cero  $e_o > 0$ , entonces se define al terminal de entrada  $e_1$  como positivo. Cuando  $e_1 - e_2 < 0$  y  $e_o < 0$ , entonces decimos que el terminal de entrada de  $e_1$  es negador, inversor o negativo. Este tipo de conducta se puede obtener gracias a un amplificador operacional conectando a la entrada positiva  $e_1$  y a la negativa a  $e_2$ .

Ahora manifestemos que  $e_1$  es el tren de pulsos exponenciales y  $e_2 = V_1(t)$ , entonces a la salida del comparador tendremos el tren de pulsos deseado, pero con un valor medio de cero, ya que el comparador alcanzará alternativamente voltajes positivos y negativos de igual magnitud. Si rectificamos la salida dejando pasar solamente la señal positiva y a esa señal le hacemos pasar por un filtro pasa bajos, tendremos el resultado esperado.

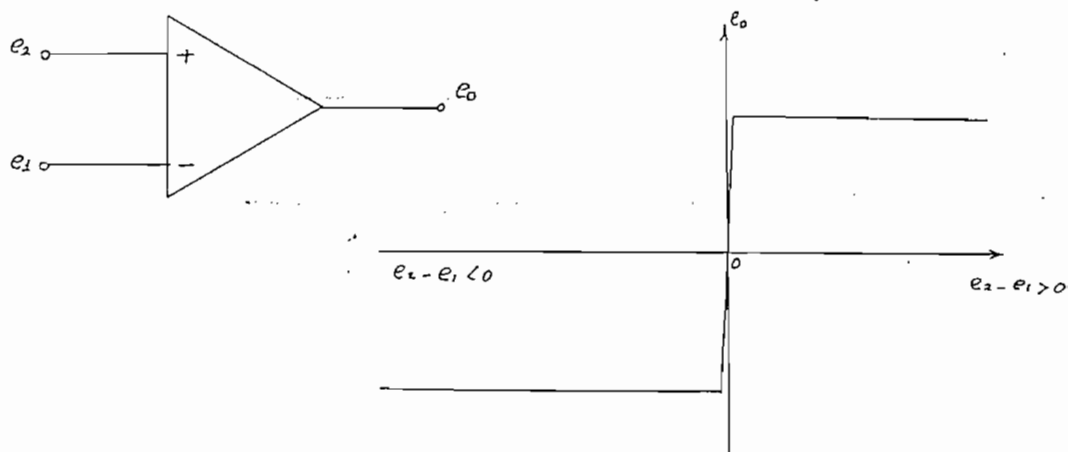


Fig. (2.1.6.) Circuito comparador y su curva de transferencia.

Se presentan ahora los siguientes problemas:

a) No podemos obtener el logaritmo de la señal cuando

$0 \leq V_1(t) \leq V_A$  donde  $V_A$  es el menor voltaje que sigue la exponencial de descarga del condensador, como se indica en la Fig. (2.1.5), entonces en este caso obtendremos a la salida del comparador un tren de pulsos de ancho  $t_0$  y cuyo valor medio dentro de este rango de  $V_1$  será:

$$\bar{V} = \frac{V_2 t_0}{T}$$

que es constante en el tiempo.

b) No podemos sacar el logaritmo de la señal cuando  $\infty > V_3(t) \geq V$  (ver Fig. 2.1.5), pues a la salida del comparador tendremos un voltaje de  $-V_2$ , y debido al rectificador, a la salida del filtro tendremos un voltaje de cero. Si  $V = 10 V_A$  habremos sacado el logaritmo de apenas una década.

Las dificultades expuestas en los dos puntos anteriores a) y b) quedan superadas al sacar logaritmo de más décadas. Para ello podríamos usar el circuito de la Fig. (2.1.7).

Aquí hemos representado todo el sistema incluido el generador del tren de pulsos exponenciales. Demostraremos a continuación que por cada amplificador y comparador que aumentemos podemos sacar el logaritmo de una década más.

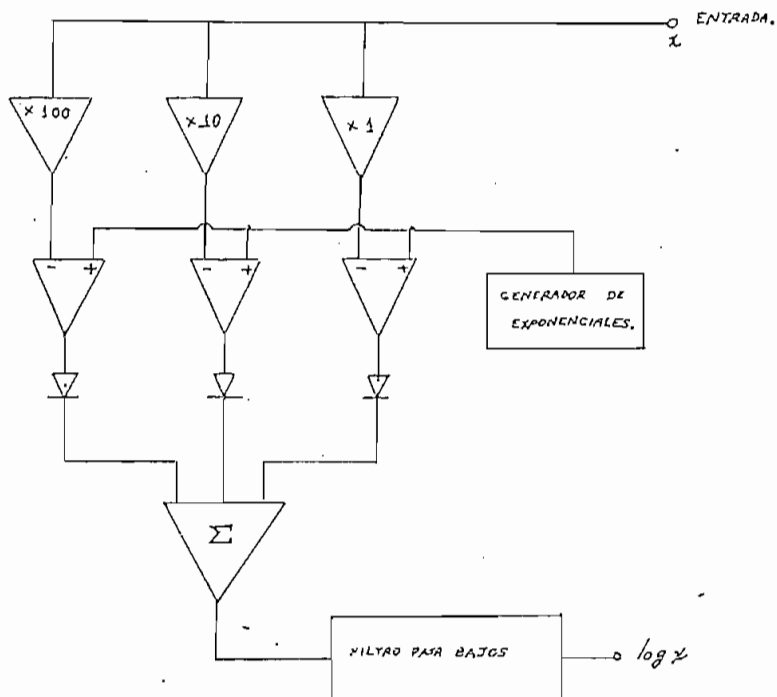


Fig. (2.1.7.) Circuito para sacar 3 décadas.

Supongamos primero que la señal está comprendida en tre los límites de  $1/10V \leq V_1(t) \leq V$ , entonces por el canal 1, (ver Fig. 2.1.7.), obtendremos el logaritmo de la señal, mientras que en el canal 2 y en el 3, por estar presentes los amplificadores que multiplican la señal por 10 y por 100, respectivamente, la salida será cero.

Cuando  $V/100 \leq V_1(t) \leq V/10$  entonces por el canal 1 tendremos un tren de pulsos de espesor  $t_0$  y valor medio:

$$\overline{V_1} = \frac{V_2 t_0}{T}$$

En el canal 2 obtenemos pulsos de ancho  $a(t)$  cuyo valor medio es:

$$V_2 = - \frac{RC V_2}{T} \ln \frac{10 V_1(t)}{10 V_A}$$

En el canal tres se sigue obteniendo una salida de cero, de modo que por el efecto del sumador, en la salida del sistema se ve la señal:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

$$\bar{V} = \frac{V_2 t_0}{T} - \frac{RC}{T} V_2 \ln \frac{10 V_1(t)}{10 V_A}$$

Ahora bien, de  $V_1(t_0) = V e^{-\frac{t_0}{RC}}$

$$t_0 = - RC \ln \frac{V_1(t_0)}{V}$$

$$RC = - \frac{t_0}{\ln \frac{V_1(t_0)}{V}}$$

pero para  $t = t_0$   $V_1(t_0) = V_A$

entonces 
$$\bar{V} = \frac{V_2 t_0}{T} + \frac{V_2 t_0}{T} \ln \left[ \frac{10 V_1(t)}{10 V_A} \right] \times \frac{1}{\ln \frac{V_A}{V}}$$

y como  $V = 10 V_A$ .

$$\bar{V} = \frac{V_2 t_0}{T} - \frac{V_2 t_0}{T} \log \frac{10 V_1(t)}{V}$$

$$\bar{V} = \frac{V_2 t_0}{T} \left\{ 1 - \log \frac{10 V_1(t)}{V} \right\}$$

$$\text{ó} \quad \bar{V} = - \frac{V_2 t_0}{T} \log \frac{V_1(t)}{V}$$

que es la misma ecuación (2-1-2) para el caso  $\bar{V} = 10 \text{ VA}$  y  $V_1(t_0) = V_A$ .

Para el caso en que el nivel de la señal está comprendido entre los límites de  $1/100 \text{ VA} \leq V_1(t) \leq 1/10 \text{ VA}$  por los canales 1. y 2, salen los pulsos de ancho  $t_0$ , de modo que el valor medio total es:

$$\bar{V} = \frac{2V_2 t_0}{T} - \frac{V_2 t_0}{T} \log \frac{100 V_1(t)}{V} = - \frac{V_2 t_0}{T} \log \frac{V_1(t)}{V}$$

Hemos sacado el logaritmo de una tercera década. Como corolario podemos establecer que si queremos sacar una década más, debemos aumentar un amplificador y un comparador en el circuito. La ganancia del amplificador debe ser igual a 10 elevado a un exponente que será igual al número total de décadas que operaba el circuito antes de incrementarle el amplificador y el comparador. Si queremos trabajar con voltajes mayores a

10 Va, lo que debemos hacer es atenuar la señal por 1/10, 1/100, etc. por cada década más y el criterio a aplicarse respecto a la atenuación será igual al expuesto anteriormente.

## 2.2. ANTILOGARITMO.

Para sacar antilogaritmo el proceso que hay que dar a la señal es algo distinto, pues el planteamiento general del problema es básicamente el mismo. En ambos casos debemos obtener un pulso de ancho variable según el logaritmo de la señal. La diferencia se establece cuando a esos pulsos los pasamos por un circuito similar al de la Fig. (2.1.3.), para luego proceder a tomar su valor medio.

Supongamos que el ancho del pulso está dado por  $a(t) = K_1 - K_2 \log x$ , siendo  $x = x(t)$ ; y asumamos que la altura del pulso es  $V$  y su período  $T$ .

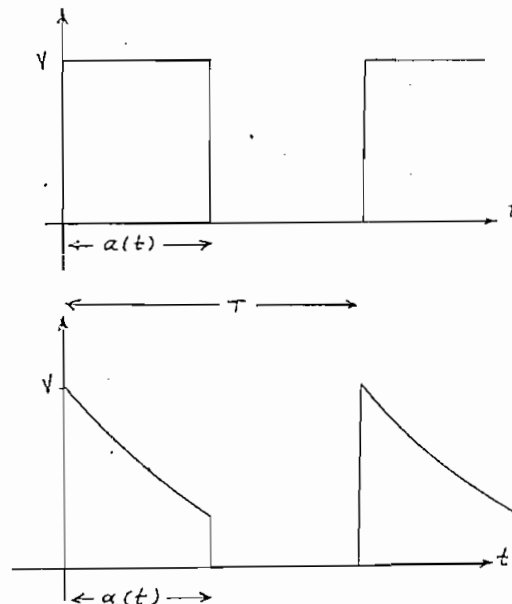


Fig.(2.2.1.) Pulsos de ancho variable y la respuesta del circuito de la Fig. (2.1.3.).

En la Fig. (2.2.1) se representan los pulsos mentados a la entrada del circuito de la Fig. (2.1.3), así como también los pulsos de salida del circuito.

El valor medio de estos pulsos de salida es:

$$\bar{V} = \int_0^{a(t)} V e^{-\frac{t}{RC}} dt = -\frac{VRC}{T} \left\{ -1 + e^{-\frac{a(t)}{RC}} \right\}$$

y como  $a(t) = k_1 - k_2 \log x$

entonces:  $\bar{V} = \frac{RCV}{T} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{k_1}{RC} + \frac{k_2}{RC} \log x \right] \right\}$

como  $\log x = a/\ln x$

entonces,

$$\bar{V} = \frac{RCV}{T} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{k_1}{RC} + \frac{k_2'}{RC} \ln x \right] \right\} \quad (2.2.1)$$

haciendo  $\frac{k_2'}{RC} = 1$  ;  $k_2' = RC$

obtenemos  $\bar{V} = \frac{VK_2}{T} - \frac{VK_2}{T} \frac{1}{\exp \frac{K_1}{RC}} e^{\ln x(t)}$

estableciendo la condición  $\frac{K_2 V}{T} \frac{1}{\exp(K_1/RC)} = 1$  (2.2.2)

$$\bar{V} = \frac{K_2 V}{T} e^{\ln x(t)} \quad (2.2.3)$$



Se nos presenta ahora el problema de obtener el pulso de ancho variable y queremos que lo haga linealmente con la magnitud de la señal. Para ello la primera idea que surge es sumar a la señal un tren de pulsos triangulares de frecuencia mucho mayor que la de la señal problema: Esa suma deberíamos hacerla pasar por un circuito comparador, de modo que a la entrada positiva le conectamos nuestra señal mientras que a la negativa conectamos un voltaje de referencia. A la salida del comparador es de esperarse que obtengamos los pulsos deseados. Estos pulsos alimentan el circuito de la Fig. (2.1.3) y a la señal resultante le tomamos el valor medio. Definidos en forma intuitiva los pasos del tratamiento de la señal podemos decir que el circuito de la Fig. (2.2.2) podría ser una posible solución.

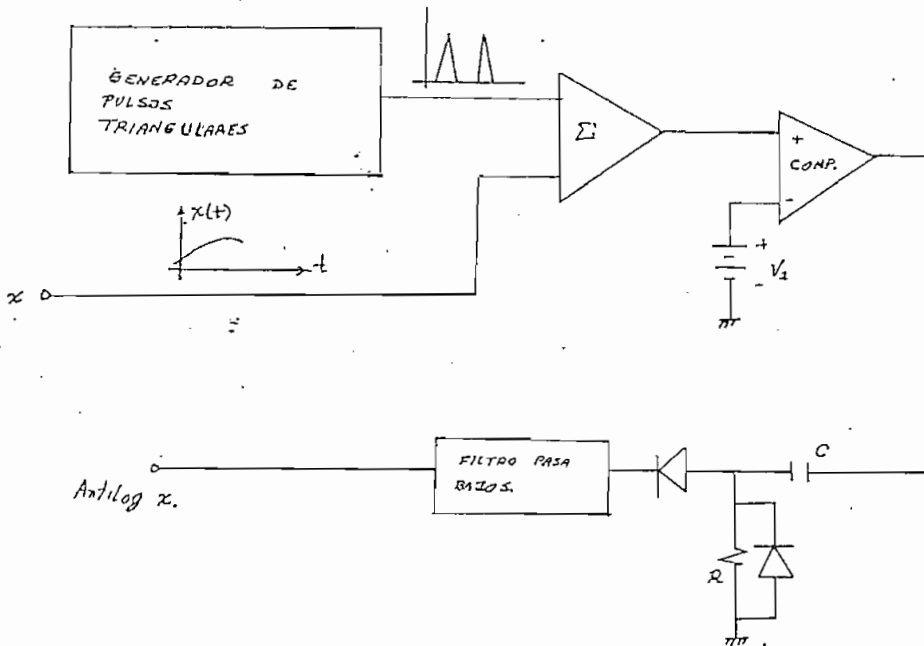


Fig. (2.2.2). Posible circuito en diagrama de bloques para sacar antilogaritmo de una señal por técnica de pulsos y sistemas lineales.

Vamos inmediatamente a realizar la descripción matemática correspondiente para ver si el diagrama de bloques de la Fig. (2.2.2.) satisface nuestros requerimientos.

Consideremos la señal triangular de la Fig. (2.2.3.). Podemos de allí plantear las correspondientes ecuaciones de cada una de las rectas que componen el tren de pulsos triangulares. Se simplifica el problema si tomamos las tres primeras como indica la Fig. (2.2.3.).

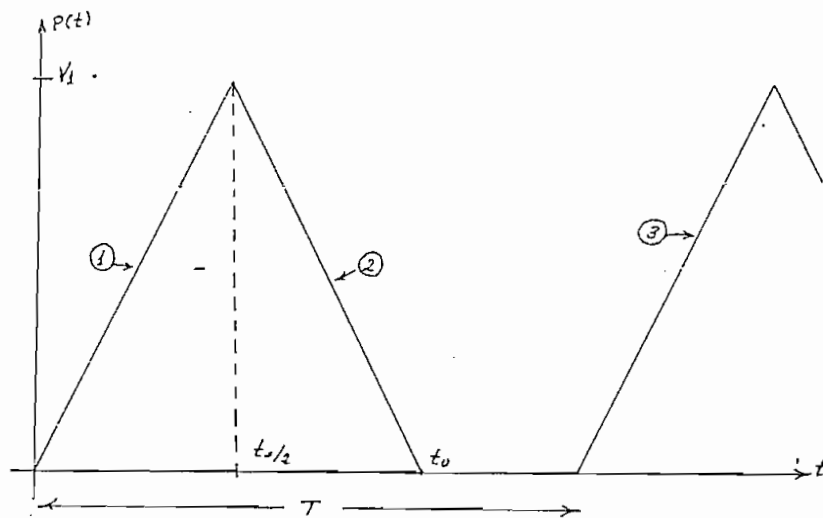


Fig. (2.2.3.) Tren de pulsos triangulares.

Sea  $V_1$  la altura de los pulsos,  $t_0$  su espesor y  $T$  su período; entonces podemos decir que:

(1)  $Y = at$

(2)  $Y = -at + b_1$

(3)  $Y = at + b_2$

Para (2)  $t = t_0, y = 0, -at_0 + b_1 = 0$

$b_1 = at_0$

Pero a  $t_0/2$   $y = V_1$ , entonces  $-at_0/2 + b_1 = V_1$

$$\text{luego } V_1 = \frac{at_0}{2}, \text{ de donde } a = 2V_1/t_0 \quad (2.2.4.)$$

para la relación (3) a  $t = T$   $y = 0$

$$aT - b_1 = 0 \quad \text{de donde } b_1 = \frac{2V_1}{t_0} T \quad (2.2.5.)$$

introduciendo estas nuevas relaciones dadas por (2.2.4.) y (2.2.5.) en el anterior sistema de ecuaciones simultáneas:

$$(1) \quad y = \frac{2V_1}{t_0} t$$

$$(2) \quad y = -\frac{2V_1}{t_0} t + 2V_1$$

$$(3) \quad y = \frac{2V_1}{t_0} t - \frac{2V_1}{t_0} T$$

ahora bien, llamemos  $P(t)$  al tren de pulsos triangulares y  $f(t)$  la otra señal; la función  $P(t) + f(t)$  será representada gráficamente como en la Fig. (2.2.4.).

De esa Fig. asumimos a  $V_2$  como nuestro nivel de comparación el que corta a la curva en cuatro puntos, de los cuales tomamos dos y les denominamos A y B.

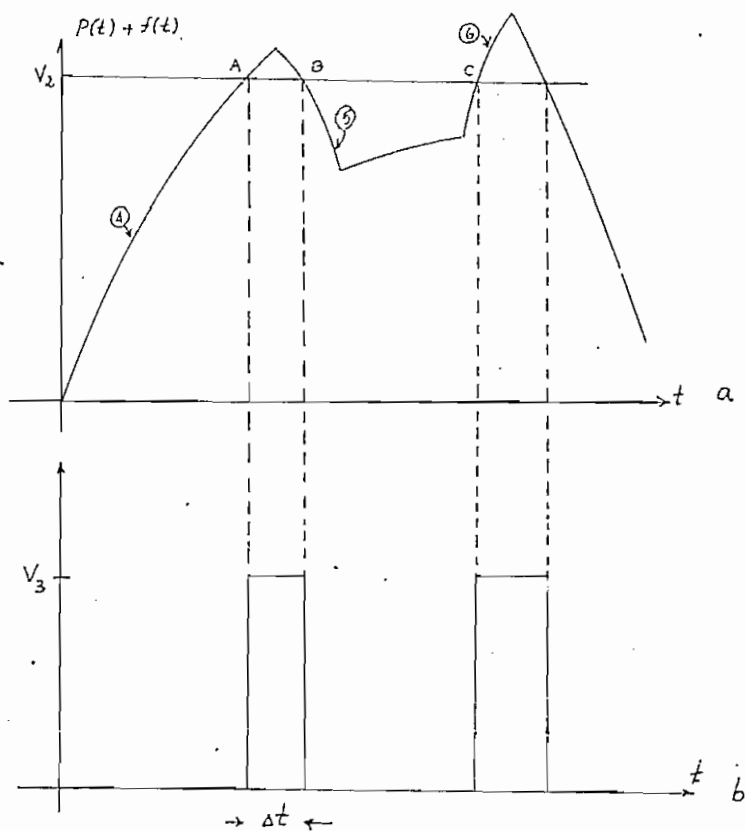


Fig. (2.2.4.) Representación gráfica de la suma de los pulsos triangulares y la señal (a), como también de los pulsos a la salida del comparador (b).

De la curva (4) 
$$y = \frac{2V_1}{t_0} t + f(t)$$

De la curva (5) 
$$y = -\frac{2V_1}{t_0} t + 2V_1 + f(t)$$

En los puntos A y B el valor de  $y$  es el mismo para las curvas (4) y (5), luego de la ecuación que describe la curva (4):

$$V_2 = \frac{2V_1 t}{t_0} + f(t)$$

de donde

$$\frac{2V_1 t}{t_0} = V_2 - f(t) \quad (2.2.6.)$$

igualando (4) y (5)

$$\frac{2V_1 t}{t_0} + f(t) = - \frac{2V_1 (t + \Delta t) + 2V_1 + f(t + \Delta t)}{t_0}$$

de donde  $2 \frac{2V_1 t}{t_0} + f(t) - f(t + \Delta t) - 2V_1 = - \frac{2V_1 \Delta t}{t_0}$

Sustituyendo (2.2.6.) en la ecuación anterior

$$2 [V_2 - f(t)] + f(t) - f(t + \Delta t) - 2V_1 = - \frac{2V_1 \Delta t}{t_0}$$

despejando  $\Delta t$ :

$$\Delta t = - \frac{t_0}{2V_1} \left\{ 2(V_2 - V_1) - f(t + \Delta t) - f(t) \right\} \quad (2.2.7.)$$

Dado que la frecuencia de la señal triangular de muestreo es mucho mayor que la  $f(t)$  podemos tomar a  $\Delta t$  muy pequeño y la ecuación (2.2.7.) queda al asumir  $V_2 = V_1$

$$\Delta t = \frac{f(t) t_0}{V_1} \quad (2.2.8.)$$

donde, como se ve, el ancho del pulso es proporcional a  $f(t)$

Veremos ahora si permanece constante el período de los pulsos obtenidos al meter  $P(t) + f(t)$  al comparador, lo que es requisito indispensable cumplir para que el valor medio sea el

valor que deseamos.

Por definición el período T2 es el tiempo que la señal emplea en ir desde A hasta C (Ver Fig. 2.2.4.). De la curva (4) de la misma Figura:

$$V_2 = \frac{2V_1 t}{t_0} + f(t)$$

De la curva (3) 
$$V_2 = \frac{2V_1}{t_0} (t + T_2) - \frac{2V_1 T_1}{t_0} + f(t + T_2)$$

Donde aquí tomamos  $T = T_1$

Igualando en (3) y (4) los puntos comunes:

$$\frac{2V_1}{t_0} (t + T_2) - \frac{2V_1 T_1}{t_0} + f(t + T_2) = \frac{2V_1}{t_0} t + f(t)$$

de donde 
$$\frac{2V_1}{t_0} T_2 + f(t + T_2) = \frac{2V_1 T_1}{t_0} + f(t)$$

De esta relación podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{2V_1}{t_0} (T_2 - T_1) = f(t + T_2) - f(t) \tag{2.2.9.}$$

Es decir, el incremento del período es proporcional al incremento de la función desde el instante  $t$  al  $t + T_2$ .

Si T2 se considera un tiempo muy pequeño, entonces

$$f(t + T_2) - f(t) = f'(t) T_2. \tag{2.2.10.}$$

La ecuación (2.2.9) queda como sigue:

$$T_2 = \frac{T_1}{1 - \frac{f(t) t_0}{t_1}}$$

$f'(t)$  puede tener amplias variaciones, e incluso estar comprendida entre los límites  $-\infty < f'(t) < \infty$  de modo que  $0 \leq T_2 \leq T_1$  cosa que no nos interesa para sacar el valor medio, ya que estaría dado por:

$$\int_0^{T_2} \bar{y} dt = \int_0^{T_2} v(t) dt \quad (2.2.11.)$$

Como se ve, este procedimiento es equivocado porque en él el período varía y altera el resultado que esperamos.

Para resolver este problema refirámonos al gráfico (2.2.5). En él se definen los pulsos de modo que su ancho va desde el punto A hasta el punto B, y su período coincide exactamente con el de los pulsos triangulares. Hagamos ahora el siguiente análisis: de la ecuación (4)

$$y = \frac{2V_1}{t_0} t + f(t)$$

En el punto  $y = V_A$

$$V_A = \frac{2V_1}{t_0} t + f(t) ; \quad t = \frac{V_A}{2V_1} t_0 - \frac{f(t)}{2V_1} t_0 \quad (2.2.12.)$$

La ecuación (2.1.12) nos posibilita calcular el ancho del pulso de interés.

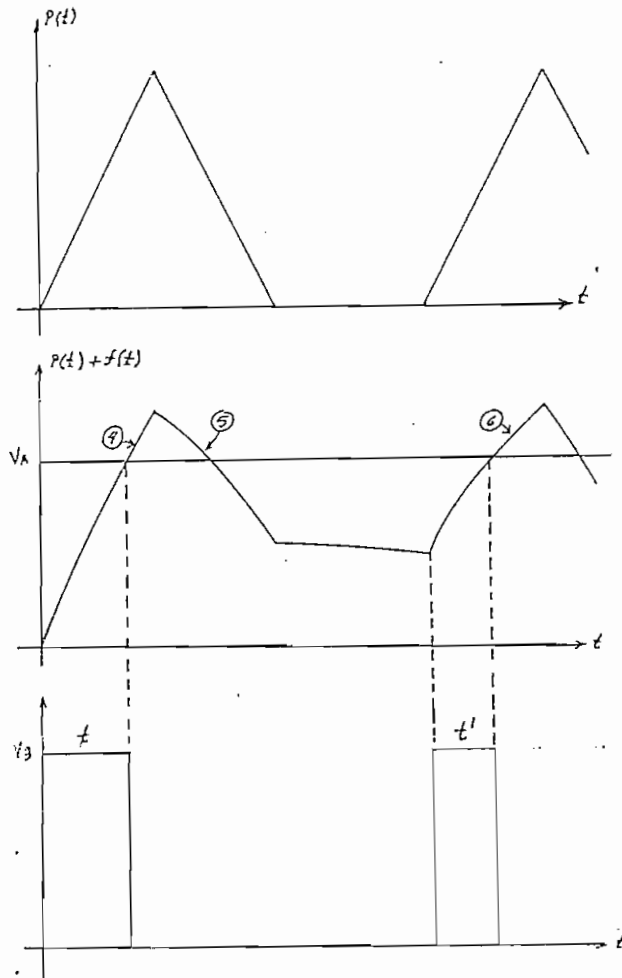


Fig. (2.2.5.). Aquí se indica cómo debemos definir los pulsos para mantener el período fijo.

Para comprobar que esta relación es verdadera, tomemos la ecuación que define la curva seis para encontrar  $t'$

$$Y = \frac{2V_1}{t_0} t - \frac{2V_1}{t_0} \tau + f(t)$$

entonces  $Y = V_A$  para  $t = t' + \tau$ , luego



$$V_A = \frac{\Delta V_1}{t_0} (t' + T) - \frac{\Delta V_1 T}{t_0} + f(t' + T)$$

de donde 
$$V_A = \frac{\Delta V_1 t'}{t_0} + f(T + t')$$

y 
$$t' = \frac{V_A}{\Delta V_1} t_0 - \frac{f(t' + T) t_0}{\Delta V_1}$$

o lo que es lo mismo:

$$t' = \frac{V_A}{\Delta V_1} t_0 - \frac{f(t) t_0}{\Delta V_1} \quad (2.2.13)$$

Con lo cual se demuestra que el ancho del pulso se define bajo la misma expresión general con la cual iniciamos haciendo el análisis para la obtención del antilogaritmo.

El circuito indicado para tener antilogaritmo está de mostrado en la Fig. (2.2.6), y las señales procesadas en la Fig. 2.2.7.

El circuito consta de un multivibrador a estable que genera una onda cuadrada a la cual le restamos su componente de continua, de modo que tenga un valor medio de cero. En la Fig. (2.2.7) se puede observar en (1) la señal descrita. Si a esa señal la integramos obtendremos la señal (2), y si la rectificamos aparecerá la (3). Tenemos ya los pulsos triangulares a los cuales sumaremos la señal a la que sacaremos antilogaritmo, es decir  $f(t)$ ; y a la salida del sumador tendremos la señal (5). En la Fig. (2.2.7) se representa a la señal  $f(t)$ , de modo que se vea que su variación es mucho más lenta que los pulsos triangulares. Si esa señal enviamos a un com

parador como indica la Fig. (2.2.6), veremos que si rectificamos su salida cortando los pulsos negativos obtendremos la señal (6). Ahora bien, si a la señal (3) le enviamos al terminal positivo de un comparador cuyo otro terminal negativo esté a potencial 0 voltios y si a la señal de salida del mentado comparador la rectificamos, obtendremos la señal (4). Efectuando el producto lógico entre la señal (7), la (6) y la (4), convenientemente atenuados a los niveles de señal que esté comprendido entre los niveles de 0 lógico y 1 lógico del circuito AND de la Fig. (2.2.6), obtendremos los pulsos indicados en la Fig. (8), que son aquellos cuyo espesor está dado en la expresión (2.2.13). A esos pulsos los introducimos a un circuito filtro pasa altos y mediante un sistema adecuado de diodos permitimos pasar sólo los pulsos positivos recortando los negativos. A esa señal le tomamos el valor medio y le restamos el voltaje  $V_c = K_V/T$  de la expresión (2.2.3), de modo que a la salida se obtiene el antilogaritmo de  $f(t)$ .



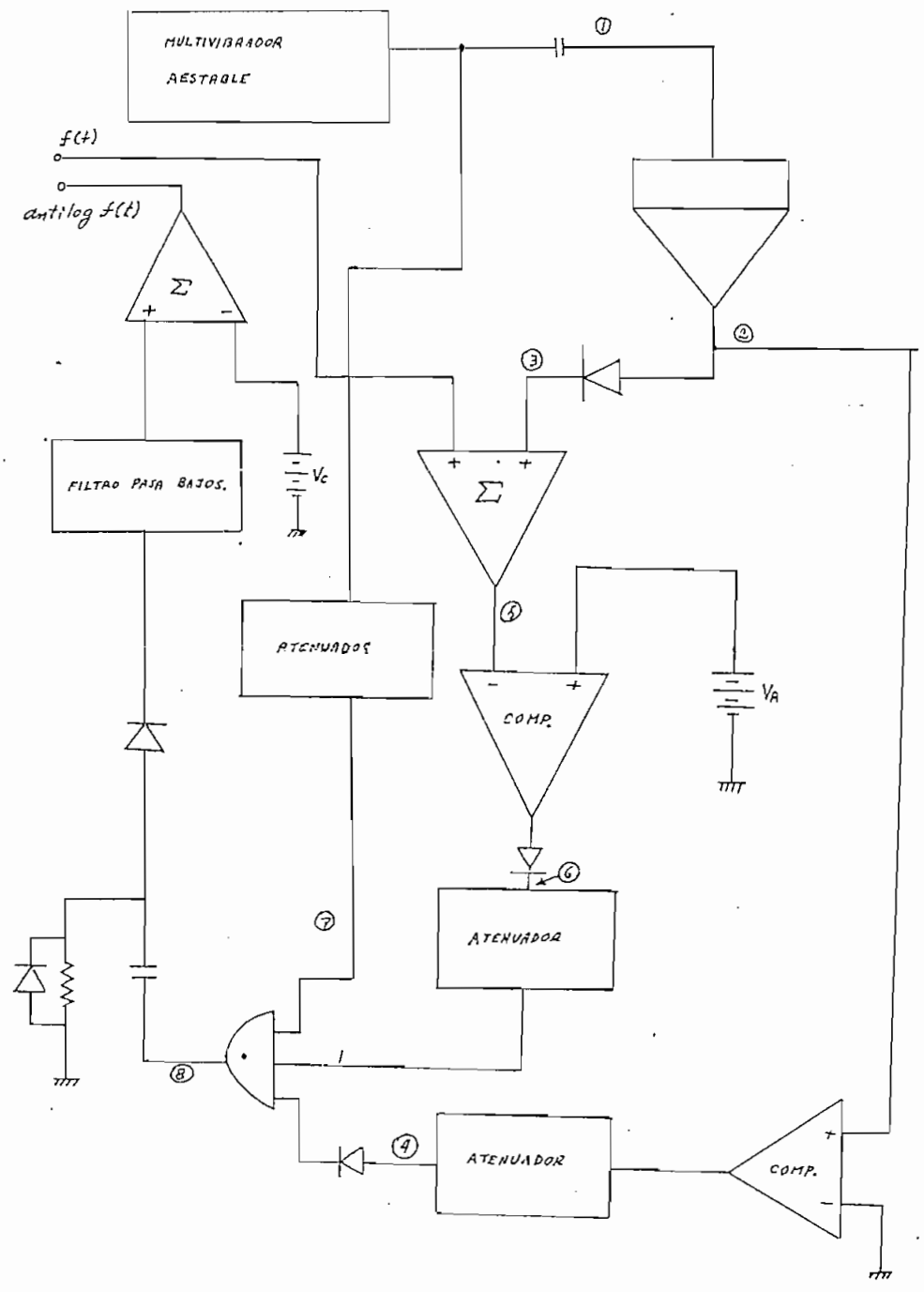


Fig. (2.2.6). Circuito para sacar antilogaritmo de  $f(t)$ .

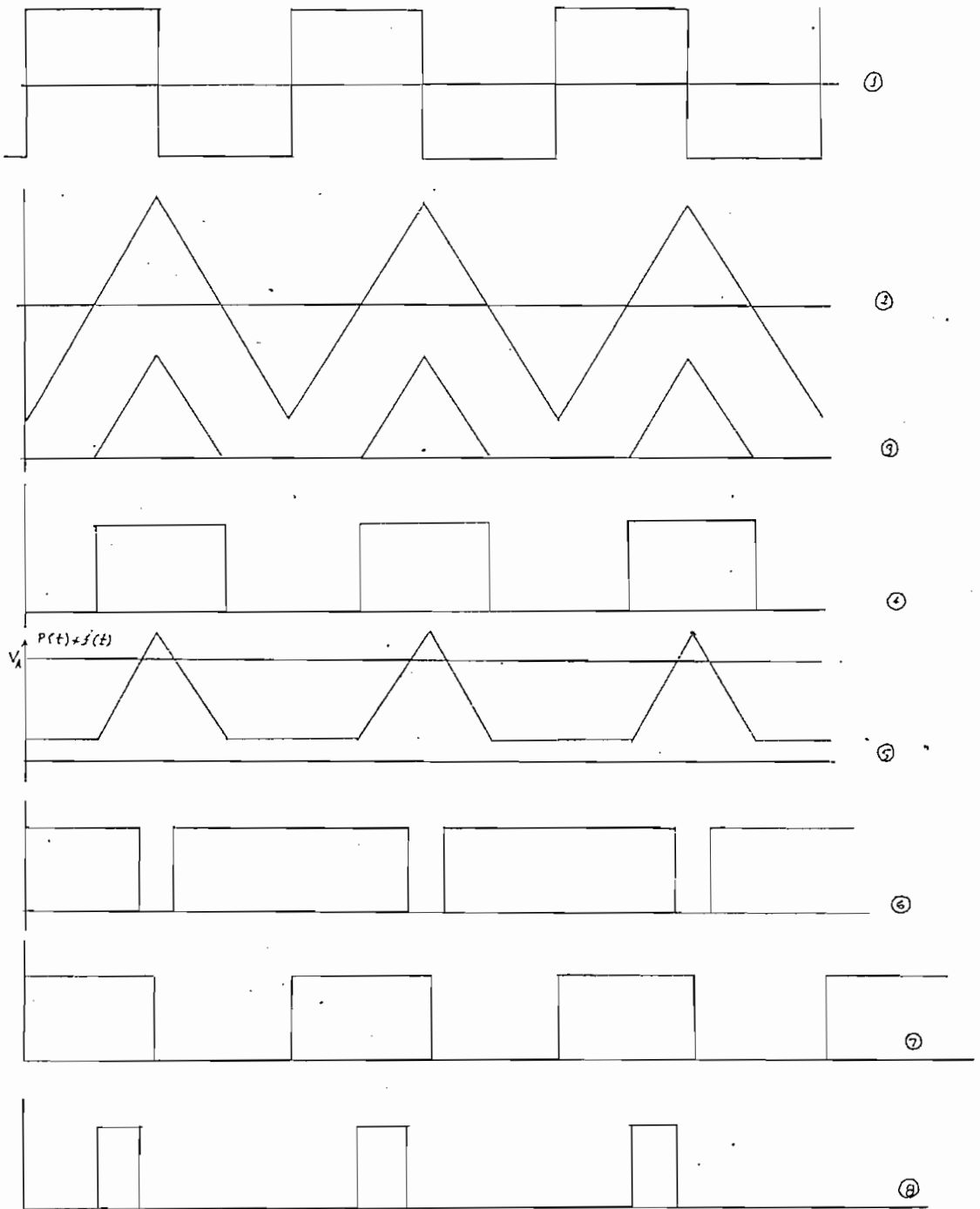


Fig. (2.2.7). Procesamiento de señales en el sistema antilogaritmo  $f(t)$ .

## CAPITULO III

### ELEMENTOS DE CURVAS DE TRANSFERENCIA EXPONENCIAL

#### 3.1. INTRODUCCION

En este Capítulo se presentará una justificación de por qué elementos semiconductores como diodos y transistores pueden ser utilizados como elementos de curvas de transferencia exponencial. Se realizará inicialmente un estudio sobre la conducción eléctrica en una estructura cristalina, partiendo como una primera aproximación, del estudio del movimiento de un electrón libre en un cubo de lado  $L$ , para luego profundizar introduciendo el concepto de potenciales periódicos para conformar una idea más cabal de la conducción eléctrica del cristal. Se tratará además sobre los efectos térmicos en los elementos bipolares, asunto de gran importancia en el diseño de transductores exponenciales; y, finalmente se deducirá la ecuación de transferencia de voltaje y corriente de un diodo, lo que también se establecerá para la juntura base emisor de un transistor desde las ecuaciones de Ebers Moll.

#### 3.2. CONDUCCION ELECTRICA EN UNA RED CRISTALINA

##### 3.2.1. Electrón libre.

la conducción eléctrica de la estructura cristalina puede enfocarse en un momento y con buena aproximación, como si el electrón se moviese dentro de aquella como lo hacen las moléculas dentro de un gas. Esto se justifica porque los electrones que transportan la energía eléctrica son los electrones de valencia,

que por razones térmicas vencen el potencial de ionización de los átomos que conforman la red y comienzan a viajar en forma errática, potencial que en el caso de los elementos alcalinos es muy bajo y por ello presentan buenas características como conductores. En este caso pues, si aceptamos esta idea, por analogía con los gases, la energía total del electron sería cinética, ya que la energía potencial de los iones positivos del cristal la consideramos despreciable.

Por otro lado, debido al dualismo de la conducta del electrón como onda y como partícula, estamos en la obligación de describir su dinámica desde el punto de vista de la mecánica cuántica.

En la mecánica cuántica postulamos que existe una función de onda continua  $\Psi$  que puede ser compleja y que define completamente el estado dinámico de un sistema cuántico, es decir que todo lo que se puede prever acerca de las distintas propiedades dinámicas del sistema en un instante  $t$ , se deducen del conocimiento de  $\Psi$  en ese instante. El problema central de la teoría es entonces el siguiente: conociendo la función de onda en un instante  $t_0$ , determinar esta función en cualquier instante posterior. Para esto hay que conocer la ecuación de propagación de la onda .

Es evidente que ningún razonamiento deductivo permite llegar a esa ecuación. Al igual que toda ecuación de la física matemática, esta ecuación se debe postular y su única justificación reside en el éxito de la confrontación de sus predicciones con los resultados experimentales. Sin embargo, la elección de la ecuación de onda queda limitada por un cierto número de condiciones a priori con el fin de que se conserve el significado de  $\Psi$  :

A) La ecuación debe ser lineal y homogénea, de esta forma  $\Psi$  cumple con el principio de superposición típico de las ondas; es decir si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son soluciones,  $\lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2$  también es una solución.

B) Debe ser una ecuación diferencial de primer orden respecto al tiempo; así, el conocimiento de  $\Psi$  en un instante dado, basta para determinar toda su evolución posterior, de acuerdo con la hipótesis de que el estado dinámico del sistema física está enteramente determinado por  $\Psi$ .

Por otro lado, las previsiones de la teoría deben coincidir con las de la Mecánica Clásica en el campo de validez de esta última. Dicho de otro modo, cuando nos encontramos en la aproximación de la óptica geométrica, la ecuación debe conducir a las mismas leyes del movimiento de los paquetes de onda de la Teoría de Broglie.

Denomínese  $F(\bar{p})$  la transformada de Fourier de  $\Psi(\bar{r}, 0)$  donde  $\bar{p}$  es el momento generalizado del espacio de fases y  $\bar{r}$  el vector posición en el espacio normal. En general, para cualquier  $t$  podemos decir que

$$\Psi(\bar{r}, t) \Leftrightarrow F(\bar{p}) e^{-j\omega t} \quad (3.2.1.)$$

Entonces podemos decir que la transformada inversa de  $F(\bar{p})$  será

$$\Psi(\bar{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\bar{p}) e^{j(\bar{K} \cdot \bar{r} - \omega t)} d\bar{p} \quad (3.2.2.)$$

Donde  $\bar{K}$  es el vector de onda que según de Broglie es dado por

$$\vec{K} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (3.2.3.)$$

como la energía de un cuanto está dada por

$$E = \hbar \omega \quad (3.2.4.)$$

Entonces la ecuación (3.2.2.) puede ahora escribirse como

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{p}) e^{j(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} d\vec{p} \quad (3.2.5.)$$

La relación entre la energía y el impulso está dado por

$$E = p^2/2m \quad (3.2.6.)$$

Tomando sucesivas derivadas parciales a la ecuación (3.2.5.)

$$j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} E F(\vec{p}) e^{j(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} d\vec{p} \quad (3.2.7.)$$

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{p} F(\vec{p}) e^{-j(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} d\vec{p} \quad (3.2.8)$$

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 F(\vec{p}) e^{j(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} d\vec{p} \quad (3.2.9.)$$

Sustituyendo 3.2.6 en 3.2.7 y comparando el resultado con 3.2.9 tenemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (3.2.10.)$$

Que es la ecuación de Shrödinger para una partícula libre; y como salta a la vista satisface las condiciones A y B. Es



ta ecuación se aplica para el caso de la partícula libre en un potencial escalar cero. Si  $\psi$  es una función amplitud de probabilidad compleja es necesario que cumpla con la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}, t) d^3x_i = 1 \quad (3.2.11.)$$

Para el caso en que exista un campo escalar de potencial  $U$  se puede demostrar que para ese caso se cumple:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi \quad (3.2.12.)$$

Para el caso concreto de un electrón libre en el interior de una red cristalina resolvamos la ecuación 3.2.10. y supongamos, para mayor facilidad, que la red no es más que la constitución física microscópica de un cubo de lado  $L$ .

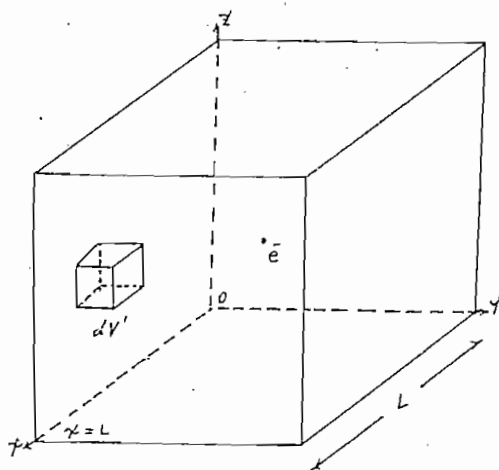


Fig. (2.3.1). Electrón libre en un cubo de lado  $L$ .

Veamos las condiciones de contorno del problema. Consideremos la Fig. (3.2.1.) en donde se ha representado un electrón en un cubo de lado  $L$ . Tomemos el plano  $X = L$ ; sobre cada uno de los puntos del plano necesariamente  $\psi = 0$  ya que por definición  $\psi$  es la amplitud de probabilidad de determinar un observable entre el volumen comprendido por  $V$  y  $V + dV$ . Formalmente se justifica lo que aquí expresamos si imaginamos que fuera del cubo y sobre el plano  $X = L$  dibujamos otro cubo, de modo que tenga un volumen diferencial  $dV'$ . La probabilidad de encontrar un observable ligado al electrón dentro del cubo de lado  $L$ , estará dado por la certeza de que exista en el volumen  $L^3$ , es decir:

$$\int_{V=L^3} \psi \psi^* d^3x_i = 1$$

Luego necesariamente en el cubo de volumen diferencial  $dV'$  se debe cumplir:

$$\int_{dV} \psi \psi^* d^3x_i = 0$$

Con lo que  $\psi = 0$  en ese volumen diferencial y sobre el plano  $X = L$ , ya que  $\psi$  debe ser una función continua.

Ahora podemos afirmar que  $\psi = 0$  sobre la superficie de los planos que limitan el cubo: es decir  $X = L$ ,  $Y = L$ ,  $Z = L$ .

Resolvamos (3.2.10.) usando el método de separación de variables, es decir:

$$\psi(\vec{r}, t) = X Y Z T \quad (3.2.13.)$$

donde  $X = X(x)$

$Y = Y(y)$

$Z = Z(z)$

$T = T(t)$

Sustituyendo (3.2.13) en (3.2.10.) y dividiendo todo por la relación dada por (3.2.13) tenemos:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} \right) = -i\hbar \frac{\dot{T}}{T} \quad (3.2.14)$$

Tomemos el término  $\ddot{X}/X$ ; como  $X = X(x)$  entonces es de suponerse que  $f(x) = \ddot{X}/X$ , lo mismo podríamos decir de  $\ddot{Y}/Y = f(y)$  y de  $\ddot{Z}/Z = f(z)$  y de  $\dot{T}/T = f(t)$ . Pero las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ , son variables linealmente independientes, de modo que la combinación lineal de las funciones de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  debe ser nula; de modo que (3.2.14) sería nada más que la trivialidad  $0 = 0$ . Para obtener una solución no trivial debe cumplirse que:

$$\frac{\ddot{X}}{X} \neq f(x) \quad \frac{\ddot{Y}}{Y} \neq f(y) \quad \frac{\ddot{Z}}{Z} \neq f(z) \quad \frac{\dot{T}}{T} \neq f(t)$$

Luego todas esas relaciones deben ser constantes. Tomemos ahora el caso:

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \lambda \quad ; \quad \lambda > 0$$

entonces 
$$X = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

Para las condiciones  $\psi = 0$  para  $x = 0$  y  $x = L$  la ecuación anterior se desdobra en el sistema:

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \exp(\sqrt{\lambda} L) + C_2 \exp(-\sqrt{\lambda} L) = 0$$

donde  $C_1 = C_2 = 0$  y tenemos otra trivialidad.

Tomemos  $\lambda < 0$  lo cual quedaría reafirmado si decimos  $\lambda = -K_x^2$  entonces:

$$\frac{\ddot{X}}{X} = -K_x^2$$

entonces la solución de la ecuación anterior es:

$$X = C_1 \sin K_x x + C_2 \cos K_x x$$

para  $x=0$  cuando  $x=0$  y  $x=L$  veremos que  $C_2 = 0$

y  $X = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , donde  $n = 1.2.3....$  etc.; y  $K_x = \frac{n\pi}{L}$ . Por analogía  $K_y = m\pi/L$  y  $K_z = l\pi/L$ . Suponiendo  $\hbar/T = Kt$  y sustituyendo ésta y las anteriores relaciones en (3.2.14.) tenemos que:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \right\} = -i\hbar Kt$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es real y positiva; entonces  $Kt$  debe ser imaginario puro y positivo para que se cumpla la ecuación;  $Kt = j\omega$ . Entonces:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \right\} = \hbar\omega \quad (3.2.15)$$

y como  $E = \hbar\omega$ , entonces

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{L} \right)^2 \right\} \quad (3.2.16.)$$

Este resultado nos señala que la energía que puede tener el electrón está determinada por valores discretos dependientes de los enteros  $n$ ,  $m$  y  $l$ . Otro aspecto interesante resulta al combinar las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.6) para comparar, con la (3.2.16); es decir se cumple que:

$$K^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{L} \right)^2 \quad (3.2.17.)$$

Donde  $K$  es el vector de onda, luego:

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

el vector de onda también se cuantiza.

