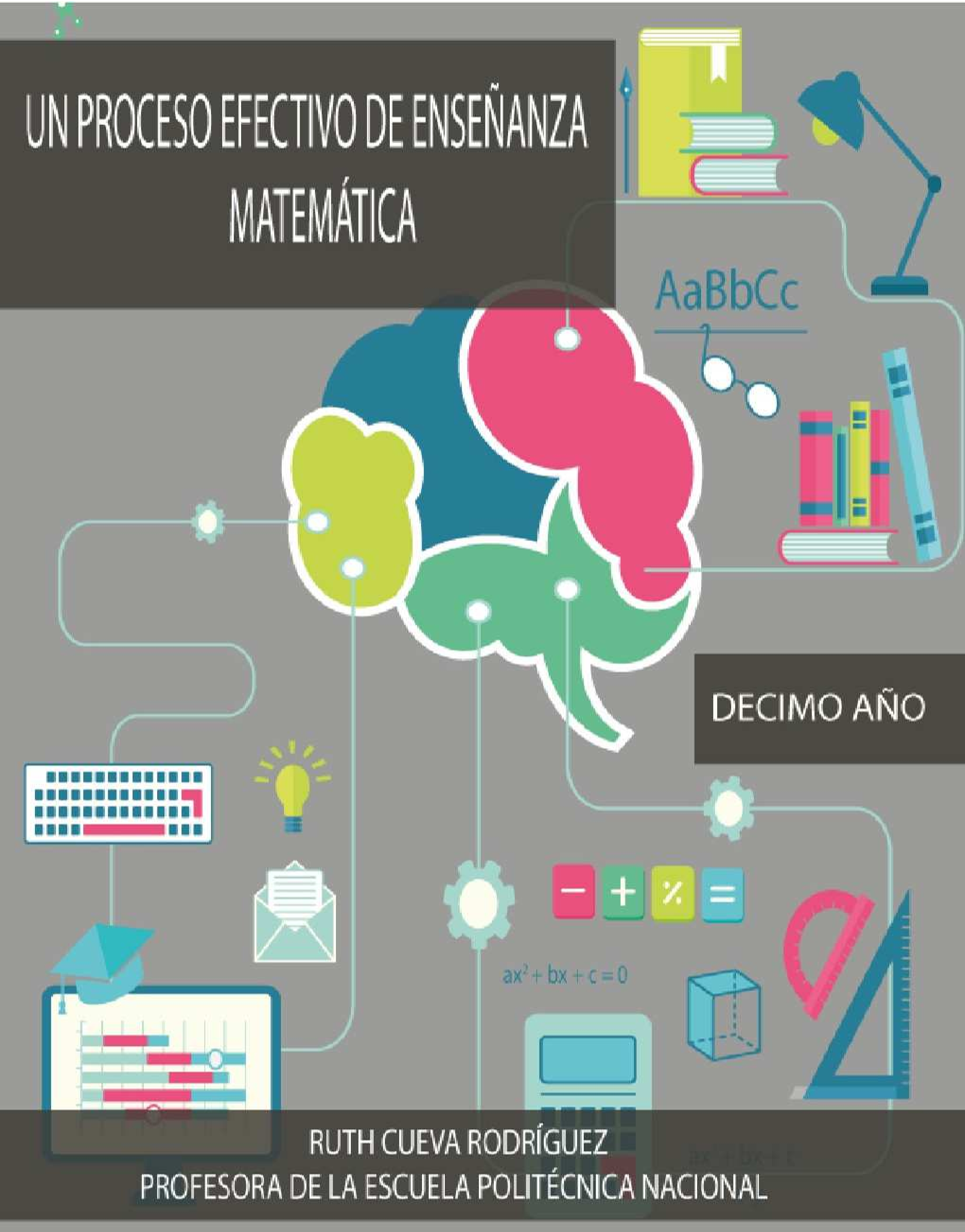
UN PROCESO EFECTIVO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA



DECIMO AÑO

RUTH CUEVA RODRÍGUEZ
PROFESORA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ISBN: 978-9942-20-875-0

Tabla de contenido

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo actual y perspectivo de la sociedad así como el nivel alcanzado por la Ciencia y la Tecnología exigen una formación profesional integral, que se manifiesten en nuevas formas de actuación del hombre y que éste sea capaz de plantear y resolver problemas con un alto criterio de responsabilidad moral. Los últimos foros internacionales, sobre problemas tanto sociales como educativos, han evidenciado la necesidad de impulsar estrategias de desarrollo acordes a la realidad actual, y es así como surgen propuestas educativas, que se espera favorezcan las transformaciones que demanda la sociedad moderna.

Dentro de este contexto, el Gobierno Ecuatoriano inicia en 1992 el diseño de la Reforma Curricular para la educación básica, debido a que considera que: "La inversión prioritaria en capital humano constituye en la actualidad, un prerrequisito indispensable para el crecimiento económico de un país. El capital humano es el recursos más precioso, tesoro invalorable, y garantía de futuro para la sociedad. De los recurso humanos depende el avance y uso apropiado de la tecnología, la conservación de la naturaleza. De las personas dependen: la paz, la democracia, la producción, la seguridad, la responsabilidad del planeta...."

La Reforma Curricular Ecuatoriana contiene: "Un nuevo pénsum de la educación básica ecuatoriana, los lineamientos curriculares referidos al tratamiento de las prioridades transversales del currículo, las destrezas fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios para cada año y las recomendaciones metodológicas generales para cada área de estudio"

Tanto la acción de este proyecto educativo, como la formación de los hombres que requieren los nuevos tiempos, deben centrar su atención en privilegiar su capacidad de incorporarlos a la sociedad con el mayor desarrollo posible de sus potencialidades. Lo que se puede lograr siempre y cuando se conciba a la educación como un proceso que debe ser dirigido científicamente, considerando su carácter sistémico, dando prioridad al tratamiento metodológico, en el que no atienda solamente los resultados del proceso pedagógico sino que privilegie el estudio de los estadios intermedios en función del desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

Los procesos curriculares, desde el diseño hasta la evaluación de su efectividad, requieren de sólidas bases científico-pedagógicas, es por ello que en la Reforma Curricular para la educación básica se han determinado las áreas fundamentales, considerando a la Matemática una de ellas. Debido a que en su desarrollo histórico, la Matemática nos muestra que sus conocimientos, surgidos de las necesidades prácticas del hombre mediante un largo proceso de abstracción, tienen un gran valor para la vida. La matemática es aplicada, entre otras áreas, en la planificación económica, en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, en la dirección de la producción, en la estrategia militar, en el estudio del rendimiento de los atletas, con lo que se evidencia que la matemática está presente en todos los campos del saber humano.

Debido a que durante el estudio de la Matemática se presentan: necesidad de deducciones, representación mental de relaciones reales, entes abstractos como objetos de estudio, lógica de estructura y rigurosidad de lenguaje, desarrollo de generalizaciones relativamente rápidas, mediante reconocimiento de analogías y diferencias, evidenciamos que se observan exigencias para el uso y desarrollo del intelecto, así como una convicción de la complejidad de sus formas. Por esto su estudio exige hábitos de disciplina, de persistencia y de trabajo ordenado, que contribuye de manera decisiva en el desarrollo multilateral de la personalidad.

El presente trabajo pretende aportar a mejorar el nivel del la Educación en el país, así como tratar sobre la base de la Reforma Curricular, de completar un trabajo en el cual el país ha invertido ingentes recursos.

Dentro de la Reforma Curricular, en lo que tiene que ver con el Área de Matemática, "se privilegian el valor y los métodos de la Matemática, a base de los conocimientos necesarios para el desarrollo personal y la comprensión de las posibilidades que brinda la tecnología moderna"

En la Reforma Curricular los conocimientos se estructuran de una forma "sistémica", lo que, a criterio de los autores permite unificar todas las ramas de la ciencia, garantizando su estudio y facilitando su articulación con las otras áreas. Se han seleccionado los contenidos de modo que puedan "ser tratados según sus características y formas propias de aprender del estudiante en cada uno de sus períodos de desarrollo, con carácter de continuidad dentro de la educación básica, en el contexto de la realidad nacional".

Los sistemas que han sido propuestos son:

- Numérico.
- De funciones.
- Geométrico y de medida.
- De estadística y probabilidad.

1.1 FUNDAMENTOS DE LA IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- El reconocido valor de los conocimientos matemáticos en la solución de los problemas de nuestra sociedad.
- El desarrollo del pensamiento se realiza a través de la contribución de las potencialidades que radican en el aprendizaje de las matemáticas.
- La enseñanza de la matemática contribuye al desarrollo de la conciencia y a la educación de nuevas generaciones.

1.2 BASES PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Leyes generales de la pedagogía
- Teorías psicológicas del aprendizaje.
- Higiene escolar (cuidado de la higiene mental).

1.3 TAREAS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- A partir de las bases determinadas por la sociedad se debe orientar la enseñanza de la matemática, determinando y derivando los objetivos, y seleccionando adecuadamente los contenidos.
- Determinar y desarrollar métodos que dirijan adecuadamente el proceso, precisando secuencia, enfoque y estructuración del contenido.

- Investigar y precisar las regularidades del proceso pedagógico en la enseñanza de la matemática.

1.4 FUNCIONES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Proveer a los alumnos de sólidos conocimientos matemáticos (conceptos, teoremas, reglas, relaciones, relaciones y procedimientos) de importancia general y que han sido estables históricamente.
- Desarrollar habilidades en el trabajo con algoritmos y cálculos elementales, así como con métodos y procedimientos indispensables para llevar a la práctica los conocimientos antes referidos.
- Familiarizar al alumno con las siguientes características de la ciencia matemática:

  1. El carácter abstracto.
  2. Formas fundamentales del pensamiento matemático.
  3. El carácter lógico deductivo.
  4. La estructura.

- Formar en los estudiantes la convicción de que una buena educación matemática es parte integrante de una personalidad al servicio de la sociedad.
- Que los alumnos evidencien la importancia creciente de la Matemática en la vida social.
- Contribuir a la formación mediante el desarrollo de las capacidades intelectuales, formas de trabajo y razonamiento, así como los hábitos de trabajo que siendo esenciales para la actividad matemática pueden desarrollarse a través del trabajo con los conceptos y procedimientos propios de la Matemática.
- El desarrollar en forma sistemática el poder, sobre todo en lo que se refiere a la aplicación independiente de los conocimientos, hábitos y habilidades en la solución de problemas intra y extramatemáticos y en la posterior adquisición de conocimientos.

1.5. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

1.5.1 OBJETIVOS EN EL CAMPO DEL SABER Y EL PODER.

SABER. Se entenderá por saber los conocimientos matemáticos que pueden ser adquiridos por los alumnos durante el curso escolar. Éstos pueden ser sobre conceptos, sobre proposiciones (teoremas y fórmulas), y sobre procedimientos o métodos de trabajo característicos de la matemática (métodos de demostración, procedimientos para la resolución de ecuaciones, para calcular, etc.).

PODER. Se entenderá por poder los hábitos, habilidades, y capacidades específicas de la matemática, desarrollado por los alumnos para operar con los conocimientos adquiridos y darles aplicación, así como las normas de conducta y cualidades de la personalidad.

1.5.2 RESPECTO AL SABER.

La adquisición de sólidos conocimientos sobre:

- Conocimientos importantes del curso escolar de Matemáticas.
- Proposiciones matemáticas.
- Procedimientos de trabajo matemático.
- Símbolos y fórmulas matemáticas.

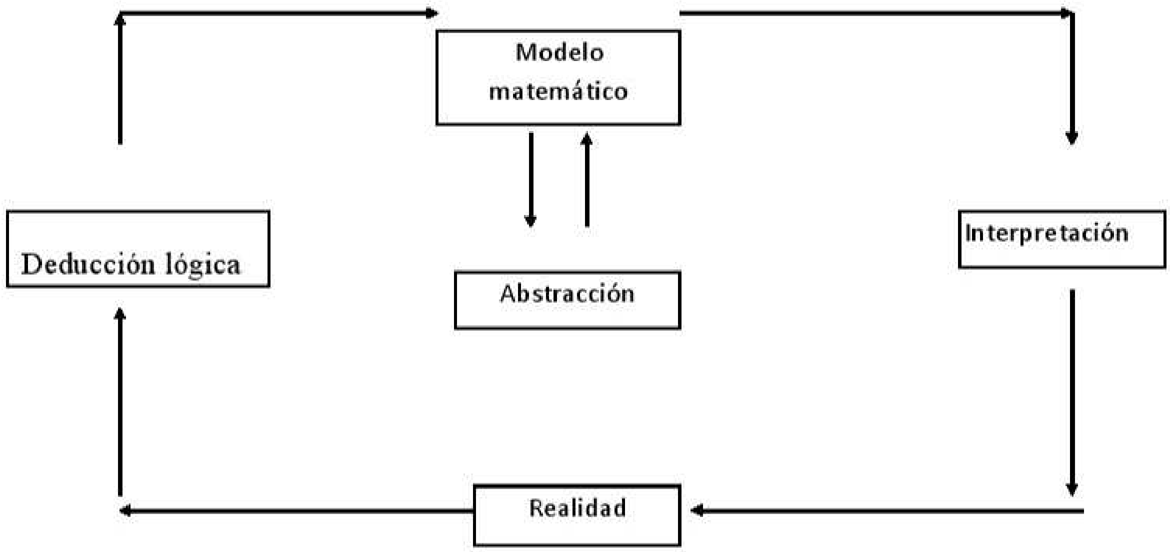
1.5.3 RESPECTO AL PODER.

La formación y el desarrollo de hábitos y habilidades para:

- La realización de operaciones básicas de cálculo.
- La resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- El trabajo con funciones elementales.
- La representación y el cálculo de objetos sencillos en el plano y en el espacio.

El sistema básico de habilidades en la enseñanza de la matemática en el nivel medio es el siguiente:

- Analizar y sintetizar, comparar y clasificar, generalizar y concretar y particularizar, como habilidades generales que contribuyen al desarrollo del pensamiento general.
- Algoritmizar, calcular, graficar, interpretar, identificar, recodificar, definir y demostrar, como habilidades particulares de la Matemática.
- La abstracción como la vía del pensamiento matemático para poder resolver problemas prácticos mediante modelos.



La formación y el desarrollo de capacidades para:

- Entender y realizar independientemente demostraciones sencillas.
- Comprender la esencia de los conceptos y como llegar a su definición y caracterización.
- Aplicar correctamente la terminología, simbología y el lenguaje matemáticos.
- Reconocer, analizar y solucionar problemas matemáticos.

1.5.4 OBJETIVOS EN EL CAMPO DEL DESARROLLO INTELECTUAL.

Éstos expresan la contribución que debe hacer la enseñanza de la Matemática al desarrollo del pensamiento en general vinculado con:

- El desarrollo del pensamiento lógico-deductivo. Para ello se debe hacer una utilización correcta de las operaciones lógicas y sus formulaciones correspondientes.
- El desarrollo del pensamiento creativo y la fantasía. Para ello se debe participar activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos y relaciones entre ellos; de ideas para la solución de ejercicios y problemas.
- La formación lingüística. Para ello se debe capacitar para el uso correcto del lenguaje normado de la asignatura, para transferir formulaciones del lenguaje común al matemático y viceversa.

- El desarrollo del pensamiento geométrico espacial. Para ello se debe formar un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, pueden los estudiantes representar, mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométricas espaciales.
- El desarrollo del pensamiento final. Entendiéndose a éste como los procesos del pensamiento encaminados a un producto final determinado.
- El desarrollo del pensamiento algorítmico.
- El desarrollo del pensamiento funcional.
- La racionalización del trabajo mental de los alumnos. Para ello se debe preparar para trabajar de modo racional, planificado y orientado hacia el cumplimiento de objetivos específicos.

1.5.5 OBJETIVOS EDUCATIVOS.

Los objetivos educativos de la enseñanza de matemática se orientan hacia la formación de convicciones, actitudes y normas de conducta, así como cualidades morales, los mismos que se logran al incluir en la educación:

- El trabajo planificado, consciente y creador.
- La exactitud, el cuidado, el esmero y la limpieza.
- La perseverancia, la disciplina y el aprendizaje consciente.
- La sinceridad, la crítica y la autocrítica.
- El compañerismo, la complacencia y la conducta colectiva.

1.6 CONOCIMIENTOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Dominios numéricos.
- Cálculo con magnitudes y valores aproximados.
- Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas. Optimización lineal.
- Correspondencia, transformación, función.
- Geometría
- Combinatoria, probabilidades.

1.7 MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

1.7.1 DEL PROFESOR.

El profesor debe dominar los métodos para la familiarización con los programas de matemática, conocidos como: corte vertical, corte horizontal y panorámica del contenido.

Corte vertical. Se utiliza para obtener información respecto a las condiciones previas que posen los estudiantes, sobre las premisas fundamentales que se deben crear en una unidad, de modo de contribuir a la consecución de los objetivos en las unidades posteriores.

Corte horizontal. Se utiliza para obtener la información que proporcionan los programas sobre la distribución o dosificación del contenido en una unidad o parte de él.

La panorámica del contenido. Se utiliza para obtener información de los programas sobre los contenidos fundamentales

1.7.2 DEL CONTENIDO.

Debido al lugar que ocupa el método en la cadena lógica de los componentes no personales del proceso pedagógico (objetivo, contenido, métodos, medios, formas organizativas y evaluación), éstos deben cumplir las siguientes exigencias:

- Deben hacer un importante aporte al logro de los objetivos, no solo de la enseñanza de la matemática sino de toda la enseñanza en general.
- Deben ser métodos que tengan en cuenta tanto las particularidades del contenido matemático (imágenes ideales de la realidad), como los modos objetivos de asimilación de este contenido por parte de los estudiantes de forma que tengan capacidad para determinar ese modo de proceder.

1.7.3 ASPECTO INTERNO Y EXTERNO DEL MÉTODO.

EXTERNO. Es el modo visible de las relaciones entre maestro, alumno y los conocimientos (forma de enseñar), aquí se distinguirán tres formas:

Exposición del profesor.

La fuerza activa está en el profesor, la actividad del alumno es receptiva. En la enseñanza de la matemática se la usa si:

1. Aparecen indicaciones sobre…..
2. Hay que presentar informaciones sobre…..
3. Se debe complementar una información matemática mediante una información adicional.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Se representa la materia completa en el aspecto del contenido (aclaración).
2. Contribuye al adiestramiento lógico lingüístico de los alumnos.
3. Permite dar indicaciones para resolver un ejercicio o para realizar determinada forma de trabajos.(instrucción).
4. Es importante para mostrar numerosos procedimientos y formas de trabajo y pensamiento de la matemática (ejemplificación).

Exposición con carácter de aclaración.	Exposición con carácter de instrucción.	Exposición con carácter de ejemplificación
Introducción de conceptos, símbolos y formas de escritura(frase conceptual. Deducción de teoremas y reglas. Fundamentación de los diferentes pasos de una demostración o construcción. Explicación de leyes. Aclaración de vías de solución.	Planteamiento de objetivos. Planteamiento de ejercicios. Indicaciones sobre la forma de trabajo.	Introducción de procedimientos de construcción. Introducción de métodos de demostración. Ejemplificación de las formas de representación de demostraciones.

Trabajo independiente.

Predomina el aprendizaje productivo en la solución de ejercicios o en el trabajo con el libro de texto.

Se lo usará en la enseñanza de la matemática:

1. Para el descubrimiento de determinadas leyes matemáticas.

2. Para adquisición de nuevos conocimientos sobre conceptos.
3. Cuando se quieren presentar definiciones o teoremas.
4. Para la ejercitación de procedimientos de solución.
5. Para lograr la sistematización de contenidos.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Desarrollo del pensamiento de los alumnos en cuanto al dominio de operaciones lógicas como: analizar, inducir, sintetizar, abstraer, generalizar procedimientos, inducir y deducir.
2. El desarrollo de la habilidad de solucionar problemas.
3. Entrenamiento para el trabajo en silencio, con notas de clase, con el libro de texto y con libros de consulta en la biblioteca.
4. El desarrollo de la independencia en la realización de tareas.
5. Desarrollo de la habilidad de exponer.
6. El adiestramiento en hacer valoraciones críticas en cuanto a la comprensión y la representación de relaciones matemáticas.

Trabajo individual	Trabajo individual frontal	Trabajo en equipos
Exposición de los alumno. Hacer cálculos en la pizarra, realización de construcciones en la pizarra. Controles orales de los resultados. Solución de tareas.	Ejercicios para la realización de cálculos, solución de ecuaciones, etc. Solución de ejercicios de demostración, realización de descripción de construcciones. Elaboración de resúmenes. Sistematización del saber adquirido. Elaboración independiente de nuevos conocimientos con el libro de texto. Empleo de hojas de trabajo para la adquisición de nuevos conocimientos.	Solución comentada de ejercicios.

	Controles escritos de los resultados.	

Elaboración conjunta.

Adopta distintas formas de conversación.

En la enseñanza de la matemática se lo usará:

1. Si se desea dar pasos cortos en la actividad mental de los alumnos.
2. Si se quiere realizar controles orales en los alumnos para el aseguramiento del nivel de partida.
3. Si se intenta dirigir el pensamiento de los alumnos para que encuentren o descubran, por sí mismos, determinados problemas matemáticos.

Las ventajas de su uso son:

1. Desarrollar las habilidades de: fundamentar, definir y explicar relaciones.
2. Incide en la capacidad de formular proposiciones, y encontrar un procedimiento.

Conversación Socrática	Conversación heurística	Discusión
Ejercitaciones diarias de todo tipo: cálculo oral, propiedades de objetos geométricos, trabajo con variables.	Elaboración de nuevos conocimientos sobre la base del poder y del saber ya adquiridos.	Búsqueda común de vías de solución. Análisis de problemas. Trabajo en el problema.
Controles breves con preguntas sobre fórmulas de cálculo	Ordenamiento de nuevos conocimientos en sistemas de conocimientos ya existentes.	Discusión de posibilidades de solución Valorización y evaluación de soluciones ofrecidas.
Preparación de conceptos conocidos, definiciones, teoremas para el trabajo siguiente.	Resúmenes de generalizaciones. Descubrimiento del núcleo matemático de una situación dada. Solución por paso de ejercicios.	Contraposición con problemas actuales

	Interpretación de expresiones matemáticas.	

<u>INTERNO.</u> Es la expresión de procesos más profundos, que se encuentran determinados por la lógica interna del proceso de enseñanza y que le imprimen al método una estructura interna peculiar. Aquí consideraremos los siguientes métodos.

- **<u>Los métodos analíticos, sintéticos y analítico-sintéticos.</u>**

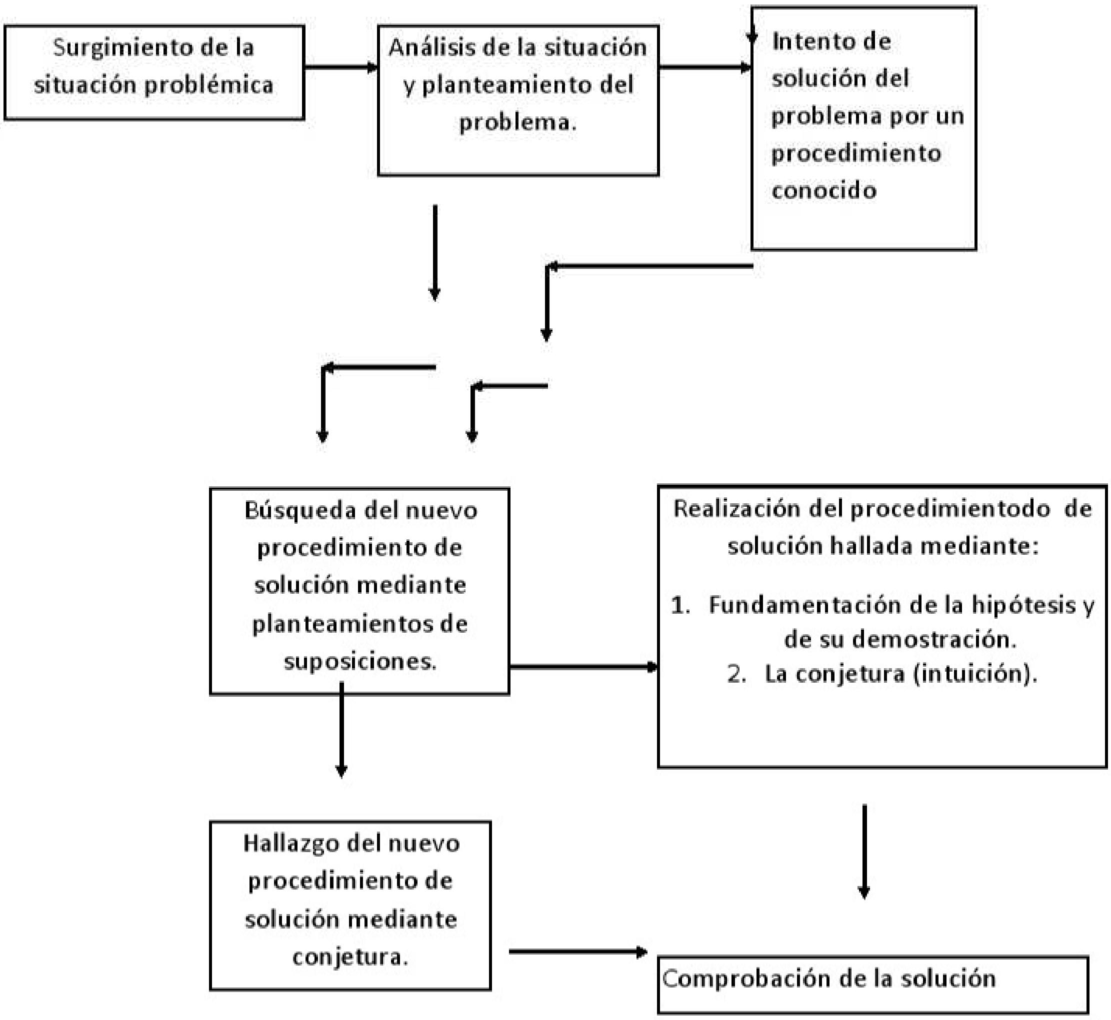
Siendo el análisis y la síntesis métodos de la investigación científica, juegan un gran papel en el proceso de la cognición que tiene lugar en la matemática por lo tanto deben reflejarse en su enseñanza.

- **<u>Los métodos genéticos, constructivos y axiomáticos.</u>**

Al aplicar el método genético se citan pintorescamente hechos históricos que revelan causas de la aparición de las teorías matemáticas; se trata de que los alumnos con ayuda del profesor, descubran los teoremas y las reglas esenciales comprendiendo la estructura. Al aplicar el método constructivo se introducen conceptos que se logran en forma constructiva. El método axiomático se basa en representar todo el sistema de los conceptos y teoremas partiendo de leyes básicas que se consideran axiomas irrefutables.

- **<u>El método problémico.</u>**

Este consiste en que mediante el proceso de solución por parte de los alumnos, del sistema especialmente elaborado de problemas y ejercicios problémicos, éstos llegan a dominar la experiencia creadora, a asimilar los conocimientos y modos de actividad creadora. A continuación se presentará un esquema del método problémico.



1.8 MEDIOS PARA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Aparte de los medios elementales de la enseñanza de la matemática como son el pizarrón, la tiza, el retroproyector, las láminas, las reglas, el compás, etc., consideraremos un grupo de medios que los llamaremos medios auxiliares.

Para que los estudiantes puedan aprovechar al máximo los medios, deben saber cuál es su contenido, cuáles son los valores que contienen y cómo trabajar con ellos. El profesor es el ejemplo de su utilización, no solo en el momento de su enseñanza. El facilitador debe realizar con los alumnos un entrenamiento para dominar las técnicas del uso, a través de un trabajo sistemático. Asímismo debe propiciar la memorización de las fórmulas simples que son de uso frecuente. Algunos de los medios que se consideran de importancia en la enseñanza de la matemática son:

Libro de texto. Donde se ofrece una representación de los contenidos del curso. Con ayuda de éste los alumnos pueden realizar tres grupos de actividades fundamentales: actividades de búsqueda de información, de toma de información, y de elaboración o transformación de la información.

Plantillas para la construcción de figuras y para el trazado de gráficos de funciones elementales. La construcción del gráfico de algunas funciones (cuadráticas, homográficas,etc.) exige mucho tiempo y a menudo el dibujo no es limpio y la curva no adquiere su forma verdadera producto de los errores cometidos, el tiempo puede ser ahorrado para emplearlo en la actividad mental y creativa de los alumnos, si éstos disponen de un juego de plantillas que pueden ser confeccionados por ellos mismos.

Los formularios y las tablas de valores funcionales. Estos medios tienen un carácter eminentemente racionalizador, con su ayuda se puede en breve tiempo, precisar fórmulas, conceptos, teoremas, gráficos, valores para funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, etc. que resulten necesarias para la solución de un problema dado.

La calculadora. Es una herramienta que se puede introducir en el momento en que los cálculos requieran de procedimientos muy largos y que abarquen números racionales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc.

1.9 FORMAS ORGANIZATIVAS.

El proceso pedagógico para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio de la educación en el Ecuador debe organizarse en forma horizontal, en años, trimestres (cuatrimestres, quimestres, etc.), meses, semanas, módulos y clase, y de manera vertical en asignaturas. A éstas últimas se les organiza de modo que permitan la función integradora del proceso.

Es en las clases en donde se manifiesta la relación facilitador-estudiante, y es allí donde se produce el desarrollo metodológico del proceso, mediante el cual los estudiantes deben apropiarse del contenido logrando los objetivos.

Creemos que las clases de Matemática deben desarrollarse principalmente entre la práctica con un porcentaje de trabajo investigativo. En las clases debe tratarse de mantener la expositiva, la práctica y los talleres con un peso igual. No debería, sin embargo, dejarse de desarrollar clases donde se trate la autopreparación y la consulta, de forma que se logren los objetivos propuestos y fomente el autocontrol como un aporte para el desarrollo de la personalidad.

Así, la relación Método-medio-forma es dinámica, determinando la eficiencia del sistema, manifestándose de modo categórico, como en ningún otro componente del sistema, la relación afectivo-cognitiva y de la actividad-comunicación.

1.10 EVALUACIÓN.

Se debe entender a la evaluación como la integridad de sus funciones: pedagógica, innovadora y de control. Aunque en un instante parecería que la función que se encuentra rectorando la evaluación es la de control, si se aplica adecuadamente la estrategia evaluativa sugerida por el Dr. Castro, obtendríamos una evaluación que utilice la medición, la comprobación, la retroalimentación y sobre todo la autoevaluación como actividades frecuentes y sistemáticas.

Para que la evaluación cumpla con su función pedagógica se debería estructurar medológicamente:

- La motivación.
  Para que los alumnos adquieran conciencia de la necesidad de aprender.
- La orientación hacia el objetivo.
  La información anticipada a los alumnos del resultado de su actividad.
- El aseguramiento del nivel de partida (diagnóstico).
  Lo que implica que se debe prestar atención a las condiciones previas generales y la disponibilidad de conocimientos y habilidades.
- La fijación.
  En todas sus etapas: ejercitación, repaso, sistematización y profundización del contenido.
- Del control.

Dentro de las técnicas de control que sugerimos tenemos: la evaluación frecuente a través del método de elaboración conjunta, trabajo en clase y extraclase, y las pruebas y exámenes. Para la estructuración metodológica del control se debe tener en cuenta:

- Características de los ejercicios. Estos se los utiliza como un medio para el control, y deben estar confeccionados según el modelo de los que representan las exigencias derivadas de los objetivos a lograr.
- Principios para la selección de ejercicios en una prueba o examen.
    1. Hay que lograr variedad en el planteamiento de los ejercicios
    2. Debe tener al menos un ejercicio que provenga del curso anterior.
    3. Por lo menos en un ejercicio los alumnos deben reconocer el núcleo matemático de una situación dada
    4. Debe estar contenida las exigencias de una demostración, de una fundamentación o de una sistematización (generalización).
    5. En la fijación del valor de las preguntas tiene que dar suficiente peso a los conocimientos y habilidades principales.
    6. Deben estar contenidos ejercicios que posibiliten también a los alumnos de menos capacidad una elaboración exitosa.
    7. Deben estar contenidos ejercicios en los que los alumnos de mayor capacidad puedan mostrar que dominan la materia amplia y profundamente.

- Valorización adecuada y justa de los ejercicios de control.

  Esto se realiza sobre todo mediante el elogio, la crítica, pero también mediante la calificación. Para que la evaluación cumpla sus propósitos el alumno debe reconocer por qué fue elogiado o criticado o el por qué de su calificación. Además se necesita que concientice del estado del desarrollo de sus habilidades para fundamentar, para demostrar, para sistematizar.

- La elevación de la efectividad de la evaluación.

  Para esto el profesor a de tener en cuenta:

    1. Realizar observaciones frecuentes y detalladas durante la clase sobre la calidad de las respuestas, los comentarios, la realización de tareas por los alumnos y al final de la clase informar sobre el resultado.
    2. Durante la evaluación individual plantear ejercicios adecuados de acuerdo con la capacidad de rendimiento de los alumnos, incorporándolos a tareas de observación de la precisión, la forma racional de la representación lingüística y matemática.
    3. El estado de desarrollo tanto de los conocimientos como de las habilidades generales y específicas.
    4. Que los alumnos deben reconocer la fuente de sus errores y que los reconozcan. Anotar errores comunes y ejemplificarlos con caso análogos y cómo remediarlos.
    5. Después de las pruebas y exámenes resolver todos los ejercicios en la forma que espera que los hayan resuelto los alumnos.
    6. Mostrar las dificultades existentes y en qué forma pueden aumentar sus esfuerzos.

7. Velar no solo porque los resultados sean correctos desde el punto de vista matemático sino por la forma de trabajo limpia e inmejorable.
8. Indicar tareas individuales a los alumnos con indicaciones para actuar y ejercicios del libro de texto.
9. Reflexionar sobre el resultado del rendimiento de sus alumnos de modo que retroalimente y mejore sus métodos de trabajo.

2 2. ESQUEMA DEL MÓDULO DE CAPACITACIÓN

El presente trabajo contiene las orientaciones metodológicas para el décimo año, que constituyen un material de apoyo para los profesores. Se ha procurado que contengan, tanto las ideas esenciales de la concepción general de la matemática, cuanto las ideas de carácter general que están relacionadas con todas las unidades o con algunas de ellas.

Esta presentación se la ha organizado por unidad y ésta a su vez por unidad temática. Dentro de cada unidad se ha clasificado de la siguiente manera la presentación:

- **Introducción.- Donde se explican las características generales de la unidad en relación con la nueva concepción de la matemática que presenta la Reforma Curricular, poniendo de manifiesto los cambios más significativos en el contenido y en el tratamiento metodológico.**
- **Composición de la Unidad.- Aquí se presenta inicialmente un esquema en el que se evidencian las condiciones previas más importantes para el tratamiento de la unidad, así como los aspectos fundamentales de ella.**
- **El hilo conductor.- Constituye un conjunto de ideas que rigen el desarrollo de la unidad, y permiten determinar lo esencial y lo que esperamos lograr en los alumnos.**
- **Exigencias mínimas.- Indican el nivel mínimo que deberán alcanzar los alumnos, se las representarán por ejercicios, que orientarán con claridad lo que se espera que los estudiantes puedan hacer. Se debe indicar que no se pretende presentar ejercicios "tipo", sino ejercicios que ilustran el nivel que esperamos, sin mermar la posibilidad de trabajar de modo de lograr más con aquellos alumnos que tengan más posibilidades de desarrollo.**
- **Unidades Temáticas.- Se clasificará cada una de éstas en los puntos esenciales que se sugieren subdividir cada unidad temática. A su vez dentro de cada uno de éstos se propondrá las metodologías a seguir, así como se expondrán ejemplos de qué tipo de ejercicios presentar, y cómo resolverlos.**

3 3. TRATAMIENTO GENERAL DEL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA EN EL DÉCIMO AÑO.

4 SOBRE LAS DEMOSTRACiONES EN LA ASIGANATURA MATEMÁTICA

Por enseñar a demostrar en la educación básica se entiende "enseñar los procesos del pensamiento de búsqueda, descubrimiento y construcción de la demostración" y no enseñar a reproducir demostraciones ya elaboradas.

Bajo tal concepción, esto constituye en la educación básica una tarea pedagógica de primer orden, ya que tiene un gran valor instructivo y educativo y va más allá de la formación o preparación matemática de los jóvenes.

Enseñar a demostrar significa, ante todo, enseñar a razonar y esta es una de las tareas principales de la enseñanza general.

La realización en el aula, de las demostraciones que los profesores realizan conjuntamente con los alumnos, son una vía apropiada para que ellos reconozcan como verdaderas las proposiciones matemáticas que van a aplicar posteriormente, comprendan que para hacer la demostración es necesario fundamentar cada uno de sus pasos apoyándose en los datos que aporta la premisa del teorema, en los conceptos primarios y las proposiciones que han sido aceptadas como verdaderas (axiomas), y que constituyen el punto de partida para la construcción de la teoría, en las definiciones formuladas y en los teoremas ya demostrados.

La realización de estas demostraciones da la posibilidad de familiarizar a los alumnos con los diferentes tipos de demostración y los métodos que se utilizan para su realización.

No obstante, mediante este trabajo no se garantiza el desarrollo de habilidades de los alumnos para hacer demostraciones de forma independiente. Es indispensable que se realicen, conjuntamente con el tratamiento de los teoremas en el aula, un sistema de ejercicios matemáticos de demostración, que en cualquier tema que se trate vaya desde aquellas demostraciones más simples hasta las más complejas, atendiendo al grado de desarrollo de los alumnos, de manera que ellos vayan ganando paulatinamente una mayor independencia hasta que puedan hacer demostraciones por sí solos.

En la búsqueda de la vía para hacer la demostración de un teorema (o para resolver un ejercicio de demostración) los alumnos deben proceder de la forma siguientes:

- En primer lugar, leer cuidadosamente el enunciado de manera que puedan comprenderlo plenamente.
- Analizar si se puede reformular el teorema (o el ejercicio) de modo que resulte más fácil apreciar qué se tiene como datos y qué se quiere demostrar.

Este análisis es muy importante ya que la escritura de la proposición que se quiere demostrar en forma de implicación (si...entonces) simplifica a los alumnos el reconocimiento de los adatos y lo que se quiere demostrar.

1.11 EJEMPLO

"en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".

En forma de implicación, este teorema se enuncia así:

"Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de sus hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos".

Después de hacer el análisis completo del enunciado del teorema y su reformulación, si esto fuese necesario, los alumnos deben plantearse esta pregunta ¿De qué conocimientos (definiciones, teoremas o relaciones) puedo partir para realizar la demostración?

Puede ser que los alumnos se percaten directamente, utilizando los datos que aporta la premisa, de las definiciones o teoremas de que deben partir para llegar hasta la tesis y utilizarán en este caso el método sintético de demostración (o procedimiento heurístico "trabajo hacia delante"). El otro método que podrían emplear es el método analítico (o procedimiento heurístico "trabajo hacia atrás")

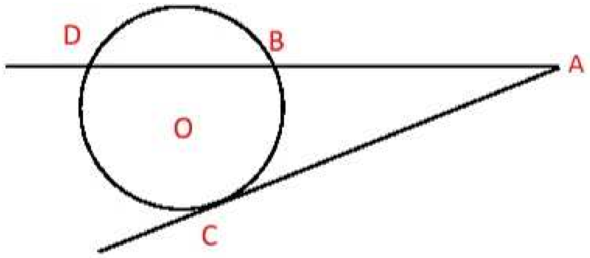
Ilustremos estos métodos con un ejemplo. Veamos el teorema siguiente:

> **Si por un punto exterior a una circunferencia se traza una recta secante y una tangente a ella, entonces el producto de las longitudes de los dos segmentos que tienen como extremo común al punto exterior y como otros extremos los interceptos de la secante con la circunferencia, es igual al cuadrado de la longitud del segmento que tiene como extremos el punto exterior y el punto de tangencia.**

Este teorema se pude presentar también como un ejercicio con la siguiente formulación:

En la figura siguiente la recta AC es secante a la circunferencia de centro O y la recta A es tangente, B, D y C son los interceptos de estas rectas con la circunferencia. Demuestre que:

$\overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AC}^2$



Frecuentemente en la práctica se trabaja en forma directa, se unen los puntos B y C; C y D, se analizan los triángulos que se forman ABC y ACD y se demuestra que son semejantes, de donde se obtiene que son proporcionales los lados homólogos, o sea, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ y de esta proporción se obtiene $\overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AC}^2$.

Pero cómo llegar a determinar que es necesario comenzar por el análisis de dos triángulos semejantes, que ni siquiera aparecen en la figura como dato.

Si nuestro objetivo es enseñar a demostrar en forma independiente, a razonar, a que los propios alumnos encuentren la vía para hacer la demostración, es indispensable sugerirles que apliquen el procedimiento de "trabajo hacia atrás", que en este ejemplo se realiza de la forma siguiente:

No es necesario demostrar $\overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AC}^2$.

De lo que conocemos anteriormente no nos parece que sea posible obtener en forma directa esta igualdad. ¿No será posible transformar esta igualdad?

Efectivamente, la igualdad se pude transformar y escribirla en forma de proporción $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, pero conocemos que la proporcionalidad entre segmentos podemos establecerla aplicando el teorema de las transversales o lo teoremas de semejanza, ya que en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales. ¿Qué triángulos tendríamos que considerar en la figura? Esto se evidencia analizando la proporción.

Supongamos que los términos de la primera razón $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son lados de un triángulo y $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ lados de otro triángulo. Entonces es necesario tener los triángulos ACD y ABC, o sea, unir los puntos C y D; B y C mediante segmentos.

Ahora está claro cómo iniciar la demostración, por qué es necesario analizar primeramente los triángulos ACD y ABC que se obtienen haciendo construcciones auxiliares y demostrar que son semejantes.

Después de utilizar el método de "trabajo hacia atrás" y determinar de dónde debemos partir, entonces se utiliza el procedimiento de "trabajo hacia delante" para hacer la demostración.

Hasta ahora nos hemos referido a demostraciones directas, en el caso de las demostraciones indirectas o por reducción al absurdo, cuyo estudio se inicia en este año, se aplica el trabajo "hacia atrás"

Se parte de considerar que se cumple la negación de lo que se quiere demostrar y marchamos hacia atrás hasta que llegamos a una contradicción con algún dato de la premisa, con una definición, con un axioma o un teorema conocido anteriormente. Luego, lo supuesto inicialmente es falso, por lo que se cumple la tesis.

5 UNIDAD 1

1.12 POTENCIAS

1.12.1 INTRODUCCIÓN

Esta unidad se ha concebido con un doble objetivo: que los alumnos desarrollen habilidades en el cálculo con potencias y radicales, y además que conozcan las propiedades fundamentales de algunas funciones potenciales ($y = x^3$; $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$) a partir de una representación mental clara de las mismas.

El año anterior se han estudiado las potencias de exponente entero y sus propiedades, se ha calculado la raíz cuadrada de números positivos y la cúbica de cualquier número real; se estudió el concepto de función como una correspondencia entre dos conjuntos y se analizaron las propiedades de las funciones $y = x$; $y = x^{-1}$; $y = x^2$, al igual que la influencia que producen los sumandos y factores sobre los gráficos de las mismas.

En la presente unidad de décimo grado se amplía el concepto de potencia de exponente entero a potencia de exponente racional, se define la raíz n-ésima de un número real y se introduce el trabajo con las operaciones con radicales desarrollando habilidades en el cálculo de las mismas. Esto último se vincula con la unidad de trabajo con variables, se concluye este trabajo con la racionalización de denominadores y la resolución de ecuaciones con radicales donde se aplicará lo estudiado en las operaciones con radicales. También en la unidad se tratan las potencias con exponente real, solo para que se tenga la conciencia de su existencia.

Se amplía el concepto de función al considerarlo como un conjunto de pares ordenados y este concepto ampliado se utilizará en años superiores en el estudio de las funciones potenciales.

Desde el comienzo de la unidad se deben ir creando las condiciones para el estudio de las funciones a partir del trabajo con las imágenes, lo cual constituye un cambio en el tratamiento que se les venía dando a las mismas; teniendo en cuenta el comportamiento de las imágenes se deducen las propiedades y se vinculan éstas con la representación gráfica de la función. Atendiendo a esto, para tratar la función $y = x^3$ se determinan valores de la imagen y con ello se analizan las propiedades de la función y así posteriormente se obtiene el gráfico de la misma, vinculando de esta forma las propiedades y la representación gráfica.

En esta unidad se ampliara las propiedades de las potencias, con exponente racional, para lo cual se iniciará con un breve repaso.

1.12.2 COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

1.12.3 HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta un[...]o con potencias y radicales y aplicarlas en la resolución de ecuaciones con radicales.

Debe lograrse, además, que los alumnos comprendan el concepto conjuntista de función y conozcan algunos eje[...]

1.12.4 EXIGENCIAS MINÍMAS DE LA UNIDAD

Para lograr lo que se ha definido como esencial es necesario que los alumnos puedan:

- Comprender el concepto de raíz n-ésima y reconocer cuándo existe la raíz n-ésima de un número real.
- Aprender la definición de potencia de exponente racional con base no negativa, las propiedades de estas potencias y desarrollar habilidades en el cálculo con ellas.
- Reconocer las propiedades de los radicales como un caso particular de las propiedades de la potenciación y desarrollar habilidades en la simplificación y el cálculo con radicales.
- Dominar los procedimientos para racionalizar denominadores monomios y binomios y aplicarlos al cálculo.

A continuación se indica un sistema de ejercicios que ejemplifican las exigencias mínimas que sobre el contenido de esta unidad debe lograrse con todos los alumnos.

1. Calcular

   a. $3\sqrt{64}$

b. $-2\sqrt[3]{-8}$
c. $\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{27}$
d. $\dfrac{4x+\sqrt[5]{x}}{x}$ para $x=\dfrac{1}{32}$

2. ¿Para qué valores de x están definidas las siguientes raíces?

a. $\sqrt{x+6}$
b. $\sqrt[5]{2x+4}$
c. $\sqrt[4]{x^2+5x+6}$
d. $\sqrt[3]{x-x^3}$

3. Transforme en potencias

a. $\sqrt[4]{6}$

b. $\sqrt[5]{3^4}$

c. $\sqrt{\left[\dfrac{1}{3}\right]^4}$

d. $\sqrt[3]{x^3}$

4. Transforme en raíz

a. $4^{1/2}$
b. $6^{3/4}$
c. $[1/5]^{2/3}$
d. $(-8)^{5/7}$

5. Efectúe las operaciones indicadas. Considere positivas todas las variables.

a. $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{5}}$
b. $a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}$
c. $y^{\frac{3}{5}}\div y^{\frac{7}{6}}$
d. $m^{\frac{6}{8}}\div n^{\frac{6}{8}}$
e. $\left[a^{\frac{a}{4}}\right]^{\frac{5}{6}}$

f. $\left[x^{\frac{2}{9}}+y^{\frac{1}{4}}\right]x^{\frac{1}{4}}$
g. $\left[x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right]\dfrac{1}{4}$
h. $\left[a^{\frac{1}{9}}+a^{-\frac{1}{2}}\right]^2$
i. $(x+3)\left[x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{9}}y+y\right]$

6. Determina el valor de x en las ecuaciones.

a. $x = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{8}}$

b. $5^{x} = 5^{\frac{9}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}$

c. $3^{\frac{1}{9}} \cdot x = 3^{\frac{9}{5}}$

d. $7^{\frac{2}{9}} \cdot x = 14^{\frac{2}{9}}$

e. $x \cdot 16^{\frac{9}{8}} = 4^{\frac{1}{2}}$

7. Calcule aplicando las propiedades de las potencias y exprese las respuestas como raíz. Considere las variables positivas.

   a. $\sqrt[5]{y} \times \sqrt[15]{y^3}$
   b. $\sqrt[6]{x\sqrt{x^2}}$
   c. $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{b^6}$

8. Escriba en su forma más simple las siguientes expresiones. Considera que $x > 0$.

   a. $\sqrt{25x}$
   b. $5\sqrt[3]{\dfrac{a}{25}}$
   c. $\dfrac{a}{96}\sqrt[4]{16x}$

9. Calcule

   a. $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5{,}5\sqrt{5}$
   b. $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} - 6\sqrt[3]{x} + 9\sqrt[4]{y}$; $(\mathbf{y} > \mathbf{0})$
   c. $\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} - 5\sqrt{x} + 4\sqrt[6]{x}$; $(x > 0)$
   d. $\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$
   e. $2\sqrt{x^2y} - \sqrt{9x^2y} + 16\sqrt{xy^2} - 4\sqrt{xy^2}$; $(x, y > 0)$
   f. $\sqrt{\dfrac{1}{a}} + \sqrt{\dfrac{1}{a^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a^3}$; $(a > 0)$
   g. $5a^2\sqrt{\dfrac{1}{a}} + 3\sqrt{a^3}$; $(a > 0)$
   h. $\left(8\sqrt{x} - 5\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right)$; $(x, y > 0)$
   i. $\left[\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}\right]^2$

10. Simplifique las siguientes expresiones. Considere $x > 0$

   a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$
   c. $\dfrac{4 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e. $\dfrac{8-\sqrt{x}}{8+\sqrt{x}}$

f. $\dfrac{\sqrt{b+1}}{b-1}-\dfrac{\sqrt{b-1}}{b+1}+\dfrac{2}{\sqrt{b^2-1}}$ $(|b|>1)$

1.12.5 ORIENTACIONES PARA EL DESARROLLO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

La presente unidad empieza con un repaso inicial de potencias y raíces para de aquí derivar dos grandes puntos, muy relacionados entre sí: el concepto de potencia de exponente racional, el de radical y sus respectivas propiedades y todo esto converge en el estudio de algunas funciones potenciales.

De esta estructura se derivan entonces cuatro unidades temáticas que serán tratadas en estas indicaciones metodológicas:

1. Potencias y raíces
2. Potencia de exponente racional. Propiedades.
3. Radicales. Operaciones con radicales

1. POTENCIAS Y RAÍCES

Son imprescindibles para lograr el objetivo central de la Unidad: el trabajo con potencias de exponente entero y el concepto de raíz n-ésima, como generalización del ya conocido de raíz cuadrada y de raíz cúbica, es por esto que se ha considerado los siguientes puntos esenciales:

- Repaso de: potencias con exponentes enteros y de propiedades de potencias con exponente entero
- La raíz n-ésima. Simplificación del índice del radical.

1.1 Repaso de potencias con exponente

Para el tratamiento de este punto se sugiere 1 hora. El repaso puede comenzar con una ejercitación análoga a la siguiente

EJEMPLO

1. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{9^2}=$

2. $(-2)^5\times 2^3\times(-2)^{-4}=$

Se sugiere para ampliar el concepto un ejemplo como el siguiente en el se incluye preguntas que hagan reflexionar al alumno sobre la definición de potencia, el carácter de las propiedades y cómo han sido ampliadas hasta el momento.

EJEMPLO

- ¿Qué significa 4^3? ($4 \cdot 4 \cdot 4$, el producto de 4 por sí mismo tres veces).
- ¿y 4^{-3}? ($\frac{1}{4^3}$, el recíproco de 4^3).

Esta situación se presta para que en un breve comentario el profesor destaque que de esa forma se ha ampliado la definición de potencia de exponente natural a exponente entero y cómo la nueva definición es compatible con la anterior pues se siguen cumpliendo las propiedades (puede destacar por ejemplo que).

EJEMPLO

$$4^{-3} \times 4^3 = \frac{1}{4^3} \times 4^3 = 1 = 4^0 = 4^{-3+3}.$$

Además de este breve comentario, es conveniente que se deje trabajar a los alumnos en la aplicación de propiedades y reconocimiento de las potencias. Para facilitar el trabajo, el profesor puede elaborar un cuadro como el siguiente (en papel, cartulina, en la pizarra, antes de iniciar la clase) en el que se resuman las propiedades y las definiciones de esta forma el trabajo puede ser más independiente.

Las potencias de exponente entero cumplen las propiedades siguientes:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ;\ a \neq 0$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$$

Para la elaboración de este repaso y proponer tareas a los alumnos se pueden utilizar ejercicios como el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

a. $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$

b. $\frac{12^3}{6^3} = \left(\frac{12}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$

Con relación a ejercicios de cálculo con potencias se puede comenzar con ejercicios de cálculo simple en los cuales sea posible obtener los resultados de una forma sencilla ya sea calculando las potencias o aplicando las propiedades de las mismas hasta llegar a ejercicios donde la aplicación de las propiedades nos dé una forma ventajosa para el cálculo.

EJEMPLO

$\dfrac{5^{12} \cdot 4^{8}}{20^{10}}$ el cual es difícil de calcular, pero si aplicamos las propiedades tenemos: $\dfrac{5^{12} \cdot 4^{8}}{4^{10} \cdot 5^{10}} = \dfrac{5^{2}}{4^{2}} = \dfrac{25}{16}$.

A continuación se sugiere realizar algunos incisos del siguiente ejercicio.

Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas? Justificar su respuesta.

a. $7^{2} - 7^{3} = 49^{6}$
b. $\dfrac{6^{5}}{6^{2}} = 6^{3}$
c. $(2^{5})^{2} = 2^{10}$
d. $(-6)^{0} = 0$
e. $(4^{-1}) = -4$
f. $6^{2} \times 2^{2} = 12^{4}$
g. $2^{-2} \times 2 = \dfrac{1}{2}$
h. $4^{-6} \times (4^{2})^{3} = 1$
i. $\dfrac{5^{-3} \times 5^{4}}{5^{2}} = 5$
j. $\dfrac{6^{-6} \times 6^{8}}{3^{2}} = 4$

Como motivación para la unidad el profesor puede conversar con sus alumnos acerca de que en esta unidad se trabajará con potencias, que ampliarán sus conocimientos y que en particular podrán llegar a definir potencias con exponentes más generales que los enteros, como son las potencias de exponente racional.