Todo este análisis se ha desarrollado sin considerar el spin de Pauli. La ecuación (3.2.16) nos recuerda a la relación que debe cumplir el potencial eléctrico en una cámara resonante e insinúa la naturaleza ondulatoria del electrón:

Nos falta ahora determinar el factor de normalización de la onda, es decir como:

$$\Psi = A \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{l\pi z}{L}$$

deberá cumplirse que:  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \Psi^* dV = 1$

y despejando

$$A = \left( \frac{2}{L} \right)^{3/2}$$

así la función de onda es expresada por:

$$\psi = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{l\pi z}{L} e^{i\omega t} \quad (3.2.18)$$

Supongamos ahora que existen N electrones dentro del cubo de lado L y tomemos la ecuación (3.2.17) que establece:

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3.2.19)$$

Si representamos E en el espacio fase K, para cada valor de E definimos una esfera de radio  $(2mE/\hbar^2)^{1/2}$ . Encontramos que densidad electrónica existe para cada valor de E y para ello tomemos en cuenta al principio de exclusión de Pauli que establece que dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico. Así dos electrones de Spin + 1/2 y - 1/2 ocuparán un volumen de  $(\pi/L)^3$  en ese espacio y el número total de electrones encerrados por la esfera determinada por E será:

$$N = 2 \times \frac{1/6 K^3 \pi}{(\pi/L)^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{L}{\pi}$$

pero el volumen del cubo es  $V = L^3$ , entonces:

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}; \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} \quad (3.2.20.)$$

Hemos hecho aquí  $E = E_F$  y lo denominamos energía de Fermi que no es más que la energía total de los electrones cuando todos los niveles cuánticos están llenos.

En el análisis anterior se hizo el estudio del electrón encerrado en un cubo de lado  $L$  suponiendo las condiciones de borde  $\psi = 0$  para  $X = L, Y = L, Z = L$  y  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ . Para mayor seguridad diremos que si bien aquel estudio es fácil, no es en general; es decir, no siempre las condiciones de borde serán descritas como anteriormente expusimos. Así por ejemplo, si tenemos un material de estructura cristalina de forma geométrica no definida, el análisis no puede ser aplicado. Lo que sí podemos hacer es suponer que el sólido está conformado de un sin número de cubos muy pequeños en cuyas superficies aplicamos con condiciones de borde periódicas que no son nulas generalmente y que se presentan gracias a la estructura periódica de la red cristalina. Desde este punto de vista el análisis anterior no se presenta sino como un caso particular de este problema más general, Así podemos decir que:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z+L) = \dots = \psi(x+L, y+L, z+L) \quad (3.2.21)$$

son las condiciones de borde para un cubo de lado  $L$  en un cristal isotrópico. Para este caso, resolviendo la ecuación de Schrödinger, tenemos que:

$$\psi = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.2.22.)$$

donde  $k_{x,y,z} = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2n\pi}{L}$  (3.2.23)

cumplen las condiciones de borde dados por (3.2.21), así por ejemplo:

$$\exp\{i k_x(L+x)\} = \exp\{k_x x\}$$

A continuación se procederá a introducir algunos conceptos que son básicos para comprender físicamente la conducción eléctrica.

### 3.2.2. Densidad de Estados.

Se la define como el número de estados electrónicos por unidad de rango de energía, es decir:

$$\mathcal{D}(E) = 2 \frac{dn}{dE} \quad (3.2.24.)$$

El número 2 se incluye por considerar el principio de exclusión de Pauli. Supongamos que los electrones en el espacio de fases  $\vec{K}$  que tienen la misma energía adoptan la configuración bosquejada en la Fig. (3.2.2) formando una superficie cerrada, de modo que en la superficie dSE podemos definir una densidad de estados cuánticos dados por  $\mathcal{D}(E) = 2 dn/dE$ .

Si tomamos la superficie infinitesimalmente próxima a dSE, veremos que el número de estados cuánticos contenidos en esa superficie dSE' será:

$$\mathcal{D}(E') = 2 \frac{d}{dE} (n + \Delta n)$$

De modo que la variación neta de densidad de estados



será:  $\Delta \mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(E') - \mathcal{D}(E)$

$$\Delta \mathcal{D}(E) = 2 \frac{d}{dn} \Delta E \quad (3.2.25)$$

Pero  $\Delta n = \frac{\text{Elemento de volumen en el espacio K}}{\text{volumen ocupado por 1 estado cuántico}}$

y el elemento de volumen en el espacio K será:

$$|d\vec{K} d\sigma|$$

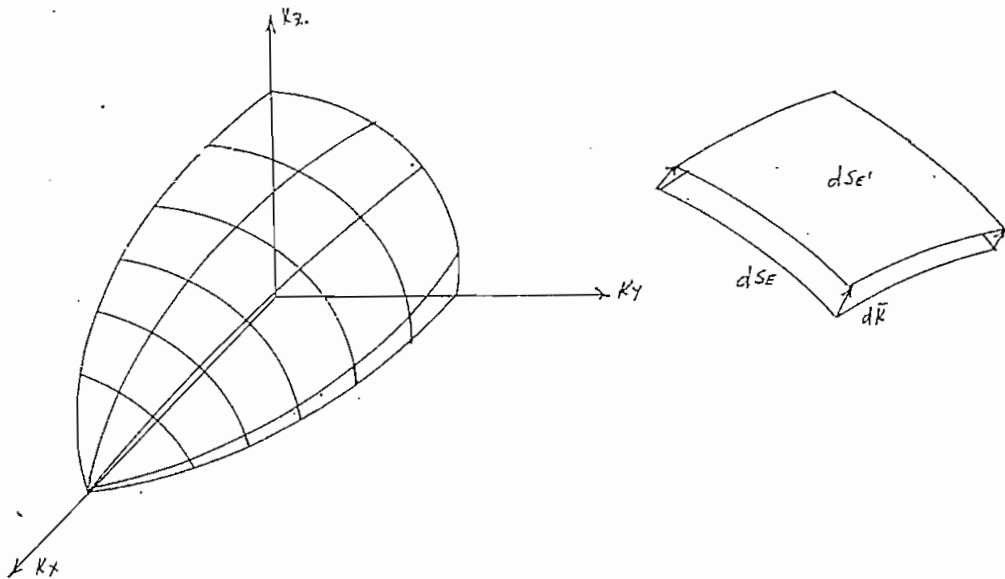


Fig. (3.2.2). Superficie en el espacio Fase  $\vec{K}$  y elemento de volumen.

Por otro lado, sea cualquiera el problema que resolvemos respecto a la conducción eléctrica en una estructura cristalina,  $\gamma$  se puede expresar siempre como el desarrollo en series de Fourier cuyos términos son de la forma:

$$\psi_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (3.2.26)$$

y donde cada electrón del espacio de los  $\vec{k}$  ocupará un volumen equivalente a

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = \left(\frac{2\pi}{V^{1/3}}\right)^3 \quad (3.2.27)$$

Siendo  $V$  el volumen del conductor en el espacio cartesiano. Así podemos decir que:

$$\Delta n = \frac{|dS_{\vec{k}} d\vec{k}|}{(2\pi/V^{1/3})^3} = \frac{V}{8\pi^3} |dS_{\vec{k}} d\vec{k}|$$

De modo que la ecuación (3.2.25) queda:

$$\Delta \mathcal{P}(\epsilon) = \frac{2V}{8\pi^3} \frac{2}{2} \frac{d}{d\epsilon} |dS_{\vec{k}} d\vec{k}|$$

o lo que es lo mismo:

$$d\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{2V}{8\pi^3} \frac{d}{d\epsilon} |dS_{\vec{k}} d\vec{k}|$$

La energía sólo es función del vector de onda; de modo que  $dS_{\vec{k}}$  es una constante con respecto al operador  $d/d\epsilon$ ; luego:

$$d\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{2V}{8\pi^3} |dS_{\vec{k}}| \frac{d|\vec{k}|}{d\epsilon}$$

como  $\frac{d\epsilon}{d|\vec{k}|} = \nabla_{\vec{k}} \epsilon$ , entonces:

$$d\mathcal{D}(E) = \frac{2V}{8\pi^3} dS_E d\frac{1}{|\nabla_{\mathbf{k}}E|}$$

integrando:

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2V}{8\pi^3} \int dS_E \int d\frac{1}{|\nabla_{\mathbf{k}}E|}$$

finalmente: 
$$\mathcal{D}(E) = \frac{2V}{8\pi^3} \int \frac{dS_E}{|\nabla_{\mathbf{k}}E|} \quad (3.2.28)$$

Es la ecuación más general.

Para el caso del electrón libre:  $\nabla_{\mathbf{k}}E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}}{m}$

y  $S_E = 4\pi k^2$ , de modo que:

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2V}{8\pi^3} \frac{4\pi k^2}{\hbar^2 k/m} = \frac{V}{\pi^2} \frac{mk}{\hbar^2}$$

y recordando la ecuación (3.2.19) :

$$\mathcal{D}(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \quad (3.2.29)$$

El gráfico 3.2.3. representa  $\mathcal{D}(E)$  como función de  $E$ . La curva se corta abruptamente al valor  $E = E_F$ , porque por definición es la energía total cuando todos los estados cuánticos están ocupados a la temperatura del cero absoluto.

3.2.3. Efecto de la Temperatura, Distribución estadística de Fermi - Dirac.

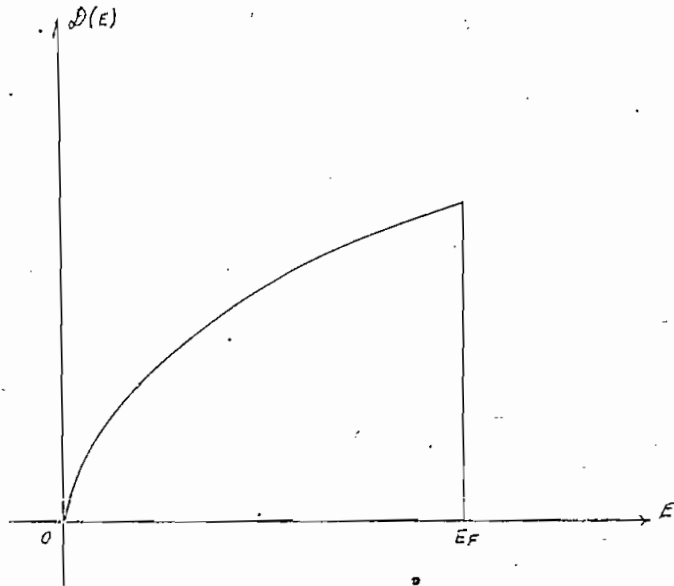


Fig.(3.2.3). Variación de la densidad de Estados con la Energía.

Para aplicar los métodos estadísticos a una colectividad formada por corpúsculos idénticos, cuando sólo interesa la distribución de la energía, se empieza por dividir el espacio fásico molecular en estratos o niveles energéticos,  $0, 1, 2, \dots, j, \dots$  a cada uno de los cuales corresponde una energía determinada,  $0, E_1, E_2, \dots, E_j$  y que podrán tener una cierta extensión, esto es, contener cada uno un cierto número,  $n_j$ , de recintos elementales

Un estado microscópico queda caracterizado por los números  $N_0, N_1, \dots, N_j, \dots$  de corpúsculos situados a cada nivel, y su probabilidad o peso estadístico se computa por el número de

compleciones diferentes con que puede ser realizado. En la estadística clásica se admite que basta permutar dos moléculas situadas en diferentes recintos para que resulte una nueva compleción, de donde resulta que, para formar compleciones diferentes sin alterar el estado macroscópico, se puede: 1o. alterar la distribución de los  $N_j$  corpúsculos entre los  $n_j$  recintos de cada nivel  $j$ , de modo que varía el número de los contenidos en cada recinto, pero no el total  $N_j$ ; 2o. permutar entre sí todos los modos posibles, los  $N_j$  corpúsculos comprendidos en los  $n_j$  recintos de cada nivel, de modo que cambie de recinto una pareja, cuando menos.

Las estadísticas cuánticas surgieron cuando el físico hindú Bose trató de deducir la ley de radiación de Planck aplicando los métodos estadísticos a una colectividad formada exclusivamente por fotones. Para lograr el resultado apetecido tuvo que admitir que la permuta de dos fotones situados en distinto recinto del espacio físico no origina una nueva compleción; para que dos compleciones sean diferentes es preciso que varíe la forma de ocupación de una pareja de recintos, cuando menos. Einstein desarrolló las ideas de Bose y así surgió la primera estadística cuántica.

La otra estadística, la de Fermi Dirac, tuvo como origen el estudio de la conductividad metálica partiendo de la existencia de electrones libres en la estructura cristalina y que no aportan el calor específico. Fermi logró desarrollar una teoría conforme con los hechos admitiendo que en cada celdilla del espacio físico sólo hay lugar para un electrón.

En lo que sigue, precisaremos el desenvolvimiento histórico y seguiremos el método de Brillouin, que tiene la venta-

ja de reunir las tres estadísticas, la de Boltzmann, la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac, dejando abierto el camino a posibles modificaciones.

Atribuye Brillouin a cada celdilla en sentido metafórico una capacidad que va variando a medida que hay en ellas más corpúsculos, de tal modo que si se representa por  $l$  la capacidad de la celdilla cuando está vacía, sólo queda libre la porción  $l-p$ , cuando hay en ella  $p$  corpúsculos.

Al distribuir los  $N_j$  corpúsculos entre los  $n_j$  recintos de que se compone el nivel  $j$ , el primer corpúsculo podrá colocarse de  $n_j$  maneras, pues todos los recintos están vacíos; para el segundo sólo quedan  $n_j - a$  posibilidades, pues el primer corpúsculo lo ha ocupado ya el espacio  $a$  en una de las celdillas. El número buscado será pues:

$$\omega_j = n_j (n_j - a) (n_j - 2a) \dots \{ n_j - (N_j - 1)a \}$$

$$\omega_j = \frac{\alpha_j^{n_j} (n_j/a)!}{(n_j/a - N_j)!}$$

y el peso estadístico del estado macroscópico en cuestión será igual al número de maneras de distribuir los  $N$  corpúsculos entre los niveles, multiplicado por el número de distribuciones entre los recintos de cada nivel.

$$\omega = \frac{N!}{\prod N_j!} \prod \frac{\alpha_j^{N_j} (n_j/a)!}{(n_j/a - N_j)!}$$

La distribución más probable se obtendrá hallando el valor máximo de  $w$ . Utilizando la fórmula de Stirling se llega a :

$$\ln w = N \ln N - N - \sum N_j \ln N_j + \frac{1}{a} \sum n_j \ln \frac{n_j}{n_j - a N_j} + \dots$$

$$+ \sum N_j \ln (n_j - a N_j)$$

Imponiendo ahora las condiciones:

$$\delta \ln w = 0 \quad \sum_j \delta N_j = 0 \quad \sum_j E_j \delta N_j = 0$$

Se llega finalmente a:

$$N_j = \frac{n_j}{a + e^{-\gamma_1} e^{-\gamma_2 E_j}}$$

La estadística de Fermi-Dirac se obtiene haciendo  $a = 1$ , la de Bose Einstein haciendo  $a = -1$ . Si  $a = 1$  significa que en cada recinto sólo puede haber un corpúsculo de modo que las formas de ocupación serán 0,1.

Por consideraciones termodinámicas\* se toma  $\gamma_2 = 1/KT$  y  $\gamma_1 = E_F/KT$  siendo  $E_F$  el nivel de Fermi, entonces:

$$\frac{N_j}{n_j} = \frac{1}{1 + \exp(E_j - E_F)/KT}$$

Entonces  $N_j/n_j$  nos está representando la probabilidad de que un estado cuántico de energía  $E_j$  esté ocupado. Esto po-

----

\* Ver Mecánica Estadística y Termodinámica de Aguilar.

demostramos expresarlo así:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp((E_j - E_F)/kT)} \quad (3.2.30.)$$

La ecuación (3.2.30.) está representada en la Fig. 3.2.4.

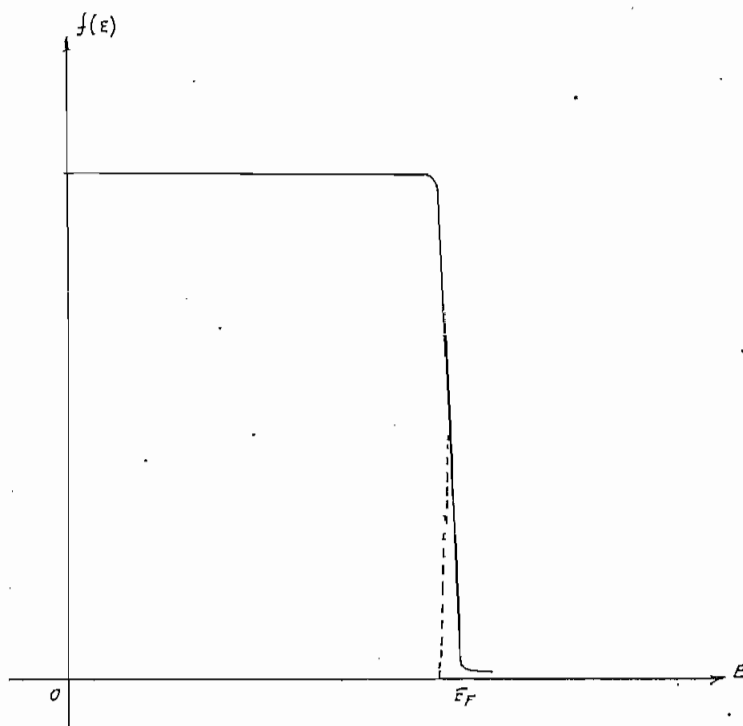


Fig. 3.2.4. Distribución de la probabilidad de que un estado de energía E esté ocupado.

Con los dos conceptos anteriores, el de Densidad de estados y el de la distribución estadística, podemos calcular cuál es el número de electrones libres, o sea aquellos que han sobrepasado la energía de Fermi, existen para posibilitar la conduc-



ción eléctrica a una temperatura T.

El número de electrones comprendidos en el intervalo  $E > E_c > E_F$ , siendo  $E_c$  la energía que hay que darle a un electrón para que venga el potencial de ionización, será igual a la densidad de estados por la probabilidad de que estén ocupados. Si E se extiende al infinito, el número de electrones estará dado por:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f(E) \mathcal{D}(E) dE \quad (3.2.31.)$$

haciendo la aproximación  $f(E) \approx e^{\frac{E_F - E}{kT}}$  (3.2.32.)

y  $\mathcal{D}(E - E_c) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_c}$  (3.2.33.)

Entonces  $n \approx \int_{E_c}^{\infty} \frac{V}{2\pi^2} \frac{2m_e}{\hbar^2}^{3/2} \sqrt{E - E_c} e^{\frac{E_F - E}{kT}} dE$

$$n \approx 2V \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_F - E_c}{kT}} \quad (3.2.34.)$$

### 3.2.4. Conducción Eléctrica.

Quando resolvimos la ecuación de Shrodinger para condiciones de borde periódicas, vimos que:

$$k_x, y, z = \left\{ \frac{2n\pi}{L} \right\}$$

esto implica, que si bien el número de electrones distribuidos en el espacio de la fase de los  $\vec{K}$  se mantiene el mismo, en el caso de condiciones de borde  $\psi \neq 0$  y periódicas, la configuración que adopta esta distribución no es ya un octante sino una esfera a la que se la conoce como esfera de Fermi cuyo centro es el origen de los  $\vec{K}$ , lo cual es razonable porque a pesar de que los electrones se mueven a grandes velocidades, originando grandes corrientes, la corriente neta es cero porque el movimiento de los electrones es caótico y el  $\vec{p}$  es cero.

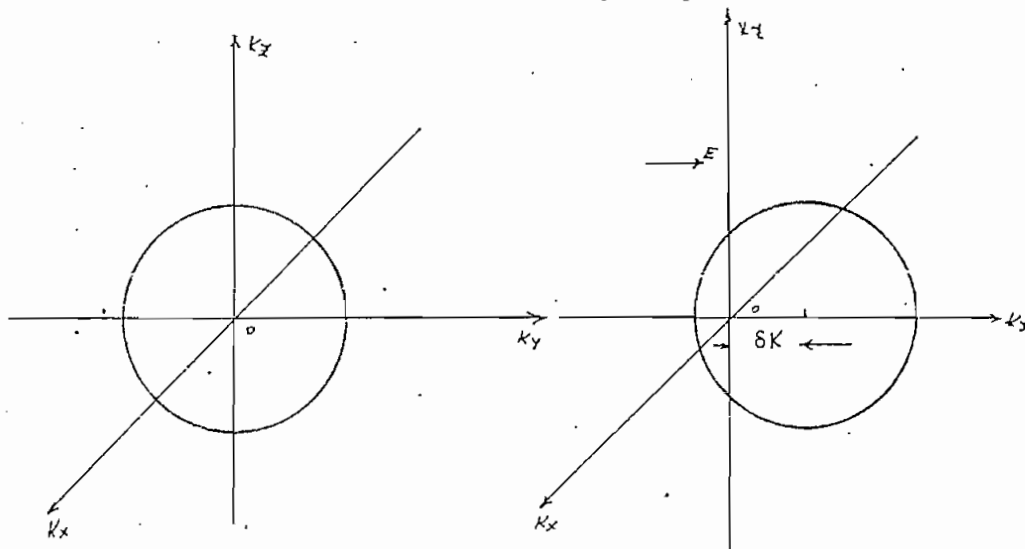


Fig. (3.2.5) a) Esfera de Fermi cuando no existe ningún campo exterior;

b) Esfera de Fermi desplazada  $\delta K$  por aplicación de un campo exterior.

Supongamos que aplicamos un campo eléctrico que posibilite conducción eléctrica cuyo proceso describiremos inmediatamente: sabemos que el momento lineal de un electrón está

dado por:  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

En un campo eléctrico  $\vec{E}$  aparece una fuerza sobre el electrón de valor  $-e\vec{E}$ , de modo que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E}$$

En ausencia de colisiones la esfera de Fermi en el espacio  $\vec{k}$  es desplazada uniformemente por la aplicación de un campo eléctrico. Si el campo es aplicado al  $t = 0$ , el "gas" de electrones de la esfera de Fermi centrada en el o rígen de los  $k$ , después del tiempo  $\delta t$ , adquieren una variación de su cantidad de movimiento en mayor o menor grado, de modo que en promedio es si como la esfera de Fermi se hubiere trasladado a un nuevo centro dado por:

$$\delta \vec{k} = \vec{F} \frac{\delta t}{\hbar} \quad (3.2.35)$$

Por las colisiones de los electrones contra impurezas, imperfecciones del cristal y phonons, el desplazamiento de los electrones se mantiene en estado estacionario en un campo eléctrico. Los efectos de las colisiones sobre la distribución después del campo aplicado es similar al indicado en la Fig. (3.2.6).

Si el tiempo de colisión es  $\tau$ , el desplazamiento de la esfera de Fermi en estado estacionario es:

$$\delta \bar{K} = \frac{\bar{F} \tau}{\hbar} \quad (3.2.36.)$$

Este desplazamiento da siempre al electrón un incremento de su momento  $\hbar \delta \bar{K} = \bar{F} \tau$  y un incremento de velocidad:

$$\delta \bar{V} = \frac{\bar{F} \tau}{m} = - \frac{e \bar{E} \tau}{m} \quad (3.2.37.)$$

Si allí hay  $n$  electrones de carga  $q = -e$  por unidad de volumen, la densidad de corriente eléctrica es:

$$J = n q \delta \bar{V} = n e^2 \tau \bar{E} / m \quad (3.2.38)$$

Esta es la ley de Ohm. La conductividad eléctrica  $\sigma$  es definida por  $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ , de modo que:

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} \quad ; \quad \rho = \frac{m}{n e^2 \tau} \quad (3.2.39.)$$

La resistividad eléctrica  $\rho$  es definida como la inversa de la conductividad. Esperamos que el transporte de carga sea proporcional a la densidad de carga  $ne$ , el factor  $e/m$  aparece porque la aceleración en un campo eléctrico dado es proporcional a  $e$ , inversamente proporcional a  $m$ ;  $\tau$  indica el tiempo libre que el campo actúa sobre el electrón antes de que éste choque con alguna discontinuidad del cristal emitiendo un fonón de  $\omega$  bien definida. A  $\tau$  se le conoce como período libre medio del transportador de carga.

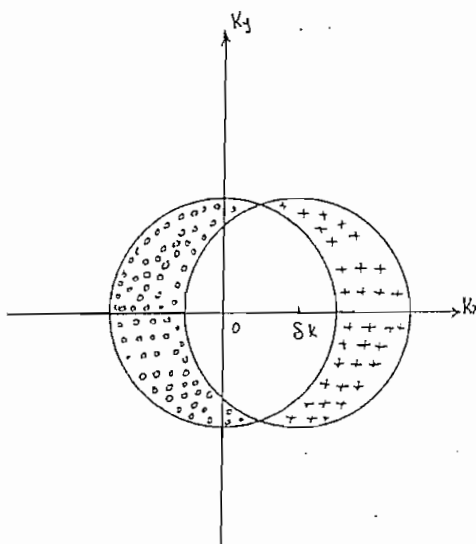


Fig. (3.2.6). Desplazamiento de los electrones en equilibrio dinámico frente a un campo exterior eléctrico en el espacio de fases.

Resumiendo ahora el proceso de conducción:

Cuando aplicamos el campo eléctrico  $E$  se desplaza la esfera de Fermi, como indica la Fig. (3.2.6). Los electrones que estaban localizados en la zona "porosa" se han "trasladado" a la zona de cruces. En ese punto permanece estacionario por los choques que realizan los electrones con discontinuidad del cristal originando emisión térmica o liberando su energía mediante la emisión de fonones, o vibraciones mecánicas de  $\omega$  bien definida, lo que hace que algunos de los electrones que estaban en la zona marcada con cruces pasen a la zona marcada como "porosa", para ser nuevamente perturbados por el campo exterior, adquirir energía y pasar a las zonas de cruces.

Esto explica el hecho de que cuando aplicamos una diferen

cia de potencial a través de un conductor, la corriente crece hasta un estado estacionario finito y no hasta hacerse infinita, porque siempre existe disipación térmica por efecto de los choques de los electrones de acuerdo al proceso aquí descrito.

### 3.2.5. Electrón en un potencial periódico.

El modelo del electrón libre para los metales nos permite comprender bastante bien la conducción eléctrica, pero en cambio no puede ser utilizado para explicar el por qué determinadas estructuras cristalinas se comportan como conductores y otras como aislantes, ni tampoco nos aclara el proceso de conducción que se da en los semiconductores.

Todos los sólidos contienen electrones, la cuestión importante de la conductividad eléctrica es encontrar bajo qué condiciones los electrones responden ante un campo exterior como partículas libres para utilizar el modelo del electrón libre con algunas importantes innovaciones que nos permiten comprender físicamente lo que está sucediendo. Entonces es necesario aproximar nuestro modelo más a la realidad.

Una estructura cristalina se caracteriza porque es periódica, es decir, sus características físicas, geométricas, etc. se repiten periódicamente en este tipo de conformación molecular.

Un electrón que penetre o se mueva en una estructura cristalina, en segunda aproximación, sufre el efecto del potencial eléctrico de los iones positivos originados por pérdidas de uno o más electrones de los átomos de la configuración cristalina.

Dentro de este compromiso de concepción imaginemos un electrón que se mueve según  $+x$ . Supongamos que en los puntos A, B y C (ver Fig. 3.2.7), regularmente espaciados están colocadas cargas eléctricas positivas o iones del cristal. En las ordenadas se ha representado la variación del potencial eléctrico debido a cada carga, siendo muy grande en la proximidad del ión y tendiendo rápidamente a cero a medida que nos alejamos de él, hasta cuando volvemos a encontrar la acción del otro campo debido al ión más vecino. Todo esto hace que el electrón realmente esté sujeto a un potencial periódico debido a la estructura del cristal.

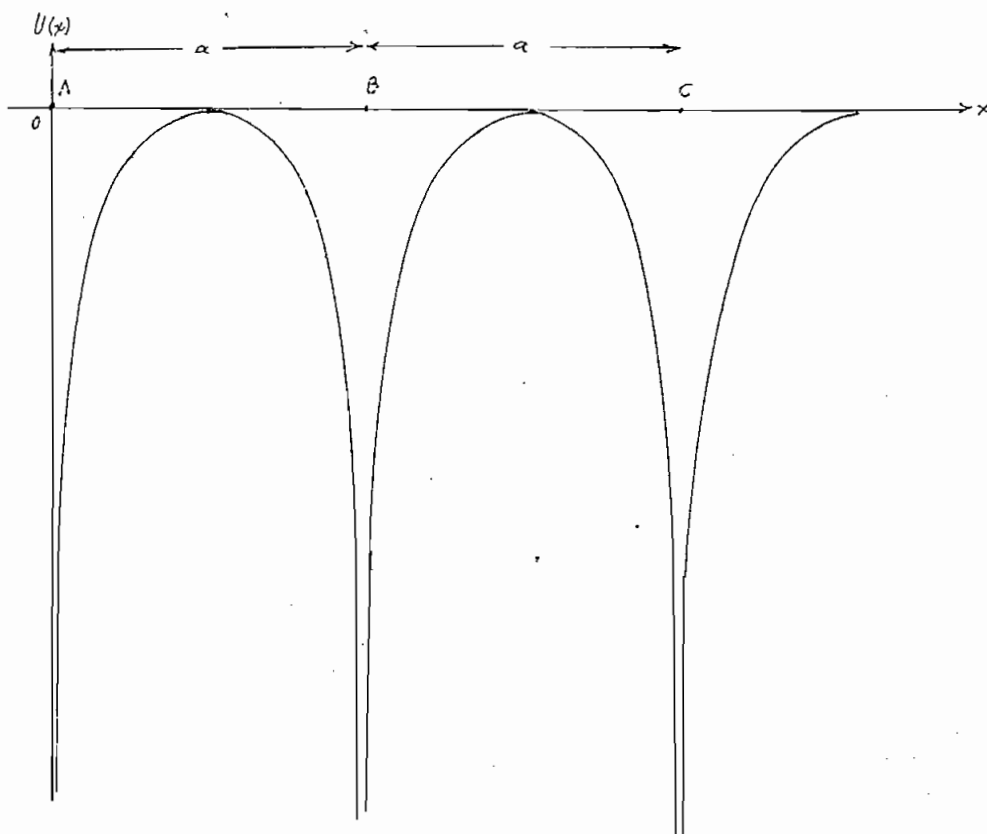


Fig. (3.2.7) Movimiento de un electrón en un potencial periódico.  $U(x)$ .

Podemos decir si denominamos el potencial por  $U(x)$  se cumple:

$$U(x) = U(x + a) \tag{3.2.40}$$

Como  $U(x)$  es periódico podemos expresarle como un desarrollo en series de Fourier de la Forma:

$$U(x) = \sum_G U_G e^{iGx} \tag{3.2.41}$$

Donde los subíndices  $G$  se llaman vectores recíprocos del cristal. La ecuación de onda del electrón en el cristal puede ser escrita como:

$$H\psi = E\psi \tag{3.2.42}$$

Donde  $H$  es el Hamiltoniano\* del sistema y  $E$  el valor propio\*\* del operador  $H$  aplicado sobre  $\psi$ , de modo que:

-----

\* El Hamiltoniano, según la Mecánica Clásica, es una función es calar que se define en el espacio de fases por:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - E$$

donde  $p_i$  es el momento generalizado y  $\dot{q}_i$  es la primera derivada respecto al tiempo de la posición  $i$  de este tipo de espacio.  $E$  es la energía. Cuando  $\partial H / \partial \dot{q}_i = 0$  y  $\partial H / \partial t = 0$   $H$  coincide con la energía total del sistema.

\*\*En Mecánica Cuántica  $H$  es un operador que aplicado sobre  $\psi$  da como resultado la energía total multiplicado por la función de onda  $\psi$ . A la constante que aparece después de haber aplicado el operador  $H$  a  $\psi$  y sobre  $\psi$ , se la denomina un valor propio. Como  $H\psi = E\psi$ , entonces  $E$  será un valor propio.



$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + V(x) \right\} \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (3.2.43)$$

y sustituyendo 3.2.41 en 3.2.43.

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + \sum_{\epsilon} U_{\epsilon} e^{i\epsilon x} \right\} \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (3.2.44)$$

La ecuación 3.2.44 está tomada como aproximación para 1 electrón, es decir, se asume que el electrón se mueve en el potencial del ión y en un potencial promedio debido al efecto de otros electrones.

La función de onda  $\Psi(x)$  puede ser expresada como una serie de Fourier tomada sobre todos los valores de el vector de onda permitidos por las condiciones del contorno; es decir:

$$\Psi(x) = \sum_{\kappa} C(\kappa) e^{i\kappa x} \quad (3.2.45)$$

Nuestro problema se plantea ahora en el sentido que debemos determinar los  $C(\kappa)$  para conocer  $\Psi(x)$ . Sustituimos 3.2.45 en 3.2.44 y por términos separados tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} p^2 \Psi(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{\kappa} C(\kappa) e^{i\kappa x} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\kappa} \kappa^2 C(\kappa) e^{i\kappa x} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

$$\text{y } \left( \sum_{\epsilon} U_{\epsilon} e^{i\epsilon x} \right) \Psi(x) = \sum_{\epsilon} \sum_{\kappa} U_{\epsilon} C(\kappa) e^{i(\kappa+\epsilon)x}$$

haciendo  $\kappa' = \kappa + \epsilon$ , entonces  $\kappa = \kappa' - \epsilon$  y  $\sum_{\epsilon, \kappa'} U_{\epsilon} C(\kappa' - \epsilon) e^{i\kappa' x}$

-----

\* Por el principio de correspondencia, si H es expresado en coordenadas cartesianas se obtiene la ecuación de Onda de 3.2.43 sustituyendo

$K'$  es sólo un subíndice que indica que todos los términos del sumatorio deben sumarse en la región de todos los  $K'$ , por lo tanto si establecemos una correspondencia biunívoca con otro conjunto de valores de subíndice,  $K$  por ejemplo, podemos decir que:

$$\sum_G \sum_{K'} U_G C(K'-G) e^{iK'x} = \sum_G \sum_K U_G C(K-G) e^{iKx}$$

Con lo que la ecuación (3.2.43) quedaría:

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + U(x) \right\} \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_K K^2 C(K) e^{iKx} + \sum_K \sum_G U_G C(K-G) e^{iKx} = E \sum_K C(K) e^{iKx}$$

$$\sum_K \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} K^2 C(K) + \sum_G U_G C(K-G) \right\} e^{iKx} = E \sum_K C(K) e^{iKx}$$

Si ambos sumatorios son iguales y como ambos se hacen en el dominio de los  $K$ , los términos de la sucesión deben ser iguales, de modo que:

$$\frac{\hbar^2}{2m} K^2 C(K) + \sum_G U_G C(K-G) = EC(K)$$

haciendo  $\hbar^2 K^2 / 2m = \lambda_K$  obtenemos finalmente:

$$(\lambda_K - E) C(K) + \sum_G U_G C(K-G) = 0 \quad (3.2.47)$$

Es un modo muy útil de escribir la ecuación (3.2.43). La ventaja del método consiste en que hemos transformado una ecuación diferencial, difícil de manejar por aparecer un potencial periódico, en un sistema de ecuaciones algebraicas. La ecuación (3.2.47) relaciona los coeficientes de Fourier  $C(K)$  con cualquier otro coeficiente  $C$ , porque el vector de onda difiere de  $K$  por un vector recíproco del cristal.

En principio un número infinito de coeficientes están interrelacionados por (3.2.47), y podemos obtener un número infinito de ecuaciones independientes de la misma forma por la sustracción de cualquier vector recíproco a K en (3.2.47). Así si sustraemos un G' particular a K, tendremos:

$$(\hbar K - G' - E) C(K - G') + \sum_G U_G C(K - G - G') = 0 \quad (3.2.48)$$

Por este camino podemos generar un conjunto infinito de ecuaciones algébricas homogéneas. En la práctica podemos obtener una buena aproximación con dos, o tal vez cuatro ecuaciones para luego determinar las cuatro raíces de E que son los valores propios de la energía. Con estas raíces podemos determinar los C.

A continuación describiremos algunas propiedades de la función de onda de un electrón que se mueve en un potencial periódico:

1. Podemos derivar desde 3.2.47 un útil e importante resultado sobre la forma de las funciones  $\Psi$ . Primero necesitamos un método para tratar una función particular. Tomemos cualquier vector de onda que aparece en el sumatorio 3.2.45 y llámémosle K.

Observamos de 3.2.47 que los coeficientes C(K) de la distribución de Fourier no involucran un  $\Psi_K$  dado porque únicamente aparecen los de la forma C(K - G) como parte de  $\Psi_K$  donde G es el vector recíproco del cristal. Todos los K' en la función de onda 3.2.45, son de la forma K - G. Entonces matemáticamente podríamos hacer la siguiente transformación:

$$\Psi(x) = \sum_{K'} c(K') e^{iK'x}$$

$$\Psi(x) = \sum_k \sum_G c(k-G) e^{i(k-G)x} \quad \text{donde: } k \geq G$$

Entonces también podríamos decir que:

$$\Psi(x) = \sum_k \Psi_k(x) \quad \text{de modo que:}$$

$$\sum_k \Psi_k(x) = \sum_k \sum_G c(k-G) e^{i(k-G)x}$$

$$\Psi_k(x) = \sum_G c(k-G) e^{-iGx} \quad (3.2.49)$$

Que podríamos escribir como:

$$\Psi_k(x) = e^{ikx} \sum_G c(k-G) e^{-iGx}$$

haciendo  $\mu_k(x) = \sum_G c(k-G) e^{-iGx}$  (3.2.50)

tenemos:  $\Psi_k(x) = \mu_k(x) e^{ikx}$

Porque  $\mu_k(x)$  es una serie de Fourier sobre el vector recíproco de la red, es invariante bajo una traslación T en la red cristalina, de modo que:

$$\mu_k(x) = \mu_k(x+T) \quad (3.2.51)$$

Este resultado es un ejemplo del denominado teorema de Bloch que establece que "Las funciones propias de una ecuación de onda para un potencial periódico, son de la forma:

$$\Psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \mu_k(\vec{r})$$

donde  $\mu_k(\vec{r})$  es periódico en la red cristalina". Una función de

la forma 3.2.50 es conocida como "función de Bloch". Todas las funciones de onda para un electrón en una red cristalina son de la forma de Bloch.

2. Bajo una traslación T que lleva  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + \vec{T}$  tendremos:

$$\begin{aligned} \psi_{\kappa}(\vec{r} + \vec{T}) &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{T}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \mu_{\kappa}(x + T) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{T}} \psi_{\kappa}(\vec{r}) \\ \psi_{\kappa}(\vec{r} + \vec{T}) &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{T}} \psi_{\kappa}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Aquí aparece  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{T}}$  que es el factor de fase porque está multiplicando a la función de Bloch cuando nos trasladamos  $\vec{T}$  en una estructura cristalina.

3. Si el potencial de la estructura es cero, la ecuación 3.2.51 se reduce a  $(\mu_{\kappa} - E)C(\vec{k}) = 0$ , donde todos los  $C(\vec{k})$  son cero, excepto  $C(\vec{k})$ , y además  $\mu_{\kappa}(x)$  es constante. Tenemos entonces:

$$\psi_{\kappa}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} A_{\kappa} \quad (3.2.53)$$

que es la misma del electrón libre.

4. El valor de  $\vec{k}$  interesa en la ley de conservación por procesos de colisión en el cristal. Por esta razón  $\vec{k}$  es llamado el momento del cristal para un electrón. Cuando un electrón  $\vec{k}$ , choca con un Phonon de vector de onda  $\vec{k}_2$  se cumplirá:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}' + \vec{G}$$

Si el Phonon es absorbido en la colisión, el elec-

trón pasará del estado  $\bar{K}$ , al estado  $\bar{K}'$  y  $\bar{G}$  es el vector recíproco de la red.

### 3.2.6. Solución aproximada en la Zona Límite.

Supongamos que en un problema unidimensional los componentes de Fourier del potencial periódico  $U_G$  son pequeños en relación con la energía cinética  $\lambda_K = \hbar^2 K^2 / 2m$  de un electrón libre.

Cerca de la zona de contorno necesitamos una aproximación en la que tomamos de dos términos, que pueden ser  $C(K)$  y  $C(K-G_1)$  es decir:

$$\begin{cases} (\lambda_K - E_K) C(K) + U_{G_1} C(K-G_1) = 0 \\ (\lambda_{K-G_1} - E_{K-G_1}) C(K-G_1) + U_{-G_1} C(K) = 0 \end{cases} \quad (3.2.54)$$

Este es un sistema trivial en caso que el determinante fuese distinto de cero, pero si el determinante del sistema es igual a cero, entonces tenemos una indeterminación igual a 0/0 para cualesquiera de los  $C$  implícitos, de modo que es posible que existan soluciones no triviales; en este caso:

$$\begin{vmatrix} \lambda_K - E_K & U_{G_1} \\ U_{-G_1} & \lambda_{K-G_1} - E_{K-G_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.55)$$

Notemos que  $U_{-G_1}$  aparece aquí. Como  $U(x)$  se definía por:

$$U(x) = \sum_G U_G e^{iGx}$$

entonces podemos decir que:  $U_G(x) = U_G e^{iGx}$        $U_{-G}(x) = U_G e^{-iGx}$

de modo que esas dos funciones deben ser reales porque  $U(X)$  lo es, luego su suma también será un número real:

$$\begin{aligned} U_G(x) + U_{-G}(x) &= U_G (\cos Gx + j \mu \sin Gx) + U_{-G} (\cos Gx - j \mu \sin Gx) \\ &= \cos Gx (U_G + U_{-G}) + j \mu \sin Gx (U_G - U_{-G}) \end{aligned}$$

entonces  $U_G - U_{-G} = 0$

y  $U_G = U_{-G}$

El determinante 3.2.55 queda pues:

$$\begin{vmatrix} \lambda_K - E_K & U_1 \\ U_1 & \lambda_{K-G_1} - E_K \end{vmatrix} = 0$$

de donde  $E_K^2 - E_K (\lambda_{K-G_1} + \lambda_K) + \lambda_{K-G_1} \lambda_K - U_1^2 = 0$

y  $E_K = \frac{1}{2} (\lambda_{K-G_1} + \lambda_K) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\lambda_{K-G_1} - \lambda_K)^2 + U_1^2}$  (3.2.56)

La función  $E_K$  se aparte del valor calculado en 3.2.56 cuando se cumple la condición para que la refracción de Bragg exista en la estructura cristalina:

$$(\bar{k} - \bar{G})^2 = k^2 \quad (3.2.57)$$

Para nuestro caso, el problema es unidimensional

$$(k - G_1)^2 = k^2 \quad (3.2.58)$$

es decir cuando  $G_1 = 0$  y cuando  $k = 1/2 G_1$  (3.2.59)

como  $\lambda_K = \hbar^2 K^2 / 2m$  entonces para ese caso  $\lambda_K = \lambda_{K-G_1} = \lambda_1$  de modo que E tendrá dos valores  $E_1(+)=\lambda_1+U_1$ ,  $E_1(-)=\lambda_1-U_1$  los cuales están separados entre sí por  $2|U_1|$ . Tomemos ahora el sistema de ecuaciones 3.2.54, veremos que de:

$$(\lambda_K - E_K)C(K) + U_{G_1}C(K - G_1) = 0$$

en esta condición e introduciendo 3.2.59 y  $E_K = E_1(+)$  tendremos:

$$C(1/2 G_1) = C(-1/2 G_1) \quad (3.2.60)$$

e introduciendo 3.2.59 y  $E_K = E_1(-)$  entonces:

$$C(1/2 G_1) = -C(-1/2 G_1) \quad (3.2.61)$$

$$\text{lo cual implica que } \psi_{G/2}(x) = \exp \frac{iG_1 x}{2} \pm \exp -\frac{iG_1 x}{2} \quad (3.2.62)$$

Esto significa que en esa zona cuando  $K = 1/2 G_1$  aparecen dos funciones de onda  $\psi(+)$  y  $\psi(-)$  las cuales corresponden en el cristal a diferentes valores de energía. Podemos separar a  $\psi_{G/2}(x)$  en esos dos valores:

$$\psi(+)= e^{\frac{i\pi x}{a}} + e^{-\frac{i\pi x}{a}} = 2 \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$\psi(-)= e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{-\frac{i\pi x}{a}} = 2i \sin \frac{\pi x}{a}$$

ahora bien, la densidad de probabilidad  $P = |\psi(x)|^2$ , entonces:

$$P(+)\propto \cos^2 \frac{\pi x}{a} \quad (3.2.63)$$

$$P(-)\propto \sin^2 \frac{\pi x}{a} \quad (3.2.64)$$



representemos este resultado en un gráfico, de modo que según  $x$  coloquemos la distribución de los iones (+) de la estructura cristalina separados entre sí una magnitud  $a$ .

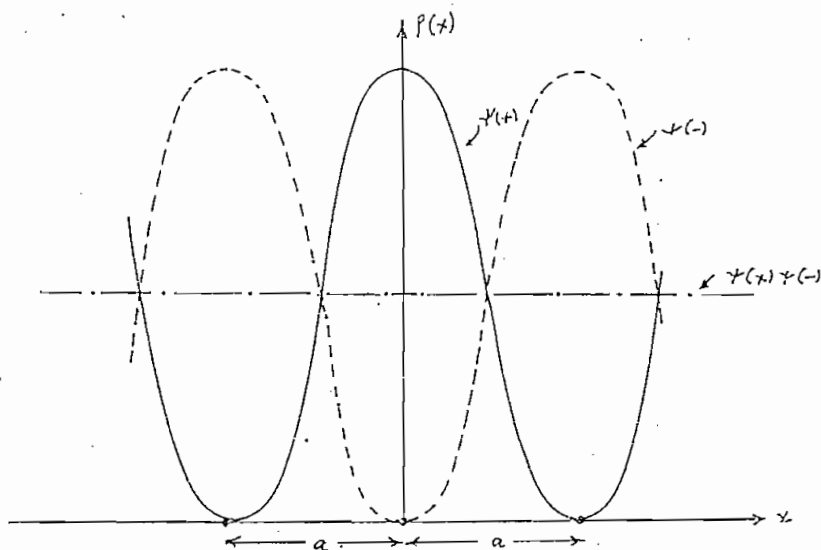


Fig. (3.2.8). Densidad de Probabilidad para  $\psi(+)$ ,  $\psi(-)$  y  $\psi(+)\psi(-)$

Ahora tomemos una onda viajera pura  $\psi \propto e^{ikx}$ , entonces

$$p \propto e^{ikx} e^{-ikx} = 1 \quad \text{UNA CONSTANTE.} \quad (3.2.65)$$

$p$  no es constante para una combinación lineal de ondas planas como lo señalan las ecuaciones 3.2.63 y 3.2.64. A parecen pues tres tipos de distribución, una dada por  $\psi(+)$ , otra dada por  $\psi(-)$  y otra dada por la onda viajera que es taría sobre la línea  $p = \text{constante}$ . En otras palabras, una on da viajera distribuye electrones en la línea preferentemente, la onda  $\psi(-)$  distribuye electrones preferencialmente entre

los iones del metal y  $\Psi (+)$  lo hará sobre los iones del metal, donde la energía potencial es más pequeña. Si calculamos los valores medios de la energía potencial sobre las tres distribuciones de carga, esperamos encontrar que la de  $\Psi (+)$  es más baja que la de la onda viajera, mientras que  $\Psi (-)$  es más grande que la de la onda viajera. En el caso que  $\Psi (+)$  y  $\Psi (-)$  difieren entre sí por una energía  $E_g$ , tendremos una discontinuidad de la energía por un valor  $E_g$  entre las dos soluciones que aparecen para la condición de refacción de Bragg  $K = 1/2 G$ . (aquí  $E_g = 2|U_1|$ ).

Veamos qué pasa en las cercanías de la zona límite. Para ello es conveniente definir la cantidad  $\delta$  por:

$$K = \frac{1}{2} G_1 - \delta \quad (3.2.66)$$

aquí el vector de onda  $\delta$  mide la diferencia de  $K$  hasta la zona límite.

$$E_K = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{4} G_1^2 + \delta^2 \right\} \pm \sqrt{4\lambda_1 \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} + U_1^2} \quad (3.2.67)$$

$$E_K = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{4} G_1^2 + \delta^2 \right\} \pm U_1 \left\{ 1 + \frac{2\lambda_1}{U_1^2} \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} \right\} \quad (3.2.68)$$

Casi siempre  $\hbar^2 \delta^2 G_1 / 2m \ll |U_1|$ . Esta restricción limita  $\delta$  para valores muy pequeños porque el cálculo del sistema de ecuaciones 3.2.54 es basado en la suposición  $\hbar^2 G_1^2 / 2m \gg |U_1|$ . Usando  $E_1(\pm) = \lambda_1 \pm U_1$  3.2.68 se expresará como:

$$E_K(+)= E_1(+)+ \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} \left\{ 1 + \frac{2\lambda_1}{U_1} \right\} \quad (3.2.69)$$

$$E_K(-)= E_1(-)+ \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} \left\{ 1 - \frac{2\lambda_1}{U_1} \right\}$$

$$E_k(-) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{4} G_i^2 + \delta^2 \right) \pm U_i \left( 1 + \frac{2\hbar^2}{U_i^2} \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} \right) \quad (3.2.70)$$

Nótese la dependencia cuadrática del vector de onda.

### 3.2.7. Bandas de energía.

Todo lo que hasta aquí se ha expresado se puede objetivizar mucho mejor si representamos a  $E_k$  como función de  $K$ . (Ver Fig. 3.2.9).

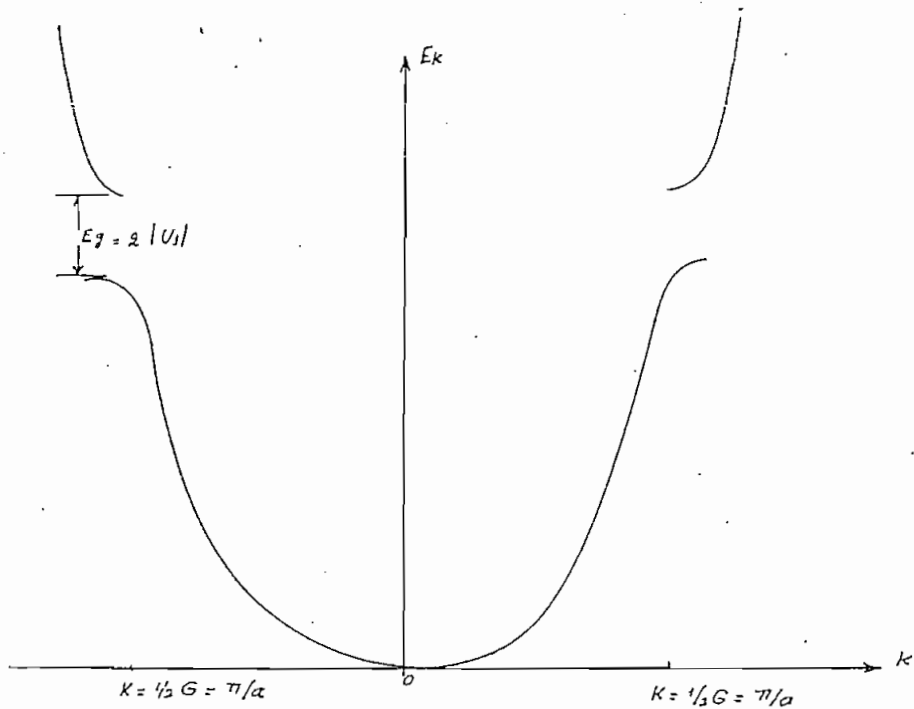


Fig. (3.2.9). Variación de la energía del electrón en función del vector de onda en un cristal.

Aquí vemos que  $E_k$  varía en forma cuadrática con  $K$ , conforme a la ecuación 3.2.56; pero cuando nos aproximamos a  $K = 1/2 G$  se presentará una zona de energía prohibida de valor  $E_g = 2 U_1$  debido a que en ese punto sucede la refacción de Bragg.

La zona comprendida entre  $-1/2 G \leq K \leq 1/2 G$  se denomina primera zona de Brillouin. En general se define la  $n$  Zona de Brillouin a la región donde está  $K$  comprendida por:

$$nG/2 \leq K \leq (n+1)G/2$$

Es decir, entre zonas donde se produce reflexión de Bragg. A las curvas separadas por  $E_g$  se las denomina bandas de energía, mientras que  $E_g$  toma el nombre de banda de energía prohibida.

Falta realizar ahora una última consideración. Imaginemos un cristal lineal construido por celdas primitivas de longitud  $a$ . Determinemos que el cristal sea finito por la aplicación de condiciones periódicas de contorno sobre las funciones de onda de longitud  $L = Na$  de cristal, donde  $N$  es el número de celdas primitivas. Todos los valores del vector de onda  $K$  en la primera zona de Brillouin son dadas por:

$$K = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \pm \frac{N\pi}{L}$$

Tenemos limitada la serie por  $N\pi/L = \pi/a$ , porque ese es el límite de la zona. El punto  $-N\pi/L = -\pi/a$  no se considera como punto independiente porque está relacionado con el vector recíproco de la red. El número total de puntos dados en

la ecuación anterior, es exactamente  $N$ . Veremos que cada celda primitiva contribuye con un valor independiente de  $K$  para cada banda de energía. Este resultado se traslada sobre las tres di mensiones.

Considerando las dos orientaciones del Spin, hay  $2N$  estados independientes en cada banda de energía. Si existen so lamente átomos de valencia 1 dentro de cada celda primitiva, la banda estará semillena de electrones. Si cada átomo contribuye con dos electrones de valencia en la banda, la banda estará exactamente llena (al cero absoluto\*). Si allí hay dos átomos de valencia 1 en cada celda primitiva, la banda también esta rá exactamente llena.

### 3.3. CONDUCTORES Y AISLANTES.

Si los electrones de valencia llenan exactamente una o más bandas de energía, entonces tendremos un aislador. Un cam po eléctrico externo no causará corriente. Una banda llena está separada por la zona de energía prohibida de la siguiente banda superior. Cuando eso sucede no hay forma de modificar el momen- to de los electrones en el cristal. Cualquier estado acequible estará lleno, negando cualquier tipo de cambio cuando el campo es aplicado.

Otra forma de apreciar lo que está sucediendo es por medio:

$$\vec{F} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt}$$

-----  
\* Véase distribución de Fermi - Dirac.

bajo la acción de una fuerza constante el vector de onda crece rá continuamente en el tiempo. Pero cuando  $\bar{K}(t)$  llega al límite de la zona, el vector de onda cambia rápidamente al límite opuesto, por reflexión de Bragg, para luego ser acelerado por el campo exterior.

Un cristal, dijimos, puede ser aislante si el número de electrones de valencia llenan totalmente una celda primitiva. Pero dado cualquier número de electrones de valencia por celda primitiva, es necesario considerar si se presentan bandas de energía sobrelapadas. Si se presentan bandas superpuestas, bajo la premisa que una banda llena dará un aislante, podremos tener dos o más bandas no llenas dándonos un conductor.

Los metales alcalinos y los metales nobles tienen un electrón de valencia por celda primitiva y como ellos también presentan estas características otros metales. Las tierras raras presentan dos electrones de valencia por celda primitiva; deberían ser aislantes, pero por presentar bandas sobrelapadas de energía, aparecen como metales y no con muy buenas características de conductor.

El diamante, el silicio y el germanio tienen 8 electrones de valencia por celda primitiva y sus bandas no se sobrelapan, así que sus cristales puros serán aislantes.

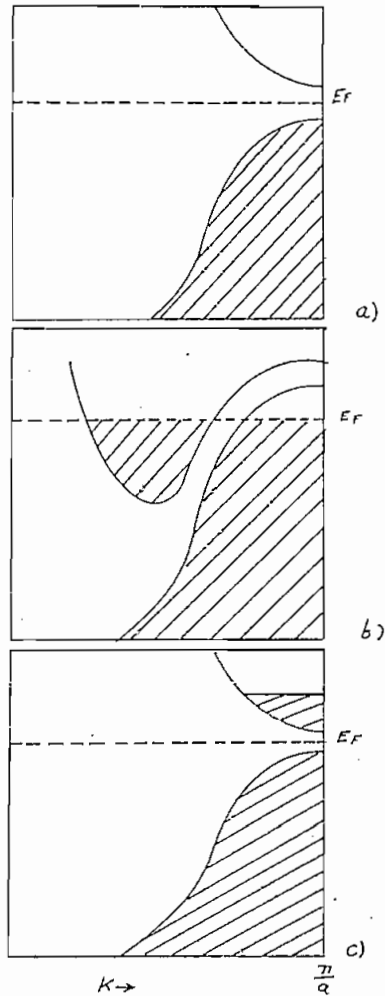


Fig. (3.3.1). En los gráficos de la Fig. (3.3.1) se presentan todos los niveles: En a) se presentan todos los niveles completamente llenos, luego tendremos un aislante. En b) tenemos el caso de dos bandas que se sobrelapan en energía, presentándose las características de un metal, pues los niveles no están de todos llenos. c) Conductor pues la banda superior no está completa.

### 3.4. ELECTRONES, HUECOS Y ÓRBITAS EN EL ESPACIO $\bar{k}$ .

La dinámica de un electrón en un campo magnético cons

tante  $\vec{H}$  está dado por:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \vec{V}_g \times \vec{H} \quad (3.4.1)$$

Como la velocidad de grupo se define como:

$$\vec{V}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \text{grad}_{\vec{k}} \omega \quad (3.4.2)$$

Si a la ecuación anterior le multiplicamos por  $\hbar$

$$\hbar \vec{V}_g = \hbar \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \text{grad}_{\vec{k}} E$$

De modo que tomando en cuenta la ecuación 3.4.1:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e}{\hbar^2 c} \nabla_{\vec{k}} E \times \vec{H} \quad (3.4.3)$$

Ahora bien, el movimiento del electrón en el espacio  $\vec{k}$  será de modo que sea perpendicular a  $\nabla_{\vec{k}} E$ , de modo que el electrón se mueve sobre una superficie de energía constante. Como  $\vec{H}$  es constante se le puede considerar como un vector directriz de un plano. Como  $d\vec{k}/dt$  es normal a  $\vec{H}$ , pertenecerá a ese plano. Entonces podemos concluir que el movimiento del electrón en este tipo de espacio está determinado por la intercepción de una superficie de Fermi y el plano determinado por  $\vec{H}$ .

La existencia de huecos es uno de los más interesantes resultados de la teoría de las bandas de energía en los sólidos. Este resultado tiene su aplicación práctica porque la operación de transistores depende siempre de la coexistencia de huecos y electrones dentro de un cristal semiconductor.



Los estados vacíos en la banda son comúnmente llamados huecos. Estos presentan las características interesantes siguientes:

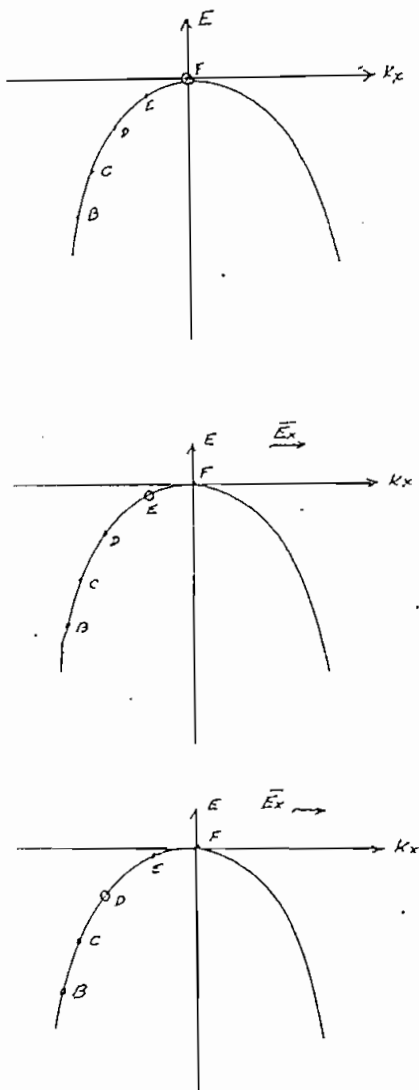


Fig. (3.4.1). Movimiento de un hueco en una banda de energía.

Consideremos el movimiento de un hueco en un campo e léctrico aplicado (Fig. 3.4.1). Inicialmente la banda está lle na, excépto por un solo lugar vacante  $F$  en el tope de la banda

de energía. Un campo eléctrico  $E_x$  es ahora aplicado según la dirección  $+k_x$ . El movimiento de los electrones en la banda está dado por:  $\hbar dk_x/dt = -eE_x$

Cada electrón cambia su  $k_x$  al mismo tiempo. Veremos que  $\Delta k_x$  es negativo en la Figura. El lugar vacío inicial F es desplazado primero del lugar E y subsiguientemente a D. Esto es, los huecos se mueven en el sentido de decrecimiento de  $k_x$ .

Para el sector colocado a la izquierda de F el valor  $dE/dk_x$  es positivo. La velocidad de grupo  $(1/\hbar) \partial E / \partial k_x$  nos indica que la velocidad de los lugares vacíos se encuentra en la dirección del campo eléctrico. Este hecho podría hacer que definamos a los huecos como partículas cargadas con masa y carga positiva, o con masa y carga negativa. Más adelante demostraremos que la posibilidad positiva es correcta.

El vector de onda y la velocidad total de los electrones en una banda llena es cero:

$$\begin{aligned} \sum \bar{k} &= 0 \\ \sum v(\bar{k}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Si la banda está llena, todos los estados pares  $\bar{k}$  y  $-\bar{k}$  tienen velocidades iguales y opuestas; así que la contribución total de las velocidades es cero, se anula. El resultado  $\sum \bar{k} = 0$  viene de la definición geométrica de la zona de Brillouin. El resultado  $\sum v(\bar{k}) = 0$  viene de usar  $v_{\bar{k}} = \partial E / \partial k_x$  y tomar lo integral:

$$\int \frac{\partial E}{\partial k_x} dk_x$$

cuyo valor es cero para una banda llena.

Si la banda está llena excepto por un electrón que ha salido del estado E, nosotros diremos que hay un hueco en el estado E. "Las propiedades físicas del hueco" vienen de la totalidad de electrones en la banda. Si el electrón se trasladó al estado  $K_e$ , el vector total del sistema es  $-K_e$ , vector que es atribuido a la contribución de un hueco por:

$$K_h = -K_e \quad (3.4.5)$$

La fuerza sobre el electrón es:

$$\bar{F}_e = -\hbar \frac{d\bar{K}_e}{dt}$$

Para un hueco es

$$\bar{F}_e = \hbar \frac{d\bar{K}_h}{dt}$$

entonces

$$\hbar \frac{d\bar{K}_h}{dt} = e \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \bar{V}_e \times \bar{H} \right) \quad (3.4.6)$$

Esta es la ecuación de movimiento de una partícula de carga positiva, probando que  $|\bar{v}_e| = |\bar{v}_h|$ . La determinación de la velocidad  $\bar{v}_h$  del hueco no es muy difícil. Consideremos el movimiento en un campo eléctrico. De la ecuación 3.4.6 podríamos asignar al hueco una carga positiva. La velocidad debería ser asignada para que la corriente eléctrica sea correcta. La contribución de un electrón en el estado E de la Figura 3.4.1 para la velocidad total es  $V(E)$ . Esta es dada por:

$$V_e = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\kappa} E(\kappa)$$

Evaluado en E, un electrón en el estado G con  $K(G) = -K(E)$  tiene una velocidad igual pero opuesta:  $\bar{V}(G) = -\bar{V}(E)$ . Si un electrón es transportado hasta E, entonces la corriente está dada únicamente por un electrón, que en G:

$$\bar{J} = -e \bar{V}(G) = -e \{-V(E)\} = eV(E) \quad (3.4.7)$$

La misma que está coincidiendo con la carga positiva de un hueco, la velocidad del hueco deberíamos tomar como la de transporte del electrón. El electrón es transportado desde el estado  $\bar{K}_e$ . Si  $V_e$  es la velocidad que un electrón tendría en el estado  $K_e$ , entonces:

$$\bar{V}_h = \bar{V}_e = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\kappa} E(K_e) \quad (3.4.8)$$

Como demuestra aquí el símbolo E ( $K_e$ ) enfatiza la energía del electrón en el estado  $K_e$ , entonces por conveniencia deberíamos tomar la energía cero al tope de la banda llena o aproximadamente llena. A el hueco creado por el movimiento de un electrón desde  $K_e$  podemos asignarle una energía:

$$E_h = -E_e(K_e) = -E(K_e) \quad (3.4.9)$$

Si la banda es simétrica en  $E(K) = E(-K)$ , podemos interpretar  $E_h$  como  $E_h(K_h)$ . La energía del hueco es opuesta en signo a la energía de transporte del electrón (toma más trabajo mover un electrón desde un estado de baja energía a otro de más alta energía). Por una banda simétrica tendremos desde  $\bar{K}_h = \bar{K}_e$

y desde 3.4.6:

$$v_h = \frac{1}{\hbar} \nabla_{k_h} E_h(k_h) \quad (3.4.10)$$

De 3.4.6 y 3.4.8 tenemos:

$$\hbar \frac{dk_h}{dt} = e \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v}_h \times \bar{H} \right) = \bar{F}_h \quad (3.4.11)$$

La masa efectiva (como veremos más adelante) de un hueco es opuesta en signo a la de transporte del electrón: la masa efectiva del hueco se define por  $m_h d\bar{v}_h/dt = e\bar{E}$ , pero hemos visto que  $\bar{v}_h = -\bar{v}_e$ , así que  $d\bar{v}_h/dt = -d\bar{v}_e/dt$  y:

$$m_h = -m_e \quad (3.4.12)$$

Esta es la diferencia real entre la conducta de un solo hueco cerca del tope de otro lado de la banda llena y un electrón solo cercano al tope de el otro lado de la banda complementaria. Un electrón solitario tiene carga negativa y por una serie de argumentos que se verán más adelante, la masa efectiva del electrón cerca del tope es negativa. El hueco en una posición similar en la banda actúa sí como tuviera masa positiva y carga positiva. Entonces la relación carga a masa es lo mismo, pero un electrón solitario como para un hueco solitario. El electrón y el hueco, pues, tendrán una aceleración en un mismo sentido en la presencia de un campo eléctrico en el límite de la banda.

Aclararemos ahora el concepto de la masa efectiva del electrón en el cristal: tomando la ecuación 3.2.69, podemos decir:

$$E(\delta) = E_j(-) + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m} \quad (3.4.13)$$

donde  $\delta$  es el vector de onda cercano a la zona límite y

$$m^* = \frac{m}{1 - 2\hbar^2 / U_j} \quad (3.4.14)$$

y  $\lambda_j$  está dado por la energía cinética,  $U_j$  es tomado de  $U_j(x) = U_j \cos G_j x$ . Tomemos a  $U_j$  como negativo si se presenta un potencial de atracción en  $X = 0$ . La ecuación 3.4.13 demuestra que un electrón en un cristal puede presentarse si como tuviese masa distinta a la del electrón libre. Hay cristales donde la masa efectiva puede ser mucho más grande o más pequeña que la masa "real"  $m$ ; la masa efectiva puede ser anisotrópica y negativa. El punto importante es que un electrón es acelerado a un potencial periódico relativo a una red cristalina en la aplicación de un campo eléctrico o magnético si como la masa fuese igual a la masa efectiva que definiremos formalmente más adelante.

Veremos primero el movimiento de un paquete de ondas en un cristal lineal en la aplicación de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Suponemos que el paquete de ondas se define sobre los estados cercanos a un valor particular  $K$  en una banda.

Asumiremos la expresión general de velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.4.15)$$

La frecuencia ligada a un paquete de energía es:

$$\omega = E/\hbar$$

$$\frac{E}{\hbar} = \omega \quad (3.4.16)$$

entonces 
$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (3.4.17)$$

El trabajo  $\delta E$  que se realiza para mover un electrón por un campo eléctrico  $E$  en un intervalo de tiempo  $\delta t$  es:

$$\delta E = -eE v_g \delta t \quad (3.4.18)$$

Usando 2.4.17. Si comparamos las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$\delta k = -\frac{eE}{\hbar} \delta t \quad (3.4.19)$$

luego 
$$\hbar \frac{dk}{dt} = F \quad (3.4.20)$$

Esta es una importante relación: en un cristal es igual a la fuerza exterior sobre el electrón. En el espacio libre  $d/dt (m\bar{v})$  es igual a la fuerza. Tenemos un resultado interesante: el electrón en el cristal pueda ser considerado como una partícula sujeta a fuerzas exteriores. Si cambiamos la expresión de movimiento de un electrón en términos de una fuerza exterior sobre él, podemos simplificar el análisis del problema.

Como 
$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}$$

$$\frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2E}{dk dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2E}{dk^2} \frac{dk}{dt}$$

pero 
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\hbar} ; \quad dt = \frac{\hbar dk}{F}$$

$$\frac{dv_g}{dt} = \frac{F}{\hbar^2} \frac{d^2E}{dk^2}$$

ó 
$$F = \frac{\hbar^2}{d^2E/dk^2} \frac{dv_g}{dt} \tag{3.4.21}$$

Es evidente que  $\hbar^2/d^2E/dk^2$  juega el rol de una masa. Po demos llamar esta cantidad masa efectiva  $m^*$

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dk^2} \tag{3.4.22}$$

Así, si la energía es una función cuadrática del vec tor podemos decir:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

La ecuación 3.4.22 puede generalizarse para cristales anisotrópicos mediante el tensor:

$$\left( \frac{m}{m^*} \right)_{ij} = \frac{m}{\hbar^2} \frac{d^2E}{dk_i dk_j} \tag{3.4.23}$$



A pesar que todas las definiciones anteriores aparecen como un formulismo, éstos nos ayudan a comprender el proceso de la reflexión de Bragg de una "onda" de electrones en una red cristalina.

Dentro de la consideración de que la energía potencial de los iones es muy pequeña en relación a la energía cinética, veremos que en la parte más baja de la banda el estado está representado más adecuadamente por una onda plana de la forma  $\exp(iKx)$  ; la componente  $\exp [i(\kappa - G_1)x]$  es pequeña y crece únicamente si  $K$  crece. En esta región  $m^* \approx m$ . Al incrementarse la componente de reflexión  $\exp [i(\kappa - G_1)x]$  significa que hay una transferencia de momento lineal del cristal al electrón. Cerca del límite la componente de reflexión es más grande; y llega a ser igual en amplitud a  $\exp[iKx]$ , punto en el cual las funciones propias son ondas estacionarias en lugar de ondas viajeras.

Esto no suprime el hecho de que encontremos valores negativos de  $m^*$  justo en las inmediaciones de la zona límite. Una masa efectiva que sea negativa significa que yendo del estado  $K$  al  $K + dK$ , el momento lineal transferido del cristal al electrón es mucho mayor a la variación del momento lineal que tendría el electrón en un campo exterior. Siempre que  $K$  está creciendo por  $\Delta K$  por la aplicación de un campo eléctrico, la reflexión de Bragg no existe hasta presentarse la zona límite. Como  $m^*$  depende en relación inversa a la segunda derivada de la energía respecto a el vector de onda; resulta que esa derivada

en la zona límite tiende a cero y la masa tiende a infinito, de modo que hay un momento donde toda la energía del campo exterior no hace más que servir a que justo en la reflexión de Bragg el vector de onda sea opuesto y la aceleración del campo exterior también sea opuesto, e implica que necesariamente la masa es negativa.

### 3.5. TEORIA DE SEMICONDUCTORES.

#### 3.5.1. Introducción.

Hasta aquí hemos visto que la conducción eléctrica se representa más explícitamente por una teoría coherente al considerar un electrón que se mueve en una red cristalina, si como aquel se moviese con una masa efectiva  $m$  que puede tomar varios valores según el estado de energía que presente dentro de la estructura por la excitación de un campo exterior. Entonces podemos introducir este concepto a la primera aproximación de "gas de electrones libres" y todas las deducciones que se hicieron acápite pasan a considerar todos los efectos del potencial periódico de la red a través de  $m$ .

También habíamos expresado el hecho que la conducción se presenta cuando en las celdas primitivas de la estructura, los elementos no estaban llenando las bandas de energía, o porque por sobrelaparse bandas de energía se posibilita el llenar parcialmente ambas.

También vimos que cuando dentro de las celdas primitivas, tales niveles cuánticos están perfectamente llenos, en tonces tenemos un aislante.

Supongamos ahora que la banda de energía prohibida tiene un ancho  $E_g$  pequeño, de modo que por la influencia de energía térmica, luz, etc., sea posible sacar electrones de una banda de valencia llena para enviarla a la banda de conducción; si esto sucede en un cristal que normalmente es aislante a  $^{\circ}K$ , entonces diremos que ese cristal tiene características de un semiconductor intrínscico. El nombre intrínscico es aplicable al caso en que la característica semiconductor a material puro. Los elementos de la 4<sup>o</sup>) Familia de la tabla periódica son un caso de este tipo:

Elementos	$E_g$	Propiedad
C (diamante)	7 e V	Aislador
Si	1.1 e V	Semiconductor
Ge	0.7 e V	Semiconductor
Sn (estaño gris)	muy pequeño	Semiconductor
Pb	muy pequeño	Conductor

En este tipo de semiconductores es difícil procesar cristales absolutamente puros, de modo que las características semiconductoras se deben en gran parte a que premeditadamente metemos impurezas; o porque existen desviaciones estequiométricas. Tales semiconductores se llaman extrínscicos. Una interesante característica de los semiconductores es que la corriente es llevada por dos tipos de portadores: los electrones de la banda de conducción y los correspondientes huecos de la banda de valencia. Pero a menudo es conveniente trabajar con un solo tipo de portadores o que predomine un solo tipo de ellos. Si predominan los huecos se denomina semiconductor tipo p (p por positivo) y si predominan en cambio los electrones se dice que es tipo n (n por negativo).

Quando obtenemos semiconductores tipo n o p en cristales

iónicos mediante desviaciones estequiométricas, a tales sustancias las llamamos semiconductores de exceso o de defecto. En cambio en el caso de cristales donde los átomos tienen enlaces covalentes para formar la red cristalina del semiconductor, se los puede hacer n o p, simplemente por agregarles impurezas de modo que en cada celda primitiva existan estados cuánticos ocupados en exceso por electrones de valencia, de modo que definimos así un material tipo n; o un defecto o vacío de modo que definimos semiconductores tipo p.

### 3.5.2. Semiconductores de Impureza.

Si se agregan átomos de impureza procedentes del grupo V del sistema periódico (P, As, Sb), los que poseen 5 electrones exteriores, ellos tomarán alguno de los átomos regulares de la red cristalina.

Cuatro de los electrones exteriores forman parte de los cuatro enlaces covalentes con sus vecinos, quedando el quinto electrón ligado muy debilmente. Así, estos átomos de impurezas dan origen a niveles donadores ocupados próximos al fondo de la banda de conducción; por tanto, el semiconductor obtenido es de tipo n. El átomo de impureza y el quinto electrón constituyen una estructura parecida, externamente, a la del hidrógeno, de modo que habrá una serie de niveles energéticos ligados con energías:

$$E_n = - 13.6 \frac{m_e^*}{m} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \quad [eV]$$

Donde  $m_e^*$  es la masa efectiva del electrón,  $\epsilon$  es la

constante dieléctrica del medio y  $n = 1, 2, \dots$ ; donde el nivel  $n = 1$  (estado fundamental) es el más importante. En Si y el Ge  $\epsilon$  es bastante grande y, por ende, los niveles donadores están muy próximos a la banda de conducción.

Si se agrega átomos de impureza procedentes del grupo III del sistema periódico de elementos (B, Al, Zn), ellos reemplazarán a algunos átomos regulares del cristal. Sus tres electrones exteriores se emplean para realizar 3 enlaces covalentes, faltando un electrón para el cuarto enlace covalente, por tanto, queda un hueco flojamente ligado en la vecindad del átomo de impureza. Se crearía un hueco libre si se trajera un electrón de uno de los átomos regulares del cristal hasta el átomo de impureza. Se necesita muy poca energía para realizar esto, lo que significa que los átomos de impureza agregados forman niveles aceptores desocupados cerca del extremo superior de la banda llena; por tanto, el semiconductor es de tipo p. El hueco, que está débilmente ligado al átomo de impureza, puede considerarse como una estructura parecida a la del hidrógeno: una carga positiva que se mueve en el campo  $e/4\pi\epsilon r^2$  del átomo de impureza, que está cargado negativamente. Tal como en el caso anterior se expresará que los niveles aceptores estén ubicados a  $13.6(mh^2/m)/\epsilon n^2$  [eV] sobre la cima de la banda de valencia.

Al aumentar la concentración de impurezas los niveles donadores se acercan más a la banda de conducción y los aceptores a la banda de valencia. A concentraciones superiores de  $10^8$  a  $10^9$  por centímetro cúbico, los niveles donadores yacen en la banda de conducción y los aceptores caen en la banda de valencia. Estos son los denominados semiconductores degenerados y exhiben una conducta casi metálica.

Los semiconductores de impureza presentan pues, la importante propiedad de que sus características de conducta física pueden ser muy bien controladas. El tipo de conducción (p o n) depende de la clase de impureza que se agrega y la magnitud de la conductividad depende de la concentración de átomos de impureza.

### 3.5.3. Concentración de Portadores en Semiconductores.

La conducción eléctrica de los semiconductores intrínsecos depende de la generación térmica de pares electrón-hueco. Los mismos procesos aparecen en el material extrínseco. y en consecuencia, habrá algunos huecos presentes en el material de tipo n y algunos electrones en el material de tipo p. Se puede, pues, distinguir entre portadores mayoritarios y portadores minoritarios.

Sea  $p$  la concentración de huecos,  $n$  la concentración de electrones y  $n_i = p_i$  la concentración de portadores en material intrínseco. La razón  $g$  de generación de pares electrón hueco es independiente de  $p$  y  $n$ , ya que hay un número casi infinito de electrones ligados, en la banda de valencia, que pueden ser liberados por las vibraciones reticulares. El proceso inverso, recombinación, remueve un par electrón hueco, debido a que se unen un hueco y un electrón, ya sea emitiendo un cuanto o mediante una transición no radiante. Es obvio que en recombinación directa, la razón de recombinación será proporcional a  $p$  como a  $n$ , y a que si el número de huecos se duplica se duplicará también el número de huecos que pueden encontrar un electrón. Se puede entonces plantear:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dn}{dt} = g - p_p n \quad (3.5.1)$$

La variación del número de huecos va a ser igual a la variación del número de electrones por generación de pares electrón-hueco y recombinación de portadores que se realiza en relación 1:1. Esa variación debe ser igual a la generación de pares menos la recombinación.

En equilibrio termodinámico  $\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0$

y  $pn = \frac{g}{p} = \text{constante} = n_i^2 \quad (3.5.2)$

Como  $g$  y  $p$  son independientes de  $n$  y  $p$ , el producto  $pn$  será independiente de  $p$  y de  $n$ ; es una constante que se toma como  $n_i^2$ . El parámetro  $n_i$  representa la concentración intrínseca. Depende sólo de la temperatura y del material base, pero no de las impurezas que causan la conductividad extrínseca.

Cuando hablamos sobre la conducción eléctrica utilizando como modelo el electrón libre, dijimos que el número de electrones  $n$  que aparecen para conducir la corriente está dado por:

$$\frac{n}{V} = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_F - E_c}{kT}} \quad (3.5.3)$$

Se ha introducido aquí la masa efectiva  $m$  del electrón para considerar el efecto del potencial periódico presente en una red cristalina. De una forma análoga, para los

huecos, podemos decir que existen en la banda de Valencia una concentración de huecos de la forma:

$$\frac{p}{\gamma} = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

En ambos casos  $E_c$  y  $E_v$  son los niveles de energía correspondientes, tanto a la banda de Valencia como a la de conducción.

El producto pn será pues:  $n_i^2 = 4 \left( \frac{2\pi kT}{h^2} \right)^3 (m_e^* m_h^*)^{3/2} e^{\frac{E_c - E_v}{kT}}$  (3.5.4)

Donde  $E_c - E_v = E_g$  el ancho de la banda de energía prohibida.

Dado que éste es un resultado termodinámico, es independiente de la validez de la ecuación 3.5.1.

Se calculará ahora  $p$  y  $n$  para un material tipo n.  $N_d$  es la concentración de donadores y si no hubiera de generación de pares electrón hueco  $n$  sería igual a  $N_d$ . Como se generan pares electrón-hueco  $n = N_d + p$ , la ecuación 3.5.3 nos da:

$$n_i^2 = p N_d + p^2$$

$$p^2 + p N_d - n_i^2 = 0$$

de donde  $p = -\frac{1}{2} N_d \pm \left( \frac{1}{4} N_d^2 + n_i^2 \right)^{1/2}$  (3.5.5)

Hay dos casos de importancia especial: (1) el caso intrínseco  $N_d \ll N_i$  y (2) el caso fuertemente extrínseco  $N_d \gg N_i$ . Para el primer caso:



$$\begin{cases} p \approx -1/2 Nd + n_i \\ n = Nd + p \approx \frac{1}{2} Nd + n_i \end{cases} \quad (3.5.6)$$

En el segundo caso, recordando que  $(1+x)^{1/2} \approx 1 + 1/2 x$  pasa x pequeño, se obtiene:

$$p = -1/2 Nd + 1/2 Nd (1 + 2 n_i^2 / Nd^2)$$

$$p \approx \frac{n_i^2}{Nd} \quad (3.5.7)$$

y

$$\begin{aligned} n &= Nd + p \\ n &\approx Nd \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Lo mismo se puede hacer para un material tipo p.

Quando tenemos que están presentes concentraciones de donadores como de aceptores (contradopado), entonces si  $N_d$  es la concentración donadora y  $N_a$  la concentración aceptora, el material es de tipo n si  $N_d > N_a$  y de tipo p si  $N_d < N_a$ .  $N_a$  electrones se encargan de ionizar los aceptores y  $N_d - N_a$  quedan libres. Dado que hay p pares hueco - electrón generados térmicamente, la ecuación 3.5.2 se convierte:

$$p (N_d - N_a + p) = n_i^2 \quad (3.5.9)$$

A temperaturas bajas no hay practicamente portadores minoritarios y aún el número de mayoritarios se hacen dependientes de la temperatura, debido a que no todos los donadores y aceptores están ionizados. Para un material tipo n:

donador neutro  $\rightleftharpoons$  donador ionizado + electrón,  
 se compensan. Sea  $N_d$  la concentración de donadores y  $n$  la concentración de electrones. En tal caso la razón de ionización será proporcional a la densidad de donadores neutros  $N_d$ . La razón de recombinación será proporcional al número  $n$  de electrones libres y al número  $n$  de donadores ionizados, o sea, será proporcional a  $n^2$ . Por tanto:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha (N_d - n) - \beta n^2 \quad (3.5.10)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que dependen de la temperatura y la ubicación de los niveles donadores. En equilibrio  $dn/dt = 0$

y 
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n^2}{N_d - n} \quad (3.5.11)$$

Esto puede expresarse como:

$$\frac{n^2}{N_d - n} = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right) e^{-\frac{E_0}{kT}} \quad (3.5.12)$$

Donde  $E_0$  es la diferencia de energía entre el fondo de la banda de conducción y el nivel del donador.

En la mayoría de los semiconductores hay dos temperaturas características,  $T_{min}$  y  $T_{max}$ . Para  $T > T_{max}$ ,  $n \approx p \approx n_i$  y el material es prácticamente intrínseco. Para  $T_{min} < T < T_{max}$   $n$  o  $p$  decrece como  $\exp.-(E_0/KT)$  ya que existe un menor número de donadores ionizados a cada vez menores temperaturas. Esto es importante para entender la dependencia de la temperatura que exhibe la conductividad de los semiconductores.

La excepción ocurre cuando la densidad de impurezas es

muy grande, y tanto los niveles de donadores y aceptores, como el nivel de Fermi, se confunden presentando al semiconductor con características casi metálicas. No hay  $T_{min}$  y  $T_{max}$  es extremadamente grande. Cuando ésto sucede decimos que existen semiconductores degenerados.

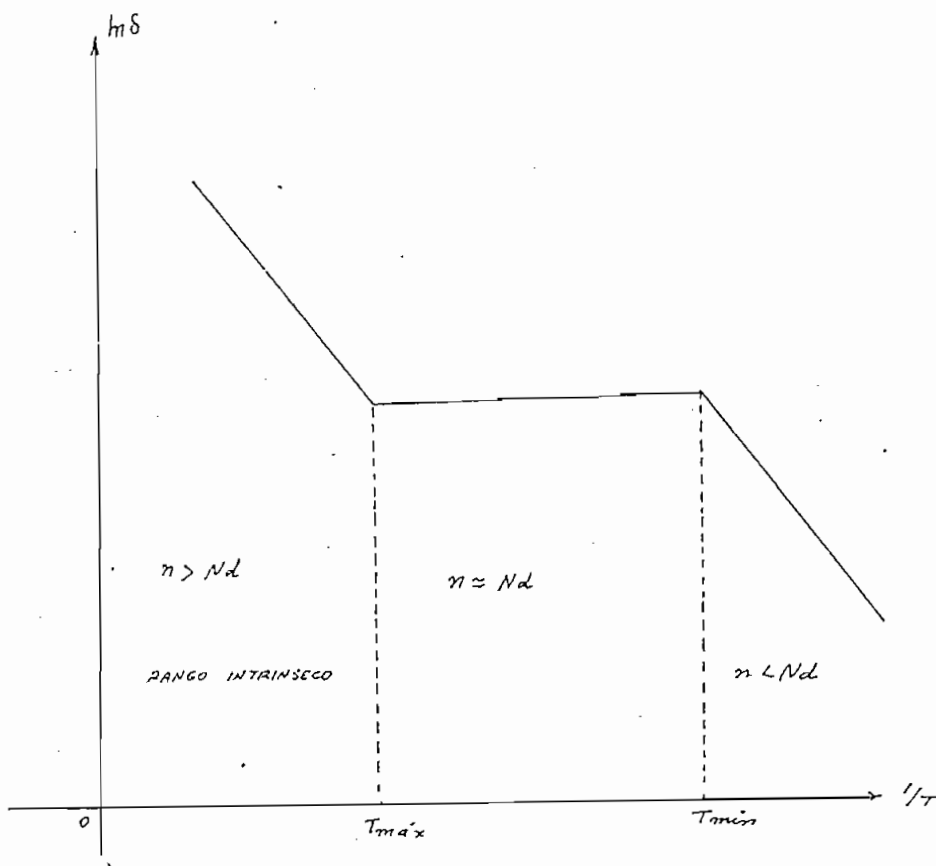


Fig. (3.5.1) Variación del  $\ln \sigma$  con  $1/T$

### 3.5.4. Electrónica de Semiconductores.

El flujo de corriente en semiconductores puede ocu

rrir de dos maneras: a) Cuando se aplica un campo eléctrico; b) cuando se mantiene un gradiente en la concentración de portadores. La primera causa un flujo de corriente debido a desplazamiento o arrastre de portadores; la segunda de flujo de corriente debido a difusión de portadores.

Para estudiar el primer caso, supongamos que aplicamos sobre el semiconductor un campo eléctrico  $E$ . Los electrones son acelerados por el campo eléctrico, ganan energía y luego la pierden en colisiones con la estructura cristalina para luego ser dispersados aleatoriamente.

Consideramos primero la conducción de huecos:

$$\text{Sabemos que } \vec{F} = m_h^* \vec{a} = e\vec{E} \quad (3.5.13)$$

de modo que  $\vec{a} = e\vec{E}/m_h^*$ ; si  $E$  es constante veremos que el electrón acelera desde una velocidad  $\vec{v}_0$  hasta  $\vec{v}_0 + \tau e\vec{E}/m_h^*$  siendo  $\tau$  el tiempo empleado en acelerar y luego chocar con el cristal. Si la estructura cristalina es isotrópica y si promediamos las velocidades de todos los portadores, veremos que

$\vec{v}_0 = 0$  y que:

$$\vec{v}_\tau = \frac{e}{m_h^*} \vec{E} \tau \quad (3.5.14)$$

Esto podemos expresarlo de la siguiente forma: es proporcional al campo eléctrico, de modo que:

$$\vec{v}_\tau = \mu_h \vec{E} \quad (3.5.15)$$

$$\text{con lo que podemos decir que } \mu_h = \frac{e\tau}{m_h^*} \quad (3.5.16)$$

a  $\mu_h$  se la conoce como movilidad de los huecos. La densidad de corriente será:

$$\vec{J}_h = p e \vec{v}_h = p e \mu_h \vec{E} \quad (3.5.17)$$

pero como  $\vec{J}_h = \sigma \vec{E}$  por la Ley de Ohm, entonces la conductividad será:

$$\sigma_h = p e \mu_h \quad (3.5.18)$$

De forma análoga se puede deducir la movilidad de electrones cambiando únicamente el subíndice h por e, quedando:

$$\mu_e = \frac{e}{m_e^*} \tau \quad (3.5.19)$$

$$\vec{J}_e = -n e \vec{v}_e = n e \mu_e \vec{E} \quad (3.5.20)$$

y  $\sigma_e = n e \mu_e \quad (3.5.21)$

La corriente total debida a electrones como huecos será:

$$\vec{J} = \vec{J}_h + \vec{J}_e$$

$$\vec{J} = (e \mu_h p + e \mu_e n) \vec{E}$$

y la conductividad para este caso es:

$$\sigma = e \mu_h p + e \mu_e n \quad (3.5.22)$$

Consideremos ahora la corriente de difusión. Consideremos el prisma de la Figura (3.5.2), en el cual se ha repre-

sentado un elemento semiconductor. En  $x$  la concentración es  $p(x)$  y en  $x + dx$  es:

$$p(x) + \frac{\partial p(x)}{\partial x} \Delta x$$

para  $\Delta x$  pequeño. Cada partícula tiene igualdad de probabilidad de ir a la derecha o a la izquierda, pero si  $\partial p / \partial x > 0$ , entonces habrá un flujo neto hacia la izquierda. La densidad de flujo será proporcional a  $-\partial p / \partial x$ , de modo que podemos decir:

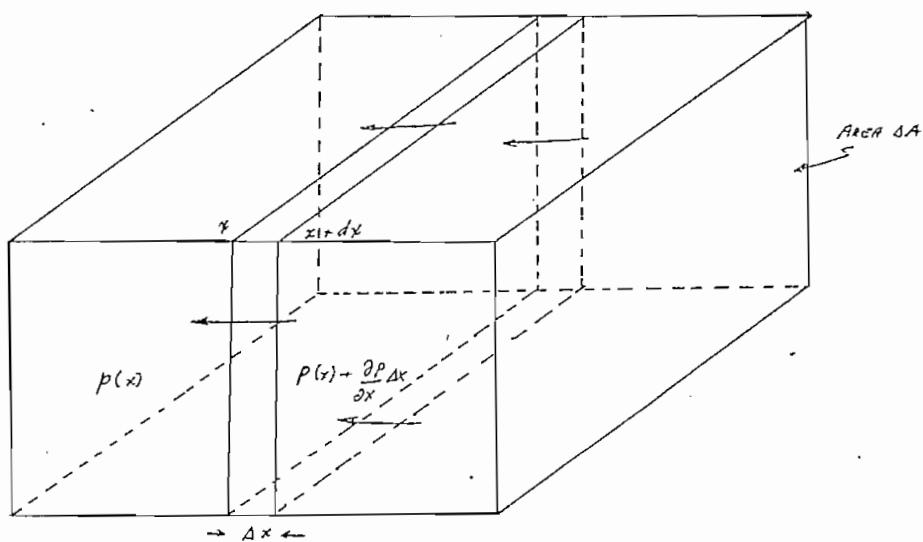


Fig. (3.5.2). Corriente de Difusión del Gradiente de Concentraciones.

$$J_{hx} \approx - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{ó } J_{hx} = - D_h e \frac{\partial p}{\partial x}$$

Siendo  $D_h$  una constante que se llama constante de di fusión de huecos. De modo que en las tres direcciones, del es pacio:

$$\vec{J}_h = - e D_h \nabla p \quad (3.5.23)$$

análogamente para electrones  $\vec{J}_n = e D_n \nabla n \quad (3.5.24)$

Si simultáneamente tenemos difusión y desplazamiento de portadores:

$$\vec{J}_h = e \mu_h p \vec{E} - D_h e \nabla p \quad (3.5.25)$$

$$\vec{J}_n = e \mu_n n \vec{E} + D_n e \nabla n \quad (3.5.26)$$

### 3.5.5. Ecuación de transporte de Boltzmann.

Sea un electrón, en un sólido, que en un instante  $t$  tenga la posición  $(x, y, z)$  y los componentes de la cantidad de movimiento  $(p_x, p_y, p_z)$  y sea:

$$f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z \quad (3.5.27)$$

el número de electrones comprendidos en el elemento de volumen  $x, x + dx; y + dy; z, z + dz$  y entre los impulsos  $(p_x, p_y, p_z$  y  $p_x + dp_x; p_y + dp_y, p_z + dp_z)$ , en el tiempo  $t$ .

En condición estacionaria:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.5.28)$$

En condición de desequilibrio hay fuerzas actuando sobre los electrones, que pueden ser debido a campos eléctricos y magnéticos, fuerzas de difusión y fuerzas de colisión con el reticulado cristalino. Por tanto se puede decir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\substack{\text{FUERZAS} \\ \text{ELECTROMAGNÉT.}}} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{DIFUSIÓN}} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{COLISIÓN}} = 0 \quad (3.5.29)$$

Las fuerzas eléctricas y magnéticas cambian el impulso a razón de  $p$ , este vector tiene tres componentes, en consecuencia en el intervalo  $\Delta t$  el cambio en  $f$  por las fuerzas será:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{FUERZAS}} \Delta t = - \frac{\partial f}{\partial p_x} \Delta p_x - \frac{\partial f}{\partial p_y} \Delta p_y - \frac{\partial f}{\partial p_z} \Delta p_z$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{FUERZAS}} = - \nabla_p f \cdot \dot{p} \quad (3.5.30)$$

La difusión causada por el movimiento de portadores cambia la posición en el intervalo  $\Delta t$  por

$$\Delta x = \frac{p_x \Delta t}{m^*} \quad \Delta y = \frac{p_y \Delta t}{m^*} \quad \Delta z = \frac{p_z \Delta t}{m^*}$$

El correspondiente cambio de  $f$  será:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{DIFUSIÓN}} \Delta t = - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{p_x \Delta t}{m^*} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{p_y \Delta t}{m^*} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{p_z \Delta t}{m^*}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{DIFUSIÓN}} = - \frac{\bar{p} \cdot \nabla f}{m^*} \quad (3.5.31)$$



Las colisiones producen una variación de  $f$  por:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{COLISIONES}} = - \frac{f(\bar{p}, \bar{r}) - f_0}{\tau(\bar{p}, \bar{r})} \quad (3.5.32)$$

donde  $f_0$  es la función de distribución en equilibrio térmico y  $\tau$  es una constante de tiempo que indica la relación a la cual se relaja  $f$  hacia  $f_0$ . Podemos decir que:

$$- \frac{d\bar{p}}{dt} \cdot \nabla_p - \frac{\bar{p}}{m^*} \cdot \nabla f - \frac{f - f_0}{\tau} = 0 \quad (3.5.33)$$

Esta ecuación se llama ecuación de transporte de Boltzmann,

si  $f(\bar{r}, p) \approx f_0$  entonces podemos escribir sin mayor error:

$$f - f_0 = - \tau \dot{p} \cdot \nabla_p f_0 - \frac{\tau p}{m} \cdot \nabla f_0 \quad (3.5.34)$$

Ahora bien, si  $|\vec{E}| = E_z$  y la gradiente de concentración de portadores sólo tiene componente en  $z$ , se puede escribir 3.5.34 como:

$$f - f_0 = - \tau F_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} - \frac{p_z \tau}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial z} \quad (3.5.35)$$

En un semiconductor tipo  $n$ , la distribución de corrientes es Maxwelliana, y se puede escribir para superficies de Fermi es péricas:

$$f_0 = \frac{n}{(2\pi m^* kT)^{3/2}} \exp \frac{-p^2}{2m^* kT} \quad (3.5.36)$$

donde, clara está  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . Se tiene así lo si--

guiente:

$$\oint f_0 dp_x dp_y dp_z = \int_0^{\infty} 4\pi f_0 p^2 dp = n \quad (3.5.37)$$

por todo el espacio

y el valor medio de una función arbitraria  $g(p)$  de  $\mathbb{P}$  es:

$$\langle g(p) \rangle = \frac{1}{n} \oint g(p) dp_x dp_y dp_z = \frac{1}{n} \int 4\pi p^2 g(p) dp$$

Como  $|\mathbb{E}| = E_z$ . Entonces  $|\bar{J}| = J_z$  con lo cual:

$$J_z = \oint -e v_z dp_x dp_y dp_z$$

$$\text{y como } n \langle p_z \rangle = \oint p_z f_0 dp_x dp_y dp_z = 0 \quad (3.5.38)$$

$$\text{entonces } J_z = \oint -\frac{e}{m^*} p_z (f - f_0) dp_x dp_y dp_z \quad (3.5.39)$$

sustituyendo 3.5.35 y 3.5.36 en 3.5.39 y recordando que

$$\frac{\partial f_0}{\partial E_z} = -\frac{p_z}{m^* kT} f_0 \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} f_0 \quad (3.5.40)$$

e introduciendo coordenadas polares  $p, \theta$  y  $\phi$  en vez de  $p_x, p_y, p_z$  se obtiene que:

$$J_z = \frac{2}{3} \frac{e^2 E_z}{2m^* kT} + \frac{1}{3} \frac{e}{m^* n} \frac{\partial n}{\partial z} \int_0^{\infty} p^2 \tau f_0 4\pi p^2 dp \quad (3.5.41)$$

Como la integral es igual a  $n \langle p^2 \tau \rangle = m^{*2} \langle v^2 \tau \rangle$  la ecuación 3.5.41 se puede escribir como:

$$J_z = \frac{e \langle v^2 \tau \rangle n E_z}{3 kT} + \frac{e \langle v^2 \tau \rangle}{3} \frac{\partial n}{\partial z} = e \mu_n n E_z + e D_n \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3.5.42)$$

por tanto  $\mu_n = \frac{e \langle v^2 \tau \rangle}{3kT}$        $D_n = \frac{\langle v^2 \tau \rangle}{3}$       (3.5.43)

de modo que  $\mu_n/D_n = e/kT$       (3.5.44) que es la relación de Einstein entre  $\mu_n$  y  $D_n$ .