1.2 La raíz n-ésima. Simplificación del índice radical

Para el tratamiento de este punto se sugieren 2 horas. En la ampliación de potencias juega un papel fundamental la definición de raíz n-ésima, por ello es necesario incluirla en estas clases. En esta definición es necesario establecer las condiciones para la existencia de las raíces de índice par e impar, es conveniente que los alumnos comprendan la diferencia que existe y su causa en los casos particulares ya conocidos por ellos (raíz cuadrada y raíz cúbica).

A este fin deben comprender:

- La raíz cuadrada no existe siempre. Existe únicamente raíz cuadrada de números positivos. Sin embargo, si a > 0, existen dos números $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ y cuyo cuadrado es a.
- La raíz cúbica existe siempre y es una sola.

Estas ideas pueden lograrse con un repaso muy simple en el cual los alumnos calculen raíces cuadradas y cúbicas y fundamenten su respuesta, por ejemplo:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ por que } 3^2 = 9.$$
$$\sqrt[3]{64} = 4 \text{ porque } 4^3 = 64.$$

Con ejemplos como estos ya puede irse destacando que la raíz cuadrada (o cúbica) de un número puede entenderse como la solución de una ecuación de los tipos $x^2 = a$ o $x^3 = b$ donde el exponente de la potencia es el índice del radical. En ese caso $x^2 = 9$ tendría dos soluciones $x = 3$ y $x = -3$ pues tanto 3^2 como $(-3)^2$ son iguales a 9. No sucede así con $x^3 = 64$ que tiene una solución única $(x = 4)$.

Pueden también destacarse algunas limitaciones que existen, por ejemplo:

$\sqrt{-4}$ no existe pues la ecuación $x^2 = -4$ no tiene solución en los reales ya que todo número elevado al cuadrado es positivo.

Sin embargo, en el caso de la raíz cúbica siempre existe independientemente del signo de la cantidad subradical.

En el marco de este repaso se puede aprovechar para llamar la atención de los alumnos sobre el símbolo $\sqrt{\ }$ (radical) y destacar que representa solo una de las raíces a la que se llama raíz aritmética o principal y que en el caso de las cuadradas es positiva.

Este puede ser un momento oportuno para que el profesor llame la atención sobre posibles errores como: $\sqrt{64} = \pm 8$ e insistir en que el signo $\sqrt{\ }$ es siempre la raíz positiva.
$\sqrt{64} = 8$, $(-8 = -\sqrt{64})$.

En este momento se puede aprovechar para plantear a los alumnos un ejercicio que conduzca a la relación: $\sqrt{a^2} = |a|$, por ejemplo se puede proponer

EJEMPLO

$\sqrt{(-2)^2}$ (Aquí surgirá la tendencia errónea) $\sqrt{(-2)^2} = -2$ y se debe aprovechar para resaltar que $\sqrt{\ }$ representa la raíz positiva de $(-2)^2 = 4$, es decir, 2. De esta forma se llega a: $\sqrt{(-2)^2} = 2$. ¿y $\sqrt{a^2}$? los alumnos seguro tienden a contestar $\sqrt{a^2} = a$. En este caso se debe volver sobre el ejemplo y destacar que si a es negativo se obtendrá $\sqrt{a^2} = -a(a < 0)$. Se debe concluir entonces que

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Después de logrado el primer paso referente a las raíces cuadradas y cúbicas el momento siguiente corresponde a la definición de raíz n-ésima. Para lograr esto es necesario que los alumnos hayan interiorizado la idea de raíz cuadrada o cúbica como solución de una ecuación; entonces será fácil definir la raíz n-ésima de a como solución de la ecuación

$$x^n = a.$$

Se debe llamar la atención que al elaborar la definición lo que se hace es inducirla a partir de algunos casos particulares ya conocidos. Esto no significa que se haya deducido la definición pues las definiciones no se deducen ni demuestran sino simplemente se establecen de modo que contengan las propiedades esenciales del concepto.

Después de establecida la definición se puede hacer el análisis de cuándo existe la raíz n-ésima, en forma análoga al que se hizo con la raíz cuadrada y la cúbica. Para esto se puede apoyar en el ejemplo siguiente .

EJEMPLO

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[5]{-243} = -3$

$\sqrt[4]{-16}$ *no existe*

A continuación se debe enunciar sin demostrar la siguiente propiedad:

Si ***a*** es un número real positivo, $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo que elevado a la potencia ***n*** es igual a ***a.***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

En este momento se aprovecha para presentar el símbolo de raíz n-ésima $\sqrt[n]{}$ y se destacará que en el caso de n par, esto representa una sola raíz que es la raíz aritmética o principal y es la positiva; también se ha de plantear que es erróneo escribir expresiones como $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ pues el signo $\sqrt[4]{}$ solo representa la raíz positiva.

Debe quedar bien establecido que para cualquier número real para el cual $\sqrt[n]{a}$ está definida se cumple que:

$$\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a.$$

Al igual que en el análisis que se realizó para plantear que $\sqrt{a^2} = |a|$ se deben analizar dos o tres ejemplos para generalizar que $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ y para reafirmar esto se puede utilizar el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

$$\sqrt[4]{(-15)^4} = |-15| = 15$$

$$\sqrt[8]{\left(-\frac{3}{5}\right)^8} = \left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$$

Realizado el anterior trabajo con la raíz n-ésima, se está en condiciones de iniciar el estudio de las propiedades de los radicales, en este caso la simplificación del índice del radical. Es conveniente que el profesor conozca que esta propiedad, que en este momento solo se utilizará con la intención de que el alumno inicie el desarrollo de habilidades en la simplificación de radicales, es completamente necesaria para definir la potencia de exponente racional, lo cual se hará en la siguiente unidad temática.

Para comprender lo anterior basta que el profesor esté consciente de que, por ejemplo, $3^{1/2}$ es igual a $3^{2/4}, 3^{3/6}$, etc., pues:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n} = \cdots$$

Por lo anterior es que se ha incluido dicha propiedad en este repaso, a modo de profundización, aunque este punto de vista teórico no debe ser planteado en este momento a los alumnos y limitarse a presentarlo como una propiedad que permite simplificar.

Para introducir este procedimiento el profesor puede mediante un breve comentario hacer ver a los alumnos la comodidad de trabajar los radicales con los índices menores posibles.

Para ello pueden utilizarse expresiones como las siguientes:

$$\sqrt[12]{3^{24}} \text{ y } \sqrt[4]{3^8};\ \sqrt[6]{\boldsymbol{2^{18}}} \ \boldsymbol{y}\ \sqrt[3]{2^9}$$

las cuales pedirá calcular y comparar los resultados, obteniéndose que:

$$\sqrt[12]{3^{24}} = \sqrt[4]{3^8} = 3^2 \ \text{ y } \ \sqrt[6]{2^{18}} = \sqrt[3]{2^9} = 2^3.$$

En este momento se les hace ver que entre el exponente y el índice del radical existe un factor común y que si se dividen ambos por este factor el resultado final no se altera; esto mismo sucedería si se multiplican el exponente del radicando y el índice del radical por un mismo factor lo cual se puede observar si invertimos la cadena de igualdades obtenidas, es decir,

$\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[12]{3^{24}} = 3^2$ y $\sqrt[3]{2^9} = \sqrt[6]{2^{18}} = 2^3$

por lo que parece posible poder plantear que:

> Dada $\sqrt[n]{a^m}$ con $a > 0$ entonces se cumple que $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$..

Se les puede plantear a los alumnos que para algunos casos en que la base sea negativa también se cumple esta propiedad, solo que se tiene que cumplir una condición más y es que n y kn tengan la misma paridad y ambas raíces existan; esto se puede mostrar considerando un ejemplo como el siguiente:

EJEMPLO

$\sqrt[16]{(-2)^8} = \sqrt[4]{(-2)^2}$; $\sqrt[15]{(-4)^9} = \sqrt[5]{(-4)^3}$.

Lo cual no se cumple cuando n y kn no tienen la misma paridad como por ejemplo

$\sqrt[3]{-1} \neq \sqrt[6]{(-1)^2}$.

Sugerimos no abusar en el trabajo con bases negativas tal como se indica al inicio del tratamiento de este punto esencial.

Para la ejercitación se pueden resolver los ejercicios siguientes.

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

3. $\sqrt[3]{-147}$

4. $\sqrt[5]{32}$

5. $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}$

6. $\sqrt[3]{-0{,}125}$

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática Potencias y Raíces.

Se sugiere se realicen ejercicios en los que el estudiante deba:

- Calcular y simplificar potencias aplicando propiedades.
- Calcular raíces.
- Simplificar radicales.

2. POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL. PROPIEDADES

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugieren 8 horas, y en ella se pueden distinguir dos puntos esenciales:

- El concepto de potencia de exponente racional.
- El cálculo con potencias de exponente racional, aplicando las propiedades correspondientes.

2.1 Concepto de Potencia de Exponente Racional.

Para este punto esencial se dispone de dos horas. Con el tratamiento de este punto esencial se pretende ampliar la definición de potencia que conocen los alumnos hasta las potencias de exponente racional. Es importante prestar atención al hecho de que la definición que se elabora no está limitada al caso en que la base sea positiva, aunque no es objetivo del curso insistir en los casos límite para los que la definición no puede hacerse, ni "abusar" de las bases negativas; lo que se quiere es poder escribir expresiones como

$$(-8)^{1/3} = -2 \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Que aparecen con frecuencia en la práctica, por lo que en las bases negativas se tratarán fundamentalmente los exponentes con denominadores impares.

Para realizar la ampliación del concepto de potencia es conveniente activar el concepto que hasta el momento dominan los alumnos, potencia de exponente entero, y aprovecharlo para motivar el concepto que se va a introducir.

Esto ha sido trabajado en las clases iniciales, por lo que solo queda motivarlos en lo nuevo que van a aprender.

Para ello se pueden realizar algunas preguntas como las siguientes:

- ¿Hasta qué clase de exponente se han definido las potencias? ¿En qué orden se ha hecho?
- ¿Qué falta?
- ¿Qué interpretación se le puede dar a expresiones como $2^{1/2}$, $3^{\sqrt{2}}$, etcétera?
- ¿De existir potencias como las anteriores, se cumplirán también las propiedades ya conocidas?

Una vez recordada la cadena de inclusión de los conjuntos numéricos ($\subseteq\subset \wedge\subset\angle\subset\nabla$), analizado que se han definido las potencias hasta exponente entero, es posible ver que faltan por definir las potencias de exponente racional y real e informarles a los alumnos que en estas clases nos ocuparemos de definir las potencias de exponente racional.

Para ello hay que lograr darle sentido a expresiones como $3^{1/2}$ y $4^{2/5}$, de forma tal que la definición dada sea compatible con la definición de potencia de exponente entero. Esto puede hacerse por dos vías:

1. El profesor puede establecer la definición y analizar que la misma es compatible con la definición de exponente entero.
2. Si las condiciones del grupo son favorables y el trabajo previo lo permite puede elaborarse la definición siguiendo la siguiente idea:

Se sabe por ejemplo que $5 = 5^{(1/4)\cdot 4}$ pues $\frac{1}{4}\cdot 4 = 1$. Como se quiere que se cumplan las propiedades de las potencias ya conocidas, de tener $5^{1/4}$ algún sentido debe cumplirse que: $5 = 5^{(1/4)\cdot 4} = \left[5^{1/4}\right]^4$.

El problema entonces puede plantearse de esta forma:

Se quiere encontrar qué valor debe tener la base de una potencia, a la que llamaremos A, para que se cumpla que: $A^4 = 5$.

Pero este problema tiene de entrada una solución, pues, según la definición de raíz n-ésima tenemos que: A = $\sqrt[4]{5}$ y conocemos que: $\left[\sqrt[4]{5}\right]^4 = 5$.

Esto sugiere entonces que $5^{1/4}$ pudiera definirse como $\sqrt[4]{5}$, es decir: $5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$.

Análogamente, si se tiene $5^{3/4}$ y se quiere que se mantengan las propiedades de las potencias ya conocidas para exponente entero, debe cumplirse que: $5^{3/4} = \left[5^3\right]^{1/4}$ y entonces,

$$\left[5^3\right]^{1/4} = \sqrt[4]{5^3}.$$

Debería definirse entonces:

$$5^{9/4} = \sqrt[4]{5^9}$$

Aquí se debe dirigir la atención de los alumnos hacia la relación que existe entre el numerador y el denominador del exponente de la potencia y de los términos del radical.

- El denominador es el índice del radical.
- El numerador es el exponente del radicando.

En este momento ya se puede establecer en general que las potencias de exponente racional se pueden expresar en términos de radicales siguiendo la idea anterior. Por ejemplo $3^{1/2} = \sqrt{3}$; $4^{2/5} = \sqrt[5]{4^2}$.

Aquí se debe destacar que hemos trabajado solo con bases positivas y esto es porque las raíces tienen limitaciones cuando los radicandos son negativos, hay que establecer también esa limitación en la definición de potencia de exponente racional.

Por tanto definiremos finalmente que:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{Con } a > 0;\ m, n \in \wedge,\ n > 1$$

Esto es algo aquel deben fijar los alumnos.

Esta definición tiene sentido pues incluye a la anterior ya que si:

m es un entero, n natural y m múltiplo de n entonces $\dfrac{m}{n}$ es un número entero

($m = kn$ con $k \in \wedge$)

$$a^k = a^{\frac{k \cdot n}{n}} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n}} = a^k$$

Además se pueden simplificar el índice y el exponente ya que como $\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}$, debe ser que $a^{m/n}=a^{k/kn}$

$$a^{\frac{km}{kn}}=\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}.$$

Para ilustrar esta definición se puede utilizar el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

$$\sqrt[4]{3^8}=3^{\frac{8}{4}}=3^2$$

El profesor debe tener presente que la definición dada de la potencia de exponente racional $a^{m/n}$ puede también extenderse a bases negativas excepto en los casos en que n sea par.

Si n es par puede suceder por ejemplo que:

EJEMPLO

- $(-1)^{1/2}=\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-1}$ no está definida
- $(-5)^{2/4}=(-5)^{1/2}=\sqrt{-5}$ y $\sqrt{-5}$ no está definida.

Obsérvese en el segundo ejemplo que antes de usar la definición de potencia de exponente racional, se simplificará completamente el exponente. Esto es así pues de lo contrario se obtienen contradicciones como por ejemplo:

$(-5)^{2/4}=\sqrt[4]{(-5)^2}=\sqrt[4]{25}$ que tiene sentido

$(-5)^{1/2}=\sqrt{-5}$ que no tiene sentido.

Pero como $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, tiene que cumplirse que $(-5)^{2/4}=(-5)^{1/2}$. Eso solo se puede garantizar si se simplifica primero

Es por esto que en las potencias de base negativa, para poder aplicar la definición hay que simplificar primero el exponente hasta obtener la fracción irreducible.

Esta situación se le debe hacer conocer a los alumnos mediante ejemplos, pero sin hacer insistencia en la misma pues no es objetivo del programa profundizar en el trabajo con bases negativas.

Obsérvese que en el ejemplo siguiente que, aunque estamos en presencia de una ecuación con radicales, la idea es que lo hagan por reflexión lógica, en este caso usando la definición de raíz n-ésima.

EJEMPLO

Hallar el valor de x de modo que se cumpla la siguiente igualdad

$\sqrt[6]{x^2-6x+9}=2$

<u>Resolución</u>

$\sqrt[6]{x^2-6x+9}=2$ equivale a que

$$2^6=x^2-6x+9 \qquad \left[\sqrt[n]{a}=b \leftrightarrow b^n=a\right]$$
$$64=x^2-6x+9$$

$x^2-6x-55=0$
$(x-11)\,(x+5)=0$

Hay dos soluciones: $x_1=11$ y $x_2=-5$.

En este problema es importante, si se escoge otra vía de solución, usar correctamente las relaciones establecidas, pues pueden perderse soluciones.

EJEMPLO

Hallar el valor de x de modo que se cumpla la siguiente igualdad

$\sqrt[6]{x^2-6x+9}=2$

<u>Resolución</u>

$\sqrt[6]{(x-3)^2}=2$ Como $(x-3)^2>0$ se puede simplificar el radical

$\sqrt[3]{|\,x-3\,|}=2$
$|\,x-3\,|=2^3$ aplicando la definición 1
$|\,x-3\,|=8$

$$x-3=8 \quad \text{o} \quad x-3=-8$$
$$x_1=11 \quad \text{o} \quad x_2=-5$$

Si no se considera el módulo se pierde la solución negativa.
En el ejemplo siguiente se evidencia esta observación.

EJEMPLO

Hallar el valor de x tal que

$\sqrt[4]{(x+2)^2} = 1$

Si se simplifica primero el índice del radical debe tenerse en cuenta que para que la expresión resultante tenga sentido, el radicando tiene que ser positivo por tanto la igualdad correcta es:

$$\sqrt[4]{(x+2)^2} = \sqrt[4]{|x+2|^2} = \sqrt{|x+2|}\,.$$

2.2 Cálculo con Potencias de Exponente Racional

Para este punto esencial se dispone de seis horas. Lo esencial que el profesor debe lograr en este punto es el cálculo con las potencias de exponente racional por lo que la vía metodológica fundamental es la ejercitación, la cual debe ser de una forma activa y lo más independientemente posible, pues este contenido no es completamente nuevo para los alumnos.

En estas clases, aunque no es esencial, se dedicarán al final dos de ellas a completar el concepto de potencia, en este caso de exponente irracional.

En el punto esencial anterior al hacerse la ampliación a potencias de exponente racional se había considerado que las propiedades se cumplían pero no se enunciaron las mismas.

Una vía posible para el tratamiento de las propiedades es indicar a los alumnos que escriban simbólicamente éstas, considerando que los exponentes pertenecen a Q y que las enuncien con sus palabras; el profesor debe manejar la situación para que este enunciado quede de la forma más simple posible.

Una de las demostraciones de estas propiedades se debe realizar en clase,. Para el trabajo con la demostración el profesor puede seguir las etapas que se orientan sobre la Resolución de ejercicios y Problemas en la introducción de estas indicaciones metodológicas. No obstante a lo anterior, el mayor tiempo debe dedicarse al desarrollo de habilidades de cálculo aplicando esas propiedades, aunque el resto de estas demostraciones, por sencillas que son, pueden ser analizadas por los alumnos en actividad extraclase.

Para la ejercitación se debe disponer de ejercicios donde se aplican directamente las propiedades, de los ejercicios que constituyan aplicación directa de las propiedades pero con un mayor nivel de dificultad; de los ejercicios donde se vayan preparando condiciones para trabajo con radicales; ejercicios donde se haga la evaluación de expresiones e integren la definición de potencia de exponente racional con el cálculo de raíces y la evaluación de términos.

En estos ejercicios es conveniente incluir uno como el siguiente ejemplo: donde, además de aplicar propiedades, al final para encontrar soluciones el alumno tiene que utilizar reflexiones lógicas pues no hay otro procedimiento para ellos.

EJEMPLO

Hallar el valor de x en la siguiente expresión:

$$\left[\left[\frac{1}{3}\right]^{x}\right]^{6} = x^{2}$$

Resolución

$$\left[\frac{1}{3}\right]^{6x} = x^{2}$$

Usando un procedimiento heurístico, se trata de reducir el problema a otro ya conocido; o las bases son iguales o los exponentes son iguales. En ese problema una vía era igualar los elementos desconocidos. Se trata entonces de hacerlo ignorando que las bases son diferentes. En este caso: $6x = 2$; $x = \frac{1}{3}$.

Este valor puede ser una solución; mediante una comprobación se concluye que efectivamente lo es : $\left[\frac{1}{3}\right]^{6\times\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{3}\right]^{2} = \frac{1}{9}$

Aunque en este caso la solución es única, el alumno no tiene aún conocimientos para demostrarlo.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Se sugiere se realicen ejercicios donde se:

- Escriba potencias como raíces y viceversa.
- Aplique propiedades de las potencias.

3. RADICALES. OPERACIONES CON RADICALES.

En esta unidad temática se distinguen tres puntos esenciales:

- Simplificación de radicales
- Cálculo con radicales.

En ella se hace un estudio más profundo de los radicales del que se ha hecho hasta el momento; se estudian también las ecuaciones con radicales pero limitadas al caso en que solo hay que realizar una elevación al cuadrado y que conduzcan a resolver una ecuación lineal o cuadrática.

3.1 Simplificación de Radicales.

Para este punto esencial se dispone de 6 clases. Lo esencial a lograr en él es que los alumnos sean capaces de reconocer si un radical está o no simplificado, y en este último caso simplificarlo, así como que puedan introducir factores en un radical y reducir radicales a un índice común.

Para poder simplificar radicales los alumnos deben conocer previamente las propiedades de los radicales e inferir éstas de las propiedades de las potencias de exponente racional antes estudiadas:

- Producto de potencias de igual exponente
- Cociente de potencias de igual exponente
- Potencia de potencia

Se sugiere entonces concluir a través de una lámina lo siguiente:

1. Si ***a*** es un número real positivo, $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo que elevado a la potencia ***n*** es igual a ***a.***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a .$$

Además, si n es impar

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} .$$

5. Si ***a*** y ***b*** son números reales positivos,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{\mathbf{b}}.$$

Para ello se pueden considerar las potencias con exponente $\frac{1}{n}$ y expresarlas como raíces mediante la definición de potencias de exponente fraccionario.

Como vía metodológica el profesor puede apoyarse en insistir en la condición de que se está trabajando con radicales de radicando positivo. Para darle mayor generalidad a las propiedades se debe evidenciar que también se cumplen pero solo si las expresiones que resultan tienen sentido y las operaciones que intervienen están definidas.

En los ejercicios, deben estar claramente especificados los valores de m y n, y deben incluirse algunos con la condición de que el radicando sea mayor o igual que cero. Esto puede aclararse a los alumnos si el profesor lo estima necesario.

Después de inducidas las propiedades de los radicales se puede plantear cuándo se considera que un radical está simplificado y mostrar ejemplos de radicales que estén o no simplificados.

Una vez establecidas estas condiciones se debe analizar cómo se utilizan las propiedades de los radicales en la simplificación de los mismos, para lo cual el profesor se debe apoyar en ejemplos que le permitan mostrar nuevamente la reducción del índice del radical .

El ejemplo siguiente permite mostrar la extracción de factores del radical y en él se tiene en cuenta que pueden darse dos casos diferentes: que el factor sea una potencia cuyo exponente es múltiplo del índice del radical (son raíces exactas) o que no lo sea; en este último caso el exponente del radicando debe ser mayor que el índice del radical para poder extraer factores del mismo. Tanto en un caso como en el otro el profesor debe apoyarse en las propiedades de los radicales (multiplicación de radicales de igual índice) como se ilustra en el ejemplo.

EJEMPLO

a. $\sqrt{\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{2^4}{3^4}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\times\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

b. $\sqrt{\frac{8}{45}}=\sqrt{\frac{2^2\times 2}{3^2\times 5}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}.$

En el caso de la extracción de factores del radical cuyos exponentes sean múltiplos del índice del radical, como muestra el ejemplo inciso a., se sugiere indicar a los alumnos que descompongan convenientemente el radical en un producto de radicales, todos con el mismo índice, calcular dichas raíces y por último efectuar el producto.

En el inciso b) de este ejemplo se trata el caso en que el exponente no es múltiplo del índice pero sí mayor que este, el procedimiento que puede seguir el profesor es similar al anterior, lo único que el factor que tiene el exponente mayor que el índice lo descompone en factores de forma tal que queden exponentes que sean múltiplos del índice. Aquí el profesor debe hacer observar a los alumnos que si se divide el exponente entre el índice, el cociente que se obtiene es el exponente del factor que sale del radical y el resto es el exponente del factor que queda dentro del radical y que es así cómo se realiza en la práctica

También debe el profesor llamar la atención sobre el hecho de que esta regla es aplicable a los casos en que el exponente sea múltiplo del índice, teniendo en estos que el resto es cero.

Como un procedimiento inverso a la extracción de factores del radical se puede explicar la introducción de factores en el radical. Para ello el profesor puede apoyarse en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

Aquí se debe tener presente reactivar que $a = \sqrt[n]{a^n}$ pues es lo que se utiliza básicamente para introducir factores en el radical.

En la explicación el profesor puede orientar la conveniencia de expresar el factor exterior como una raíz con el mismo índice que el radical por el cual se multiplica y después efectuar el producto de estas raíces de igual índice; en este momento el profesor debe hacer observar a los alumnos que al introducir un factor en el radical este queda elevado a un exponente igual que el índice del radical por lo que en la práctica se escribe dicho factor dentro del radical elevado al exponente igual al índice. Si el factor está elevado a un exponente diferente de uno al introducirlo queda entonces con un exponente que es el producto del índice por su exponente original, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Con los ejemplos se puede ilustrar la simplificación y la introducción de factores en el radical las cuales pueden ser analizadas por los alumnos en forma independiente o para fijar todo lo tratado.

Ahora se debe tratar la reducción de radicales a un índice común y la comparación de radicales. Para motivar esta parte el profesor puede plantear que en la práctica se nos presentan trabajos con radicales de índices diferentes y que para operar con ellos es necesario tenerlos expresados en el mismo índice.

Una vía posible para el tratamiento de este contenido es reactivar cómo expresar fracciones de distintos denominadores con un denominador común debido a que el procedimiento para ello es similar al proceso de expresar radicales con el mismo índice, como se procede en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Expresar las raíces $\sqrt[9]{a^2}$ y $\sqrt[6]{a}$ con un mismo índice.

Resolución

Se les recuerda que con la propiedad de los radicales $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ puede ampliar o simplificar el índice del radical, por lo que utilizando la misma se pueden expresar dichos radicales con el mismo índice.

Este índice ha de ser un múltiplo común entre 9 y 6, luego es conveniente buscar el menor múltiplo común entre ellos, que en este caso es 18. Una vez buscado el mcm y el índice del radical que se va a ampliar, se aplica la propiedad de los radicales.

Se tiene entonces que:

$$\sqrt[9]{a^2} = \sqrt[9\cdot 2]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[18]{a^4}$$

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[6\cdot 3]{a^{1\cdot 3}} = \sqrt[18]{a^3}$$

El ejemplo siguiente se puede utilizar también para ilustrar este procedimiento. Se puede aprovechar la oportunidad para plantear que una vez que los radicales están expresados con el mismo índice estos se pueden comparar fácilmente ya que basta solo con comparar los radicandos y esto es una muestra de la utilidad de aprenderlo.

EJEMPLO

Dadas las siguientes expresiones diga cuál es mayor.

$\sqrt[5]{6^3}$; $\sqrt[4]{7^2}$

Resolución

$\sqrt[5]{6^3} = \sqrt[20]{6^{12}}$; $\sqrt[4]{7^2} = \sqrt[20]{7^{10}}$

entonces se puede concluir que $\sqrt[5]{6^3} > \sqrt[4]{7^2}$

3.2 Cálculo con Radicales.

Para este punto esencial se dispone de 10 horas. Lo lo que se debe lograr en este punto es el desarrollo de habilidades en el cálculo con radicales en las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y la racionalización de denominadores.

Dentro de este punto esencial se tratará la adición y sustracción de radicales semejantes y de radicales a los cuales sea necesario transformar previamente (a través de las propiedades) para poder operar con ellos. De forma similar se trabajarán la multiplicación y la división de radicales analizando previamente la multiplicación y la división de radicales con el mismo índice y posteriormente de diferentes índices.

Como ya los alumnos conocen la simplificación de radicales, todas las respuestas que se den a los ejercicios tienen que ser simplificadas.

Teniendo en cuenta que la racionalización de denominadores será lo último que se trate en este punto esencial, las respuestas quedarán sin racionalizar, pero una vez dada la racionalización las respuestas quedarán simplificadas y racionalizadas.

Una condición previa importante para el tratamiento de la adición y sustracción de radicales es la definición de radicales semejantes.

Debe tratarse que sean los propios alumnos quienes den esta definición. Una vía metodológica para ello es lograr que la obtengan por analogía con la definición de términos semejantes. Para ello se recordará primeramente cuál es la definición que conocen de términos semejantes y que planteen ejemplos de los mismos, los cuales se escribirán en la pizarra destacando el profesor que la parte literal siempre es la misma y que a lo sumo se diferencian en sus coeficientes. Es importante también pedir ejemplos de términos que no son semejantes.

Después de esto se puede intentar que los alumnos expresen con sus palabras la definición de radicales semejantes, planteando el profesor que existe similitud con la de términos semejantes. Debe lograrse que la misma quede expresada de modo que se destaque nuevamente que como en la definición de términos semejantes, los radicales semejantes se diferencian, a lo sumo, en el factor que acompaña al radical.

Una vez dada la definición de radicales semejantes se puede plantear que la adición y la sustracción de radicales es una reducción de radicales semejantes que se realiza de forma análoga a la reducción de términos semejantes, lo que se ilustra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = \sqrt{3}$$

También en la adición y sustracción de radicales hay que analizar el caso en que aparentemente no existen radicales semejantes y es necesario previamente transformar los mismos para efectuar la adición o sustracción o ambas, como en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

$$3\sqrt[4]{9} + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt[6]{4} = 8\sqrt[3]{2}$$

Como anteriormente se han trabajado las propiedades de los radicales en la simplificación, introducción de factores en el radical, etc., se puede trabajar esta parte como una aplicación de estos cálculos planteando que en ocasiones en la adición y la sustracción se presentan radicales que aparentemente no son semejantes y que si se simplifican estos, es posible reducirlos en algunos casos a radicales semejantes.

En estos ejercicios se puede aplicar todo lo estudiado antes en el trabajo con radicales para obtener así radicales semejantes en los casos en que estos no están dados explícitamente. Debe resaltarse en ellos el trabajo con variables que se realiza, logrando con ello la vinculación con la unidad correspondiente.

En la resolución de los ejercicios el profesor debe tener en cuenta que como aún no se ha dado la racionalización, la vía para resolverlos es introducir factores en el radical, simplificar los radicandos y después reducir los radicales semejantes.

Para la multiplicación y división el tratamiento que se debe hacer es muy simple. Se pueden presentar casos como los ejercicios siguientes:

a. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
b. $\sqrt[4]{8} \div \sqrt[4]{4}$
c. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[9]{x}$
d. $\sqrt[4]{5} \div \sqrt[9]{4}$

En los incisos a) y b) el resultado es inmediato pues con aplicar directamente las propiedades de los radicales se obtiene el mismo. En los incisos c) y d) se indicará primero reducir a un índice común y después aplicar la propiedad.

Con relación a la división, debemos tener presente que hasta ahora no se ha explicado la racionalización de denominadores por lo que se debe tener en cuenta, a la hora de la ejercitación, plantear ejercicios en los cuales no queden radicales en el denominador. Se sugiere realizar ejercicios como el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

$$\frac{3\sqrt[3]{4}\times 2\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{4}}=3\sqrt{5}$$

Después de vista la multiplicación y división de expresiones monomias se puede plantear ejemplos de multiplicación de expresiones binomias sencillas como las que aparecen en el ejemplo siguiente, no se hace lo mismo con la división pues esta requeriría de la racionalización de denominadores.

EJEMPLO

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}\right)\times\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}+\sqrt{10}+\sqrt[6]{2^5}$$

La racionalización de denominadores se puede introducir igual través de ejemplos como el siguiente:

EJEMPLO

Eliminar los radicales de los denominadores.

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

1.12.6 <u>Resolución</u>

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Desde este momento toda respuesta que se dé a cualquier ejercicio debe quedar racionalizada y por lo tanto completamente simplificada.

Con respecto a la racionalización es importante que mediante algún ejemplo se ilustre su utilidad práctica en el cálculo. Por ejemplo, si se quiere calcular $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay que tomar una aproximación de $\sqrt{2}$ y dividir 1 por ella. Sin embargo, si se racionaliza primero se tendrá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Es evidente que es mucho más fácil el segundo cálculo que el primero.

Para el tratamiento de la racionalización de fracciones polinómicas se sugiere así mismo hacerlo a través de ejercicios como el ejemplo siguiente: Para introducir estos conocimientos se debe reactivar la factorización.

EJEMPLOS

1. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

<u>Resolución</u>

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} =$

(Multiplicar numerador y denominador por $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$) .

.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Se sugiere se realicen ejercicios en los que el estudiante deba:

- Simplificar radicales.
- Realizar operaciones con radicales (suma resta multiplicación y división).
- Racionalizar radicales.
- Realizar operaciones entre expresiones binomias que contengan radicales

6 UNIDAD 2

1.13 TRABAJO CON VARIABLES

1.13.1 INTRODUCCION

En esta unidad se da continuación al tratamiento sistemático del tecnicismo algebraico y a la resolución de ecuaciones, aspectos que ya han sido objeto de estudio desde años anteriores.

La unidad ha sido concebida para complementar los conocimientos y habilidades desarrollados en el trabajo con variables que deben poseer los alumnos al terminar el nivel básico; estos conocimientos y habilidades deben integrarse activamente con los que el alumno ya posee desde grados anteriores para de esta forma poder aplicarlos cuando sea necesario.

Por esta razón es de primordial importancia que se comprenda que el trabajo con variables no se reduce a esta unidad, ya que estos conocimientos constituyen la base para el desarrollo de las restantes unidades del grado. Además, posteriormente, se retoman todos los elementos del tecnicismo algebraico estudiados en la secundaria básica, haciéndose una sistematización y una profundización del trabajo con variables. Todos estos procedimientos y algoritmos de cálculo algebraico se continuarán aplicando en la enseñanza preuniversitaria; de ahí la importancia de que los alumnos posean estos conocimientos desde el punto de vista de su formación matemática básica.

En esta unidad, el papel fundamental lo desempeñan los algoritmos y procedimientos de cálculo algebraico; es por ello que debe prestarse especial atención a la ejercitación, con vistas a que los alumnos logren desarrollar habilidades seguras en la aplicación de estos procedimientos.

En la presente unidad se ponen en manifiesto, fundamentalmente, dos líneas directrices muy importantes en la enseñanza de la Matemática, la línea directriz "Trabajo con variables" al tratar todo lo concerniente al tecnicismo algebraico y la línea directriz "Ecuaciones, inecuaciones, sistemas" al tratar la resolución de las ecuaciones fraccionarias.

La unidad se divide en tres temáticas, las que a su vez se subdividen en puntos esenciales.

La primera temática se inicia con un repaso y una sistematización sobre las operaciones básicas con términos y polinomios estudiadas en los grados anteriores, que incluye el trabajo con los signos de agrupación. Seguidamente se tratan los productos notables como casos particulares de la multiplicación de polinomios.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Luego se introduce la descomposición en factores de expresiones algebraicas enteras con la extracción de factor común (monomio y polinomio). A continuación se trata la descomposición factorial de binomios y trinomios, estudiándose en particular los casos correspondientes a la diferencia de dos cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, trinomios de la forma $x^2 + px + q$ y de la forma $mx^2 + px + q$ así como combinaciones sencillas de los casos estudiados.

La segunda temática corresponde al cálculo con fracciones algebraicas, donde se van a aplicar los distintos casos de descomposición factorial estudiados en la temática anterior. Primeramente se trata la simplificación de fracciones algebraicas y sobre esta base se estudian a continuación la multiplicación y la división; después se tratan la suma y la resta. Dentro de la ejercitación se incluyen algunos casos donde aparecen en forma combinada las operaciones con fracciones algebraicas.

La tercera y última temática comienza con el estudio de las ecuaciones fraccionarias (que conducen a lineales), para cuya resolución se aplica el procedimiento de eliminación de denominadores; también se trabaja el despeje en fórmulas donde la variable a despejar aparece en algún denominador y finalmente, de forma análoga a como se hizo en noveno grado, se trata la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos que conducen, en este caso, al planteo de ecuaciones fraccionarias que se reducen a lineales.

Ahora bien, para un mejor desarrollo del trabajo con la misma se han hecho las siguientes modificaciones:

- Se elimina el estudio del producto notable correspondiente a $(a \pm b)^3$ y la descomposición en factores de $a^3 \pm b^3$.
- Se incluye el estudio del producto notable correspondiente a $(x+a)(x+b)$
- Se elimina la descomposición en factores por agrupamiento.
- Se elimina el tratamiento del complemento cuadrático.
- Se elimina la división de un polinomio por un binomio, ya que en noveno ya se lo hizo
- Se trata la multiplicación y la división de fracciones algebraicas primero que la suma y la resta.
- Se incluye la temática "Ecuaciones fraccionarias. Problemas".

1.13.2 ESTRUCTURA DE LA UNIDAD

En esta unidad podemos distinguir las siguientes unidades temáticas:

- Descomposición factorial
- Fracciones algebraicas
- Ecuaciones fraccionarias. Problemas

1.13.3 IDEAS RECTORAS Y EXIGENCIAS DE LA UNIDAD

Lo fundamental en esta unidad es que los alumnos desarrollen habilidades en la descomposición factorial de binomios y trinomios, y puedan aplicar estas habilidades al cálculo de las cuatro operaciones básicas con fracciones algebraicas, a la resolución de ecuaciones fraccionarias (que conducen a lineales) y de problemas.

Para lograr lo anterior es necesario que los alumnos:

- Reactiven las habilidades adquiridas en la realización de las operaciones elementales con polinomios y términos, estudiadas en años anteriores.
- Memoricen los productos notables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ y puedan aplicarlos al cálculo abreviado de productos.
- Reconozcan la existencia de un factor común (monomio o polinomio) en expresiones algebraicas dadas y desarrollen habilidades en la transformación de sumas en productos mediante la extracción del factor común.
- Reconozcan los casos correspondientes a la diferencia de dos cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, trinomios de la forma $x^2 + px + q$ y $mx^2 + px + q$ $(m \neq 1)$ y

dominen los algoritmos para su descomposición en factores, cuando esto pueda lograrse, con coeficientes enteros o racionales sencillos.

- Desarrollen habilidades en la descomposición factorial de binomios y trinomios donde se presenten los casos estudiados, así como combinaciones sencillas de estos casos.
- Desarrollen habilidades en la simplificación de fracciones algebraicas, donde tengan que aplicar los casos de descomposición factorial estudiados.
- Calculen con seguridad el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas enteras (monomios y polinomios) y apliquen este conocimiento en la suma y resta de fracciones algebraicas, así como en la resolución de ecuaciones fraccionarias.
- Desarrollen habilidades en la resolución de ecuaciones fraccionarias que se reducen a lineales, mediante la eliminación de denominadores y sean capaces de realizar el despeje en fórmulas, donde la variable a despejar aparezca en algún denominador.
- Puedan resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos que conduzcan al planteo de una ecuación fraccionaria.

Para el logro de las exigencias planteadas anteriormente, el nivel mínimo que deben alcanzar todos los alumnos se caracteriza mediante ejercicios como los que aparecen a continuación.

1. Calcula, aplicando los productos notables estudiados:

a. $(x+3)^2$
b. $(2a-c)^2$
c. $(0{,}4p+5)^2$
d. $(a+4)(a-4)$
e. $(m-7n)(m+7n)$
f. $(ax+\frac{1}{3})(2x-\frac{1}{3})$
g. $(b+7)(b+2)$
h. $(y-8)(y+6)$
i. $(m^2-5)(m^2-2)$

2. Simplifica las expresiones siguientes:

a. $(2x+5)^2-(20x-15)$
b. $(3a+7)(3a-7)+(11a^2+9)$
c. $-2b(4b-3)+(2-3b)^2$
d. $4y-[2y^2+(y-4)(y+4)-(2y-1)^2]$

3. Descomponga en factores

a. $a^3 - 9a$

b. $2t^2 - 50$

c. $x^4 - 16$

d. $\frac{1}{9}(y+2) - z^2(y+2)$

e. $t^3 - 7t^2 - 30t$

f. $3ax^2 - 15ax + 12a$

g. $b^4 + 2b^2 - 3$

h. $x^3y - 14x^2y^2 + 49xy^3$

i. $3bc^2 - 10bc + 8b$

j. $4m^4 - 11n^2 - 20$

4. Sean A = 4x – y y B = $3x^2 - 5xy$

a. Halla $A^2 - 2B$

b. Calcula el valor numérico del resultado obtenido para x = 1,5; y = - 3.

5. Sean: M = (3p + 5)(3p – 5); N = $2p^2 - 1$; R = $14p^2 - 28$. Comprueba que M + 3N – R = p^2

6. Dada la expresión algebraica – 13a - (a + 2)(a- 2) + $(3a - 4)^2$

a. Simplificar

b. Descomponer en factores el resultado obtenido.

7. Simplifica las fracciones algebraicas siguientes:

a. $\dfrac{4x^2 - 9}{2(2x-3)}$

b. $\dfrac{a^2 - 16}{a+4}$

c. $\dfrac{3b^2}{3b^2 + 15b}$

d. $\dfrac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y}$

e. $\dfrac{m^2 + 16m + 64}{m^2 - 64}$

f. $\dfrac{2c + 10}{3c^2 + 11c - 20}$

8. Calcula

a. $\dfrac{4x}{x-7} \cdot \dfrac{x^2 - 49}{8x^2}$

b. $\dfrac{p^2 + 3p - 10}{6p^3} \div \dfrac{p-2}{2p}$

c. $\dfrac{2a+4}{4a} \cdot \dfrac{4a+1}{4a^2 + 9a + 2}$

d. $\dfrac{b^2 - ab + 20}{b-4} \div \dfrac{b^2 - 5b}{3b^2}$

e. $\dfrac{at^2-4}{10t^2}\cdot\dfrac{2t^2-8t}{3t^2-10t-8}$

f. $\dfrac{y^2+6y+9}{y+7}\div\dfrac{y^2-9}{y^2+4y-21}$

9. Efectúa

a. $\dfrac{7}{6a}+\dfrac{a-4}{4a^2}$

b. $\dfrac{4b}{b^2-25}-\dfrac{2}{b+5}$

c. $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2x-25}{x^2+3x-10}$

d. $\dfrac{m}{5m+2}-\dfrac{9-3m}{5m^2-13m-6}$

e. $\dfrac{5}{y^2-3y}-\dfrac{2}{y^2-6y+9}$

f. $\dfrac{c-6}{2c+8}+\dfrac{10}{c^2+10c+24}$

10. Calcula

a. $\left[\dfrac{5x+1}{x^2-5x-14}-\dfrac{3}{x+2}\right]\times\dfrac{x^2-7x}{x+11}$

b. $\dfrac{4a}{a^2-16}\div\dfrac{6a^2}{3a^2-12a}+\dfrac{a+18}{2a^2+9a+4}$

c. $\dfrac{b^2-25}{b^2+3b-10}\times\left[\dfrac{7b-8}{b^2-10b+25}+\dfrac{2}{b-5}\right]$

11. Comprueba que las igualdades siguientes son válidas.

a. $\dfrac{3}{y+3}+\dfrac{9-2y}{y^2+y-6}=\dfrac{1}{y-2}$

b. $\dfrac{3c^2+6c}{c^2+4c+4}-\dfrac{c-4}{c+2}=2$

c. $\dfrac{m^2-64}{2n-16}\cdot\dfrac{2n}{m^2+8m}=1$

d. $\dfrac{4a^2-1}{a+7}\div\dfrac{2a^2-9a-5}{a^2+2a-35}=2a-1$

e. $\dfrac{x+12}{x^2+7x}-\dfrac{x^2-10x+21}{2x-6}\cdot\dfrac{10}{x^2-49}=\dfrac{1}{x}$

12. Halle el conjunto solución de las ecuaciones siguientes

a. $\dfrac{10}{x+9}=\dfrac{4}{x}$

b. $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{5}{x+4}$

c. $\dfrac{a}{a-2}=\dfrac{a+7}{a+3}$

d. $\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3x}$

e. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x+3}{2x}=\dfrac{1}{4}$

f. $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{2x}=\dfrac{1}{x}$

g. $\dfrac{5m}{m^2-9}=\dfrac{2}{m-3}$

h. $\dfrac{2}{t+4}+\dfrac{3}{t-2}=\dfrac{2t+5}{t^2+2t-8}$

13. El denominador de una fracción excede en 3 unidades al numerador. Si se adiciona 2 a cada término de la fracción resulta una fracción equivalente a $\dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción original?

14. Halla el número que sumado al numerador y al denominador de $\dfrac{5}{7}$ convierte esta fracción en otra equivalente a $\dfrac{4}{5}$.

15. Un obrero puede realizar un trabajo agrícola en 4 días, mientras que otro obrero puede realizar la misma labor en 6 días. ¿Qué tiempo tardarían en realizar esta labor, si trabajan conjuntamente?

16. Dos brigadas, trabajando conjuntamente, pueden levantar una pared en 2 horas. La primera brigada, trabajando sola, haría este trabajo en 6 horas. ¿Cuántas horas tardaría la segunda brigada en levantar la pared, si trabaja sola?

17. Un tanque se puede llenar por una llave en 12 minutos y por otra llave en 15 minutos. Si se abren ambas llaves simultáneamente ¿en qué tiempo llenarán el tanque?

18. Dos llaves trabajando simultáneamente pueden llenar un depósito en 12 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada una por separado, si la primera invierte el doble del tiempo que la segunda?

19. El lado de un cuadrado excede en 2,0 cm al lado de un triángulo equilátero. Si al dividir el perímetro del cuadrado por el del triángulo se obtiene la razón $\frac{8}{5}$, determina las longitudes de los lados de ambas figuras.

20. En un río, un bote motor puede navegar 18 km en contra de la corriente en el mismo tiempo que navega 24 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente del río es de 3,0 km/h ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

Queremos aclarar que los ejercicios anteriores no constituyen "ejercicios tipo", sino que es una forma de ilustrar la caracterización hecha anteriormente con respecto a las exigencias mínimas de la unidad.

1.13.4 INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se han considerado las siguientes unidades temáticas.

1. Descomposición factorial
2. Fracciones algebraicas
3. Ecuaciones fraccionarias. Problemas
4. Despeje de fórmulas.

1. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

En esta unidad temática se retoman toda una serie de conocimientos fundamentales sobre el trabajo con variables que ya poseen los alumnos desde grados anteriores y que se integrarán con los nuevos contenidos que se estudiarán, como son los productos notables y la descomposición en factores.

Este último aspecto constituye el eje central de la unidad en su conjunto, ya que tendrá una importante aplicación en las unidades temáticas posteriores y dentro del álgebra, en sentido general.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 20 horas clase y se puede distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Repaso con profundización.
- Introducción a la descomposición factorial. Extracción de factor común.
- Descomposición factorial de binomios.
- Descomposición factorial de trinomios.

1.1 Repaso con profundización

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 6 horas clase y el contenido referente al mismo se encuentra en el epígrafe 1 del capítulo 2 del libro de texto.

Lo esencial que se debe lograr en él es que los alumnos reactiven sus conocimientos sobre las operaciones con expresiones algebraicas estudiadas en grados anteriores, así como que memoricen algunos productos notables y puedan aplicarlos al cálculo abreviado de ciertos productos.

Como la vía metodológica para el tratamiento de este punto, en la primera clase el profesor puede comenzar recordando a los alumnos mediante ejemplos, los conceptos "término", "expresión algebraica" , "binomio", "trinomio" y "polinomio".

A continuación pueden seleccionarse algunos incisos del ejercicio siguiente con vistas a repasar lo concerniente al cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas.

EJERCICIO

Determine el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las variables que se indican:

a. a^2b+2c para $a= -2; b= -2\frac{3}{4}; c = -5$

b. $4x^{\circ}-y^{-2}z^3$ para $x= -\frac{1}{5}; y = 3; z= -6$

a. $(m-n).3p$ para $m= 9,2; n=4; p=-\frac{1}{2}$

b. $(r^2+s):4t$ para $r = -4; s=8; t=-6$

c. $\frac{6c^2+d}{e}$ para $c= 1,5; d= -10; e=-7$

d. $\frac{x^3y-z}{x+5}$ para $x= -3; y = \frac{1}{3}; z=11$

e. $\frac{b^4c^3+d}{2(b-c)}$ para $b=-1; c=4; d=10$

f. $6t^{\circ}w^2-\sqrt{w+3u^{-1}}$ para $t= \frac{2}{3}; w = -\frac{1}{2}; u=2$

Para repasar las operaciones con polinomios (suma, resta y multiplicación) puede presentarse los siguientes ejemplos, o proponer otros similares con el objetivo de que los alumnos recuerden cómo proceder para calcular estas operaciones.

1.14 EJEMPLO

Sean $A= 5x^2-3xy$; $B=-2x^2+xy$ *y* $C= x^2 - 2xy+4y$.

a. Calcule y simplifique A+B-C
b. Determine el valor numérico del resultado obtenido para $x= 1,5$; $y= -3$.

1.15 <u>Resolución</u>

a. $A+B-C= (5x^2- 3xy) + (-2x^2+xy) - (x^2-2xy+4y)$
   Para simplificar esta expresión debe tener en cuenta que:

Todo paréntesis precedido por el signo + (-) puede eliminarse conjuntamente con dicho signo, manteniendo (cambiando) los signos de los términos incluidos en el paréntesis.

Luego, resulta:

$(5x^2-3xy) +(-2x^2+xy) - (x^2-2xy+4y)$

$=5x^2-3xy-2x^2+xy-x^2 +2xy-4y$ eliminando los paréntesis

$=2x^2-4y$ reduciendo los términos semejantes

b. Calculando el valor numérico se tiene:

$2(1,5)^2-4(-3)=4,5+12=16,5$

1.16 EJEMPLO

Efectúe:

a. $(3a-4b)\ (a+2b)$
b. $(2c+3)\ (c^2-2c+5)$

1.17 Resolución

Debe recordar que al multiplicar dos polinomios, se obtiene como resultado un nuevo polinomio cuyos términos son los productos parciales de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

a. $(3a-4b)(a+2b)= 3a^2+6ab-4ab-8b^2$ efectuando los productos parciales.

$=3a^2+2ab-8b^2$ reduciendo términos semejantes.

b. $(2c+3)(c^2-2c+5)$

Aquí resulta más cómodo utilizar el esquema de cálculo siguiente:

$3(c^2-2c+5) = 3c^2-6c+15$

$2c(c^2-2c+5) = 2c^3-4c^2+10c$

Reduciendo términos semejantes se obtiene. $2c^3-c^2+4c+15$.

Otro aspecto que debe repasarse es la eliminación de paréntesis superpuestos, para lo cual recomendamos el siguiente ejemplo.

1.18 EJEMPLO

Simplificar la expresión algebraica siguiente:

$$8r^2 -\{-6r^2t^3+[5r^3t^2-2rt(r^2t-3rt^2)]-2r^2\}$$

1.19 Resolución

Para simplificar expresiones como ésta, una de las formas más cómodas de eliminar los signos de agrupación es la de suprimir éstos comenzando por los más interiores, es decir, de adentro hacia fuera. Luego, resulta:

$8r^2 -\{-6r^2t^3+[5r^3t^2-2rt(r^2t-3rt^2)]-2r^2\}=$

$= \quad 8r^2 -\{-6r^2t^3+[5r^3t^2-2r^3t^2+6r^2t^3]-2r^2\}$ Eliminando paréntesis

$= \quad 8r^2 -\{-6r^2t^3+3r^3t^2+6r^2t^3-2r^2\}$ Eliminando corchetes

$= \quad 8r^2 -3r^3t^2+2r^2$ Eliminando llaves

$= \quad 10r^2-3r^3t^2$

Queremos recalcar que este repaso inicial sobre los aspectos antes mencionados, debe desarrollarse en una forma activa con los alumnos a través de la propia ejercitación.

No debe dejar de incluirse algunos ejercicios con otra variedad, como por ejemplo los siguientes, que contribuyen también a sistematizar los procedimientos algebraicos estudiados en grados anteriores.

1.20 EJERCICIO

1. Dados los polinomios $P_1=2x^2+9x-5$; $P_2=2x-1$y $P_3= -3x+8$, calcule y simplifique :

    a. $P_1+P_2-P_3$
    b. $P_1-(P_2+p_3)$
    c. $P_1+P_2.P_3$
    d. $2P_1-(P_3-P_2)$
    e. $(P_1+P_3).P_2$
    f. $P_1-P_2+2P_3$
    g. $P_1.P_2-P_3$

2. Sean A= 3a-b; B=2a+5b y C= $12ab-5b^2$

    a. Calcule A.B-C
    b. Halle el valor numérico del resultado obtenido para a= $\frac{1}{3}$ y $b=-5$

3. Sean P = $\frac{1}{2}x^2$-3; Q = 2x+1 y R = x - 5

a. Calcule 4P-QR
b. Determine para qué valor de x se cumple que el resultado obtenido en el inciso anterior es igual a 20.

A este repaso sugerimos dedicar por lo menos las dos primeras clases de este punto esencial.

La clase siguiente debe dedicarse a introducir algunos de los llamados productos notables, que constituyen casos particulares de la multiplicación de polinomios y que el alumno debe memorizar para así facilitar el cálculo, ya que dichos productos cumplen determinadas reglas de fácil comprensión.

El estudio de los productos notables, por otra parte resulta importante por la aplicación posterior de éstos a la descomposición factorial de binomios y trinomios.

En esta unidad se estudian los productos notables siguientes:

- Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos términos $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Producto de la suma por la diferencia de dos términos: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

A continuación ofrecemos dos posibles variantes de cómo llevar a los alumnos este contenido.

<u>**Variante 1**</u> (vía deductiva)

Esta es la vía que consiste en partir del caso más general, para luego ilustrar la regla correspondiente mediante ejemplos particulares.

<u>**Variante 2**</u> (vía inductiva)

Esta vía consiste en partir de algunos casos particulares para que de esta forma los alumnos se percaten de la regularidad que se manifiesta en cada uno de estos casos y así poder llegar finalmente a la generalización de la regla correspondiente.

Por ejemplo, se pueden preparar dos hojas de trabajo, donde se dividan los productos notables en dos grupos:

1.21 HOJA DE TRABAJO #1

Calcular:

1.
   a. $(x+3)^2$
   b. $(2p+q)^2$
   c. $\left(\frac{1}{3}c+4\right)^2$
   d. $(a+b)^2$

2.
   a. $(y-4)^2$
   b. $(3m-n)^2$
   c. $(0{,}4t-5)^2$
   d. $(a-b)^2$

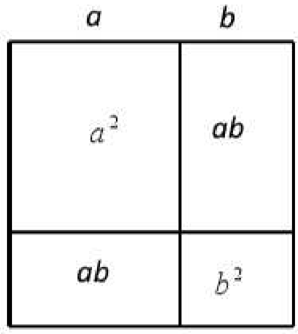
HOJA DE TRABAJO #2

Calcular:

1.
   a. $(x + 5)(x - 5)$
   b. $(3t + w)(3t - w)$
   c. $(4y + 0{,}5)(4y - 0{,}5)$
   d. $(a + b)(a - b)$

2.
   a. $(x + 8)(x + 3)$

b. (c – 7) (c – 5)
c. (m + 6) (m – 2)
d. (x + a) (x + b)



Después de entregar estas hojas de trabajo a los alumnos y que estos calculen los productos, en cada caso, el profesor debe llamar la atención acerca de las características comunes de dichos productos (atendiendo a la estructura de los mismos), cuya generalización la constituye el inciso d) de cada uno de los bloques.

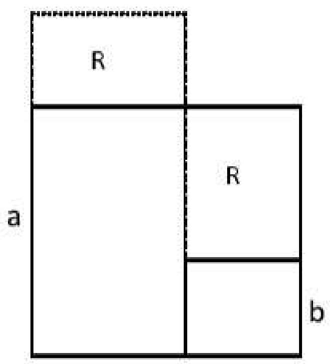
Resulta interesante mostrar a los alumnos una interpretación geométrica de algunos de los productos notables estudiados. A continuación ilustraremos dos casos.

Para el cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, siendo a y b números positivos, podemos considerar un cuadrado de lado a + b (como en la figura) cuya área es $(a+b)^2$.

Este cuadrado, como se puede observar en la figura, contiene un cuadrado de lado *a*, un cuadrado de lado *b*, y dos rectángulos de lados *a* y *b*.

Así pues, por suma de áreas se tiene: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El producto notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ puede ilustrarse geométricamente para el caso a>b, como se observa en la figura siguiente:



La interpretación geométrica, en este caso, es la siguiente: Si del cuadrado de lado a se quita el cuadrado de lado b queda una figura de área $a^2 - b^2$. Esta figura se transforma en un rectángulo de lados a + b y a – b, moviendo el pequeño rectángulo R a la posición R.

Para ilustrar a los alumnos los casos anteriores, recomendamos a los profesores confeccionar láminas adecuadas de cartulina o transparencias, en dependencia de las condiciones de la escuela.

En los primeros ejemplos o ejercicios que se propongan, una vez enunciadas las reglas correspondientes, debe lograrse que los alumnos identifiquen la fórmula que deben utilizar, describiendo oralmente la regla (de acuerdo al producto notable de que se trate) y después identifiquen los elementos.

Por ejemplo: $(2x+5)^2$. Se trata del cuadrado de una suma, que es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo; en este caso el primer término es 2x y el segundo es 5. Luego, resulta:

$$\begin{aligned}(2x+5)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot 2x \cdot 5 + 5^2\\ &= 4x^2 + 20x + 25\end{aligned}$$

Esto se hará en unos pocos ejercicios para contribuir a lograr que los alumnos operen en el plano conceptual y fijen las reglas; pero luego debe pasarse al cálculo directo como lo permitan las habilidades de los alumnos. En el ejemplo anterior debe aspirarse a que logren escribir $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$ y todo el resto del proceso se realice solo en el pensamiento y de una forma cada vez más rápida.

Para la ejercitación recomendamos los siguientes ejercicios, estos ejercicios u otros bloques con similares características contribuyen a fijar los productos notables.

1. Transforme los siguientes productos (potencias) en sumas, aplicando los productos notables estudiados:

a. $(x+y)^2$
b. $(c-d)^2$
c. $(a+4)^2$
d. $(p-2)$
e. $(8+y)^2$
f. $(3b-1)^2$
g. $(5m+n)^2$
h. $(p-7q)^2$
i. $(0,8+3t)^2$
j. $\left(\frac{1}{3}r-2,4\right)^2$
k. $\left(\frac{x}{4}+y^2\right)^2$
l. $\left(\frac{a}{b}+2c\right)^2$
m. $(p+q)(p-q)$
n. $(3-c)(3+c)$
o. $(4b-5)(4b+5)$
p. $(6x+y)(6x-y)$
q. $\left(\frac{7}{2}m+n\right)\left(\frac{7}{2}m-n\right)$
r. $\left(\frac{x}{3}-0,5y\right)\left(\frac{x}{3}+0,5y\right)$
s. $(1.1+6a^2)(1,1-6a^2)$
t. $(a+4)\ (a+2)$
u. $(y-7)(y-5)$
v. $(x-6)(x+7)$
w. $(b+4)(b-9)$
x. $(p-3q)(p-2q)$
y. $(x^2+8)(x^2-3)$

2. Efectuar:

a. $(p+q)^2$
b. $(m-n)^2$
c. $(x+2)^2$
d. $(y-7)^2$
e. $(c+9)^2$
f. $(3-b)^2$
g. $(2a+5)^2$
h. $(4x-y)^2$
i. $(5r+8s)^2$
j. $(3t-0.5)^2$
k. $(\frac{7}{4}+3q)^2$
l. $(\frac{a^2}{3}-0.6)^2$
m. $(b+c)(b-c)$
n. $(x+7)(x-7)$
o. $(y-4)(y+4)$
p. $(3a+1)(3a-1)$
q. $(p-8q)(p+8q)$

r. $(\frac{m}{3}+n)(\frac{m}{3}-n)$

s. $(\frac{x^2}{5}-0.9)(\frac{x^2}{5}+0.9)$

t. $(a+3)(a+7)$

u. $(b-8)(b-4)$

v. $(x+6)(x-2)$

w. $(c-5d)(c+3d)$

x. $(m^2-8)(m^2+5)$

Después pueden proponerse otros ejercicios donde se integren los productos notables al cálculo con expresiones algebraicas, como son los siguientes.

1. Pruebe que las igualdades siguientes son válidas:

   a. $(a+5)^2-(25+a^2)=10a$

   b. $(4a+b)(4a-b)-2(8a^2-b^2)=b^2$

   c. $(4x-1)^2-(16x^2+1)+8x=0$

   d. $-2a(4a+1)+\left(3a+\frac{1}{3}\right)^2=a^2+\frac{1}{9}$

   e. $(3p^2+p)(3p^2-q)+5(q^2-1,8p^4)=4q^2$

   f. $36a^2-(45ab-59b^2)-(6a-7b)^2=39ab$

   g. $\frac{5}{9}m+\left(\frac{1}{4}+5m\right)\left(\frac{1}{4}-5m\right)\left(5m-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$

   h. $7x^2-[6x+(x-3)^2+(2x+1)(2x-1)]=2x^2-8$

   i. *$13b^2-\{(2b+5)(2b-5)-[-12b-(3b-2)^2]-19=40$

   j. *$(y+7)(y-3)-[(2y+3)(2y-3)-3(y+5)^2+63]=34y$

2. Sean A = $3a+\frac{1}{2}$; B = $3a-\frac{1}{2}$ y C = $3.5a^2-\frac{1}{4}$.

   a. Calcule A.B – 2C.

   b. Halle el valor numérico del valor obtenido para a= $-\frac{3}{2}$

3. Calcular:

   a. $(5x+4)^2-(40x-4)$

b. $4a + 5)(5a - 5) + (4a^3 - 15)$
c. $(2b - 1)^2 - 2(b^2 - 2b)$
d. $(2c^2 + m)(2c^2 - m) + 3(m^2 - \frac{4c^4}{3} + 1)$
e. $-2a(3a - b) + (4a - 3b)^2$
f. $10p^2 - (3p + 2)(3p - 2) + 4(p2 - 1)$
g. $(2m - 3)(2m + 3) - 30m - 4(m - 5)^2$
h. $30x + (5x - 3)^2 + (3 - 5x)(3 + 5x)$
i. $9y^2 - [-8y + 3(y + 2)(y-2) - (y - 4)^2]$
j. $-12r -\{2r^2 + [(3r - 2)^2 - (44 + 1)(4r - 1)]\}$

4. Sean $A = 3x - y$ y $B = 4xy - 4.5x^2$

   a. Hallar $A^2 + 2B$
   b. Calcular el valor numérico del resultado obtenido para $x = ½$ y $y = 3$

5. Sean $M = 5a + b$; $N = 5a - b$ y $P = 25a^2 - 4ab$
   a. Hallar M . N – P
   b. Determinar el valor numérico del resultado obtenido para a = 1,5 y b = 2.

6. Si $C = 4m + 3$; $D = (2m + 1)(2m - 1)$ y $E = 24m + 11$, probar que $C2 - 2D - E = 8m2$

Resulta interesante analizar con los alumnos el ejercicio siguiente, cuya fundamentación radica en que los cuadrados de dos números reales opuestos, son iguales.

Compruebe que para todos los números reales a y b se cumple:

a. $(a+b)^2= (-a-b)^2$
b. $(a-b)^2= (b-a)^2$

Una vía que pueden seguir los alumnos en la resolución de este ejercicio es desarrollar, en cada inciso, ambos miembros de la igualdad y comparar los resultados.

Otra vía es la siguiente:

Dando valores particulares a las variables a y b resulta fácil percatarse que: $- a - b$ es el opuesto de $a + b$ es decir: $- a - b = - (a + b)$; $b - a$ es el opuesto de $a - b$, es decir: $b - a = - (a - b)$

Luego se tiene que:

$$(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 \quad \text{sustituyendo}$$

$$= [-1(a+b)]^2 \quad \text{pues } -x = -1 \, . \, x \text{ para todo } x \in \nabla$$

$$= (-1)^2 (a+b)^2 \quad \text{potencia de un producto}$$

$$= (a+b)^2 \quad \text{pues } (-1)^2 = 1$$

En el otro caso se procede de forma análoga.

Esta segunda vía resulta más difícil para los alumnos que la primera; no obstante el profesor debe fundamentar (al menos oralmente) la igualdad de ambos miembros en cada caso.

De esta manera, aunque esto no es un aspecto fundamental dentro de la unidad, los alumnos deben conocer que $(x+5)^2 = (-x-5)^2$; $(b-3)^2 = (3-b)^2$; etc, es decir, el desarrollo de estas potencias conduce a un mismo resultado.

El ejercicio siguiente conduce al planteo de una ecuación, que se reduce a lineal.

Sea (3x + 2) la expresión que represente al lado de un cuadrado. Determine para qué valor de x el área de este cuadrado está dada por la expresión ($9x^2$ + 40) .

1.2 Introducción a la descomposición factorial. Extracción de factor común.

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 3 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos comprendan en qué consiste descomponer en factores una expresión algebraica, reconozcan la existencia de un factor común y desarrollen habilidades en la descomposición factorial de una expresión algebraica mediante la extracción de factor común.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, se puede comenzar con la introducción del concepto "factor" o "divisor" de una expresión algebraica (entera). Este concepto debe introducirse por analogía a lo que el alumno ya conoce desde años anteriores como factores o divisores de un número; por ejemplo 2 y 3 son factores o divisores de 6, pues 2 . 3 = 6. Así mismo cabe considerar que a + b son factores o divisores de $a^2 - b^2$, pues se tiene que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

A continuación debe informarse a los alumnos que muchas veces, en la práctica, resulta conveniente determinar los factores de una expresión algebraica dada y que a esta operación se le conoce como "descomposición factorial" o "factorización" de dicha expresión.
Una vez hecha esta introducción, que debe ser breve, se pasa al primer procedimiento de descomposición factorial que se estudia en la unidad: la extracción del factor común.

Se puede comenzar proponiendo a los alumnos varios ejercicios de multiplicación donde haya que aplicar la propiedad distributiva, como por ejemplo:

Calcula:

a. 4(a + b)
b. m(p – q)
c. x(x – y - 3z)
d. 2a (a + 2b - 3c)

Los alumnos calcularán sin dificultades, y ahora la pregunta del profesor podría ser: ¿Cómo proceder en sentido inverso? El problema radica entonces en transformar la expresión (suma) obtenida, en un producto, buscando un factor que aparezca en todos sus términos, al cual se le denominará factor común.

Así tenemos que en la expresión $x^2 - xy + 3xz$ un factor común es x, pues $x^2 - xy + 3xz = x \cdot x - x \cdot y + x \cdot 3z$. En la expresión $2a^2 4ab - 6ac$ un factor común es 2 y otro factor común es a; en este caso el profesor debe informar que lo más conveniente es considerar ambos, es decir, 2a, ya que $2a^2 + 4ab - 6ac = 2a \cdot a + 2a \cdot 2b - 2a \cdot 3c$.

Ahora bien, en la práctica, lo que el alumno debe fijar es el algoritmo a seguir para descomponer en factores una expresión algebraica que contenga un factor común; es decir:

Si en una expresión algebraica dada existe un factor que sea común a todos sus términos, ésta puede descomponerse en el producto de dicho factor común por el polinomio que resulta al dividir cada uno de los términos de la expresión dada por ese factor común.

Seguidamente puede remitirse a los alumnos al siguiente ejemplo u otro ejemplo similar donde haya que extraer factores comunes que sean monomios.

1.21.1EJEMPLO

Factorize las expresiones siguientes:

a. x^2+3x
b. $4a - 6$
c. $6m^2n-9mn^2+3mn$
d. $10\ a^5-8\ a^4x+4\ a^3x^2-2\ a^2x^3$

Resolución:

a. x^2+3x

x^2 y $3x$ contienen el factor común x . El otro factor estará formado por el cociente $(x^2+3x) \div x= x+3$ ya que $x^2 \div x = x$ y $3x \div x = 3$. Luego, tendremos que $x^2+3x= x(x+3)$.

b. $4\ a-6$

Aquí no existe como factor común una variable; sin embargo entre los coeficientes numéricos suelen considerarse el mayor de los divisores comunes de dichos coeficientes, siempre que sea diferente de uno. Luego, entre 4y6 consideramos al 2 como factor común tendremos: $2(2\ a-3\ )$.

c. $6m^2n-9mn^2+3mn$
El factor común es $3mn$. Tendremos entonces:

$6m^2n-9mn^2+3mn= 3mn\ (\ 2m-3n+1\ )$.

d. $10\ a^5-8\ a^4x+4\ a^3x^2-2\ a^2x^3= 2\ a^2\ (\ 5\ a^3-4\ a^2x+2ax^2-x^3\ )$.

El alumno debe saber que en una expresión algebraica dada puede existir como factor común un polinomio .

A continuación haremos las siguientes consideraciones:

- Cuando exista como factor común una variable, debe tomarse la que aparezca a un menor exponente en la expresión dada.
- Entre los coeficientes numéricos, suele considerarse como factor común al máximo común divisor de dichos coeficientes (siempre y cuando $mcd \neq 1$).

Por ejemplo, en la expresión $6p^2 + 9p^3q$ el factor común que debe tomarse es $3p^2$.

La expresión 2a+ 5b carece de factor común, pues no existe una misma variable que aparezca en todos sus términos y, por otra parte se tiene *mcd* (2; 5) = 1 y no tendría sentido descomponer $2a + 5b = 1(2a + 5b)$.

Es importante que el alumno tenga presente estas consideraciones, ya que de esta forma se garantiza la extracción del mayor factor común (*mcd* de la expresión dada).

Después de proponer algunos ejercicios sencillos para fijar el procedimiento, debe mostrarse a los alumnos algunos casos donde el factor común sea un polinomio. Este caso prepara las condiciones para el tratamiento de la descomposición en factores por agrupamiento, que se hará en el décimo grado.

Para ello pueden mostrarse algunos ejemplos sencillos, tales como:
$3a(b-4)+5(b-4)$; el factor común es $b-4$ en $x(y+z)-a(y+z)+c(y+z)$; el factor común es y + z.

Seguidamente se informará que el procedimiento a seguir en estos casos es el mismo que se aplica cuando el factor común es un monomio.

Puede remitirse a los alumnos al siguiente ejemplo u a otro similar. El inciso c) del ejemplo lleva implícita, muy ligeramente, la idea del agrupamiento, lo cual resulta sencillo en este caso, pues se limita sólo a introducir dentro de un paréntesis a los dos últimos términos de la expresión.

EJEMPLO

Descomponga en factores:

a. (a+b)x −(a+b)y
b. (x-a)(y+2) + b(y+2)
c. 2m(c+3)+ c+3

<u>Resolución:</u>

a. (a+b)x-(a+b)y

El factor común en esta expresión es el binomio (a+b), y al dividir resulta:

$$\frac{(a+b)x}{a+b}=x; \quad \frac{-(a+b)y}{a+b}=-y$$

Luego $a+b)x-(a+b)y=(a+b)(x-y)$.

b. (x-a)(y+2) + b(y+2)

El factor común es (y+2) . Resulta entonces:

(x-a) (y+2) +b(y+2) = (y+2) [(x-a)+b]

= (y+2) (x-a +b)

c. 2m(c+3)+ c+3

En este caso resulta conveniente introducir los dos últimos términos en un paréntesis precedido por el signo +; de esta forma tenemos:

2m(c+3)+ c+3 = 2m(c+3) +(c+3); factor común (c+3)

= (c+3) (2m+1)

Recomendamos dedicar la primera clase a la teoría, es decir, a la introducción y a la presentación de los distintos casos de factor común y las dos clases restantes a la ejercitación, donde debe llevar un mayor peso la extracción de factor común monomio.

Es importante que al concluir estas tres clases los alumnos hayan comprendido bien el procedimiento para la extracción del factor común, ya que el mismo se continuará a lo largo de toda la unidad temática.

1.3 Descomposición Factorial de Binomios

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 2 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos desarrollen habilidades en la descomposición factorial de binomios, en particular de la diferencia de dos cuadrados; así como algunos ejercicios sencillos donde se combine este caso con el factor común.

La primera clase puede iniciarse proponiendo a los alumnos algunos ejercicios de cálculo como los siguientes:

Calcular:

a. $(x+7)(x-7)$
b. $(3m+n)(3m-n)$
c. $\left(\frac{2}{5}+p\right)\left(\frac{2}{5}-p\right)$

Como se trata del producto notable correspondiente a la suma de dos términos multiplicada por su diferencia, los alumnos calcularán sin dificultad, obteniendo en cada caso la diferencia de dos cuadrados.

Luego, a partir de este producto notable puede obtenerse un procedimiento para descomponer en factores una diferencia de dos cuadrados.

Calcular el producto

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

descomponer en factores

Seguidamente el profesor puede presentar a los alumnos la siguiente pancarta, para a continuación proponer el análisis del ejemplo u otro con similares características.

La diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de estos cuadrados.

En símbolos: $\boxed{a^2-b^2= (a+b)(a-b)}$

7 EJEMPLO

Factorice:

a. x^2-25 b. $\frac{1}{4}-0.49y^2$ c. a^4-16b^4

Resolución:

a. $x^2-25= x^2-5^2= (x+5)(x-5)$

b. $\frac{1}{4}-0.49y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2-(0.7y)^2=\left(\frac{1}{2}+0.7y\right)\left(\frac{1}{2}-0.7y\right)$

c. $a^4-16b^4 =(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)$

Observe que en este último caso uno de los factores obtenidos (a^2-4b^2) es, a su vez, una diferencia de cuadrados luego se debe proceder a descomponerlo aplicando el mismo procedimiento. Resulta entonces:

$$a^4-16b^4 =(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$$

Como ya ninguno de los otros factores admite una nueva descomposición, decimos entonces que hemos descompuesto totalmente en factores a la expresión a^4-$16b^4$

En general, debe tener presente que en el proceso de descomposición factorial de una expresión algebraica, debe continuarse mientras sea posible, es decir, hasta tanto los factores que se obtengan no admiten a su vez una nueva descomposición .

En los primeros ejemplos o ejercicios, resulta fundamental que los alumnos identifiquen rápidamente las bases (raíces cuadradas) de los cuadrados; para ello tendremos en cuenta solo las raíces aritméticas (positivas). En la práctica, el reconocimiento de las raíces cuadradas debe hacerse mentalmente y escribir directamente los factores. Por ejemplo: $9x^2 - 0{,}25 = (3x + 0{,}5)(3x - 0{,}5)$

Con ejercicios como:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

Se destaca la necesidad de continuar el proceso de descomposición mientras sea posible y no detenerse cuando se haya realizado una descomposición. Tal es el objetivo que se persigue con la resolución del inciso c) del ejemplo anterior.

Aunque el objetivo fundamental en esta unidad es la descomposición factorial dentro del dominio de los números racionales, es decir, donde los coeficientes sean racionales. Debe informarse a los alumnos que expresiones como $x^2 - 3$; $x^2 - 5$; etc., etc, también constituyen diferencias de cuadrados (en ∇), pues.

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

No obstante, la ejercitación debe estar dirigida fundamentalmente a descomponer diferencias de cuadrados donde los términos sean cuadrados perfectos.

Tampoco debe dejarse de presentar algunos casos como x^2+9, que no pueden descomponerse en factores (ni en ∇ inclusive), pues $x^2+9=x^2-(-9)$ y - 9 no tiene raíz cuadrada real.

Para la ejercitación pueden proponerse los ejercicios correspondientes al epígrafe 3 del texto, u otros que pueden ser creados por el profesor.

1. Exprese como productos:
   a. x^2-y^2
   b. a^2-1
   c. $4-b^2$
   d. m^2-81
   e. y^2+4
   f. $16\ a^2-c^2$
   g. $9x^2-25$
   h. $0.64-n^2$
   i. $\frac{1}{4}-r^2$
   j. $\frac{16}{9}-0.36t^2$
   k. $25x^4-y^2$
   l. $0.49p^2-q^4$
   m. $\frac{1}{81}m^4-n^4$
   n. x^4-1
   o. $100\ a^2-49$
   p. $4r^2s^4-t^6$
   q. $\frac{a^2}{4}-\frac{p^2}{9}$
   r. $*x^{4m}-9y^{2n}$

2. Factorice:
   a. $4x^2-1$
   b. p^2-49q^2
   c. $9b^4-0.25c^2$
   d. $100-a^2m^2$
   e. $16c^4-81$
   f. $\frac{1}{9}m^4n^4-p^2$
   g. $0.04r^2-t^6$
   h. $\frac{1}{36}u^2-v^4$
   i. $\frac{x^2}{16}-y^4z^2$
   j. $\frac{24}{49}r^2t^2-9$
   k. $36-0.81p^2$
   l. $64t^2-0.09w^2$
   m. $(a+b)^2-c^2$
   n. $x^2-(y-z)^2$

o. $(p-q)^2-4r^2$

p. $64m^2-(m-2n)^2$

3. Descomponer en factores:

a. x^3-x

b. $2a^2-8$

c. $m^3-\frac{1}{9}m$

d. b^2-4b^4

e. $3a^3-27a$

f. $100t-4tw^2$

Los ejercicios 1 y 2 constituyen bloques variados de diferencias de cuadrados, con coeficientes racionales (de todo tipo) y donde aparecen diferentes exponentes en las variables. En algunos de los incisos aparecen casos que conducen a una doble descomposición, como por ejemplo $16c^4-81$, y además casos donde se presentan potencias de binomios, como $x^2-(y-z)^2$.

No debe dejar de incluirse ejercicios en los que se combine la diferencia de cuadrados con el factor común; para ello recomendamos el ejercicio 3.

El profesor debe hacer énfasis que en general para descomponer en factores una expresión algebraica, lo primero que se debe hacer es extraer factor común, en caso que exista, y después analizar si el otro factor admite a su vez una nueva descomposición.

Pondremos como ejemplos los ejercicios siguientes:

- b^2-49b^4

1.21.2 **Se puede interpretar como una diferencia de cuadrados, pero b^2 es factor común; luego lo más conveniente es extraer factor común, de donde resulta .**

$$\begin{aligned} b^2-49b^4 &= b^2(1-49b^2) \\ &= b^2(1+7b)(1-7b) \end{aligned}$$

Si no se extrae factor común al inicio, entonces hay que extraerlo después (en cada factor), por lo que el número de pasos a realizar sería mayor en este caso.

- $$\begin{aligned} 50a^3b^2 - 2ac^2 &= 2a(25a^2b^2 - c^2) \\ &= 2a(5ab+c)(5ab-c)\,. \end{aligned}$$

Queremos aclarar que el nivel de exigencia en los ejercicios debe estar de acuerdo a las posibilidades de los alumnos; no obstante resulta conveniente mostrar la mayor variedad de casos que sea posible.

1.4 Descomposición factorial de trinomios

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 9 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos reconozcan los trinomios cuadrados perfectos, trinomios de la forma $x^2 + px + q$ y de la forma $mx^2 + px + q \quad (m \neq 1)$, y desarrollen habilidades en la descomposición factorial de estos trinomios; así como en la descomposición de algunas expresiones donde se presenten en forma combinada los procedimientos estudiados.

Recomendamos tratar los trinomios en el siguiente orden:

1. Trinomio cuadrado perfecto
2. Trinomio $x^2 + px + q$
3. Trinomio $mx^2 + px + q \quad (m \neq 1)$

Para el tratamiento del trinomio cuadrado perfecto, puede comenzarse proponiendo a los alumnos que calculen los cuadrados de algunos binomios (sumas y diferencias); por ejemplo:

a. $(x+4)^2$
b. $(y-7)^2$
c. $(3m+n)^2$
d. $(t-0{,}6w)^2$

Los alumnos calcularán sin dificultades y el profesor recordará el producto notable $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, destacando las características del trinomio que resulta al desarrollar el cuadrado de una suma o de una diferencia, atendiendo a la estructura de sus términos. De esta forma puede introducirse la denominación de trinomio cuadrado perfecto para aquellos que se pueden transformar en el cuadrado de un binomio.

Un trinomio es cuadrado perfecto si:

- Dos de sus términos son cuadrados perfectos, y
- El término restante es igual al doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos, o al opuesto de dicho producto.

Es importante que los alumnos sepan reconocer rápidamente si un trinomio dado es cuadrado perfecto, así como cuándo se descompone en el cuadrado de una suma o de una diferencia.

Al descomponer un trinomio cuadrado perfecto, solamente tendremos en cuenta las raíces cuadradas positivas (aritméticas) de los términos cuadrados perfectos, tal y como se muestra en la resolución del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1

Transformar en productos:

a. $x^2+8x+16$
b. $9a^2-6ab+b^2$
c. $4m^2+25n^2+20m^2n$
d. $1-16ax^2+64a^2x^4$

Resolución:

a. $x^2+8x+16$

Observa que este trinomio contiene dos términos cuadrados perfectos (x^2 y 16) cuyas raíces cuadradas (aritméticas) son x y 4 respectivamente. El doble producto de estas raíces es $2\cdot x\cdot 4=8x$ que coincide con el término restante del trinomio. Como dicho término tiene signo positivo, entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una suma. Luego, resulta:

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

b. $9a^2-6ab+b^2$

$$\begin{array}{ccc} 9a^2 & & b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3a & & b \end{array}$$

2(3a)(b) = 6ab

Los términos cuadráticos son $9a^2$ y b^2. El doble producto de las raíces es 9ab que coincide con el opuesto del término restante del trinomio.

Como el término restante tiene signo - , entonces el trinomio es igual al cuadrado de una diferencia. Luego:

$$9a^2 - 6ab + b^2 = (3a - b)^2$$

c. $4m^4 + 25n^2 + 20m^2n = (2n^2 + 5n)^2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2(2m^2)\ (5n) \quad = 20m^2n$

d. $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2$

En los primeros ejercicios puede pedirse a los alumnos que fundamenten, por vía oral o escrita, el reconocimiento y la descomposición del trinomio cuadrado perfecto; luego en la práctica, debe aspirarse a que esto se haga mentalmente y se escriba directamente la descomposición de dicho trinomio.

Para la ejercitación sugerimos el ejercicio siguiente.

Transforma en productos los trinomios siguientes:

a. $x^2 + 2xy + y^2$

b. $n^2 - 2n + 1$

c. $a^2 + 4a + 4$

d. $y^2 - 12y + 36$

e. $m^2+14m+49$

f. $b^2-3b+9/4$

g. $81+18p+p^2$

h. $b^2-10bc+25c^2$

i. $a^4+2a^2b^2+b^4$

j. $9x^2-4.8xy+0.64y^2$

k. $c^4-c+1/4$

l. $y^2+2\ 3y+3$

m. $64x^2+8bx+b^2$

n. $4p^3-2p+0.25$

ñ. $16a^2+49b^2-56ab$

o. $a^6+a^3x^2+4x^4$

p. $9/25c^4\ 6/5c^2d^3+d^6$

q. $81m^4+4n^4-36m3n^2$

r. $64+80p^2+25p^4$

s. $(a+b^2)-2(a+b)c+c^2$

t. $a^3 +3/2\ \ a^2b+-9/16ab^2$

u. $2x^2 -20x^2y +50xy^2$

v. $3bc^2+18bc+27b$

w. $x^2-8x^2y+16xy^2$

No debe dejar de ponerse al menos un caso como el inciso m), donde el trinomio tiene dos términos cuadrados perfectos, pero que no se cumple la otra condición, es decir, el término restante no es el doble producto de las raíces cuadradas. También deben incluirse algunos casos como los incisos t, u, v y w donde se combina con el factor común.

En la tarea que se proponga para la próxima clase, debe incluirse algún caso como $x^2 + 8x + 12$, que sirva como motivación para el estudio del trinomio $x^2 + px + q$.

Para la clase correspondiente a la introducción del trinomio $x^2 + px + q$, en los primeros minutos de la clase el profesor puede hacer algunas preguntas orales a los alumnos en forma de "adivinanzas numéricas", tales como:

- Menciona dos números que cumplan las condiciones siguientes:

  a. Su producto sea 12 y su suma sea 8.
  b. Su producto sea 24 y su suma sea –11.
  c. Su producto sea –18 y su suma sea 7.
  d. Su producto sea –15 y su suma sea –2.

El profesor recalcará que de acuerdo con la regla para multiplicar números racionales (reales), en los casos a) y b) los números han de tener signos iguales, mientras que en los casos c) y d) deberán tener signos diferentes.

Estos ejercicios orales preliminares contribuyen a preparar las condiciones para que posteriormente se logre una mayor rapidez al determinar los números correspondientes, al efectuar la descomposición en factores de los trinomios de la forma $x^2 + px + q$.

A continuación debe recordarse el producto notable $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ mediante algunos ejemplos, destacando que el trinomio resultante es de la forma $x^2 + px + q$, si se considera p = a + b y q = ab. Seguidamente puede pasarse a explicar el algoritmo para descomponer en factores estos trinomios.

1.22

Para descomponer en factores un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ se buscan dos números a y b tales que a + b = p y ac = q, se tiene entonces que $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$

Resulta conveniente comentar con los alumnos que este algoritmo solo es aplicable en aquellos trinomios donde sea posible encontrar los números que cumplan las condiciones dadas, lo cual solamente ocurre en determinados casos e informar que existen trinomios que no tienen descomposición en ∇ y otros cuya descomposición no resulta evidente.

En esta unidad solo serán objeto de estudio aquellos trinomios que sean descomponibles en factores con coeficientes racionales sencillos.

Para fijar el algoritmo correspondiente, sugerimos el siguiente ejemplo, u otro ejemplo similar.

EJEMPLO 2
Descomponga en factores los trinomios siguientes:

a. $x^2 + ax + 20$
b. $a^2 - 8a + 12$
c. $b^2 + 3b - 28$
d. $x^2 - 7xy + 10y^2$
e. $m^4 - 5m^2 - 36$

<u>Resolución:</u>

a. $x^2 + 9x + 20$
Hay que buscar dos números cuya suma sea 9 y cuyo producto sea 20 . Como estos números son evidentemente 4 y 5, tendremos : $x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

b. $a^2 - 8a + 12$
En este caso tenemos que determinar dos números cuya suma sea –8 y cuyo producto sea 12. Tales números son –6 y –2 . Por tanto: $a^2 -8 a+12= (a-6) (a-2)$

c. $b^2+3b-28$

Hay que hallar dos números cuya suma sea 3 y cuyo producto sea –28. Observe que siendo el producto negativo, los números han de tener signos diferentes. Además, el de mayor módulo ha de ser positivo, puesto que la suma de ambos es 3, número positivo .

Los números buscados son 7 y –4.Por tanto: $b^2+3b-28=(b+7)(b-4)$

d. $x^2-7xy+10y^2$

Escrito este trinomio en la forma $x^2-(7y)x+10y^2$ se nota que el problema se reduce a hallar dos monomios cuyo producto sea $10y^2$ y cuya suma sea $-7y$.

Estos monomios son $-5y$ y $-2y$ .Por tanto : $x^2+7xy+10y^2=(x-5y)(x-2y)$

e. m^4-5m^2-36

Este trinomio es de la forma x^2+px+q , puesto que podemos interpretar

$$m^4-5m^2-36 = (m^2)^2-5m^2-36$$

$$= (m^2-9)(m^2+4) \quad \text{ya que } -9+4=-5 \text{ y } -9\,(4)=-36$$

$$= (m+3)\,(m-3)\,(m^2+4), \text{ descomponiendo } (m^2-9)$$

En el inciso d del ejemplo ocurre que al descomponer en factores el trinomio dado, se obtiene una diferencia de cuadrados, como uno de los factores, la cual admite a su vez una nueva descomposición; aquí el profesor puede aprovechar para hacer énfasis en que el proceso de descomposición en factores de una expresión algebraica debe continuarse mientras sea posible.

Para la ejercitación recomendamos el siguiente ejercicio, que presenta variedad de casos de trinomios de la forma x^2+px+q .

Factorizar :

a. $a^2+10a+16$

b. $b^2-18b+25$

c. $x^2+3x-10$

d. $m^2-2m-15$

e. $y^2-10y+21$

f. $n^2-3n-40$

g. $t^2+15t+54$
h. c^2+c-20
i. $r^2-21+4r$
j. $x^2+5xy+6y^2$
k. $b^2-11bc+24c^2$
l. $a^2b^2-ab-42$
m. x^2+4x+6
n. b^6+4b^3-45
o. y^4-5y^2-36
p. $m^2-0{,}8m+0{,}15$
q. $(3x)^2-9(3x)+14$
r. $(2\,a)^2+3(2\,a)-28$
s. t^4+14t^2-15
t. *$(x+y)^2-2(x+y)-24$
u. x^3-9x^2+18x
v. $2\,ac^2+24\,ac+70\,a$
w. $3b^3-6b^2-24b$

No debe dejar de ponerse al menos un caso donde no sea posible realizar la descomposición, como ocurre en el inciso m, así como algunos casos donde aparezca más de una variable y exponente mayor que 2. Los incisos q y r no deben dejar de hacerse, pues contribuyen a preparar las condiciones para descomponer en factores los trinomios de la forma $mx^2+px+q\ (m\neq 1)$. También deben incluirse en la ejercitación algunos casos donde haya que extraer previamente un factor común.

Puede comentarse con los alumnos que existen trinomios de la forma x^2+px+q que al mismo tiempo son cuadrados perfectos, como por ejemplo x^2+6x+9 y que en estos casos puede efectuarse la descomposición aplicando cualquiera de los dos algoritmos estudiados hasta el momento.

Al estudio de los trinomios cuadrados perfectos y los de la forma x^2+px+q, sugerimos dedicar las tres primeras clases de este punto esencial. La distribución podría ser una clase para presentar cada uno de los casos, y la tercera para una ejercitación.

La cuarta clase puede dedicarse a la introducción del trinomio general $mx^2+px+q\ (n\neq 1)$.

La clase puede comenzar con un ejercicio de multiplicación como $(3x+2)(x+3)$. Los alumnos calcularán y llegarán a que $(3x+2)(x+3)=3x^2+11x+6$; destacará que el trinomio obtenido como producto es de la forma $mx^2 + px + q$ con $m \neq 1$. En este caso, $m = 3$; $p = 11$ y q = 6.

Debe hacerse notar a los alumnos cómo se obtienen los coeficientes m; p y q.

$m = 3 = 3 \cdot 1$ producto de los coeficientes de x

$q = 6 = 2 \cdot 3$ producto de los términos independientes

$p = 11 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$ suma de productos de los coeficientes de la variable por los términos independientes.

A continuación puede comentarse el ejemplo siguiente.

EJEMPLO

1. Descomponer en factores:

   a. $a^2+11\,a+12$
   b. $8x^2-10x+3$
   c. $6x^2+5xy-4y^2$

<u>Resolución:</u>

a. $2\,a^2+11\,a+12$ (m=2; q=12; p=11)

Consideremos $2=2\times 1$ y $12= 3\times 4$, y dispongamos estos factores de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \searrow\!\!\!\!\swarrow & 3 & \longrightarrow & (2a+3) \\ 1 & & 4 & \longrightarrow & (a+4) \\ \hline 3 & + & 8 = 11 = p & & \end{array}$$

Luego : $2\,a^2+11\,a+12= (2a+3)(a+4)$

b. Ensayemos con $8= 4\times 2$ y $3= -3\times(-1)$

4 -3 $(4\times(-3))$

2   -1 $(2x - 1)$

-6 - 4 = -10 = p

Por tanto: $8x^2 - 10x + 3 = (4x-3)(2x-1)$

c. $6x^2+5xy-4y^2$ ($m=6$, $q=4y^2$, $p=5y$)

3   4y

2   -1y

8y - 3y = 5y = p

Luego $6x^2+5xy-4y^2 = (3x+4y)(2x-y)$

Concluir con el caso general $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.

Los trinomios de la forma $mx^2 + px + q$, ($m=1$) también pueden descomponerse en factores reduciéndolos a la forma $x^2 + px + q$. Para ello se utiliza el procedimiento siguiente:

Se multiplica y se divide el trinomio dado por m, con lo que se obtiene:

$$mx^2 + px + q = \frac{(mx)^2 + p(mx) + mq}{m}$$

Así, el numerador queda reducido a la forma $x^2 + px + q$ y considerando mx como una sola variable se procede a descomponer dicho numerador en un producto de la forma $(mx+a)(mx+b)$ siempre que sea posible encontrar dos números que multiplicados den mq y que sumados den p.

Luego podría hacerse la pregunta. ¿Cómo obtener (si existen) los factores de un trinomio $mx^2 + px + 9$ $(m \neq 1)$ a partir de sus coeficientes m, p y q?

Una respuesta a esta interrogante la constituye el procedimiento conocido por "tanteo" que presentamos a continuación.

1. Se ensaya una descomposición factorial para m y q (m =ac, q=bd), disponiendo de los factores en dos columnas:

   a b

   c d

2. Se calcula los productos cruzados ad y bc, y se adicionan estos productos

   a b

   c d

   bc + ad

3. Si bc+ad =p , entonces los factores del trinomio dado son (ax+b) (cx+d)

   En caso contrario, debe ensayarse con otra combinación de factores para m y q

Debido a que este procedimiento, enunciado de forma general, puede no resultar de fácil comprensión para los alumnos, recomendamos que el profesor se apoye en un ejemplo particular para explicar dicho procedimiento.

Es importante la observación siguiente, no siempre es posible obtener p a partir de los factores de m y q; luego en estos casos el procedimiento descrito anteriormente no es aplicable o bien el trinomio dado no tiene descomposición.

El ejemplo desarrollado anteriormente contribuye a fijar este procedimiento. Es importante tener en cuenta los signos de los coeficientes m, p y q al hacer el esquema de cálculo, en cada caso.

Para la ejercitación pueden proponerse algunos incisos del ejercicio siguiente.

Descomponer en factores los trinomios siguientes:

a. $2x^2+7x+3$

b. $3a^2-5a+2$

c. $6b^2-5b-21$

d. $3m^2+13m-10$

e. $4y^2-23y+15$

f. $8z^2+6z-5$

g. $10r^2+17r+3$

h. $8y^2-37y-15$

i. $3n^2+n-4$

j. $5s+2s^2-3$

k. $9a^2-10a+1$

l. $-4x^2+19x+5$

m. $2b^2+8b+9$

n. $15m^2+m-6$

o. $16y-12y^2+3$

p. $8x^2-6xy-35y^2$

q. $9a^2+6ab-8b^2$

r. $4c^4+11c^2-3$

s. $6a^4b^6-17a^2b^3+5$

t. $5y^4-18y^2-8$

u. $6ax^2+4ax-16a$

v. $8b^3-6b^2-27b$

w. $20cy^2+cy-c$

x. $5bm^3-22bm^2+8bm$

En la clase siguiente puede presentarse el otro procedimiento para descomponer en factores los trinomios $mx^2 + px + q \quad (m \neq 1)$, reduciéndolos a la forma $x^2 + px + q$,

La clase puede iniciarse con algunos ejercicios de descomposición en factores, tales como:

a. $(5x)^2 + 7(5x) + 10$
b. $(3a)^2 - 8(3a) + 12$
c. $(2b)^2 + 4(2b) - 12$
d. $(4c)^2 - 3(4c) - 18$

El profesor debe recordar que estos trinomios son de la forma $x^2 + px + q$ y que, por lo tanto, se descomponen como tales aplicando el algoritmo correspondiente.

Seguidamente puede informarse a los alumnos que existe un procedimiento para descomponer en factores los trinomios de la forma $mx^2 + px + q \quad (m \neq 1)$ que consiste en reducirlos a la forma $x^2 + px + q$, para lo cual hay que multiplicar y dividir por el coeficiente m. Este procedimiento se puede presentar así

Los trinomios de la forma mx^2 +px +q, (m=1) también pueden descomponerse en factores haciéndolos a la forma x^2+px+q. Para ello se utiliza el procedimiento siguiente:

Se multiplica y se divide el trinomio dado por m, con lo que se obtiene:

$$mx^2 + px + q = \frac{-(mx)^2 + p(mx) + mq}{m}$$

Así, el numerador queda reducido a la forma x^2+px+q y considerando mx como una sola variable se procede a descomponer dicho numerador en un producto de la forma (mx+a)(mx+b) siempre que sea posible encontrar dos números que multiplicados den mq y que sumados den p.

Para una mejor comprensión por parte de los alumnos, el profesor puede explicar dicho procedimiento apoyándose en un ejemplo particular. A continuación sugerimos presentar a los alumnos el ejemplo siguiente. En la práctica, los alumnos elegirán el procedimiento que les resulte más ventajoso para descomponer en factores los trinomios de la forma $mx^2 + px + q \ (m \neq 1)$.

Descomponer en factores:.......

a. $6y^2+5y-4$
b. $9c^2-30c+25$
c. $m^2-8m-33$
d. $8p^2-26p+15$
e. $64x^2-16x-1$
f. $t^2+16t+60$
g. $10b^2-31b+15$
h. $3x^4-26x^2-9$
i. $16x^2+24xy+9y^2$
j. x^4-3x^2-4
k. $cy^2+2cy-80c$
l. $a^3+\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{16}a$
m. $2bc^2-28bc+90b$
n. $4x^3y+10x^2y^2-24xy^3$
o. $3p^3+24p^2q+48pq^2$
p. $y^3-1.6y^2+0.64y$
q. m^5-5m^3-36m
r. $2a^2b-12ab+18b$
s. $4ay^3+13ay^2+3ay$
t. $3x^5-6x^3-24x$
u. $20a^3b^2c+9a^2bc-20ac$
v. $\frac{6}{5}xy^4-\frac{4}{5}xy^2-\frac{2}{5}x$

Una vez estudiados los tres tipos de trinomios y los algoritmos correspondientes para su descomposición factorial, recomendamos dedicar las clases restantes de este punto esencial a la resolución de ejercicios variados sobre descomposición en factores donde se presenten todos los casos estudiados, incluyendo algunas combinaciones sencillas de los mismos.

Es importante que los alumnos reconozcan los trinomios cuadrados perfectos y los de la forma $x^2 + px + q$ como casos particulares del trinomio general $mx^2 + px + q \ (m \neq 1)$ pero que se percaten de las ventajas que ofrece la aplicación de los algoritmos particulares para cada uno de los casos. Solo de esta forma se está garantizando un verdadero desarrollo de habilidades en los alumnos.

Los ejercicios donde se combinan los casos estudiados, desempeñan un importante papel, ya que trazan un método a seguir para descomponer en factores expresiones algebraicas (binomios y trinomios) y fijan la idea de que se debe continuar el proceso de descomposición mientras sea posible.

Pondremos el siguiente ejemplo: $3x^5 - 6x^3 - 24x$

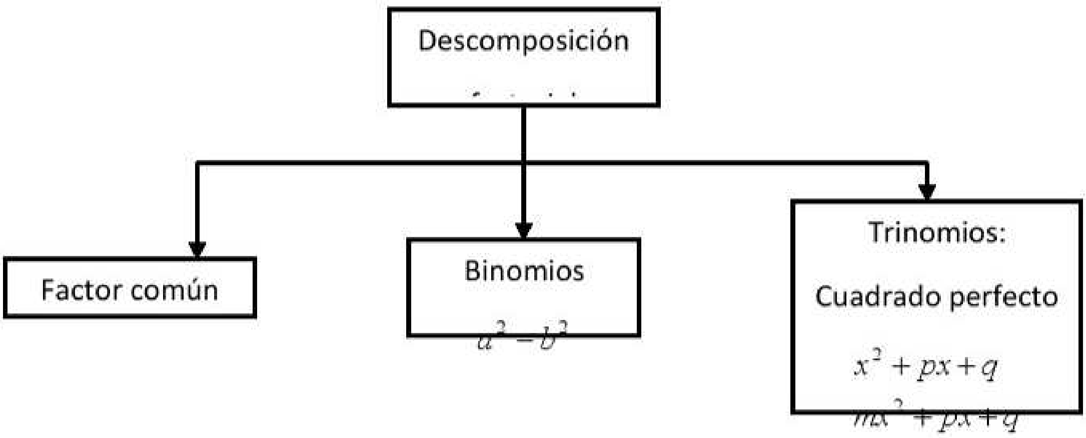
- ¿Existe factor común? Sí, es 3x y entonces $3x^5 - 6x^3 - 24x = 3x(x^4 - 2x^2 - 8)$
- $x^4 - 2x^2 - 8$ ¿qué es? ¿un binomio o un trinomio? ¿tiene descomposición factorial?

Es un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ y sí es posible descomponerlo en factores. Luego, se tiene que: $3x^5 - 6x^3 - 24x = 3x(x^2 - 4)(x^2 + 2)$.

- ¿Es posible continuar el proceso de descomposición?
  Sí, porque uno de los factores del trinomio $(x^2 - 4)$ es una diferencia de cuadrados.
  Se obtiene entonces: $3x^5 - 6x^3 - 24x = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2)$.

Como ya ninguno más de los factores admite a su vez una nueva descomposición, decimos que la expresión dada se ha descompuesto totalmente en factores.

A continuación ofrecemos un esquema en el que se relacionan los distintos casos de descomposición factorial que se estudian en esta unidad temática.



En las últimas clases de este cuarto punto, también pueden proponerse otros ejercicios que contribuyen a integrar conocimientos.

El ejercicio siguiente, que está concebido para los alumnos de más alto rendimiento, tiene como objetivo retomar los conocimientos que poseen los alumnos sobre la representación en lenguaje algebraico de proposiciones matemáticas, conjuntamente con los elementos del tecnicismo algebraico aprendidos y aplicar estos conocimientos a la realización de algunas demostraciones sencillas por vía algebraica.

- Demuestre que las siguientes proposiciones son correctas
  a. El cuadrado de un número natural impar en un número impar .
  b. El producto de un número natural par y un número natural impar es un número par
  c. La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es un número impar .
  d. La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3.
  e. La diferencia entre un número de dos dígitos del número que se forma invirtiendo el orden de sus cifras básicas es divisible por 9.

A manera de ilustración, ofrecemos la resolución de los incisos a) y e) del ejercicio anterior.

a) Puede comprobarse, dando valores particulares, que siempre el cuadrado de un número natural impar, es también un número impar. Ahora bien, para demostrar la validez de esta proposición se debe considerar un número impar cualquiera, que se puede representar de la forma a = 2n + 1, donde $n \in \subseteq$ **(111)**. Hay que demostrar que a^2 es también un número impar.

Demostración:

$$a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

Para poder expresar $4n^2 + 4n + 1$ como la suma de un múltiplo de 2 y el número 1, extraemos factor común 2 en los dos primeros términos del trinomio $4n^2 + 4n + 1$, de donde resulta $a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ que es un número impar, pues se tiene que $(2n^2 + 2n) \in \subseteq$.

2. De forma análoga al caso anterior que acabamos de ilustrar, después de comprobar para algunos casos particulares, debe llegarse a la generalización. Para ello debe considerarse un número cualquiera x de dos dígitos que se representa de la forma $x = 10a + b$, donde a, $b \in \subseteq$; a y b son dígitos y $a \geq 1$. El número y que se obtiene al invertir el orden de las cifras básicas de x, se representa como y = 10b + a .

Para demostrar que la diferencia x – y es divisible por 9, procedemos de la manera siguiente:

$$x - y = (10a + b) - (10b + a)$$

$$= 10a + b - 10b - a$$

$$9a - 9b$$

Extrayendo factor común 9 resulta: $x - y = 9(a - b)$ que es divisible por 9, pues la diferencia $a - b$ es un número entero.

Otro ejercicio con similares características lo constituye el siguiente:

Demostrar que las proposiciones siguientes son verdaderas:

a. La diferencia entre un número de tres dígitos y el número que se forma invirtiendo el orden de sus cifras básicas, es divisible por 99.

b. La suma de tres números naturales consecutivos es par si el número menor es impar; y es impar si el número menor es par.

c. Si a y b son dos números divisibles por el mismo número c ($a, b, c \in N$), entonces la suma de los números a y b es también divisible por c.

d. La expresión $n^2 - 1$ es divisible por 8 para todo número natural n impar ($n>1$).

Este tipo de ejercicios contribuye al desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos y de su capacidad de razonamiento, así como muestra la necesidad del empleo de recursos algebraicos en la realización de algunas demostraciones.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Sugerimos realizar ejercicios que permitan:

- Aplicar los productos notables al cálculo de productos en forma abreviada.
- Simplificar expresiones algebraicas donde haya que aplicar los productos notables estudiados.
- Descomponer en factores expresiones algebraicas que contengan un factor común.
- Descomponer en factores diferencias de cuadrados, incluyendo algunos casos sencillos donde aparezcan combinadas con el factor común.
- Descomponer en factores trinomios cuadrados perfectos, trinomios con el coeficiente de x cuadrado y , trinomios con el coeficiente de x cuadrado distinto de 1.
- Decomponer en factores expresiones donde aparezcan en forma combinada los casos de descomposición factorial estudiados.
- Resolver ejercicios de cálculo con expresiones algebraicas, donde se integren los procedimientos estudiados.

2. FRACCIONES ALGEBRAICAS

En esta unidad temática lo fundamental lo constituye el cálculo con fracciones algebraicas.

Sobre la base de lo que los alumnos conocen desde la primaria acerca del trabajo con fracciones comunes, se estudian las operaciones con fracciones algebraicas como una generalización de las operaciones con fracciones comunes.

Algo significativo en esta unidad temática, es que en el programa actual se tratan primeramente la multiplicación y la división de fracciones algebraicas y después se estudian la suma y la resta.

Este cambio obedece a que la multiplicación y la división se reducen a una simplificación de fracciones algebraicas, mientras que en el caso de la suma y la resta el proceso de cálculo es más complejo.

En toda la unidad se deben aplicar los procedimientos estudiados en la temática anterior, es decir, esta unidad temática debe considerarse como una ejercitación de la descomposición en factores.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 18 horas clase y se pueden distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

1. Simplificación de fracciones algebraicas.
2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.
3. Suma y resta de fracciones algebraicas.

2.1 Simplificación de fracciones algebraicas

Para el tratamiento de este punto esencial se proponen 2 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos desarrollen habilidades en la simplificación de fracciones algebraicas, donde sea necesario aplicar la descomposición en factores.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, primeramente se debe introducir el concepto ***fracción algebraica***.

Hasta el momento, los alumnos han calculado con expresiones algebraicas enteras, es decir, con expresiones que no contienen denominadores con variables.

La primera clase puede comenzar recordando el concepto de fracción común como el cociente indicado de dos números enteros, para luego informar a los alumnos que el cociente indicado $\frac{A}{B}(B \neq 0)$ de dos expresiones se le denomina fracción algebraica, siempre y cuando la expresión B (que aparece en el denominador) contenga al menos una variable con exponente entero positivo. Así, por ejemplo, $\frac{2}{x+3}$ es una fracción algebraica; sin embargo, $\frac{x+3}{2}$ no lo es.

Resulta conveniente pedir a los alumnos algunos otros ejemplos de fracciones algebraicas y también algunos contraejemplos, para de esta forma contribuir a fijar este concepto.

Queremos llamar la atención acerca de que en esta unidad no es objeto de estudio el trabajo con las llamadas "fracciones complejas"; solo se operará con fracciones algebraicas que sean cocientes de dos expresiones algebraicas enteras.

Después de introducir el concepto "fracción algebraica" pueden proponerse algunos incisos de los ejercicios siguientes.

Los incisos del a hasta el g pueden resolverse sin dificultad; en el inciso h) deben excluirse los valores que anulan a cada uno de los factores; para los incisos i) y j) deben descomponerse previamente en factores cada uno de los denominadores.

A continuación puede recordarse a los alumnos en qué consiste la simplificación de fracciones comunes y de monomios. Puede proponerse el ejercicio siguiente:

- Simplifica:

a. $\frac{4}{10}$

b. $\frac{12}{18}$

c. $\frac{8a^3b^2}{2ab^3}$

d. $\frac{3x^4(y+1)}{6x^3(y+1)}$

Al llegar al inciso d), puede aprovecharse para plantear a los alumnos que el factor por el cual se simplifica puede ser, tanto un monomio como un polinomio.