Se ha demostrado la ecuación de corriente de los electrones. La de corrientes de huecos es similar. Cuando  $T = T_0$  independiente de:

$\mu_n = \frac{e}{m_e^*} \tau_0$ ;  $D = \frac{kT}{m_e^*} \tau_0$       (3.5.45) que corresponde a (3.5.19)

Para dispersión isotrópica y longitud de camino libre  $\ell$  constante,  $T = \ell/v$  y luego:

$\mu_n = \frac{e \ell \langle v \rangle}{3kT} = e \ell \left( \frac{8}{9\pi m_e^* kT} \right)^{1/2}$       (3.5.44)

ya que según (3.5.37)  $\langle v \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m_e^*} = \frac{1}{n m_e^*} \int_0^\infty 4\pi p^3 f_0 p^2 dp = \left( \frac{8kT}{\pi m_e^*} \right)^{1/2}$

Esto se aplica para dispersión reticular en semiconductores.

Calculemos ahora la sección eficaz de colisión para hibridaciones reticulares. Si  $f_x$  y  $f_y$  son las constantes de recuperación, por el principio de equipartición para un átomo en el plano  $xy$  tenemos:

$\frac{1}{2} f_x \bar{x}^2 = \frac{1}{2} f_y \bar{y}^2 = \frac{1}{2} kT$       (3.5.45)

La sección eficaz debe ser proporcional al producto  $\bar{x} \cdot \bar{y}$ , de modo que:

$\sigma_E = K_0 (\bar{x}^2 \bar{y}^2)^{1/2} = K_0 kT$       (3.5.46)

Siendo  $K_0$  una constante de proporcionalidad.

El camino libre medio debe ser inversamente proporcional a la sección eficaz, de modo que:

$$l = \frac{K_1}{\sigma_E} = \frac{K_1}{K_0} \frac{1}{KT}$$

De modo que (3.5.46) puede ser escrita como sigue:

$$\mu_n = \frac{\text{constante}}{T^{3/2}} \quad (3.5.47)$$

Esta dependencia de  $T$  no siempre es válida, pues puede haber otros mecanismos de dispersión. No rige a bajas temperaturas, puesto que la ley de equipartición no es válida en ese caso. Cuando la dispersión se debe a centros de impurezas ionizados la longitud del camino libre debe ser inversamente proporcional a la densidad  $N_i$  de los centros de impurezas ionizados, de modo que para este caso se cumple que:

$$\mu_n = \mu_{ni} = \frac{\text{const} \times T^{3/2}}{N_i} \quad (3.5.48)$$

Esto explica que la movilidad de los portadores decrezca cuando aumenta la concentración de impurezas.

Cuando son importantes ambos efectos se cumple

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{nl}} + \frac{1}{\mu_{ni}} \quad (3.5.49)$$

En intensidades de campo elevados no podemos usar

3.5.34 y el cálculo se complica muchísimo más.

### 3.5.6. Recombinación de pares electrón hueco.

La ecuación 3.5.1 no sólo predice condiciones de equilibrio, sino que describe también como varía en el tiempo la concentración de portadores si hay inicialmente una concentración de exceso. En el supuesto que se generen pares electrón hueco:

$$\frac{d \Delta n}{dt} = p [p_0 n_0 - (p_0 + \Delta n)(n_0 + \Delta n)] = -p(p_0 + n_0) \Delta n \quad (3.5.50)$$

Resultado que se obtiene despreciando los  $\Delta n^2$  por pequeños. Si se sustituye:

$$p(p_0 + n_0) = \frac{1}{\tau} \quad (3.5.51)$$

Se puede escribir 3.5.50 como  $\frac{d \Delta n}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau}$

T. se llama duración o tiempo de los portadores de exceso.

Si los portadores tienen tiempos de vida  $T_1$  y  $T_2$  podemos decir:

$$\frac{d \Delta n}{dt} = -\frac{\Delta n}{T_1} - \frac{\Delta n}{T_2} = -\frac{\Delta n}{\tau}$$

de modo que  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$  (3.5.52)

En muchos semiconductores la razón de recombinación es mucho más grande en la superficie que en el interior. Si los tiempos de vida para las recombinaciones de volumen y superficie son  $\tau_v$  y  $\tau_s$ , el tiempo  $\tau$  real es:

$$1/\tau = 1/\tau_s + 1/\tau_v$$

$\tau$  s depende de las características geométricas y se lo puede cambiar por procedimientos químicos hasta hacer  $\tau = \tau$  s.

### 3.5.7. Ecuación de Difusión.

Sucede a menudo que los términos de desplazamiento en las densidades de corriente son despreciables respecto a los términos de difusión. Para este caso podemos decir:

$$\begin{aligned}\vec{J}_h &= -eDh \nabla p \\ \vec{J}_e &= eDe \nabla n\end{aligned}$$

Pero además  $\nabla \cdot \vec{J}_h = \frac{\partial \rho}{\partial t}$  = generación de huecos - recombinación de huecos - disminución de carga que sale por la superficie S.

$$\nabla \cdot \vec{J}_h = -e \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + g_h - \frac{p-p_0}{\tau_p} e \quad (3.5.53)$$

de modo que  $-eDn \nabla^2 p = -e \frac{\partial p}{\partial t} + g_h - \frac{p-p_0}{\tau_h} e$

$$\text{es decir } e \frac{\partial p}{\partial t} = eDn \nabla^2 p + g_h - \frac{p-p_0}{\tau_h} e \quad (3.5.54)$$

Que es la ecuación de difusión de huecos incluida la recombinación. Consideremos el problema en una sola dimensión, en

tonces la ecuación anterior toma la forma de:

$$e \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{p - p_0}{\tau_p} e + e D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g$$

en el caso que  $g = \delta(x) \delta(t)$  podemos considerarlo en las condiciones iniciales y tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{p - p_0}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Para el caso estacionario  $\partial p / \partial t = 0$  de modo que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p - p_0}{\tau_p D_p}$$

A la cantidad  $D_p \tau_p = L_p^2$ ;  $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$  se la llama longitud de difusión para huecos y representa la profundidad de penetración para portadores minoritarios (en este caso huecos) que se difunden. Cosa similar se puede hacer con los electrones.

Supongamos ahora que tengo una barra semiconductor que va de  $+\infty$  a  $-\infty$ . En  $t = 0$  hay  $p_0$  pares electrón hueco de exceso generados en  $x = a$ . Si los huecos de exceso tienen un tiempo de vida  $\tau_p$ , la ecuación diferencial para la densidad de huecos  $p$  de exceso es:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = - \frac{p'}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

Las condiciones iniciales, son:

$$p'(x, t) = 0 \quad ; \quad t = \infty \quad -\infty < x < \infty$$

$$p'(x, t) = p_0 \delta(x) \quad ; \quad x \neq 0$$

$$p'(x, t) = \frac{p_0}{2\sqrt{\pi D_p \tau_p}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4D_p t}\right)$$

(3.5.55)

Si se supone que  $\tau_p \rightarrow \infty$  y no hay recombinación tenemos:

$$p(x,t) = \frac{\exp(-x^2/4D_p t)}{\sqrt{2(\pi D_p t)^{1/2}}} \quad (3.5.56)$$

Por consiguiente la distancia cuadrática media reconocida por los huecos en t:

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,t) dx = 2D_p t \quad (3.5.57)$$

Esta ecuación fue deducida por Einstein y es válida para cualquier proceso unidimensional de difusión sin recombinación.

### 3.6.1. Diodos de Unión P. N.

Consideremos una unión pn que consiste de una sección tipo p y de otra tipo n en íntimo contacto. Tal juntura se llama unión escalonada o abrupta. Se usa el modelo debido a que permite simplificar el cálculo de las propiedades de la unión o juntura. Supongamos que ambas secciones están en contacto en  $x = x_0$  (ver Figura 3.6.1), que el material en  $x < x_0$  es tipo p con  $N_a$  aceptores por unidad de volumen y que el material  $x > x_0$  es de tipo n con  $N_d$  donadores por unidad de volumen.

Antes de efectuar el contacto, los niveles de Fermi de las secciones p y n están a diferentes valores; el nivel Fermi en p está próximo al borde superior o cima de la banda llena y el de la región n está próxima a la banda de conducción.



Después que se ha establecido el contacto, fluyen electrones desde el área de contacto de la región n hacia la región p y se recombinan con huecos libres, hasta que se encuentra una nueva condición de equilibrio, en la cual los niveles de Fermi están a igual altura. Por tanto, los niveles energéticos en la región n se deducen en una cantidad igual a la diferencia de función de trabajo entre los materiales tipo p y tipo n y, como consecuencia, se mantendrá una diferencia de potencial  $V_{dif}$  (Potencial de Difusión) entre las regiones n y p. La diferencia de potencial  $V_{dif}$  aparece debido a una capa bipolar distribuída en el contacto, el área de contacto de la sección tipo p tiene una carga espacial negativa, causada por aceptores ionizados, mientras que en la región n existe una carga espacial positiva debido a donadores ionizados. La región de carga espacial alrededor de  $x = x_0$  es llamada región de transición o zona desértica; se extiende desde  $x = x_1$  hasta  $x = x_2$ .

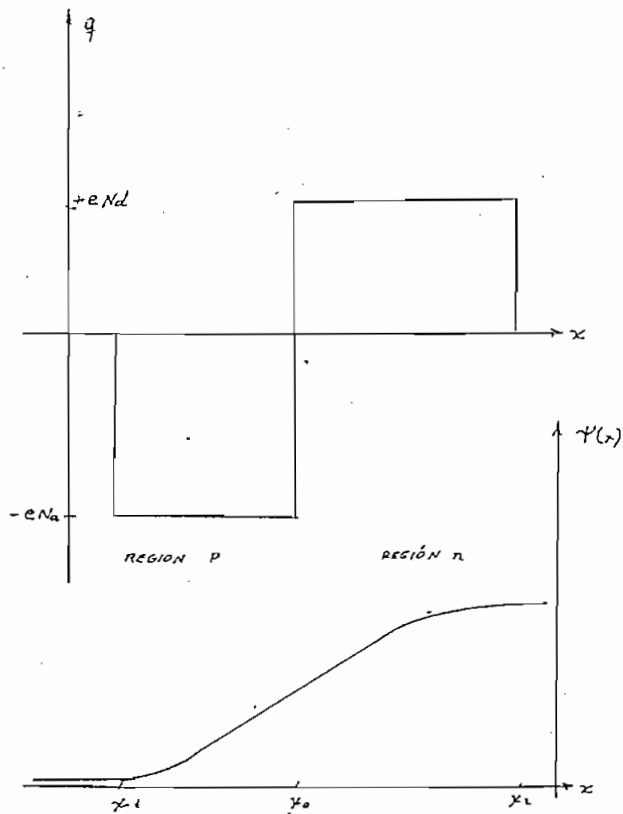


Fig. (3.6.1). a) Distribución de carga espacial en una unión p-n abrupta o escalonada.  
 b) Distribución de tensión en la unión p-n. Se ha aplicado una tensión  $-V$  en la región n.

En equilibrio las concentraciones de huecos en  $X = X_1$  y en  $X = X_2$ , son  $N_a$  y  $p_n$ , respectivamente, mientras que  $V_{dif}$  es la diferencia de potencial a través de la juntura  $p_n$  y  $N_a$  deberían estar relacionados por el factor de Boltzmann  $\exp(-eV_{dif}/KT)$  de modo que:

$$p_n = N_a \exp \left\{ - \frac{eV_{dif}}{KT} \right\}$$

$$V_{dif} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_A}{p_n} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_A N_d}{n_i^2} \quad (3.6.1)$$

puesto que:  $p_n = \frac{n_i^2}{N_d}$

El potencial  $\phi(x)$  en la región de contacto está relacionada con la densidad de carga  $\rho(x)$  por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(x) = - \frac{\rho(x)}{\epsilon} \quad (3.6.2)$$

Si se aplica una tensión  $-V$  en la parte n, las condiciones iniciales son:  $\phi(x) = 0$  y  $d\phi(x)/dx = 0$  para  $X \leq X_1$  (Se desprecia la pequeña caída de tensión para  $X = X_1$ , debido al flujo de corriente continua) y  $\phi(x) = V_{dif} - V$  y  $d\phi(x)/dx = 0$ , o para  $x \geq x_2$  (Ver Figura 3.6.1).

La densidad de huecos  $p$  y la densidad de electrones  $n$  en la región de carga espacial son dados aproximadamente por las ecuaciones:

$$p = p_h \exp \left( - \frac{e\phi}{kT} \right) \quad n = n_e \exp \left( - \frac{e(V_{dif} - V - \phi)}{kT} \right)$$

donde  $p_h$  es la densidad de huecos en la región p para  $X = X_1$ ,  $n_e$  es la densidad de electrones en la región n, además que  $\exp(-e\phi/kT)$  y  $\exp(-e(V_{dif} - V - \phi)/kT)$  son los factores de Boltzmann apropiados.

Calculemos ahora la capacidad que aparece en la junta cuando la polarizamos en forma inversa. En la zona desértica aparecerá un número  $N_a$  de aceptores ionizados. La carga total

que existe en un volumen V cerrado en el material n va a ser igual al número de aceptores (iones negativos), más el número de electrones menos el número de huecos, de modo que la densidad volumétrica de carga en un punto cualesquiera de la juntura será:

$$\rho(x) = -e(N_a + n - p) \quad (3.6.3)$$

Así también podemos establecer una densidad de carga en el material p dado por:

$$\rho(x) = e(N_d - n + p)$$

Establecido ésto hagamos el siguiente razonamiento: si  $\phi > kT/e$  entonces el número de iones donares en el material p y aceptores en el material n crecen mucho y se amplía la zona desértica. En esas condiciones se cumplirá que  $N_a \gg n$ ;  $N_a \gg p$ . Con lo que se plantea la relación aproximada  $\rho(x) = -eN_a$ . Lo mismo se puede expresar respecto al material p, de modo que  $\rho(x) = eNd$ .

Si  $N_a = N_d$  entonces si llamamos  $\phi = \phi_1(x)$  la solución para  $x_1 \leq x \leq x_0$  (Ver Figura 3.6.1) y  $\phi = \phi_2(x)$  para  $x_0 \leq x \leq x_2$  se requiera que:

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) \quad ; \quad d\phi_1(x)/dx = d\phi_2(x)/dx \quad \Rightarrow \quad x = x_0$$

la ecuación a plantearse es:  $\frac{d\phi_1(x)}{dx} = \frac{eN_a}{\epsilon\epsilon_0} (x - x_1)$

Cuya solución es:  $\phi_1(x) = \frac{eN_a}{2\epsilon\epsilon_0} (x - x_1)^2 \quad (3.6.4)$

Así mismo  $\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{eNd}{\epsilon\epsilon_0} (x_2 - x)$

tendrá por solución  $\phi_2 = -\frac{eNa}{\epsilon\epsilon_0} (x_2 - x)^2 + (Vdif - V)$  (3.6.5)

Aplicando la condición de igualdad en:  $x = x_0$

$$Na(x_0 - x_1) = Nd(x_2 - x_0)$$

$$\frac{eNa}{2\epsilon\epsilon_0} (x_0 - x_1)^2 = Vdif - V - \frac{eNd}{2\epsilon\epsilon_0} (x_2 - x_0)^2$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones cuyas incógnitas son  $x_0 - x_1$  y  $x_2 - x_0$ . Despejándolas:

$$x_0 - x_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 (Vdif - V) Nd}{eNa (Na + Nd)}} \quad (3.6.7)$$

$$x_2 - x_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 (Vdif - V) Na}{eNd (Na + Nd)}}$$

para la región  $X_0 - X_1$  (zona p) los donares son muchos más que los aceptores

como:

$$d = x_2 - x_1 = (x_0 - x_1) + (x_2 - x_0) = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 (Vdif - V) (Na + Nd)}{Na Nd}} \quad (3.6.8)$$

La región de transición tiene una carga positiva  $+Q$  por unidad de área en el lado n y una carga negativa  $-Q$  por unidad de área en el lado p:

$$Q = eNd(x_2 - x_0) = eNd \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{eNd} \frac{Na}{Na + Nd} (Vdif - V)} \quad (3.6.9)$$

La capacidad de la región de transición a pequeña señal por unidad de área es:

$$C = \frac{dQ}{dV} = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 e}{V_{di} - V} \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}} = \frac{\epsilon \epsilon_0}{d} \quad (3.6.10)$$

La capa de carga espacial actúa como un condensador de placas paralelas con una distancia  $d$  entre las placas.

La máxima intensidad de campo ocurre cuando  $x = x_0$  se tiene:

$$E = E_{max} = - \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_0} = - \frac{2(V_{di} - V)}{d} \quad (3.6.11)$$

Estas fórmulas son válidas cuando hay un escalón abrupto desde el material p hasta el material n.

### 3.6.2. Distribución de Portadores, Niveles de Fermi y cuasi Niveles de Fermi en la Región Espacial.

En la región de carga espacial de una unión p-n hay una gran intensidad de campo  $E$  y una gran gradiente de densidad de portadores:

$$\bar{J}_p = e n_i p \bar{E} - e D_p \frac{dp}{dx}$$

$\bar{J}_p$  es la diferencia de dos corrientes muy grandes y apuestos, de modo que  $|\bar{J}_p| \ll e n_i p \bar{E}$ ,  $|\bar{J}_p| \ll e D_p \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|$ . Por tanto, con buena aproximación:

$$e n_i p \bar{E} - e D_p \frac{dp}{dx} = 0$$

pero

$$E = - \frac{d\phi}{dx}$$

de modo que  $- e \mu_h p \frac{d\phi}{dx} - e D_p \frac{dp}{dx} = 0$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\mu_h}{D_p} d\phi$$

De la relación de Einstein

$$\frac{\mu_p}{D_p} = \frac{e}{kT}$$

tenemos  $p(x) = p_n \exp - \frac{e\phi(x)}{kT}$  (3.6.12)

para  $x_1 \leq x \leq x_2$  donde  $p_n$  es la concentración de huecos en  $x = x_1$ . De la misma manera, se tiene para electrones:

$$n(x) = n_e \exp - \frac{e(V_{dif} - V_j - \phi(x))}{kT}$$
 (3.6.13)

Para  $x_1 \leq x \leq x_2$ , donde  $n_e$  es la concentración de electrones en  $X = X_2$ ,  $V_{dif} = V$  es la diferencia de potencial a través de la región de carga espacial y  $V_j$  es el potencial aplicado a la juntura o unión de la misma.

Aplicando ésto en los puntos  $X = X_1$  y  $X = X_2$ , respectivamente, se tiene:

$$p(x_2) = p_n \exp - \frac{e(V_{dif} - V_j)}{kT}$$

$$n(x_1) = n_e \exp - \frac{e(V_{dif} - V_j)}{kT}$$
 (3.6.14)

Pero, dado que existe neutralidad aproximada de carga espacial fuera de la región de carga espacial,  $p_h = N_a + n(x_1)$  y  $n_e = N_d + p(x_2)$  (3.6.15). Sustituyendo en 3.6.14 y despejando  $p(x_2)$  y  $n(x_1)$ , se obtiene:

$$p(x_2) = \frac{N_d B^2 + N_a B}{1 - B^2} \quad n_e = N_d + p(x_2) = \frac{N_d + N_a B}{1 - B^2} \quad (3.6.16)$$

$$n(x_1) = \frac{N_a B^2 + N_d B}{1 - B^2} \quad p_h = N_a + n(x_1) = \frac{N_a + N_d B}{1 - B^2}$$

donde  $B = \exp\left(-\frac{eV_{dij} - V_j}{kT}\right)$ . Usualmente  $B^2 \ll 1$

Si  $B^2 \ll 1$  y  $N_d \ll N_a$ , se puede escribir las ecuaciones anteriores de la forma:

$$p(x_2) = N_a B \quad n_e = N_d + N_a \exp \frac{eV_j}{kT}$$

$$n(x_1) = N_a B^2 + N_d B \quad p_h = N_a$$

En las ecuaciones 3.6.16 hay que distinguir dos casos:

1.  $B \ll N_d/N_a$  en cuyo caso  $n_e \approx N_d$ ;  $n(x_1) = N_d B$ . Esto es el caso de Baja Inyección.
2.  $B > N_d/N_a$  En este caso  $n_e \approx B N_a$ ;  $n(x_1) = N_a B^2$ . Este es el llamado caso de alta inyección.

Ahora bien, se define como cuasi nivel de Fermi en la zona desértica a:

$$\bar{\mu}_p = \mu_{cp} - e\phi \quad \bar{\mu}_n = \mu_{cn} - e\phi$$



de modo que  $\bar{\mu}_p = \kappa T \ln \frac{n_i}{p} - e\phi = \kappa T \ln \frac{n_i}{p_h}$

(3.6.17)

$$\bar{\mu}_n = \kappa T \ln \frac{n}{n_i} - e\phi = \kappa T \ln \frac{n_e}{n_i} - e(V_{dif} - V)$$

En baja inyección  $N_a \gg N_d$ ,  $p_p = N_a$  y  $n_e = N_d$ , de modo que:

$$\bar{\mu}_n - \bar{\mu}_p = \kappa T \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2} - e(V_{dif} - V_f) - eV_j \quad (3.6.18)$$

debido a la ecuación 3.6.1. En alta inyección  $N_a \gg N_d$ ,  $p_h = N_a$   
 $n_e = \beta N_a > N_d$ , de modo que  $\bar{\mu}_n - \bar{\mu}_p > eV_j$ . Esto es  
 causado por la inyección de portadores en el contacto ohmico  
 de la región n.

### 3.6.3. Flujo de Corriente en la Unión pn.

Consideremos ahora una unión p-n con una tensión  $-V$  aplicada a la región n. De acuerdo con lo visto, los huecos de la región p tienen que trepar una colina de potencial de  $V_{dif} - V$  voltios para llegar a la región n, mientras que los huecos de la región n tienen que descender la colina. Si no se aplica tensión fluyen dos corrientes iguales y opuestas  $I_{po}$ . El número de huecos que fluyen de la región n hasta la región p, es independiente de la tensión aplicada, pero el número de huecos que fluye de p a n depende muy fuertemente de la tensión aplicada. La probabilidad que un hueco tenga suficiente energía para trepar una barrera de tensión es:

$$\exp \left( \frac{eV}{kT} - 1 \right)$$

Por tanto la corriente de huecos que fluye a través de juntura es:

$$I_p = I_{p0} \left\{ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right\} \quad (3.6.19)$$

Si la corriente es positiva de p a n.

Las mismas consideraciones se hacen respecto a los electrones, ellos darán una corriente:

$$I_n = I_{n0} \left\{ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right\} \quad (3.6.20)$$

Que fluye en el mismo sentido  $I_p$ . La corriente total es:

$$I = I_p + I_n$$

$$I = (I_{p0} + I_{n0}) \left\{ \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right\} \quad (3.6.21)$$

En realidad el flujo de electrones y de huecos a través de la barrera no es un proceso de emisión, sino que debe ser descrito como una difusión de huecos hacia la región n y de electrones hacia la región p. A menudo, no obstante, esto no altera el resultado final. El cálculo exacto de las características es muy complicado. Se plantean cinco ecuaciones simultáneas:

- a) Las dos densidades de corriente  $J_p$  y  $J_n$ ;
- b) Las dos ecuaciones de continuidad para las concen-

traciones de portadores  $n$  y  $p$ ;

c) La Ley de Gauss para un campo eléctrico  $\vec{E}$ .

En las incógnitas  $J_p$ ,  $J_n$ ,  $p$ ,  $n$  y  $\vec{E}$ , aún si se reduce el problema a un caso unidimensional, el asunto continúa extremadamente difícil, ya que los términos  $J_p$  y  $J_n$ , no son lineales. Si las corrientes son relativamente pequeñas se puede usar un método aproximado, ya que los campos eléctricos fuera de la región de carga espacial son relativamente pequeños y se comete poco error al despreciar los términos  $J_p$  y  $J_n$ , obviándose el problema de no linealidad. Este caso se llama inyección de bajo nivel.

Se pueden considerar dos límites:

a) La mayoría de los huecos que se difunden en la región  $n$ , se recombinan antes de alcanzar el contacto ohmico y la mayoría de los electrones que se difunden en la región  $p$  hacen lo mismo. Este es el caso del diodo largo;

b) Las regiones  $n$  y  $p$  son tan cortas que se pueden despreciar recombinaciones. Entonces todos los portadores de minoría alcanzan los contactos ohmicos. Es el llamado diodo corto. En este caso hay que especificar cómo funcionan los contactos ohmicos.

Supongamos ahora que la zona desértica se extiende desde  $X_1$  a  $X_2$  y que las regiones de  $p$  y  $n$  tienen anchuras  $W_p$  y  $W_n$ . El contacto ohmico en  $p$  está a  $X_1 - W_p$  y el otro en  $n$  está a  $X_2 + W_n$ . Sean  $p_n$  y  $n_p$  las concentraciones de huecos y electrones en  $X = X_1$ . Calculemos ahora la corriente de huecos en  $X=X_2$

para el caso de inyección a bajo nivel:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{p - p_n}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Si estamos en régimen permanente  $\partial p / \partial t = 0$  y

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p - p_n}{\tau_p D_p} \quad (3.6.22)$$

Pero  $L_p^2 = (\tau_p D_p)^2$ , de modo que si aplicamos las condiciones

$$p = p(x_2)$$

$$p = p_n \quad x \rightarrow \infty$$

entonces la solución es:  $p(x) = \{ p(x_2) - p_n \} \exp \frac{x - x_2}{L_p}$

Por lo tanto, prácticamente ningún hueco alcanza al contacto ohmico de la región n si:  $w_n > 5L_p$ .

Ahora bien, la probabilidad de que un hueco se recombine entre  $x$  y  $x + dx$  es

$$dp = \exp\left(-\frac{x - x_0}{L_p}\right) dx \quad (3.6.23)$$

luego la distancia media que andan los huecos antes de recombinarse es:

$$\overline{(x - x_2)} = \int_{x_2}^{\infty} (x - x_2) dp = L_p \quad (3.6.24)$$

Por ello el nombre de "Longitud de Difusión" dada a  $L_p$  es apropiada. Finalmente, se calcula la densidad de corriente

de huecos  $J_p$  en  $X = X_2$ . Dado que el término de desplazamiento de la densidad de corriente de huecos podría ser despreciada en la aproximación de señales pequeñas:

$$J_p = - e D_p \frac{dp}{dx} \Big|_{x=X_2} = \frac{e D_p}{L_p} [p(x_2) - p_n] \quad (3.6.25)$$

Sustituyendo 3.6.1 en 3.6.16 en la ecuación anterior:

$$J_p = e p_n \frac{D_p}{L_p} \left[ \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right]$$

$$J_p = e N_a \frac{D_p}{L_p} \exp \left( - \frac{eV_{dif}}{kT} \right) \left\{ \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right\} \quad (3.6.26)$$

y finalmente:

$$J_p = J_{p0} \left\{ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right\} \quad (3.2.27)$$

donde  $J_{p0} = e p_n \frac{D_p}{L_p} = e N_a \frac{D_p}{L_p} \exp \left( - \frac{eV_{dif}}{kT} \right) = \frac{e n_i^2 D_p}{N_d L_p}$  (3.6.28)

Para  $x_1 < x < x_2$  la densidad de corriente de huecos también es dada por 3.6.28, al menos mientras no ocurra recombinación en la zona desértica. Para  $X > X_2$  la densidad de corriente de huecos es:

$$J_p = - e D_p \frac{dp}{dx} = e D_p [p_1(x_1) - p_n] \exp - \frac{x_1 - x_2}{L_p}$$

$$\text{ó} \quad J_p(x) = J_{p0} \left[ \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right] \exp \left[ - \frac{x_1 - x_2}{L_p} \right] \quad (3.6.29)$$

Lo que sucede aquí es que debe existir una corriente de electro

nes que compense la disminución de  $J_p(x)$  para asegurar la continuidad de corriente.

Para electrones en la región p podemos decir también:

$$J_n = J_{n0} \left\{ \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right\} \quad (3.6.30)$$

donde  $J_{n0} = \frac{e n_p D_n}{L_n} = \frac{e n_i^2 D_n}{N_a L_n}$

Para  $x_1 < x < x_2$  la densidad de corriente de electrones también es igual a  $J_n$ , en el caso de existir recombinación en la zona desértica, luego en una zona  $x < x_1$ :

$$J_n(x) = J_{n0} \left\{ \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right\} \exp\left(\frac{x-x_1}{L_n}\right) \quad (3.6.31)$$

a la cual debemos dar la misma interpretación que 3.6.30. La densidad de corriente total es:

$$J = J_p + J_n = (J_{p0} + J_{n0}) \left\{ \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right\} \quad (3.6.32)$$

puesto que  $J$  es continua, la expresión vale en todo el dispositivo.

#### EFEECTO DE RECOMBINACION EN LA ZONA DESERTICA

El cálculo anterior se basó en la premisa de que no existe recombinación en la zona desértica.

Con polarización inversa es muy pequeño el número de

portadores en la mayor parte de la zona desértica, y los centros generarán alternadamente un hueco y un electrón. Los electrones son captados en la región n y los huecos en la p, de modo que la generación es lo que contribuye principalmente a la existencia de la corriente inversa. Cuando aumentamos un poquito el voltaje directo veremos que se debe seguir manteniendo la tendencia de generación, y dado que poseen muy poca energía es posible que se recombinen de alguna forma dentro de la zona desértica. Esto debe afectar de algún modo la característica que encontramos de densidad de corriente.

Analícemos qué sucede en la zona desértica. Veremos que con polarización inversa es mucho mayor el número de iones y, en consecuencia, los centros ionizados capturan alternadamente un electrón y un hueco.

Sea  $R(p, n)$  la razón de captura de pares electrón hueco por los centros, entonces:

$$J = e \int_{x_1}^{x_2} R(p, n) dx \quad (3.6.33)$$

Hay que encontrar las expresiones correctas para  $R$ ,  $p$  y  $n$ . Para  $X_1 \leq X \leq X_2$  e inyección relativamente baja,  $p(X_2) \ll Nd$  y  $n(X_1) \ll Na$ , entonces sería razonable pensar que:

$$p(x) = Na \exp - \frac{e\psi}{kT} \quad (3.6.34)$$

$$n(x) = Nd \exp - \frac{e(V_{dif} - V - \psi)}{kT} \quad (3.6.35)$$

de modo que 
$$Na Nd = n_i^2 \exp \frac{eV_{dif}}{kT} \quad (3.6.36)$$

Recordando  $p(x)n(x) = n_i^2 \exp \frac{eVdix}{KT}$  (3.6.37)

entonces la relación de recombinación viene dada por:

$$R = \frac{P_n - n_i^2}{(p + p_s) T_{ho} + (n + n_s) T_{po}} \quad (3.6.38)$$

Donde  $p_1$  y  $n_1$  son las densidades de portadores libres cuando el nivel de Fermi está a nivel de una "trampa" para un electrón y un hueco  $E_T$ ;  $T_{no}$  es la vida media de electrones en el material tipo p y  $T_{po}$  es la vida media de los huecos en un material tipo n. Para polarización cero  $R = 0 \quad \bar{J} = 0$ .

Para polarización inversa  $R = - \frac{n_i^2}{p_1 T_{ho} + n_1 T_{po}}$

$$J = - \frac{e n_i^2}{R T_{ho} + n_i T_{po}} (x_2 - x_1) = \text{constante} \times \sqrt{V_{dif} - V}$$

En diodos polarizados directamente  $p \gg p_i$  y  $n \gg n_i$  en la mayor parte de la región de carga espacial y por tanto dado que  $np \gg n_i^2$

$$J = e n_i^2 \exp \frac{eV}{KT} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p T_{no} + n_i^2 \exp \left( \frac{eV}{KT} \right) \frac{T_{po}}{p}}$$

$$J = e n_i^2 \exp \frac{eV}{KT} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\exp(eV/KT) dx}{N_a T_{no} + n(x_s) T_{po} \{ \exp(eV/KT) \}^2}$$

según se encuentra sustituyendo p y poniendo  $n_i^2 \exp \frac{eV}{KT} = N_a n(x_s)$



Podemos hacer las siguientes simplificaciones:

$$T_{no} \approx T_{po} \approx T$$

$$N_a = N_d$$

El integrando tiene su máximo valor en el centro de la región limitada por carga espacial, donde  $dV/dx$  tiene su máximo valor  $E_{máx}$  y  $p = n = n_i \exp(eV/2KT)$

introduciendo  $u = \exp \left( \frac{eV}{KT} \right)$

$$du = u \frac{e}{KT} \frac{dV}{dx} dx \approx e \left( \frac{E_{máx}}{KT} \right) dx$$

ya que la región  $d\Phi/dx = E_{máx}$  da una contribución importante



Podemos hacer las siguientes simplificaciones:

$$T_{no} \approx T_{po} \approx T$$

$$N_a = N_d$$

El integrando tiene su máximo valor en el centro de la región limitada por carga espacial, donde  $d\psi/dx$  tiene su máximo valor  $E_{máx}$  y  $p = n = n_i \exp(eV/2KT)$

introduciendo  $u = \exp\left(\frac{e\psi}{\mu T}\right)$

$$du = \mu \frac{e}{KT} \frac{d\psi}{dx} dx \approx e \left( \frac{e E_{máx}}{KT} \right) dx$$

ya que la región  $d\psi/dx = E_{máx}$  da una contribución importante a la integral. En seguida observamos que  $\exp\left[\frac{e(Vd\psi - \psi)}{KT}\right]$  es un número muy grande, de modo que el límite superior de la integral pueda ser sustituido por  $\infty$  y que  $n(x_1) N_a$  es muy pequeño a inyección relativamente baja, de modo que el límite inferior de integración puede ser reemplazado por cero.

Luego de todo esto: 
$$J = \frac{n_i^2 \exp(eV/KT)}{\tau E_{máx}/\mu T} \int_0^{\infty} \frac{du}{N_a + n(x_1) \mu_i^2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{\mu T}{\tau E_{máx}} n_i \exp \frac{eV}{2KT}$$

puesto que: 
$$n(x_1) = n_p \exp \frac{eV}{KT} ; N_o N_p = n_i^2$$

Vamos que la característica varía como  $\exp(eV/2KT)$ . Esto significa que el efecto de recombinación aparece cuando tenemos corrientes muy bajas y que desaparece a corrientes más

elevadas. Cuando el campo eléctrico de polarización directa es muy grande la variación de  $J$  con el voltaje ya no se hace según  $\exp(eV/KT)$ , sino que toma más bien como asintota a  $\exp(eV/2KT)$ . Esto se debe a que la movilidad de los portadores comienza a disminuir desde determinado valor de voltaje de polarización directa. El análisis teórico de este problema es realmente muy complicado y escapa al alcance de la presente Tesis.

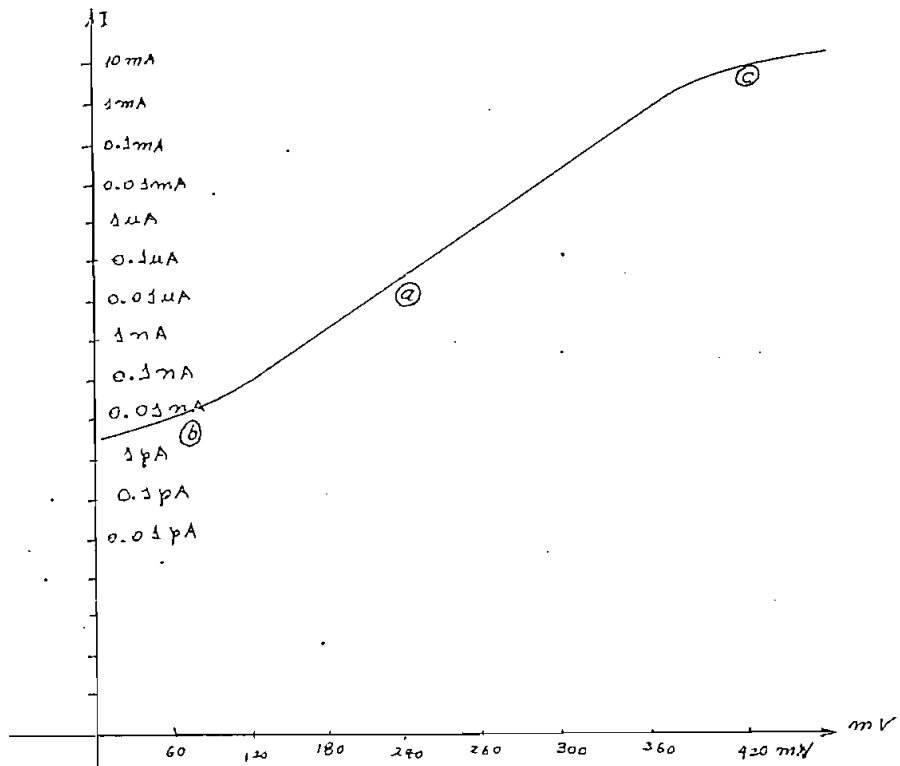


Fig. (3.2.6.) Variación de la corriente con el voltaje de polarización de un diodo:

- Curva que varía según  $\exp$ ;
- Bajo nivel de polarización. Se produce recombinación en la zona desértica y varía según  $\exp$ ;
- Alto nivel de polarización. La movilidad  $u$  disminuye y la corriente tiende a variar según  $\exp(eV/2KT)$ .

### 3.7.1. Transistores Bipolares.

El transistor es un dispositivo de tres capas que consiste ya sea de dos capas p y una n delgada que los separa o en dos n separadas por una capa delgada p. A los primeros se los denomina transistores pnp y a los segundos npn. Estos dispositivos operan polarizando la una juntura directamente y a la otra inversamente. Si  $N_a \gg N_d$ , la región p inyecta huecos en la región n. Por estas razones a la primera región p se la llama emisor y a la otra región p se llama colector. A la medida se la denomina base.

### 3.7.2. Flujo de corriente en transistores y las Ecuaciones de Ebers - Moll.

Deduciremos las ecuaciones de Ebers Moll desde un punto de vista corpuscular. Para ello nos ayudaremos de la Figura 3.7.1. Escojamos el sentido positivo de corrientes, las que entran al transistor y negativo las que salen del transistor. Las polarizaciones de emisor y colector serán VEB y VCB. Supondremos además, en una primera fase, que toda la corriente es debida a huecos, entonces tenemos los siguientes casos:

1o.) Huecos inyectados en el emisor y parcialmente captados por el colector. Ellos dan una contribución de:

$I_{ES} \exp \left[ \frac{eV_{EB}}{kT} \right]$  a la corriente emisora  $i_E$ . Si un factor

$\alpha_f < 1$  de huecos inyectados es colectado por el colector, su contribución a esa corriente será:  $-\alpha_f I_{ES} \exp \left( \frac{eV_{ES}}{kT} \right)$ .

A  $\alpha_f$  se le denomina coeficiente de transferencia directa de corriente,  $I_{ES}$  es la corriente inyectada cuando la polarización de emisor a base es cero.

2o.) Huecos inyectados por el colector y parcialmente colectados por el emisor. Ellos dan contribución  $I_{cs} \exp eV_{c0}/kT$  a la corriente de colector. Si una parte  $\alpha_r$  de la corriente de huecos inyectada es colectada por el emisor, la contribución a la corriente de emisor es  $-\alpha_r I_{cs} \exp eV_{c0}/kT$ . El factor  $\alpha_r$  es llamado factor de amplificación inversa de corriente,  $I_{cs}$  es la corriente de huecos inyectada con polarización de colector igual a cero.

3o.) Huecos generados en la base y colectados en el emisor. Ellos dan una contribución  $-I_{BE}$  a la corriente de colector, independiente de la polarización.

4o.) Huecos generados por la base y colectados por el colector. Ellos dan una contribución  $-I_{BC}$  a la corriente del colector, independientemente de la polarización. Sumando las distintas contribuciones:

$$I_E = I_{ES} \exp eV_{EB}/kT - \alpha_r I_{cs} \exp eV_{c0}/kT - I_{BC} \quad (3.7.1)$$

$$I_C = -\alpha_f I_{ES} \exp eV_{EB}/kT + I_{cs} \exp eV_{c0}/kT - I_{BC}$$

Para eliminar  $I_{BE}$  e  $I_{BC}$ , se observa que  $I_E = I_C = 0$  si  $V_{EB} = V_{c0} = 0$ . Esto entrega las relaciones:

$$I_{BE} = I_{ES} - \alpha_r I_{cs} \quad (3.7.2)$$

$$I_{BC} = -\alpha_f I_{ES} + I_{cs}$$

Que sustituido en 3.7.1. obtenemos finalmente:

$$I_c = I_{ES} \left\{ \exp(eV_{EB}/kT) - 1 \right\} - \alpha_T I_{CS} \left\{ \exp(eV_{CB}/kT) - 1 \right\} \quad (3.7.3)$$

$$I_c = -\alpha_T I_{ES} \left\{ \exp(eV_{EB}/kT) - 1 \right\} + I_{CS} \left\{ \exp(eV_{CB}/kT) - 1 \right\}$$

Si descontamos la suposición de que toda la corriente es debida a huecos, hay que considerar cuatro grupos de electrones:

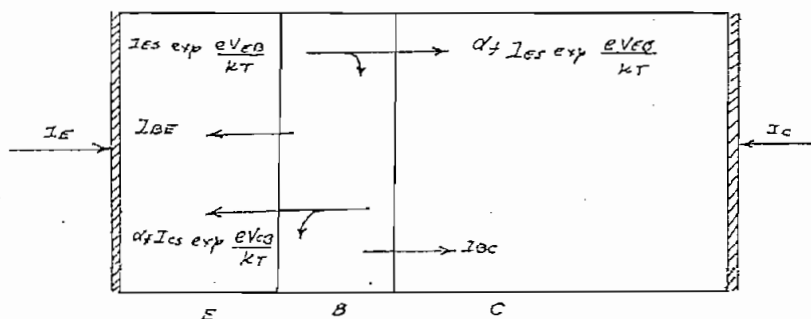


Fig.(3.7.1). Transistor Bipolar y corrientes de juntura.

- 1) Electrones inyectados en el emisor desde la base. Ellos dan a la corriente de emisor una contribución que depende como  $\exp(eV_{BE}/kT)$
- 2) Electrones inyectados en el colector desde la base. Ellos dan a la corriente de colector una contribución que depende como  $\exp(eV_{CB}/kT)$
- 3) Electrones generados en la región emisora y colectados por la base. Ellos dan una corriente que es independiente

te de la polarización.

4) Electrones generados en la región colectores y recogidos por la base. Ellos dan una corriente que es independiente de la polarización.

Sumando todas estas contribuciones añadida a la de los huecos, obtenemos la ecuación 3.7.3, con las siguientes modificaciones: así por ejemplo  $I_{ES}$  es ahora la suma de la corriente de huecos y electrones inyectados a través de la unión emisora con polarización nula de emisor.  $\alpha_f$  Es la parte de corriente de emisor que es tomada por el colector con polarización nula de colector.

El sistema de ecuaciones 3.7.3 es válido para cualquier transistor operando en cualquier condición. Son denominados las ecuaciones de Ebers Moll. Demostraremos ahora que se cumple la relación:

$$\alpha_f I_{ES} = \alpha_r I_{CS}$$

Consideremos que  $\left| \frac{eV_{EB}}{kT} \right| \ll 1$        $\left| \frac{eV_{CB}}{kT} \right| \ll 1$

entonces como  $\exp(x) \approx 1 + x$  para  $x$  pequeño, las ecuaciones 3.7.3 quedan como sigue:

$$I_E = I_{ES} \frac{eV_{BE}}{kT} - \alpha_r I_{CS} \frac{eV_{CB}}{kT} \quad (3.7.4)$$

$$I_C = -\alpha_f I_{ES} \frac{eV_{BE}}{kT} + I_{CS} \frac{eV_{CB}}{kT}$$

Este es un sistema de ecuaciones de una red lineal, de modo que

debería aplicarse aquí el principio de reciprocidad, así entonces se cumple que:

$$\alpha_n I_{cs} = \alpha_f I_{es}.$$

La relación que queríamos demostrar.

Ahora nos toca calcular  $I_{es}$ ,  $I_{cs}$ ,  $\alpha_f$  y  $\alpha_n$  por las ecuaciones de difusión. Lo haremos para un modelo unidimensional del transistor, y el mismo análisis podría extenderse para un caso más general.

Consideremos primero una concentración  $p_n$  de huecos en equilibrio sobre la base. Suponemos aquí que la corriente de difusión da las contribuciones más importantes a la corriente total. En este caso:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{p - p_n}{L_p^2} \quad (3.7.5)$$

donde  $L_p^2 = D_p \tau_p$

Supongamos que el origen del sistema de coordenadas está ubicado en el lado emisor de la región de la base y que la anchura de éste es  $w$ . Si las tensiones aplicadas en el emisor y el colector son  $V_{EB}$  y  $V_{CB}$ , las condiciones iniciales de  $p(x)$  son:

$$p(x) = p(0) = p_n \exp(eV_{BE}/kT) \Rightarrow x=0 \quad (3.7.6)$$

$$p(x) = p(w) = p_n \exp(eV_{CB}/kT) \Rightarrow x=w$$

Se observa que  $\sinh(x/l_p)$  y  $\sinh(w-x/l_p)$  son so-

luciones de 3.7.5, de modo que la solución más general podrá escribirse como:

$$P - P_n = A \frac{\sinh \frac{w-x}{L_p}}{L_p} + B \frac{\sinh \frac{x}{L_p}}{L_p} \quad (3.7.7)$$

aplicando las condiciones de contorno tenemos que:

$$P(x) = \frac{[P(o) - P_n] \frac{\sinh [(w-x)/L_p]}{\sinh (w/L_p)}}{L_p} + \frac{[P(w) - P_n] \frac{\sinh x/L_p}{\sinh (w/L_p)}}{L_p} + P_n \quad (3.7.8)$$

luego las densidades de corrientes de huecos  $J_p(o)$  y  $J_p(w)$  son:

$$J_p(o) = - \left. \frac{e D_p \partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{e D_p [P(o) - P_n]}{L_p \tanh w/L_p} - \frac{e D_p [P(w) - P_n]}{L_p \sinh w/L_p} \quad (3.7.9)$$

$$J_p(w) = \left. \frac{e D_p \partial P}{\partial x} \right|_{x=p} = \frac{-e D_p [P(o) - P_n]}{L_p \sinh w/L_p} + \frac{e D_p [P(w) - P_n]}{L_p \tanh w/L_p}$$

Si multiplicamos las dos ecuaciones anteriores por el área A de la junta, obtenemos las ecuaciones de Ebers Moll, en donde:

$$I_{Es} = I_{Cs} = \frac{e D_p P_n A}{L_p \tanh (w/L_p)} \quad (3.7.10)$$

$$\alpha_f = \alpha_r = \frac{1}{\cosh (w/L_p)}$$

Ecuaciones aplicadas a una geometría unidimensional.

Suponiendo que  $w/L_p$  es pequeño y efectuando desarrollos en serie de  $\tanh (X/L_p)$  y  $\cosh (w/L_p)$  tenemos:

$$I_{Es} = I_{Cs} = \frac{e D_p P_n A}{w} \quad (3.7.11)$$

$$\alpha_f = \alpha_r = 1 - \frac{w^2}{2 L_p^2}$$



I<sub>es</sub> como I<sub>cs</sub> son proporcionales a las concentraciones de huecos en equilibrio,  $p_n = n_i^2/N_d$  en la base, ésto hace a I<sub>es</sub> e I<sub>cs</sub>, fuertemente dependientes de la temperatura.

## CAPITULO IV

### GENERADOR LOGARITMICO USANDO DIODOS SEMICONDUCTORES.

#### 4.1. INTRODUCCION

En el Capítulo anterior se realizó un estudio teórico sobre la conducción eléctrica de diodos y transistores. En la Figura 3.6.2 se aprecia objetivamente que en un campo amplio la corriente crece exponencialmente con el voltaje aplicado en los terminales de un diodo, característica de enorme interés para nuestro objeto. En este Capítulo analizaremos la posibilidad de usar diodos como elementos transductores exponenciales, como así también sus limitaciones de operación.