Algo muy importante que debe tenerse en cuenta al simplificar una fracción algebraica es que tanto el numerador como el denominador deben estar expresados como productos para poder efectuar la simplificación. Esta aclaración es importante, ya que en algunos casos los alumnos tienden a simplificar sumandos, lo cual es totalmente incorrecto desde el punto de vista aritmético y algebraico.

Para fijar la simplificación de fracciones algebraicas, resulta apropiado analizar con los alumnos el siguiente ejemplo o, proponer otro ejemplo similar. Es importante que los alumnos se percaten de la necesidad de utilizar la descomposición factorial en la mayor parte de estos casos.

Para la ejercitación puede hacerse una selección de algunos incisos de los siguientes ejercicios.

Simplificar tanto como sea posible.

a. $\frac{3p^2q}{6p^2q-3pq^3}$

b. $\frac{x^2+2x-24}{x-4}$

c. $\frac{3y^2+7y-20}{y+4}$

d. $\frac{am-0.7a}{m^2-0.49}$

e. $\frac{2n+8}{n^2+n-12}$

f. $\frac{4-y^2}{4-4y+y^2}$

g. $\frac{t^2-11t+30}{t^2-5t}$

h. $\frac{6a^2-31a+35}{9a^2-25}$

i. $\frac{4b^2-8b}{b^3+5b^2-14b}$

j. $\frac{4c^2+7c-15}{c^2+12c+27}$

k. $\dfrac{y^2+6yz+9z^2}{y^2-9z^2}$

l. $\dfrac{a^2b-a^2}{a^2b^2-a^2}$

m. $\dfrac{m(m-1)+2(m-1)}{m^2+m-2}$

n. $\dfrac{(3-x)^2}{x^2-3x}$

o. $\dfrac{6a-4at}{4t^2-9}$

p. $\dfrac{x^2(4x+1)-4(4x+1)}{4x^2+9x+2}$

En el inciso n) del ejercicio al factorizar el denominador resulta $\dfrac{(3-x)^2}{x(x-3)}$, por lo cual muchos alumnos pueden pensar que no es posible efectuar una simplificación, pero el profesor puede recordar algo que ya fue estudiado en la primera temática: $(a-b)^2=(b-a)^2$, luego en este caso $(3-x)^2=(x-3)^2$ y resulta que $\dfrac{(3-x)^2}{x(x-3)}=\dfrac{x-3}{x}$

.

En el inciso o) al factorizar resulta $\dfrac{2a(3-2t)}{(2t+3)(2t-3)}$.

Puesto que $3-2t=-(2t-3)$, entonces conviene aplicar este artificio para poder simplificar y se tiene que.

$$\frac{2a(3-2t)}{(2t+3)(2t-3)}=\frac{-2a(2t-3)}{(2t+3)(2t-3)}=-\frac{2a}{2t+3}.$$

En los siguientes ejercicios se vincula la simplificación de fracciones algebraicas con el cálculo del valor numérico de expresiones.

1. Sean A= 3 a^2+2 a-8 y B= 9 a^2-16 entonces:

   a. Calcule y simplifique C= $\dfrac{A}{B}$

   b. Halle el valor numérico de C para a= -4.

   c. ¿ Para qué valores de a(a$\in \nabla$) está definida la expresión C?

2. Sean P = x^2-8x+12 y Q = 4x-8

   a. Calcule y simplifique R= $\dfrac{P}{Q}$

b. Halle el valor numérico de R para x= $\frac{20}{3}$

c. Determine para qué valores de x ($x \in \nabla$) se cumple R>4

Los ejercicios siguientes contribuyen a fijar la simplificación mediante el razonamiento inverso. A manera de ilustración ofrecemos a continuación la resolución del ejercicio 2.

1. ¿Por cuál expresión debe ampliarse $\frac{m+n}{2}$ para obtener como resultado $\frac{m^2-n^2}{2m-2n}$?
2. La expresión $\frac{x+4}{x-1}$ se obtiene al simplificar una fracción cuyo numerador era x^2+5x+4 ¿ Cuál era la fracción original?.
3. La expresión $\frac{2a-3}{3a+1}$ se obtiene al simplificar una fracción cuyo denominador era $6a^2+11a+3$ ¿Cuál era la fracción original?

En el ejercicio 2, de la fracción original solo se conoce el numerador; llamémosle *D* al denominador. Según el texto del ejercicio se tiene que $\frac{x^2+5x+4}{D} = \frac{x+4}{x-1}$, luego x + 4 es factor del numerador y $x-1$ es factor del denominador. Como $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$, entonces resulta evidente que el otro factor del denominador es x + 1, que es el factor por el cual se simplifica la fracción dada. El denominador es, entonces $(x+1)(x-1)=x^2-1$ y la fracción original es $\frac{x^2+5x+4}{x^2-1}$.

2.2 Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 6 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos desarrollen habilidades en la multiplicación y en la división de fracciones algebraicas, aplicando la descomposición en factores y la simplificación.

Desde el punto de vista metodológico, sugerimos introducir ambas operaciones en una misma clase.

La primera clase puede iniciarse con algunos ejercicios de multiplicación y división con fracciones comunes, tales como:

- Calcula:

  a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$

b. $\frac{6}{5}\times\frac{10}{9}$

c. $\frac{4}{3}\div\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{12}\div\frac{14}{3}$

Con estos ejercicios se recuerdan los algoritmos para la multiplicación y la división de fracciones comunes.

Seguidamente se informará que para multiplicar o dividir fracciones algebraicas se procede de manera análoga, como si estuvieran operando con fracciones comunes, pero teniendo presente la descomposición en factores, siempre que sea posible con vistas a dar el resultado en forma simplificada.

A continuación puede presentarse a los alumnos los siguientes procedimientos a seguir para multiplicar y dividir fracciones algebraicas.

Para multiplicar fracciones algebraicas se precede de forma análoga que para multiplicar fracciones comunes.

Luego, si tenemos las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ se cumple que:

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}(B,D\neq 0).$$

Con el objetivo de obtener un resultado ya simplificado , es conveniente proceder de la manera siguiente:

1. Factorizar los numeradores y denominadores de las fracciones dadas (cuando no lo estén ya).
2. Simplificar los factores que sean comunes a los numeradores y denominadores .
3. Efectuar las multiplicaciones indicadas.

Para dividir fracciones algebraicas se precede de forma análoga que para dividir fracciones comunes .

Luego, si tenemos las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ se cumple que:

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}(B,D\neq 0)$$

Luego:

Para dividir una fracción algebraica por otra, se efectúa el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

Para fijar dichos procedimientos, recomendamos los siguientes ejemplos u otros similares creados por el profesor.

EJEMPLO .

Efectúe las multiplicaciones siguientes:

a. $\frac{3a^3b}{10c} \times \frac{15bc}{6a^2b^3}$

b. $\frac{18x^2y}{x^2 - y^2} \times \frac{x + y}{6xy}$

c. $\frac{3c^2 - 11c + 10}{8c^2} \times \frac{2c}{c^2 - 2c}$

d. $\frac{m^2 - 4}{m + 3} \times \frac{2m + 6}{m^2 + 2m - 8}$

Resolución:

a. $\frac{3a^3b}{10c} \times \frac{15bc}{6a^2b^3}$

Tanto los numeradores como los denominadores, en este caso, son monomios. Luego, procedemos a simplificar y después efectuamos los productos indicados:

$$\frac{3a^3b}{10c} \times \frac{15bc}{6a^2b^3} = \frac{a}{2} \times \frac{3}{2b} = \frac{3a}{4b}$$

En esta primera clase debe abordarse todo lo referente a la presentación de los procedimientos de cálculo con sus ejemplos correspondientes y dedicar las 5 clases restantes a la ejercitación.

Para las clases de ejercitación pueden proponerse bloques de ejercicios debidamente dosificados, donde se presenten todos los casos de descomposición factorial estudiados.

En aquellos casos donde aparezcan combinadas multiplicaciones y divisiones, éstas se realizan en el mismo orden en que aparecen; tales son los casos de los incisos n), ñ) y o) del ejercicio siguiente.

Calcule y simplifique:

a. $\frac{15b^2c}{b^2 - c^2} \cdot \frac{b - c}{10bc}$

b. $\frac{a^2 - 64}{6a} \div \frac{a^2 + 8a}{3a^2}$

c. $\frac{4c}{c^2 - 1} \cdot \frac{3c^2 - 3c}{12c^2}$

d. $\frac{4p^2}{p^2 + 2p + 1} \div \frac{8p}{2p + 2}$

e. $\frac{y^2 + 9y + 18}{y - 5} \cdot \frac{5y - 25}{y^2 + 3y}$

f. $\frac{2m^2 + m}{2m^2} \div \frac{m^2 - 2m - 3}{m^2 - 3m}$

g. $\dfrac{6r^2+5r-4}{3r+4}\cdot\dfrac{6r^2+3r}{4r^2-1}$

h. $\dfrac{3b^2-11b-20}{b^2-12b+35}\div\dfrac{2b^2}{b^2-7b}$

i. $\dfrac{x^2-6x+9y^2}{2x-y}\cdot\dfrac{4x-2y}{x^2-9y^2}$

j. $\dfrac{a^2-3a+54}{2a-18}\div\dfrac{a^2-36}{a^2-6a}$

k. $\dfrac{12y^2+5y-6}{y^2+10y+16}\cdot\dfrac{2y^2+16y}{4y^2}$

l. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+2x}\div\dfrac{2x+4}{4x}$

m. $\dfrac{c^2-25}{2c-10}\cdot\dfrac{c^2-2c}{c^2+3c-10}$

n. $\dfrac{x^2-5x+6}{3x-15}\cdot\dfrac{6x}{x^2-x-30}\div\dfrac{2x^2-4x}{x^2-25}$

o. $\dfrac{b^2+6b-16}{2b^2+13b+15}\div\dfrac{2b}{4b-32}\div\dfrac{b^2-64}{b^2+5b}$

Tampoco debe dejar de hacerse ejercicios como los siguientes, que constituyen otra variedad. El profesor, si lo estima conveniente puede, a su vez, crear otros ejercicios.

1. Si A = $x^2 + 10x + 25$ y B = $x^2 + 3x - 10$, probar que $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{5x-10}{x+5}=5$

2. Sean R = $\dfrac{y^2+2y-15}{y-3}$ y Q = $\dfrac{4y^2}{2y^3-50y}$

   a. Calcular T = R $\times$ Q

   b. ¿Para qué valor de v se cumple T = 1?

3. Sean M = $\dfrac{a^2-a-12}{a^2-9}$ y N = $\dfrac{3a-12}{2a^2+a-21}$

   a. Calcular K = M N

   b. Determinar el valor numérico de K para a = 1.3

4. Si el producto de dos factores algebraicos es $\dfrac{x+2}{2x}$ y uno de los factores es $\dfrac{x^2+9x+14}{4x^2}$ calcular el otro factor.

2.3 Suma y resta de fracciones algebraicas

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 10 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos aprendan a determinar el *mcm* de varias expresiones algebraicas (monomios y polinomios), desarrollen habilidades en la suma y resta de fracciones algebraicas, así como en la resolución de ejercicios donde aparezcan en forma combinada las operaciones con fracciones algebraicas estudiadas en la unidad.

La primera clase puede dedicarse al cálculo del *mcm* de dos o más números (lo cual ya es conocido por los alumnos). Esto debe recordarse mediante algunos ejercicios como los que aparecen a continuación.

- Calcula el *mcm* de:
  a. 9 y 12
  b. 18 y 60
  c. 8, 14 y 20

Ilustraremos la resolución del inciso b).

1) Se descomponen los números dados en sus factores primos:
   18 = 2×3^2 60 = $2^2 \times 3 \times 5$
2) Se calcula el producto de todos los factores, comunes y no comunes, con su mayor exponente: $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Luego, el *mcm* de 18 y 60 es 180.

Una vez recordado este procedimiento, debe informarse a los alumnos que para determinar el *mcm* de monomios o polinomios se procede de la misma forma. En el caso de los monomios, se descomponen los coeficientes en sus factores primos; mientras que en el caso de los polinomios, estos se factorizan aplicando los casos de descomposición factorial estudiados.

Seguidamente, el profesor puede hacer referencia al procedimiento para determinar el *mcm*.

Para ello se debe tener presente lo siguiente:

1. Se descomponen las expresiones dadas en sus factores primos.
2. Se calcula el producto de dos factores primos, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Ahora se sugiere analizar con los alumnos el siguiente ejemplo, destacando en cada caso la analogía que existe con el procedimiento respectivo en aritmética.

Calcular el mínimo común múltiplo de las expresiones algebraicas siguientes:

a. $6a^2$; $9ab$
b. $15x^2$; $10x^2 + 5x$
c. $c^2 - 9$; $c - 3$
d. $y^2 + 5y$; $y^2 + 10y + 25$; $y^2 + 7y + 10$

<u>Resolución:</u>

a. $6a^2$; $9ab$

Descomponiendo los coeficientes de los monomios en sus factores primos, resulta:

$6a^2 = 2 \times 3 \times a^2$

$9ab = 3^2 \times a \times b$

El producto de los factores primos (comunes y no comunes) con su mayor exponente es $2 \times 3^2 \times a^2 \times b = 18a^2b$.

Por tanto, el mcm de $6a^2$ y $9ab$ es $18a^2b$

b. $15x^2$; $10x^2 + 5x$

Descomponiendo en factores resulta:

$15x^2 = 3 \times 5 \times x^2$

$10x^2 + 5x = 5x(2x + 1)$

El mcm es $15x^2(2x + 1)$

c. $c^2 - 9$; $c - 3$

$c^2 - 9 = (c + 3)(c - 3)$

Como se puede observar, la expresión $c - 3$ está contenida en $(c+3)\times(c-3)$.
Luego el mcm es en este caso $(c + 3)(c - 3)$

d. $y^2 + 5y$; $y^2 + 10y + 25$; $y^2 + 7y + 10$

$$y^2 + 5y = y(y + 5)$$
$$y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$$
$$y^2 + 7y + 10 = (y + 5)(y + 2)$$

mcm: $y(y + 5)^2(y + 2)$

Para la ejercitación sugerimos el ejercicio siguiente u otros similares creados por el profesor.

1. **Determinar el mcm de las expresiones siguientes:**

a. $4a^2$; $6ab$
b. $9c^2d$; $12cd^2$
c. $18x^3y^2$; $24x^2y^3$
d. $3r^2$; $12rt^2$; $8rtz$
e. $12m^2n$; $30mn^2$; $6m^2n^3$
f. $3x^2y$; $x^2y + xy^2$
g. $4a^2$; $6a^2 - 30a$
h. 15 ; $3b + 6$
i. $36a^2$; $4ax - 12ay$
j. mn ; $mn^3 - mn^2$
k. $c^2 - 25$; $c - 5$
l. $x^2 - y^2$; $3x + 3y$
m. $a + 5$; $a^2 + 2a - 15$
n. $y^2 + 8y$; $y^2 + 16y + 64$
o. $x^2 - 9x$; $2x - 18$
p. $a^2 + 3a - 10$; $a^2 - 4a + 4$
q. $3b^2 - 2b - 8$; $b^2 - 7b + 10$

En la segunda clase se debe introducir el procedimiento para sumar o restar fracciones algebraicas, que también resulta análogo al que se sigue en aritmética.

Para ello se puede comenzar la clase proponiendo a los alumnos algunos ejercicios de suma y resta con fracciones comunes, tales como:

a. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$
b. $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$
c. $\frac{4}{9}+\frac{7}{12}$
d. $\frac{9}{8}-\frac{3}{10}$

A medida que el alumno vaya resolviendo estos ejercicios, el profesor irá recordando los pasos que se siguen para realizar estas operaciones.

1) Se busca el *mcm* de los denominadores.
2) Se amplían los numeradores.
3) Se calcula el numerador y se reduce.
4) Se simplifica el resultado, si es posible.

Seguidamente, se puede presentar a los alumnos el siguiente procedimiento

1. Determinar el mcm de los denominadores, que será el denominador común.
2. Dividir el denominador común por cada uno de los denominadores y ampliar los numeradores.
3. Efectuar los productos indicados en el numerador y reducir términos semejantes, en caso de que existan.
4. Simplificar el resultado si es posible.

Luego analizar el ejemplo que se encuentra a continuación o proponer otros con similares características.

Es de destacar que para determinar el *mcm* de los denominadores, en los casos que sean polinomios, es conveniente realizar previamente la descomposición factorial de estos, siempre que sea posible.

El profesor debe llamar la atención de los alumnos acerca de que en todos los casos siempre se debe analizar la posibilidad de simplificar el resultado o previamente algunas de las fracciones de la suma. En este último caso el profesor debe explicar que, de no simplificarse primero, se puede hacer al final, pero los cálculos se hacen más complicados; tal es el caso del inciso d) del ejemplo anterior, el cual sugerimos resolverlo de ambas formas, es decir, simplificando una de las fracciones al inicio o dejando la simplificación para el final; los alumnos se percatarán que la primera vía resulta mucho más ventajosa.

Para la ejercitación no debe dejar de proponerse bloques, de sumas y restas como los que aparecen en los siguientes ejercicios.

1. Efectuar las sumas siguientes:

a. $\frac{2}{5a}+\frac{4}{3ab}$

b. $\frac{3}{2m}+\frac{m-2}{6m^2}$

c. $\frac{3}{4y^2}+\frac{5}{6y}$

d. $\frac{2x-y}{8x^2y}+\frac{7}{12xy}$

e. $\frac{3}{a}+\frac{2}{a-b}$

f. $\frac{4}{c-2}+\frac{3}{c+5}$

g. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$

h. $\frac{1}{a+1}+\frac{a+3}{a^2-1}$

i. $\frac{2b+5}{b^2-49}+\frac{3}{b+7}$

j. $\frac{3n+5}{n^2+5n+6}+\frac{n+3}{n+2}$

k. $\frac{c}{c-6}+\frac{c-42}{c^2-6c}$

l. $\frac{2y+8}{y^2+4y+16}+\frac{5y}{y+4}$

m. $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{x^2-2x-3}$

n. $\frac{a^2+2a}{(a+2)^2}+\frac{3a+8}{a+2}$

o. $\frac{4x+2y}{4x^2-y^2}+\frac{1}{2x-y}$

p. $\frac{5}{m+3t}+\frac{30t}{m^2-9t^2}$

q. $\frac{b^2-b}{b^2+2b+1}+\frac{b}{b+1}$

r. $\frac{6}{y^2-3y-10}+\frac{5}{y^2-10y+25}$

s. $\frac{5x-2}{5x^2-17x+6}+\frac{4x}{x^2-6x+9}$

2. Efectuar las restas siguientes:

a. $\frac{5m}{6t}-\frac{m+t}{8t}$

b. $\frac{y-1}{3y}-\frac{y+2}{y^2}$

c. $\frac{a+2b}{3a}-\frac{4ab^2+3b^3}{6ab^2}$

d. $\frac{x^2+3x-2}{2x^2}-\frac{2x+5}{4x}$

e. $\frac{7}{a}-\frac{6}{a+1}$

f. $\frac{5m+3}{(m+1)^2}-\frac{2}{m-1}$

g. $\frac{5c+d}{c^2-d^2}-\frac{2}{c-d}$

h. $\frac{4}{x+3}-\frac{2}{x-2}$

i. $\frac{3b+8}{b^2-b-30}-\frac{1}{b-6}$

j. $\frac{4t}{t+4}-\frac{2t^2-8t}{t^2-16}$

k. $\frac{3a-11}{a^2-8a+15}-\frac{2}{a-5}$

l. $\frac{9x+3y}{9x^2-y^2}-\frac{3}{3x-y}$

m. $\frac{c}{c-1}-\frac{2c+1}{c^2+c-2}$

n. $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}-\frac{1}{x-4}$

o. $\frac{y^2+10y}{y^2-16}-\frac{7}{y-4}$

p. $\frac{5}{n-5}-\frac{n+30}{n^2-3n-10}$

q. $\dfrac{a^2+4ab-3b^2}{a^2-9b^2}-\dfrac{b}{a+3b}$

r. $\dfrac{2x-1}{2x-3}-\dfrac{4x-6}{4x^2-12x+9}$

s. $\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{2y}{x^3-xy^2}$

3. Calcular

a. $\dfrac{y+2}{6xy}+\dfrac{5}{9x}$

b. $\dfrac{2}{3mn^2}-\dfrac{1}{2m^2n}$

c. $\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{2}{a-5}$

d. $\dfrac{4}{b-2}-\dfrac{2}{3b}$

e. $\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{1}{y}$

f. $\dfrac{2}{c+3}+\dfrac{4c+24}{c^2-9}$

g. $\dfrac{4y+6}{y^2+5y+6}-\dfrac{2}{y+3}$

h. $\dfrac{2}{x-6}+\dfrac{3x-18}{x^2-12x+36}$

i. $\dfrac{3b^2+14b}{9b^2-16}-\dfrac{3}{3b-4}$

j. $\dfrac{5}{a+1}+\dfrac{7a+2}{a^2+3a+2}$

En estos bloques de ejercicios debe incluirse la mayor variedad posible, atendiendo a que:

- Se presenten descomposiciones variadas.
- La fracción suma puede ser simplificada.
- Pueda simplificarse previamente alguna de las fracciones.

A manera de ilustración, comentaremos la resolución siguiente ejercicio.

$$\frac{a+7}{a^2-7a+10}-\frac{3}{2-a}=\frac{a+7}{(a-5)(a-2)}-\frac{3}{2-a}$$

Aquí podemos observar a simple vista que el *mcm* de los denominadores sería $(a-5)(a-2)(2-a)$, pero se puede apreciar que los factores $(a-2)$ y $(2-a)$ solo difieren en los signos. Debe informarse a los alumnos que en este caso (y en otros donde ocurra algo similar) resulta conveniente hacer un cambio de signos, de forma tal que el *mcm* sea una expresión más simple y así facilitar los cálculos posteriores.

Para explicar la fundamentación del cambio de signos, el profesor puede informar que en una fracción suelen considerarse tres signos: el signo del numerador, el signo del denominador y el signo de la fracción. Debe plantearse que si en una fracción dada se cambian simultáneamente dos de estos signos, la fracción original no varía.

Para ilustrar lo anterior se puede utilizar un ejemplo numérico; así tenemos que si $\frac{1}{2} = 0{,}5$ entonces también se cumple: $\frac{-1}{-2} = 0{,}5$; $-\frac{-1}{2}0{,}5$; $-\frac{1}{-2} = 0{,}5$

Una vez hecha esta breve explicación, puede retornarse al ejercicio propuesto.

$$\frac{a+7}{(a-5)(a-2)} - \frac{3}{2-a}$$

$$= \frac{a+7}{(a-5)(a-2)} + \frac{3}{a-2}$$ cambiando el signo a la fracción y al denominador

El *mcm* resultaría entonces $(a-5)(a-2)$ y el resto de los pasos ya es conocido por los alumnos.

Aunque casos como éste no deben constituir el centro de la ejercitación, entendemos que no deben dejar de proponerse al menos uno o dos ejercicios con estas características.

Ya en las 3 o 4 últimas clases de este punto esencial deben incluirse ejercicios en los que aparezcan de forma combinada las distintas operaciones con fracciones algebraicas; estos ejercicios contribuyen en gran medida a sistematizar los procedimientos a seguir para estas operaciones y debe recalcarse que el orden es el mismo que ya conocen de grados anteriores al operar con números.

Recomendamos para ello el siguiente ejercicio.

Efectuar:

a. $(\frac{5x}{x^2-16}+\frac{3}{x-4})\times\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}$

b. $\frac{2b-1}{b^2-2b+1}+\frac{b^2+3b+2}{3b^2+b-10}:\frac{b^2-1}{9b-15}$

c. $\frac{a^2-16}{2a^2-8a}\times\frac{2a^2}{a^2+3a-4}-\frac{2}{a^2-1}$

d. $(\frac{6m}{m^2-4}-\frac{3}{m-2})\div\frac{12}{m^2-m-6}$

e. $\frac{48}{y^2-4}+\frac{24y}{y^2-3y-10}\times\frac{y^2-5y}{2y^2}$

f. $(\frac{4}{a+2b}+\frac{16b}{a^2-4b^2})\div\frac{8a}{a^2-4ab+4b^2}$

g. $\frac{8c}{c^2+12c+27}\div\frac{4c^2}{c^2+9c}-\frac{c+5}{c^2+7c+12}$

h. $\frac{x^2-81}{x^2-3x-54}\div(\frac{4x+8}{x^2+x-30}-\frac{2}{x+6})$

Los ejercicios siguientes también contribuyen a sistematizar las operaciones estudiadas.

1. Sean A = $\frac{3y^2-17y-6}{y^2-4}$; B = $\frac{y^3-4y^2-12y}{y^2+4y+4}$ y C = $\frac{y^2-5y-1}{y^2-2y}$

   a. Hallar M = A : B.
   b. Comprobar que M + C = 1.

2. Si X = $\frac{9b^2-16}{3b^2-11b-20}$; Y = $\frac{b^2+2b-15}{b^2-25}$ y Z = $\frac{3b^2+3}{b^2-9}$

   Probar que X : Y – Z = $\frac{5}{b+3}$.

3. Sean P = $\frac{m^2+11m+30}{m^2+10m+25}$; Q = $\frac{3m+7}{m^2-25}$ y R = $\frac{1}{m+5}$

a. Calcular la expresión T = P : (Q – R)
b. Determinar para qué valor de m se cumple que T = -1.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.
Se deben realizar ejercicios que permitan lo siguiente:

- Simplificar fracciones algebraicas
- Multiplicar y dividir fracciones algebraicas.
- Sumar y restar fracciones algebraicas
- Resolver ejercicios donde aparezcan en forma combinada las operaciones con fracciones algebraicas.

3. ECUACIONES FRACCIONARIAS. PROBLEMAS

En esta unidad temática se continúa el trabajo con las ecuaciones al estudiar las ecuaciones fraccionarias de primer grado, para cuya resolución es necesario aplicar procedimientos algebraicos estudiados en las temáticas anteriores, como son la descomposición factorial y el cálculo del *mcm* de monomios y polinomios.

Posteriormente se aplican los conocimientos adquiridos sobre ecuaciones fraccionarias al despeje en fórmulas y a la resolución de problemas, de forma análoga a como se hizo en noveno grado.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 12 horas clase y se puede distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

1. Ecuaciones fraccionarias.
2. Despeje en fórmulas
3. Resolución de problemas

3.1 Ecuaciones fraccionarias

Para el tratamiento de este punto esencial se proponen 5 horas. Lo esencial que se debe lograr en él es que los alumnos desarrollen habilidades en la resolución de ecuaciones fraccionarias que conducen a lineales, mediante la eliminación de los denominadores, y donde tengan que aplicar procedimientos algebraicos estudiados en las temáticas anteriores.

En la primera clase, para comenzar puede proponerse a los alumnos que resuelvan algunas ecuaciones de las ya estudiadas en grados anteriores, como por ejemplo:

- Resuelva:
  a. $7x-3(x-4)=2x+8$
  b. $2x(x+4)-10=(2x+1)(x+2)$
  c. $\frac{x-1}{5}+\frac{7x}{10}=7$

Una vez resueltas dichas ecuaciones, el profesor puede aprovechar para informar que a ecuaciones como éstas se les suele denominar **ecuaciones enteras**, pues las mismas contienen expresiones algebraicas enteras, es decir, en ellas no aparecen denominadores con variables.

A continuación puede explicarse que en este epígrafe resolverán ecuaciones que contienen fracciones algebraicas, es decir, donde la variable aparece al menos en un denominador y que a este tipo de ecuaciones se les denomina **ecuaciones fraccionarias**. Así, por ejemplo $\frac{2}{x+3}=\frac{3}{x}$; $\frac{1}{6}+\frac{11}{3x}=2$; son ecuaciones fraccionarias; sin embargo la ecuación $\frac{x-1}{5}+\frac{7x}{10}=7$ no lo es, pues aunque contiene denominadores, la variable no aparece en ningún denominador.

Seguidamente, puede pasarse a explicar que para resolver una ecuación fraccionaria, el procedimiento que se utiliza en la práctica consiste en eliminar los denominadores y transformar la ecuación dada en una ecuación entera. Para ello se multiplican ambos miembros de la ecuación fraccionaria por el *mcm* de los denominadores. Este procedimiento aparece a continuación.

1. Se halla el mcm de los denominadores.
2. Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm de los denominadores

Para ilustrar lo anterior, puede analizarse con los alumnos el ejemplo que aparece a continuación, o escoger otro similar.

1.23 EJEMPLO

En la ecuación $\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4$ el mcm de los denominadores es 3x.
Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 3x resulta:

$$3x\left(\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}\right)=3x\times 4$$

$$3x\frac{5}{x}+3x\frac{x-4}{3x}=12x$$

$$15+x-4=12x$$

que es una ecuación entera.

Ahora bien la operación que hemos efectuado de multiplicar ambos miembros por el mcm de los denominadores, equivale a dividir el mcm de lo denominadores por cada denominador y multiplicar cada cociente por el numerador respectivo.
Así en la ecuación anterior resulta:

$$\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4; \quad mcm: 3x$$

$$5\times 3x+1(x-4)=4\times 3x$$

$$15+x-4=12x$$

Puede explicarse que este procedimiento para eliminar denominadores se hace extensivo al caso de las ecuaciones enteras que contengan denominadores numéricos.

Recomendamos analizar cada uno de los casos que aparecen en el siguiente ejemplo o proponer otros casos con similares características a los del citado ejemplo.

1.24 EJEMPLO

Resuelva y compruebe las ecuaciones siguientes:

a. $\frac{x-3}{x+1}=\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{x}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2x}$

c. $\frac{4}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$

<u>Resolución:</u>

a. $\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{3}{5}$

El mcm de lo denominadores es 5(x + 1).
Desde un inicio tenemos que suponer $x \neq -1$, puesto que la ecuación no tiene sentido alguno para x = -1, ya que se anula un denominador.

Multiplicando el mcm 5(x+1) a cada miembro de la igualdad, resulta

$5(x - 3) = 3(x + 1)$

Resolviendo esta ecuación tenemos que:

$$
\begin{aligned}
5x - 15 &= 3x + 3\\
5x - 3x &= 15 + 3\\
2x &= 18\\
x &= 9
\end{aligned}
$$

Ahora debemos comprobar si el valor de x obtenido satisface la ecuación original.

M.I. $\dfrac{9-3}{9+1}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$, M.D. $\dfrac{3}{5}$; M.I. = M.D., luego: x = 9

b. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{2x}$

El mcm de los denominadores es 6x.
Teniendo en cuenta que $x \neq 0$, resulta:

$$
\begin{aligned}
6\times 2 + x\times 1 &= 3\times 5\\
12 + x &= 15\\
x &= 15 - 12\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Comprobación

M.I. M.D.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2\times 3}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

Luego: x = 3

c. $\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{16}{x^2-4}$

Para determinar el mcm, en este caso, resulta conveniente factorizar el denominador $x^2 = 4$

$$\frac{4}{x-2} = \frac{16}{(x+2)(x-2)} \qquad \text{mcm: } (x+2)(x-2)$$

Teniendo presente que $x \neq 2$, al suprimir los denominadores resulta:

$$\begin{aligned} 4(x+2) &= 16 \\ 4x + 8 &= 16 \\ 4x &= 16 - 8 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Como se puede observar, el valor $x = 2$ es solución de la ecuación transformada $4(x + 2) = 16$. Sin embargo, la ecuación original no tiene sentido para $x = 2$ ya que al suprimir por este valor se anulan los denominadores y la división por cero no está definida.

En este caso, al suprimir los denominadores decimos que se ha introducido una raíz extraña, es decir, un valor que es solución de la ecuación transformada, pero que no lo es de la ecuación original.

Luego, la ecuación original no tiene solución, o sea, $S = \varnothing$.

Se debe tener presente que al multiplicar ambos miembros de una ecuación fraccionaria por el *mcm* de los denominadores, hay que excluir aquellos valores que anulen algún denominador y que, por tanto, anulan también el *mcm*.

Esta consideración resulta muy importante, ya que en algunos casos la ecuación que se obtiene después de suprimir los denominadores, tiene como solución un valor que anula (al menos) un denominador de la ecuación original y decimos entonces que el valor obtenido es una solución o raíz extraña, ya que el mismo no es solución de la ecuación original. Tal es el caso del inciso c) del ejemplo anterior, cuya resolución aparece desarrollada y que debe comentarse con los alumnos. De lo contrario, puede ponerse otro ejemplo de ecuación donde también se introduzca una raíz extraña.

Siempre que se resuelva una ecuación fraccionaria, debe insistirse con los alumnos en la necesidad de verificar si la solución obtenida anula algún denominador, ya que en este caso la ecuación original carecería de solución.

Cuando se estudien las ecuaciones de segundo grado, se continuará el estudio de las ecuaciones fraccionarias que conducen a cuadráticas, cuyo proceso de resolución es análogo al que se aplica en esta unidad donde también puede darse el caso de que se introduzcan raíces extrañas.

En la práctica, el proceso de resolución de una ecuación fraccionaria se puede resumir en los pasos siguientes:

1. Se halla el *mcm* de los denominadores.
2. Los numeradores de ambos miembros de la ecuación se multiplican por los factores de ampliación y se omiten los denominadores.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $\frac{5}{2t}-\frac{3}{8}=\frac{1}{t}$ debe aspirarse a que los alumnos procedan de la manera siguiente:

$$\frac{5}{2t}-\frac{3}{8}=\frac{1}{t} \quad \text{mcm: 8t}$$

$$20-3t=8$$

$$-3t=-12$$

$$t=4$$

No deben darse reglas especiales para aquellas ecuaciones que pueden resolverse "multiplicando en cruz", ya que en algunos casos esto puede complicar los cálculos y conducir, incluso a una ecuación de segundo grado, que no es reducible a lineal.

Por ejemplo, hay ecuaciones como $\frac{2b+3}{b-3}=\frac{2b}{b+9}$ donde la supresión de los denominadores, multiplicando por el *mcm* $(b-3)(b+9)$, equivale a multiplicar en cruz: $(2b+3)(b+9)=2b(b-3)$ que es una ecuación reducible a lineal.

Sin embargo, en la ecuación $\frac{5m+3}{m^2-81}=\frac{3}{m-9}$ al multiplicar por el *mcm* $(m+9)(m-9)$ se obtiene la ecuación lineal sencilla $5m+3=3(m+9)$, mientras que al multiplicar en cruz resulta la ecuación de segundo grado: $5m^2-42m-27=3m^2-243$ cuyo procedimiento de resolución aún no es conocido por los alumnos.

Para evitar que ocurran casos como este último, recomendamos de forma general, para todos los casos, eliminar los denominadores multiplicando ambos miembros de la ecuación dada por el *mcm*.

En las clases de ejercitación correspondientes a la resolución de ecuaciones fraccionarias, deben incluirse ejercicios variados, atendiendo a la naturaleza de los denominadores de dichas ecuaciones y a la complejidad del proceso de cálculo en las mismas. Para ello recomendamos elaborar bloques de ecuaciones, que pueden seleccionarse de las que aparecen en los ejercicios correspondientes al epígrafe 8 del texto y del ejercicio 16 al final del capítulo.

1. **Resuelva y compruebe las ecuaciones siguientes**

a. $\frac{x-5}{4x}=\frac{3}{2}$

b. $\frac{4}{x+3}=\frac{2}{5}$

c. $\frac{5}{a+2}=\frac{3}{a}$

d. $\frac{2}{b+5}=\frac{1}{3}$

e. $\frac{x+5}{x+4}=\frac{8}{7}$

f. $\frac{3}{m+1}=\frac{6}{m+3}$

g. $\frac{5}{b-5}=\frac{7}{3b-7}$

h. $\frac{x+7}{x-2}=\frac{x+5}{x+2}$

i. $\frac{2t+1}{t-1}=\frac{2t-5}{t-5}$

j. $\frac{1}{x}=\frac{11}{2x}-\frac{3}{4}$

k. $\frac{4}{3}+\frac{3}{x}=\frac{17}{3x}$

l. $\frac{4}{x}-\frac{x+2}{2x}=1$

m. $\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{10}{3x}$

n. $\frac{1}{6}-\frac{2}{9x}=\frac{x^2+4}{6x^2}$

ñ. $\frac{3}{c+3}=\frac{9}{c^2-9}$

o. $\frac{a+3}{a+7}=\frac{2a-1}{3a+21}$

p. $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}=\frac{5}{2m+2}$

q. $\frac{5y-1}{y^2-7y+10}=\frac{2}{y-5}$

r. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$

s. $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x+6}=\frac{4x+2}{x^2+2x-24}$

2. Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a. $\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{4}{3x}$

b. $\dfrac{6}{2a+7}=\dfrac{4}{a}$

c. $\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{3}{5}$

d. $\dfrac{2m}{2m-3}=\dfrac{m+2}{m}$

e. $\dfrac{b-2}{b-3}=\dfrac{b+6}{b+4}$

f. $\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{2}{t}$

g. $\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{5y}$

h. $\dfrac{2}{3x}+\dfrac{2x-1}{4x^2}=\dfrac{5}{12x}$

i. $\dfrac{c-1}{2c}+\dfrac{c-2}{c}=\dfrac{7}{8}$

j. $\dfrac{n}{3}-\dfrac{n^2-5n}{3n-7}=\dfrac{2}{3}$

k. $\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

l. $\dfrac{5-a}{4a}-\dfrac{5}{6}=-\dfrac{2}{a}$

m. $\dfrac{3}{b-1}+\dfrac{b-1}{b+1}=\dfrac{b+1}{b-1}$

n. $\dfrac{t+1}{2t-4}+\dfrac{3t-1}{6}=\dfrac{t}{2}$

o. $\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x+2}$

p. $\dfrac{16}{x^2-16}=\dfrac{2}{x-4}$

q. $\dfrac{3}{m-5}+\dfrac{7}{m+6}=\dfrac{5m+3}{m^2+m-30}$

r. $\dfrac{2}{y-2}-\dfrac{1}{y-3}=\dfrac{1}{y^2-5y+6}$

s. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2-1}=\dfrac{2x-1}{2x+1}$

3. Determinar el valor de x que satisfaga las siguientes igualdades:

a. $\dfrac{7}{x+4}=\dfrac{3}{x}$

b. $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{7}{2}$

c. $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2x-4}{x-3}$

d. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{4x}=\dfrac{5}{12}$

e. $\dfrac{10-x}{9x}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{-1}{2}$

f. $\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{2x}=\dfrac{1}{3x}$

g. $\frac{2x-1}{x^2+3x}=\frac{3}{x+3}$

h. $\frac{6x+10}{15}+\frac{3x+5}{5x-25}=\frac{2x}{5}$

i. $\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}$

j. $\frac{2}{x-3}=\frac{16}{x^2+2x-15}$

k. $\frac{4}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{4}{x^2-9}$

l. $\frac{x}{x+1}-\frac{4x^2-7}{x^2-x-2}=-3$

m. $\frac{3}{1+x}-\frac{1+x}{x-1}=\frac{x^2}{1-x^2}$

n. $\frac{1}{n}-\frac{m}{x}=\frac{1}{mn}-\frac{1}{x}$

o. $\frac{b}{2x}-\frac{x-a}{x}=\frac{b}{2a}$; $(b\neq -2a)$

p. $\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x}$; $(a\neq \frac{2}{3})$

q. $\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{2}{x}+1$; $(m\neq n)$

r. $\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{ax+a^2}=\frac{x+a}{a}$

No debe dejar de incluirse algunos casos que conduzcan a la introducción de raíces extrañas, tales como el inciso r) del ejercicio 1, el o) del ejercicio 2 y el 1) del 3.

La comprobación por escrito de las ecuaciones no debe exigirse en todos los casos; lo que sí debe exigirse es verificar si la solución obtenida anula o no un denominador.

Para los alumnos de más alto rendimiento pueden proponerse algunas ecuaciones fraccionarias literales, como son las correspondientes a los últimos 5 incisos del ejercicio 3 anterior.

A continuación ofrecemos la resolución de algunas de estas ecuaciones.

$\frac{1}{n}-\frac{m}{x}=\frac{1}{mn}-\frac{1}{x}$.

Desde un inicio tenemos que suponer m, n, x $\neq$ 0, pues en caso contrario la ecuación carecería de sentido. Multiplicando ambos miembros por mnx resulta:

$$mx-m^2n=x-m$$

$$mx-x=m^2n-mn$$

$$(m-1)x=m^2n-mn$$

$$x = \frac{m^2 n - mn}{m-1}$$

$$x = \frac{mn(m-1)}{m-1}$$

Simplificando por m – 1, suponiendo m ≠ 1, se obtiene como solución x = mn.

Ahora bien, considerando el caso m = 1, resulta la ecuación $\frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{x}$ que se satisface para cualquier valor $x \in \nabla$, excepto para x = 0.

Luego la respuesta es:

- $x = mn$, si $m \neq 1$
- $x \in \nabla$, $x \neq 0$, si m = 1

Los incisos p), q) y r) se resuelven de forma análoga al anterior que acabamos de ilustrar, solo que en estas ecuaciones no es necesario hacer una diferenciación de casos, ya que desde un inicio se establece una restricción.

$$\frac{1}{x+a} + \frac{x^2}{ax+a^2} = \frac{x+a}{a}$$

$$\frac{1}{x+a} + \frac{x^2}{a(x+a)} = \frac{x+a}{a}$$, factorizando $ax + a^2$

Suponiendo a ≠ 0 y x ≠ -a, al suprimir denominadores resulta la ecuación:

$$a + x^2 = (x+a)^2$$

$$a + x^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$2ax = a - a^2$$

$$x = \frac{a - a^2}{2a}$$

$$x = \frac{a(1-a)}{2a}$$

de donde, al simplificar resulta $x = \frac{1-a}{2}$ que es la solución de esta ecuación. Aquí no hay que hacer una diferenciación de casos, pues desde un inicio se considera a ≠ 0; de lo contrario la ecuación original carecería de sentido.

3. 2 Despeje en fórmulas

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren 2 horas Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos apliquen sus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones fraccionarias al despeje en fórmulas, donde la variable a despejar aparezca en algún denominador.

El trabajo con fórmulas ya es conocido por los alumnos desde años anteriores; por lo tanto el objetivo que se persigue en este grado no es abordar un contenido nuevo, sino tratar este como una aplicación más de los conocimientos sobre el tecnicismo algebraico que poseen los estudiantes, quienes deben tener bien claro que al despejar una variable en una fórmula, lo que hacen es resolver una ecuación.

La primera clase puede iniciarse proponiendo algunos ejercicios donde haya que despejar determinados elementos en fórmulas, como por ejemplo:

- En cada una de las fórmulas siguientes, despeja el elemento que se indica:
  - **a.** $V = V_0 + at;\ a$
  - **b.** $A_T = \pi r(g + r);\ g$
  - **c.** $A = 2ah + 2bh;\ h$
  - **d.** $S = \frac{a}{1-q};\ q$

Los dos primeros incisos deben ser resueltos sin dificultad; en el inciso c) debe llamarse la atención acerca de la necesidad de extraer h como factor común, mientras que en el inciso d) la variable a despejar aparece en un denominador y que, por tanto, el problema se reduce a resolver una ecuación fraccionaria.

A continuación puede remitirse a los alumnos al ejemplo siguiente e ir analizando cada uno de los casos; siempre se debe tener presente, al multiplicar o dividir por una expresión que contenga variable, la restricción correspondiente para que dicha expresión sea diferente de cero. El inciso d) del ejemplo resulta interesante desde el punto de vista que hay que aplicar la descomposición en factores y la simplificación de fracciones algebraicas.

1.25 EJEMPLO

Despejar la variable que aparece en cada caso.

a. $M = \dfrac{xy}{3z};\ (z)$

b. $n = \dfrac{t}{1+t};\ (t)$

c. $I = \dfrac{E}{R+r};\ (r)$

d. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b-c}{a+c};\ (c)$

<u>Resolución.</u>

a. $M = \dfrac{xy}{3z};\ (z)$

Para despejar z, en este caso, resulta conveniente eliminar dicha variable del denominador. Se tiene entonces que:

$$zM = \frac{xy}{3}$$

Ahora, dividiendo por M resulta:

$$z = \frac{xy}{3M}$$

b. $I = \dfrac{E}{R+r}\ ;(r)$

$I(R + r) = E$

$IR + Ir = E$

$Ir = E - IR$

$$r = \frac{E - IR}{I}$$

c. $\quad n = \dfrac{t}{1+t} : (t)$

$n(1 + t) = t$ eliminando el denominador

$n + nt = t$ aplicando propiedad distributiva

Como la variable a despejar (t) aparece dos veces, agrupamos en un solo miembro los términos que contienen dicha variable.

$n = t - nt$

Extrayendo factor común t:

$n = t(1 - n)$

Dividiendo por $1 - n$ (suponemos $n \neq 1$) resulta:

$$\frac{n}{1-n} = t$$

d. $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{b-c}{a+c}$; (c)

suprimiendo denominadores se tiene:

$a(a + c) = b(b - c)$
$a^2 + ac = b^2 - bc$
$ac + bc = b^2 - a^2$
$c(a + b) = b^2 - a^2$

$c = \dfrac{b^2 - a^2}{a + b}$ suponiendo $a \neq -b$

Descomponiendo en factores el numerador para simplificar la fracción, resulta:

$$c = \frac{(b+a)(b-a)}{a+b}$$

$c = b - a$

Para la ejercitación recomendamos los ejercicios siguientes. En el ejercicio 2 se vincula el despeje con el cálculo numérico, mientras que el ejercicio 3 contribuye a la articulación con la asignatura Física.

1. Despejar en cada caso, la variable que se indica:

a. $P = \dfrac{m}{V}$; (V)

b. $\dfrac{v}{v_0} = 1 + at$; (Vo)

c. $A = \dfrac{x + y}{2z}$; (z)

d. $B = \dfrac{n}{y - 2}$ (y)

e. $x = \dfrac{2}{p + q}$ (p)

f. $K = \dfrac{a + b}{b}$; (b) (K ≠ 1)

g. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{i}{f}$; (f)

h. $\dfrac{a}{w} = \dfrac{b}{u} + \dfrac{c}{v}$; (v)

i. $2a = \dfrac{x + b}{x}$; (x)

j. $S = \dfrac{ut - r}{t - 1}$; (t) (S ≠ u)

k. $R = \dfrac{2ab}{1 - 2b}$; (b) (a ≠ -R)

l. $S = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$; (q) (S ≠ u)

m. $\dfrac{x}{m} = \dfrac{m - y}{x + y}$; (y)(x ≠ m)

n. $\dfrac{x}{3y} = \dfrac{a + 3y}{x - a}$; (a)(x ≠ -3y)

2. En las siguientes igualdades, despejar las variables que se indican y calcular su valor numérico para los valores indicados en cada caso:

a. $N = \frac{p-m}{3k}$; (k) para p = 10; m = 5,2 N = 0,8

b. $B = \frac{5}{a+c}$; (a) para B = 2; c = 1,5

c. $S = \frac{a}{1-q}$; (q) para S = 4/3; a = 4/9

d. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$; (p') para p = 5,4; f = 4,8

e. $i = \frac{m}{m-b}$; (m) para i = 9; b = 24

f. $f = \frac{w}{2r}(r+s)$, (r) para F = 20; ω = 5; s = 14

g. $A = \frac{cp+q}{p-q}$; (p) para A = 12,5; q = 4; c = 6,5

h. $\frac{t}{M+t} = \frac{v}{n}$; (t) para M = 8,4; v = 5; n = 11

3. La fórmula $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ da, en electricidad, la resistencia R equivalente a dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo.

a. ¿Cuál es la resistencia equivalente a dos resistencias de 200 Ω y de 120 Ω conectadas en paralelo?

b. ¿Qué valor debe tener una resistencia que conectada en paralelo con otra resistencia de 300 Ω da una resistencia equivalente de 180 Ω?

3.3 Resolución de problemas

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 5 horas. Lo fundamental que se debe lograr en él es que los alumnos apliquen sus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones fraccionarias y la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico a la resolución de problemas intramatemáticos y relacionados con la vida práctica que conduzcan al planteo de una ecuación fraccionaria de primer grado.

En noveno grado los alumno resolvieron una gran cantidad de problemas variados que conducían al planteo de una ecuación lineal y de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; luego, con el estudio de este punto esencial, lo que se persigue es dar continuidad al tratamiento de problemas que se resuelven por vía algebraica mediante ecuaciones.

Como condición previa para poder resolver problemas que conducen al planteo de ecuaciones, es importante saber expresar en lenguaje algebraico las condiciones que contiene el enunciado de los mismos. Es por ello que la primera clase puede comenzar con un breve repaso sobre la traducción del lenguaje común al algebraico, con una participación activa por parte de los alumnos, de manera que logren reactivar estos conocimientos.

Pueden proponerse ejercicios como los siguientes:

1. Representar utilizando variables:

   a. Un número aumentado en 3.
   b. Un número disminuido en 5.
   c. El triplo de un número aumentado en 2.
   d. La razón entre un número y su duplo disminuido en 1.

2. Un obrero puede realizar un trabajo en:

   a. 3 días
   b. 4 días
   c. x días

      i) Representar la parte del trabajo que realiza en 1 día, teniendo en cuenta que se mantiene el mismo ritmo de trabajo.

3. Sean: x la velocidad (en km/h) de un bote en agua tranquila e y la velocidad de la corriente del río por el cual navega. Representar el tiempo que demora el bote en navegar 3 km.

   a. a favor de la corriente (río abajo)
   b. en contra de la corriente (río arriba)

Estos ejercicios (u otros similares) contribuyen a garantizar las condiciones previas que deben dominar los alumnos para resolver una gran parte de los problemas que aparecen comúnmente.

Para la resolución de los primeros problemas por parte de los alumnos, sugerimos comenzar por algunos problemas sobre fracciones; pueden seleccionarse de los siguientes.

1. El numerador de una fracción es dos unidades mayor que el denominador. Si se suma 1 al numerador y al denominador, la fracción resulta equivalente a 3/2. Hallar la fracción original.

2. El denominador de una fracción excede en cuatro unidades al numerador. Si se resta 5 al numerador y al denominador, la fracción resultante es equivalente a 3/5. ¿Cuál es la fracción original.

3. Hallar el número que sumando al numerador y al denominador dé 7/10 convierte esta fracción en otra equivalente a $\frac{3}{4}$.

4. Si al numerador y al denominador de la fracción 8/13 se reta un cierto número, se obtiene una nueva fracción que es reducible a 1/2. Hallar dicho número.

5. Si al numerador de la fracción 4/21 se le suma el duplo de cierto número y al denominador se le resta el triplo del mismo número, se obtiene una fracción equivalente a 5/6 ¿Cuál es el número?

6. Un constructor puede levantar un muro en 6 días y otro constructor en 8 días. ¿En qué tiempo harán el muro trabajando los dos juntos?

7. Pedro puede hacer una obra en 3 días, Juan en 4 días y Carlos en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra si trabajan los tres juntos?

8. Dos obreros trabajando conjuntamente demoran 2 días para hacer la reparación de una maquinaria. El primero trabajando solo, lo haría en 3 días. ¿Cuántos días tardaría el segundo obrero en hacer la reparación él solo?.

9. María y Laura trabajando juntas confeccionan en 2,0 horas cierta cantidad de camisas. María trabajando sola emplearía el doble del tiempo que demoraría Laura en confeccionar el total de camisas ella sola. ¿En cuánto tiempo, realizarán la actividad cada una de ellas por separado?

10. Un plomero puede limpiar el patio de la escuela en 12 minutos, un segundo plomero lo puede hacer en 18 minutos. ¿Cuánto tardarán en limpiar el patio si trabajan juntos?

11. Un camión puede cargar en 8,0 horas, tierra suficiente para llenar un hoyo. Un camión más grande puede llenar el mismo hoyo en 6,0 horas. ¿En cuánto tiempo se llenaría el hoyo, si se utilizan a la vez dos de los camiones pequeños y uno grande?

12. Fernando puede construir una mesa en 6,0 horas y Javier tarda 12 horas en construir una mesa similar. ¿En cuánto tiempo podrían construir la mesa si trabajan juntos?

13. Dos llaves simultáneamente puede llenar un tanque en 17 horas ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada una por separado si la primera invierte el doble del tiempo que la segunda?

14. Una llave puede llenar un depósito en 28 minutos y otra en 42 minutos. Si se abren ambas llaves simultáneamente, ¿en qué tiempo llenarán el tanque?

15. Una piscina se puede llenar por una llave en 4,0 horas y otra llave en 3.0 horas; se puede vaciar por un desagüe en 6.0 horas. Si se abren simultáneamente las dos llaves y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

16. Dos llaves simultáneamente llenan un tanque en 12 horas. Si una de las llaves trabajando sola puede llenarlo en 30 horas, ¿cuántas horas demorarán en llenarlo la otra llave trabajando sola?

17. Un tanque se puede llenar por una llave en 20 minutos. Después que esta llave ha estado trabajando durante 5,0 minutos, se abre una segunda llave y entonces se llena el tanque en 3.,0 minutos más. ¿Cuánto tiempo tardaria la segunda llave en llenar el tanque?

18. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 20 km río arriba que 28 km río abajo. Si la velocidad de la corriente del río es de 2,0 km/h, ¿cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

19. Un muchacho puede remar a una velocidad de 8,0 km/h en agua tranquila. En un río, emplea el mismo tiempo en remar 5,0 km río arriba que 15 km río abajo. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

20. Un avión puede volar 800 millas con un viento a favor de 15,0 millas por hora en el mismo tiempo que vuela 750 millas en contra del mismo viento. Hallar la velocidad del avión.

21. La distancia entre dos ciudades A y B es de 120 km. Un móvil parte de A hacia B con una velocidad que es igual a 2/3 de la velocidad que emplea en regresar de B hacia A. Si en ida y vuelta invierte un total de 5,0 horas, ¿cuál es la velocidad de ida y cuál la de regreso?

22. El volumen de un cuerpo C_1 es el doble del volumen de un cuerpo C_2 aumentado en 15. Si la razón entre los volúmenes de ambos cuerpos es 4/11, ¿cuál es el volumen de cada cuerpo?

23. La razón entre las longitudes del lado de un cuadrado y la base de un triángulo es 3/5. La longitud de la base del triángulo es igual al triplo de la longitud del lado del cuadrado, disminuído en 8.

    a. Calcular las longitudes del lado del cuadrado y la base del triángulo.
    b. Si la altura del triángulo es 5,0 u, calcular las áreas de ambas figuras.

24. En un edificio de apartamentos se quiere hacer un arreglo. El costo dividido entre todos sale a $30.000 por cada apartamento, pero hay dos apartamentos cuyos

inquilinos, por problema económicos, no pueden colaborar. Prescindiendo de estos, el costo saldría en \$35.000 por cada apartamento. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio? ¿En cuánto sale la obra?

Puede tomarse como modelo el ejemplo siguiente.

1.26 EJEMPLO

Un obrero puede hacer un trabajo en 3 días, mientras que otro obrero puede hacer el mismo trabajo en 5 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente? (Entiéndase días como jornadas de trabajo diarias).

Resolución:

Designemos los dos obreros con A y B, respectivamente y consideremos como x la cantidad de días que demoran en hacer el trabajo conjuntamente.

	Días que demoran en hacer el trabajo	Parte del trabajo que hacen en 1 día
A	3	1/3
B	5	1/5
A y B	x	1/x

Puesto que la parte que hace el obrero A en un día más la parte que hace el obrero B en un día es igual a la parte del trabajo que hacen ambos en un día, resulta la ecuación:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$$

Suprimiendo los denominadores se tiene:

$$5x + 3x = 15$$
$$8x = 15$$

$$x = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$ días que demorarían trabajando en conjunto.

Comprobación:

Adicionando las partes del trabajo que hacen en un día cada uno por separado se tiene:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

La parte del trabajo que hacen en un día conjuntamente es;

$$\frac{1}{\frac{15}{8}}=\frac{8}{15}$$

Respuesta: los dos obreros trabajando conjuntamente harán el trabajo en

$1\frac{7}{8}$ días.

Queremos aclarar que no debe imponerse a los alumnos un patrón o esquema determinado a seguir para la resolución de problemas. No obstante, desde un punto de vista metodológico, resulta conveniente tener en cuenta determinadas etapas al resolver un problema, lo cual facilita su comprensión y posterior resolución.

Estas etapas son las siguientes:

1. Comprender el enunciado del problema.
2. Encontrar una vía de solución y elaborar un plan de solución.
3. Realizar el plan de solución elaborado.
4. Comprobar la solución obtenida.

A manera de ilustración, ejemplificaremos la resolución (por etapas) del ejercicio 11, del sistema de ejercicios anterior.

Un camión puede cargar en 8,0 horas, tierra suficiente para llenar un hoyo. Un camión más grande puede llenar el mismo hoyo en 6,0 horas. ¿En cuánto tiempo se llenaría el hoyo, si se utilizan a la vez dos de los camiones pequeños y uno grande?

1. **Para comprender el problema:**

- ¿De qué se trata en el problema?
  Se trata de llenar de tierra un hoyo, utilizando dos tipos de camiones.

- ¿Qué datos se dan?

Cantidad de tiempo (en horas) que tardaría cada camión, por separado, en llenar el hoyo.

- ¿Qué se busca?
  Tiempo en el que se llenaría el hoyo, utilizando a la vez, los dos tipos de camiones.

- ¿Es necesario utilizar variables?
  Sí, por ejemplo x.

- ¿Qué representa la variable x?
  El tiempo que demoraría en llenarse el hoyo, si los camiones trabajan conjuntamente.

- ¿Resulta conveniente plasmar los datos en un esquema?
  Sí, por ejemplo:

	Tiempo (en h) que demoran en llenar el hoyo	Parte del hoyo que llenan en 1 hora.
2 camiones pequeños	4	$\frac{1}{4}$
1 camión grande	6	$\frac{1}{6}$
Los 2 camiones pequeños y el grande	x	$\frac{1}{x}$

2. **Para la vía de solución :**

- ¿Qué relación se puede establecer entre los datos y las variables?
  Puesto que la parte del hoyo que llenan los dos camiones pequeños en una hora, más la parte del hoyo que llenan conjuntamente en una hora, resulta: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$

- ¿A qué modelo matemático conduce el problema?
  A una ecuación fraccionaria de primer grado.

3. **Para el plan de solución:**

- Resuelve la ecuación planteada

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

$$3x+2x=12$$

$$5x=12$$

$$x=\frac{12}{5}=2{,}4h$$

4. **Para comprobar el problema:**

- ¿Es lógico el resultado? ¿Por qué?
  Sí, porque el tiempo que demoran los camiones conjuntamente es menor que el que demoraría cada uno por separado.

- ¿Es posible comprobar? ¿Cómo?
  Sí es posible, verificando si la solución hallada satisface los requisitos planteados en el problema.

Esta comprobación no necesariamente tiene que quedar plasmada por escrito en el cuaderno del estudiante, sino que puede hacerse incluso mentalmente como una forma de autocontrol.

Queremos reiterar nuevamente que no se exigirá a los alumnos un esquema de resolución por pasos o etapas; simplemente el ejemplo ilustrado anteriormente solo debe constituir una guía para el profesor acerca de las preguntas o impulsos que debe dar a los estudiantes en los primeros ejercicios para que esto los ayude en el proceso de resolución del problema, que debe quedar escrito en sus cuadernos de la forma más simple posible.

No deben proponerse problemas de un solo tipo en la misma clase, sino por el contrario, estos deben ser variados para que los alumnos no se "mecanicen" en el proceso de resolución.

Recomendamos analizar con los alumnos los ejemplos que aparecen desarrollados, ya que estos ilustran una forma de cómo proceder para resolver una gran parte de los problemas propuestos en la ejercitación.

La representación de los datos y las incógnitas, así como las relaciones entre éstos en una tabla o esquema facilita en muchos casos la comprensión del problema, aunque esto no tiene que constituir un requisito obligatorio para los alumnos.

A continuación ofrecemos algunas aclaraciones y sugerencias con respecto al sistema de ejercicios que aparece en el texto, así como ilustraremos la resolución de algunos de los problemas.

Los ejercicios 1 al 5 del sistema de ejercicios anterior son problemas sobre fracciones que se resuelven de forma análoga al ejemplo presentado, que aparece desarrollado.

Los ejercicios 6 al 12 son problemas de trabajo conjunto, cuya resolución es similar a la del ejemplo desarrollado.

Los ejercicios 13 al 17 son problemas de tanques, cuyo procedimiento de resolución es análogo al de los problemas de trabajo conjunto, es decir, por reducción a la unidad.

En el ejercicio 15 hay que tener en cuenta la parte de la piscina que se llena en 1 hora por cada llave y también la parte que se vacía por el desagüe. Resulta entonces la ecuación: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$, donde x representa el tiempo que demora en llenarse la piscina.

Presentamos a manera de ilustración algunos ejercicios.

- **<u>Ejercicio 17</u>:**

Consideremos x el tiempo (en minutos) que demoraría la segunda llave en llenar el tanque. Si la primera llave puede llenar el tanque en 20 minutos, entonces en los 5 min que está trabajando sola, ha llenado $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ de la capacidad del tanque; por lo tanto cuando se abre la segunda llave lo que queda por llenar es $\frac{3}{4}$ del tanque por ambas llaves, en un tiempo de 3 minutos. Luego, resulta la ecuación: $3\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{4}$.

* **Ejercicio 21**:

Consideremos x la velocidad que emplea el móvil en el regreso (de B hacia A). Luego, la velocidad en el viaje de ida es $\frac{2}{3}x$. Representemos los datos en la tabla siguiente:

	Distancia	Velocidad	tiempo
Ida	120	$\frac{2}{3}x$	$120/\frac{2}{3}x$
Regreso	120	x	120/x

Puesto que entre la ida y el regreso se invierte un total de 5 horas, resulta la ecuación $\frac{120}{\frac{2}{3}x}+\frac{120}{x}=5$ que se transforma en $\frac{180}{x}+\frac{120}{x}=5$.

Los ejercicios 22 y 23 son problemas sencillos, relacionados con conocimientos sobre geometría.

- **Ejercicio 25**:

Sea x el número de apartamentos que tiene el edificio.

Puesto que el costo dividido entre todos sale a \$30 por apartamento, entonces el costo total de la obra es de \$30x.

Prescindiendo de dos apartamentos, el costo saldría en \$35 por cada uno de los (x −2) apartamentos restantes. De esta relación resulta la ecuación: $\frac{30x}{x-2}=35$.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Se sugiere presentar ejercicios que tomen en cuenta los siguientes aspectos:

- Resolver ecuaciones fraccionarias de primer grado.
- Realizar el despeje en fórmulas donde la variable a despejar aparece en un denominador.
- Resolver problemas que conducen al planteo de ecuaciones fraccionarias.

8 UNIDAD 3

1.27 SISTEMAS ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES.

1.27.1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables tienen una importante función dentro de la formación matemática básica de los alumnos al ampliar sus conocimientos mediante la explicación matemática de los procedimientos para resolver problemas.

Esta unidad ha sido concebida para que los alumnos aprendan a resolver problemas que conduzcan al planteo y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Los conocimientos y habilidades correspondientes a esta unidad son condiciones previas importantes para la comprensión de las relaciones entre función y ecuación, en particular serán útiles en el estudio de las ecuaciones de segundo grado y las funciones cuadráticas, así como en el estudio de las ecuaciones y funciones irracionales.

Es importante destacar que en la elaboración de los procedimientos analíticos para resolver los sistemas de ecuaciones se trabaja con el principio de reducción de lo desconocido a lo conocido, al reducir los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables a una ecuación lineal con una variable, la cual el alumno ya sabe resolver.

La presente unidad cuenta también con el método gráfico para resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Se ha presentado dentro de una sola unidad debido a la similitud de procedimientos, aunque la gran diferencia está en la interpretación que se hace de la respuesta.

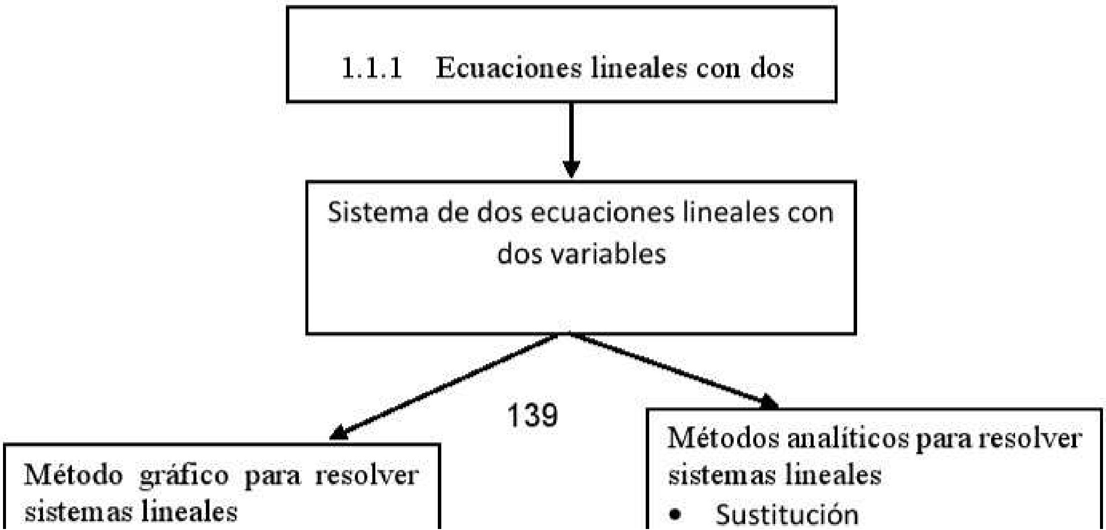
Se a considera importante que el alumno que va a concluir su formación básica posea las herramientas necesarias para resolver inecuaciones. Desde el octavo grado el estudiante se encuentra trabajando con ecuaciones e inecuaciones lineales y conoce la forma de resolverlas, ahora se espera hacer una ampliación de estos procedimientos, para la resolución de sistemas de dos inecuaciones lineales.

Para un mejor desarrollo del trabajo con la unidad, se han hecho las siguientes consideraciones:

- Incluir el procedimiento de adición y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Hacer algunas modificaciones en el tratamiento metodológico de los contenidos en esta unidad.
- Incrementar el número de horas dedicadas a la resolución de problemas.
- Adicionar la resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales.

En general se ha simplificado el tratamiento teórico de los contenidos y se ha incrementado el tiempo de la ejercitación, destacándose que lo esencial es la resolución de sistemas por el método de suma (resta) o el de sustitución, la resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales y la resolución de sistemas de inecuaciones lineales por el método gráfico.

1.27.2 COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD.



1.27.3 HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos desarrollen habilidades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables aplicando el método de reducción o el método de sustitución, y en la resolución de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, así como en la resolución de problemas que conducen al planteo y resolución de los sistemas de ecuaciones estudiados.

1.27.4 EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Dominen los conceptos de sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, solución y conjunto solución de estos sistemas.
- Interpreten gráficamente el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables según las posiciones relativas de dos rectas en el plano.
- Determinen mediante las razones de los coeficientes correspondientes de las ecuaciones que forman el sistema el número de soluciones del mismo.
- Sepan resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método gráfico.
- Desarrollen habilidades en la resolución de los sistemas estudiados utilizando el método de reducción o el método de sustitución, así como en la resolución de problemas que conducen al planteo y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

- Resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, a través del método gráfico.

El logro de estas exigencias se materializa en la práctica cuando los alumnos son capaces de resolver ejercicios como los siguientes:

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 5y = 18 \\ y = 4x - 34 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 7 + 5y \\ y = 2x - 14 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x + 3y = -10 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4y - 3x = 11 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 12 - 9x = 6y \\ -4y + 5 = 3x \end{cases}$

g. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2(x - 5) + y = -3 \\ 4x - (y - 1) = 18 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 5 - 2x2y - x \\ 3y - 4 = 5x + 8 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 3a - (b + 2) = 2b + 1 \\ 5b + 3a = 1 + (a + 3) \end{cases}$

k. $\begin{cases} \dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{8} = 0 \\ \dfrac{1}{7}a - \dfrac{3}{4}b = 7 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 0{,}5x = 1 + 0{,}2y \\ 0{,}7y + 0{,}5x = 2 \end{cases}$

2. La suma de dos números es 80. Si la diferencia entre el quíntuplo de uno y el duplo del otro es 15, ¿cuáles son los números?

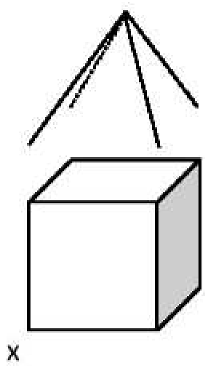
3. Dos números están en la razón 4 : 7. Si se suma 5 al primero y se resta 3 al segundo la nueva razón es 13 : 11, ¿cuáles son los números?

4. Determinar analíticamente las coordenadas del punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $3x - 2y + 12 = 0$ y $3x + y + 3 = 0$.

5. El ángulo exterior β' de un triángulo mide 131°. La suma del duplo más el triplo de los ángulos interiores no adyacentes a β' es 263°, ¿cuánto miden los ángulos interiores del triángulo?

6. En una cooperativa dedicada al cultivo de banano, 35 hectáreas están sembradas de plátanos y maduros. Después de recogida la mitad del cultivo de plátanos y la tercera parte del cultivo de maduros quedaron sembradas 20 hectáreas. ¿Cuántas has de cada producto se sembraron?

7. En la figura siguiente se representa un cuerpo compuesto por un cubo y una pirámide tal que sus bases coincidan. Si la razón entre los volúmenes del cubo y la pirámide es 4 : 3 y el volumen total del cuerpo es de 112 cm, ¿cuál es el volumen del cubo y cuál el de la pirámide?



8. Grafique las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} 2x - 2y > -1 \\ 3x + y < 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x < y + 2 \\ 2x + y \geq -3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - \dfrac{y}{3} < 3 \\ \dfrac{x}{3} + y > 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x \leq 2y \\ x < y - 2 \end{cases}$

1.27.5 INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguiente unidades temáticas:

- Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolución gráfica.
- Métodos analíticos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Resolución de problemas.
- Método gráfico para la resolución de sistemas de 2 inecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Esta unidad temática por contener poco contenido no se ha dividido en puntos esenciales.

Para el desarrollo de la misma se dispone de 4 horas. Lo esencial que debe lograr el profesor en esta unidad temática es que los alumnos comprendan los conceptos: sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables y solución de un sistema de ecuaciones; la relación entre la posición relativa de dos rectas en el plano con el número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, así como el método gráfico para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Se sugiere dedicar la primera clase para introducir los conceptos de ecuación lineal con dos variables, solución de este tipo de ecuaciones, sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, así como el análisis gráfico de la relación entre las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y la posición relativa de dos rectas en el plano. La segunda clase se puede dedicar al estudio de la relación entre el número de soluciones de los sistemas estudiados y de la posición relativa de las rectas desde del punto de vista analítico, y a introducir el método gráfico para resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Las dos clases restantes se pueden dedicar a ejercitar los contenidos tratados en las dos primeras clases.

No debe dejar de hacerse ejercicios como los siguientes:

1.- Comprobar gráficamente sí los sistemas de ecuaciones siguientes tienen

una, infinitas o ninguna solución.

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5y + 5x = 1 \\ 2x = -5y + 14 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 8y + 2x = 20 \\ 1.6y + x = 4 \end{cases}$

2. Determinar analíticamente si los sistemas siguientes tienen o no solución. En caso que tengan solución, especificar si es única o si son infinitas:

a. $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2y = 2x - 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3{,}5x + 8y = 0 \\ y = \dfrac{3}{5}x \end{cases}$

3. Determinar cuáles de los siguientes pares numéricos son soluciones del sistema:

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ $\quad (0;1), (2;2), (-2;-2)$

b. $\begin{cases} 3x + 2y + 26 = 0 \\ y = 5x \end{cases}$ $\quad (0;0), (2;5), (-2;-10)$

c. $\begin{cases} 5y + x = 0 \\ 12x - 3y = 5 \end{cases}$ $\quad \left(\dfrac{5}{63}; \dfrac{25}{63}\right), \left(\dfrac{25}{63}; \dfrac{-5}{63}\right), (-1;0)$

4. Resolver gráficamente los sistemas de ecuaciones siguientes:

a. $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 10x - 10y = 19 \\ 5y = 22 - 4x \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 10 - y \\ x = 2 + y \end{cases}$ e. $\begin{cases} x - 2y = 4 - y \\ x + y = 9 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 36 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 2.5x + y = 5 \end{cases}$ h. $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ x + y = 18 \end{cases}$ i. $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Para el desarrollo de la primera clase se recomiendan las siguientes vías:

Primera vía:

Proponer como tarea al inicio de la primera clase los siguientes ejercicios:

1. La cantidad de dinero que tiene Eduardo en su cuenta de ahorro es igual al duplo de la cantidad de dinero que tiene Rosa en la suya. Si Efraín tiene depositado en el banco el triple de ahorro de la cantidad de dinero que tiene Rosa disminuido en 400, y entre los tres tienen 1 100 sucres, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

2. La diferencia entre el duplo de las horas de trabajo voluntario realizadas por Mario y el triplo de las horas voluntarias realizadas por Alexis es 12. Si la mitad del número de horas voluntarias de Mario excede en 13 a la tercera parte de la cantidad de horas realizadas por Alexis, ¿cuántas horas de trabajo voluntario tiene cada uno?

El ejercicio 1 servirá para recordar la definición de ecuación lineal con una variable, solución y conjunto solución de ésta, aspectos que el alumno ya conoce; se debe precisar que toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ se denomina ecuación lineal con una variable y que su solución es un número real.

Para el ejercicio 2, como es de esperar, los alumnos darán respuestas variadas entre las que aparecerá "no sé resolverlo", entonces el profesor dirigirá la actividad mediante preguntas como las siguientes:

- ¿Cuántas variables necesitamos para traducir del lenguaje común al algebraico este ejercicio?
- ¿Cuántas ecuaciones podemos formar según la información que nos ofrece el ejercicio?

Con preguntas como ésta se dirige el trabajo hasta que el alumno obtenga las ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ \dfrac{x}{2} - 13 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Recordar que estas ecuaciones se pueden expresar como

$$2x - 3y - 12 = 0;\ 3x - 2y - 78 = 0$$

y que representan rectas del plano coordenado y así introducir la definición de ecuación lineal con dos variables, como las que se pueden reducir a la forma $ax + by + c = 0$ con *a*; *b*; *c* $\in \nabla$; *a* y *b* no son simultáneamente nulos.

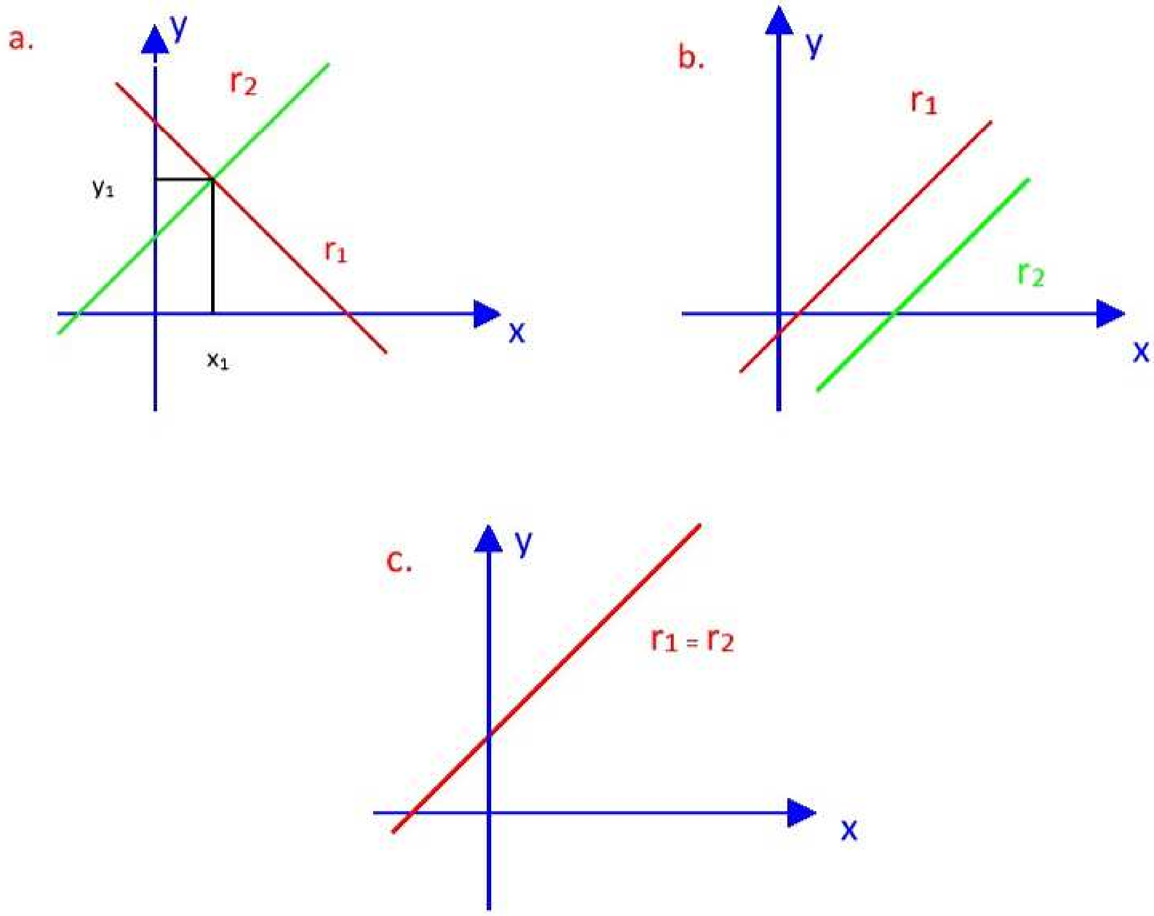
Destacar que las soluciones de estas ecuaciones son las coordenadas de los puntos de la recta que ellas representan y que son conjuntos de dos elementos escritos en un orden y que los llamaremos pares numéricos ordenados, además debe quedar claro que en general estas ecuaciones tienen infinitas soluciones.

Por último se debe dirigir la atención hacia el segundo ejercicio para destacar que un par de ecuaciones como éstas se denominan sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, que en general se representa así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$ Donde los coeficientes son números reales dados.

Se puede preguntar ahora sobre la solución y el conjunto solución de estos sistemas, destacando que las soluciones del mismo son las coordenadas de los puntos comunes a las rectas que ambas ecuaciones representan, luego como dos rectas en el plano sólo pueden cortarse en un único punto, ser paralelas o coincidir, entonces los sistemas que estamos estudiado pueden tener una única solución, ninguna o infinitas.

Esto puede ejemplificarse con una lámina como la figura siguiente



También si el profesor lo considera necesario puede partir de un ejercicio como el siguiente y de la solución del mismo extraer las conclusiones antes expuestas.

Representar los siguientes pares de rectas en un sistema de coordenadas rectangulares y determinar las posiciones relativas de éstas en cada caso.

9

a. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} bx - 3y = 0 \\ 2x - 1 = y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 10 = 2y \end{cases}$

El resto del tiempo de la clase se dedicará a desarrollar ejercicios como los siguientes:

1.- Comprobar gráficamente si los sistemas de ecuaciones siguientes tienen una, infinitas o ninguna solución.

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5y + 5x = 1 \\ 2x = -5y + 14 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 8y + 2x = 20 \\ 1.6y + x = 4 \end{cases}$

2. Determinar cuáles de los siguientes pares numéricos son soluciones del sistema:

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ $(0;1).(2;2),(-2;-2)$

b. $\begin{cases} 3x + 2y + 26 = 0 \\ y = 5x \end{cases}$ $(0;0),(2;5),(-2;-10)$

c. $\begin{cases} 5y + x = 0 \\ 12x - 3y = 5 \end{cases}$ $\left(\frac{5}{63};\frac{25}{63}\right),\left(\frac{25}{63};\frac{-5}{63}\right),(-1;0)$

Segunda vía:

Recordar la definición de ecuación lineal con una variable y señalar que hay ecuaciones lineales con más de una variable, dar la definición y señalar apoyándose en la relación con la recta que sus soluciones son pares ordenados y que en general son infinitas.

Definir sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, como el formado por dos ecuaciones lineales con dos variables y concluir que sus soluciones son las soluciones comunes a las ecuaciones que forman el sistema y, apoyándose en una figura como la anterior, analizar las posibilidades de soluciones de los sistemas. El resto de la clase se dedicará a ejercitar.

Para la segunda clase se debe dirigir la atención de los alumnos a determinar el número de soluciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, teniendo en cuenta las razones entre los coeficientes de las variables y, a aprender el procedimiento gráfico para determinar las soluciones de un sistema en caso que existan.

Para lo primero se puede proceder dirigiendo mediante órdenes y preguntas el trabajo de los alumnos, por ejemplo:

- Despejar $''y''$ en cada ecuación. ¿Qué consideración hay que hacer con b_1 y b_2..
- ¿Cuáles son las pendientes de las rectas que representan las ecuaciones dadas?
- ¿Qué relación hay ente las pendientes si las rectas son paralelas? ¿Y si no lo son?
- ¿Qué relación debe haber entre $\frac{c_1}{b_1}$ y $\frac{c_2}{b_2}$ para que las rectas además de paralelas sean coincidentes?

Con preguntas como éstas se va guiando al alumno hasta llegar a la conclusión siguiente:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

con $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$. Después de despejar la *y* en cada ecuación podemos expresar el sistema dado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Como ambas ecuaciones corresponden a rectas, podemos conocer las posiciones relativas entre ellas analizando sus pendientes $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ y $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$.

1.- Si $-\dfrac{a_1}{b_1} \neq -\dfrac{a_2}{b_2} (m_1 \neq m_2)$, entonces $r_1 \neq r_2$ y el sistema tiene solución única ya

Que las rectas se intersecan en un punto.

2.- Si $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} (m_1 = m_2) y -\dfrac{c_1}{b_1} \neq -\dfrac{c_2}{b_2}$ entoncen $r_1 \,||\, r_2$ y el sistema no tiene

solución.

3.- Si $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} (m_1 = m_2) \;\; y -\dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{c_2}{b_2}$ entonces r_1 y r_2 coinciden y el sistema

tiene infinitas soluciones.

Observar que en el primer caso los coeficientes de las variables de las ecuaciones no son proporcionales y en los otros dos casos si lo son.

A continuación se sugiere presentar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO:

Analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen una, ninguna o infinitas soluciones.

a. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

Resolución:

Transformamos los sistemas de ecuaciones y analizamos las pendientes, si ellas resultan iguales comparamos los términos independientes.

a. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -x - 3 \end{cases}$ Como $m_1 = 2, m_2 = -1 (m_1 \neq m_2)$ el sistema tiene una única solución, pues las rectas se intersecan.

b. $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + 4 \\ y = -\dfrac{4}{3}x + 4 \end{cases}$

Como $m_1 = m_2 = -\dfrac{4}{3}$ y $n_1 = n_2 = 4$,

el sistema tiene infinitas soluciones, pues las rectas coinciden.

c. $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ Como $m_1 = m_2 = 3$ y $n_1 = -2$, $n_2 = -1$ $(n_1 \neq n_2)$ el sistema no tiene soluciones, pues las rectas son paralelas.

Para lo segundo se puede proponer a los alumnos un ejercicio como el siguiente:

EJEMPLO:

Resuelva gráficamente los sistemas de ecuaciones siguientes:

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Resolución:

Representamos gráficamente las ecuaciones que forman cada sistema como en la figura siguiente

a. Las rectas se cortan en el punto P(1;2)

Comprobación:

(M.I miembro izquierdo, M.D. miembro derecho)

En la ecuación (1)

M.I: 1+2=3

M.D: 3

1.28 Comparación: 3=3

En la ecuación (2)

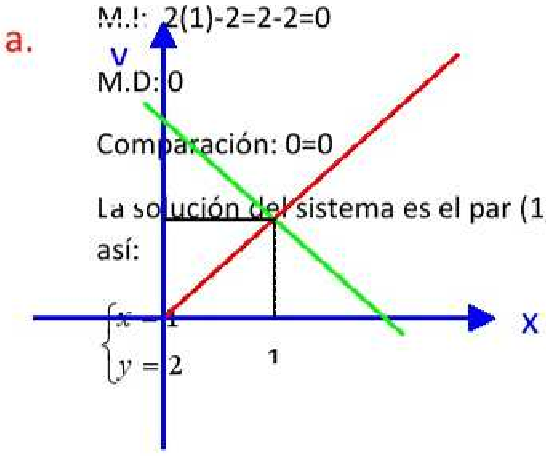
M.I: 2(1)-2=2-2=0

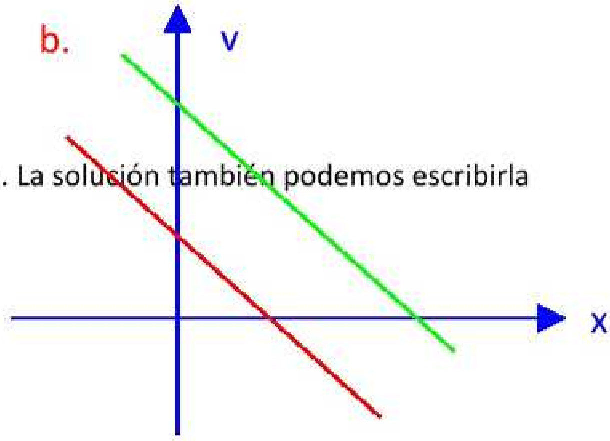
M.D: 0

Comparación: 0=0

La solución del sistema es el par (1;2) . La solución también podemos escribirla así:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$





El conjunto solución es S= $\{(1;2)\}$

b. Las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.

Se debe tratar de que las soluciones de los primeros ejercicios, en caso que existan, sean enteras. Con los conocimientos que tiene el alumno de la clase anterior y con los de sistema de coordenadas, puede resolver el ejercicio en trabajo independiente; no obstante si se presentan dificultades el profesor debe dar impulsos como éstos:

¿Qué figura representan las ecuaciones que forman el sistema?

¿Cómo proceder para representar las rectas en un sistema de coordenadas rectangulares?

¿Cómo determinar las coordenadas del punto de intersección? , etc.

Es necesario que el alumno comprenda que estas soluciones son en general aproximadas, por lo que es necesario buscar otros métodos mediante los cuales se obtengan las soluciones exactas, con éstos se motiva la introducción de los métodos analíticos.

También debe destacarse la necesidad de comprobar el sistema, aunque esto no es obligatorio constituye un medio de autocontrol del resultado y permite continuar desarrollando habilidades en el cálculo numérico.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la Unidad Temática

1.- Comprobar gráficamente si los sistemas de ecuaciones siguientes tienen

Una, infinitas o ninguna solución.

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5y + 5x = 1 \\ 2x = -5y + 14 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 8y + 2x = 20 \\ 1.6y + x = 4 \end{cases}$

2. Determinar analíticamente si los sistemas siguientes tienen o no solución.
En caso que tengan solución. Específica si es única o si son infinitas:

a. $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2y = 2x - 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3{,}5x + 8y = 0 \\ y = \dfrac{3}{5}x \end{cases}$

3. Resolver gráficamente los sistemas de ecuaciones siguientes:

a. $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 10x - 10y = 19 \\ 5y = 22 - 4x \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 10 - y \\ x = 2 + y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 2y = 4 - y \\ x + y = 9 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 36 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 2.5x + y = 5 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ x + y = 18 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2 MÉTODOS ANALÍTICOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Para esta unidad temática se dispone de 14 horas y la misma se ha dividido en dos puntos esenciales:

1. Métodos analíticos para la resolución de sistemas.
2. Resolución de problemas.

2. 1 Métodos analíticos para la resolución de sistemas

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que los alumnos desarrollen habilidades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando el método de sustitución o de reducción, según convenga.

Se sugiere la siguiente distribución del contenido:

En la primera clase introducir el método de sustitución, en la segunda una ejercitación para fijar el procedimiento, la tercera clase dedicarla al método de reducción, las cuatro restantes clases se dedicarán a una ejercitación variada donde se utilicen los dos procedimientos, según convenga.

Es importante que el alumno comprenda que al resolver los sistemas por los métodos estudiados está reduciendo el problema desconocido a uno conocido, la solución de ecuaciones lineales con una variable.

Para la primera clase se puede proceder como se hace en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:

Resolver por el método de sustitución el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 20 \end{cases}$$

Resolución

1. - Despejamos una variable en una de las dos ecuaciones. En este caso resulta más fácil despejar *y* en la segunda ecuación:

$$y = 20 - 3x$$

2.- Sustituimos el valor de *y* en la primera ecuación, y así obtenemos una ecuación que tiene una sola variable, *x:*

$$2x - 3(20 - 3x) = 6$$

3.- Resolvemos la ecuación anterior y así obtenemos el valor de la variable *x* :

$$\begin{aligned} 2x - 60 + 9x &= 6 \\ 11x &= 66 \\ x &= \frac{66}{11} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

4.- Sustituimos el valor $x = 6$ en la ecuación que obtuvimos en el paso 1 para

Calcular el valor de y :

$$y = 20 - 3(6)$$
$$y = 20 - 18$$
$$y = 2$$

Debemos comprobar ahora si los valores hallados de x e y satisfacen las ecuaciones originales del sistema:

Comprobación:

En la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 2(6) - 3(2) &= 6 \\ 12 - 6 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

En la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 3(6) + 2 &= 20 \\ 18 + 2 &= 20 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

Ahora podemos afirmar que el par numérico ordenado (6;2) es la solución del sistema.

El profesor indicará a los estudiantes que, como se planteó en las clases anteriores, es necesario un método mediante el cual se puedan determinar las soluciones exactas de los sistemas, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 20 \end{cases}$$

Para ello el profesor formulará algunas preguntas como las siguientes:

¿Qué igualdades con variables sabe resolver? ¿Cómo se resuelven?

¿Cómo podemos a partir de las dos ecuaciones del sistema obtener una ecuación con una variable?

Luego de analizar las respuestas de los alumnos y mediante elaboración conjunta se resolverá el sistema y se precisará el algoritmo para este procedimiento:

1. Despejar una variable en una de las ecuaciones del sistema.
2. Sustituir la expresión obtenida en 1en la ecuación que no se despejó.
3. Despejar la variable que resulte en la ecuación obtenida en 2 y hallar su valor.
4. Sustituir el valor de la variable hallada en la ecuación que se obtuvo en 1 y hallar el valor de la otra variable.
5. Realizar la comprobación, como medio de control.

El resto del tiempo de la clase se dedicará a ejercitar.

Para la tercera clase se puede partir de la resolución de un ejercicio como el siguiente:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Los alumnos como sólo conocen el método de sustitución procederán a utilizarlo, después de resuelto el profesor llamará la atención sobre la posibilidad de sumar ordenadamente las ecuaciones y obtener el valor de x, luego sustituyendo en una de las ecuaciones calcular el valor de y, y luego destacar que éste es otro procedimiento para resolver sistemas lineales que se conoce como procedimiento de suma y resta o de reducción, pues las ecuaciones se suman o restan y señalar además que para usar el mismo es necesario utilizar un teorema que vamos a enunciar pero no a demostrar:

Si $a = b$ y $c = d$; $(a,b,c,d \in \nabla)$, entonces

$$a+c=b+d;\ a-c=b-d;\ a.c=b.d;\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\left(c\neq 0 \text{ y } d\neq 0\right)$$

Es conveniente, ahora, introducir el concepto de ecuaciones equivalentes de forma natural.

Se puede ejemplificar si se quiere con una situación como ésta: $3x - 2y = 8$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $6x - 4y = 16$ o es equivalente a ésta, pues se obtuvo de la original multiplicándola por 2.

Las ecuaciones *ax + by = c* y *(ka)x + (kb)y = (kc)* son equivalentes

Seguidamente se deben proponer ejemplos como los siguientes:

a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x + 3y = 11 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

Mediante una conversación a través de preguntas concluir que en el inciso a) basta restar las ecuaciones o multiplicar una de ellas por –1 para eliminar la y, en el inciso b) basta multiplicar la segunda ecuación por 2 para eliminar la x, y en el inciso c) se puede multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 para eliminar la y. Destacar que en este procedimiento lo que se trata es de buscar que una misma variable de ambas ecuaciones tengan coeficientes opuestos, para sumar o restar las ecuaciones y eliminar así esa variable.

Las tres clases restantes se dedicarán a resolver sistemas por uno de los métodos, según sea más ventajoso, para ello en la quinta clase se debe orientar al alumno cómo decidir el procedimiento a utilizar, esto se puede hacer proponiendo una colección de sistemas (que se pueden integrar en una hoja de trabajo) como la siguiente:

a. $\begin{cases} 3x + 4y = 253 \\ y = 5x \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a = 3b - 12 \\ b = 5b - 12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x + 4y = 4 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 6a + 5b = 8 \\ 3a - 2b = 1{,}3 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 1 + x = -2y \\ -5x = 38 + y \end{cases}$

La observación sobre las características de los sistemas puede guiarse mediante preguntas como éstas:

¿Qué variables aparecen en cada ecuación del sistema?

¿Aparece alguna variable despejada en alguna ecuación del sistema? ¿Cuál?

¿En cuáles de los sistemas una misma variable de cada ecuación tiene coeficientes iguales u opuestos? ¿Cuál es esa variable?

¿Cómo puedo lograr en el inciso e) que una misma variable de cada ecuación tengan coeficientes opuestos?, etc.

Concluir que en los sistemas que aparece despejada alguna variable es recomendable utilizar el método de sustitución, que en los sistemas en que una misma variable tiene coeficientes iguales u opuestos o, si se puede lograr esto multiplicando por un número adecuado cada ecuación del sistema, es recomendable el método de reducción.

El resto del tiempo se dedicará a resolver ejercicios en los que el alumno decidirá cuál es el método más ventajoso a utilizar para resolver el sistema propuesto.

Otra variante para la distribución de estas 7 clases puede ser la siguiente:

Tratar en la primera clase el método de sustitución, en la segunda el método de reducción y a partir de la tercera ejercicios en los que el alumno debe seleccionar el método más ventajoso a utilizar.

Se suguiere hacer los ejercicios siguientes. Los ejercicios 4 e), f), el 5, 6 y 7 son para alumnos de alto rendimiento.

1. Resolver por el método de sustitución:

a. $\begin{cases} x = 6 - 3y \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y = 3x - 17 \\ y = 2x - 12 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 8 + 5y \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = \dfrac{8-3x}{4} \\ 8x - 4y = 14 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5s + 10t = 30 \\ 2s - 2t = 6 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -32 = 9x + 18y \\ 6x - 9y = -5 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 0.3x - y = 0 \\ 0.5x + 5y = 12.4 \end{cases}$

h. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{5}y = 3 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}y = 1{,}5 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 6s + 5t = 22 \\ 2s + 7t = 14 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 15(x+2) - 20y = 50 \\ 20(x-3) - 40(y-x) = 20 \end{cases}$

k. $\begin{cases} 5(x-3) - 24y = 5\left(x - \dfrac{3}{5}\right) \\ 5x + 7 = 0 \end{cases}$

2. Resolver por el método de reducción:

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + y = 9 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 9x + 7y = -4 \\ -3y + 11x = -12 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 25x + 8y = 15 \\ 35x - 12y = 50 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 0{,}2s + 0{,}3t = 8 \\ 0.5s - 0{,}4t = -3 \end{cases}$

j. $\begin{cases} x - \dfrac{3}{2}y = -9 \\ y - \dfrac{3}{4}x = 3 \end{cases}$

k. $\begin{cases} y = 0{,}2(8 - x) \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 5(x+2) - 3(y+1) = 23 \\ 3(x-2) + 5(y-1) = 19 \end{cases}$

m. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{3x+1} \\ \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{2}{7y} \end{cases}$

n. $\begin{cases} (x - y) + (10x + 5y + 3) = 6x + 8y \\ (x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x \end{cases}$

3. Hallar el conjunto solución y comprobar:

a. $\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ x - 3 = 3y - 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3(x+2) = 2y \\ 2(y+5) = 7x \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 1 = 2(y+6) \\ x - 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$

e. $\begin{cases} 30 - (8 - x) = 2y + 30 \\ 5x - 29 = x - (5 - 4y) \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 5 \\ 3y - \dfrac{x}{14} = 26 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{3} - 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}y = 1 \\ \dfrac{1}{8}y - \dfrac{5}{6}x = 2 \end{cases}$

i. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6} = \dfrac{x-y}{12} \\ \dfrac{2x}{3} = y+3 \end{cases}$

j. $\begin{cases} y = 2x+4 \\ y = 4x-2 \end{cases}$

k. $\begin{cases} 23x - 4y = 20 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 3x + 4y = 253 \\ y = 5x \end{cases}$

m. $\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}3y = 3 \\ 1{,}2x - 2y = -8{,}4 \end{cases}$

n. $\begin{cases} 18a - 7b = 2 \\ a = b + \dfrac{1}{42} \end{cases}$

ñ. $\begin{cases} u = v + \dfrac{7}{2} \\ 14u = 112v \end{cases}$

o. $\begin{cases} 3x + 0{,}5y = 1{,}5 \\ 0{,}5x + 2y = \dfrac{13}{6} \end{cases}$

4. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes donde *x* e *y* son las variables a calcular.

a. $\begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = a - b \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 1 + a \\ x - y = 1 - a \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - y = 3a \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + y = b + 2 \\ bx - y = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + 5y = a + b \\ 5x - 2y = a - b \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2bx + 3ay = 5ab \\ 3bx - 4ay = -ab \end{cases}$

5. ¿ Qué números naturales deben formar el dominio de la variable a, para

que las soluciones del siguiente sistema sean números naturales?

$$\begin{cases} 5ax - y = 32 \\ -ax + y = 0 \end{cases}$$

6. Las variables a y b son números naturales. ¿ Qué condiciones tienen que cumplir éstas para que las soluciones del sistema sean también números naturales?

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

7. Hallar el conjunto solución de los sistemas:

a. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{7}{x} - \dfrac{6}{y} = 4 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 7 \end{cases}$

Sugerencia : Hacer la sustitución $u = \dfrac{1}{x}; v = \dfrac{1}{y}$

2.2 Resolución de problemas

Para el desarrollo de este punto se dispone de 7 horas clase. Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que los alumnos sean capaces de resolver problemas que conduzcan al planteo y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Aquí es necesario que el alumno haya desarrollado habilidades en la traducción del lenguaje común al algebraico y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; lo primero está garantizado por el trabajo previo, cuando resolvieron problemas que conducen a ecuaciones lineales con una variable. x

y

Otro aspecto importante que también se trató anteriormente son las fases a tener en cuenta en la resolución de un problema, las cuales recordaremos mediante algunos ejemplos. Estas etapas son:

- Comprender el enunciado del problema.
- Encontrar una vía de solución (análisis) y elaborar un plan de solución.
- Realizar el plan de solución elaborado (síntesis).
- Comprobar la solución.

EJEMPLO 1

Un pequeño agricultor desea cercar un lote rectangular de terreno cuyo perímetro es 100m. Si usa un material que cuesta $30 000 el metro para el frente del lote y un material que cuesta $20 000 el metro para los otros tres lados, la cerca le cuesta

$7 800 000. ¿Cuáles son las dimensiones del lote?

<u>Para comprender el problema</u>

- **¿De qué se trata en el problema? Cercar un terreno rectangular del que no se conocen sus dimensiones.**
- **¿Qué datos se dan? Precio de los materiales que se van a usar y costo total.**
- **¿Qué se busca? Las dimensiones del terreno.**
- **¿Es necesario usar variables? Sí ¿Qué denotan? Las dimensiones del terreno.**
- **¿Es recomendable hacer un esbozo gráfico?**
  Sí:

- **¿Son suficientes los datos? Sí.**

<u>Para la vía de solución</u>

- **¿Qué relaciones se pueden establecer entre los datos, y las variables?**

$$\begin{cases} 30000x + 20000x + 2 \times 20000y = 7800000 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

- **¿A qué modelo matemático nos conduce el problema? A un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables**

Para el plan de solución

- **Resuelve el sistema planteado.**

Para comprobar el problema

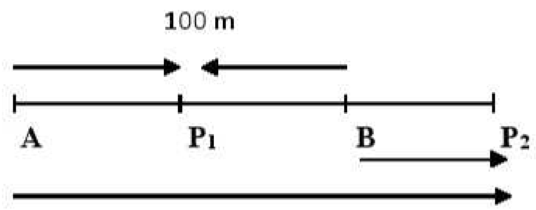
- **¿Es lógico el resultado? ¿Por qué?**
- **¿Es posible comprobar? ¿Cómo?**

EJEMPLO 2

Dos muchachos están a 100 metros de distancia. Si corren en sentido opuesto, uno hacia el otro, se encuentran en 10 segundos, pero si corren en el mismo sentido el más rápido alcanza al otro en 50 segundos. Halle la velocidad de cada uno.

Para comprender el problema

- **¿De qué trata el problema? Determinar las velocidades de dos muchachos que parten de dos puntos dados.**
- **¿Qué datos se dan? La distancia a que se encuentran los muchachos y el tiempo que demoran en encontrarse.**
- **¿Qué se busca? Las velocidades de los muchachos.**
- **¿Qué relación existe entre las magnitudes que aparecen en el problema?** $V = \frac{s}{t}$
- **¿Es conveniente hacer un esquema?**
  Sí



Para la vía de solución

- **¿Cómo establecer una relación entre las velocidades, el tiempo y la distancia?**
$$\begin{cases} 10V_1 + 10V_2 = 100 \\ 50V_1 - 100 = 50V_2 \end{cases}$$
- **¿A qué modelo matemático nos conduce el problema? A un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.**

Para el plan de solución

- **Resuelve el sistema planteado**

Para comprobar

- **¿Es lógico el resultado? ¿Por qué?**
- **¿Se puede comprobar? ¿Cómo?**

Estas preguntas no constituyen una receta a aplicar en todos los problemas, son sólo algunas ideas para que el profesor tenga algún material del cual partir; él debe en cada problema enseñar a sus alumnos a razonar y a interiorizar las preguntas, las fases, etc. Lo esencial es que los alumnos aprendan a resolver problemas en la forma más racional posible.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas de la unidad temática.

Se recomienda realizar los siguientes tipos de ejercicios:

1. Ejercicios en donde sea conveniente usar el método de reducción por suma y resta.
2. Ejercicios en donde sea conveniente usar el método de sustitución
3. Problemas que lleven a resolver sistemas de ecuaciones lineales,

3. MÉTODO GRÁFICO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 4 horas. Se ha considerado dividirlo en los siguientes puntos esenciales:

- Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resolución a través del método gráfico.

- Sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas. Resolución a través del método gráfico.

3.1 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resolución a través del método gráfico.

Para el tratamiento de este punto esencial se sugiere 2 horas. Se debe lograr que los alumnos comprendan los conceptos de inecuación lineal con dos variables y solución de una inecuación lineal con dos incógnitas.

Se sugiere dedicar la primera clase para introducir los conceptos de inecuación lineal con dos variables, solución de este tipo de inecuaciones, solución y conjunto solución de una inecuación lineal, así como el análisis gráfico de la relación entre la cantidad de soluciones de un inecuación lineal y la posición relativa de la recta en el plano. La segunda clase se puede dedicar a ejercitar los contenidos tratados en la primera clase.

Se considera que una vía metodológica apropiada puede ser a través de la reactivación de los conocimientos que el estudiante adquirió de la recta y de las inecuaciones en años anteriores. Debido a que él conoce como se gráfica una recta y cómo se resuelve una inecuación, podemos entonces presentarles la siguiente caracterización de una inecuación de primer grado con dos incógnitas.

La recta **r** con ecuación $y = ax + b$ divide al plano en dos semiplanos. Las coordenadas de todos los puntos del uno verifican la desigualdad $y > ax + b$ y las del otro semiplano, la desigualdad $y < ax + b$.

Se debe indicar, entonces, que para obtener la solución de una inecuación de este tipo basta determinar el sentido de la desigualdad en un punto del plano.

A continuación se pueden resolver ejemplos como los siguientes, donde se clarifique y explique la definición que se ha presentado

EJEMPLO

Comprobar si las soluciones propuestas son soluciones de las siguientes inecuaciones:

a. $3x + 2y < 3$ Solución: (- 4; 5)

b. $y - 5x > -1$ Solución: (0; 1)

Para resolver este ejemplo se debe orientar al estudiante para que reactive sus conocimientos sobre rectas y las coordenadas de un punto. A continuación se le pide que sugiera el camino a seguir. La respuesta debe ser inmediata, luego al remplazar los valores dados comprobará que efectivamente los pares satisfacen las inecuaciones.

EJEMPLO

Resolver gráficamente la inecuación $y > x - 1$.

Resolución

Para resolver este ejemplo se debe seguir los siguientes pasos:

1. Representar gráficamente la recta con ecuación $y = x - 1$.

x	0	2
y		

2. Colorear los dos semiplanos determinados por la recta de ecuación $y = x - 1$.
3. Designar el semiplano sobre la recta, con la inecuación $y > x - 1$, y el semiplano bajo la recta, con $y < x - 1$.
4. La solución es el semiplano $y > x - 1$, donde las coordenadas de todos los puntos corresponden a esta inecuación, ya que:

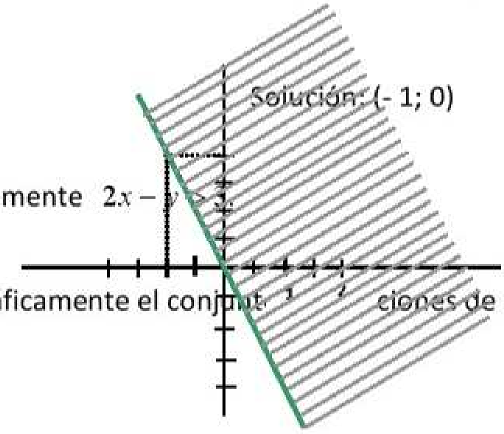
en el punto (0, 0) $\rightarrow$ 0 > 0 - 1 es una solución,

en el punto (2, -1) $\rightarrow$ - 1 < 2 -1 no es una solución.

Estos dos ejemplos nos permitirán tanto sistematizar la definición presentada, como desarrollar la habilidad de resolver una inecuación lineal con dos variables.

Si el tiempo lo permite en la primera clase se sugiere empezar la ejercitación con ejercicios como los siguientes, que se continuarán realizando en la segunda clase.

1. Comprobar si las soluciones propuestas son soluciones de las siguientes inecuaciones:
   a. $\frac{x}{3} - y \leq -2$ Solución: (6; - 4)
   b. $2x \geq \frac{y}{2} + 1$ Solución: (- 1; 0)



2. Resolver gráficamente $2x - y > 3$

3. Representar gráficamente el conjunto de soluciones de cada inecuación.

   a. $x - y > 1$
   b. $x < 2$
   c. $\frac{x}{2} + y < 0$

4. Escribir una inecuación de tal manera que el conjunto solución corresponda a la parte sombreada

   a. .

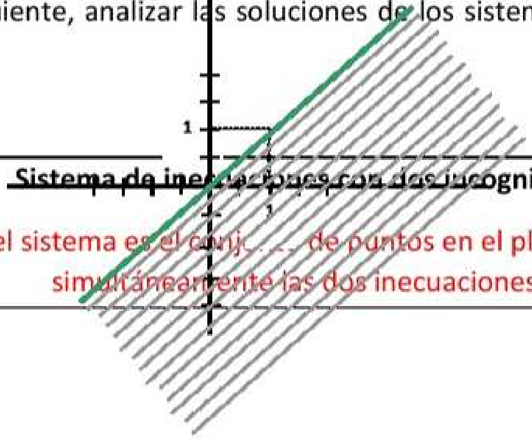
b.

Sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas. Resolución a través del método gráfico.

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 2 horas. Lo fundamental es que los estudiantes desarrollen habilidades para resolver gráficamente sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Como vía metodológica se sugiere recordar la definición de inecuación lineal con una variable y señalar que, como ya se ha visto, hay inecuaciones lineales con más de una variable, evocar la definición y señalar, apoyándose en la relación con la recta, que sus soluciones son infinitas.

Definir sistema de inecuaciones lineales con dos variables, concluir que sus soluciones son las soluciones comunes a las inecuaciones que forman el sistema y, apoyándose en un ejemplo como el siguiente, analizar las soluciones de los sistemas, el resto de la clase se dedicará a ejercitar.



Sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

La solución del sistema es el conjunto de puntos en el plano que satisfacen simultáneamente las dos inecuaciones.

EJEMPLO

Hallar la solución del siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y > -2 & \textbf{\textit{(1)}} \\ -x + 3y > 3 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Resolución

Se debe indicar a los estudiantes que:

1. Se trazan las dos rectas:

   De (1) $y = 2x + 2$

   De (2) $y = \dfrac{x+3}{3}$

2. Se resuelve cada una de las inecuaciones por separado, de la forma que se realizó en el punto esencial anterior.

   De (1): $y < 2x + 2$ en el punto (0; 0) cumple::

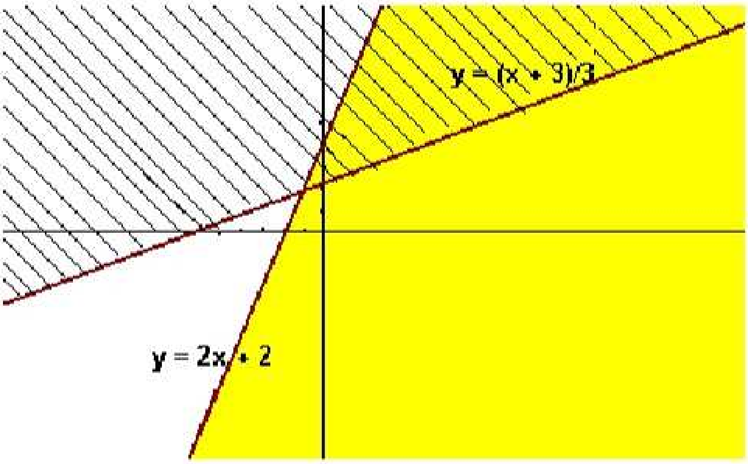
   $$0 < 2$$

   De (2) $y > \dfrac{x+3}{3}$ en el punto (1; 2) cumple::

   $$2 > \frac{4}{3}$$

3. Se raya las soluciones de cada una de las inecuaciones, entonces la solución corresponderá a la región donde coinciden las dos soluciones.

4. La solución corresponde a la región amarilla rayada.



Se realizará también el siguiente ejemplo, pero en este caso la solución se la obtendrá por el método de la discusión heurística.

EJEMPLO

Resolver gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y > -1 \\ x + 2y > -2 \end{cases}$$

<u>Resolución</u>

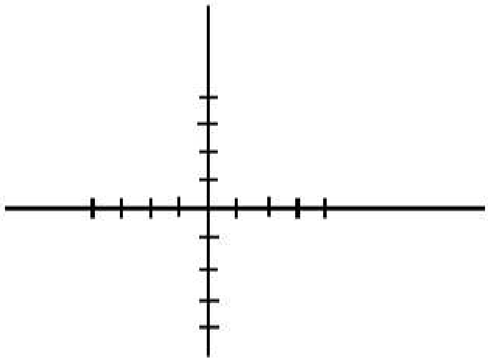
1. Escribir el sistema despejando *y*:

$$\begin{cases} 2x - y > -1 \\ x + 2y > -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > \end{cases}$$

2. Trazar las dos rectas de las ecuaciones

$y = 2x + 1$

x		
y		



$y = -1 - \dfrac{x}{2}$

x		
y		

3. Rayar los semiplanos no convenientes y colorear los que corresponden a las soluciones de las inecuaciones.

4. La solución del sistema es la parte que tiene los dos colores a la vez.

En lo que resta de la clase se puede empezar la ejercitación, que se continuará en la clase siguiente, se pueden elegir ejercicios como los siguientes.

1. Resolver gráficamente los siguientes sistemas:

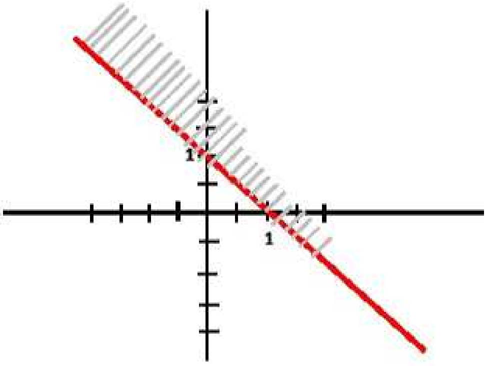
   a. $\begin{cases} y > 2x - 4 \\ y < 3x - 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x - 3y < 2 \\ 3x - y > 2 \end{cases}$

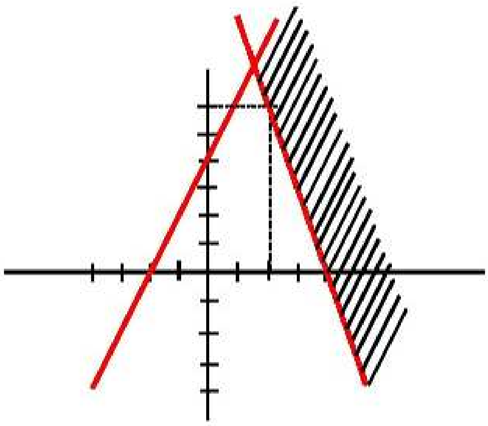
   c. $\begin{cases} x > \dfrac{3y}{2} + 1 \\ -x < \dfrac{2y}{3} - 1 \end{cases}$

4. Escribir un sistema de inecuaciones que corresponda al conjunto de soluciones propuesto por cada gráfico.

a.



b.



No debe dejar de hacerse problemas que conduzcan a la solución de inecuaciones lineales. Para el tratamiento de este tipo de ejercicios matemáticos se seguirá la misma técnica empleada para el planteamiento de los problemas que conducen a sistemas de ecuaciones. Para esto se sugiere realizar ejercicios como los siguientes:

1. Escribir la inecuación con dos incógnitas, que corresponda a cada enunciado.

   a. Si se suma el doble de un número al triple de otro se obtiene un número mayor a 7.

b. Si se resta el triple de un número del doble de otro se obtiene un número menor que 15.

2. Encontrar la inecuación, de entre las propuestas, que corresponda al enunciado.

   El doble de la edad de Ana más 5 es mayor que el triple de la mitad de la edad de Alfredo.

   $2x - \frac{3}{2}y > 5$ $\qquad\qquad$ $4x - 3y > -10$

   $2x > \frac{3}{2}y + 5$ $\qquad\qquad$ $x - 3y > -5$.

3. En una papelería se venden, por día, más lápices rojos que azules. Si se vende, entre 40 y 60 lápices rojos, determinar gráficamente la región que corresponde a la venta posible de lápices.

10 UNIDAD 4

1.29 GEOMETRÍA

11

1.29.1 INTRODUCCIÓN

Esta unidad ocupa un lugar importante en el plan de estudio de la asignatura Matemática y tiene la función especial de sistematizar todos los conocimientos y habilidades desarrolladas por los alumnos durante el estudio de la geometría plana en los años anteriores. Los conceptos, relaciones y propiedades de las figuras geométricas que se estudian en esta unidad se introducen teniendo como base; los conocimientos y habilidades desarrolladas por los alumnos sobre las proposiciones; los movimientos del plano, las propiedades de los triángulos, los cuadriláteros y los polígonos en general. La unidad se inicia con un repaso sobre las proposiciones que fueron ya estudiadas En esta unidad específicamente, también se hará una amplia aplicación de las proporciones.

Los primeros conceptos que se definen son los de "razón entre segmentos" y "segmentos proporcionales" y a continuación se estudia el "teorema de las transversales". Con este nombre se reconoce el teorema que en el programa anterior se denominaba primera parte del teorema de las transversales. Las otras dos partes del teorema no serán objeto de estudio, ya que los ejercicios y problemas en los que se aplican, también se pueden resolver aplicando teoremas sobre la semejanza de triángulos que se estudiarán en la unidad temática siguiente. A este teorema y a su teorema recíproco se les da aplicación en la resolución de ejercicios y problemas del cálculo, construcción y demostración, tanto intramatemáticos como extramatemáticos.

Después de tratado el teorema de las transversales se introduce de forma intuitiva el concepto "figuras geométricas semejantes ", análogamente a como se hizo al estudiar la igualdad de figuras geométricas y, a continuación se pasa directamente a estudiar la semejanza de polígonos, centrándose la atención en la "semejanza de triángulos" que constituye el núcleo central de la unidad.

Esta estructura posibilita centrar la atención en lo esencial y dedicar mayor tiempo al desarrollo de las habilidades de los alumnos para operar con los conceptos y teoremas con la semejanza de triángulos.

Primero se da la definición de triángulos semejantes "como aquellos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales o sus lados respectivamente proporcionales " (se da también la definición de polígonos semejantes) y se estudia el teorema fundamental de la semejanza de triángulos: "Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo semejante al triángulo dado ". En este teorema nos apoyamos para hacer la demostración de la semejanza entre dos triángulos cuando se conocen algunos de sus elementos.

A estos teoremas se les da aplicación en la resolución de ejercicios geométricos de cálculo, de construcción y demostración, así como de problemas de la vida práctica como son los de "mediciones en el terreno".

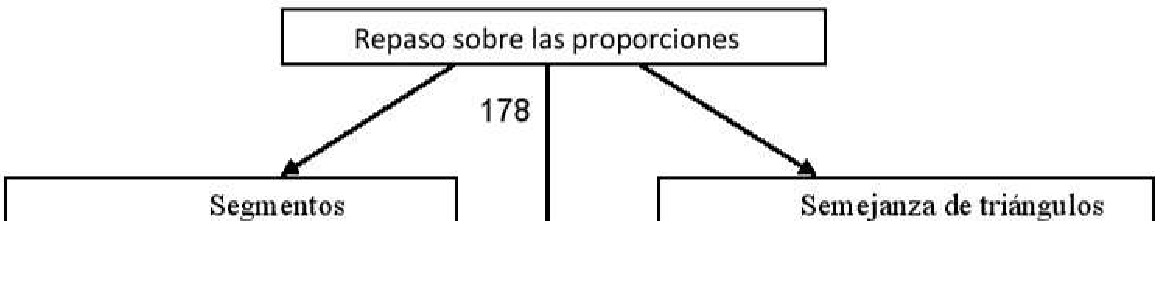
La unidad temática siguiente se dedica al estudio de la homotecia como una transformación del plano, se da una definición constructiva de este concepto, con lo que se obtiene un procedimiento para la construcción de figuras geométricas semejantes a una dada. Se estudia también las propiedades fundamentales de la homotecia, lo cual permite que ésta se aplique como un método (método de las transformaciones) en la resolución de problemas geométricos.

Se estudia la composición de dos homotecias y de una homotecia con un movimiento, ayudándonos en esto se generaliza el concepto homotecia (se introducen las homotecias H(O; k) con k >0) y se dan las definiciones de "transformaciones semejantes" y "figuras semejantes". La igualdad de figuras geométricas se analiza con un caso particular de semejanza cuando la razón es k=1.

La última unidad temática se dedica al estudio del grupo de teoremas de Pitágoras (teorema de las alturas, teorema de los catetos y teorema de Pitágoras) y al estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno y tangente de un ángulo agudo). Este último contenido tiene como objetivo fundamental la articulación con la asignatura Física.

Durante todo el trabajo en la unidad se presta atención en la aplicación de las reglas del cálculo aproximado y el sistema de ejercicios está concebido de manera que se sistematicen todos los conocimientos sobre la planimetría.

1.29.2 COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD



1.29.3 HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos dominen los conceptos de homotecia, transformaciones semejantes, figuras geométricas semejantes y razones trigonométricas en los triángulos rectángulos, así como el teorema de la transversal, los teoremas de la semejanza de triángulos y los grupos de teoremas de Pitágoras, la manera que pueda operar con ellos y aplicarlos conjuntamente con los conceptos de la geometría plana estudiamos en años anteriores en la resolución de problemas geométricos de cálculo, de construcción y de demostración donde se incluyen situaciones de la vida práctica.

1.29.4 EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

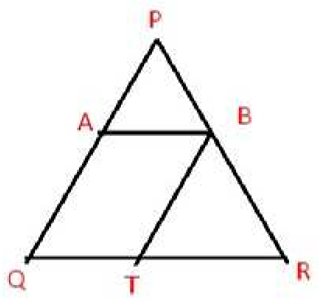
Para lograr lo que hemos definido como esencial es necesario al concluir la unidad que los alumnos:

- Comprendan el enunciado del teorema de las transversales y de su recíproco, así como su demostración de manera que puedan aplicarlos en la resolución de ejercicios y problemas intramatemáticos y extra matemáticos.
- Dominen el concepto "polígonos semejantes" y en particular el de "triángulos semejantes", y los teoremas sobre la semejanza de triángulos y puedan aplicarlos conjuntamente con los conocimientos de geometría, estudiados anteriormente, en la resolución de problemas.

- Dominen el concepto de "homotecia" y sus propiedades, así como los de transformación semejante y "figuras semejantes" y puedan aplicarlos en la solución de ejercicios de cálculo, construcción y demostración.
- Dominen el grupo de teoremas de Pitágoras, comprendan los teoremas recíprocos de éstos y las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, de manera que pueda aplicarlos convenientemente.
- Comprendan cómo se obtiene la proposición recíproca de un teorema, el método de demostración por la vía indirecta y continúen desarrollando habilidades en la realización de demostraciones sencillas por la vía directa.
- Consoliden sus habilidades en el uso de la calculadora y del cálculo aproximado.
- Consoliden sus habilidades en el uso de instrumentos de trabajo geométricos y puedan realizar construcciones geométricas propias del año con seguridad y limpieza.

El nivel mínimo que deben alcanzar los alumnos par dar cumplimiento a estas exigencias se caracterizan mediante ejercicios como los que aparecen a continuación:

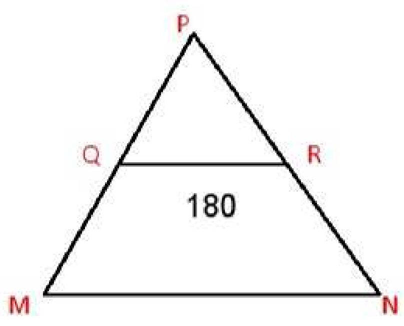
1. En la figura siguiente, el cuadrilátero ABTQ es el paralelogramo cuyos vértices pertenecen a los lados del triángulo PQR; $\overline{PB}$ =2,0 m; $\overline{BR}$ =3,0 m y $\overline{BT}$ =40 dm. Calcule $\overline{AQ}$ y $\overline{AP}$.



2. Dado $\overline{AB}$ = 4,0 cm. Determine, mediante una construcción, un punto que lo divide en la razón $\overline{AP}$ / $\overline{PB}$ =3/4. Fundamente el procedimiento aplicado.

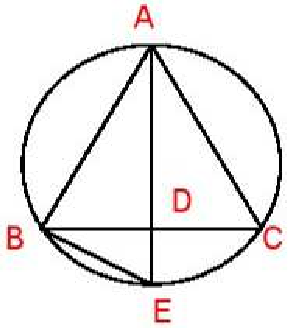
3. Dado $\overline{AB}$ (figura siguiente). Construya un segmento $\overline{MN}$ tal que: $\overline{MN}$ =5/9 $\overline{AB}$.

4. En la figura siguiente, los puntos Q y R pertenecen a los lados del triángulo PMN; $\overline{QM}$ / $\overline{PM}$ =1/3; $\overline{PQ}$ =6,0 cm $\overline{RN}$ =3,0 cm. Demuestre que el cuadrilátero QRNM es un trapecio.



5. Se tiene dos hexágonos regulares de 4 m^2 y 16 m^2 de área, respectivamente. Calcule el perímetro del hexágono de menor área , si se conoce que el perímetro del polígono mayor es de 16 m.

6. En la figura siguiente, los puntos A, B, C y E pertenecen a una circunferencia y $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo ABC. Demuestre que; que el triángulo ABE es proporcional al triángulo BDC. Calcular la razón de semejanza si $\overline{BE}$=8,0 cm, $\overline{DC}$=3,0 cm y $\overline{BC}$ =6,0cm.



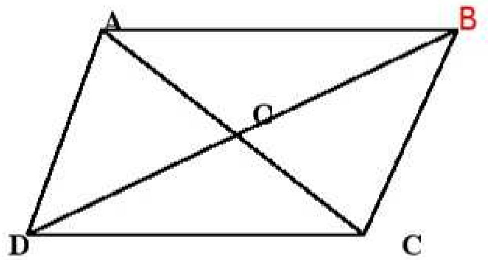
7. Construya un triángulo ABC cuyos lados miden 3 cm: 4,0 cm y 5,0 cm respectivamente.
   a. Hallar la imagen del triángulo ABC por H(A;2). Calcule el perímetro de la figura así obtenida.

8. En la figura siguiente , el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y O es el punto de intersección de sus diagonales.

a. El triángulo AOB se transforma en el triángulo COD

b. El triángulo AOD se transforma en el CDB.

Diga cuál es la razón entre las áreas de los triángulos AOD y COD.



9. Construya un triángulo ABC tal que AB : AC = 3/4; $\angle B = 60°$ y $m_{AD} = 5{,}0$ cm.

10. El pentágono A'B'C'D'E' es la imagen del pentágono ABCDE por la composición de H (C;1/2) y una simetría central de centro A. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamente las respuestas.

a. Pentágono ABCDE $\sim$ A'B'C'D'E'.

b. AB = A'B'

c. $AC = 2A'B'$

d. $\angle A \neq \angle A'$

e. BC 7 B'C'

11. Construya un triángulo ABC tal que $\overline{AB}$ / $\overline{AC}$ =3/4: y el ángulo B=60° y $\overline{AB}$ =5,0 cm.

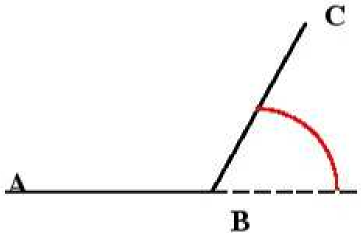
12. La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo la divide en dos segmentos de 6 y 14 cm respectivamente. Calcule la altura a la hipotenusa y la longitud del cateto mayor.

13. Construya un segmento cuya longitud es $\sqrt{7}$

14. En una pirámide regular de base cuadrada , la longitud de los lados de la base es de 3,6 m y de la altura de una de las caras laterales es de 7 m. Calcule la altura de la pirámide.

15. En la pared de una oficina, se tienen tres cristales rectangulares de iguales dimensiones (ancho 1,2 m y de largo 1,5 m). ¿Qué cantidad de papel precinta se necesita para asegurar estos cristales si el papel se pega a lo largo de las diagonales de cada cristal?

16. En la figura siguiente, se ilustra una carretera que tiene un tramo horizontal AB y después se eleva formando un ángulo de elevación de 40°. ¿A qué altura se encuentra el punto C de la carretera respecto a la horizontal si $\overline{BC} = 3{,}5$ km?



1.29.5 INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguiente unidades temáticas:

1. Teorema de las transversales.
2. Semejanza de los triángulos.
3. Homotecia. Figuras geométricas.
4. Relaciones en el triángulo rectángulo.

1. TEOREMA DE LAS TRANSVERSALES

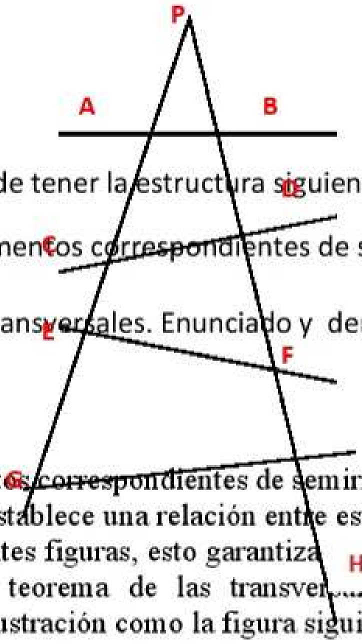
Para el desarrollo de esta unidad temática se requieren 13 horas. En ella se destacan dos puntos esenciales:

1. Teorema de las transversales y su teorema recíproco.
2. Aplicaciones del teorema de la transversal.

1.1 Teorema de las transversales y su teorema recíproco.

Proponemos que se utilicen 7 horas clase en el tratamiento de este punto esencial. En las dos primeras clases es posible tratar el contenido teórico y dedicar las restantes a la ejercitación.

Antes de tratar este tema es conveniente realizar una revisión de proporciones y división de segmentos en partes proporcionales.



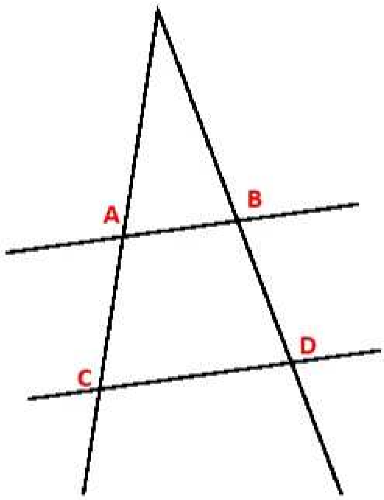
La primera clase puede tener la estructura siguiente:

- Concepto de segmentos correspondientes de semirrectas
  Ejemplos.
- Teorema de las transversales. Enunciado y demostración
  Ejemplos.

El concepto "segmentos correspondientes de semirrectas" es fundamental ya que el teorema de las transversales establece una relación entre estos segmentos. Los alumnos deben poder conocerlos en diferentes figuras, esto garantiza [illegible] fronten dificultades posteriormente cuando apliquen el teorema de las transversales. La definición se puede introducir apoyándose en una ilustración como la figura siguiente.

En ella aparecen dos semirrectas de origen común que son cortadas por varias rectas. Se presenta el caso más general, o sea, cuando no todas las rectas son paralelas.

A continuación se puede presentar el caso particular en que son paralelas para introducir el teorema de las transversales. Para introducir el teorema se puede partir de una figura como la siguiente.



Después de presentar la figura se puede pedir a los alumnos que dibujen en sus cuadernos una figura análoga a ésta, que hagan las mediciones necesarias y calculen las razones entre los segmentos correspondientes. Comparando los resultados obtenidos por los alumnos se puede llegar a una hipótesis "las razones entre los segmentos correspondientes son iguales", y pedirles que la anuncien como un teorema que a continuación se va a demostrar.

Otra vía puede partir del enunciado del teorema, analizar la premisa y la tesis del teorema y pasar a su demostración.

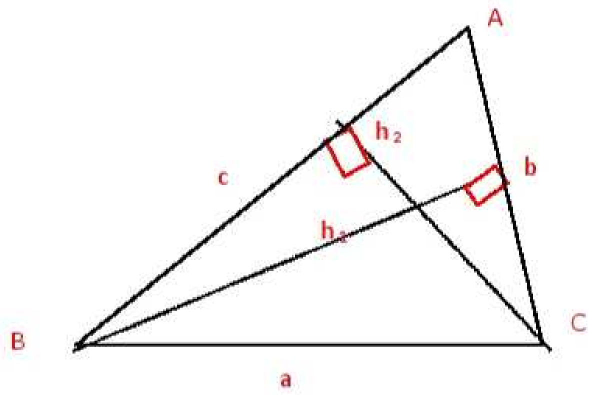
Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes de la otra.

La demostración del teorema se debe realizar siguiendo el método de elaboración conjunta.

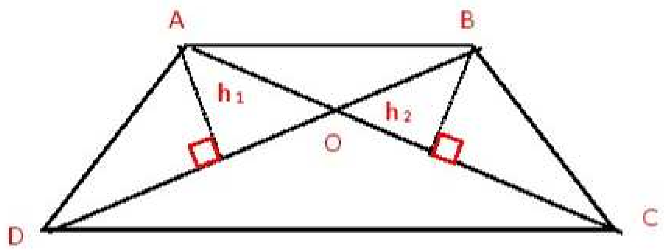
Se plantea a los alumnos que se va ha demostrar el caso particular en que tenemos dos rectas paralelas, pero que a partir de esto se puede generalizar la propiedad.

Previamente se puede pedir a los alumnos que resuelvan los siguientes ejercicios:

1. En el Δ ABC de la siguiente figura, h_1 y h_2 son las alturas a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, $\overline{AC}$ = b y $\overline{AB}$ = c. Pruebe que h_1 y h_2 son proporcionales a c y b



2. En el trapecio ABCD de la siguiente figura se han trazado sus diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{CA}$.
   a. ¿Cuántos triángulos tienen a $\overline{AB}$ como lado común?:
   b. Fundamenta por qué Δ ABD y Δ ABC tienen la misma área.
   c. Prueba que h_2 y h_1 son proporcionales a $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$

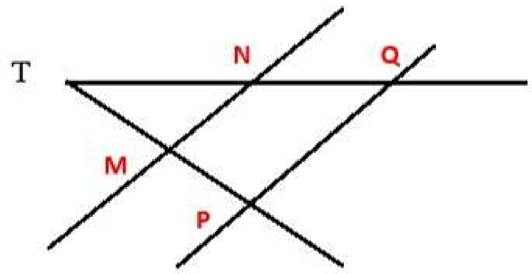


Los ejercicios presentados anteri emostración, pues estableciendo la igualdad entre áreas se puede demostrar la proporcionalidad entre segmentos.

Después de hecha la demostración se deben analizar los ejemplos siguientes.

EJEMPLO

En la figura siguiente, las rectas MN y PQ son paralelas y cortan a las semirrectas TQ y TP. Plantee todas las proporciones que se obtienen si se aplica el teorema de las transversales.



1.2 Resolución

En la semirrecta TP las rectas paralelas determinan tres segmentos $\overline{TM}$, $\overline{MP}$ y $\overline{TP}$ y sus segmentos correspondientes en la semirrecta TQ son $\overline{TN}$, $\overline{NQ}$ y $\overline{TQ}$

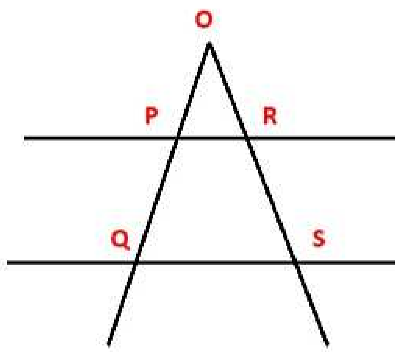
Con $\overline{TM}$, $\overline{MP}$ y $\overline{TP}$ se puede formar tres pares de segmentos : $\overline{TM}$ y $\overline{MP}$, $\overline{TM}$ y $\overline{TP}$, $\overline{MP}$ y $\overline{TP}$ por lo que las proporciones que se obtienen son las siguientes:

$$\frac{TM}{MP}=\frac{TN}{NQ},\quad \frac{TM}{TP}=\frac{TN}{NQ},\quad \frac{MP}{TP}=\frac{MQ}{TQ}$$

Si se conoce tres términos de una proporción es posible calcular el cuarto término. Apoyándonos en esto es posible aplicar el teorema de las transversales para calcular las longitudes de segmentos si contamos con los datos necesarios.

EJEMPLO

En la figura siguiente, SQ 7 RP; $\overline{OP}$ = 2,0 cm; $\overline{PQ}$ = 4, 0 cm y $\overline{OR}$ = 3,0 cm. Hallar $\overline{RS}$, $\overline{OS}$ y $\overline{OQ}$.



Resolución

Si aplicamos el teorema de las transversales, podemos plantear proporciones en la que figuren los segmentos cuyas longitudes son conocidas.

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{OR}{RS} \qquad (1)$$

Sustituyendo en (1) tenemos que:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{RS}; \quad de\,donde\, 2RS = 4 \times 3; \quad RS = 6cm$$

OS y OQ los podemos calcular mediante la suma de segmentos.
OS = OR +RS

OS = 3 cm + 6 cm

$$\boxed{\overline{OS} = 9{,}0 \text{ cm}}$$

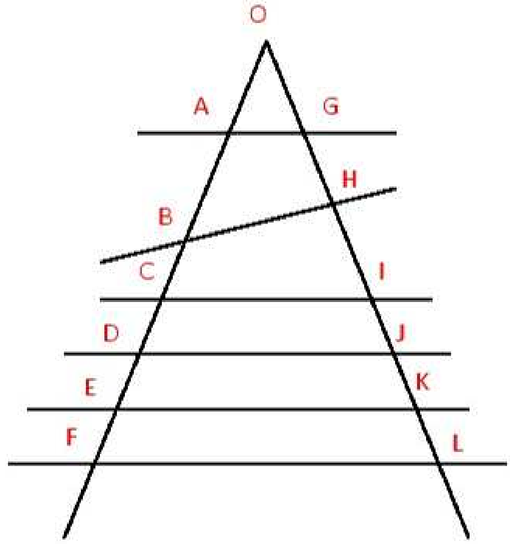
OQ= OP + PQ

$$\boxed{\mathbf{OQ = 6{,}0\ cm}}$$

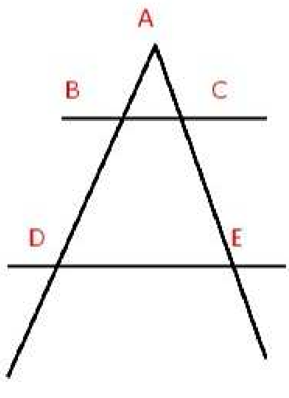
OQ = 2 cm + 4 cm

A continuación se sugiere realizar los siguientes ejercicios.

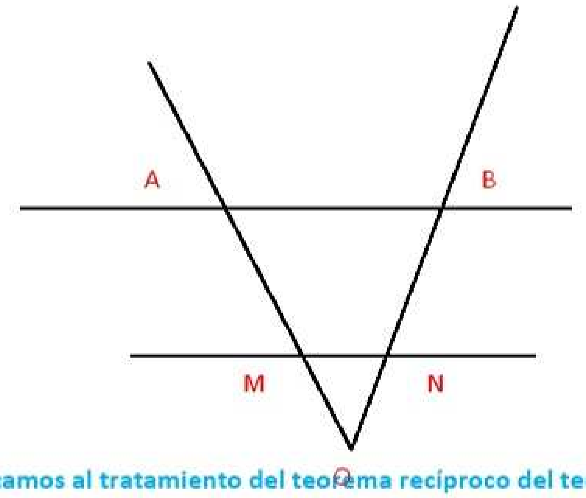
1. En la figura siguiente las semirrectas de origen común O son cortadas por las AG, BLH, CI, DJ, EK y FL. ¿Qué segmentos de semirrectas son correspondientes?



2. ¿Qué relación debe existir entre las amplitudes de $\angle$ ABC y $\angle$ADE de la figura siguiente para que se cumpla que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$?



3. En la figura siguiente las rectas MN y AB (MN││AB) interceptan a las semirrectas OA y OB Plantea todas las proposiciones que se obtiene si se aplica el teorema de las Transversales.



La segunda clase la dedicamos al tratamiento del teorema recíproco del teorema de las transversales. En primer lugar se debe tratar que los alumnos enuncien el teorema recíproco.

Para que esto sea posible es necesario que ellos analicen, con la ayuda del profesor, el enunciado del teorema directo y a partir de éste enuncien el teorema recíproco.

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de manera que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra, entonces las rectas son paralelas.

A continuación, antes de pasar a hacer la demostración, el profesor explicará a los alumnos lo referente a las demostraciones indirectas o por reducción al absurdo, y proceder a demostrar.

Demostraciones directas y demostraciones indirectas o por reducción al absurdo.

En la geometría, lo mismo que en la vida, la mejor manera de resolver un problema cualquiera es, en general, aplicarle los métodos que conduzcan directamente a su resolución. No obstante, hay veces que el empleo de esos métodos directos ofrece grandes dificultades y tenemos que recurrir a métodos que llamamos indirectos.

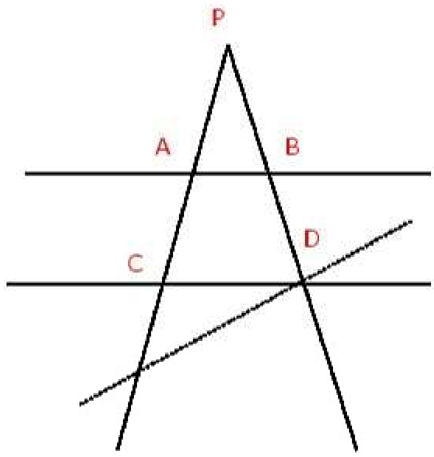
Así, para demostrar que dos rectas son paralelas, podemos suponer que no lo son y llegar a una contradicción, lo que nos llevará a concluir que nuestra suposición es falsa.

Este tipo demostración se llama **demostración indirecta o por reducción al absurdo.** .

Para que se comprenda mejor lo que se acaba de explicar, se demuestra a continuación, por deducción al absurdo, el teorema recíproco del teorema de las transversales (figura siguiente)

PREMISA: AB y CD cortan a las semirrectas PC y PD: $\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$

TESIS: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



Demostración

Supongamos que las rectas no son paralelas .
Si las rectas AB y CD no son paralelas, entonces la recta paralela a AB que pasa por D cortaría a la semirrecta PC en un punto C', diferente de C, y según el teorema de las transversales se cumple que:

$$\frac{PA}{AC'} = \frac{PB}{BD} \qquad (1)$$

Por la premisa tenemos que

$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD} \qquad (2)$$

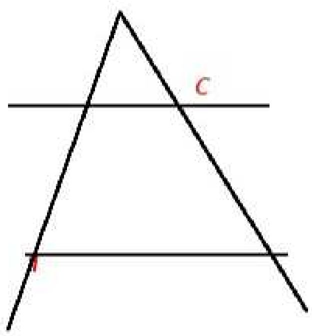
De (1) y (2) obtenemos que $\frac{PA}{AC'} = \frac{PA}{AC}$ pero esto no es posible ya que de acuerdo con nuestras consideraciones se tiene $AC \neq AC'$

1.29.6 Se ha llegado a una contradicción; por lo tanto la suposición de que las rectas AB y CD no son paralelas es falsa

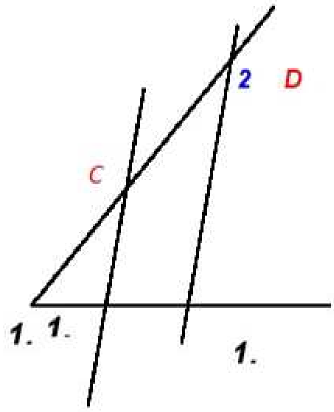
.

Una vez hecha la demostración se puede proponer a los alumnos los siguientes ejercicios.

1. En la figura siguiente, las rectas BC y DE cortan a las semirrectas AD y AE, AB = ½ DB, AC = 7.0 cm y CE = 14 cm. Demuestre que BC || DE



2. En la figura siguiente las rectas AC y BD cortan a las semirrectas SB y SD. Si SB = 12 cm, SD = 15 cm y SC = 8.0 cm, ¿cuánto debe medir SA para que se cumpla que AC || BD.



Las 5 clases restantes de este punto son para la ejercitación. Es necesario tener en cuenta al seleccionar los ejercicios que estos sean variados, o sea, incluir ejercicios de cálculo y ejercicios de demostración en los que se aplique otros conocimientos además de los teoremas estudiados.

1.30 Sugerencias y aclaraciones sobre la ejercitación:

Los ejercicios siguientes son ejercicios formales en los que se aplica el teorema de las transversales, en forma directa.

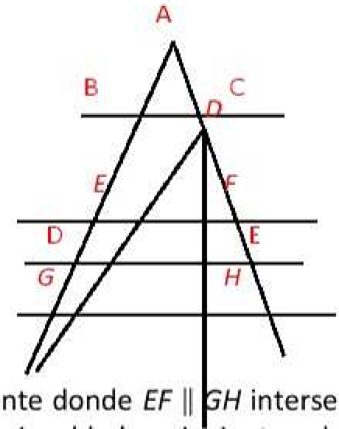
1. ¿Qué relación debe existir entre las amplitudes de $\angle$ ABC y $\angle$ADE en la siguiente figura para que se cumpla que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}?$$

$$\frac{\square}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{FH}}$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{EG}}{}$$

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{DE}} = \frac{}{\overline{FH}}$$



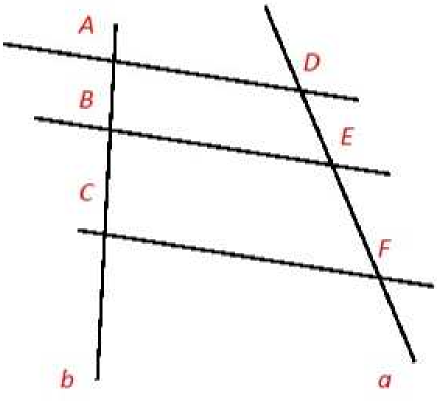
2. Basándose en la figura siguiente donde $EF \parallel GH$ intersecan a las semirrectas DG y DH. Completar cada una de las igualdades siguientes de modo que se obtenga una proporción.

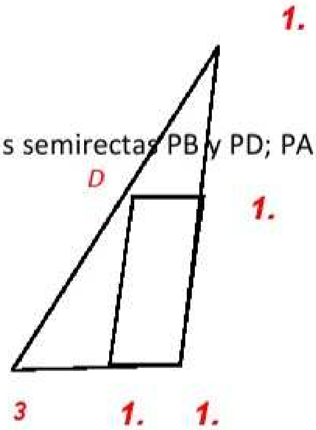
$$\frac{\square}{\square}$$

Los ejercicios siguientes son ejercicios sencillos de cálculo.

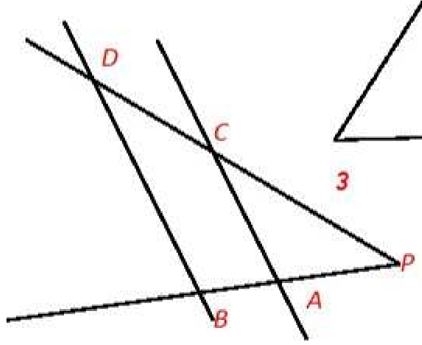
3. En la figura siguiente, $QR \parallel ST$ intersecan a las semirrectas *PS y PT: PQ = 3.0 cm; PR = 20 mm y PS = 7.0 cm. Hallar PT, QS y RT.*

4. Las rectas a y b son cortadas por tres rectas paralelas (figura siguiente). Calcular DE y EF si AB = 1.0 cm; BC =2.0 cm y $\overline{DF}$ = 6.0 cm.



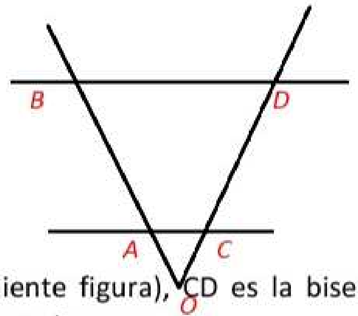


5. En la figura siguiente, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ intersecan a las semirectas PB y PD; PA = 3.3 cm; AB = 4.4 cm y PC = 6.0 cm. Calcular CD.



6. En la figura siguiente, AC || BD intersecan a las semirrectas OA y OD:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}, \overline{AB} = 12cm.y.\overline{OD} = 16cm.Calcula.\overline{OA}, \overline{OC}.y.\overline{CD}.$$



7. En el Δ ABC (en la siguiente figura), CD es la bisectriz del ∠ ACB, BE|| DC y CE es prolongación de AC. Demuestre que:

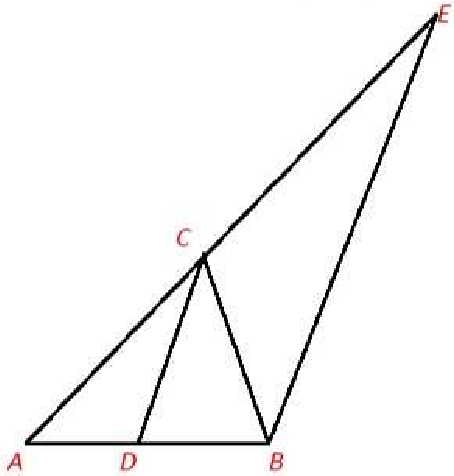
a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

$\overline{BC} = \overline{CE}$

b)

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

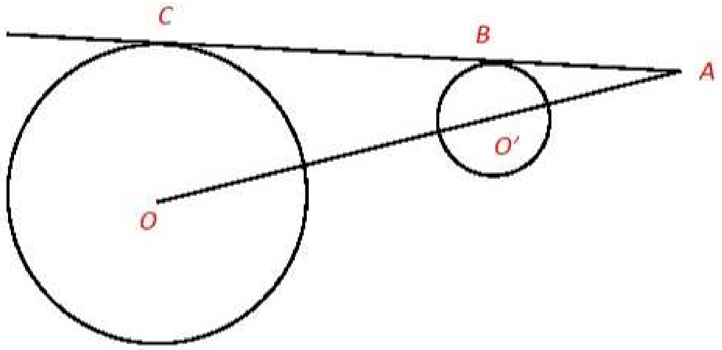
c)



d) Analizar si lo demostrado en el inciso c) se cumple para cualquier tipo de triángulo.

Los ejercicios siguientes son de cálculo y de demostración, presentan un mayor año de dificultad que los anteriores.

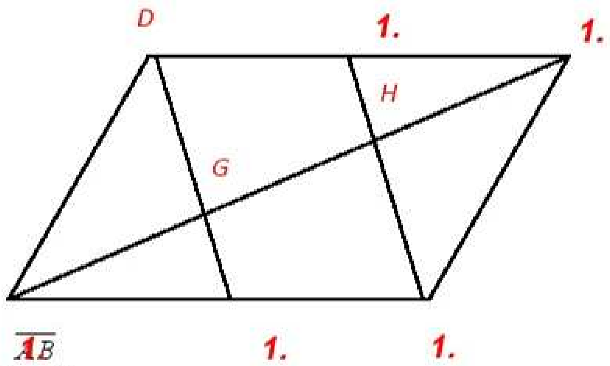
8. En el Δ ABC, DE || AB y DF || BC (figura siguiente). Si AC = 18 cm, AD = 12 cm y AF = 4.0 cm. Calcular AB, FB y DE.



9. En la figura siguiente, la semirrecta AC es tangente a las circunferencias de centro O y O' en los puntos C y B respectivamente. Si AB = 8.0 cm; BC = 120 mm y AO' = 10 cm, calcular OO'

10. En el Δ ABC (figura siguiente), A'B' || AB y B'D || AC. Demuestre que:

a) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CB'}}$



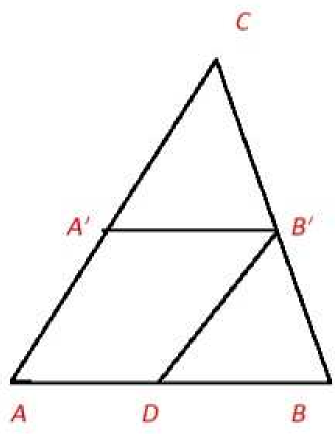
b) $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{AD}}$

$\overline{AD} = \overline{A'B'}$

c) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CB'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

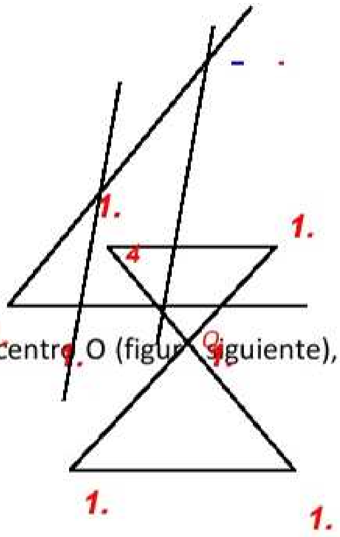
11. En el paralelogramo ABCD (figura siguiente), E es punto medio de DC y F es punto medio de AB. Demuestra que:

$$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \frac{\overline{AC}}{3}$$



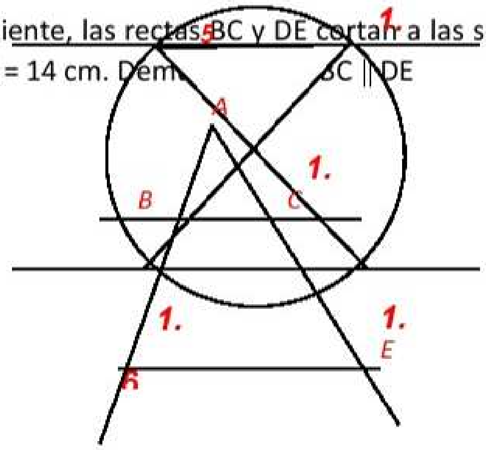
12. En La Figura siguiente, AB ∥ PQ, PB y QA se intersecan en O. Demuestre que

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OQ'}}$$



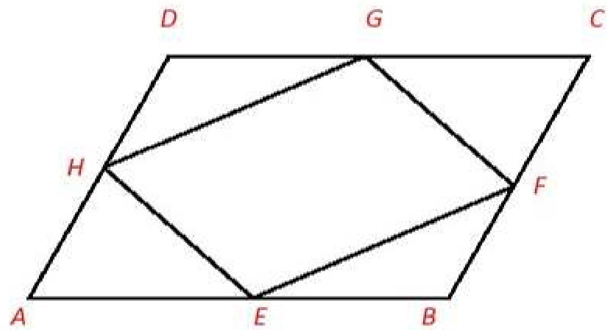
13. En la circunferencia de centro O (figura siguiente), AB y BA son diámetros. Demuestra que AA' ∥ BB'.

14. En La Figura siguiente, las rectas BC y DE cortan a las semirrectas AD y AE, AB = ½ DB, AC = 7.0 cm y CE = 14 cm. Dem[illegible] BC ∥ DE



15. En la Figura siguiente las rectas AC y BD cortan a las semirrectas SB y SD. Si SB = 12 cm, SD = 15 cm y SC = 8.0 cm, ¿cuánto debe medir SA para que se cumpla que AC ∥ BD.

16. En El Paralelogramo ABCD de la figura siguiente, E, F, G, y H son los puntos medios de AB, BC, CD y DA. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.



17. Demostrar que en todo triángulo ABC las medianas AD, BE y CF se cortan en un punto G (centro de gravedad) para el cual se cumple:

$$\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1.$$

Sugerencia: trazar paralelas a AD que pasen por E y F.

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DE LOS ANTERIORES

- EJERCICIO 8:

Este ejercicio no debe dejar de hacerse, es un ejercicio que permite sistematizar los conocimientos y además el resultado del inciso c) es una nueva propiedad de una bisectriz de un triángulo: "la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los lados del triángulo que tienen como punto común el vértice del ángulo considerado".

- EJERCICIO 9:

Para calcular $\overline{DE}$ es necesario fundamentar primero que el cuadrilátero DEBF es un paralelogramo.

- EJERCICIO 10:

Este ejercicio es muy importante; con él que se vinculan los conocimientos sobre la circunferencia y lo estudiado en esta unidad. Además en este ejercicio es preciso hacer construcciones auxiliares (los radios a los puntos de contacto) para obtener la figura en la que se puede aplicar el teorema. Esta construcción se debe tratar que la realicen los alumnos; para ello es conveniente hacer preguntas a los alumnos, de manera que se percaten de las necesidades de hacer construcciones auxiliares.

- **EJERCICIO 11:**

Este ejercicio no debe dejar de hacerse ya que el inciso d) constituye un nuevo resultado que puede generalizarse; es lo que antes se conocía como segunda parte del teorema de las transversales. Aquí no es necesario darle este nombre sino destacar la nueva relación.

- **EJERCICIO 12:**

Este ejercicio tiene mayor año de dificultad. Primero hay que probar que el cuadrilátero FBDE es un paralelogramo.

$\overline{FB} \parallel \overline{DE}$ por pertenecer a $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente y ser $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (lados opuestos de un paralelogramo).

$\overline{FB} = \overline{DE}$ por ser mitades de segmentos iguales, ya que $\overline{AB} = \overline{DC}$ (lados opuestos de un paralelogramo). FBDE es un paralelogramo por tener los lados opuestos paralelos e iguales. Una vez demostrado esto como $\overline{DF} \parallel \overline{EB}$ se puede aplicar el teorema de las transversales dos veces, a) considerando las semirrectas $\overline{DC}$ y $\overline{CA}$ de origen C, b) considerando las semirrectas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de origen A.

a. $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{HC}}{\overline{HG}} = 1$ **por lo que** $\overline{HC} = \overline{HG}$ **(1)**

b. $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{HG}} = 1$ **por lo que** $\overline{AG} = \overline{HG}$ **(2)**

De (1) y (2) obtenemos:

$\overline{AG} = \overline{HG} = \overline{HC}$ **por carácter transitivo.**

luego $\overline{AG} = \overline{HG} = \overline{HC} = \dfrac{\overline{AC}}{3}$

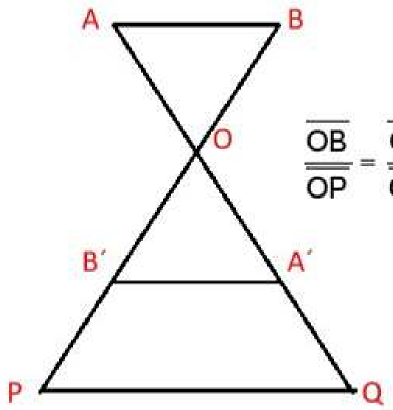
- **EJERCICIO 13:**

Este ejercicio no debe dejar de hacerse ya que permite generalizar el teorema de las transversales para el caso de dos rectas cualesquiera que se cortan en un punto.

Sugerimos que se resuelva de la forma siguiente:

1. **Aplicar una simetría central (figura siguiente) de centro O, por esta simetría $\overline{AB}$ se transforma en $\overline{A'B'}$, $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ por ser $\overline{A'B'}$ imagen de $\overline{AB}$ por una simetría central, luego $\overline{A'B'} \parallel \overline{PQ}$.**

2. **Se aplica ahora el teorema de las transversales considerando la semirrectas OP y OQ. Se tiene entonces:**



$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OQ}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}$$ **ya que** $\overline{OB} = \overline{OB'}$

y $\overline{OA} = \overline{OA'}$

- **<u>EJERCICIO 14</u>:**

Sugerencia: Trazar la diagonal $\overline{AC}$ y probar, aplicando el teorema de las transversales que $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, por lo que $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$. Después se puede demostrar por igualdad de triángulos que $\overline{HG} = \overline{EF}$ o aplicar el resultado del ejercicio 12.

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}}$$ **por lo que** $\overline{HG} = \overline{EF}$

- **<u>EJERCICIO 15</u>:**

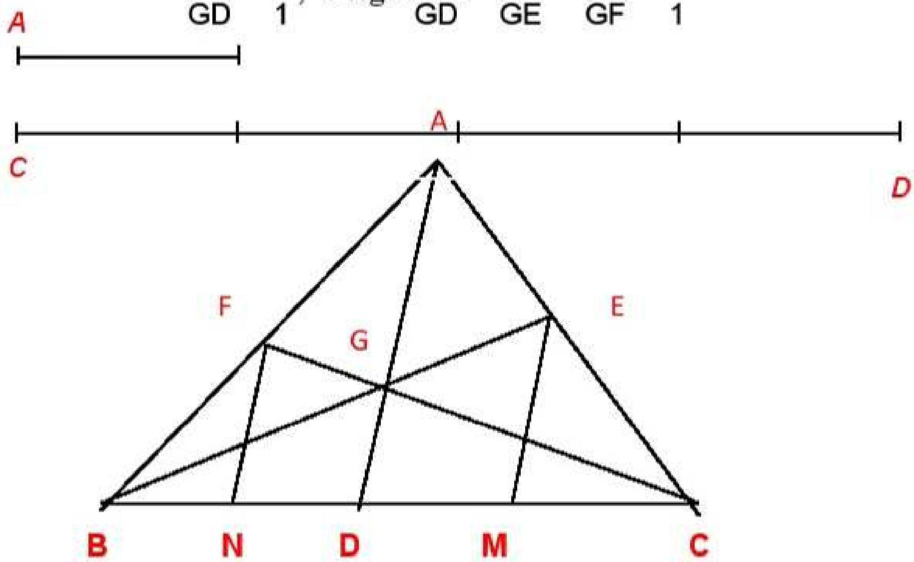
Tracemos $\overline{EM}$ y $\overline{FN}$ paralelos a $\overline{AD}$ (figura siguiente) y apliquemos el teorema de las transversales. Por ser E punto medio de $\overline{AC}$ tendremos $\overline{DM} = \overline{MC}$ e igualmente resulta: $\overline{BD} = \overline{DC}$; pero $\overline{BD} = \overline{DC}$ por lo que $\overline{DM} = \overline{MC} = \overline{BN} = \overline{ND}$.

Aplicando ahora el teorema de las transversales tenemos que:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DM}} = \frac{2}{1} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{NC}} = \frac{2}{1}$$

Análogamente, trazando paralelas a $\overline{FC}$ por E y D y aplicando el mismo teorema se tiene:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{2}{1}, \quad \textbf{luego} \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{1}$$



1.1 Aplicaciones del teorema de las transversales

Para el desarrollo de este punto esencial proponemos dos horas clase.

En la primera clase se introduce el concepto "múltiplo de un segmento" para lo que nos podemos apoyar en una figura similar a la siguiente.

A continuación se debe ejemplificar la construcción para el caso en que k es un número racional cualquiera como en el ejemplo siguiente.