#### 4.2. PRINCIPIOS GENERALES DEL GENERADOR LOGARITMICO CON DIODOS

Hemos visto que la ecuación que relaciona el voltaje y la corriente de un diodo puede escribirse como:

$$I = I_0 \left\{ \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right\} \quad (4.2.1)$$

luego podemos decir que  $V = \frac{kT}{e} \ln \left\{ \frac{I}{I_0} + 1 \right\}$  (4.2.2)

cuando  $I \gg I_0$  entonces  $V \approx \frac{kT}{e} \ln \frac{I}{I_0}$  (4.2.3)

Ahora bien, si de algún modo hacemos que  $I = m \cdot v_s$  siendo  $v_s$  una señal a la cual queremos sacar logaritmo y  $m$  una constante, la ecuación 4.2.3 puede escribirse como:

$$V = \frac{KT}{e} \ln \frac{m q E}{I_0} \quad (4.2.4)$$

Podríamos realizar físicamente esta operación si logramos construir una fuente de corriente controlada por la señal  $V_s$ , y la conectamos en el diodo en serie como indica la Figura (4.2.1).

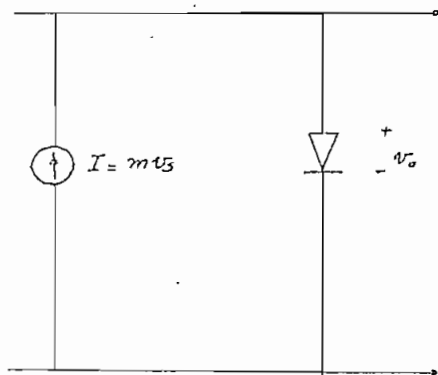


Fig. (4.2.1). Método para sacar logaritmo usando una fuente controlada de corriente con el voltaje  $V_s$ . Aquí se toma  $V_o = V$ , siendo  $V$  dado por la relación 4.2.4.

Partamos ahora de otro problema que se nos presenta. En secciones anteriores vimos que:

$$I_0 = I_{n0} + I_{p0}$$

pero

$$I_{n0} = A J_{n0}$$

$$I_{p0} = A J_{p0}$$

Siendo  $A$  el área de juntura. Como  $J_{n0} = (eD_n/\bar{L}_n)n_p$   
 $J_{p0} = eD_pP_n/L_p$ , entonces  $J_{n0}$  y  $J_{p0}$  serán fuertemente dependientes de la temperatura, con la  $I_0$  también lo será. En efecto si aumentamos la temperatura en  $10^\circ\text{C}$ .  $I_0$  aumenta su valor al doble. Esta inestabilidad térmica es un peliagudo problema que hay que resolver so pena de introducir serios errores en la apreciación del logaritmo. Este problema podríamos solucionarlo tomando como corriente de referencia una que podamos controlar su valor y que sea exterior al elemento semiconductor. Una posible solución en diagramas de bloque se establece en la Figura 4.2.2.

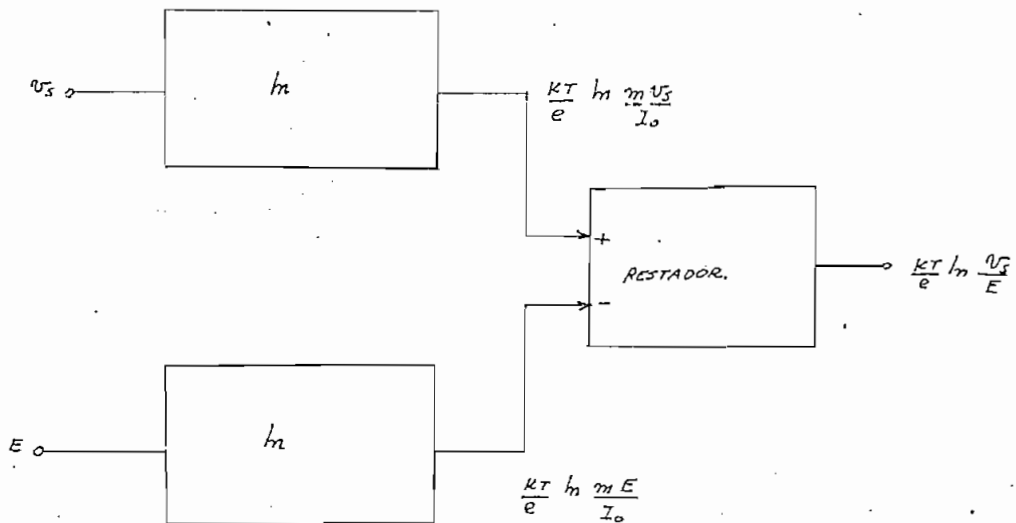


Fig. (4.2.2). Diagrama de Bloques de un circuito de compensación térmica, para sacar logaritmo.

Construir la fuente de corriente es bastante sencillo si trabajamos con amplificadores operacionales. En efecto, consideremos el circuito de la Figura 4.2.3 con un amplificador operacional:

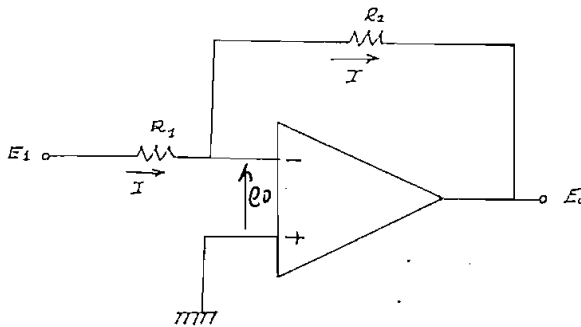


Fig.(4.2.3). Amplificador sencillo con un amplificador operacional.

El amplificador operacional tiene las siguientes características:

- a) Impedancia de entrada infinita;
- b) Impedancia de salida cero;
- c) Amplificación muy grande, casi infinita; y,
- d) Dos terminales de entrada, positivo y negativo. Si introducimos señal en el terminal positivo, la señal de salida es análoga a la de entrada y con la misma fase que aquella. Si introducimos una señal al terminal negativo, la señal de salida es análoga a la de entrada, pero  $180^\circ$  con respecto a aquella.

De la Figura 4.2.3 podemos decir lo siguiente:

$$I = \frac{E_1 - E_0}{R_1} \quad I' = \frac{E_0 - E_0}{R_2}$$

Por ser la impedancia de entrada infinita  $I = I'$  ; entonces:

$$\frac{E_1 - E_0}{R_1} = \frac{E_0 - E_0}{R_2} \quad (4.2.5)$$

pero  $E_0 = -A E_0$  ; de donde  $E_0 = -E_0/A$  que sustituido en 4.2.5

$$\frac{E_1 + \frac{E_0}{A}}{R_1} = \frac{-E_0/A - E_0}{R_2}$$

como A debe ser muy grande:  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{E_1 + E_0/A}{R_1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-E_0/A - E_0}{R_2}$

de donde  $\frac{E_1}{R_1} = -\frac{E_0}{R_2}$

$$\text{finalmente } E_0 = -\frac{R_2}{R_1} E_1 \quad (4.2.6)$$

y Cosa interesante, como  $E_0 = -E_0/A$  entonces  $\lim_{A \rightarrow \infty} E_0 = 0$

Se  $E_0 = 0$  y decimos que  $E_0$  es una tierra virtual. Se ve entonces que el valor de I dependerá únicamente de  $E_1$  y  $R_1$  mediante:

$$I = \frac{E_1}{R_1}$$

independientemente de cualquiera que sea la resistencia o el circuito, hablando en términos más generales, de realimentación. Por otro lado de 4.2.6 podemos decir que en este caso sencillo que  $E_0 = -R_2 I$ , ésto significa que el valor de  $E_0$  es el

de la caída de tensión debido a la corriente  $I$  en la red de realimentación. Sin más explicación el circuito 4.2.3 podemos sustituirlo por el modelo equivalente de la Figura 4.2.4.

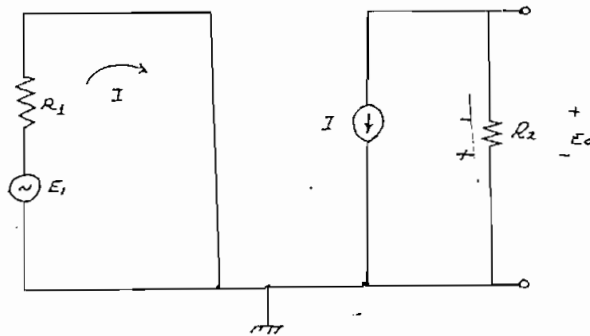


Fig. (4.2.4). Circuito equivalente por circuito de la Fig.4.2.3.

En el modelo establecido se cumplen las relaciones:

$$I = \frac{E_1}{R_1}$$

$$E_o = -IR_2$$

$$e_o = 0$$

que son las mismas que establecieron para el circuito "real". Hemos logrado obtener nuestra fuente de corriente controlada por el voltaje  $E_1$ . Si en lugar de  $R_2$  colocara un diodo tendrá un circuito muy similar al de la Figura 4.2.1.

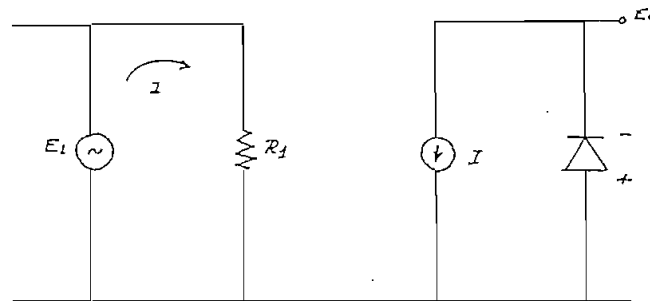


Fig. (4.2.5). Circuito equivalente de sustituir  $R_2$  por un diodo.

De la Figura 4.2.5 podemos ahora decir:  $E_o = -\frac{\kappa T}{e} \ln \frac{E_1}{I_0 R}$

#### 4.3.1. Amplificadores logarítmicos con diodos.

Se denominan amplificadores logarítmicos a aquellos amplificadores cuyo voltaje de salida varíe logarítmicamente con la señal de entrada. Cuando sustituimos la resistencia  $R_2$ , en el circuito de la Figura 4.2.3, por un diodo tenemos un amplificador logarítmico.

Analicemos ahora el siguiente circuito (ver Figura 4.3.1).



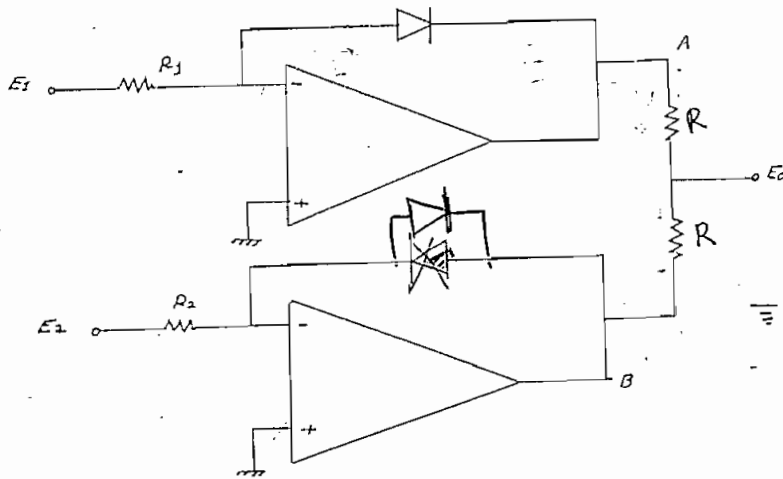


Fig. (4.3.1). Circuito con Compensación Térmica para sacar logaritmo.

Podemos decir aquí que 
$$V_A = - \frac{KT}{e} \ln \frac{E_1}{R_1 I_{01}} \quad (4.3.1)$$

además 
$$V_B = \frac{KT}{e} \ln \frac{E_2}{R_2 I_{02}} \quad (4.3.2)$$

el voltaje  $E_0$  será dado por:  $E_0 = V_B - IR$

donde 
$$I = \frac{V_B - V_A}{2R}$$

de modo que 
$$E_0 = \frac{2V_B - V_B + V_A}{2} \quad \text{y} \quad E_0 = \frac{V_B + V_A}{2} \quad (4.3.3)$$

Sustituyendo VA y VB por las relaciones 4.3.1 y 4.3.2 en 4.3.3 se tiene finalmente:

$$E_o = - \frac{kT}{2e} \ln \frac{E_1 R_2}{E_2 R_1} \frac{I_{o2}}{I_{o1}}$$

Si  $I_{o1} \approx I_{o2}$  entonces tenemos que  $I_{o1}/I_{o2} \approx 1$ , entonces

$$E_o = \frac{kT}{2e} \ln \frac{E_2 R_1}{E_1 R_2} \quad (4.3.4)$$

#### 4.3.2. Generador Antilogaritmico usando diodos.

Es obvio que el circuito a utilizarse en este caso sería el indicado en la Figura 4.3.2. Como  $V_A \approx 0$  entonces el circuito de entrada se comportará si como  $V_S$  estuviese en <sup>serie</sup> paralelo con el diodo y la corriente I será:

$$I = I_o \exp \frac{eV_S}{kT}$$

Pero otra vez aparece el término  $I_o$ , el cual para nuestro caso es indeseable por razones anteriormente expresadas. Lo ideal sería tomar una corriente de referencia  $I_f$  de modo que eliminemos el término  $I_o$ . En todo caso, el voltaje de salida es:

$$E_o = - I_o R \exp \frac{eV_S}{kT}$$

con la limitación adicional de  $V_S \geq 0$

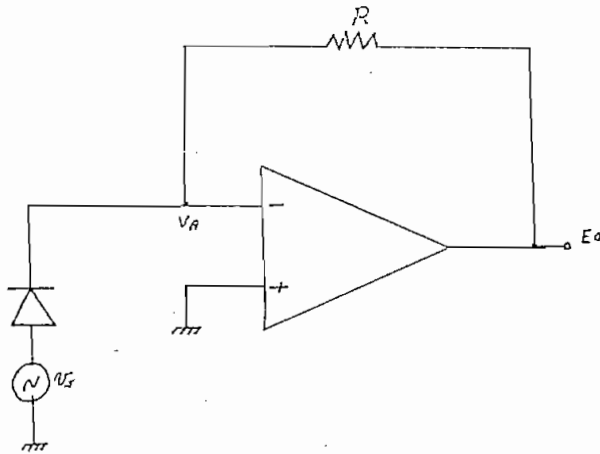


Fig. (4.3.2). Circuito generador antilogaritmico.

Para hacer el antilogaritmo independiente de  $I_o$  es conveniente usar el circuito de la Figura 4.3.3.

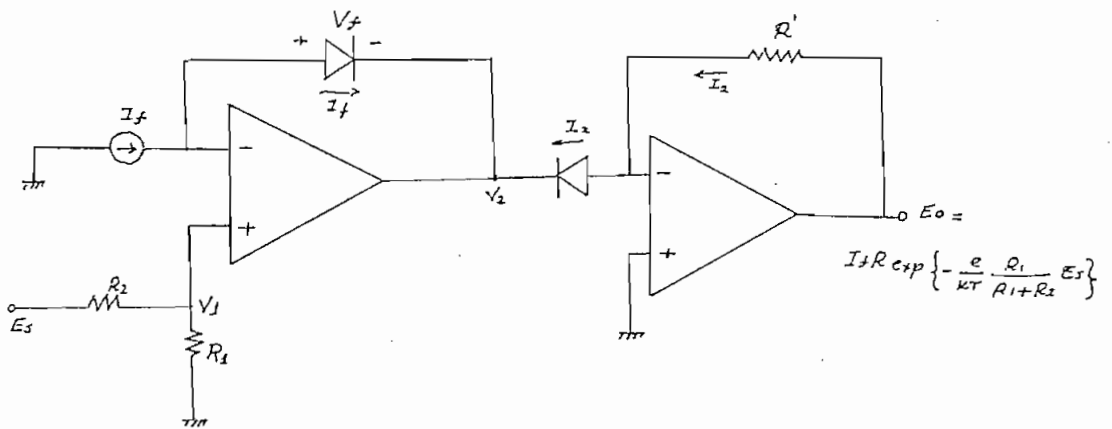


Fig. (4.3.3). Circuito amplificador antilogaritmico con compensación térmica.

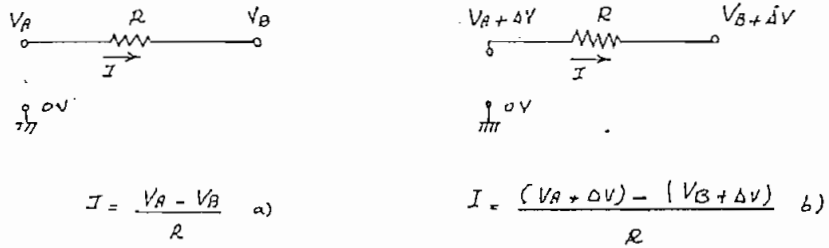


Fig. (4.3.4). La corriente que circula a través de R está dado por la relación a). Nótese que en b) la relación sigue siendo sustancialmente la misma a pesar de que se ha modificado el potencial de cada uno de los extremos en  $\Delta V$  con respecto al potencial de referencia 0 volts.

Para aclarar aún más la idea expuesta, es conveniente referirse a la Fig. 4.3.5.

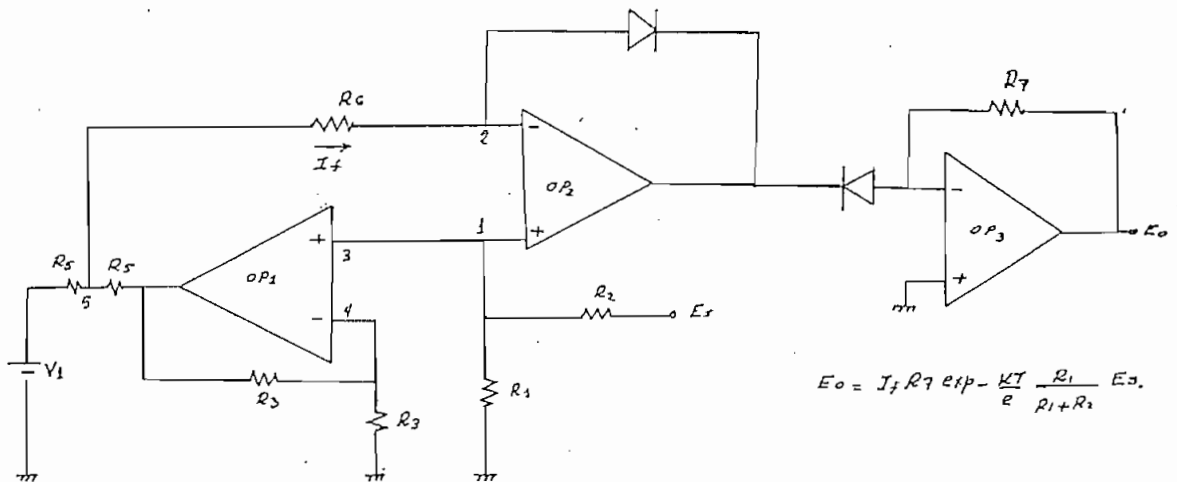


Fig. (4.3.5). Circuito para sacar antilogaritmo usando diodos, con compensación térmica y con el circuito que se comporta como fuente de corriente.

En el circuito de la Figura se ve que los potenciales de los puntos 1, 2, 3 y 4 son idénticos a  $V_A$ . Ahora bien, entonces el potencial  $V_B$  será:

$$V_B = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) V_A = 2V_A.$$

Como la impedancia de salida del amplificador 1 es muy baja podemos representar su salida como unicamente una fuente de voltaje de valor  $2V_A$ . El punto 2 del operacional 2 actúa como una fuente de voltaje de valor  $V_A$ , lo cual es razonable suponer porque cuando  $V_S = 0$   $V_A = 0$  y el punto 2 actúa si como estuviese cortocircuitado a tierra debido a la gran ganancia del operacional; es decir, el punto 2 actúa como un cortocircuito generalizado, característica que es condición necesaria y suficiente para definir a una fuente de voltaje\*. Entonces, desde el punto 5 vemos un circuito equivalente como el presentado en la Figura 4.3.6.

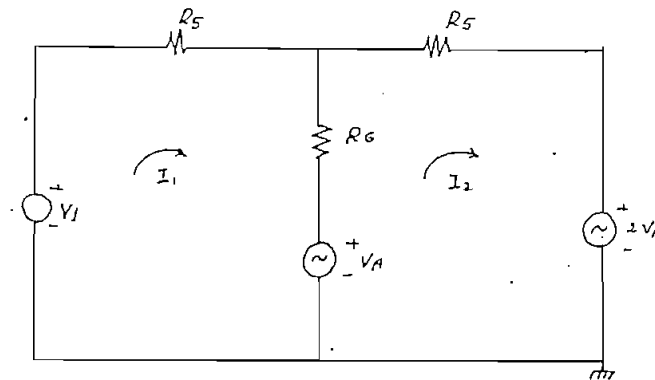


Fig. (4.3.6). Circuito equivalente de que mira desde el punto 5 de la Figura 4.3.5.

\* Ver Guillemín Circuitos Eléctricos.

Queremos calcular la corriente que aparece a través de  $R_6$ . Para ello planteemos las ecuaciones de malla:

$$\begin{aligned} V_1 - V_A &= I_1 (R_5 + R_6) - I_2 R_6 \\ -V_A &= -I_1 R_6 + I_2 (R_5 + R_6) \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

El discriminante del sistema es:

$$\Delta = (R_5 + R_6)^2 - R_6^2 = R_5^2 + 2R_5R_6 \tag{4.3.7}$$

La corriente  $I_1$  aplicando la regla de Kramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 - V_A & -R_6 \\ -V_A & R_5 + R_6 \end{vmatrix}}{R_5^2 + 2R_5R_6} = \frac{R_5(V_1 - V_A) + R_6(V_1 - 2V_A)}{R_5^2 + 2R_5R_6}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_5 + R_6 & V_1 - V_A \\ -R_6 & -V_A \end{vmatrix}}{R_5^2 + 2R_5R_6} = \frac{-R_5V_A + R_6(V_1 - 2V_A)}{R_5^2 + 2R_5R_6}$$

la corriente que circula a través de  $R_6$  es:

$$I_3 = I_1 - I_2$$

$$I_3 = \frac{V_1}{R_5 + 2R_6}$$

La corriente depende unicamente del voltaje  $V_1$  y es totalmente independiente de la señal de entrada  $V_s$ . Tendremos pues una corriente dada por 4.3.8, que estará inyectándose continuamente por el punto 2 del operacional 2. Este tipo de fuente de corriente ha sido diseñado con el mismo criterio anteriormente descrito, ya que si  $R_6 \gg R_5$ , el potencial que se mira en el punto 5 es  $V_1/2 + V_A$ , de modo que la diferencia de potencial entre los puntos 5 y 2, extremos de la resistencia  $R_6$ , es  $V_1/2$ ; en consecuencia, la corriente que atraviesa  $R_6$  es  $V_1/2R_6$  e independiente de la señal  $V_s$ .

#### 4.3.3. Limitaciones de este tipo de circuitos.

Remitámonos al Gráfico 3.6.2., en donde se representa la variación del voltaje con la corriente de un diodo. Dijimos allí que existe un buen número de décadas en donde la corriente sigue una relación con el voltaje de la forma  $\exp(eV/kT)$  limitada por dos casos extremos de operación: inyección de portadores a bajo nivel e inyección de portadores a gran nivel. En los dos casos la curva tiende a tomar como asintota a  $\exp(eV/2kT)$ . La física del problema ya se aclaró en el Capítulo anterior.

Si bien, lo anteriormente expuesto limita el rango de operación existe otro factor limitante que reduce aún más el número de décadas a utilizarse. Ese factor es la resistencia eléctrica que se hace presente debido a los contactos ohmicos y la pequeña gradiente de tensión que aparece en el cuerpo del diodo. Considerando todos esos factores podemos decir que la ecuación de voltaje-corriente a lo que obedece un diodo se escribe como:

$$V = \frac{m k T}{e} \ln \frac{I}{I_0} + IR_B \quad (4.3.9)$$

Siendo  $m = 1$  o  $m = 2$  para los casos de función normal ó para los casos de inyección de bajo y algo nivel respectivamente. Una mejor alternativa que se presenta es usando transistores apareados de características idénticas como elementos sustitutivos de los diodos, pues sus condiciones de operación son mucho mejores.



CAPITULO V

GENERADOR ANALOGICO LOGARITMO USANDO TRANSISTORES

5.1. GENERALIDADES:

Si un transistor es conectado como realimentación de un amplificador operacional, la corriente de colector es determinada por la corriente o voltaje de entrada. Idealmente el amplificador operacional mantendrá la corriente de colector igual a la corriente de entrada y fijará el voltaje de colector a un potencial cero. Si la base se conecta a tierra, tanto el colector como la base se mantienen en el mismo potencial, si bien la corriente de base circula independientemente. El voltaje de salida del amplificador que es siempre el voltaje base emisor debería encontrar al colector bloqueado, mientras tanto provea de cualquier corriente que necesita el emisor.

La configuración más básica de este tipo de circuito se indica en la Figura 5.1.1.

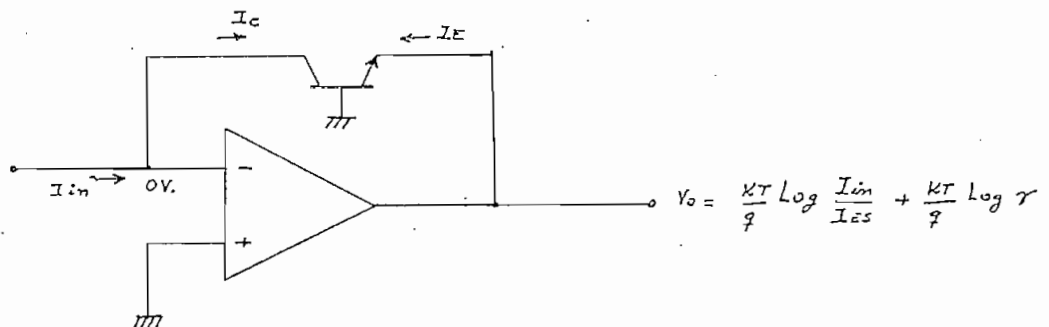


Fig. (5.1.1) Amplificador logaritmico básico con transistores.

Para estudiar las relaciones que controlan el circuito de la Figura 5.1, usamos las ecuaciones de Ebers Moll para la corriente de emisor y colector de un transistor bipolar colocada su base a tierra.

$$5.1.1 \left\{ \begin{array}{l} I_E = I_{ES} \left\{ \exp \frac{eV_{EB}}{kT} - 1 \right\} - \alpha_f I_{CS} \left\{ \exp \frac{eV_{CB}}{kT} - 1 \right\} \\ I_C = -\alpha_f I_{ES} \left\{ \exp \frac{eV_{EB}}{kT} - 1 \right\} + I_{CS} \left\{ \exp \frac{eV_{CB}}{kT} - 1 \right\} \end{array} \right.$$

Aquí  $V_{EB}$  y  $V_{CB}$  son los voltajes entre base y emisor y base-colector;  $I_{ES}$  e  $I_{CS}$  son las corrientes de huecos y electrones inyectados a través de la unión emisora con polarización nula de emisor.  $I_{CS}$  es la corriente a través de la unión colector con polarización nula de colector.  $\alpha_f$  es la parte de la corriente de emisor que es tomada por el colector con polarización nula de colector,  $\alpha_r$  es la parte de corriente de colector que es tomado por el emisor con voltaje nulo de colector. En el Capítulo anterior demostramos que  $\alpha_f \approx \alpha_r$ . A  $\alpha_f$  se llama factor de transporte.

Es necesario introducir un nuevo concepto sobre la física del transistor: el de eficiencia de emisor. Se define eficiencia de emisor a la relación existente entre la corriente de difusión de portadores minoritarios en la base sobre la corriente total formada por la corriente de difusión de portadores minoritarios en la base más la corriente de difusión de portadores minoritarios de emisor.

$$\gamma = \frac{J_{dis B}}{J_{dis B} + J_{dis E}} \quad (5.1.2)$$

Entre este factor y el factor de transporte se relacionan mediante:

$$\boxed{\alpha = \gamma \alpha_f} \quad (3.1.3)$$

Siendo  $\alpha$  el factor de ampliación de corriente en base común.

Ahora bien, de las ecuaciones de Ebers Moll si  $V_{CB}=0$ , entonces:

$$I_E = I_{ES} \left\{ \exp \frac{e V_{EB}}{kT} - 1 \right\} \quad (5.1.4)$$

$$I_C = -\alpha_N I_{ES} \left\{ \exp \frac{e V_{EB}}{kT} - 1 \right\}$$

donde

$$\boxed{\alpha_r = \alpha_f = \alpha_N}$$

Despejando  $V_{EB}$  de la segunda ecuación del sistema 5.1.4, tenemos que:

$$V_{EB} = \frac{kT}{e} \left\{ \frac{\ln I_C}{\log \frac{I_C}{I_{ES}}} - \frac{\ln \alpha_N}{\log \alpha_N} \right\} \quad (5.1.5)$$

Para transistores fabricados con la técnica planar del silicio, generalmente  $I_{ES}$  toma valores muy pequeños y de órdenes de magnitudes de  $10^{-13}$  amperios o menos. Es por eso que la ecuación anterior es válida para un rango muy grande de corriente. Generalmente el factor de transporte es muy próximo a la unidad y  $\log \alpha_N$  se toma como aproximadamente cero.

Si la base del transistor y el colector son físicamente cortocircuitados entre sí, el resultado es un diodo de dos terminales que cumple la segunda de las dos ecuaciones de E-

bers Moll. Remitámonos a la Figura 5.1.2.

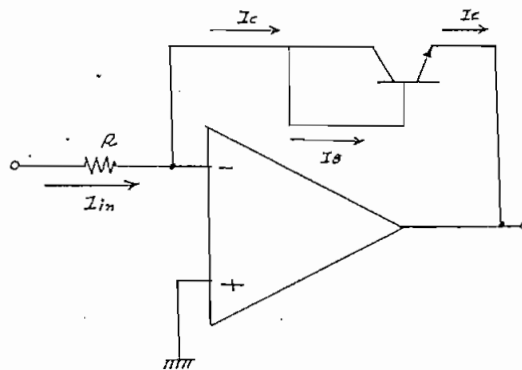


Fig. (5.2.2). Amplificador logaritmico usando un transistor de realimentación y en donde físicamente se ha cortocircuitado el colector y la base.

Vemos que  $I_{in} = I_c + I_B$  pero en todo transistor se cumple que  $I_E = I_c + I_B$  de lo que resulta que  $I_{in} = I_E$ . Ahora bien, como  $\alpha = I_c / I_E$  entonces  $I_c = \alpha I_E$

$$I_c = \alpha I_{in} \quad (5.1.6)$$

Relación que sustituida en la ecuación 5.1.5, nos dá:

$$V_{EB} = \frac{KT}{e} \ln \frac{I_{in}}{I_{ES}} - \frac{KT}{e} \ln \frac{\alpha N}{\alpha} \quad (5.1.7)$$

Como el factor eficiencia de emisor  $\gamma$  se definió como  $\alpha = \gamma \alpha_N$ , tenemos que la ecuación 5.1.7 queda como sigue:

$$V_{EB} = \frac{KT}{e} \ln \frac{I_{in}}{I_{ES}} + \frac{KT}{e} \ln \gamma \quad (5.1.8)$$

El factor  $(KT/e) \ln \gamma$  es una magnitud de error que se

está sumando a la información deseada  $KT/e \ln I_{in} / I_{ES}$  . Si la eficiencia de emisor de un transistor tiende a la unidad  $(KT/e) \ln \gamma$  tiende a cero y 5.1.8 nos posibilita obtener una muy buena aproximación al logaritmo natural de la relación  $I_{in} / I_{ES}$  . Como la eficiencia de emisor nos indica en definitiva el número de portadores minoritarios que partiendo del emisor llegan al colector sin recombinarse, entonces mientras más alto sea el  $\beta$  de un transistor, más próximo a uno será  $\gamma$  . Esto se objetiva en el Cuadro de valores 5.1.

$\beta$	$\gamma$	$(kT/e) \ln \gamma$ [mV]
$\infty$	1	0
1.000	0.999	0.03
200	0.995	0.13
100	0.990	0.26
50	0.980	0.51
19	0.950	1.32
11.5	0.920	2.14
9	0.900	2.70
4	0.800	5.70
3	0.750	7.40
1	0.500	17.80

Cuadro 5.1. Relación entre el  $\beta$  del transistor con la eficiencia de emisor y el error en la apreciación de logaritmo.

Del Cuadro 5.1 se ve que cualquier transistor usado como diodo logaritmico de dos terminales requiere que  $\beta$  sea grande y que mantenga su valor en un margen amplio de corriente.

## 5.2. PROBLEMAS DE CONFIABILIDAD EN LA APRECIACION DE LOGARITMO.

Si  $V_{CB} \neq 0$ , los segundos términos de la ecuación de Ebers Moll introducirán un error que puede afectar significativamente VEB, especialmente para valores bajos de corriente de entrada. Para aquellos circuitos donde la base del transistor está a tierra, el voltaje offset del amplificador Vos, afectará al colector como cualquier voltaje común de entrada lo haría. Debemos guiarnos en el diseño de este tipo de circuitos de modo que las posibles variaciones de Vos no afecten a los rangos más bajos de corriente que vamos a utilizar. En todo caso, para aclarar mejor el problema reduzcamos a un amplificador operacional real, con voltaje offset y con corriente de entrada de error a un amplificador operacional ideal sin estas fuentes de error, de modo que esas fuentes de error se presenten externas al circuito. Para ello remitámonos a la Figura 5.2.1., en donde se ha representado un amplificador operacional real con sus correspondientes fuentes de error y su equivalente circuital considerando un amplificador ideal:

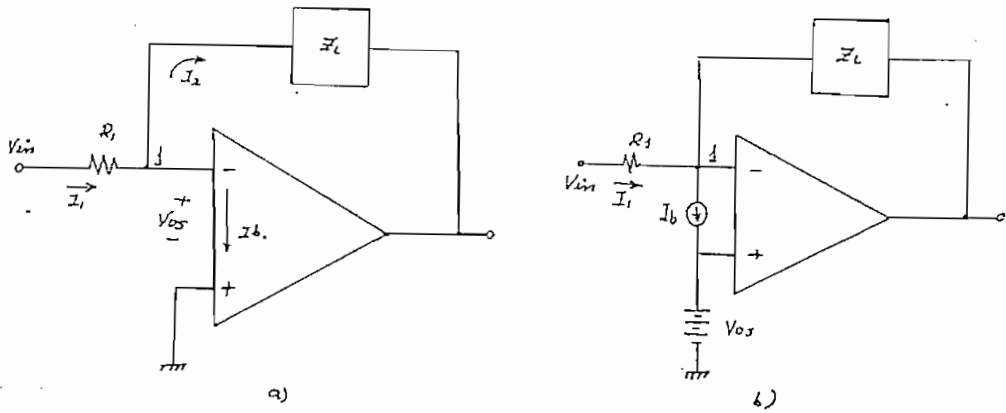


Fig. (5.2.1). En a) se ha representado un amplificador operacional real y sus fuentes de error.

En b) su equivalencia circuital considerando a las fuentes de error como si fuesen externas a un operacional ideal.

Calculemos pues la corriente \$I\_1\$ considerando esas fuentes de error. La corriente \$I\_1\$ en el nodo 1 está dado por:

$$I_1 = I_2 + I_b$$

Pero 
$$I_1 = \frac{V_{in} - V_{os}}{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1} - \frac{V_{os}}{R_1}$$
 entonces:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = I_2 + I_b + \frac{V_{os}}{R_1} \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$\frac{V_{in}}{R_1} - I_2 = I_b + \frac{V_{os}}{R_1} \quad (5.2.1)$$

\$I\_2\$ es la corriente que iría al colector del transistor de realimentación del operacional. Lo ideal es que fuese igual



a  $V_{in}/R_1$ , pero tanto la corriente de error como el voltaje offset introducen una corriente de error total que resulta ser la suma algébrica de los dos efectos. Este efecto puede disminuir notablemente colocando una resistencia en serie entre tierra y el terminal positivo del amplificador operacional, de tal manera que la otra corriente de error que por esa resistencia circula hacia el terminal positivo del operacional, producirá un potencial que lo compense.

En la Figura 5.2.2. se representa este tipo de configuración.

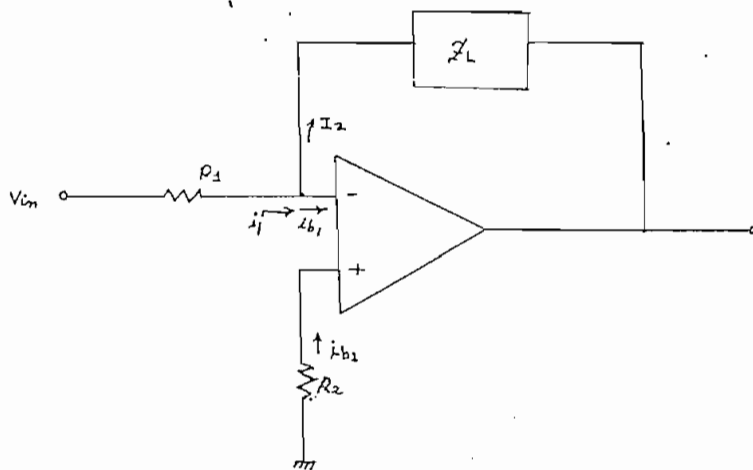


Fig. (5.2.2) Circuito de compensación de corriente y voltajes de error.

Tenemos pues que:

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R_1} - I_{b1} + I_{b2} \frac{R_2}{R_1}$$

Cuando  $I_{b1} = I_{b2}$  y  $R_2 = R_1$  tenemos que  $I_c = I_{in} = V_{in}/R_1$

Se debe evitar en lo posible que el potencial dado por la

caída de tensión de  $i_{b2}$  en  $R_2$ ,  $i_{b2} R_2$ , sea muy grande como para introducir errores significativos en VCB.

Cuando encerramos el amplificador a una temperatura, la corriente de error como por ejemplo la producida por Vos se reducen temporalmente. Si es que IES es del orden de  $10^{-14} A$  o menos, es importante seleccionar el amplificador operacional con cuidado y minimizar la pérdida de corriente desde todas las fuentes.

### 5.3. PROBLEMAS DE INESTABILIDAD EN AMPLIFICADORES LOGARITMICOS CON TRANSISTORES.

Cuando tenemos un amplificador con realimentación siendo  $A(s)$  su ganancia a lazo abierto, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)} \quad (5.3.1)$$

Ahora bien, un sistema es estable cuando la respuesta a la función impulso tiende a cero en la medida que el tiempo tiende a infinito. Para que esto suceda es necesario que los polos de la ecuación 5.3.1 caigan en el semiplano  $s$  izquierdo.

Si un polo cae en el punto  $s = 0 \pm j\omega_n$  entonces el circuito permanece en equilibrio parcialmente estable y el circuito oscilará a una frecuencia  $\omega_n$ .

Entonces para que un circuito oscile se requerirán dos condiciones:

1. El lazo de realimentación B debe introducir un ángulo de desfazamiento tal, que la entrada y la salida del sistema estén en fase. Es decir, debe existir realimentación positiva.

2. El producto  $BA(s)$  debe ser igual a  $-1$ , de modo que  $G(S)$  se vuelva infinita.

Estos criterios son útiles cuando queremos diseñar un oscilador. Pero éste no es el caso, pues queremos a las dos condiciones anteriores evitarlas a cómo dé lugar, porque lo que en realidad deseamos es la estabilidad del sistema.

Antes primero hagamos un análisis físico de por qué es posible que oscilen este tipo de circuitos amplificadores logarítmicos con transistores. Remitámonos a la Figura 5.3.1, en donde se ha representado nuevamente un amplificador logarítmico básico:

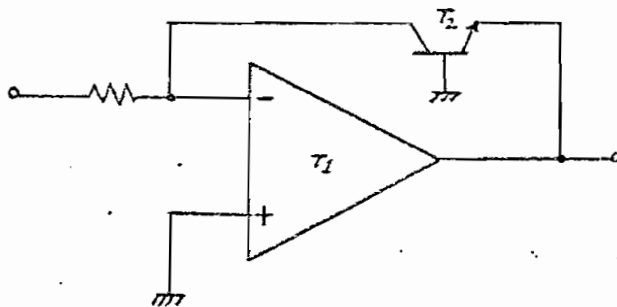


Fig. (5.3.1). Amplificador logarítmico básico. Cuando aplicamos una señal a la entrada, esa señal se demora un tiempo  $T_1$  en aparecer a la salida del operacional y un tiempo  $T_2$  para que, a través del transistor de realimentación, llegue nuevamente a la entrada. Es así como el tiempo total en aplicar la realimentación negativa a través del lazo y el amplificador es  $T_1 + T_2$ .

Supongamos que aplicamos al tiempo  $t = 0$  una señal de voltaje a la entrada del sistema. Como el tiempo de completar la realimentación negativa es  $T_1 + T_2$ , siendo  $T_1$  el tiempo de respuesta del operacional y  $T_2$  el de transistor de realimentación, va a existir siempre una señal de ruido o de cualquier armónico de la señal tal que su período va a ser exactamente igual al tiempo  $T_1 + T_2$  en completarse la realimentación negativa. En ese caso esa señal va a estar en fase con la entrada, determinando la existencia de realimentación positiva que va a obligar al circuito a oscilar a esa frecuencia. La ganancia del sistema se va a volver infinita cumpliéndose la condición de  $AB = -1$ , para que exista oscilación y el sistema será inestable.

¿Cómo resolver este problema de inestabilidad? Lo primero que se nos podría ocurrir sería colocar un condensador en paralelo con el transistor, de modo que cortacircuite la frecuencia de oscilación. Pero se presenta en ese caso el siguiente problema:

Como  $v_o = \frac{kT}{e} \ln \frac{I}{I_{es}} + \frac{kT}{e} \ln \gamma$  de la ecuación 5.1.8

la resistencia dinámica del transistor será:

$$R_d = \frac{dv_o}{dI} = \frac{kT}{e} \frac{1}{I} \quad (5.3.2)$$

Es decir la resistencia dinámica es inversamente proporcional a la corriente. Como la constante de tiempo se define como  $\tau = RC$  y como  $\omega_c = 1/RC$  siendo  $\omega_c$  la frecuencia de corte, resulta que tomando en cuenta 5.3.2:

$$\omega_0 = \frac{e}{kT} \frac{I}{C} \quad (5.3.3)$$

es decir, el ancho de banda crece con el nivel de corriente inyectada al operacional. Para valores muy bajos de corriente, digamos  $I = 1 \text{ mA}$  la resistencia dinámica del transistor a  $15^\circ \text{C}$ . toma el valor de  $24 \text{ M}\Omega$ , en cambio que a  $I = 1 \text{ mA}$  la resistencia es sólo de  $24 \Omega$ . Esto implica que a niveles bajos de corriente la frecuencia superior de corte puede ser muy pequeña, del orden de los Hz, dependiendo de la capacidad de realimentación en paralelo con el transistor, mientras que a corrientes más grandes la frecuencia superior de corte puede llegar a los cientos de KHz y caer nuevamente en el punto de inestabilidad que tratamos de evitar, presentándose "lobulos" o paquetes de señal de alta frecuencia cuando los niveles de corriente llegan a ser relativamente altos. Entonces no es ninguna solución adoptar un condensador. En cambio si conectamos en serie al transistor una resistencia  $R_E$ , veremos que la constante de tiempo será dada por:

$$\tau = (R_E \parallel R_d) C \quad (5.3.4)$$

Si  $R_d$  se toma siempre mucho mayor que  $R_E$ , entonces el paralelo entre  $R_d$  y  $R_E$  será aproximadamente  $R_E$  y la constante de tiempo en ese caso será:

$$\tau \approx R_E C \quad (5.3.5)$$

En todo caso plantiemos todo en términos más formales. De la ecuación 5.3.2 manifestamos que:

$$\tau = \frac{R_E}{R_E + \frac{K_T}{eI}} \frac{K_T C}{eI}$$

lo que indica que la frecuencia de corte es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi C} \left( R_E + \frac{K_T}{eI} \right) \frac{eI}{K_T R_E}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi C} \left\{ \frac{1}{R_E} + \frac{eI}{K_T} \right\} \quad (5.3.6)$$

Para que:  $f_0 \approx \frac{1}{2\pi C R_E}$  (5.3.7)

$$\frac{1}{R_E} \gg \frac{eI}{K_T} \quad (5.3.8)$$

se puede tomar como buena aproximación:

$$\frac{K_T}{eI} = 10 R_E$$

El procedimiento subsiguiente es determinar un valor de la capacidad  $C$  tal que, la frecuencia de corte  $\omega_0$  dado por 5.3.7 sea suficientemente menor a la frecuencia de oscilación, de modo que en ese punto de inestabilidad la ganancia del amplificador baje lo suficientemente necesario para evitar que exista la mínima ganancia requerida para posibles oscilaciones del circuito.

En la Figura 5.3.2. se indica un circuito con compensación de frecuencia.

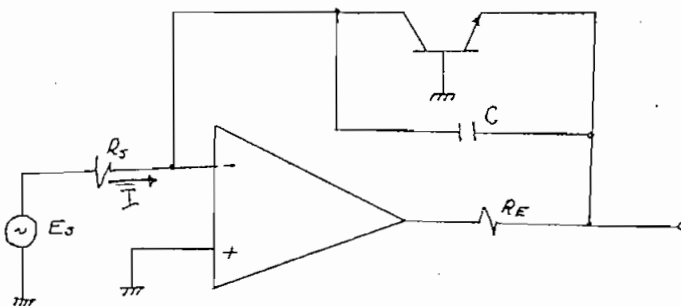


Fig. (5.3.2). Circuito amplificador logaritmico con compensación de frecuencia.

Otro circuito con compensación de frecuencia se visualiza en la Figura 5.3.3. El condensador ya no está conectado entre el colector y el emisor del transistor, sino más bien entre la entrada y la salida del operacional. En el circuito se ha incluido la capacidad parásita  $C_1$  del transistor y el operacional, y además hemos supuesto que el circuito ha sido conectado a una resistencia de carga  $R_L$  tierra.

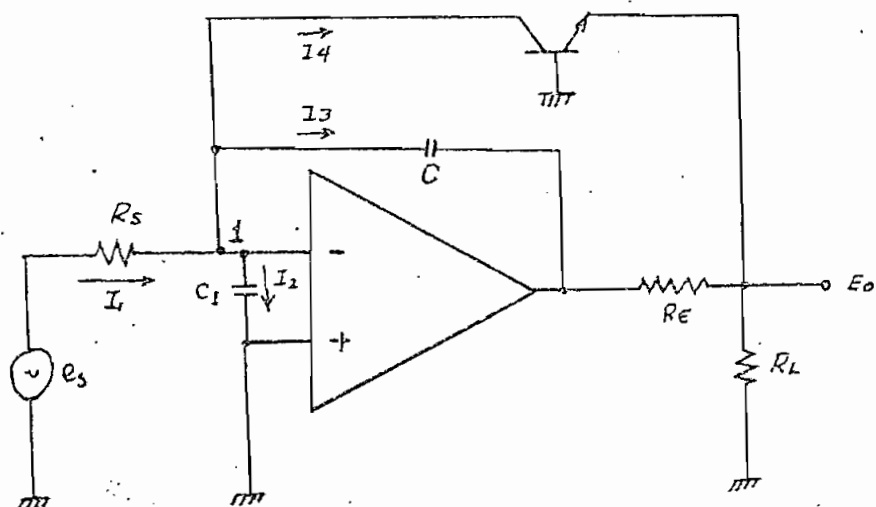


Fig. (5.3.3). Otra modalidad de amplificador logaritmico con compensación de frecuencia.

Vamos a analizar este tipo de circuito. Para ello desarrollaremos para señales pequeñas el siguiente modelo circuital del sistema de la Figura 5.3.3.

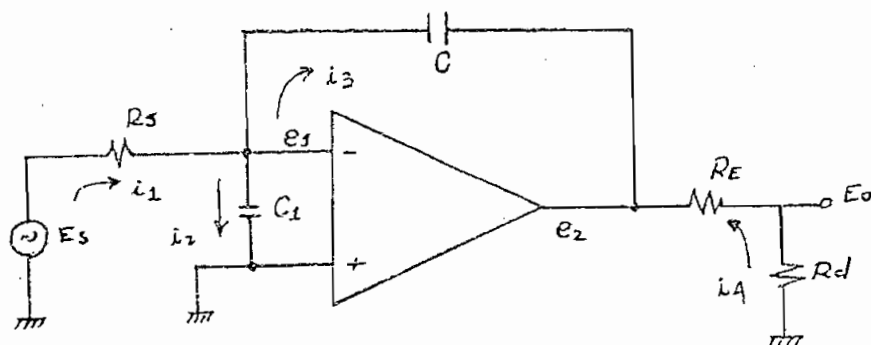


Fig. (5.3.4). Circuito equivalente del circuito de la Figura 5.3.3, se ha sustituido al transistor por su resistencia dinámica equivalente  $R_d = \frac{kT}{eI_4}$  en el punto de corriente continua  $I_4$ . No consideramos aquí  $R_l$ .