Dado *AB* como en la figura anterior), construya *CD* de manera que

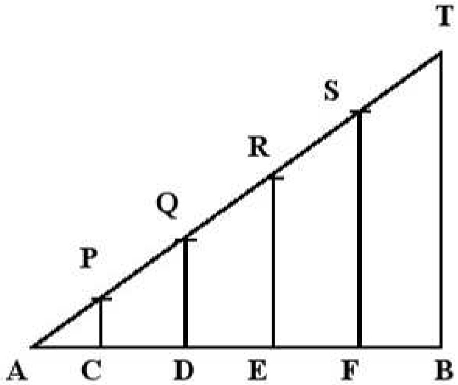
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

1.31 Resolución

Procedemos de la forma siguiente:

Construcción:

- A partir de un extremo de *AB,* digamos *A* (figura siguiente) trazamos una semirrecta que no contenga a *AB*. Transportamos 5 veces un segmento arbitrario sobre la semirrecta a partir de *A*. El extremo *T* del segmento así obtenido lo unimos con *B*.



- Si trazamos ahora rectas paralelas a *TB* por los puntos determinados en *AT*, estas dividen a *AB* en cinco segmentos iguales (la longitud de *AC* es igual a la longitud de cualquiera de los cinco segmentos).
  El procedimiento empleado se fundamenta aplicando el teorema de las transversales.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = 1; \qquad \text{Por lo que } \overline{AC} = \overline{CD}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{QR}} = 1; \qquad \text{Por lo que } \overline{AC} = \overline{DE}$$

Planteando las proporciones restantes podemos demostrar que

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$$

por consiguiente:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

La construcción se debe fundamentar adecuadamente. Finalmente se puede ejemplificar la construcción de la división interior de un segmento en una razón dada y concluir la clase con la resolución de algunos incisos de los ejercicios siguientes.

1. Traza un segmento de 7,0 cm de longitud y divídelo en 5 partes iguales.
2. Traza un segmento AB = 4,5 cm y construye un múltiplo de AB de acuerdo con los siguientes valores de k:

   a) 2 b) 2/3 c) 0.4 d) 5/4

3. **Traza un segmento de 6,0 cm de longitud y determina el punto que lo divide interiormente en la razón:** $\frac{2}{5}$.

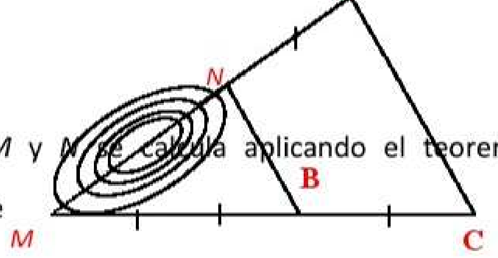
De tarea se pueden asignar ejercicios similares a los anteriores.
En la segunda clase sugerimos que se traten otras aplicaciones del teorema de las transversales como las siguientes. En estos es también necesario que se fundamente el procedimiento empleado.

Otras aplicaciones del teorema de las transversales

Por ejemplo, para medir de forma indirecta la distancia MN entre dos puntos extremos de un embalse de agua (figura siguiente) se puede proceder de la forma siguiente:

1. Se selecciona un punto A alineado con M y N.
2. Se construyen MC y AC y después se construye NB||AC.
3. Se miden las longitudes de NA, MB y BC.

(Todo esto se hace con la ayuda de un cordel y clavando estacas en cada uno de los puntos que se destacan en la figura.)

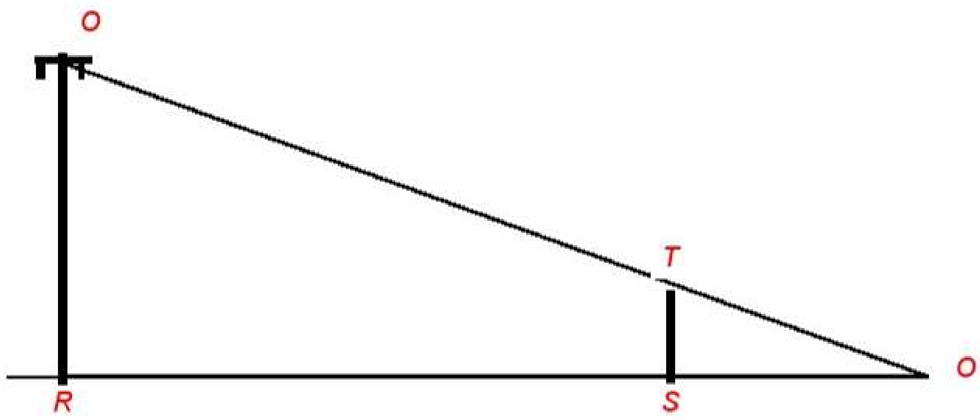


4 La distancia entre M y N se calcula aplicando el teorema de las transversales: $\frac{\overline{MN}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$ de donde

$$\overline{MN} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} \times \overline{NA}$$

Para medir de forma indirecta la longitud de un cable (figura siguiente) que debe sujetar un poste y fijarse en el suelo a una distancia determinada de éste, se puede proceder así:

1. Se determina el punto *O* en el suelo.
2. Se utiliza una varilla que se coloca perpendicular a la tierra y de manera que su píe y los puntos *P* y *O* estén alineados.
3. Se mueve la varilla en la dirección de *RO* hasta determinar un punto *S* (a una altura adecuada del poste) que esté alineado con los puntos *T* y *O*.
4. Se miden *OR*, *OS* y *OT*.



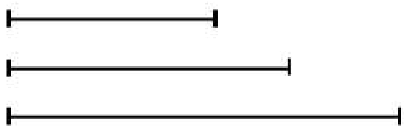
Aplicando el teorema de las transversales se puede determinar *OQ*.

$\frac{\overline{QS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}}$ de donde $\overline{OQ} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} \times \overline{OT}$.

En la ejercitación se pueden plantear los ejercicios siguientes, los que presentamos con sus soluciones.

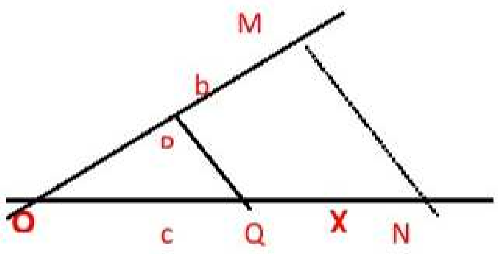
1. Se tienen tres segmentos de longitudes *a*, *b* y *c* (figura siguiente). Construir un segmento de longitud *x* tal que:

   a. *a/b = c/x* b. *x= ab/c*



Resolución

1.a.



La figura adjunta ilustra la construcción. Después de determinar P, M y Q se traza por M una paralela a $\overline{PQ}$ y así se determina el punto N; $\overline{QN}$ = X

1.b

Puede transformarse y su resolución es análoga a la del ejercicio 1.a.

Si $x = \frac{ab}{c}$, entonces $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ y $\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$, así se reduce al mismo caso tratado en el inciso anterior.

2. Construir un rectángulo cuyo perímetro sea igual a la longitud del segmento *a* de la figura del ejercicio anterior y que sus lados p y q cumplan que $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$

SOLUCIÓN

Para resolver el ejercicio se procede de la forma siguiente:

Se construye un segmento cuya longitud sea la mitad de $\overline{AB}$ ($\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$)

Se determina el punto que divide a $\overline{MN}$ en la razón $\frac{2}{3}$. Las longitudes de $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ son las de los lados del rectángulo.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Sugerimos que se realicen ejercicios de los siguientes tipos.

- **Ejercicios formales**
- **Ejercicios sencillos de cálculo.**
- **Ejercicios de cálculo y demostración donde se aplican conocimientos anteriores.**
- **Ejercicios de construcción.**

2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Esta unidad temática es fundamental ya que su contenido constituye el núcleo básico de todo lo que se desarrolla posteriormente. Por esto es necesario garantizar que los alumnos lleguen a dominar los conceptos y las relaciones que aquí se estudian de manera que puedan operar con ellos, o sea, que puedan aplicarlos para fundamentar su razonamiento y resolver diferentes tipos de problemas. Para su desarrollo se cuenta con 17 horas clases y tiene 3 puntos esenciales:

- **Definiciones de triángulos y polígonos semejantes. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.**
- **Casos generales de la semejanza de triángulos**
- Ejercicios donde se aplican los teoremas sobre la semejanza de triángulos.

2.1 Definiciones de triángulos y polígonos semejantes. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

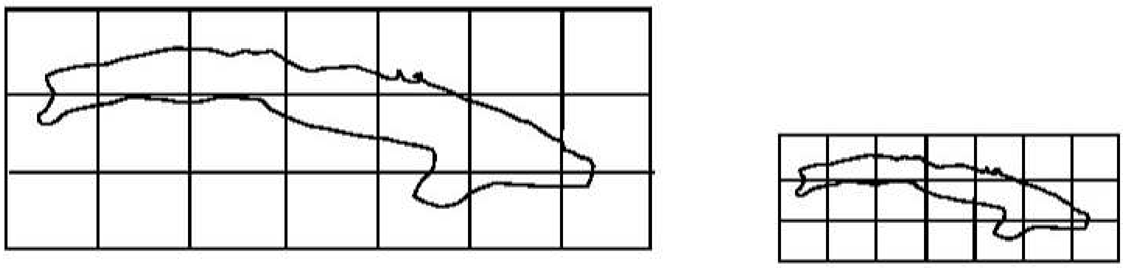
Para el desarrollo de este punto esencial dedicar 4 horas de clase.
Sugerimos que se dedique las dos primeras clases al estudio de las definiciones de triángulos y polígonos semejantes y su fijación.

La estructura de la primera clase puede ser la siguiente:

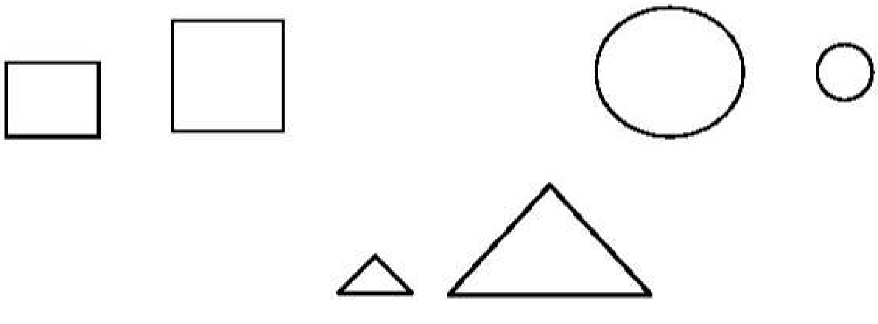
- Introducción por la vía intuitiva de la noción sobre "figuras semejantes".
- Introducción de las definiciones de "triángulos semejantes " y "polígonos semejantes"
- Ejercicios.

Antes de introducir la noción de "figuras semegantes" se debe recordar a los alumnos, o preguntarles sobre sus primeras nociones acerca de "figuras geométricas iguales" para destacar que así se consideraban las figuras que tenían "la misma forma y el mismo tamaño", y que después ellos estudiaron más profundamente estas figuras hasta llegar a una definición de este concepto.

Para introducir la noción sobre "figuras semejantes" el profesor puede primeramente mostrar a los alumnos mapas de un mismo territorio, o fotos de las que se han hecho distintas ampliaciones. Se puede ahora analizar, qué se conserva, qué no varía cuando pasamos de una figura a otra, para destacar que ellas tienen "la misma forma y distintas dimensiones".

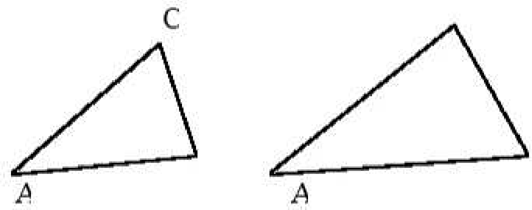


Se debe mostrar después a los alumnos figuras geométricas conocidas que sean semejantes como las de las figuras:

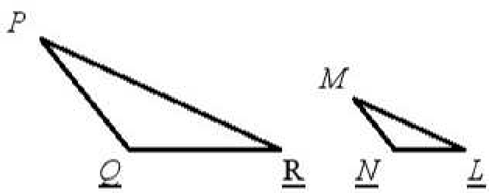


A continuación se plantea a los alumnos que ahora se inicia un estudio más detallado de las figuras geométricas semejantes y que comenzaremos con el estudio de los triángulos.

Primero se repasa el concepto "lados homólogos de dos triángulos", ya que éste se utiliza en la definición de triángulos semejantes. Para esto el profesor se puede apoyar en una figura como la siguiente y pasar después a la definición de triángulos semejantes.



Después de dar a conocer la definición es fundamental analizar un ejemplo de triángulos semejantes, apoyándonos en una figura similar a la siguiente para así destacar la proporcionalidad que existe entre los lados homólogos, que se puede plantear cuando conocemos qué ángulos de los triángulos son respectivamente iguales.



Debe destacarse también el concepto "razón de semejanza" que en lo sucesivo tendrá mucha aplicación; dar a conocer la notación que se empleará y analizar la igualdad de triángulos como un caso particular de la semejanza de triángulos.

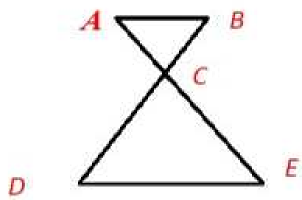
Finalmente se trata la definición de "polígonos semejantes" y antes de pasar a la ejercitación proponemos que se analice con los alumnos un ejemplo similar al ejemplo siguiente.

En la figura siguiente el $\Delta\, ABC \sim \Delta CDE$ y $AB \parallel DE$, AE y $\overline{DB}$ se intersecan en el punto C. Establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

<u>Resolución:</u>

Los ángulos iguales de los triángulos *ABC* y *CDE* son:

$\angle\, DCE = \angle\, ACB$ Por opuestos por el vértice



$\left.\begin{array}{l}\angle\, ABC = \angle\, CDE \\ \angle\, BAC = \angle\, DEC\end{array}\right\}$ Por ángulos alternos formados por $AB \parallel DE$ y, AE y DB secantes

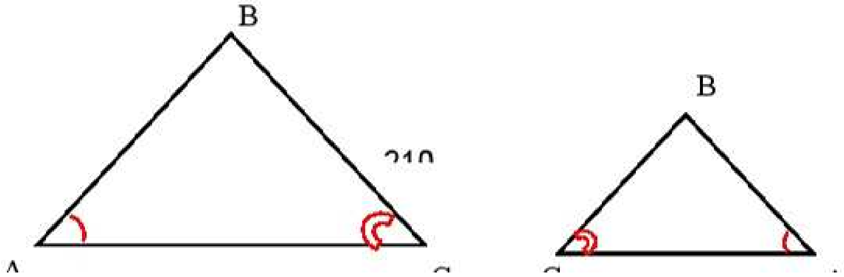
La proporcionalidad entre los lados es la siguiente:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

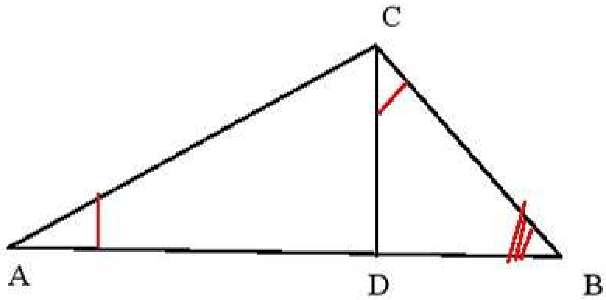
Los ejercicios siguientes están dirigidos a la fijación de la definición en una primera etapa.

1. Las parejas de triángulos que a continuación se muestran son triángulos semejantes y se han marcado de la misma forma los ángulos iguales. Establecer en cada paso la proporcionalidad entre sus lados homólogos.

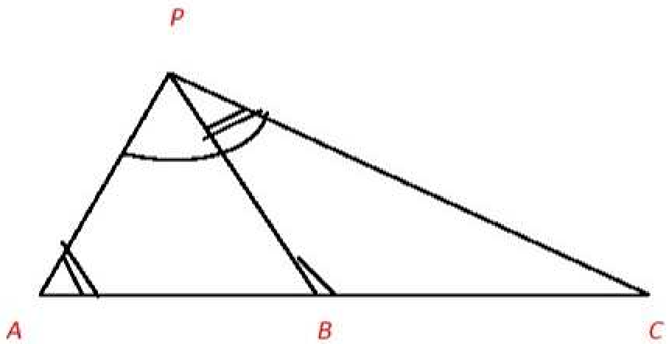
   a. Δ ABC ~ Δ A'B'C'



b. $\Delta ACD \sim \Delta BCD$

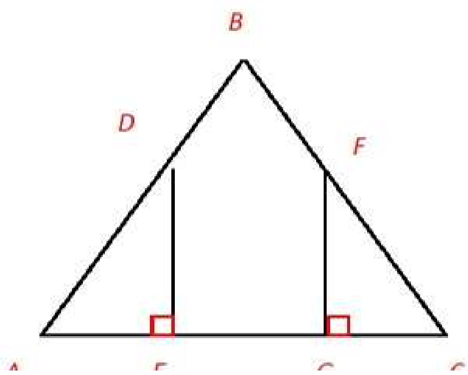


c. $\Delta APC \sim \Delta BCP$

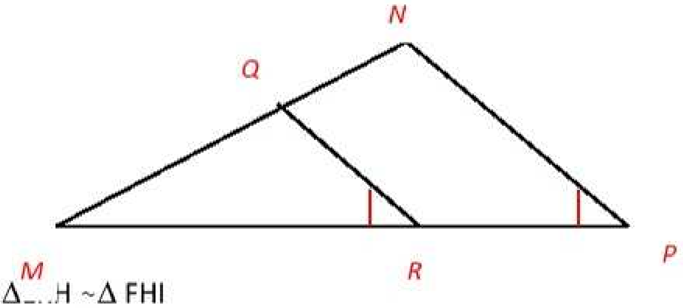


2. En las figuras que aparecen a continuación se indican los triángulos que son semejantes y se marcan de la misma forma los ángulos que son iguales. Establecer en cada caso la proporcionalidad entre sus lados homólogos y fundamentar sus respuestas.

a. $\Delta ADE \sim \Delta FGC$; ΔABC es isósceles de base AC

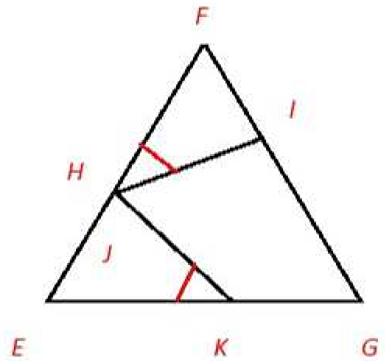


b. ΔMNP ~Δ MQR



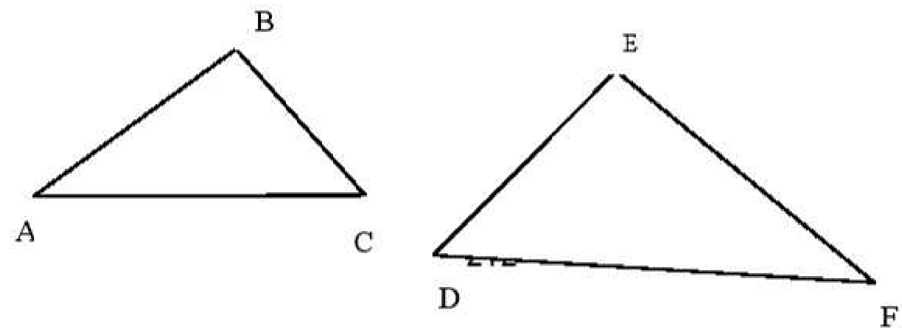
c. Δ...H ~Δ FHI

Δ EFG es equilátero.



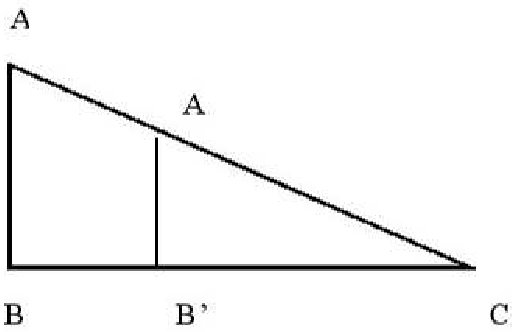
3. Los triángulos de la figura siguiente son semejantes. Diga qué ángulos de estos triángulos son respectivamente iguales si se conoce que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}}$

Fundamentar su respuesta.



La segunda clase se dedica a la fijación de las definiciones estudiadas, para ello proponemos los ejercicios siguientes.

1. En la figura siguiente $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y $AB \parallel A'B'$. Establecer la proporcionalidad entre los datos homólogos. Fundamentar la respuesta.



2. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamentar sus respuestas.
   a. Si dos triángulos son iguales, entonces son semejantes
   b. Si dos triángulos son semejantes, entonces son iguales.

3. Si tiene un triángulo *ABC* donde *AB* = 70cm; *BC* = 60cm; *CA* = 50cm; $\angle$ *CAB* = 57.1º; $\angle$ *ABC* = 44,4º y $\angle$ *BCA* = 78.5º. Compruebe si este triángulo es semejante al Δ DEF en el que DE = 12cm; *EF* = 10cm; *FD* = 14cm; $\angle$ *DEF* = 57.1º; $\angle$ *FDE* = 44.4º y $\angle$*EFD* = 78,5º.

4. En la figura del ejercicio 1, se tiene: A'C = 5.0cm y AC = 7.0cm. Determinar la razón de semejanza.

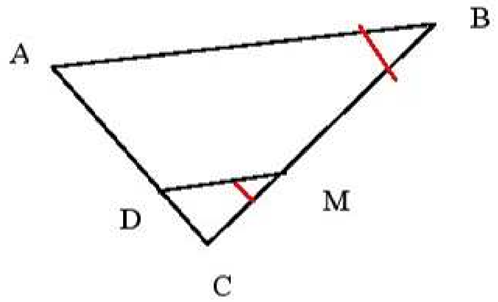
5. Los lados de un triángulo miden 4.0cm; 3.6dm y 1.5 dm respectivamente. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante a éste sí:

a. La razón entre un lado del primer triángulo y su lado homólogo en el segundo triángulo es 1.6;

b. La longitud del lado menor del segundo triángulo es de 3.0dm.

6. En la figura siguiente, $\Delta ABC \sim \Delta CDM$, BC = 7.0cm; AB = 9.0cm; AC = 6.0cm; DC = 2.0cm y $\angle B = \angle M$. Calcular la razón de semejanza y las longitudes de DM y MC

   a. Si $\angle M$ = 70º y $\angle A$ = 60º, calcular $\angle C$.



Las últimas dos clases de este punto esencial se pueden dedicar al estudio del teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

En la primera de éstas se puede enunciar y demostrar el teorema

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongados) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

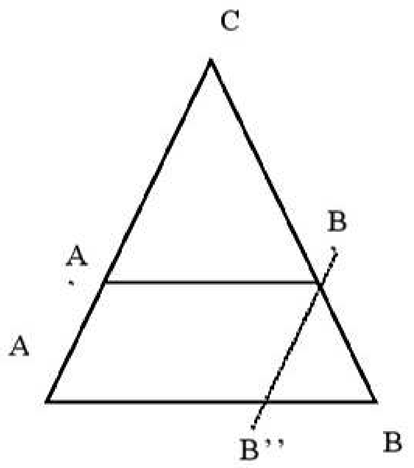
Resolver por la vía de la elaboración conjunta un ejercicio análogo al ejercicio 2 (de los presentados anteriormente) y plantear a los alumnos el ejercicio siguiente para que traten de resolverlo en forma independiente.

Los lados no paralelos de un trapecio se prolongan hasta que se intersecan en un punto. Dibuja este figura y demuestra que los triángulos que se forman son semejantes.

Es importante que los alumnos comprendan cada uno de los pasos de la demostración y su fundamentación por lo que es necesario preparar las condiciones previas, especialmente el reconocimiento de los pares de ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los teoremas sobre estos pares de ángulos y el teorema de las transversales.

Primeramente se debe enunciar el teorema y pedir a los alumnos que identifiquen la premisa y la tesis, orientándolos de la siguiente manera:

Apoyémos en la figura siguiente donde *A'B'* || AB



Premisa $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\, ABC\text{: triángulo dado.} \\ \mathbf{AB} \parallel \boldsymbol{A'B'} \\ \Delta\, A'B'C'\text{: triángulo formado} \\ \text{al cortar la recta } A'B' \text{ a los} \\ \text{lados } CA \text{ y } CB \end{array} \right.$

Tesis $\Delta\, A'B'C' \sim$

Demostración:

Por *B'* tracemos *B'B''* || *CA* que corta a *AB* en *B''*.

En $\Delta A'B'C'$ y $\Delta\ ABC$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right\} \text{ por correspondiente: } A'B' \parallel AB \text{ y } CA \text{ y } CB \text{ secantes}$$

$\angle C$ ángulo común.

Además $\begin{cases} \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CB'}}{CB} \ (1) \\ \dfrac{\overline{CB'}}{CB} = \dfrac{\overline{AB''}}{AB} \ (2) \end{cases}$ por el teorema de las transversales, ya que

$$A'B' \| AB \text{ y } BB' \| CA$$

pero $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ (3) por ser de lados opuestos del paralelogramo $A'B'B''A$ (este cuadrilátero es un paralelogramo por tener sus lados opuestos paralelos.

Sustituyendo (3) en (2) $\left\{ \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AC}} \right.$ (4)

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene:
De las igualdades (1) y (4) obtenemos

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Por lo tanto, $\Delta\ A'B'C' \sim \Delta\ ABC$ por tener sus ángulos iguales sus lados homólogos proporcionales.

(La demostración es análoga para el caso en que la recta paralela a uno de los lados del triángulo corta a las prolongaciones de estos).

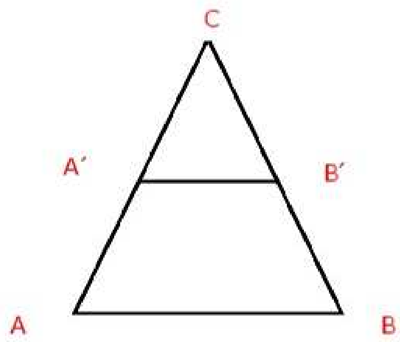
$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C$$

Es necesario para comprender los pasos de la demostración, que los alumnos sepan con precisión lo que se quiere demostrar, para lograr esto el profesor puede hacer preguntas como las siguientes:

- ¿Qué es necesario para poder asegurar que:

Los alumnos deben aplicar la definición estudiada; es necesario probar que los triángulos tienen sus 3 ángulos respectivamente iguales y que los lados homólogos son proporcionales.

Se les pide ahora a los alumnos que dibujen la figura correspondiente



- Nombre los ángulos de los triángulos ABC y A'B'C'.
- ¿Cómo podemos demostrar la igualdad entre los ángulos de los triángulos?.
- ¿Qué propiedades o qué teoremas se pueden aplicar a partir de los datos que ofrece la premisa?.

Esta primera parte de la demostración no debe ser de difícil comprensión para los alumnos, más difícil a de resultar la segunda parte para lo que se necesita hacer una construcción auxiliar.

- Nombre los lados homólogos de los triángulos.
- ¿En qué propiedad o teorema podemos apoyarnos para probar la proporcionalidad entre los lados homólogos utilizando los datos de la premisa?.

Una vez que se haya establecido la proporción:

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}},$$

se debe analizar la necesidad de hacer una construcción auxiliar.

Como lo que queremos probar es que $\overline{A'B'}$ y $\overline{AB}$ son proporcionales a los otros lados homólogos, podría intentar esto haciendo la construcción de una recta paralela de manera que se pueda aplicar el teorema de las transversales nuevamente. Este análisis hecho por el profesor posibilita la compresión de la construcción auxiliar.

No se debe hacer la construcción auxiliar sin hacer previamente este análisis que permite comprender lo lógico de seguir esta vía.

Una vez hecha la construcción se debe complementar los pasos siguientes de la demostración, también por la vía de la elaboración conjunta.

En la nueva proporción que se obtenga debe figurar una de las razones de la proporción siguiente (1)

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}}$$

El paso siguiente es probar que $\overline{AB'} = \overline{A'B'}$ y obtener finalmente que:

$$\frac{\overline{CA'}}{CA} = \frac{\overline{CB'}}{CB} = \frac{\overline{A'B}}{AB}$$

Después de hecha la demostración se debe analizar un ejemplo como el siguiente

EJEMPLO

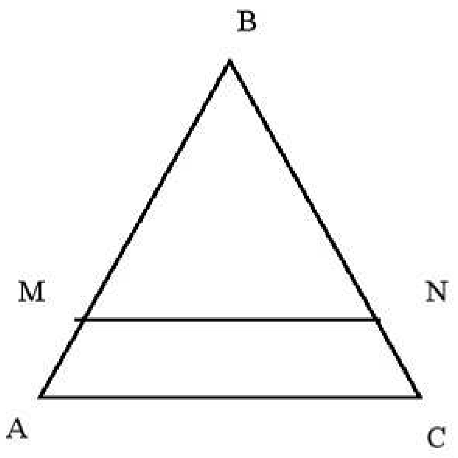
En la figura siguiente, MN || AC; AB = 10 cm; BC = 10 cm; AC = 6,0 cm y

BM =8 cm. Calcular BN y MN

<u>Resolución:</u>

Como $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ se cumple que:

Δ BMN ~ Δ ABC por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.



Los lados homólogos de estos triángulos son MN y AC , BM y AB , y BN y BC. Por lo tanto:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} \quad (1)$$

Sustituyendo los datos en (1) tenemos que:

$\frac{\overline{MN}}{6} = \frac{8}{10} = \frac{\overline{BN}}{10}$ de donde $BN = 8{,}0$ cm

$\frac{8}{10} = \frac{\overline{BN}}{10}$, de donde $MN = 4{,}8$ cm

$$\frac{\overline{MN}}{6} = \frac{8}{10}$$

2.2. Casos generales de la semejanza de triángulos

Para el desarrollo de este punto esencial se pueden dedicar dos horas. En este punto hemos considerado la introducción de los tres casos generales de la semejanza de triángulos. El concentrado de estos tres teoremas posibilita hacer una ejercitación más rica y variada que es lo que corresponde al último punto esencial de esta unidad temática.

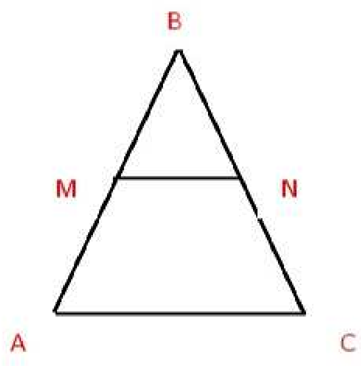
La estructura de la primera clase puede ser la siguiente:

1. Teorema (a.a.) de la semejanza de triángulos. Demostración. Ejemplos.
2. Análisis del enunciado del teorema (p.a.p.) de la semejanza de triángulos. Ejemplos.
3. Ejercicios de fijación.

Antes de enunciar el teorema, el profesor debe hacer una introducción con el objetivo de repasar algunos aspectos. Justificar la igualdad de triángulos. Esto se puede realizar mediante preguntas a los alumnos, como las siguientes:

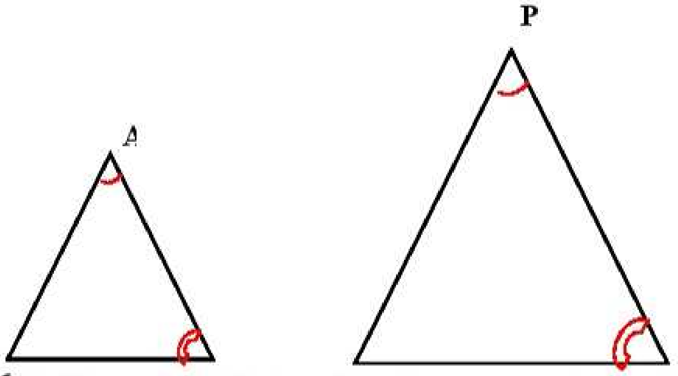
- Diga la definición de figuras geométricas iguales y aplíquelas al caso particular de la igualdad de triángulos.
- ¿Qué podemos afirmar sobre los lados y los ángulos de dos triángulos iguales?.
- Enuncie los tres teoremas que estudió sobre la igualdad de triángulos.

Una vez analizadas las respuestas de estas preguntas el profesor debe plantear a los alumnos que hasta ahora para demostrar que dos triángulos son semejantes lo que hicimos fue aplicar la definición y probar que los triángulos tenían sus ángulos respectivamente iguales y que sus lados homólogos eran proporcionales. Después hicimos algunas demostraciones apoyándonos en el teorema fundamental de la semejanza de triángulos; este teorema aplicable, desde luego, en los casos que se cumple su premisa, como en el ejemplo, presentado (figura siguiente), en que los triángulos tienen un ángulo común y un lado de uno de los triángulos es paralelo a un lado del otro ($\overline{MN} \,||\, \overline{AC}$).



Ahora, de forma análoga a como se hizo con la congruencia de triángulos, vamos a mostrar que se puede llegar a afirmar que dos triángulos son semejantes sin necesidad de probar todas las igualdades que figuran en la definición, sino solamente alguna de ellas.

Se puede ahora enunciar el teorema, pedir a los alumnos que escriban la premisa y la tesis del teorema, que dibujen una figura de análisis como la siguiente y pasar a la demostración.



Sean ABC y PQR (figura anterior) dos triángulos que cumplen las condiciones que establece la premisa del teorema.

Premisa $\begin{cases} \angle A = \angle P \\ \angle B = \angle R \end{cases}$

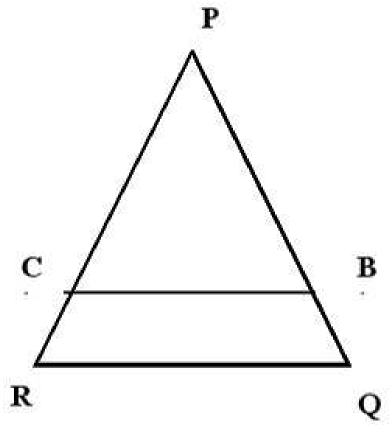
Tesis $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

<u>Demostración</u>

Como $\angle A = \angle P$, existe un movimiento mediante el cual se puede hacer coincidir estos ángulos.

Si se aplica este movimiento al ΔABC se obtiene el $\Delta PB'C'$ (figura siguiente)

Fig. 1.50



Δ PB'C' = Δ ABC (1)

(P imagen de A, B' imagen de B y C' de C).

$\angle$ B' = $\angle$ B por ser $\angle$ B' la imagen de $\angle$ B.

$\angle$Q = $\angle$B dato de la premisa.

Por lo tanto $\angle$ Q = $\angle$ B' por carácter transitivo.

C'B' $\parallel$ RQ ya que se forman ángulos correspondientes iguales al ser cortadas por la secante PQ.

ΔPB'C' ~ ΔPQR (2)

por el teorema fundamental de semejanza de triángulos.

De (1) y (2) podemos concluir que: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$.

Es fundamental la búsqueda de la vía para hacer la demostración, que se debe realizar siguiendo el método de elaboración conjunta. El profesor puede hacer a los alumnos preguntas como las siguientes:

- ¿En qué conocimientos podemos apoyarnos para hacer la demostración?
  R: la definición y el teorema fundamental.

- ¿Qué vía se siguió para demostrar teoremas análogos a éste, en la congruencia de triángulos?

  R: Se utilizaron los movimientos.

  (Si los alumnos no dan esta respuesta, el profesor debe recordarlo).

- Analicemos si es conveniente aplicar los movimientos en este caso.

Este análisis debe llevar a la conclusión de que mediante un movimiento es posible obtener una figura como la anterior en la que se aprecia rápidamente una de las condiciones de la premisa del teorema fundamental.

Los otros pasos de la demostración los alumnos pueden llegar a comprenderlos sin muchas dificultades.

Es necesario explicar a los alumnos que lo que se demuestre primeramente es que:

$\Delta PB'C' \sim \Delta PQR$ y que podemos afirmar después, que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ basándonos en lo siguiente:

Como $\Delta PB'C' = \Delta ABC$ se cumple que:

$$\Delta PB'C' \sim \Delta \mathbf{ABC}$$

$$\begin{cases} \Delta PB'C' \sim \Delta PQR \\ \Delta PB'C' \sim \Delta ABC \end{cases}$$

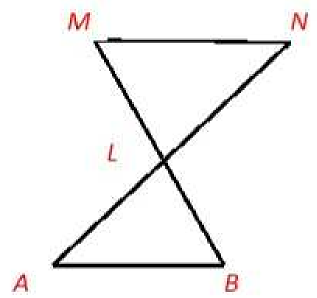
De estas dos proposiciones verdaderas podemos concluir que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ por la propiedad transitiva de la semejanza de figuras geométricas: "dos figuras geométricas semejantes a una tercera son semejantes entre sí".

Después de realizada la demostración sugerimos que se analice un ejemplo como el siguiente y si queda tiempo se plantee a los alumnos resolver el ejercicio siguiente.

EJEMPLO

En la figura siguiente $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $\overline{BM}$ *y* $\overline{NA}$ se intersecan en el punto L. Demuestre que $\Delta MNL \sim \Delta ABL$.

Demostración:



En el Δ MNL y el Δ ABL se tiene:

$\angle$ MLN = $\angle$ ALB por ser opuestos por el vértice

$\angle$ NML = $\angle$ LBA por alternos entre paralelas.

$$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$$

Por lo tanto: $\Delta MNL \sim \Delta ABL$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

A continuación se puede resolver el siguiente ejercicio:

En la figura siguiente Δ EFG es rectángulo, EG es su hipotenusa y FD $\perp$ EG. Demuestre que Δ EDF ~ΔFDG.

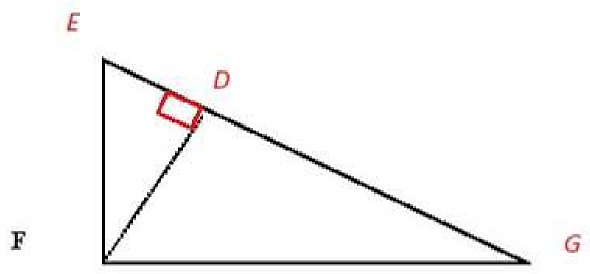


Fig. 1.69

La segunda clase puede dedicarse al estudio de los enunciados de los teoremas siguientes y al análisis de los ejemplos y ejercicios como los que a continuación proponemos, donde se aplica el teorema el teorema de semejanza p.p.p.

Teorema de semejanza de triángulos p.a.p.

Si dos triángulos tienen lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.

Teorema de semejanza de triángulos p.p.p.

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces estos triángulos son semejantes

EJEMPLO

En la figura siguiente, *ABCD* es un paralelogramo y $\frac{\overline{DM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AB}}$. Demuestre que

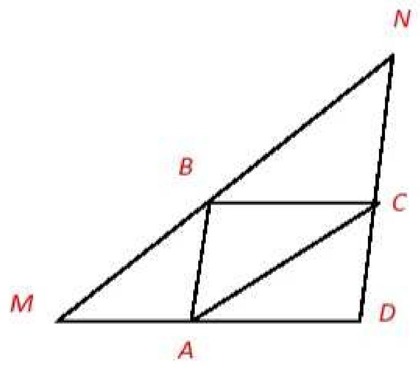
$\Delta DMN \sim \Delta DAC$.

Demostración:

$\overline{DA} = \overline{BC}$ (1)
$\overline{DC} = \overline{AB}$ (2)

por ser lados opuestos de un paralelogramo

$\frac{\overline{DM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AB}}$ (3)



Sustituyéndose (1) y (2) en (3) tenemos que: $\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}$

En el Δ *DMN* y el Δ *DAC* se cumple que $\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}$

$\angle$ *D* es ángulo común.

Por lo tanto: $\Delta DMN \sim \Delta DAC$ por tener dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados.

<u>EJEMPLO</u>

Las longitudes de los lados de los triángulos *ABC* y *PQR* son:

AB = 1,5cm; *BC* = 3,0cm; *AC* = 5,0cm; *PQ* = 4,5cm; *QR* = 9,0cm y *RP* = 15cm. Determinar si $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. Justifique su respuesta y en caso afirmativo diga qué ángulos de estos triángulos son respectivamente iguales.

<u>Resolución:</u>

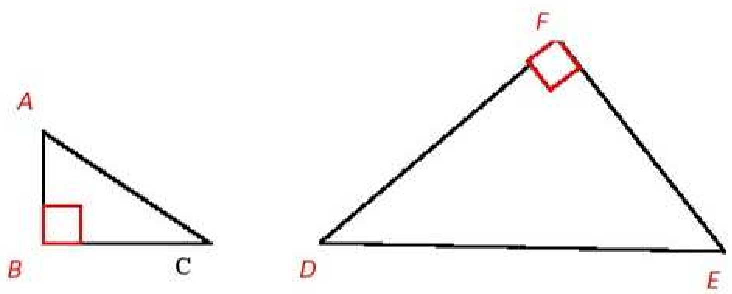
Si los lados del ΔABC y del ΔPQR son proporcionales, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. En este caso se cumple que:

$$\frac{1{,}5}{4{,}5}=\frac{3}{9}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}, \quad \text{o}\cdot\text{sea}: \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{RP}}$$

Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta\ PQR$ y $\angle C = \angle R$, $\angle A = \angle P$ y $\angle B = \angle Q$

Se puede realizar el siguiente ejercicio

En la figura siguiente se tienen dos triángulos rectángulos ABC y DEF donde se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}}$ Demuestre que Δ ABC ~ Δ DEF.



2.3 Ejercicios donde se aplican los teoremas sobre la semejanza de triángulos.

Se ha considerado ejercitación como un punto esencial de la unidad temática atendiendo a que el sistema de ejercicios propuesto tiene características especiales, los ejercicios que lo componen están dirigidos a desarrollar las habilidades de los alumnos para aplicar los conceptos y teoremas estudiados en esta temática, conjuntamente con otros contenidos estudiados anteriormente, a la resolución de estos problemas para fundamentar proposiciones de cálculo, de demostraciones, de construcción y otros vinculados con la vida práctica.

Entre los ejercicios de demostración hay varios que son portadores de nueva información, o sea, que constituyen propiedades y relaciones que se pueden generalizar, y los alumnos pueden incorporarlos al sistema de conocimientos del que ya se han apropiado. Es importante dar aplicación a los nuevos conocimientos que se obtienen por esta vía para que los alumnos los fijen, para esto también hay ejercicios en el sistema.

Durante el desarrollo de esta ejercitación los alumnos deben tener el mayor año de independencia posible, de manera que puedan lograr un mayor desarrollo de habilidades, la labor fundamental del profesor es la de dirigir y controlar esta actividad de manera que cada alumno alcance el máximo desarrollo posible atendiendo a sus posibilidades.

La ayuda del profesor a de estar presente en cada caso que sea necesario, no ha de ser una ayuda directa, sino mediante preguntas que estimulen la actividad cognoscitiva del alumno que afronta dificultades y lo ayuden a encontrar la vía correcta para resolver el ejercicio. En los casos que sea necesario se debe plantear una ejercitación tanto a los alumnos que presentan dificultades como a aquellos de mayor rendimiento.

En cada una de las clases se debe señalar la tarea extraclase, que puede estar compuesta por uno o varios ejercicios, según lo considere el profesor. También ha de tenerse en cuenta, remitir a los alumnos a estudiar los contenidos que se tratarán a continuación con el objetivo de preparar las condiciones previas para las clases siguientes.

Los contenidos correspondientes a este punto esencial son los ejercicios siguientes y para su estudio proponemos 11 horas de clase.

1. En un triángulo ABC, AB = 3,0cm; BC = 4,0cm; AC = 5,0cm; $\angle$ BAC = 53,1º; $\angle$ABC = 90º y $\angle$ BCA = 36,9º. Compruebe si este triángulo es semejante a uno DEF si para el Δ DEF se cumple lo siguiente:

   a. DE = 22.5cm; EF = 30cm; DF =37,5cm
   b. $\angle$ DEF = 90º; $\angle$ EFD = 53,1º
   c. DE = 15cm; EF = 20cm; DF = 30cm
   d. DE = 18cm; EF = 24cm; $\angle$ DEF = 60º
   e. DE = 1,5cm; DF = 2.5cm; $\angle$ EDF = 53,1º.

2. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Justificar sus respuestas.

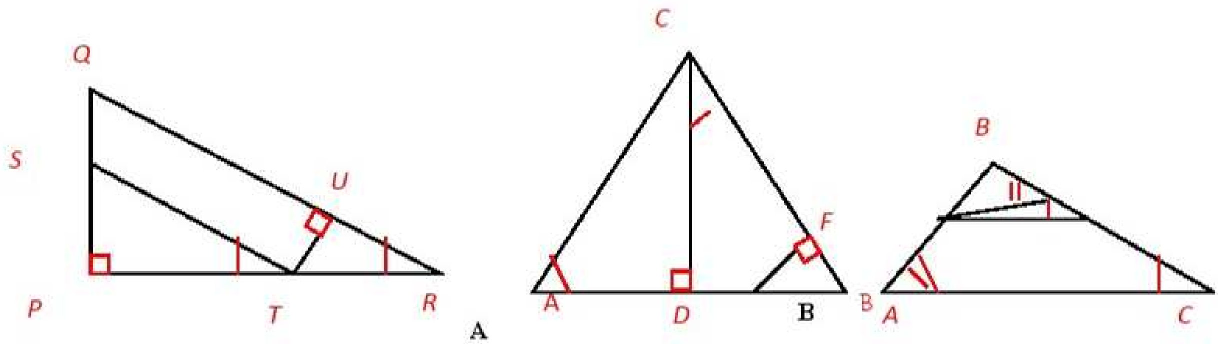
   a. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo de otro triángulo rectángulo, entonces estos triángulos son semejantes.
   b. Si un ángulo de un triángulo isósceles es igual a un ángulo de otro triángulo isósceles, entonces estos triángulos son semejantes.
   c. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

3. Diga si son semejantes dos triángulos rectángulos, si uno de ellos tiene un ángulo de 42º y el otro un ángulo de 48º.

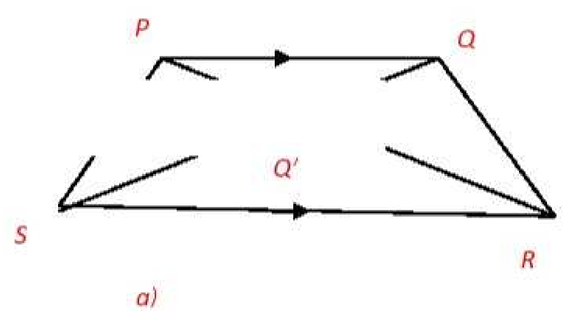
4. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Justificar sus respuestas.

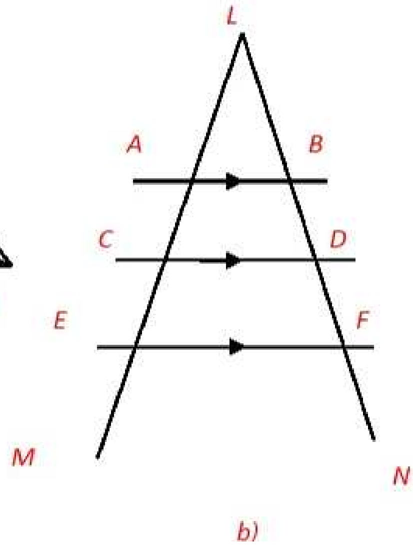
   a. Dos polígonos iguales son también semejantes
   b. Todos los cuadrados son semejantes
   c. Los paralelogramos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes.
   d. Dos rombos cualesquiera son semejantes.
   e. Dos rectángulos cualesquiera son semejantes.

5. En la figura siguiente se han marcado de la misma forma los ángulos iguales. Diga qué triángulos son semejantes. Justificar sus respuestas.

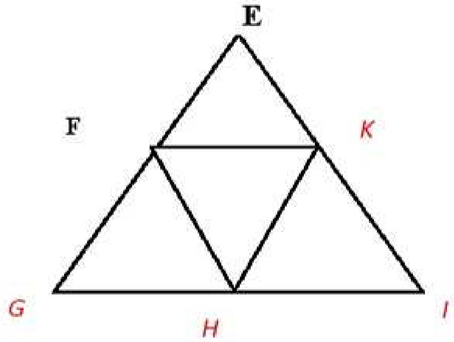


6. En la figura siguiente los segmentos o rectas paralelas se han senalado con saetas dirigidas en el mismo sentido, SQ y PR se intersecan en Q, LM y LN son semirrectas. Hallar en cada caso los triángulos semejantes. Justificar sus respuestas.

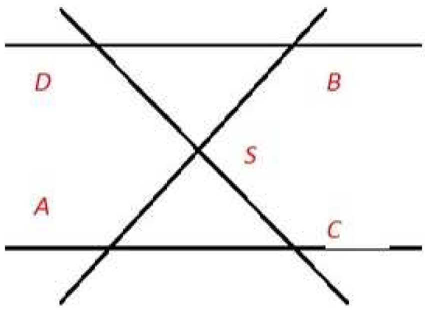




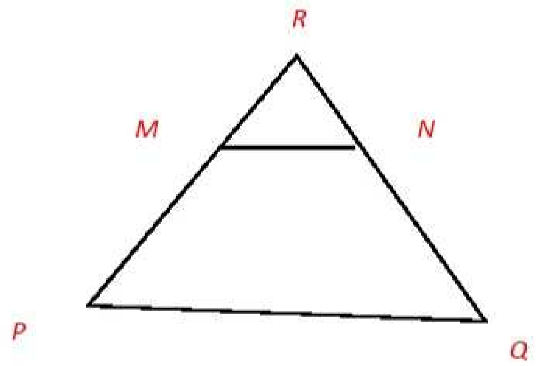
7. En la figura siguiente FH || EI; FK || GI y HK || GF. Determinar qué triángulos son semejantes. Justificar su respuesta.



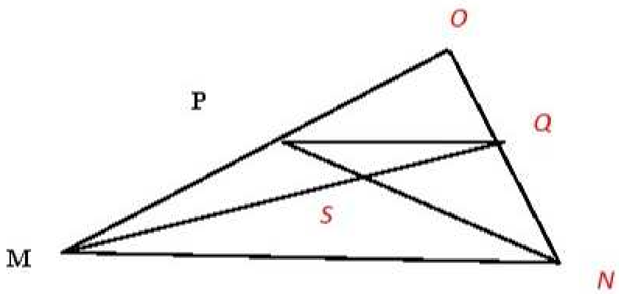
8. En la figura siguiente, DB||AC y las rectas DC y AB se intersecan en S. Demuestre que AC: BD = SA: SB



9. En el Δ PQR (de la siguiente figura) PR = 3MR y QR = 3NR
   a. Pruebe que Δ PQR ~ Δ MNR
   b. Pruebe que MN || PQ
   c. Calcule PQ si MN = 2,8cm



10. En el Δ MNO (figura siguiente), S es el punto de intersección de PN y MQ, MS
    a. Pruebe que Δ MNS ~Δ PQS
    b. Pruebe que PQ || MN
    c. Pruebe que Δ POQ ~Δ MON.
    d. Calcule PQ si MN = 2,5 cm.



11. Si Δ ABC ~Δ DEF y se conoce que AC = 7 cm;
    AB = 5,0 cm; CB = 8,0 cm y $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{1}{3}$ Calcule el perímetro del Δ *DEF*

    si $\angle B = \angle E$

12. Demuestre que para dos triángulos semejantes se cumple que si el perímetro de uno de ellos es P y el del otro es P', entonces P'= kP, donde k es la razón de semejanza.

13. Sobre uno de los lados de un ángulo A se han tomado los segmentos AB = 5,0 cm y AC = 16 cm y sobre el otro lado se han tomado los segmentos AD = 8,0 cm y AF = 10cm. Determinar si los triángulos ACD y ABF son semejantes y en caso afirmativo. Calcular la razón de semejanza.

14. Construya dos rectángulos semejantes para los que la razón de semejanza sea:

$$k = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

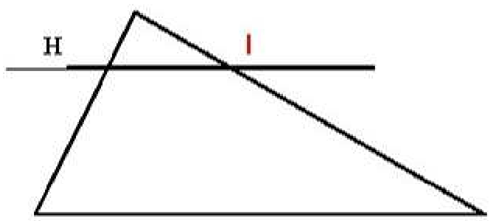
15. En un rectángulo ABCD (AB = a y BC = b (b $\geq$ a)), se ha trazado EF de manera tal que el rectángulo BCEF que se obtiene es semejante al rectángulo ABCD. **Hallar las longitudes de los lados del rectángulo** ADEF **si a** = 8,0 **cm y b** = 6,0 **cm.**

16. La razón de semejanza entre dos polígonos es 2/3. Calcule el perímetro del mayor de ellos si el perímetro del menor es de 24 cm.

17. Los perímetros de dos polígonos semejantes son 15 y 30 m respectivamente. El mayor de los lados del polígono menor mide 4,0 m. Calcule la longitud del lado mayor del otro polígono.

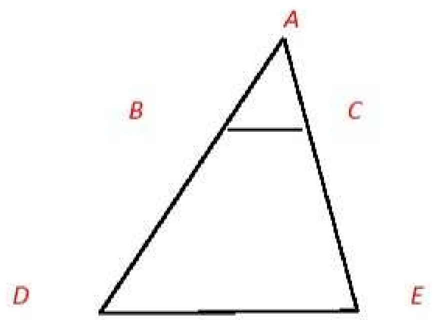
18. Los lados de un triángulo miden 6,0; 9,0 y 12 dm respectivamente y el producto de las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al primero, es 24. Calcule las longitudes de los lados del segundo triángulo.

19. En la figura siguiente, HI || EF, $\frac{\overline{HG}}{\overline{HE}} = \frac{1}{2}$ GE = 9,0 m, EF = 12 m y GF = 18 m. Calcule HG, GI y HI.