Es necesario aclarar algunos puntos respecto al presente modelo. Como la base del transistor está a tierra, lo que vemos desde la salida del operacional debe ser la resistencia  $R_e$  en serie con la resistencia dinámica transdiódica conectada a tierra, por donde circulará, como es obvio, la corriente de emisor. En 5.1 discutimos que para usar un transistor como realimentación de un operacional, para que la lectura de logaritmo sea sin el error que aparece por el término  $(KT/q) \ln \gamma$  de la ecuación 5.1.8, es necesario que  $\gamma$  tienda a la unidad y  $\beta$  sea muy grande. Eso significa que las corrientes de colector y emisor deben ser iguales en muy buena aproximación. En consecuencia, la corriente que se inyecte por el colector debe ser igual a la que sale por el emisor, aproximadamente. Por esa razón en la Figura 5.3.4 se expresa a la corriente  $I_4$ , que se inyecta en el colector, saliendo del potencial cero de referencia hacia el operacional circulando por  $R_d$  y  $R_e$ .

Por otro lado, hasta aquí se ha considerado que un amplificador operacional manifiesta las siguientes características:

- 1) Ganancia muy grande (tendiendo al infinito);
- 2) Impedancia de entrada infinita;
- 3) Impedancia de salida cero;
- 4) Ancho de banda infinito; y,
- 5) No introduce modificaciones de fase entre la entrada y la salida, a no ser  $180^\circ$  o  $0^\circ$  dependiendo de la entrada con lo que estamos trabajando.

Los números 4 y 5 se han introducido aquí para poner

énfasis en algo que hasta aquí lo hemos aceptado implícitamente.

Desgraciadamente los amplificadores operacionales reales no reúnen esos requisitos totalmente, sino más bien en una forma relativa. Aclaremos conceptos: en primer lugar presentan una gran ganancia, pero limitada; en segundo lugar tienen una frecuencia de corte en respuesta de frecuencia muy pequeña del orden de los Hz. Desde allí comienza a decrecer la ganancia 20 db por cada década, eso hace que generalmente tengan una ganancia a lazo abierto de 1 a la frecuencia de 1MHz, a no ser en operacionales muy especiales. Ahora bien, a posteriori de lo expresado, en el dominio de frecuencia la ganancia del operacional debe ser de la forma:

$$A(s) = \frac{A}{1 + s/\omega_c} \quad (5.3.9)$$

Donde  $\omega_c$  es la frecuencia de corte.

Del gráfico 5.3.4. podemos decir:

$$I_1 = \frac{E_s - e_1}{R_s} \quad (5.3.10)$$

$$I_2 = C_1 s e_1 \quad (5.3.11)$$

$$I_3 = (e_1 - e_2) C_s \quad (5.3.12)$$

$$I_4 = \frac{-e_2}{R_E + R_d} \quad (5.3.13)$$

$$e_2 = -A(s) e_1 \quad (5.3.14)$$

Remitámonos a la Figura 5.3.3. En el nodo 1 se cumple que:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

de donde:  $I_4 = I_1 - I_2 - I_3$  (5.3.15)

Considerando todas las ecuaciones anteriores y sustituidas en 5.3.15:

$$\frac{-e_2}{R_E + R_d} = \frac{E_s - e_1}{R_s} - C_1 s e_1 - (e_1 - e_2) c s$$

$$\frac{-e_2}{R_E + R_d} = \frac{E_s}{R_s} + \frac{e_2/A(s)}{R_s} + \frac{C_1 s e_1}{A(s)} + \frac{e_2 c s}{A(s)} + e_2 c s$$

$$-\frac{E_s}{R_s} = \frac{e_2}{R_s A(s)} + \frac{C_1 s e_2}{A(s)} + \frac{e_2 c(s)}{A(s)} + \frac{e_2 c s}{R_E + R_d} + \frac{e_1}{R_E + R_d}$$

$$-\frac{E_s}{e_2} = \frac{1}{A(s)} + \frac{C_1 R_s s}{A(s)} + \frac{R_s c s}{1} + \frac{R_s}{R_E + R_d}$$

De la misma Figura 5.3.4:

$$E_o = \frac{R_d}{R_d + R_E} e_2 \quad \text{de donde:}$$

$$-\frac{E_s}{E_o} = \frac{R_d}{R_d + R_E} \left\{ \frac{1}{A(s)} + \frac{C_1 R_s s}{A(s)} + \frac{R_s c s}{A(s)} + R_s c s + \frac{R_s}{R_E + R_d} \right\}$$

la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{E_o}{E_s} = - \frac{R_d + R_E}{R_d} \frac{A(s)}{1 + C_1 R_s s + R_s c s + R_s A(s) \left( c s + \frac{1}{R_E + R_d} \right)}$$

y usando 5.3.9 tenemos:

$$G(s) = \frac{R_d + R_e}{R_d} \frac{A}{\{1 + R_s (C_1 + C) s\} \left(1 + \frac{s}{\omega_c} + AR_s \left( Cs + \frac{1}{R_c + R_d} \right)\right)}$$

llamando  $Q(s)$  el polinomio en  $s$  del denominador (5.3.16)

$$Q(s) = 1 + \frac{AR_s}{R_c + R_d} + s \left( \frac{1}{\omega_c} + R_s [C_1 + C(1+A)] \right) + \frac{R_s (C_1 + C)}{\omega_c} s^2$$

Todos los términos son positivos y el sistema es estable. El problema es: ¿Cuán estable? Para contestarla analicemos el caso general de la respuesta de un circuito de dos polos usado como filtro pasa bajos. Todo filtro pasa bajos de dos polos adopta la configuración de transferencia:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + s^2/\omega_n^2} \quad (5.3.17)$$

donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la frecuencia natural de oscilación. Esta frecuencia y  $\xi$  determinan el sobrepulso de respuesta a la función escalón. La frecuencia de oscilación del sobrepulso está expresado como:

$$\omega_d = \omega_n (1 - \xi^2)^{1/2} \quad (5.3.18)$$

A continuación se presenta en la Figura 5.3.5 la respuesta de frecuencia de un circuito o sistema cuya función de transferencia sea la dada por la ecuación 5.3.17.

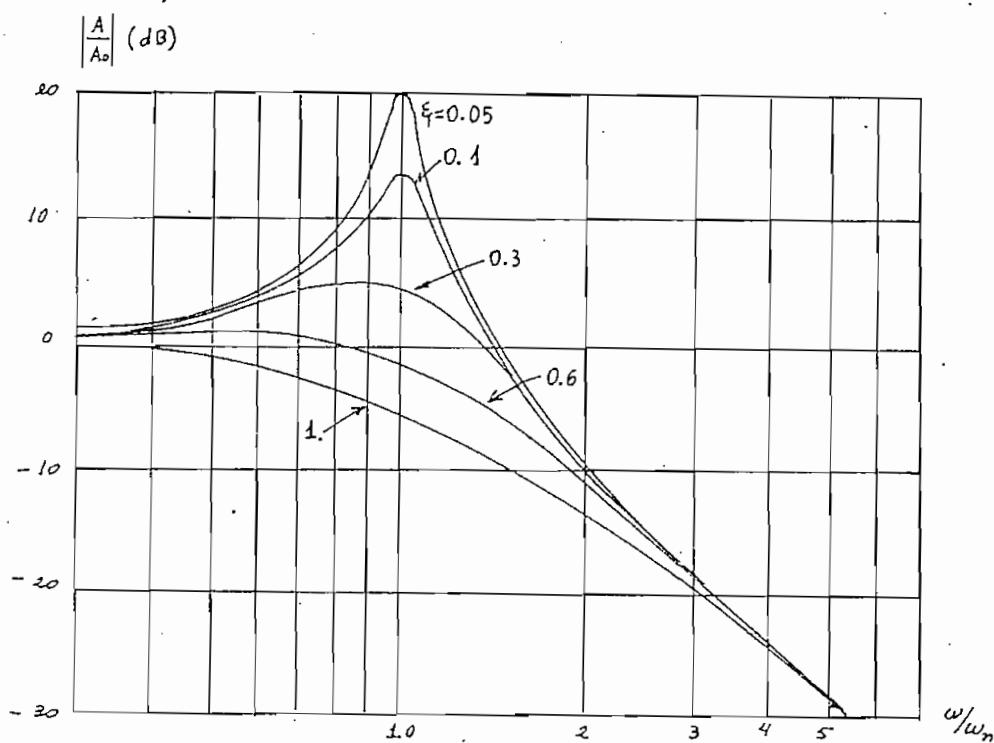


Fig. (5.3.5). Ganancia de un sistema de dos polos con distintos valores de  $\xi$

Como se aprecia en la Figura 5.3.5, la ganancia en el punto  $\omega = \omega_n$  crece en la medida que  $\xi$  decrece de valor. Cuando  $\xi = 0$  la ganancia se hace infinita y el circuito oscila. En

todo caso cuando  $\xi$  sea muy pequeño existirá siempre la posibilidad que el circuito oscile, pues la ganancia toma valores muy grandes. Con este criterio podemos analizar la ecuación 5.3.16 reduciéndole a la forma 5.3.17 y analizando los correspondientes valores de  $\xi$ .

La ecuación 5.3.16 toma la forma:

$$G(s) = \frac{R_d + R_E}{R_d} \frac{A}{1 + AR_s(R_E + R_d)^{-1} + s(1/w_c + R_s[C_1 + (1+A)C]) + s^2 R_s C_T / w_c} \quad (5.3.19)$$

donde  $C_T = C_1 + C_a$

$$G(s) = \frac{R_d + R_E}{R_d} \cdot \frac{A}{1 + \frac{AR_s}{R_E + R_d}} \times \frac{1}{1 + \frac{1/w_c + R_s\{C_1 + C(1+A)\}}{1 + \frac{AR_s}{R_E + R_d}} s + \frac{R_s C_T s^2}{w_c \left(1 + \frac{AR_s}{R_E + R_d}\right)}}$$

Llamando  $A_0 = \frac{R_d + R_E}{R_d} \frac{A}{1 + \frac{AR_s}{R_E + R_d}}$  la ganancia a frecuencias bajas:

$$\frac{G(s)}{A_0} = \frac{1}{1 + 2\xi(s/w_n) + s^2/w_n^2} \quad (5.3.20)$$

eso querrá decir que:

$$\frac{\xi}{w_n} = \frac{1/w_c + R_s\{C_1 + (1+A)C\}}{2(1 + AR_s(R_E + R_d)^{-1})} \quad (5.3.21)$$

$$\frac{1}{w_n^2} = \frac{R_s C_T}{w_c (1 + AR_s [R_E + R_d]^{-1})}$$

Ecuaciones que nos llevan a lo siguiente:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_c} + R_s \left\{ C_1 + (1+A)C \right\} \right) \sqrt{\frac{\omega_c}{R_s C_T \left( 1 + \frac{A R_s}{R_E + R_d} \right)}} \quad (5.3.22)$$

Supongamos que el condensador c no existe. Si así fuera la ecuación 5.3.22 se transformaría en:

$$\xi = \frac{1 + \omega_c R_s C_1}{2} \sqrt{\frac{1}{\omega_c R_s C_1 \left( 1 + \frac{A R_s}{R_E + R_d} \right)}} \quad (5.3.23)$$

Generalmente  $\omega_c = 10\pi \text{ Hz}$  y  $R_s \approx 10 \text{ k}\Omega$ , la suma de las capacidades parásitos del operacional y el transistor toma valores de alrededor 30 pF. Eso determina que  $1 \gg \omega_c R_s C_1$

Por otro lado  $R_E$  típicamente se toma  $1 \text{ k}\Omega$  y  $R_d$  en un buen rango de corriente permanece pequeña, luego:

$$\frac{A R_s}{R_E + R_d} \gg 1$$

Con lo que la ecuación 5.3.23 queda:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R_s^2 C_1 A}} \quad (5.3.24)$$

Asumamos ahora sí, valores típicos para tres rangos de corriente:

$$\begin{aligned} R_E &= 1 \text{ k}\Omega \\ \omega_c &= 10\pi \text{ Hz} \\ R_C &= 10^4 \Omega \\ C_1 &= 30 \text{ pF} \\ A &= 7 \times 10^5 \end{aligned}$$

A continuación se presenta un cuadro de valores que relaciona  $\xi$  con la corriente  $I$  que circula por la juntura transdiódica:

$I$	$\xi$
1 ma	0.062
0.1 ma	0.067
0.01 ma	0.36
1 ua	0.98
0.1 ua	-
0.01 ua	-

Cuadro (5.3.1). Relación existente entre  $\xi$  e  $I$

Del cuadro se puede ver que a valores de corrientes elevadas  $\xi$  disminuye de valor y el circuito tiende a ser cada vez más inestable.

Consideremos ahora la ecuación 5.3.22 con algunas modificaciones:

$$\xi = \frac{1 + \omega_c R_s [C_1 + (1+A)C]}{2} \times \frac{R_E + R_d}{\omega_c R_s^2 C_1 A} \quad (5.3.25)$$

aquí aparece el término  $\frac{1}{2} \omega_c R_s [C_1 + C(1+A)] \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R_s^2 C_1 A}}$  que

se suma al valor anteriormente calculado expresado en el cuadro 5.3.1, el cual ya no es despreciable frente a la unidad, por aparecer el término  $(1+A)C$  donde  $A$  es muy grande. El valor de  $C$  se podría calcular para obviar los problemas de inestabilidad,



de modo que para  $I = 1mA$   $\xi = 0.6$  que es un valor muy aceptable. En la tabla el valor para  $\xi$  en  $I = 1mA$  es 0.062, eso quiere decir que para que  $\xi = 0.6$  se tendrá que:

$$\omega_c R_s [C_1 + (1+A)C] \times 0.062 = 0.6 - 0.062 = 0.538$$

donde  $C = 43$  pF.

Este análisis se ha hecho bajo la suposición de que trabajamos con señales pequeñas y que en consecuencia podríamos utilizar análisis aplicables sólo a sistemas lineales. Pero existe una fuente adicional de inestabilidad, las características amplificadoras del transistor, pues por razones de voltaje offset del operacional, podríamos polarizar inversamente en forma muy ligera la juntura colector-base, y en consecuencia amplificar la inestabilidad que por los métodos anteriormente descritos, se trata de atenuarla. Eso obliga a que el valor de la capacidad de realimentación, que aquí ha sido calculada, sea algo mayor en la realidad para obtener estabilidad. Si se trata de que la respuesta a un pulso de voltaje, por parte del sistema, no sea una senoide amortiguada, basta solamente hacer  $\xi > 1$  para evitar un transiente molesto que podría sumarse a la señal de salida y deformarla. Por ello asumiremos un valor digamos de  $1.2 = \xi$  ; con lo que:

$$\omega_c R_s [C_1 + (1+A)C] \times 0.062 = 1.2 - 0.062 = 1.138$$

$$C = 80 \text{ pF.}$$

Que por razones anteriormente expuestas  $C = 100$  pF, es un valor aceptable.

5.4. AMPLIFICADORES LOGARITMICOS CON COMPENSACION DE TEMPERATURA.

La sensibilidad a la temperatura de los circuitos mencionados anteriormente, los limitan en aplicaciones prácticas. En suma, la salida depende de  $\alpha IES$  (corriente de referencia) que difiere de elemento a elemento.

Si dos transistores idénticos son juntados, de modo que tengan el mismo  $\alpha IES$ , su relación debería ser la unidad en un amplio margen de temperaturas anulando sus efectos mutuamente, como en el caso de los diodos.

El circuito de la Figura 5.4.1 es muy útil en nuestro propósito.

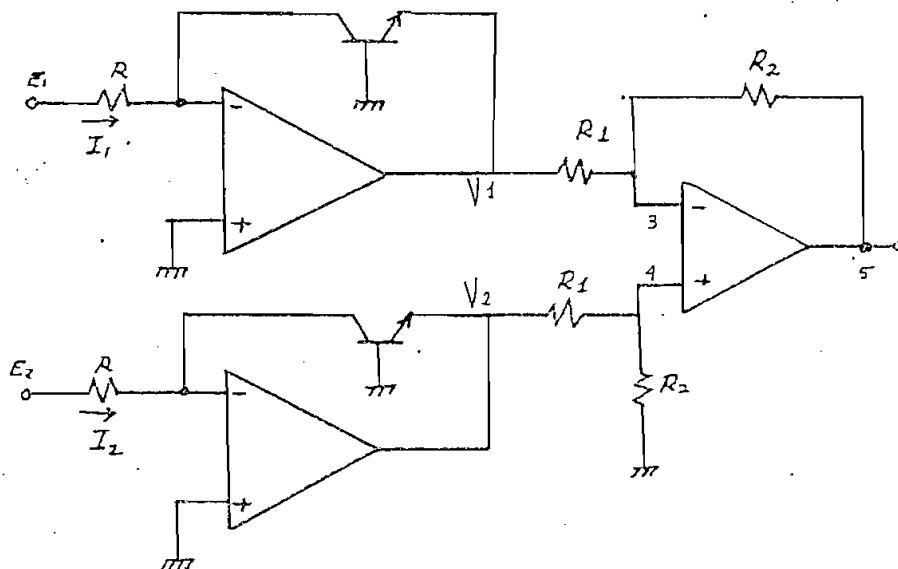


Fig. (5.4.1.) Amplificador logaritmico con compensación de frecuencia térmica. No se ha incluido compensación N1 de otras fuentes de error.

Procederemos a analizar el circuito aquí presente. Debido a las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  aparecen en los puntos 1 y 2 potenciales de valor

$$V_1 = - \frac{kT}{e} \ln \frac{I_1}{\alpha_1 I_{ES1}}$$

$$V_2 = - \frac{kT}{e} \ln \frac{I_2}{\alpha_2 I_{ES2}}$$

El potencial que aparece en el punto 4 es:

$$V_4 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_2$$

Por efecto de modo común  $V_3 = V_4$ . La corriente que circula por la resistencia que une los puntos 1 y 3 está dada por:

$$I = \frac{V_1 - V_3}{R_1}$$

De modo que el potencial que aparece en el punto 5 está dado por:

$$V_5 = -IR_2 + V_3 = - \frac{V_1 - V_3}{R_1} R_2 + V_3$$

$$V_5 = - \frac{V_1 R_2}{R_1} + V_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1} = - V_1 \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_2$$

es decir: 
$$V_5 = \frac{R_2}{R_1} (V_2 - V_1) \left[ \frac{kT}{e} \ln \frac{I_1 \alpha_2 I_{ES2}}{I_2 \alpha_1 I_{ES1}} \right] \frac{R_2}{R_1}$$

Si los transistores son muy parecidos  $\alpha_2 I_{ES2} \approx \alpha_1 I_{ES1}$

$$V_5 = \frac{kT}{e} \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{I_1}{I_2}$$

Hemos obtenido logaritmo de la relación de dos corrientes exteriores e independientes de la temperatura.

Para sacar antilogaritmo de una señal usamos el mismo circuito de la Figura 4.3.3, con la única diferencia de que en lugar de usar diodos usamos transistores. El circuito modificado podemos verlo en la Figura 5.4.2.

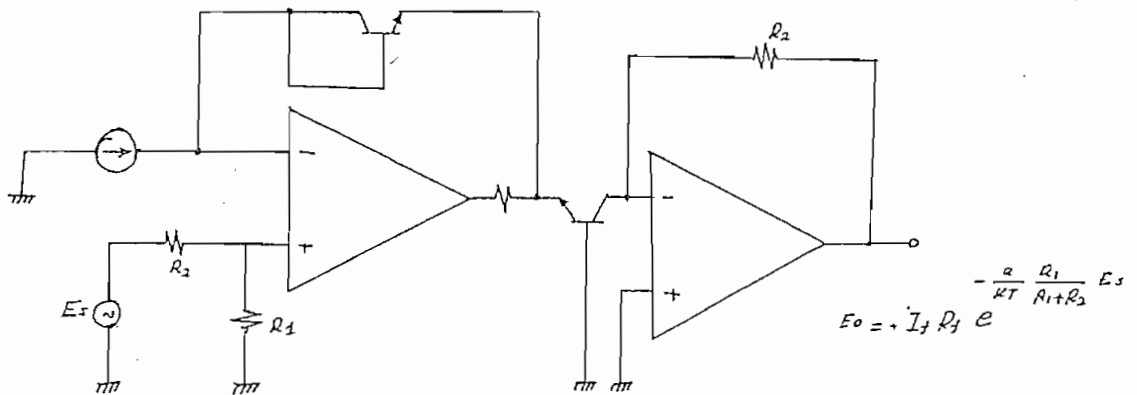


Fig.(5.4.2). Circuito para sacar antilogaritmo con compensación térmica usando la juntura transdiódica de dos transistores apareados.

### 5.5. OTROS ERRORES QUE SE INTRODUCEN EN ESTE TIPO DE CIRCUITOS.

Existen otros errores de carácter dinámico que se presentan en la operación de este tipo de circuitos, como la rapidez de respuesta y el ancho de banda, que dependen del nivel

de la señal y de la dirección de cambio de la señal.

Un generador logaritmico típico\* tiene las siguientes respuestas de tiempo con la corriente de entrada:

<u>Corriente de entrada</u> <u>creciente.</u>	<u>Tiempo</u>
1 a 10 nA	1 mseg
10 nA a 100 nA	100 u seg
100 nA a 1 uA	7 u seg
1 nA a 1 mA	4 u seg

<u>Corriente de entrada</u> <u>decreciente</u>	<u>Tiempo</u>
10 nA a 1 nA	45 mseg
100 nA a 10 nA	400 $\mu$ seg
1 uA a 100 nA	30 $\mu$ seg
1 mA a 1 ua	7 u seg.

La respuesta de frecuencia del generador es medida como nivel bajo de señal (3% al 10% del promedio de señal de entrada) para reducir la distorsión que produce la compresión logarítmica. Algunas respuestas típicas se exponen a continuación:

I Entrada	- 3dB Frecuencia.
1 nA	80 Hz
1 uA	10 KHz
10 uA	40 KHz
1 mA	100 KHz.

\* ELECTRONIC DESIGN, FEBRERO 1974, LOG OP.

Subsiste otro problema. Supongamos que se desea sacar logaritmo de la función  $1 + \text{sen } \omega t$ . Cuando  $\text{sen } \omega t > 0$   $1 + \text{sen } \omega t > 0$  y no hay problema. Pero cuando  $\text{sen } \omega t$  comienza a decrecer,  $\text{sen } \omega t < 0$   $1 + \text{sen } \omega t < 1$ , siendo 0 su valor mínimo. El logaritmo de 0 es  $-\infty$ . Eso quiere decir que en la medida que  $\text{sen } \omega t$  se hace más negativo, el logaritmo de  $1 + \text{sen } \omega t$  adquiere una pendiente similar a la de un impulso de Dirac. En la Figura 5.5.1 se puede observar lo que aquí se expresa.

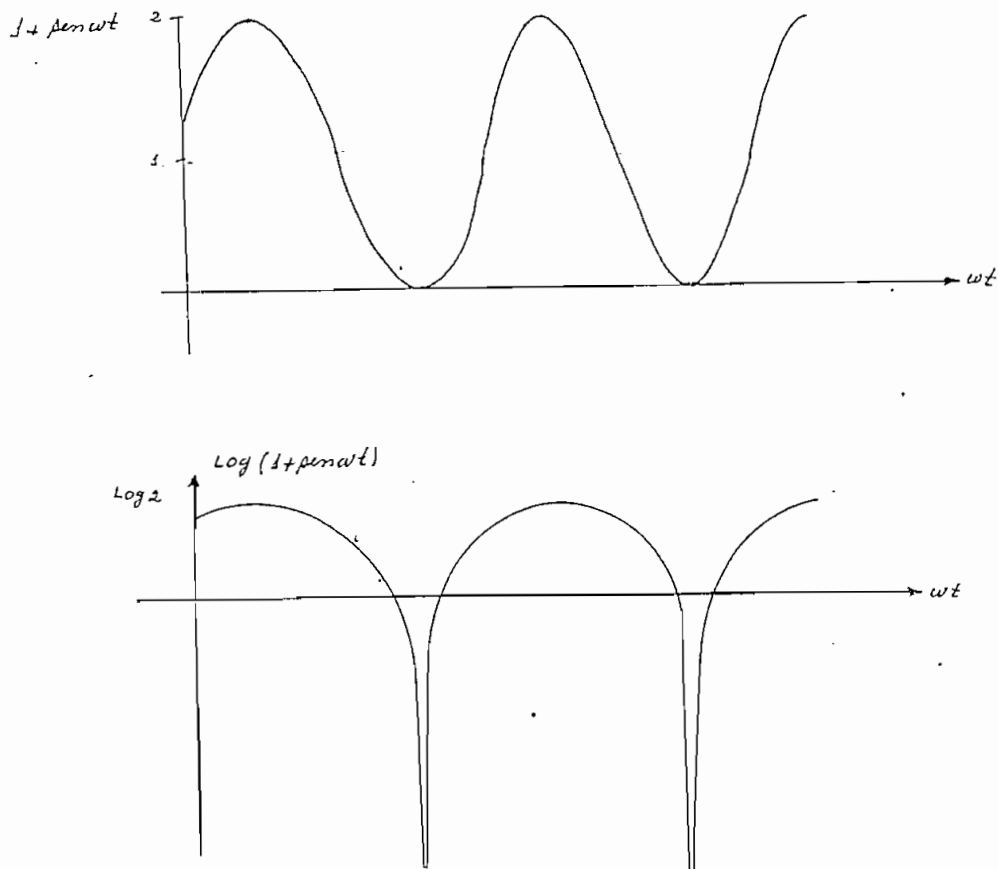


Fig. (5.5.1). En a) la señal  $1 + \text{sen } \omega t$ . En b)  $+\log_2(1 + \text{sen } \omega t)$ .  
Nótese que cuando  $\text{sen } \omega t < 0$ , el logaritmo tiende a un pulso de Dirac.

El efecto de la variación muy rápida del logaritmo es si

como un impulso de voltaje o corriente lo introdujeramos a una red activa o pasiva. El resultado sería que a la salida del cuadripolo en cuestión, obtendríamos su transiente, es decir, la transformada inversa de Fourier de la Función de transferencia del cuadripolo en el dominio de frecuencia. Ese transitorio se suma a la señal que queremos obtener a la salida distorsionándola. En la Sección 5.3 se mencionó algo al respecto para el caso del amplificador logaritmico. Nos tocaría analizar en el caso del antilogaritmo, pero aquí es mucho más dificultoso realizar un análisis similar al que se hizo en la Sección 5.3. Más útil resulta obtener experimentalmente el transiente metiendo al amplificador antilogaritmico un impulso de voltaje y medir la frecuencia del transiente, para luego atenuarlo colocando un condensador pequeño de realimentación en paralelo a la resistencia R2 del circuito de la Figura 5.4.2. El efecto no deseado que se obtiene, es que el ancho de banda se reduce.

## CAPITULO VI

### APLICACION DE LOS GENERADORES EXPONENCIALES

#### 6.1. INTRODUCCION

Los generadores exponenciales pueden aplicarse para el procesamiento de señales que no es posible lograr con redes a circuitos lineales. Se podría incluir aquí, por ejemplo, la multiplicación y división de señales, analizadores de respuesta de frecuencia, generadores de funciones, etc. En el presente Capítulo discutiremos exhaustivamente cada una de ellas.

#### 6.2. MULTIPLICADOR Y DIVISOR DE SEÑALES

Cuando trabajamos con logaritmos, las operaciones de multiplicación y división se reducen a sumar o restar logaritmos para sacar luego el antilogaritmo y obtener así el resultado deseado. El presente sistema puede hacer lo mismo, ya que obtenemos las dos operaciones en forma análoga, la logaritzación y la antilogaritzación de señales. En la Figura 6.2.1 podemos apreciar un diagrama de bloques para multiplicar o dividir señales.



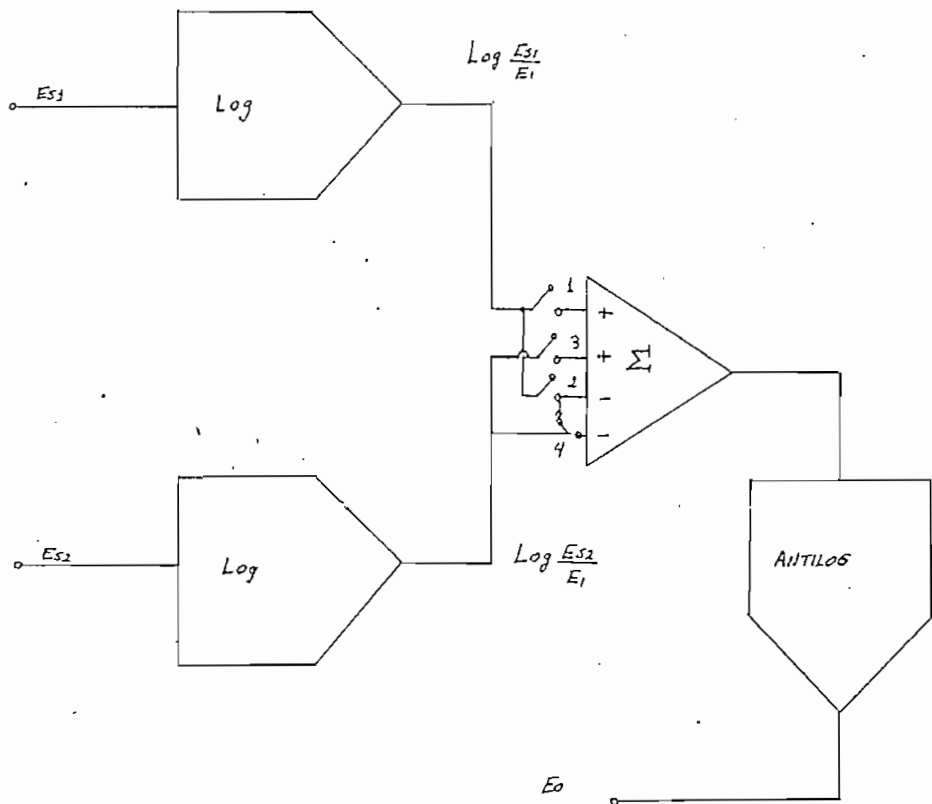


Fig. (6.2.1). Multiplicador o divisor de señales. Para obtener  $E_o = E_{s1} E_{s2}$ , basta hacer  $E_1 = 1$  volt. Operar los conmutadores 1 y 3 cerrándolos. Para sacar el inverso del producto, o sea  $E_o = (E_{s1} E_{s2})^{-1}$ , basta cerrar los circuitos 2 y 4. Para dividir señales, por ejemplo  $E_o = E_{s1}/E_{s2}$  el conmutador 1 y 4 deben cerrarse. Para obtener  $E_{s2}/E_{s1}$ , basta cerrar el 3 con el 2.

El circuito de la Figura 6.2.1 sólo operará con se-

ñales mayores que 0, pues no podemos en forma analógica definir el logaritmo de cantidades negativas. Podemos ampliar nuestro sistema incluso operando con magnitudes que pueden tomar valores positivos y negativos. En la Figura 6.2.2. se muestra un sistema de este tipo:

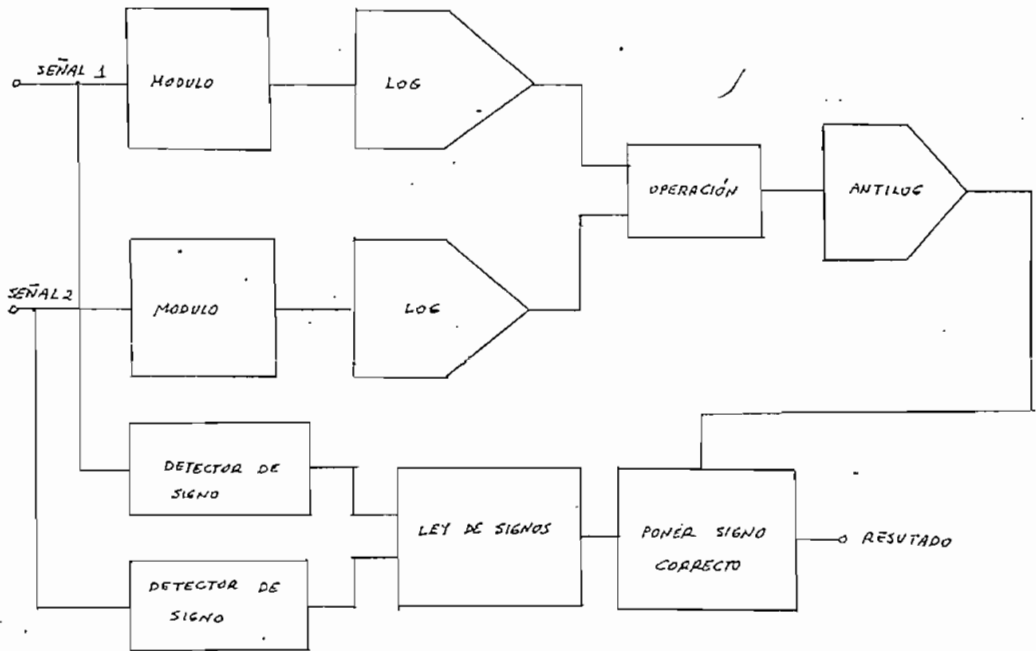


Fig. (6.2.2). Diagrama de bloques de un sistema para realizar cualquier operación entre las señales 1 y 2, a pesar de que tomen alternadamente valores positivos y negativos.

Describiremos en forma más amplia el diagrama de bloques de la Figura 6.2.2.

6.2.1. Módulo:

Para sacar un módulo de señal de voltaje y corriente, lo que debemos hacer es rectificarla. Pero nuestro rectificador debe ser algo especial, debe trabajar también con continua y ser un rectificador de onda completa. Esto puede lograrse con el siguiente circuito:

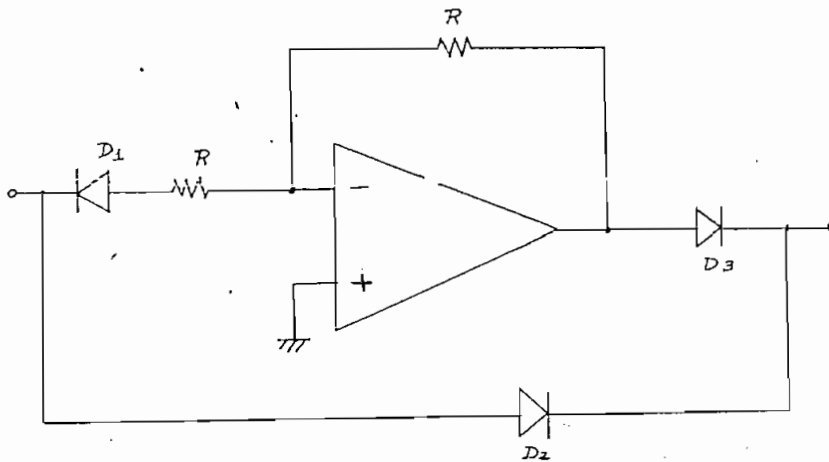


Fig. (6.2.3). Circuito para sacar módulo en forma analógica.

El circuito funciona como sigue: Cuando la señal es positiva polariza inversamente a  $D_1$ , directamente a  $D_2$  e inversamente a  $D_3$ , de modo que a la salida aparece la parte positiva de  $E_{in}$ . Cuando la señal se hace negativa polariza inversamente  $D_2$  directamente a  $D_1$  y pasa al inversor de ganancia 1 constituido por el amplificador operacional y las dos resistencias, una de las cua-

les lo realimenta. A la salida del inversor existe un potencial positivo que polariza D<sub>3</sub> directamente. El resultado final es que a la salida siempre aparece el módulo de E<sub>in</sub>.

### 6.2.2. Detector de Signo:

El detector de signo se puede hacer con circuitos comparadores, es decir, amplificadores operacionales sin realimentación. A la una entrada, a la positiva del amplificador, podemos conectar la señal de entrada y la negativa a tierra, es decir, a un potencial cero. Cuando la señal de entrada es + a la salida aparece un voltaje + V. Cuando la señal de entrada es - a la salida tenemos un voltaje -V. Esta información podemos utilizarla para operar un sistema digital que realice la Ley de Signos. Como los operacionales como comparadores dan +15 0 -15 V y como los circuitos digitales funcionan entre 0 y 5 volts. que corresponden a cero lógico y uno lógico, entonces deberíamos poner un diodo a la salida del comparador para que deje pasar sólo señales positivas y un divisor de tensión a tierra (ver Figura 6.2.4)..

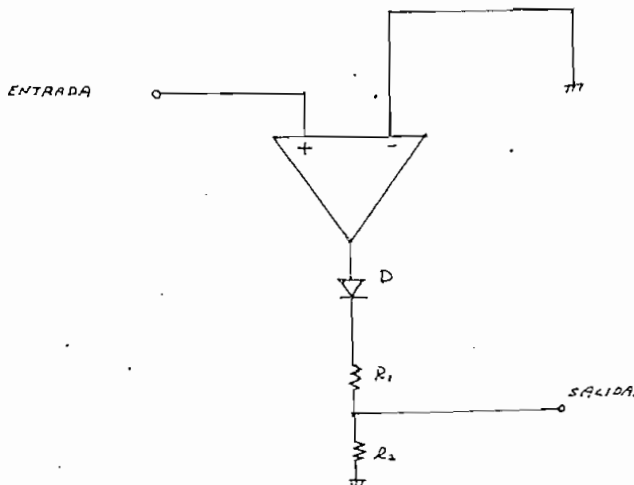


Fig. (6.2.4). Sistema detector de cero.

### 6.2.3. Ley de Signos:

Se plantea ahora la necesidad de tratar de describir el sistema que usaremos para programar en un circuito digital la ley de signos. La Ley de signos se expresa como:

positivo por positivo = positivo; negativo por negativo = positivo; negativo por positivo = negativo; positivo por negativo = negativo.

Si hacemos el simil positivo como uno lógico y negativo como cero lógico podemos hacer:

Entrada 1	Entrada 2	Salida
1	1	1
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Si a la entrada 1 le llamamos A y a la 2 le llamamos B, vemos que la función booleana que la cumple es:

$$X = AB + \bar{A}\bar{B} \quad (6.2.1)$$

En efecto hagamos la tabla de verdad:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	AB	$\bar{A}\bar{B}$	X
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0

que comprueba lo que aquí se expresa.

Consideremos el teorema de Margan  $\overline{C + D} = \bar{C} \cdot \bar{D}$ .

o lo que es lo mismo  $C + D = \overline{\bar{C} \cdot \bar{D}}$ . Aplicando este criterio a la relación Booleana 6.2.1:

$$X = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$

y esto es sencillo colocarlo en circuito lógico.

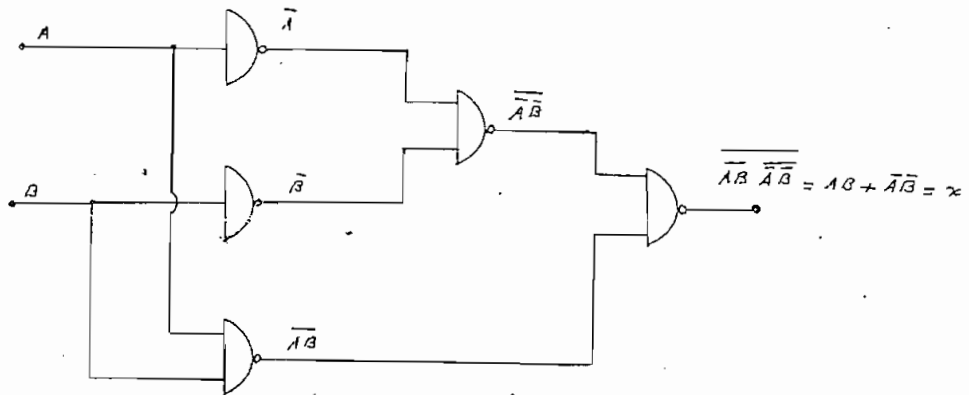


Fig. (6.2.5). Circuito lógico de la función Booleana

$$x = AB + \bar{A} \bar{B} \text{ con circuitos nands.}$$

En este circuito lógico podemos reproducir en forma digital la Ley de Signos. Ahora bien, todo parece resuelto, pero no debemos olvidar que necesariamente va a existir un retardo de fase entre la entrada del sistema y la salida del antilogaritmo. Esto puede constituir un serio problema en el restituidor de signo, el bloque siguiente, porque puede darse lugar, cuando una señal deba ser positiva, aparezca como negativa por el retar

do de tiempo. Necesitamos pues, pasar la información desde el sistema de ley de signos cuando realmente corresponda. Como el sistema es mucho más lento que el circuito digital, éste se re-  
trazará respecto al segundo; es por ello que es necesario conocer el defazamiento del sistema como función de la frecuencia. Se utilizó el método de las Figuras de Lisajus con un osciloscopio, en donde al barrido horizontal enviamos la señal de un oscilador, el cual, también alimenta al sistema log - antilog (ver Figura 6.2.6); la salida del sistema la enviamos al vertical.

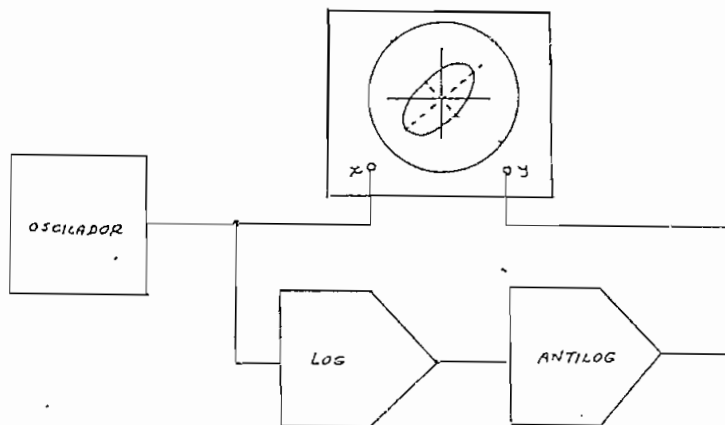


Fig. (6.2.6). Método de medición del defasaje por las figuras de Lisajus.

En la pantalla se obtuvo una elipse. El ángulo de defasamiento está dado por la relación:

$$\phi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tag} \frac{\text{eje menor de la elipse}}{\text{eje mayor de la elipse}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tag} \frac{b}{a} \quad (6.2.2)$$

Obteniéndose el cuadro de valores 6.2.1.

f	Hz	b [Divisiones*]	a [divisiones*]	$\phi$
	10	0.7	7.32	56'
	20	0.3	7.32	28'
	50	0.02	7.32	18'
	100	0	7.32	0
	200	0.05	7.32	4'
	300	0.03	7.32	4° 42'
	400	0.4	7.32	6° 14'
	500	0.5	7.32	7° 56'
	600	0.6	7.32	9° 22'
	700	0.7	7.32	10° 50'
	800	0.8	7.32	12° 34'
	900	0.9	7.32	14° 2'
	1.000	1	7.32	15° 24'
	2.000	1.8	7.05	27° 32'
	3.000	2.8	7.05	39° 6'
	4.000	3.7	7	50°
	5.000	4.8	7	59°

\* 1 división = 1 cm. en el oscil.

Cuadro 6.2.1. Tabla de valores de  $\phi$  en función de la frecuencia.



De la tabla de valores vemos que a 100 Hz el ángulo de defasamiento es  $0^\circ$ . A frecuencias inferiores a 100 Hz el ángulo  $\phi$  es muy pequeño y crece monotónicamente con la disminución de frecuencia.

Con los datos de 6.2.1 construyamos un gráfico que exprese  $\phi$  como función de frecuencia. (Ver Figura 6.2.8).

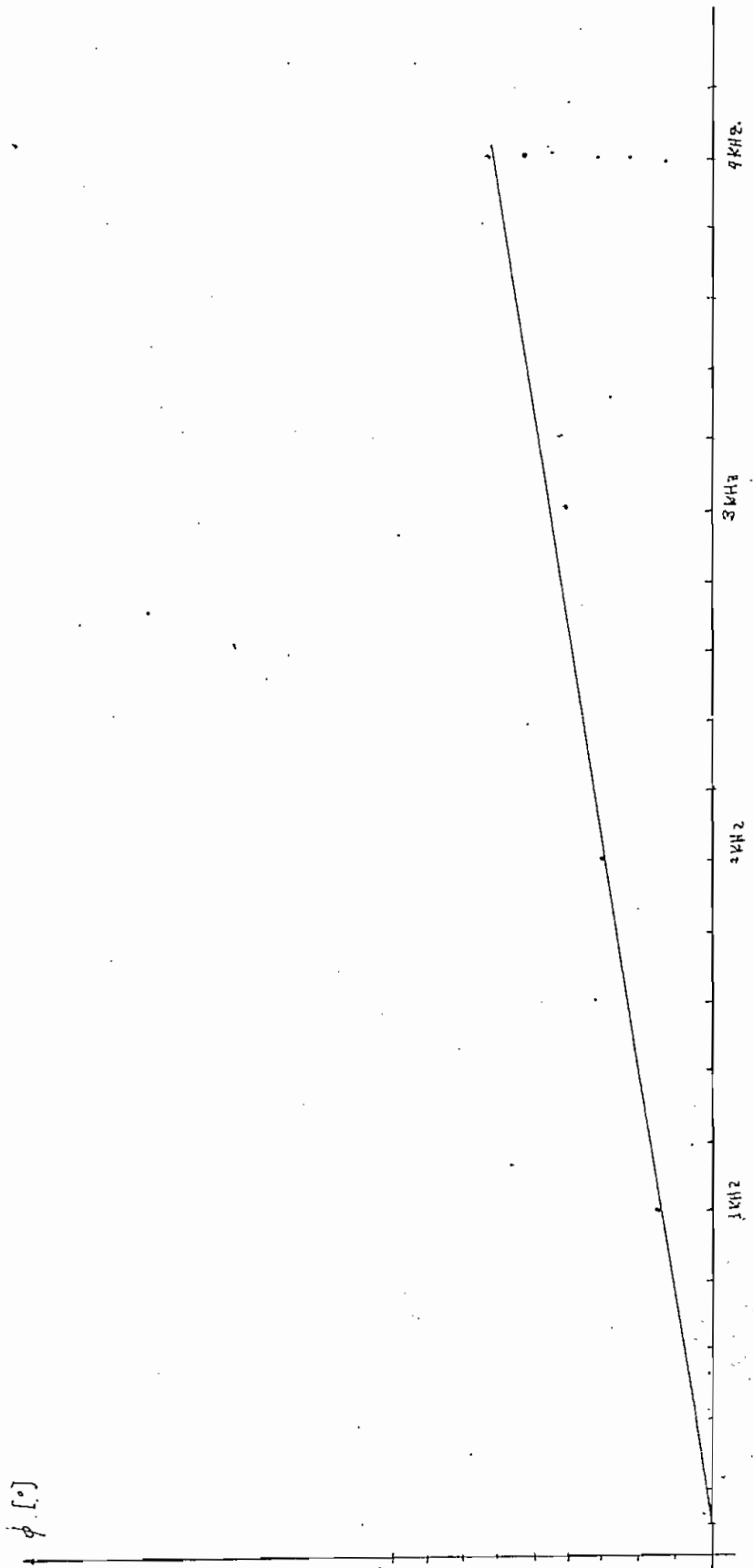


Fig. (6.2.8). Gráfico de  $\phi$  en función de la frecuencia.

Vemos que  $\phi$  puede ser tomada como aproximadamente:

$$\phi \approx \tau_0 \omega \quad (6.2.3)$$

donde  $\tau_0$  es una constante de proporcionalidad igual a 20 u seg y  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/seg. Para interpretar este resultado imaginémonos que metemos una señal  $f(t)$  a un cuadripolo de función de transferencia tal que a la salida obtenemos la misma señal, pero retardado un tiempo  $t_0$ , es decir  $f(t - t_0)$ . Si la transformada de Fourier de  $f(t)$  es  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  entonces la de  $f(t - t_0)$  será  $\mathcal{F}\{f(t)\} e^{-j\omega t_0}$  siendo  $\omega t_0 = \phi$  el ángulo de defasamiento. Eso indica que el sistema log. antilog introduce un retardo de tiempo igual a  $\tau_0$  en un campo bastante amplio de frecuencia.

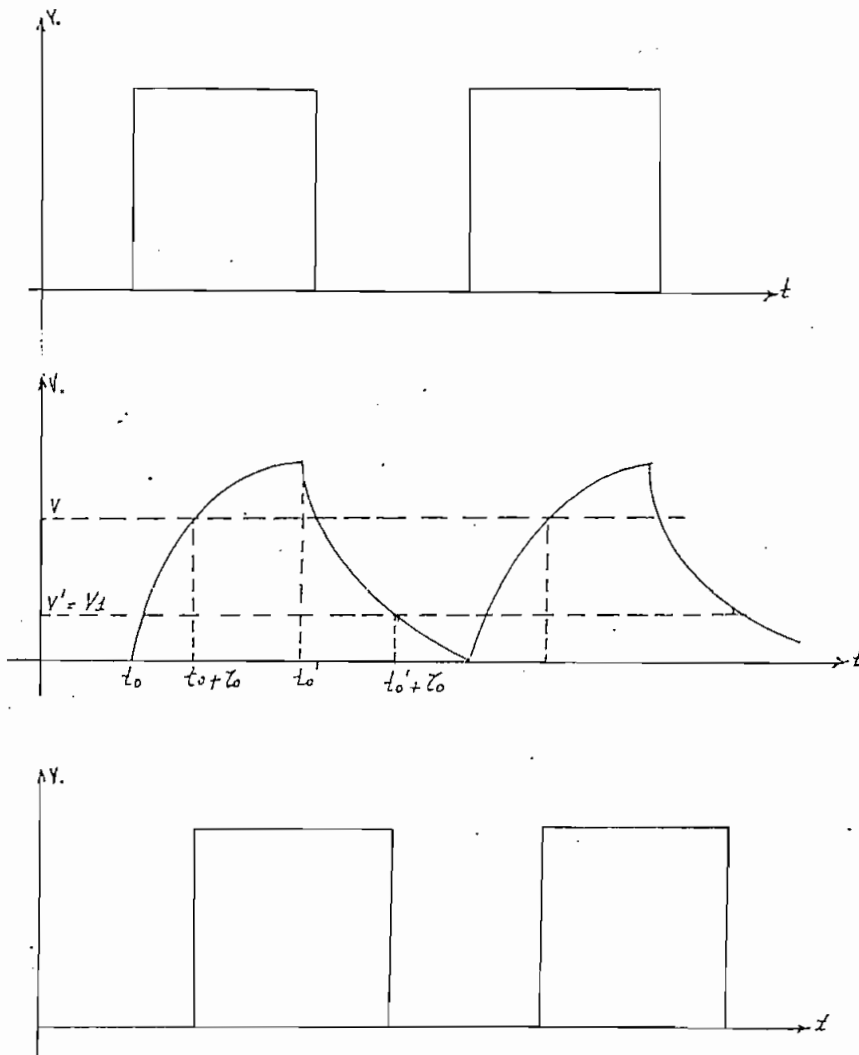


Fig. (6.2.9) Procesamiento de la señal de salida del sistema log-antilog para introducir un retardo de tiempo de  $t_0$ . Nótese que necesitamos dos niveles de disparo  $V$  y  $V'$  para no cambiar la información, lo que justifica el uso del disparador Smith.

De la Figura 6.2.9 se puede ver que el tipo de red R- $\zeta$  que se necesita es un filtro pasa bajos. En efecto, en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \zeta_0$  el voltaje sube de acuerdo a

$$V(t) = V_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\zeta}} \right) \quad (6.2.4)$$

siendo  $\zeta$  la constante de tiempo de la red. Cuando  $t = \zeta_0$  alcanzamos el nivel  $V$  dado por

$$V = V_1 \left( 1 - e^{-\frac{\zeta_0}{\zeta}} \right) \quad (6.2.5)$$

Cuando consideramos un tiempo acotado por el intervalo  $t'_0 < t' < t'_0 + \zeta_0$  el voltaje decae como:

$$V(t') = V_1 e^{-\frac{t'}{\zeta}} \quad (6.2.6)$$

Cuando  $t' = \zeta_0$  nos encontramos en un voltaje  $V'$  dado por:

$$V' = V_1 e^{-\frac{\zeta_0}{\zeta}} \quad (6.2.7)$$

Este análisis se ha hecho bajo la suposición que  $V(t) = V_1$  en  $t_0$  seg. Las ecuaciones 6.2.5 y 6.2.7 indican que cuando  $V(t) = V$  entonces debemos pasar desde 0 volts a  $V_1$  y que cuando  $V(t) = V'$  debemos pasar de  $V_1$  a 0 volts, para no distorcionar la información y retrazarla  $\zeta_0$  segundos. Esto se puede lograr con un disparador Smith que presenta un lazo de histéresis respecto a la curva de transferencia de voltaje. Remitámonos a la Figura 6.2.10 en donde está representado un disparador Smith.

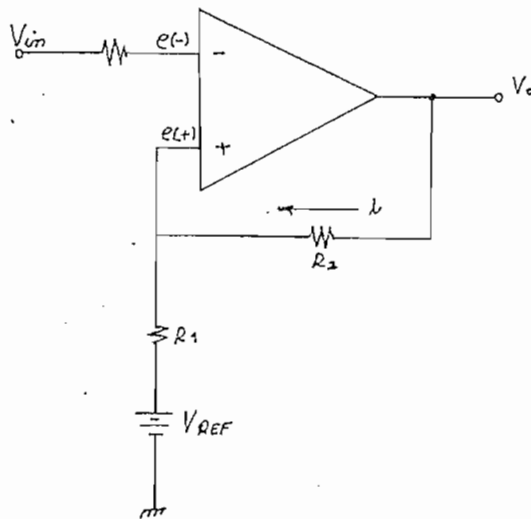


Fig. (6.2.10). Circuito disparador Smith.

Quando  $V_{in} \ll 0$  tendremos a la salida un voltaje  $V_{om\acute{a}x}$ . En esas condiciones  $e(-) = iR_1 + V_{ref}$  y  $V_{om\acute{a}x} = iR_2 + e(+)$ , eso querrá decir que:

$$\frac{e(+)-V_{REF}}{R_1} = \frac{V_{om\acute{a}x}-e(+)}{R_2} = i$$

despejando  $e(+)$ ; 
$$e(+)= \frac{R_2 V_{REF} + R_1 V_{om\acute{a}x}}{R_1 + R_2} \quad (6.2.8)$$

El circuito se mantendra en la condición antes descrita cuando  $e(-) < e(+)$ . Cuando  $e(-) = e(+)$  y tiende a ser algo mayor, entonces el voltaje de salida cambia violentamente a  $-V_{om\acute{a}x}$ . En la medida que  $e(-) > e(+)$ , entonces el circuito se mantiene en la condición  $V_o = -V_{om\acute{a}x}$ . Pero entonces el voltaje  $e(+)$  ya ha cambiado. Calculando su nuevo valor:

$$e(+)= V_{REF} - iR_1$$

Ahora podemos imponernos algunas condiciones para lograr nuestro propósito de retardar la señal que viene del bloque digital de ley de signos. Para ello diremos que:

$$e_1(+) = V \quad (\text{Ver Figura 6.2.9})$$

$$e_2(+) = V'$$

que plantea dos ecuaciones con dos incógnitas  $R_1$  y  $R_2$ . Debemos asumir  $V_{REF} > 0$ .

El sistema de ley de signos en diagrama de bloque está indicado en la Figura 6.2.12.

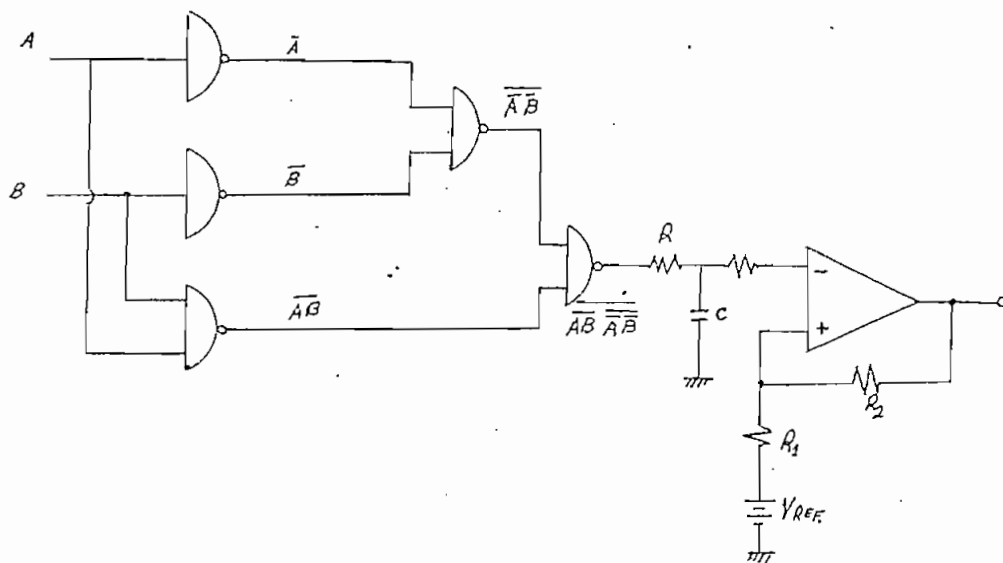


Fig. (6.2.12). Sistema Digital de Ley de Signo.

### 6.2.4. Sistema de restitución de Signo.

Analicemos el circuito de la Figura 6.2.13), el cual básicamente constituye de una entrada a la cual conectamos un inversor, y un sistema de conmutación que selecciona las señales positivas o negativas escogiéndoles de la entrada o de la salida del inversor de acuerdo a la información enviada por el circuito ley de signos.

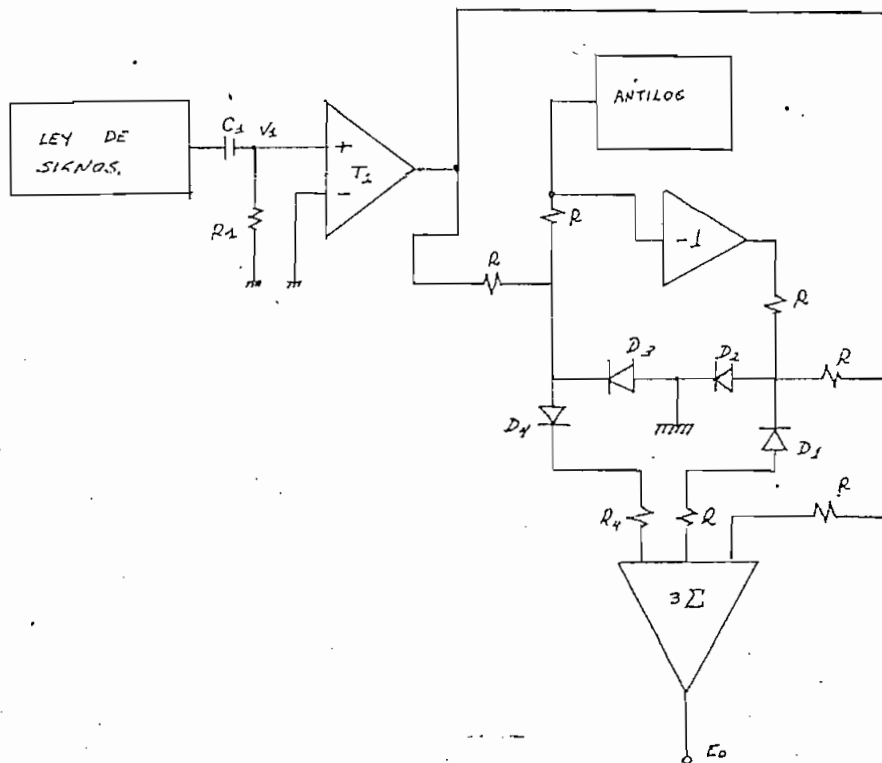


Fig. (6.2.13). Sistema sustituidor de Signo.



Cuando a la salida del bloque ley de signos hay  $V_{om\acute{a}x}$ , entonces el voltaje inicial de  $V_1$  será + 15 volts, que comenzar a decrecer exponencialmente con una constante de tiempo  $R_1C_1$  debido a que el condensador se va cargando. A la salida del comparador  $T_1$  tendremos + 15 volts, que polarizará directamente  $D_4$  y  $D_2$  e inversamente  $D_3$  y  $D_1$ , luego por el diodo 1 no entrar señal del inversor  $T_2$  al sumador, en cambio que si entrar la señal  $V_2$ . Si suponemos que la impedancia de salida del circuito antilogarítmico es cero, lo mismo que la del comparador, tendremos el siguiente modelo circuital (ver Figura 6.2.14).

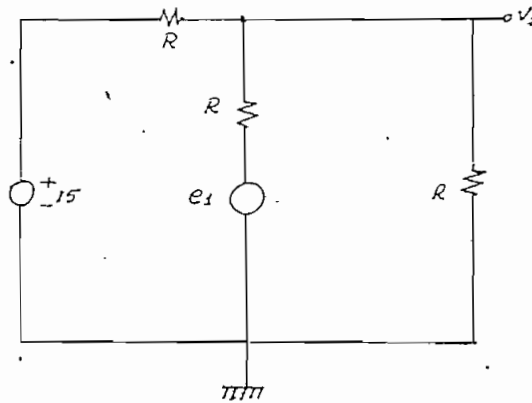


Fig. (6.2.14). Circuito equivalente del circuito del gráfico 6.2.11 cuando a la salida del bloque Ley de Signos hay + 15 volts.

Transformando las fuentes de voltaje en de corriente, y sacando la resistencia paralela equivalente, se llega a:

$$V_2 = \frac{15 + e_1}{3}$$

Por hallarse presente el inversor de ganancia  $1/3$ ,  $T_3$ , entrar al sumador un voltaje de  $-15/3$ ; de modo que a la salida del sumador tenemos:

$$E_o = 3 \left( \frac{15 + e_1}{3} - \frac{15}{3} \right) = e_1$$

Cuando a la salida del circuito ley de signo existe un voltaje de -15 volts, por efecto de la red conformada por  $R_1$  y  $C_1$  hay un soprepico negativo en  $V_1$  que tiende a aumentar de valor debido al condensador  $C_1$ . El comparador baja a -15 volts polarizando directamente  $D_3$  y  $D_1$ , mientras que  $D_2$  y  $D_4$  quedan inversamente polarizados;  $V_2$  cae a 0.6 volts, voltaje que es bloqueado por el diodo  $D_4$  hacia el sumador. El voltaje  $V_3$  si entra al sumador, y viene dado, debido a un razonamiento anterior, por:

$$V_3 = - \frac{e + 15}{3}$$

a la salida del sumador tendremos:

$$E_o = 3 \left( - \frac{e_1 + 15}{3} + \frac{15}{3} \right) = - e_1$$

restituyéndose el signo que le corresponde.

Hay otro sistema más sencillo que se basa en el mismo principio y que se indica en la Figura 6.2.15).

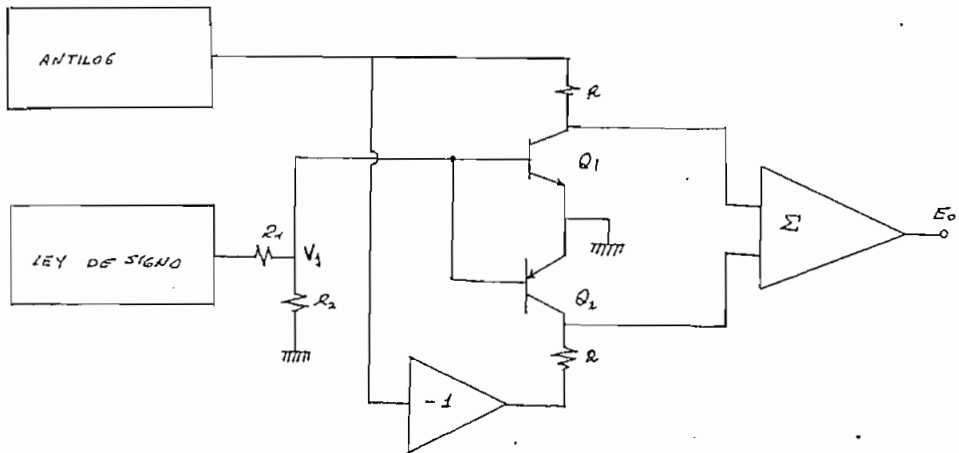


Fig. (6.2.15). Circuito sustituidor de Signo con conmutación con transistores.

Quando a la salida del bloque de ley de signos existe un voltaje positivo,  $V_1$ , se hace positivo en el divisor de tensión  $Q_1$  se cierra entrando a saturación y  $Q_2$  se abre entrando en corte, pasando la señal negativa al sumador. Cuando la señal de ley de signos se hace negativa,  $V_1$  también se hace negativo  $Q_1$  se abre entrando en corte y  $Q_2$  se cierra entrando en saturación. Pasará la señal positiva al sumador. A la salida del sumador obtendremos la señal deseada, pero con defase de  $180^\circ$ .

### 6.3. GENERADOR DE FUNCIONES

Como es obvio, se tienen tres señales, X, Y y z, la o-

peración más general que se puede hacer con ellos es:

$$f = \frac{x^n y^q}{z^r}$$

pudiendo ser n, q y r cualquier número real.

Por ejemplo, tomemos una función  $t = f(t)$ , podemos generar analógicamente las siguientes funciones:

$$g(t) = t^2$$

$$p(t) = 1/t^2$$

Un caso interesante es cuando tenemos dos magnitudes U y V que representan la variación en el tiempo de dos vectores (podrían

peración más general que se puede hacer con ellos es:

$$f = \frac{x^n y^q}{z^r}$$

pudiendo ser  $n$ ,  $q$  y  $r$  cualquier número real.

Por ejemplo, tomemos una función  $t = f(t)$ , podemos generar analógicamente las siguientes funciones:

$$g(t) = t^2$$

$$p(t) = 1/t^2$$

Un caso interesante es cuando tenemos dos magnitudes  $U$  y  $V$  que representan la variación en el tiempo de dos vectores (podrían ser componentes de voltajes o corrientes reactivas y resistivas), su módulo, o el módulo del vector resultante es:

$$W = (U^2 + V^2)^{1/2}$$

o lo que es lo mismo

$$W^2 = U^2 + V^2 ; \quad V^2 = W^2 - U^2$$

$$(W+U)(W-U) = V^2$$

$$W = U + \frac{V^2}{W+U}$$

Con estas ideas y con los generadores exponenciales podemos hacer la siguiente operación con tres magnitudes analógicas:

$$A = \frac{BC}{D}$$

El circuito en diagrama de bloques de este tipo de función está dado por la Figura 6.3.1.

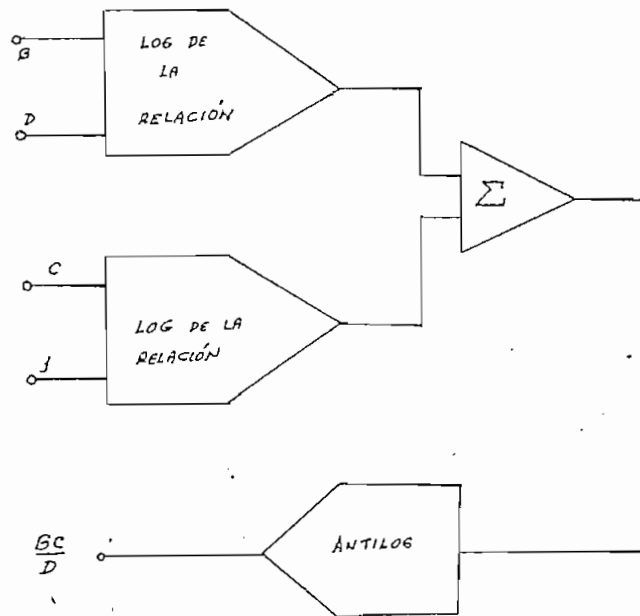


Fig. (6.3.1). Generador de la función  $A = \frac{BC}{D}$

Ahora bien, si tomamos  $B = C = V$  y  $D = U$  tenemos la función:

$$A = \frac{V^2}{U}$$

Supongamos que antes de someterle a  $V$  a la operación analógica le sumamos otra función cualesquiera, digamos  $W$ , de modo que a la salida tendremos:

$$A = \frac{V^2}{U+W}$$

Esto se puede ver en el diagrama de bloques de la Figura 6.3.2.

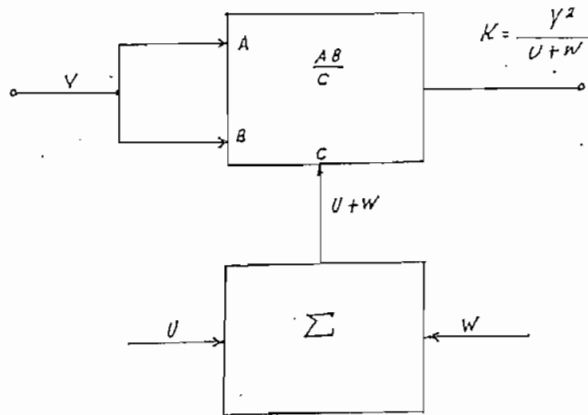


Fig. (6.3.2). Operación en el módulo AB/C.

Si a la función K le sumamos U tendremos:

$$U + \frac{V^2}{U+W}$$

y si imponemos la condición:

$$W = U + \frac{V^2}{U+W}$$

estaremos determinando el módulo de las magnitudes U y V, ortogonales entre sí. El sistema completo podemos verlo en la Figura 6.3.3.

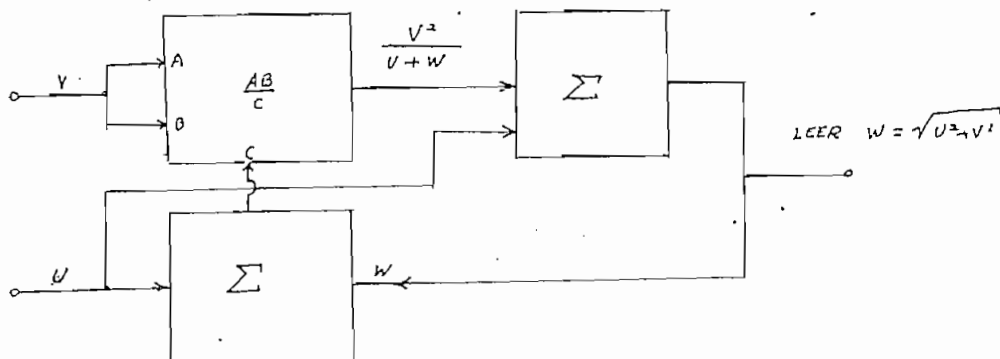


Fig. (6.3.3). Obtención de la función  $W = \sqrt{U^2 + V^2}$  en diagrama de bloques.

Con el sistema anterior y obteniendo la relación  $U/V$ , tomándose  $U$  como referencia, podemos obtener el ángulo de fase en forma analógica, ya que:

$$\tan \theta = \frac{V}{U}$$

#### 6.4. GRAFIZADOR DE RESPUESTA DE FRECUENCIA

Este interesante instrumento funciona con un generador de barrido y un osciloscopio. El principio es generar una señal triangular de voltaje que controle linealmente la variación de frecuencia del circuito de barrido. La señal resultante la pasamos por un control automático de ganancia con el objeto de mantener muy constante su amplitud. Esa señal alimenta en cascada a un

cuadripolo al cual vamos a determinar su respuesta de frecuencia. De la salida del cuadripolo introducimos la señal en un rectificador de precisión y luego a un filtro pasa bajos. La señal que salía del control automático de ganancia la rectificamos en un rectificador de precisión, señal a la que se toma el valor medio. Las dos señales se relacionan mediante la operación analógica  $20 \log E_o/E_{in}$  (ver gráfico 6.4.1), a la que enviamos al vertical del osciloscopio. A la señal que excita al generador de barrido le tomamos logaritmo y le enviamos al horizontal del osciloscopio. El resultado final es que podemos ver en la pantalla el diagrama de Bode del cuadripolo analizado.



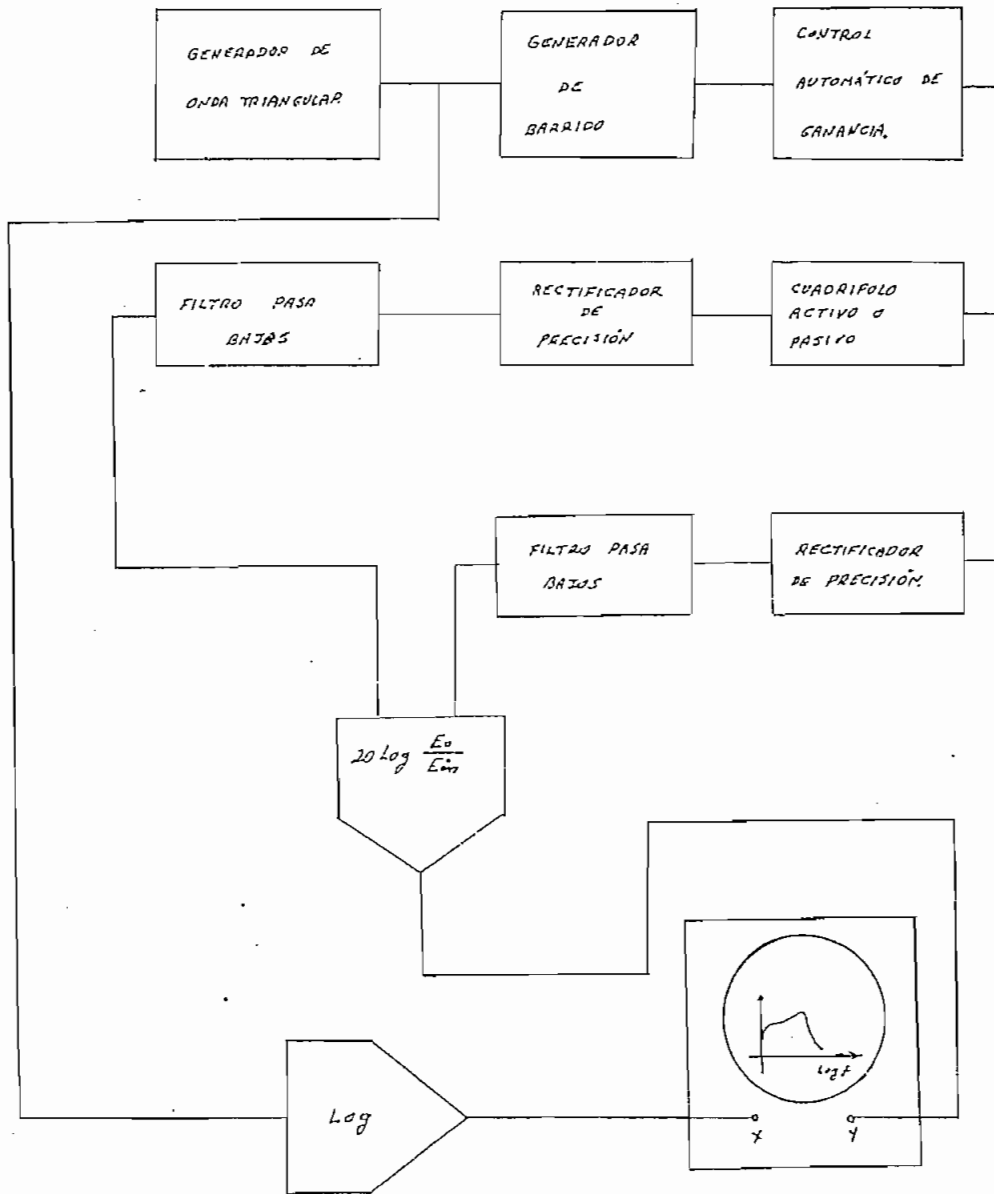


Fig. (6.4.1.) Grafizador de respuesta de frecuencia para ampli-  
ficación en coordenadas semilogarítmicas.

Ahora quedaría a discutir cómo obtener el ángulo de fase. La Figura 6.4.2. pone de relieve el circuito en diagrama de bloques diseñado para este fin.

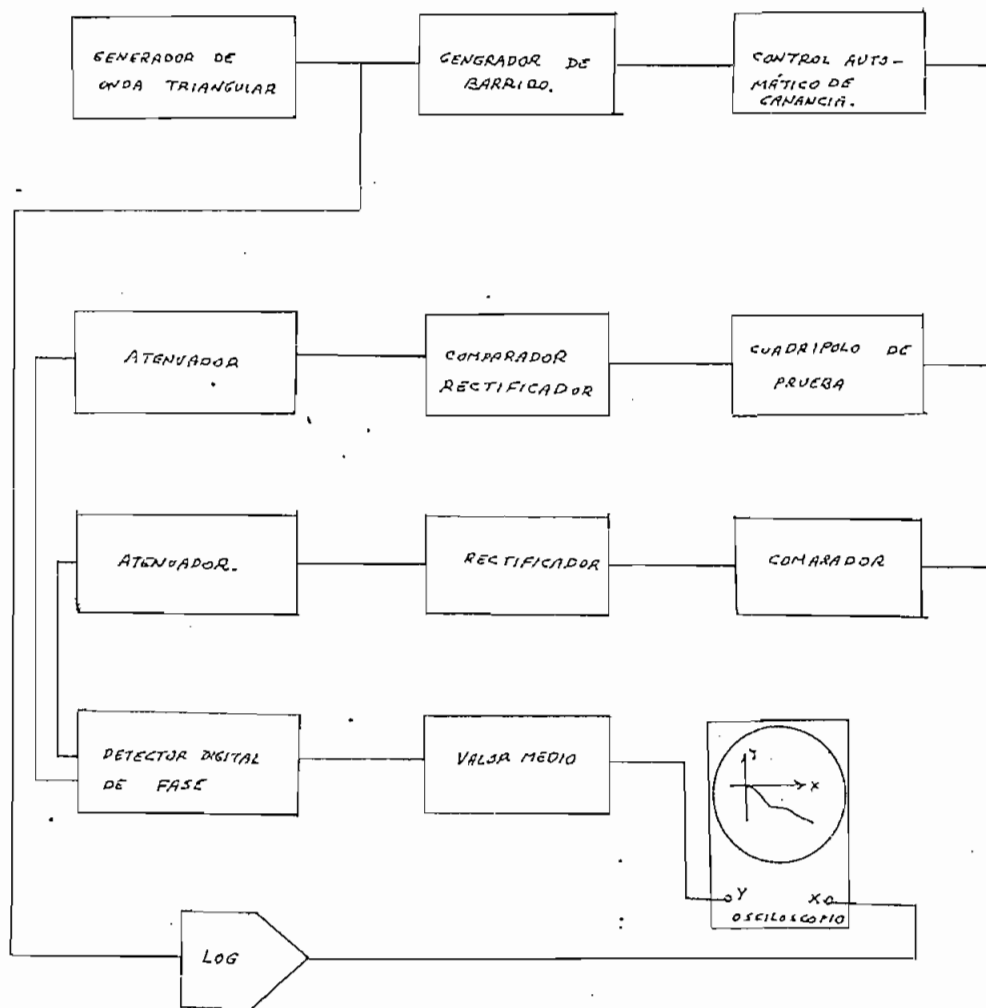


Fig. (6.4.2) Grafizador de la variación del ángulo de fase en escala semilogaritmica.

En la Figura 6.4.2 se ha incluido parte del sistema anterior. La diferencia es que a la entrada y salida del cuadripolo conectamos dos comparadores, cuya salida tenga un diodo de modo que dejen pasar sólo señales positivas. Los atenuadores lo que hacen es dividir el voltaje de los comparadores por la magnitud adecuada para operar con los niveles de voltajes requeridos en el circuito lógico que determina el defasamiento entre las señales que salen de los comparadores. Para entender más fácilmente lo que intentamos explicar, fijémonos en la Figura 6.4.3 en donde se objetiviza el procesamiento de la señal.

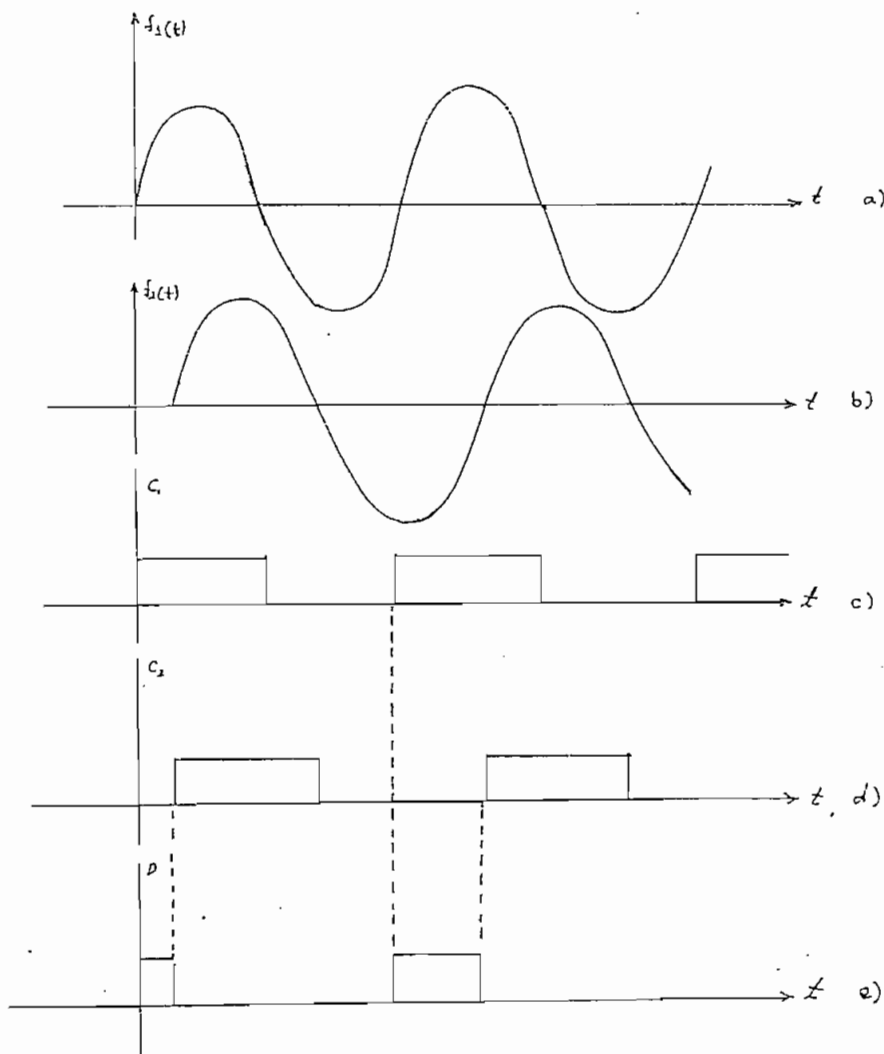


Fig. (6.4.3). En a) está dibujada la señal que entra al cuádrupolo y la que sale de él es la b). La Figura c) es la salida del comparador conectada a  $f_1(t)$  y la d) expresa la salida del comparador conectada después del cuádrupolo. En e) se representan los pulsos cuyo espesor es igual al retardo de fase entre las señales que entran y salen del cuádrupolo; su valor medio nos indicará la variación del ángulo de fase en el tiempo.

De la Figura 6.4.3 podemos hacer la siguiente tabla de verdad, tomando el valor máximo del pulso como 1 lógico y el nivel mínimo como 0 lógico.

C1	C2	D
1	0	1
1	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	1

la función que cumple esa tabla de verdad es:

$$D = C_1 \overline{C_2}$$

y el circuito lógico que efectuará la función booleana anterior es solamente:

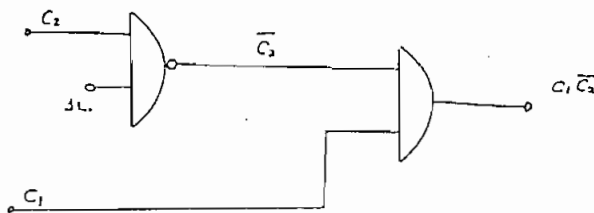


Fig. (6.4.4) Circuito lógico para obtener los pulsos de retardo de fase.

Si tomamos el valor medio de D obtendremos la variación del ángulo de fase como función del tiempo. En la Figura 6.4.2 se obtiene el diagrama de Bode de la fase enviando el valor medio de

la función Booleana D a el eje vertical del osciloscopio y la señal triangular que genera el barrido de frecuencia, tomando en logaritmo, a la escala horizontal.

## CAPITULO VII

### DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN AMPLIFICADOR LOGARITMICO Y UN AMPLIFICADOR ANTILOGARITMICO.

#### 7.1. INTRODUCCION

En el presente Capítulo, luego de haber estudiado exhaustivamente los aspectos teóricos y prácticos sobre la construcción y diseño de transductores exponenciales, procederemos a diseñar un amplificador que nos de el logaritmo de la relación de dos voltajes y un amplificador antilogaritmico. La razón por la cual no utilizamos la técnica de sistemas de pulsos descrita en el Capítulo II, para realizar nuestro propósito, se debe a los siguientes factores:

1. Necesidad de un elevado número de amplificadores operacionales, lo que naturalmente elevaría el costo.
2. La dificultad práctica que simbolizaría esa construcción.
3. Los comparadores deben ser capaces de responder a una frecuencia por lo menos 10 veces mayor al audio, para que el circuito no introduzca mayor error del logaritmo de una señal en esa gama de frecuencias.

En cambio el sistema de amplificadores logaritmicos reúnen las siguientes ventajas:

1. Se necesitan unos pocos amplificadores operacionales.
2. Facilidad de construir.
3. Responden fácilmente en frecuencias de audio.

Las desventajas que posee el sistema son:

1. Los amplificadores operacionales deben ser muy especiales, deben mantener un voltaje de desbalance  $V_{os}$  mucho menor que  $1mV$ , para no introducir error en la apreciación de loga ritmo, y la corriente de biás debe ser muy pequeña, de los  $nA$  preferiblemente, pues el transistor trabaja en rangos de corriente muy pequeños.
2. Se necesitan transistores apareados de características muy similares, y que en el mercado venden específicamente para este uso.

Los dos factores anteriores encarecen el diseño. En to do caso, va a existir un compromiso entre el costo y la confia- bilidad de operación, así como su facilidad de construcción. En estos dos últimos factores la técnica de amplificadores logarit- micos es muy superior al de técnica de pulsos.

## 7.2. DISEÑO DE UN AMPLIFICADOR LOGARITMICO

Estudiemos el circuito de la Figura 7.2.1.



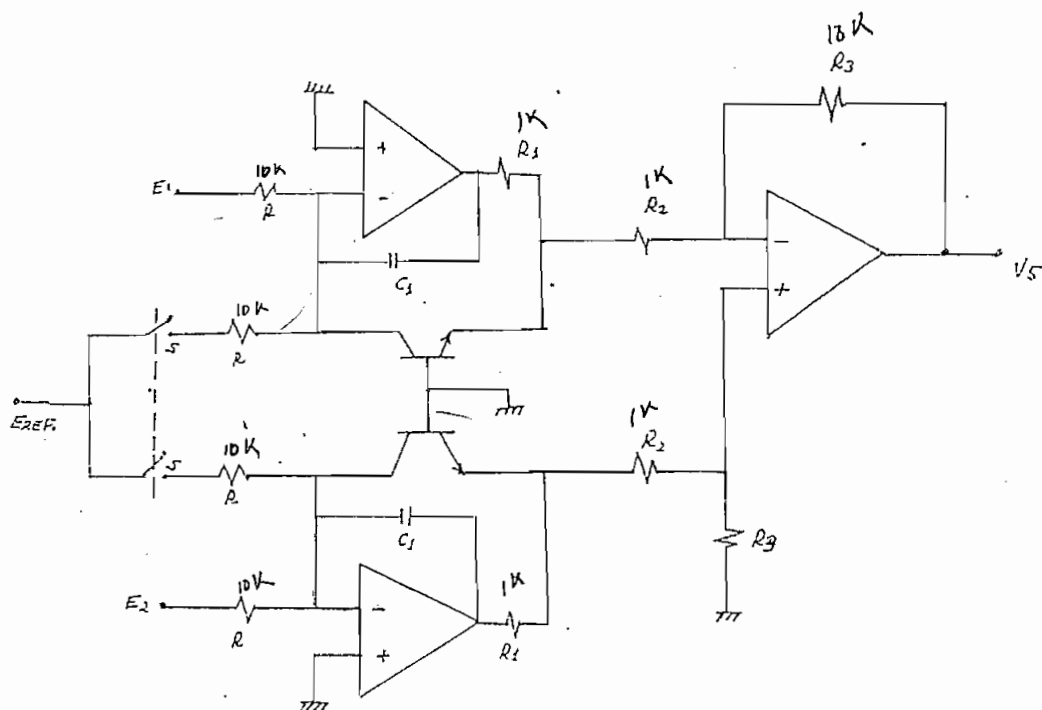


Fig. (7.2.1) Circuito amplificador logaritmico.

El interruptor S sirve para darnos un voltaje de referencia. En efecto, en la Sección 5.4 dedujimos la relación:

$$V_S = \frac{kT}{e} \frac{R_3}{R_1} \log \frac{I_1}{I_2}$$

En el caso de que  $E_1$  y  $E_2$  sean 0, para no tener la indeterminación  $\log 0/0$  lo que hacemos es tomar:

$$I_2 = \frac{E_{REF}}{R}$$

$$I_1 = \frac{E_{REF}}{R}$$

$$V_S = \frac{KT}{e} \ln \frac{E_{REF} R}{E_{REF} R} = 0$$

En general, la expresión que tendríamos es:

$$V_S = \frac{KT}{e} \ln \frac{E_1 + E_{REF}}{E_2 + E_{REF}}$$

bajo la condición que  $E_1 \geq -E_{REF}$  y  $E_2 \geq -E_{REF}$ , para trabajar siempre con magnitudes positivas.

Ahora bien, para nuestro diseño usamos el amplificador MONO - OP 10, que contiene dos amplificadores operacionales dentro de un mismo chip, los mismos que han sido fabricados en idénticas condiciones para que sus características sean lo más similares posibles.

Las características de cada amplificador, tomadas individualmente, son las siguientes:

Voltaje offset de entrada (Vos)	0.2 mV
Corriente bias de entrada	+ 3 nA
Densidad espectral de voltaje de entrada	18 nV/√Hz

Resistencia de entrada en modo diferencial	60 M $\Omega$
Resistencia de entrada en modo común	200 G $\Omega$
Capacidad de entrada	8 pF
Voltaje máximo de polarización	+ 22 Volts
Disipación interna máxima de potencia	500 mW
Voltaje diferencial máximo de entrada	+ 30 V.

Voltaje de entrada igual al voltaje de polarización de la fuente, para alimentación menor de 22 Volts.

Duración de cortocircuito en la salida: Indefinido.

El tipo de transistores que usaremos en el diseño son los AD818 de la Casa Analog Devices. Su comportamiento es logarítmico y son dos transistores apareados en un solo chip. Sus características de interés son:

Símbolo	Parámetro	Límite	Unidades
VBE <sub>1</sub> - VBE <sub>2</sub>	Voltaje diferencial base - emisor	1 máx	mV
IB <sub>1</sub> - IB <sub>2</sub>	Corriente diferen- cial de base	10 máx	nA
$\beta$	Ganancia de corrien- te DC	600 máx	
$\beta$	Ganancia de corrien- te DC	150 mín	

Símbolo	Parámetro	Límite	Unidades
CEB	Capacidad base emisor a $I_c = 0$ y $V_{EB} = 0.5$ Volts.	3	pF
COB	Capacidad de salida a $I_c = 0$ $V_{ce} = 5$ Volts	2	pF

Ahora bien, para garantizar trabajar en la zona logarítmica del transistor, tomemos como nivel máximo de inyección de corriente cuando  $E_1 + E_{ref}$  o  $E_2 + E_{ref}$  valgan 10 Volts a 1.1 mA. Tomemos como  $E_{ref}$  a 1 Volt, de modo que si todas las resistencias  $R$  del circuito de la Figura 7.2.1 valen 10 K, se cumple esa condición. Por otro lado, por razones de estabilidad elijamos a  $R_1$  por el valor de 1K. Tomemos a  $R_2$  como 1K también. Nos restaría calcular la ganancia del amplificador de salida para obtener el logaritmo en base decimal de las relaciones de voltaje. Sabemos que:

$$\frac{kT}{e} \approx 24mV \quad \alpha \quad t = 15^\circ C$$

entonces:

$$V_5 = 24 \times 10^{-3} \frac{R_3}{R_2} \text{Log} \frac{E_1 + E_{REF}}{E_2 + E_{REF}}$$

Ahora bien, cuando  $E_1 + E_{ref} = 10$  Volts y  $E_2 + E_{ref} = 1$  Volt y  $E_2 = 0$  Volts,  $V_5$  debe valer la unidad; esto se hace con el objeto de que 1 Volt represente una década:

$$1 = 24 \times 10^{-3} \frac{R_3}{R_2} \text{Log} 10$$

Como  $R_2$  se tomó como  $1K\Omega$ , entonces:

$$R_3 = 18k\Omega$$

Restaría ahora ver problemas de estabilidad. Si la capacidad de salida es de 2 pF (capacidad colector-emisor cuando la corriente de colector es 0), querrá decir que la medición se ha hecho con la base abierta y que el emisor y la base se hallan al mismo potencial. Entonces, en esas condiciones la capacidad que estamos midiendo es la capacidad de la juntura colector-base.

La ecuación 3.6.10 nos da la relación:

$$C = \sqrt{\frac{e\epsilon\epsilon_0}{|V_{dif} - V|} \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}}$$

Como el transistor tiene 25 Volts de voltaje de ruptura, entonces  $V_{dif} \approx 0.8$  Volts\* y  $V = -5$  Volts. Para este caso la ecuación anterior podemos escribirla como:

$$C_{x=0} = \sqrt{\frac{e\epsilon\epsilon_0}{5.8} \frac{N_a N_d}{N_a + N_d}}$$

y  $C_2$  llamemos la capacidad cuando el colector y la base se hallan al mismo potencial:

$$C_2 = \sqrt{\frac{e\epsilon\epsilon_0}{0.8} \frac{N_a N_d}{N_a + N_d}}$$

de modo que:  $\frac{C_{x=0}}{C_2} = \sqrt{\frac{0.8}{5.8}}$  ; lo que significa:

\* Apuntes de clase de Bruce Hoeneisen.

$$C_1 = C_{1c=0} \sqrt{\frac{5.8}{0.8}} = 2 \text{ pF} \times 2.7 = 5.4 \text{ pF}$$

La capacidad total de entrada al operacional será:  $C_1 = 5.4 \text{ pF} + 8 \text{ pF}$   $C_1 = 5.4 \text{ pF} + 8 \text{ pF}$   $C_1 = 13.4 \text{ pF}$ . La ganancia del operacional a lazo abierto es 110 dB aproximadamente, es decir:

$$110 \text{ dB} = 20 \log A$$

siendo A la ganancia en relaciones de voltaje.

$$A = 10^{5.5} ; 315.000 = 3.15 \times 10^5$$

Tomando la ecuación 5.3.24 para hallar la relación de amortiguamiento, ya que el término  $\omega_c R_s C_1$ , donde  $R_s = R$ , es mucho más pequeño que la unidad:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R^2 C_1 A}}$$

La frecuencia de corte del operacional  $\omega_c \approx 2\pi \text{ Rad/seg}$ . Si tomamos  $R_d = K_T/eI$  (resistencia dinámica de la juntura transdiodo) al valor de 1mA,  $R_d = 24 \Omega$  y:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_E}{\omega_c R^2 C_1 A}}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10^3}{4\pi \times 10^8 \times 13 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^5}}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10^2}{2\pi \times 3 \times 13}} = 0.31$$

el valor de  $\xi$  es un poco pequeño, y puede dárse la posibilidad de que el circuito oscile. Calculemos la capacidad en paralelo que deberíamos poner para compensar este efecto para hacer un poco mayor, digamos  $\xi = 0.6$ . Para ello utilicemos la ecuación 5.3.25:

$$\xi = \frac{1 + \omega_c R [C_1 + (1+A)C]}{2} \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R^2 C_1 A}}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R^2 C_1 A}} + \frac{\omega_c R (1+A)C}{2} \sqrt{\frac{R_E + R_d}{\omega_c R^2 C_1 A}}$$

$$0.6 = 0.31 + 2\pi \times 10^4 \times 3 \times 10^5 C \times 0.31$$

$$C \approx \frac{0.29}{2\pi \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \times 0.31} = 0.052 \times 10^{-7}$$

$C = 530$  pF, que por razones expresadas en la sección 5.3 podemos tomar del orden de 80 pF.

El circuito queda diseñado en la Figura 7.2.2.

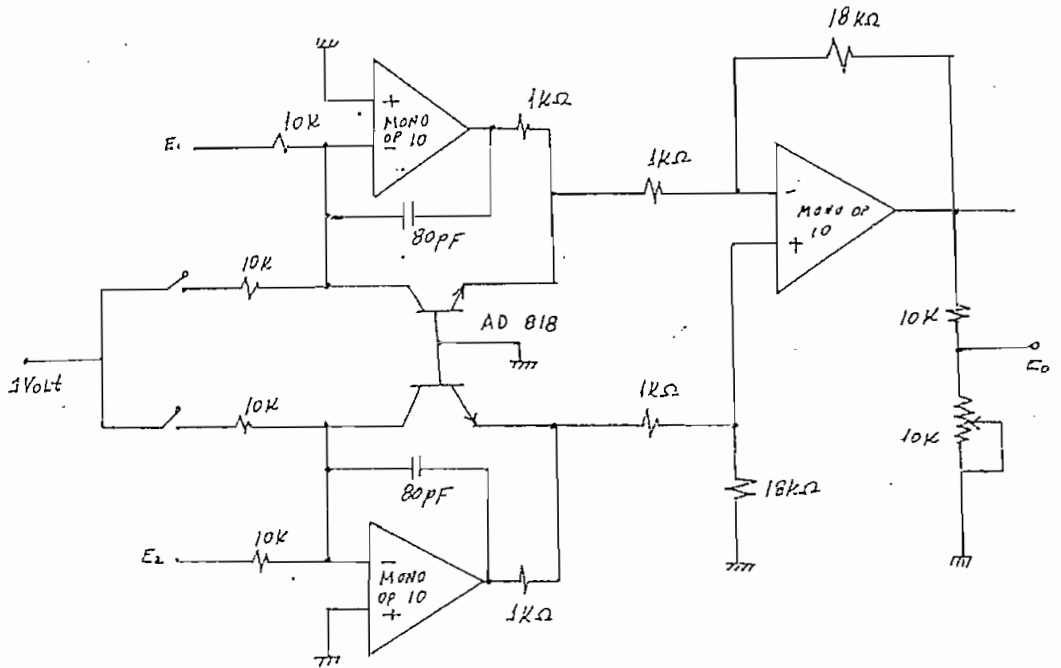


Fig. (7.2.2). Circuito amplificador logaritmico. Se ha incluido un divisor de tension con un potenciometro a tierra para corregir y calibrar el logaritmo.

El divisor de tension se ha conectado para calibrar la salida de logaritmo, debido a que las resistencias con que trabajé no fueron de precisión. Se conectó potenciómetros en paralelo a las resistencias de 10 K para asegurarnos que se cumple la condición de igualdad entre ellas.



7.3. DISEÑO DEL AMPLIFICADOR ANTILOGARITMICO

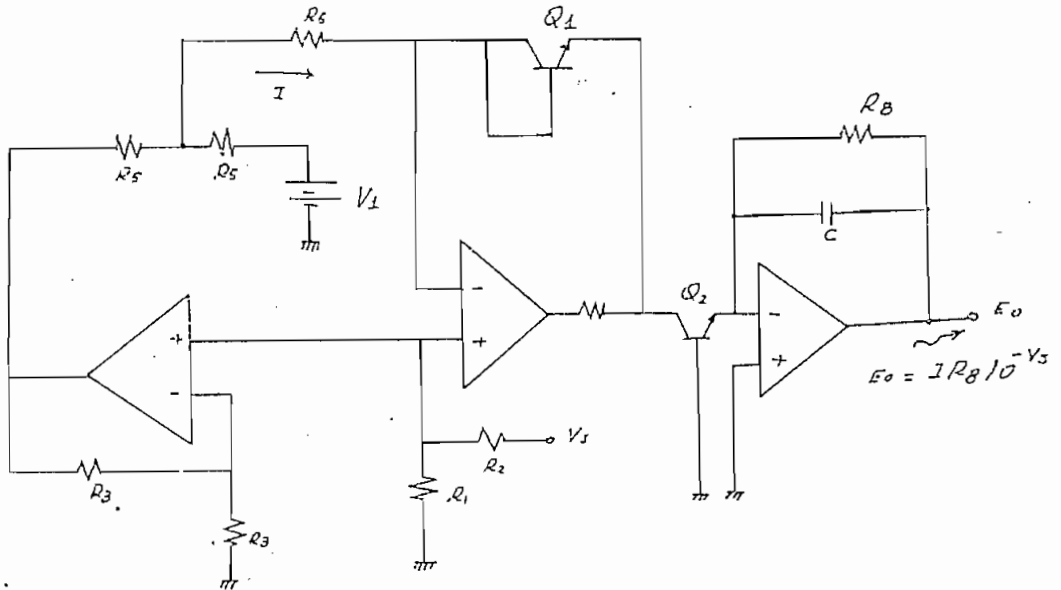


Fig. (7.3.1). Circuito amplificador antilogaritmico.

En la sección 4.3.2 se hizo un análisis sobre este circuito. Respecto a la fuente de corriente, dijimos que:

$$I = \frac{V_1}{R_5 + 2R_6}$$

Para polarizar al transistor Q1 elijamos la corriente de 5 uA.  
Para ello tomemos:

$$R_3 = 10 \text{ K}$$

$$R_5 = 1 \text{ K}$$

$$\text{y } V_1 = 1 \text{ Volts,}$$

de modo que:

$$I = 5 \mu A = \frac{1 \text{ Volt}}{2R_6}$$

$$R_6 = \frac{1 \text{ Volt}}{10 \mu A} = 100 \text{ K}\Omega$$

bajo la suposición, ya implícita, que:  $R6 \gg R5$ . En este caso:

$$100 \text{ k}\Omega \gg 1 \text{ k}\Omega$$

La resistencia R7, por razones de estabilidad, la tomamos como  $1 \text{ k}\Omega$ . Ahora bien, cuando  $V_s = 0$   $E_o = IR8$

$$E_o = 5 \mu\text{A} \times R8$$

Elijamos R8 como  $1 \text{ M}\Omega$ ; entonces:

$$E_o = 5 \text{ Volts}$$

El condensador C se coloca en paralelo con R8 debido a que como las variaciones logarítmicas de una función en el tiempo pueden tener cambios abruptos, éstos pueden simular impulsos de voltaje que harían responder al operacional de salida, incluida la capacidad parásito de entrada, a un transiente de respuesta libre que se suma a la señal deseada distorsionándola. Experimentalmente se determinó que la frecuencia de la senoide amortiguada, la respuesta transitoria al impulso de voltaje, era de 60 KHz. Lo que queríamos era atenuar ld, para lo que elejimos como frecuencia de corte a 6 KHz. La capacidad en paralelo a conectarse debe estar dado por:

$$f_o = \frac{1}{2\pi R_8 C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{10^4 \times 6 \times 10^3} = 0.026 \times 10^{-9}$$

En todo caso, debido a la capacidad parásita de en-

trada del operacional y la capacidad colector base del transistor, C debe ser menor. Experimentalmente se halló que la capacidad requerida debe ser  $C = 5 \text{ pF}$  para operar en las condiciones propuestas.

Faltaría encontrar los valores de  $R_2$  y  $R_1$ . Para ello tomemos la ecuación 4.3.5:

$$E_o = IR_B \exp \left\{ - \frac{e}{kT} \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_s \right\}$$

El cambio de signo en el exponente se debe a que trabajamos con transistores NPN. Lo que queremos hacer es:

$$\exp \left\{ - \frac{e}{kT} \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_s \right\} = 10^{-E_s}$$

tomando logaritmos naturales:

$$- \frac{e}{kT} \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_s = - \ln 10$$

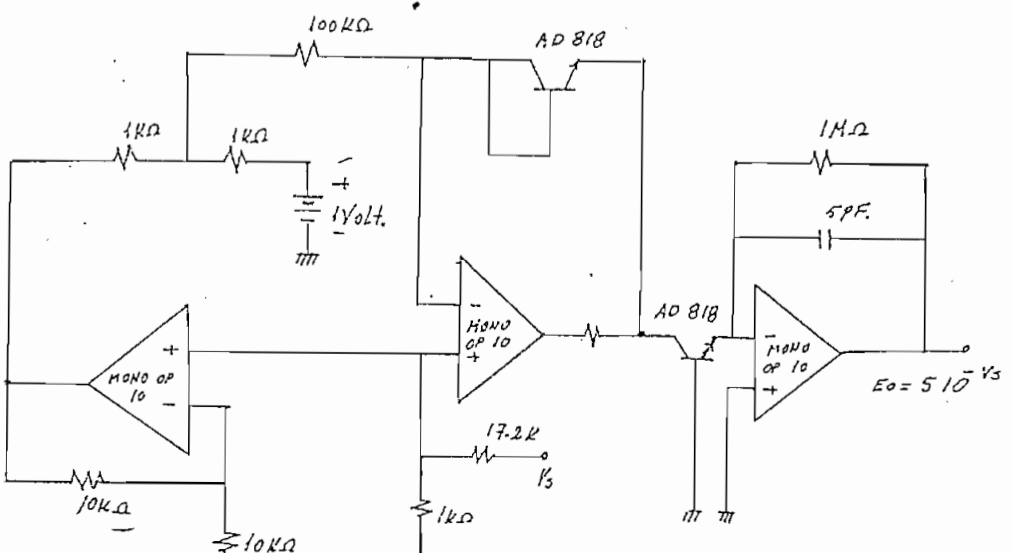
es decir:

$$\frac{e}{kT} \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_s = \ln 10$$

tomemos  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , como  $\ln 10 = 2.3$

$$R_2 = 17.2 \text{ k}\Omega,$$

El circuito final quedaría:



El circuito final quedaría:

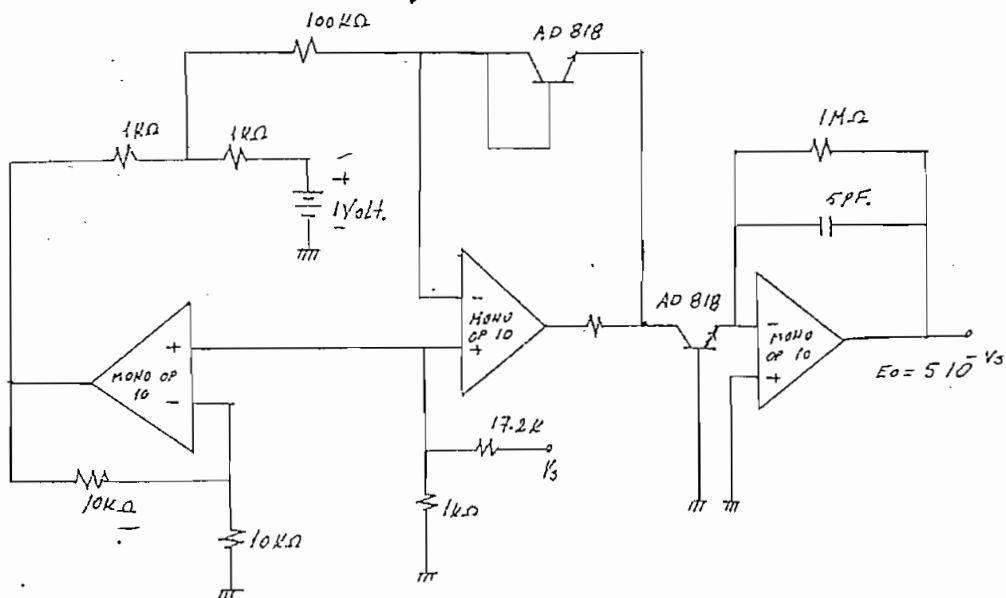


Fig. (7.3.2). Circuito amplificador antilogaritmico.

7.4. FUENTE DE ALIMENTACION Y FUENTES DE VOLTAJE DE REFERENCIA

Vamos a polarizar en nuestro circuito a los amplificadores operacionales con dos voltajes:

+ 18 Volts y - 18 Volts, por motivos de seguridad.

El circuito elegido es el siguiente: (ver Figura 7.4.1)

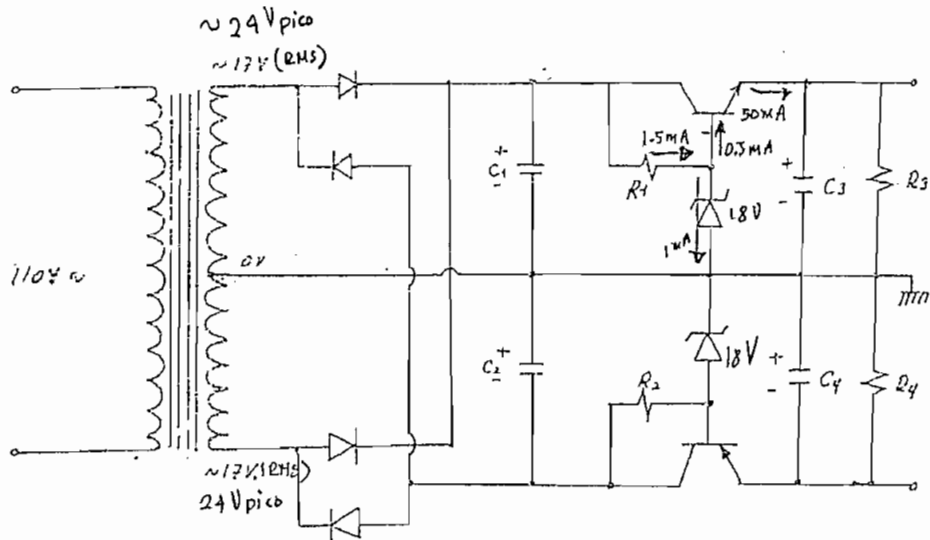


Fig. (7.4.1). Fuente de alimentación de voltaje estabilizada.

Procederemos a diseñar la fuente. El transformador tiene de entrada 110 Voltios y a la salida produce 17 volts RMS a cada lado de la toma intermedia. Ahora bien, tomemos la mitad del circuito para analizarlo, ya que la fuente es totalmente simétrica. La frecuencia fundamental de la señal rectificada en onda completa es de 120 Hz, y si consideramos el diodo Zener como una fuente de voltaje de resistencia muy baja, el filtro pasa bajos constituido por  $R_1$  y  $C_1$  tendrá una constante de tiempo  $\tau = R_1 C_1$  que determinará el nivel de rizado. Lo que debemos buscar es que la constante  $\tau$  deba ser mucho mayor que el

período de la señal rectificada; es decir:

$$R_1 C_1 = \frac{1}{f} \quad R_1 C_1 \gg \frac{1}{120} \quad (7.4.1)$$

El diodo Zener es de 18 Volts, lo que indicará que el voltaje en la salida del emisor del transistor será 0.6 Volts menor, es decir 17.4 Volts. Si el valor RMS es de 17 Volts, su valor pico será  $\sqrt{2} \times 17$  Volts = 24 Volts; eso implica que el voltaje colector base será de 6 Volts, y el de colector emisor 6.6 Volts. Tomemos una corriente de 1 mA para que circule por el Zener, y si la corriente que sale por el emisor es máximo de 50 mA siendo el  $\beta = 100$ , entonces la corriente total que fluye por la resistencia R1 será aproximadamente la suma de la corriente de Base 50 mA/100 y la corriente de Zener, 1mA; es decir 1.5 mA. La resistencia será:

$$R = \frac{6 \text{ Volts}}{1.5 \text{ mA}} = 400 \Omega$$

Ahora bien, para cumplir 7.4.1 se deberá hacer:

$$400 C_1 \gg \frac{1}{120}$$

$$C_1 \gg \frac{1}{400 \times 120} = \frac{1}{48000} = 21 \mu\text{F}$$

tomemos para nuestro caso  $C_1 = 1000 \mu\text{F}$ , eso implicará una constante de tiempo de:

$$= 1000 \times 10^{-6} \times 400 = 0.4 \text{ seg.}$$

Entonces el voltaje de rizado estará dado aproximadamente en-

tre el valor pico del voltaje rectificado menos el voltaje al que llega en un tiempo igual a  $T = 1/120$  seg al descargarse des de ese valor.

$$V_{\text{rizado}} \approx V_{\text{pico}} - V \quad (7.4.2)$$

$$\text{siendo } V = V_{\text{pico}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_{\text{rizado}} = V_{\text{pico}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = V_{\text{pico}} (1 - e^{-1/120 \times 0.4})$$

$$V_{\text{rizado}} = V_{\text{pico}} (1 - 0.9979)$$

$$V_{\text{rizado}} = V_{\text{pico}} \times 0.0021 \quad (7.4.3)$$

de modo que el porcentaje de rizado será  $V_{\text{rizado}} / V_{\text{pico}} = 0.21\%$ .

Este valor de rizado se mejora aún más debido al Zener y al transistor. Para aclarar esto mucho más, remitámonos a la Figura 7.4.2.

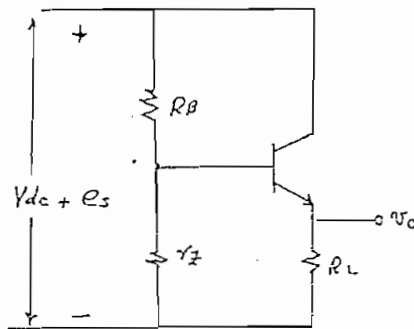


Fig.(7.4.2). Circuito regulador de voltaje con zener y transistor. El voltaje  $V_{dc}$  es continuo y el  $e_s$  representa el rizado.

Desarrollando un análisis sólo para voltaje de alterna, para el caso del rizado y trabajando con parámetros híbridos bajo la asunción que  $1/h_{oe} \rightarrow \infty$  remitámonos a la Figura 7.4.3.

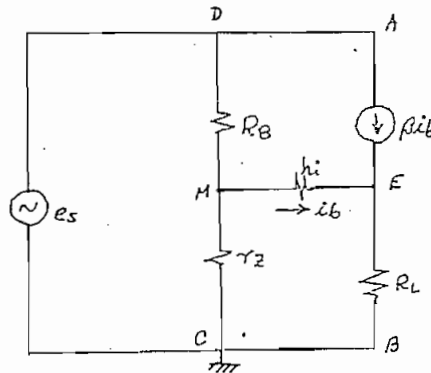


Fig. (7.4.3). Circuito equivalente de el circuito de la Figura 7.4.2.

Ahora bien, tenemos una fuente de voltaje en serie con la malla A, B, C, D. La fuente de corriente tiene una impedancia infinita, de modo que es un circuito abierto generalizado y no puede circular por ella más corriente que  $\beta i_b$ . Ahora bien, del punto D sale la corriente  $\beta i_b$  y llega al punto E. Si quitamos esa fuente de corriente y conectamos tres fuentes de corriente de valor  $\beta i_b$  en paralelo a  $R_B$ ,  $r_z$  y  $R_L$  veremos que estamos sacando corriente de D por un valor  $\beta i_b$ , metiendo esa corriente en M, pero a su vez sacando la misma corriente debido a la fuente en paralelo con  $r_z$ . La tercera fuente estará metiendo la corriente en el punto E, de modo que el circuito no se ha alterado para nada. La configuración del sistema se transforma, sin modificar su conducta, como indica la Figura 7.4.4.



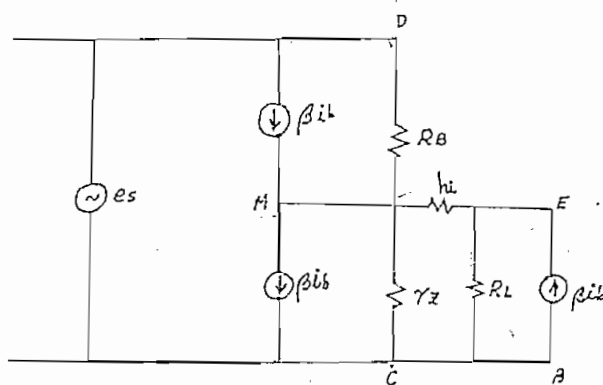


Fig. (7.4.4). Circuito modificado de la Fig. 7.4.3.

Ahora bien, la corriente que entra al punto M por la fuente de corriente  $\beta i_b$ , sale del punto M por la segunda fuente  $\beta i_b$ . Esto equivale a decir que de M a la red no entra ninguna corriente, y que la corriente  $\beta i_b$  que sale de D llega a C como si una sola fuente de corriente estuviera conectada en paralelo entre D y C.

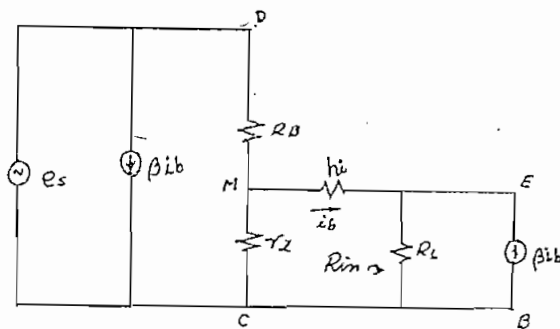


Fig. (7.4.5). Simplificación del circuito de la Fig. 7.4.4.

Ahora bien, el voltaje entre los puntos D y C es fijo

e igual a  $e_s$ , sea cuál sea el valor de la fuente de corriente. Por otro lado hay una fuente de corriente en paralelo a una resistencia equivalente visto desde C y D hacia la derecha y un cortocircuito generalizado (la fuente de voltaje  $e_s$ ) a la izquierda. Toda la corriente de la fuente de corriente se cortacircuita a través de la fuente de voltaje, y es si como no existiera; por lo tanto podríamos quitarla sin que el circuito altere su comportamiento.

Tomemos ahora la parte derecha del circuito visto desde los puntos M y C. El voltaje MC será:

$$V_{MC} = i_b h_{ie} + i_b (1 + \beta) R_L$$

es decir que la impedancia de entrada que se ve en los puntos M y C es:

$$R_{in} = \frac{V_{MC}}{i_b} = h_{ie} + (\beta + 1) R_L$$

si el  $\beta$  del transistor es grande, y  $r_z$  la resistencia del Zener es muy pequeña, entonces la impedancia total conectada entre M y C, el paralelo de  $r_z$  y  $R_{in}$ , será aproximadamente  $r_z$ . El circuito visto desde la fuente  $e_s$ , se muestra en la Figura 7.4.6.

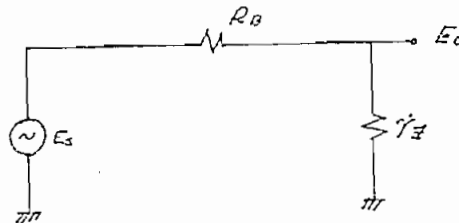


Fig. (7.4.6). Circuito equivalente que vería a la entrada por la fuente.

$$\text{Entonces } E_o = \frac{r_z}{R_B + r_z} e_s$$

la corriente de base será aproximadamente:

$$i_b \approx \frac{r_z}{R_B + r_z} \frac{e_s}{h_i + (\beta + 1)R_L}$$

la corriente de emisor:

$$i_E \approx \frac{\beta r_z}{R_B + r_z} \frac{e_s}{h_i + (\beta + 1)R_L}$$

Si  $(\beta + 1)R_L \gg h_i$ ,  $(\beta + 1)R_L + h_i \approx \beta R_L$  y tendremos:

$$i_E \approx \frac{\beta r_z}{\beta R_L (R_B + r_z)} e_s$$

de modo que el voltaje que aparece en la carga  $R_L$  será:

$$V_{RL} = \frac{r_z}{R_B + r_z} e_s \quad (7.4.4)$$

En la ecuación 7.4.4 se expresa que  $V_{rizado} = V_{pico} \times 0.0021$  cuando no había zener. Existiendo zener, y conociendo que

$r_z = 3 \Omega$  entonces:

$$V_{RL} = \frac{3}{400 + 3} V_{pico} \times 0.0021$$

$$\frac{V_{RL}}{V_{pico}} = \frac{0.0063}{400}$$

es decir, el porcentaje de rizado será:  $\frac{V_{RL}}{V_{pico}} = 0.016\%$

Basta conectar unas dos resistencias de "drenaje" de  $10 \text{ K}\Omega$  en el emisor para obtener el resultado deseado; pues el circuito a alimentarse consume más o menos  $30 \text{ mA}$ . La resisten-

cia que produciría el mismo consumo es:

$$R_L = \frac{17.2 V}{30 mA} = 570 \Omega$$

que en paralelo con  $10 K$  , es más o menos  $570$  . La  $r_{in}$ , si  $\beta$  es muy grande,  $100$  por ejemplo, será del orden de  $57 K$  ; de modo que si se cumple la relación  $R_{in} \gg r_z$  para nuestro caso. A la salida del circuito conectamos un condensador a tierra, no para reducir aún más el rizado, sino más bien para proteger al circuito a alimentarse de cualquier posible sobre tensión en la fuente de alimentación. Se eligió para el efecto un condensador de  $500 \mu F$ .

El transistor tiene un voltaje  $V_{ce}$  aproximado de  $6.6$  Volts y soporta una corriente de  $50 mA$ , de modo que debe ser capaz de disipar una potencia:

$$W = 50 mA \times 6.6 V = 330 mW$$

El circuito diseñado queda como se indica en la Figura 7.4.6.

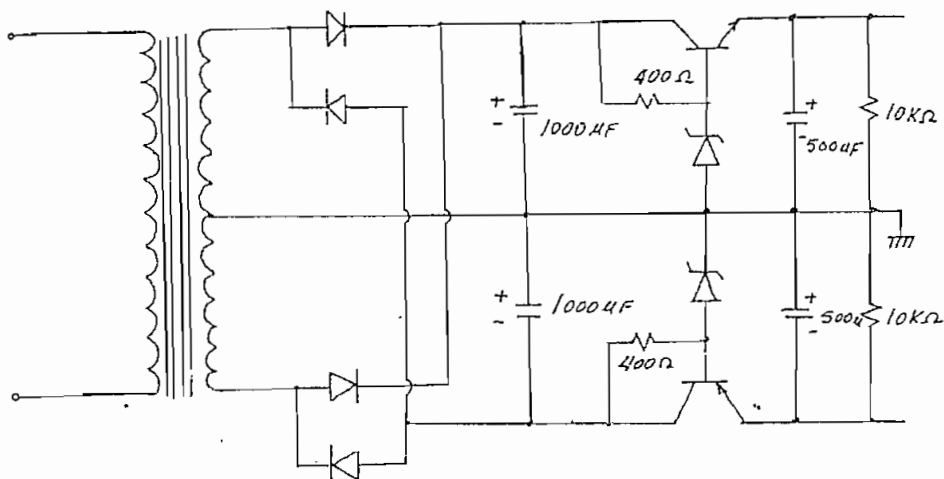


Fig. (7.4.6). Fuente alimentadora de tensión continua.

Falta ahora realizar el diseño de las fuentes de voltaje de referencia. Necesitamos 2, una para polarizar al transistor del circuito amplificador antilogaritmico, y otra que alimente el voltaje de referencia  $V_{ref}$  del amplificador logaritmico. Estas fuentecitas no son más que divisores de tensión que tomamos de la fuente general conectadas a la base de un transistor, de donde sacamos el voltaje desde su emisor. La ventaja de un seguidor emisor, reside en que la impedancia de salida es muy baja.

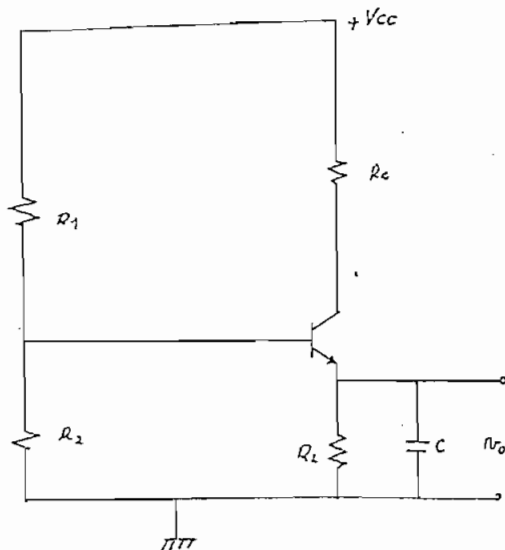


Fig. (7.4.7). Amplificador Seguidor Emisor. Para Continua.

Consideremos muy grande el  $\beta$  del transistor, de modo que la impedancia  $\beta (R_e)$  sea muy grande en comparación con la resistencia de base. En ese caso veremos que sólo tenemos un divisor de tensión dado por:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 18 = 1.6$$

1 Voltio de caída en la resistencia de emisor, más 0.6 voltios en la juntura base emisor si  $R_1 = 10 \text{ K}$  , entonces:

$$\frac{18 R_2}{10.000 + R_2} = 1.6$$

$$18 R_2 + 0 = 16.000 + R_2$$

$$R_2 = 980 \Omega$$

Si elegimos  $R_e = 1K\Omega$  , entonces  $\beta R_e = 100 K\Omega \gg 980\Omega$  , se cumple la condición supuesta, entonces  $I_e \approx I_c = mA$ . Si elegimos  $R_c = 10K$  entonces  $V_c = 10$  Volts y  $V_{ce} = 7$  Volts. El condensador en la resistencia de emisor se ha colocado para garantizar que sólo haya voltaje dc. Se ha elegido un valor algo grande, 250 uF, por 5 Volts electrolítico.

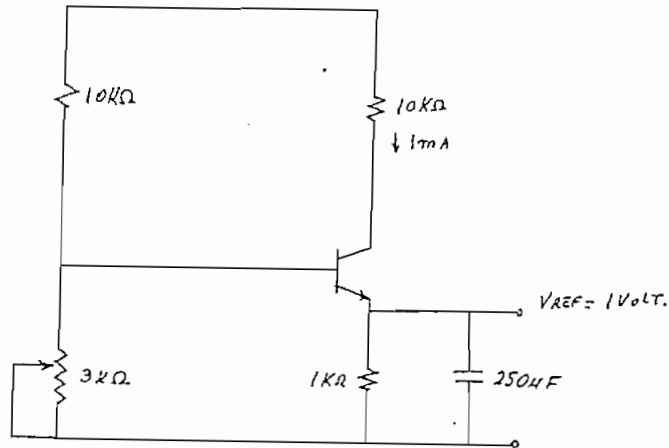


Fig. (7.4.7). Circuito seguidor emisor para obtener el voltaje de referencia  $V_{ref}$ . En lugar de una resistencia de  $980\Omega$  se ha colocado un potenciómetro de 3 K para calibrar su valor.

## CAPITULO VIII

### RESULTADOS EXPERIMENTALES Y CONCLUSIONES

En la introducción, el Capítulo I, en forma muy suscinta se expresa que técnicamente interesa para la construcción de transductores exponenciales, los siguientes factores:

- 1o. Número de Décadas .
- 2o. Ancho de Banda
- 3o. Nivel de Distorsión.

Ahora bien, como la filosofía del diseño es construir una fuente de corriente que alimente a las juntas transdiódicas para desde las Ecuaciones de Ebers Moll obtener logaritmo o antilogaritmo; y como para lograr nuestro propósito usamos amplificadores operacionales, el número de décadas estará limitado: 1o.) por la característica de variación de corriente según  $\exp (eV/KT)$  y en su rango; 2o.) por la corriente biás del operacional y otras fuentes de error. En el caso del operacional, tenemos una corriente biás de entrada de 3 nA, entonces podemos establecer la siguiente tabla de valores:

Voltaje de Entrada (Volts)	Corriente
10	1 mA
1	0.1 mA
0.1	0.01 mA
0.01	1 uA
1 mV	0.1 uA
0.1 mA	10 nA



es decir, podemos sacar aproximadamente 5 décadas en estas condiciones. Ahora bien, como el voltaje offset de entrada del operacional es del orden de 0.2 mV, eso nos restará una década para no introducir un error apreciable.

Es evidente que en un rango de corrientes comprendido entre 1 mA y 0.1 uA, la variación de voltaje con la corriente será con muy buena aproximación, según y no se introducirá distorsión apreciable.

A continuación se presenta un cuadro de valores donde se relaciona la frecuencia de operación con el número de décadas y el nivel de distorsión cuando a una señal sinusoidal del orden de 2 Volts pico a pico le sacamos logaritmo, al sumarle un voltaje continuo de 1 Volt, y luego al logaritmo le sacamos antilogaritmo.

No. de décadas	f Hz	% distorsión
6	100	0.8 %
5	100	0.8 %
4	100	0.8 %
3	100	0.8 %
2	100	0.7 %
1	100	0.6 %
6	200	1.6
5	200	1.4
4	200	1.3
3	200	0.1
2	200	0.6
1	200	0.5
6	300	1.6
5	300	1.2
4	300	1.2
3	300	1.2
2	300	1.1
1	300	1
6	400	1.2
5	400	1.2
4	400	1.2
3	400	0.8
2	400	0.6
1	400	0.5

No. de décadas	f Hz	% distorsión
6	500	-
5	500	-
4	500	0.8
3	500	0.7
2	500	0.6
1	500	0.5
6	800	
5	800	1 %
4	800	1.0 %
3	800	0.9 %
2	800	0.6
1	800	0.6
	f KHz	
6	1	1.9 %
5	1	1.8 %
4	1	1.7 %
3	1	1.58 %
1	1	1.1 %
6	2	2
5	2	2
4	2	2
3	2	2
2	2	2
1	2	1.6

No. de décadas	f	KHz	% distorsión
6	3		1.4
5	3		1.4
4	3		1.2
3	3		1.2
2	3		1.2
1	3		1.1
6	4		2
5	4		1.6
4	4		1.6
3	4		1.6
2	4		1.6
1	4		1.5
6	5		4
5	5		2
4	5		1.6
3	5		1.6
2	5		1.6
1	5		1.4

De los resultados experimentales podríamos decir que se obtiene un nivel relativamente bajo de distorsión en unas 6 décadas de corriente y voltaje hasta una frecuencia de 5KHz, como frecuencia de corte de todo el sistema log-antilog. El de fasamento que se presenta en el Capítulo VI se debe a los siguientes factores:

- 1o. A los condensadores usados en la compensación de frecuencia de los operacionales.
- 2o. A que los transistores emplean distintas constantes de tiempo y características de ancho de banda cuando aumenta la corriente inyectada y cuando disminuye esa corriente.

Se sacó los siguientes oscilogramas usando al sistema log-antilog como generador de funciones y como transductor exponencial.

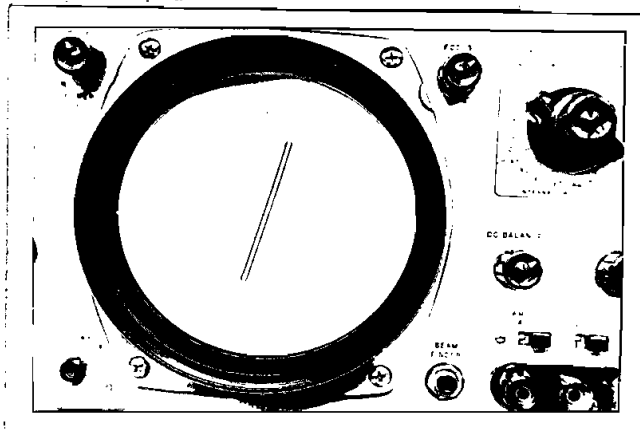


Foto 1: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 3(1+x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

Escalas horizontal: 1 Volt/cm.

vertical : 1 Volt/cm.

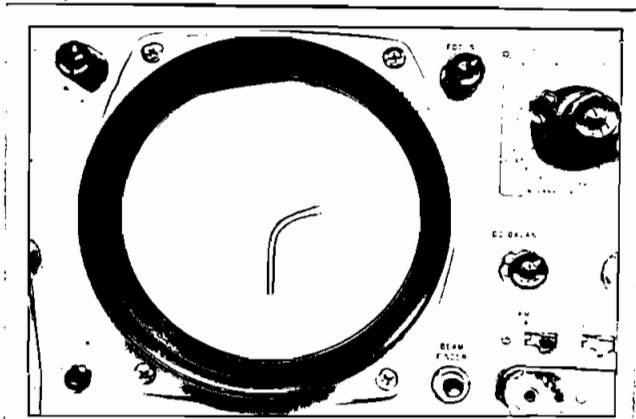


Foto 2: FUNCION  $Y = \text{Log}(1+x)$  - 1 x 4

Escalas horizontal: 1 Volt/cm.

vertical : 1 Volt/cm.

1 Volt = 1 década

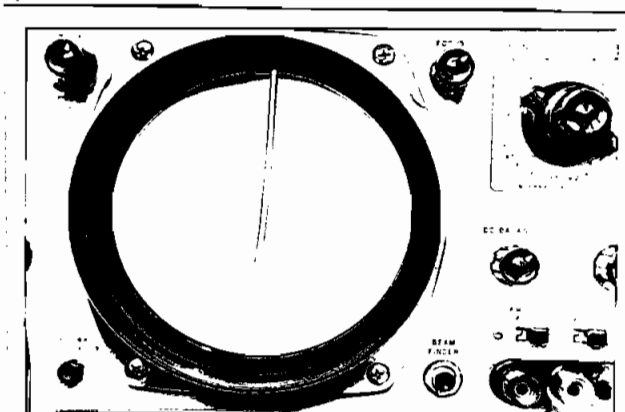


Foto 3: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 10^{(1+x)}$$

Escalas horizontal: 1 Volt/cm

vertical : 1 Volt/cm

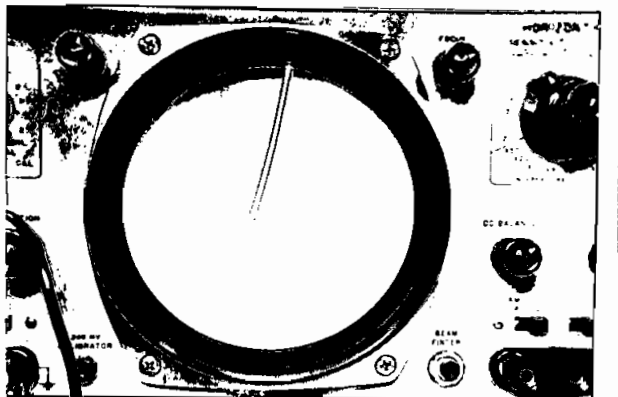


Foto 4: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 3(1+x)^2 \quad -1 \leq x \leq 1$$

Escalas Horizontal: 0.5 Volts/cm.

Vertical : 1 Volt /cm.

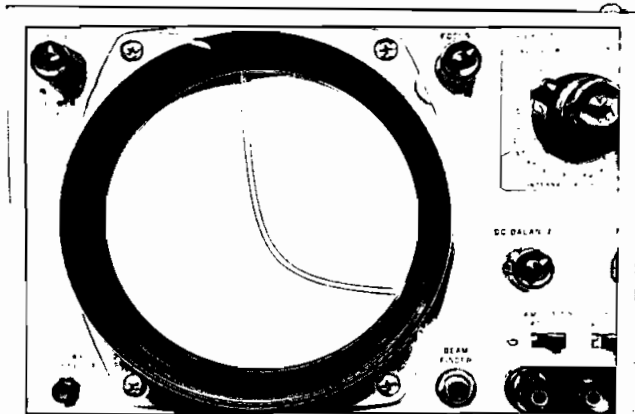


Foto 5: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 3(1+x)^{-1} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Escalas Horizontal: 1 Volt/cm.

Vertical : 1 Volt/cm.

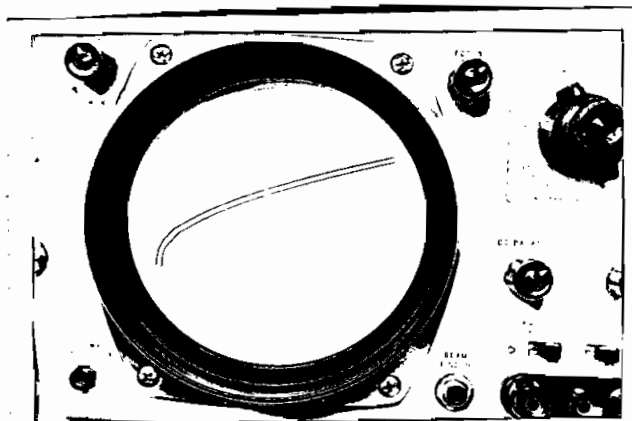


Foto 6: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 3(1+x)^{1/2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Escalas Horizontal: 0.2 Volts/cm.

Vertical : 0.5 Volt/ cm.

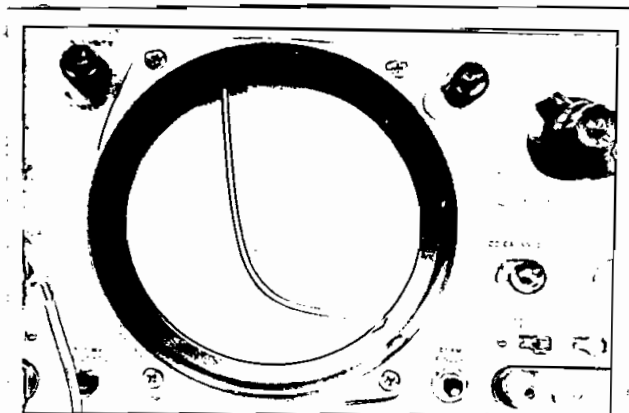


Foto 7: FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$y = 3(1+x)^{-2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Escalas Horizontal: 0.5 Volt/cm.

Vertical : 1 Volt/cm.



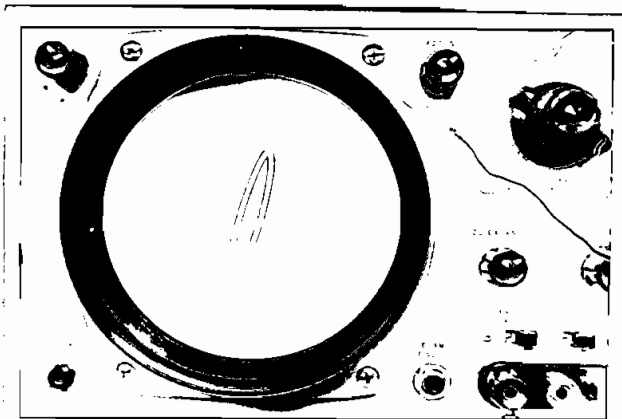


Foto 8: ELIPSE DE LISAJUS PARA DETERMINAR EL DESAFAMENTO INTRODUCIDO POR EL SISTEMA LOG-ANTILOG.

Escalas Horizontal: 1 Volt/cm.

Vertical : 1 Volt/cm.

Frecuencia: 1KHZ

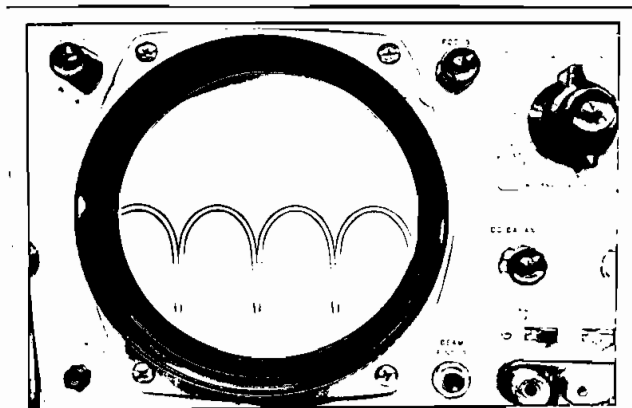


Foto 9: GRAFICA DE LA FUNCION

$$y = \log (1 + \sin x)$$

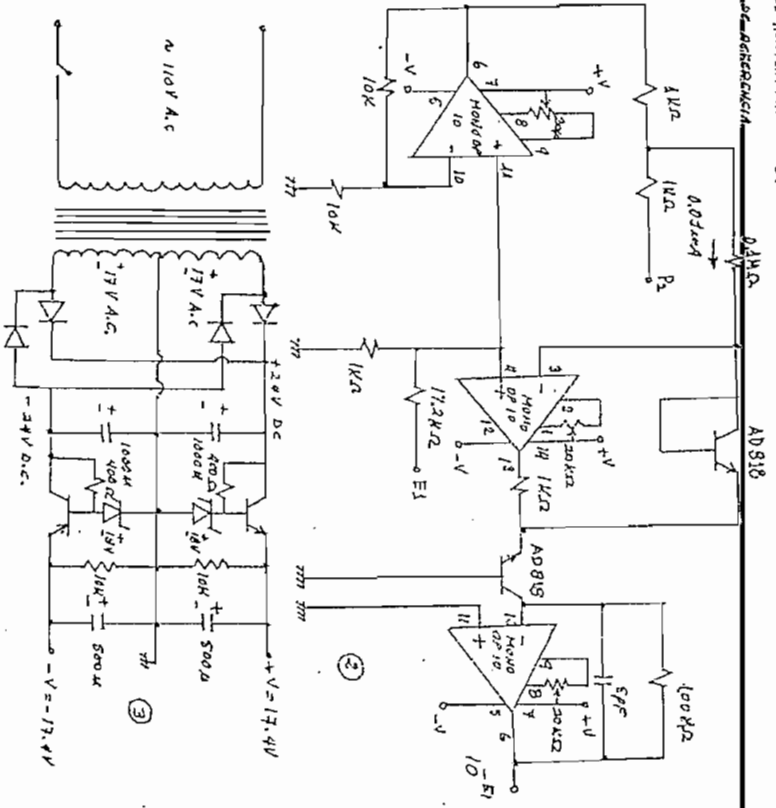
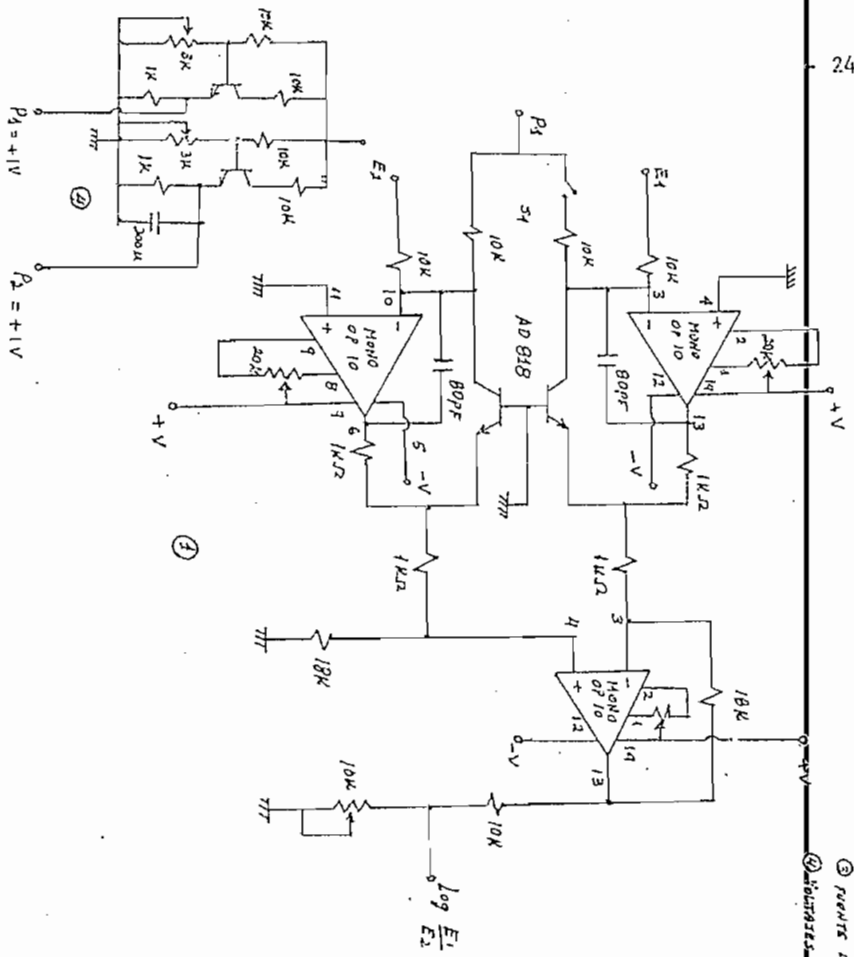
Escalas Vertical = 1 Volt/cm.

Frecuencia = 1 KHZ

1 Volt = 1 Década

AMPLIFICADOR LOGARITMICO Y ANTILOGARITMICO

- ① AMPLIFICADOR LOGARITMICO ESTABILIZADO CON FUENTE DE ALIMENTACION D.C.
- ② AMPLIFICADOR ANTILOGARITMICO
- ③ FUENTE DE ALIMENTACION D.C.



B I B L I O G R A F I A

1. Análisis y Diseño de Circuitos Electrónicos  
Chirlian, 1969, Mc Graw Hill.
2. Electronics Design  
Febrero 1974, artículo Log Amp.
3. Ecuaciones Diferenciales para Científicos, Ingenieros y  
Estudiantes  
Lamber y Tranter, Edit. Uthea, México, 1970.
4. Física Electrónica del estado sólido  
Van Der Ziel.
5. Física Estadística  
Landau, volumen 5, Edit. Reverte SA, 1957.
6. Historia de la Ciencia  
George Sarton Uthea, 1962.
7. Introduction to solid state Phisics  
Charles Kittel, Third Edition, John Wiley; sons Inc.  
December, 1968.
8. Integrated Electronies  
Milbrown-Halkias, Mc Graw Hill, Kagausha, Ltda.
9. Matemáticas avanzadas para Ingeniería.  
Erwin Kreyszig.
10. Mecánica Clásica  
Goldstein, segunda Edition 1966, Edit. Aguilar.
11. Mecánica Clásica  
V. W. Leech (Manuales Uthea No. 189)
12. Mecánica Cuántica  
Mesiah, Tomo I, Edit. Vermos, Madrid.
13. Mecánica Cuántica  
Landau, Edit. Reverté SA, 1969.

14. Mecánica Estadística y Termodinámica  
Aguilar, Edit. Reverté SA, 1957.
15. Notas de clase sobre tecnología de semiconductores  
Dr. Bruce Hoeneisen, 1974.
16. Operational Amplifiers, design and applications  
Burr - Brown, Editores: Tobey-Graeme, Huelsman,  
1971.
17. Propiedades Electrónicas de los materiales  
Robert M. Rose, Foureance A. Shepard, John Wulf  
México, 1968, Centro Regional de Ayuda Técnica.  
Agencia para el Desarrollo Internacional.
18. Siete Ensayos Filosóficos sobre la Ciencia Moderna  
Eli de Cortaire, Colección 70.
19. Termodinámica y Mecánica Estadística  
Palacios, Edit. Reverté S.A., 1957, Madrid.