20. En la figura siguiente, *B y C* son puntos medios de *AD y AE* respectivamente. Demuestre que:

a. BC || DE b. BC = $\frac{1}{2}$ DE

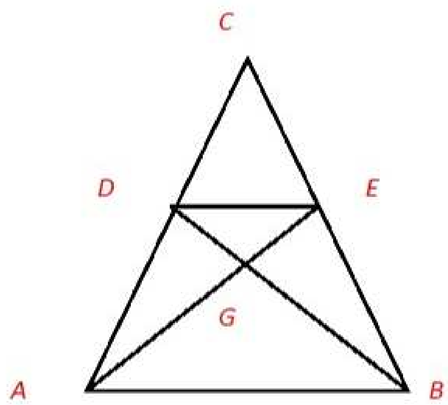


21. Enuncie las propiedades demostradas en el ejercicio anterior.

22. En el $\Delta\, ABC$ de la siguiente figura AE y BD son medianas.

a. Demuestre que Δ ABG ~ Δ DGE

b. Calcule $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$



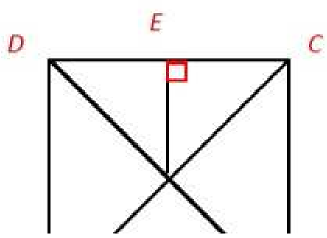
c. Calcule $\frac{P_{\Delta ABG}}{P_{\Delta DGE}}$ $(P: perimetro)$.

23. En un triángulo se han trazado los segmentos que unen los puntos medios de sus tres lados. Demuestre que todos los triángulos que aparecen en la figura formada son semejantes.

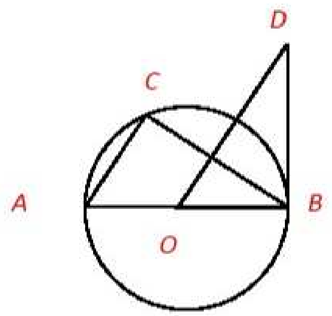
24. En la figura siguiente, ABCD es un cuadrado, F es el punto de intersección de sus diagonales y $EF \perp DC$

a. Pruebe que Δ CEF ~ Δ ABC

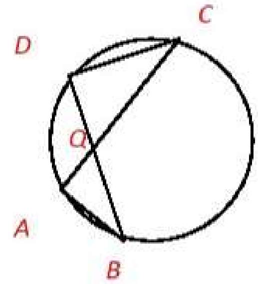
b. Diga cuál es la razón entre el perímetro del Δ EFC y el del Δ ABC.



25. En la figura siguiente, C es un punto de la circunferencia de centro O, AB es un diámetro, DB es tangente a la circunferencia en el punto B y AC ∥ OD. Demuestre que Δ ABC ~ Δ DOB.



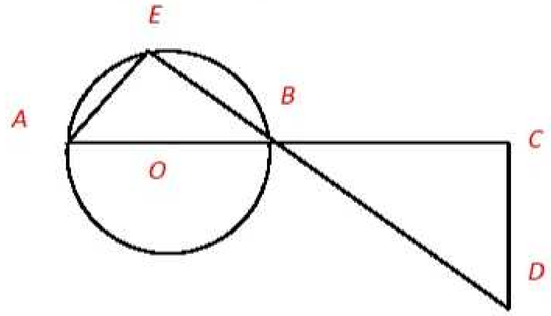
26. En la figura siguiente A, B, C y D son puntos de la circunferencia, AC y BD son cuerdas que se intersecan en Q. Demuestre que Δ DQC ~ Δ AQB.



27. En un Δ ABC, ∠ C = 90° y CD es la altura correspondiente a AB. Pruebe que los tres triángulos que aparecen en la figura formada son semejantes.

28. En la figura siguiente, E es un punto de la circunferencia de centro O, AB es el diámetro, AC $\perp$ CD y los puntos E, B y D están alineados. Demuestre que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$

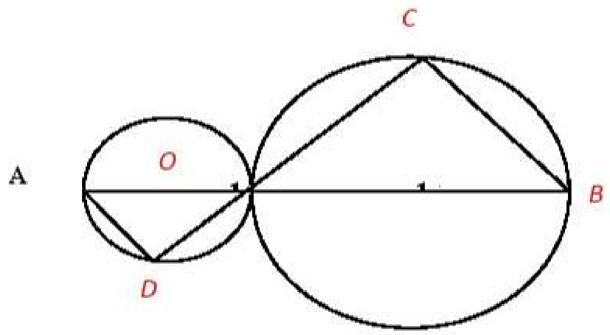
29. Las circunferencias C(O; r) y C'(O' ; r') de la figura siguiente son tangentes en el punto T;



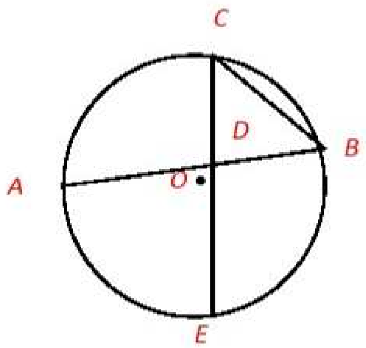
AT y TB son diámetros.

a. Demuestre que Δ ADT ~ Δ TBC.

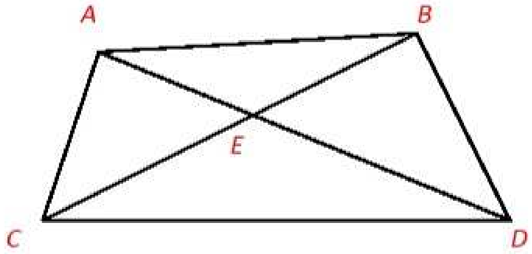
b. Calcule CT y TD si se conocen: r = 6,0 cm; r' = 10 cm y CD = 3,2 dm.



28. En la figura siguiente, A, B, C y E son puntos de la circunferencia de centro O y CD es bisectriz del $\angle$ ACB. Demuestre que Δ ADC ~ Δ BED ~ Δ CBE.

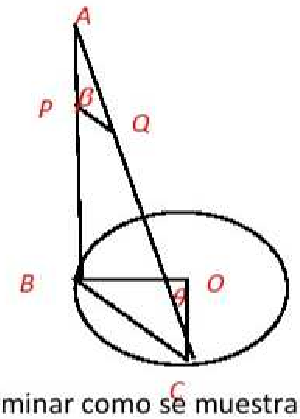


29. En la figura siguiente, ABDC es un trapecio y E es el punto de intersección de sus diagonales, AB = a y CD = b. Calcule la razón en que el punto E divide a cada una de las diagonales.



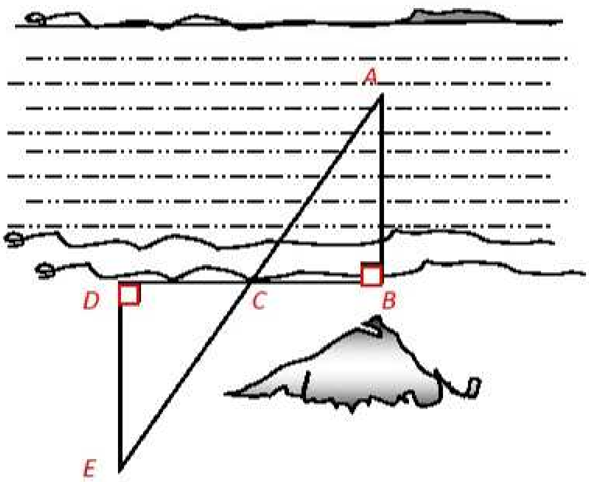
28. Pruebe que al trazar las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se forman dos pares de triángulos semejantes.

29. En la figura siguiente, los puntos A, Q y C están alineados, AB es tangente a la circunferencia de centro O; BC es una cuerda; $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$; $\overline{AQ}$ = 4,0 cm y $\overline{QC}$ = 8,0 cm. Demuestra que $\beta = 180° - \theta/2$

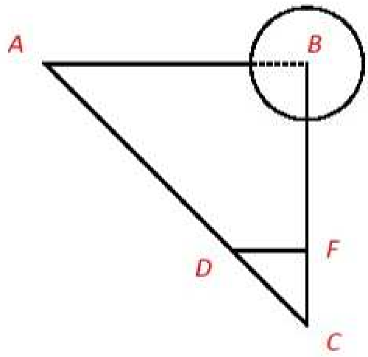


30. El ancho de un río se puede determinar como se muestra en la figura siguiente; esto es necesario cuando no se tiene acceso a la prolongación de $\overline{AB}$ a partir de B.

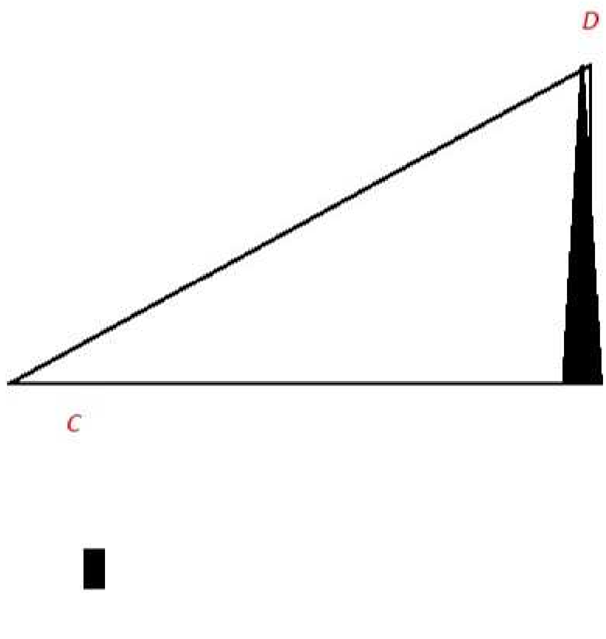
Hallar el ancho del río si $\overline{BC}$ = 29m; $\overline{CD}$ = 11m y $\overline{DE}$ = 14m.



31. Para calcular la distancia entre dos puntos A y B, siendo B un punto inaccesible, se puede hacer una construcción como la que se muestra en la figura siguiente. Calcula $\overline{AB}$ si $\overline{AC}$ = 150m; $\overline{DF}$ || $\overline{AB}$; $\overline{CF}$ = 16m y $\overline{CD}$ = 30m.

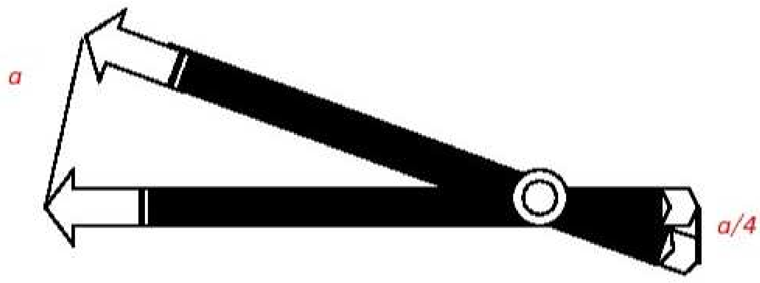


32. Un observador que se encuentra en el punto A (fig. 1.91) ve el extremo C de un tablón y el punto D de una torre, sobre una línea recta. ¿Cuál es la altura de la torre si $\overline{AF}$ = 60m; $\overline{AB}$ = 6,0m y $\overline{BC}$ = 3,0m?.

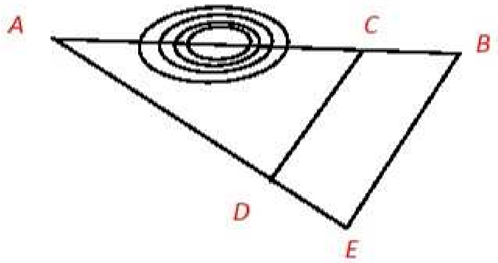


A B

37. La figura siguiente muestra un compás de proporción. Este es ajustable mediante un tornillo de modo que se obtiene una razón dada entre las porciones de las patas. Se utiliza para la reducción o ampliación de segmentos según una escala. Explicar en qué se fundamenta la construcción de este instrumento.



38. Sean A y B dos puntos separados por un obstáculo visual. Sobre $\overline{AB}$ se debe jalonar un punto C que no sea visible desde A.
   a) Explicar el procedimiento utilizado de acuerdo con la figura.
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{DC}$ para $\overline{AD}$ = 96m; = 60m y $\overline{BE}$ = 28m?



Sugerencias y observaciones sobre el sistema de ejercicios:

Resulta conveniente no plantear a los alumnos, uno a continuación de otro, todos los ejercicios en que se aplique un teorema determinado, sino mezclar en la clase siempre que sea posible ejercicios donde se apliquen distintos teoremas, para que esto sea posible sugerimos el tratamiento concentrado de la teoría en las primeras clases de esta unidad temática.

- EJERCICIOS 1 y 2:

Estos dos ejercicios se prestan para iniciar esta ejercitación.

En el ejercicio 1 se aplican los tres teoremas estudiados, lo que prepara a los alumnos para diferenciar cuándo se puede aplicar uno u otro teorema.

En el ejercicio 2 se aplican las definiciones de triángulo rectángulo, de triángulo isósceles, así como el teorema (a.a.). En la resolución del inciso c) se puede aplicar también los teoremas (p.a.p.) y (p.p.p.) y es conveniente que esto se analice.

- EJERCICIO 4:

Este ejercicio no debe dejar de hacerse, ya que trata sobre la semejanza de polígonos en general, y en especial se aplica las definiciones y propiedades de los cuadriláteros.

- La proposición a) es verdadera ya que la igualdad de polígonos es un caso particular de la semejanza (la razón de la semejanza es k=1).
- La proposición b) verdadera de acuerdo con la definición de polígonos semejantes.
- La proposición c) de manera general es falsa. Se puede fundamentar utilizando un contraejemplo. Un cuadrado y un rectángulo tienen los ángulos iguales, pero la razón entre sus lados no siempre es la misma (es verdadera solo en el caso particular, cuando el rectángulo considerado es un cuadrado, o sea, tiene sus lados iguales).
- La proposición d) es falsa ya que existen rombos cuyos ángulos son respectivamente desiguales.
- La proposición e) es falsa ya que un rectángulo con sus lados iguales (cuadrado) y un rectángulo en el que los lados consecutivos sean desiguales, no son semejantes.

- EJERCICIOS 5 y 6:

En estos ejercicios se aplica el teorema (a.a.). Son ejercicios sencillos que se resuelven apoyándose en datos que se destacan en las figuras.

- EJERCICIO 7:

La vía más fácil para resolver este ejercicio es probar que los triángulos más pequeños son iguales entre sí y que uno de ellos es semejante al triángulo ABC, por lo tanto:

$$\Delta ABC \sim \Delta \mathrm{EFK} \sim \Delta \mathrm{FHK} \sim \Delta \mathrm{FGH} \sim \Delta \mathrm{IHK}$$

- EJERCICIO 8:

Es un ejercicio de demostración, para su resolución se aplica el teorema (a.a.).

- EJERCICIOS 9, 10 y 13:

En ellos se aplica el teorema (p.a.p.)

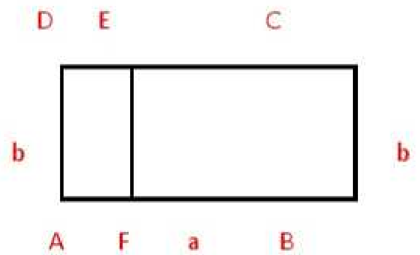
- EJERCICIOS 11 y 12:

No deben dejar de hacerse, ya que el primero prepara para hacer el reconocimiento de una nueva relación cuya demostración se pide en el ejercicio12. Esta relación se aplica posteriormente.

- EJERCICIOS 14 y 15:

Estos ejercicios son de construcción y en ellos se aplica el concepto "polígonos semejantes".

En el ejercicio 15 es conveniente trazar el rectángulo ABCD para analizar la construcción de $\overline{\mathrm{EF}}$ (como en la figura siguiente)



Si se traza una paralela a un lado cualquiera del rectángulo, que lo interseque, el rectángulo queda dividido en dos rectángulos más pequeños. Para que se obtenga un rectángulo, semejante al ABCD es necesario trazar una paralela a uno de los lados menores de manera que se cumpla que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Si a = 8,0 cm y b = 6,0 cm entonces $\frac{8}{6} = \frac{6}{x}$, de donde:

$$\boxed{x = 4,5 \text{ cm}}$$

Las longitudes de los lados del rectángulo ADEF son 6,0 cm y 4,5 cm.

En los ejercicios 16 y 17 se aplica la relación P´= kP.

Esta relación ya se demostró que se cumple para triángulos y en el proceso de resolución de estos ejercicios los alumnos deben llegar a comprender que se cumple para polígonos cualesquiera.

- EJERCICIO 18:

Este ejercicio articula la geometría con el álgebra.

Se aplica el concepto "razón de semejanza".

12 Resolución

Sean x, y, z las longitudes de los lados del segundo triángulo

xyz = 24 (dato)

Si k es la razón de semejanza, se puede plantear que:

,x = 6k ; y = 9k ; z = 12k.

Luego: $6k \times 9k \times 12k = 24$

$$648k^3=24$$

$$k^3= \frac{24}{648} = \frac{1}{27}$$

$$\boxed{k=1/3}$$

Por lo tanto: x = 2 ; y = 3 ; z = 4.

- EJERCICIO 20:

Es un ejercicio portador de una nueva información. Las propiedades que se demuestran se resumen así: "El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud".

Este enunciado se pide en el ejercicio 21.

Las demostraciones del ejercicio 20 son sencillas, se aplica el teorema (p.a.p.) para demostrar el inciso a).

a. En triángulo ABC y ADE:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{1}{2}$$

Por ser B y C puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$.

$\angle$ A - ángulo común

Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ por el teorema (p.a.p.)

$\angle B = \angle D$ por ser los que se oponen a los lados homólogos $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$.

Por lo tanto $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ porque al ser cortados por $\overline{AD}$ se forman ángulos correspondientes iguales.

b. $\Delta ABC \sim \Delta \mathbf{ADE}$ **y** $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ es la razón de semejanza, por lo tanto $\overline{BC} = \dfrac{1}{2}\overline{DE}$.

Es conveniente resolver los ejercicios 22 y 23 donde se aplican las propiedades demostradas en el ejercicio 21.

La resolución de estos ejercicios hace un gran aporte a la sistematización de los conocimientos y al trabajo con las demostraciones que son objetivos esenciales de esta unidad.

El resto de los ejercicios de esta unidad temática también tienen como objetivo esencial la sistematización de conocimientos.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

1.31.1 Se sugiere hacer ejercicios del siguiente tipo

- Ejercicios donde se apliquen los conceptos estudiados.
- Ejercicios de demostración y de cálculo.
- Ejercicios de aplicación.

3. HOMOTECIA. FIGURAS GEOMÉTRICAS SEMEJANTES

Para el desarrollo de esta unidad temática se cuentan con 8 horas clase y se pueden distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Definición de homotecia. Propiedades. Composición de homotecias y de una homotecia y un movimiento.
- La homotecia H(O;-k). Transformaciones semejantes. Figuras geométricas semejantes.
- Construcciones utilizando la semejanza.

3.1 Definición de homotecia. Propiedades. Composición de homotecias y de una homotecia con su movimiento.

Para el tratamiento de este punto esencial se cuenta con 2 horas. Para la primera clase sugerimos la estructura siguiente:

1. Definición de homotecia.
2. Análisis de un ejemplo similar al propuesto.
3. Enunciado de las propiedades de homotecia.
4. Demostración de la primera propiedad.

Lo esencial en esta clase es que los alumnos comprendan la definición de homotecia y sus propiedades, así como que se familiaricen con el procedimiento de construcción para la obtención de la imagen de un punto por una homotecia.

Como introducción a esta clase, el profesor puede recordar a los alumnos cómo el estudio de los movimientos y su aplicación posibilitó profundizar en el estudio de la igualdad de figuras geométricas y que ahora vamos a estudiar otra transformación del plano que posibilitará profundizar en el estudio de las figuras geométricas semejantes.

Ahora se puede introducir la definición de homotecia y la notación que vamos a emplear.

Una homotecia es una transformación del plano en sí mismo que se define de la manera siguiente:

1. Se determina un punto O como centro de la homotecia.
2. Se determina un número real k (k>0) como razón de la homotecia.
3. La imagen P' de un punto P está situada sobre la semirrecta OP de modo que $OP' = k \times OP$, si P no coincide con O.
4. O es su propia imagen (O' y O coinciden).

Inmediatamente se pasa al análisis de un ejemplo, como el siguiente.

EJEMPLO

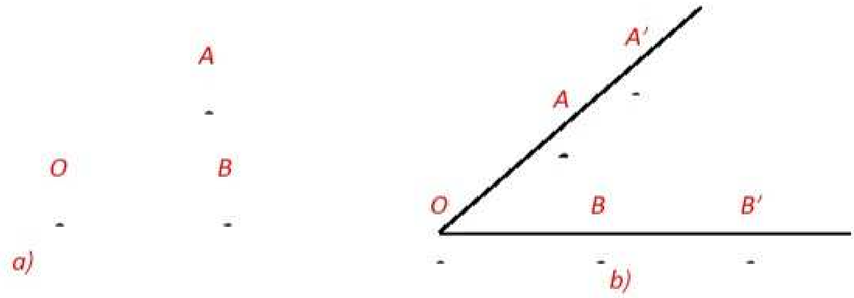
Construye las imágenes de los puntos *A y B (figura siguiente)* por *H(O;2).*

<u>Resolución.</u>

Construcción:

1. Trazamos la semirrecta O*A'*.
2. Transportamos sobre ella a partir del punto 0 el segmento 0*A* dos veces y así se determina el punto *A'*.

Para obtener la imagen del punto *B* se procede de la misma forma .



A continuación se enuncian las propiedades de la homotecia.

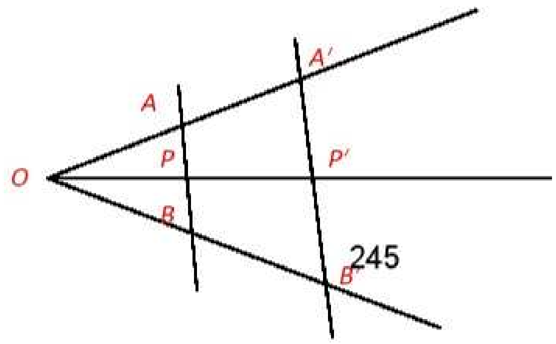
> Para toda *H (O;k)*. Se cumple:
>
> 1. La imagen de una recta es una recta paralela a ella.
> 2. La imagen de un segmento es una segmento paralelo a él y que tiene k veces su longitud.
> 3. La imagen de un ángulo es un ángulo que tiene su misma amplitud.

Finaliza la clase con la demostración de la propiedad 1. Es importante que los alumnos comprendan la demostración, no que memoricen sus pasos.

Vamos a demostrar la propiedad 1, apoyándonos en la figura siguiente

Premisa
$$\begin{cases} \overline{OA'} = k\overline{OA} \\ \overline{OB'} = k\overline{OB} \cdot \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k \end{cases}$$

Tesis $\{$La imagen de la recta AB es la recta $A'B'$ paralela a AB .



Demostración

1) Sea *P* es un punto cualquiera de la recta *AB* y *P'* su imagen. Entonces se cumple que *OP* = *k OP,* luego $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$. De acuerdo con el teorema recíproco del teorema de las transversales la recta *P'A'* es paralela a la recta *AB.* Como sólo existe una recta paralela a la recta *AB* que pase por el punto *P'*, entonces las rectas *P'A'* y *P'B'* coinciden, o sea, el punto *P'* está situado sobre la recta *A'B'* y *A'B' || AB.* Como se tomó un punto cualquiera de la recta *AB* se ha demostrado que todos los puntos de ella tienen su imagen en la recta *A'B'*.

2) Por otra parte se puede comprobar que todo punto de la recta *A'B'* es imagen de un punto de la recta *AB* lo que permite asegurar que la recta *A'B'* es la imagen de la recta *AB*.

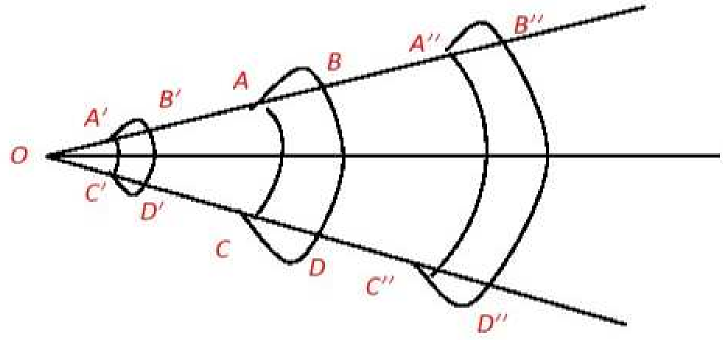
Basándonos en las propiedades 2 y 3 de la homotecia, podemos asegurar que la imagen de un polígono cualquiera por *H (O; k)* es un polígono semejante al original ya que sus lados son respectivamente proporcionales (k es la razón de proporcionalidad) y sus ángulos tiene la misma amplitud.

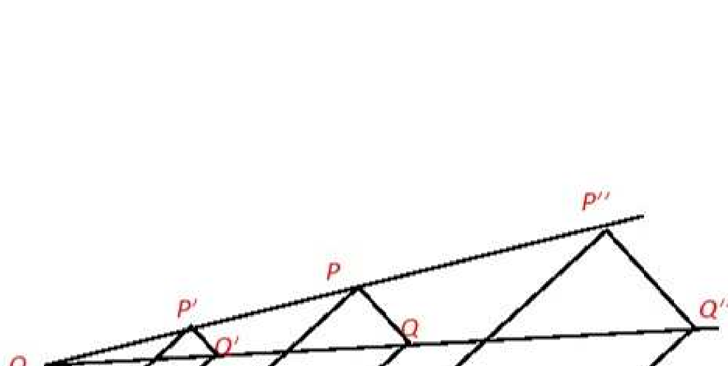
Los vértices del polígona imagen son las imágenes de los vértices del polígono original.

También se cumple que la imagen de una circunferencia (O; r) por *H(O; k)* es una circunferencia de radio $r_1 = kr$ y su centro O_1 es la imagen del punto O.

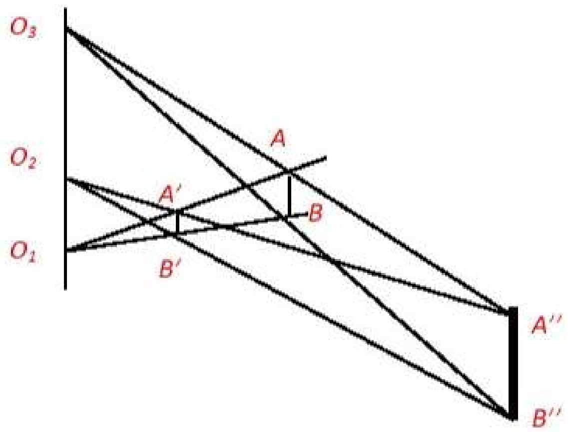
En general, la imagen de una figura geométrica plana cualquiera por una homotecia es una figura geométrica semejante a ella que puede ser una ampliación o una reducción a escala de la figura original.

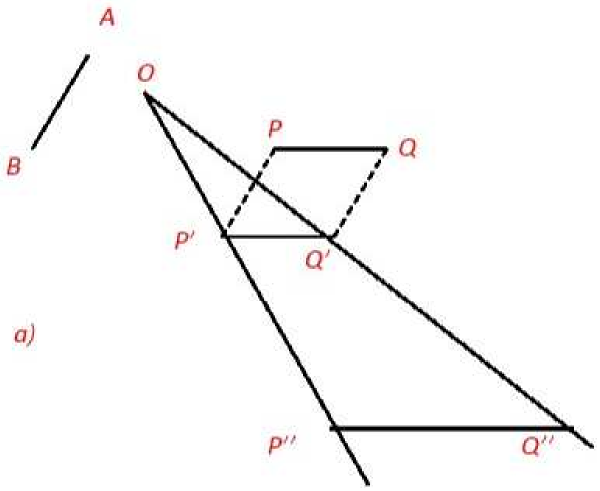
Después se sugiere analizar, apoyándose en las figuras siguientes, que mediante la aplicación de una homotecia se obtiene siempre una figura semejante a la original.



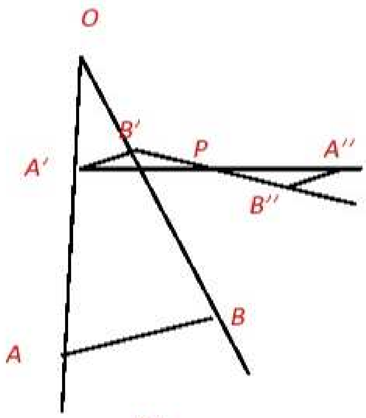


Finalmente se puede introducir la composición de homotecias y de una homotecia con su movimiento, apoyándose en ilustraciones como las figuras siguientes. Si el profesor tiene preparadas estas ilustraciones en cartulina o cartón, podrá ahorrar tiempo para resolver un ejercicio como el que presentamos a continuación.





a)



b)

1. Halla la imagen de AB = 1,5cm por la transformación que resulta de la composición de las homotecias H(0;3) y H(0; ½). Determina el centro y la razón de la homotecia resultante de la composición.

Como tarea se puede asignar los ejercicios siguientes

1. Basándose en la figura siguiente hallar los coeficientes k_1, k_2, k_3, k_4 sabiendo que:
   a. A, es la imagen de A por H (0; k_1);
   b. B, es la imagen de B por H (0; k_2);
   c. C, es la imagen de C por H (0; k_3);
   d. D, es la imagen de D por H (0; k_4);

2. El Δ A'B'C' es imagen del Δ ABC por la H(O; k) con k ≠ 1. Dí si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
   a. AB || A'B'
   b. AC = A'C'
   c. ∠ ABC = ∠ A'B'C'
   d. B'C' = kBC
   e. ABC ~Δ A'B'C'
   f. O, A y A' están alineados

3.2 La homotecia H(O;-k). Transformaciones semejantes. Figuras geométricas semejantes.

Para el desarrollo de este punto esencial proponemos 4 horas clase. En la primera clase se pueden resolver los ejercicios siguientes donde se analizan las propiedades de las transformaciones del plano estudiadas hasta el momento.

1. Comparar las propiedades de los movimientos con las de la homotecia. ¿Cuáles son las propiedades comunes de ambas transformaciones geométricas?.
2. A un segmento AB se le aplican sucesivamente las homotecias H($O_1;k_1$) y H(O_2,k_2); (O_1 y O_2) son puntos diferentes y ($k_1 \times k_2 = 1$). Analiza si existe un movimiento del plano mediante el cual AB se transforma en A"B" y fundamenta la respuesta.

En el ejercicio 1 hay que destacar, que de las propiedades enunciadas para la homotecia, la que es común a todos los movimientos es la propiedad 3) "La imagen de un ángulo es un ángulo que tiene su misma amplitud".

En el ejercicio 2 se puede hacer el análisis siguiente:

- Por la propiedad 2) de la homotecia tenemos que el segmento original $\overline{AB}$ y su imagen $\overline{A'B'}$ son paralelos.
- Como $k_1.k_2 = 1$, entonces $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
- Si $\overline{AB} \,||\, \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, entonces la traslación cuyo vector de traslación es $\overrightarrow{AA'}$ transforma a $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$.Después de resueltos estos ejercicios se puede definir la homotecia H(O;-k) y analizar un ejemplo.

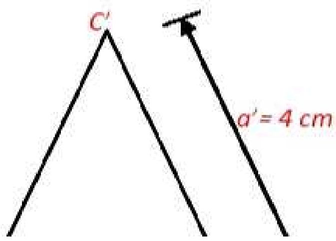
Generalizando el concepto homotecia vamos a definir una homotecia *H (O; -k)* con k>0 como la composición de una homotecia *H (O; k)* con una simetría central de centro *O.*

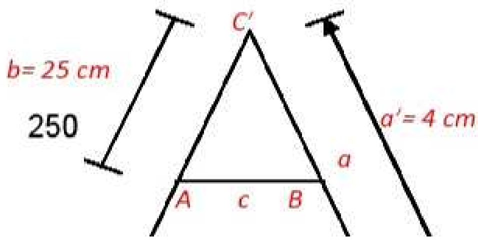
EJEMPLO

Construya un triángulo *ABC*, con a : c = 4 : 3, β = 70º y b = 2,5 cm.

<u>Resolución.</u>

Primeramente se construye un triángulo A'B'C' cualquiera con a' : c' = 4 : 3 y β = 70º, se escoge por ejemplo a' = 4cm y c' = 3cm (figura siguiente). El triángulo ABC buscado es semejante al triángulo A'B'C'. Para obtener b = 2,5cm se transforma b sobre A'C' a partir de C' y así se determina el punto A. finalmente se traza una recta paralela a c' que pase por A; el punto B es la intersección de esta recta con B'C' y C coincide con C' .





Finalmente se puede introducir las definiciones "transformaciones semejantes" y "figuras semejantes". Es fundamental analizar la definición de transformaciones semejantes, la cual posibilita considerar a todo movimiento como una transformación semejante de razón k = 1.

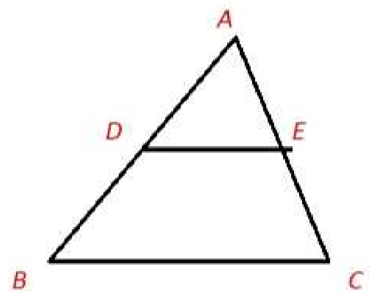
El teorema sobre el perímetro y el área de dos polígonos semejantes cualesquiera se enuncia ahora después de haber estudiado las definiciones básicas, aunque ya anteriormente se habían resuelto ejercicios donde se aplicaron estas ideas, pero apoyándonos en la semejanza de triángulos.

Las 3 horas clase restantes de este punto esencial se dedicarán a la ejercitación, para lo cual recomendamos los ejercicios siguientes.

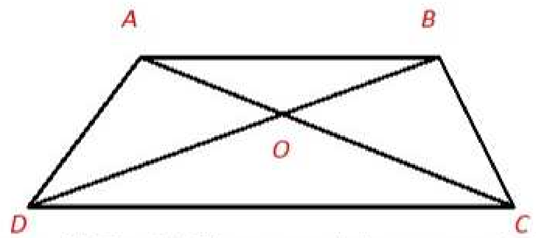
1. Al Δ ABC se le aplica una homotecia H(0;k) con k = 2 y a la imagen obtenida se le aplica una traslación. Diga sin son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:
   a. El triángulo original y su imagen son semejantes.
   b. AB = ½ A'B'
   c. ABC ≠ ∠ A'B'C'.
   d. ABC ~Δ A'B'C'.
   e. $P_{\Delta A'B'C'} = 2P_{\Delta ABC}$
   f. $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} A_{\Delta A'B'C'}$

2. Halla la imagen de MN = 3 cm por la homotecia:
   a. H(0; -3)
   b. H (0; - 1/3)

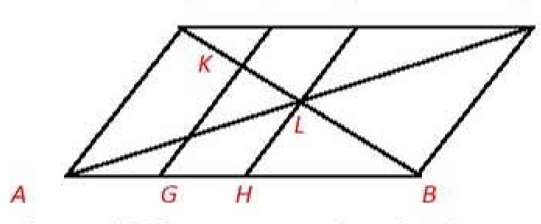
3. En la figura siguiente DE || BC. Determinar:
   a. La homotecia mediante la cual Δ ADE se transforma en Δ ABC;
   b. La homotecia mediante la cual Δ ABC se transforma en Δ *ADE*.



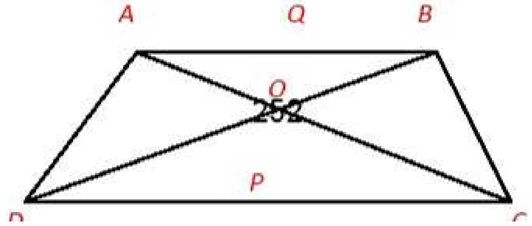
4. En la figura siguiente ABCD es un trapecio, CD es su base mayor y O es el punto de intersección de sus diagonales. Determinar la homotecia mediante la cual $\Delta\, AOB$ se transforma en $\Delta\, COD$.



5. En la figura siguiente, ABCD y EFGH son paralelogramos; E y F son puntos medios de DC y de DE respectivamente, K y L son los puntos de intersección de DB con FG y EH. Diga cuál es la homotecia que transforma:
   a. KBG en Δ DBA
   b. LBH en Δ KBG
   c. FDK en Δ CDB
   d. CDB en Δ EDL
   e. AG en FC



6. En la figura siguiente, *ABCD* es un trapecio y *P* y *Q* son puntos medios de sus bases
   a. PQ pasa por el punto O;
   b. PQ pasa por el punto R que es la intersección de las prolongaciones de *DA* y *CB*. Demuestre que:



7. Los radios de dos circunferencias de centros O y O' miden 9,0 cm y 3,0 cm. Si dichas circunferencias son tangentes interiormente en el punto A y se conoce que AB es una cuerda que mide 15 cm y que corta a la circunferencia interior que en el punto C, hallar las longitudes de AC y BC.

8. Los segmentos que unen los lados de un triángulo forman un triángulo en el interior del primero. Demuestre que la circunferencia circunscrita al triángulo interior tiene un radio dos veces menor que el de la circunferencia circunscrita al otro triángulo.

Los ejercicios 3, 4 y 5 tienen como objetivo preparar a los alumnos para aplicar el método de las transformaciones a la resolución de ejercicios de demostración y de cálculo, como los ejercicios 6, 7 y 8.

3.3 Construcciones utilizando la semejanza

El contenido referente a este punto esencial necesita para su desarrollo 2 horas. Se trata aquí de lograr que los alumnos comprendan la aplicación que se hace de las transformaciones semejantes a las construcciones geométricas.

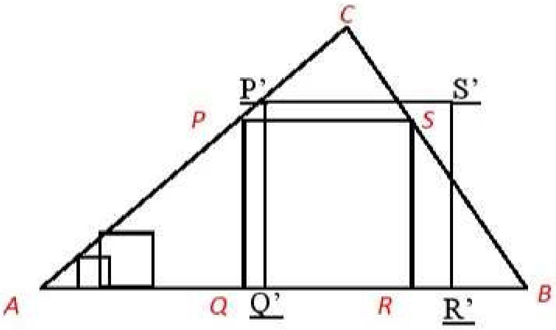
En la primera clase se pueden analizar ejemplos como el propuesto y el resto del tiempo de esta clase, así como la clase siguiente dedicarlos a la ejercitación, para lo cual sugerimos los ejercicios siguientes.

EJEMPLO

Inscribir un cuadrado PSRQ en un triángulo ABC. El lado QR debe estar situado sobre AB y los demás vértices en AC y BC, respectivamente.

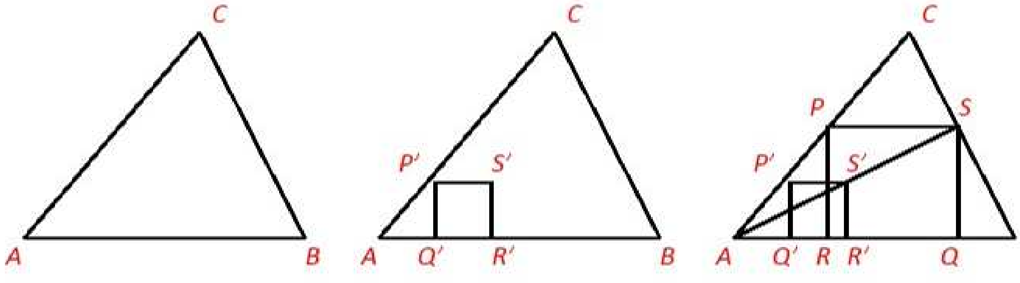
Resolución

Supongamos que el problema está resuelto y PSRQ es el cuadrado buscado (figura siguiente 1). hagamos una homotecia con centro A y una razón cualquiera k. Como resultado de esta homotecia el cuadrado PSQR se transforma en el cuadrado *P'S'Q'R'* cuyos vértices Q' y R' se encuentran sobre la recta AB y el vértice P' sobre la recta AC. Sin embargo, el vértice S no va estar sobre el lado BC si tomamos un punto P' sobre la recta AC, no es difícil construir el cuadrado *P'S'Q'R'* (figura siguiente 2). Como los puntos S, S' y el centro de homotecia A se encuentran sobre una línea recta, el punto S es el punto de intersección de las rectas AS' y BC.



Construcción (figura siguiente)

Después de seleccionar un punto cualquiera P' sobre AC se traza el segmento de perpendicular P'Q' a AB que parte de P' y se construye el cuadrado *P'S'Q'R'*. El cuadrado *PSQR* buscado se obtiene mediante la homotecia $H\left(A; \frac{\overline{AS}}{\overline{AS''}}\right)$. El punto S se obtiene como intersección de la semirrecta AS' con BC, PS y RS se determinan trazando rectas paralelas a P'S' y R'S' que pasan por S y PQ como segmento de perpendicular bajado desde P hasta AB.

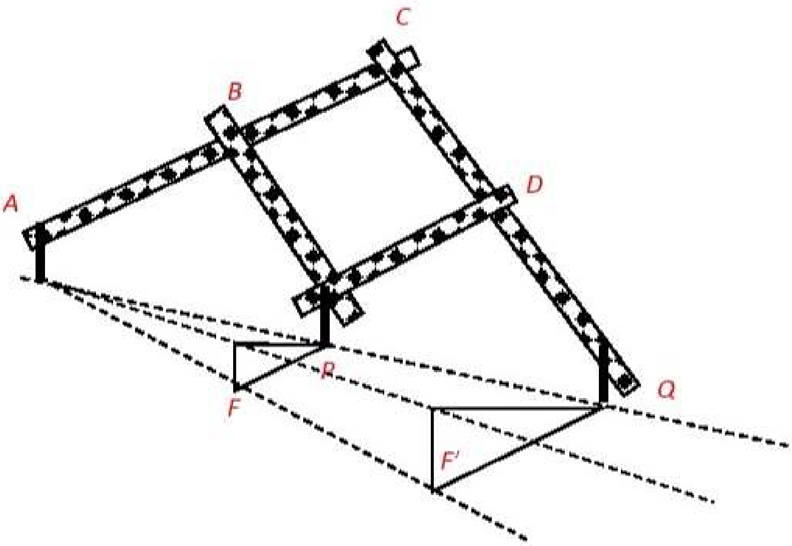


a) *b)* *c)*

B

Existen instrumentos de medición y dibujo en los cuales se emplea la semejanza. El **pantógrafo** es un instrumento que se usa para dibujar una figura plana semejante a otra dada. Tiene mucha aplicación en cartografía, donde ha menudo se necesita reducir o ampliar a escala planos o mapas. Fue inventado en el año 1.600.

Hay muchos tipos de pantógrafos, pero todos tienen el mismo fundamento. Se componen esencialmente de cuatro reglas que forman un paralelogramo articulado (figura siguiente).



El punto A se fija en el dibujo y los puntos P y Q son móviles, pero permanecen siempre en línea recta con A. El punto P lleva un estilete con el cual se recorre el dibujo F y un lápiz situado en Q traza, entonces, la figura semejante F'. Es fácil ver que estas figuras F y F', como muestra la figura, se transforman una en la otra por una homotecia que tiene como centro el punto A. Por ejemplo F se transforma en F' por

$$H(A; \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}); \quad (\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}).$$

Para obtener un valor diferente de la razón de homotecia, basta modificar la longitud de los brazos del paralelogramo BCDP.

16. Inscribe en una semicircunferencia de 3 cm de radio un cuadrado, de modo que un lado esté situado sobre el diámetro y los demás vértices sobre la semicircunferencia.

17. Inscribe un cuadrado en un rombo.

18. Construye todas las circunferencias que pasan por un punto P interior de un ángulo y que sean tangentes a sus lados.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Sugerimos se realicen ejercicios del siguiente tipo.

- Ejercicios formales en los que se aplica la definición de homotecia y sus propiedades.
- Ejercicios donde es necesario determinar la homotecia mediante la cual una figura se transforma en otra.
- Ejercicios de construcción.

3.4 Relaciones en el triángulo rectángulo

Para el desarrollo de esta unidad temática se cuenta con 14 horas clase y en ella se destacan dos puntos esenciales:

1.- Grupo de teoremas de Pitágoras.
2.- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

3.5 Grupo de teoremas de Pitágoras.

Para el tratamiento de este punto esencial se cuenta con 9 horas.

Los teoremas que componen el grupo de teoremas de Pitágoras, están estrictamente relacionados y es por eso proponemos el tratamiento concentrado de los tres teoremas y sus recíprocos en las dos primeras clases de este punto esencial.

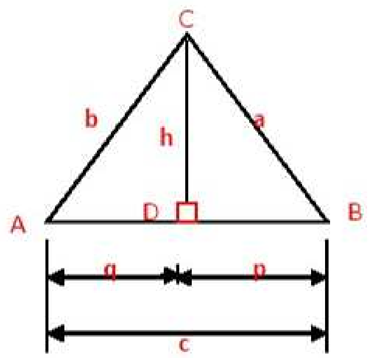
Para la primera clase proponemos la estructura siguiente:

- Análisis de los triángulos semejantes que se forman cuando se traza la altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
- Análisis de los lados homólogos de los triángulos semejantes y escribirlos ordenadamente en una tabla.
- Deducción de los tres teoremas partiendo de las relaciones que se pueden obtener de la tabla.

Esta clase se puede desarrollar mediante la resolución de ejercicios donde los alumnos aplican los conceptos y teoremas estudiados anteriormente en esta unidad, de manera que ellos se apropien de los nuevos conocimientos por una vía más activa, siendo partícipes en la elaboración de lo nuevo.

Se puede partir de una figura como la siguiente y hacer a los alumnos las preguntas siguientes:

- ¿Cuántos triángulos aparecen en la figura?
- Clasifica los triángulos formados atendiendo a sus ángulos.
- Comprueba y fundamenta adecuadamente que los triángulos que aparecen en la figura son semejantes.



Después se les puede pedir a los alumnos que completen una tabla como la siguiente, donde los elementos homólogos están ordenados por filas.

	Δ ABC	Δ ADC	Δ BDC

Hipotenusa	c	b	a
Cateto opuesto al ángulo de amplitud α	a	h	p
Cateto opuesto al ángulo de amplitud β	b	q	h

A continuación se puede enunciar el teorema de las alturas y pedir a los alumnos que deduzcan esta relación a partir de alguna proporción que se pueda establecer entre los lados homólogos de los triángulos semejantes o procediendo a la inversa, que planteen primero una proporción donde se relacionen la altura a la hipotenusa y los segmentos en que el pie de la altura divide a la hipotenusa; para pasar después a enunciar esta relación como un nuevo teorema.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la altura determinada sobre la hipotenusa.

De la misma forma se puede tratar el teorema de los catetos.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto.

Finalmente a los alumnos se les puede pedir que enuncien el teorema de Pitágoras y que analicen la deducción que se hace a continuación de este teorema que es conocido por ellos.

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa

$b^2 = c \cdot q$

$a^2 = c \cdot p$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades, obtenemos:

$a^2 + b^2 = cp + cq$

$a^2 + b^2 = c(p + q)$ (1) aplicando la propiedad distributiva

Pero $p + q = c$ (2) por suma de segmentos

Sustituyendo (2) en (1) tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$

Lo esencial no es que los alumnos memoricen las deducciones de los teoremas sino que las comprendan.

En la segunda clase se puede analizar con los alumnos, siguiendo el método de elaboración conjunta, un ejemplo similar al ejemplo siguiente y pasar al enunciado de los teoremas recíprocos.

1.31.2 EJEMPLO

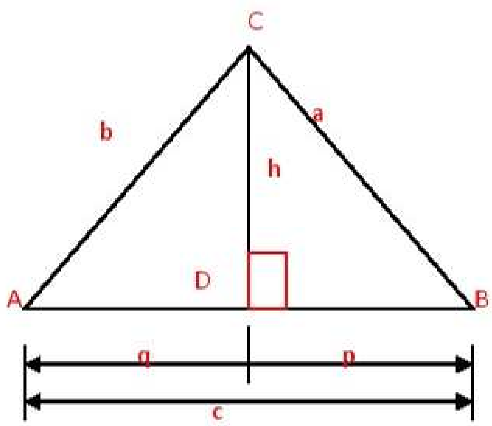
En la figura adjunta, el Δ ABC es rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$;
a = 6.0 cm y b = 8.0 cm. Calcula c, p, q y h

<u>Resolución</u>

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}$



$\boxed{c = 10 \text{ cm}}$

$a^2 = cp$ $c = p + q$ $h^2 = pq$

$$p = \frac{a^2}{c} \qquad q = c - p \qquad h = \sqrt{p.q}$$

$$p = \frac{36}{10} \qquad q = 10 - 3.6 \qquad h = \sqrt{3.6 \times 6.4}$$

$$h = \sqrt{23.04}$$

$$\boxed{1.4\ p = 3.6} \qquad \boxed{q = 6{,}4\ \text{cm}} \qquad h = 4 \cdot 8cm$$

Es importante que los alumnos escriban en sus cuadernos los enunciados de los teoremas recíprocos del teorema de las alturas y del de los catetos que aplicarán posteriormente en la resolución de ejercicios.

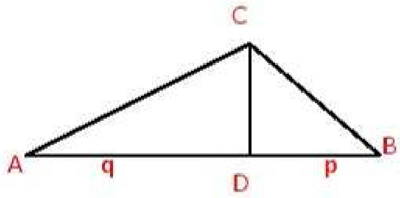
El tiempo que quede de esta segunda clase y las 7 horas restantes de este punto esencial se dedicarán a la ejercitación.

A continuación hacemos una caracterización de los ejercicios que sugerimos, de manera que los profesores los utilicen en la forma más racional posible, atendiendo a las características de sus alumnos y no dejen de realizar aquellos que tienen mayores potencialidades desde el punto de vista de sus funciones instructivas, educativas y de desarrollo.

Los ejercicios deben ser ejercicios formales de cálculo donde se aplican el teorema de las alturas y el teorema de los catetos respectivamente. Con ejercicios de este tipo se debe iniciar la ejercitación.

Ejercicios donde se aplican los tres teoremas, por lo que tienen una exigencia mayor ya que los alumnos deben discriminar el teorema que es necesario aplicar atendiendo a los datos, como los siguientes:

1. En la figura siguiente donde $\angle$ C = 90° se tiene que: AC=1,5 dm y CB = 2,0 dm. Calcular AB, AD, DB, y CD

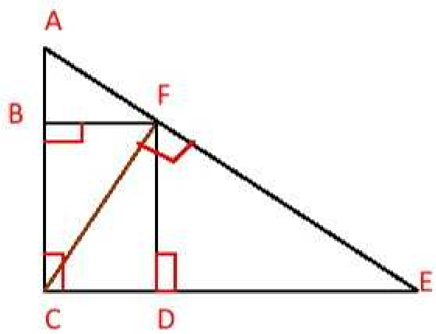


2. Completar la tabla siguiente si se sabe que en el Δ ABC (figura anterior), $\angle$ C= 90°.

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)			3,0cm	4,0cm		
b)		3.9cm		5,1cm		
c)	6.2cm				3,5cm	
d)	5.5cm					4,1cm
e)			2,1m			4,9m
f)		5,0cm			5,4m	

En el ejercicio siguiente se aplica el teorema de las alturas en forma directa; resulta conveniente este ejercicio porque es necesario hacer reconocimientos en la figura donde los triángulos aparecen en distintas posiciones.

5. Plantea para las alturas de los triángulos ACF, CEF y ACE (figura adjunta) las ecuaciones correspondientes al



El ejercicio siguiente, tiene la particularidad de articular los conocimientos geométricos con los aritméticos y los algebraicos.

En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa mide 6,0 cm.

a) ¿ Qué longitud pueden tener los segmentos en que el pie de la altura divide a la hipotenusa?
b) ¿ Qué longitud tienen los segmentos de hipotenusa si su razón es 1 : 4

En el inciso a) se aplica el teorema de las alturas y es necesario determinar dos números cuyo producto sea 36. Hay infinitos pares de números reales que cumplen esta condición (los números pueden ser 4 y 9; 3 y 12; 3,6 y 10; etc).

En el inciso b) se pide determinar la pareja de estos números reales que están en la razón 1 : 4 . Es necesario modelar la situación mediante ecuaciones.

Si x e y son los números entonces:

$$\begin{cases} x \cdot y = 36 & (1) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

De (2) obtenemos $y = 4x \quad (3)$.

Sustituyendo (3) en (1) tenemos que:

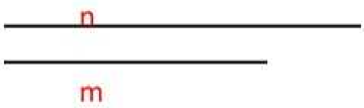
$$x \cdot 4x = 36$$
$$4x^2 = 36$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3$$

Sustituyendo en (3) obtenemos y = 12

Los ejercicios siguientes son ejercicios de construcciones en los que se aplican los tres teoremas estudiados.

1. **Dados los segmentos de las longitudes m y n respectivamente (figura siguiente). construye el segmento de longitud:**

a) $\sqrt{m^2+n^2}$ b) $\sqrt{m^2-n^2}$



<u>Resolución</u>

a. Por el teorema de Pitágoras si $x^2 = m^2 + n^2$, x es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes m y n, por lo tanto $x = \sqrt{m^2+n^2}$.

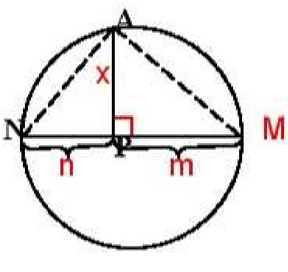
b. Si $x = \sqrt{m^2-n^2}$, x es la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo siendo m la longitud de la hipotenusa y n la longitud del otro cateto.

2. **Construya un segmento de longitud x si $x = \sqrt{mn}$**

<u>Resolución</u>

x es la longitud de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo y m y n las longitudes de los segmentos en que el pie de la altura divide a la hipotenusa.

Construcción:



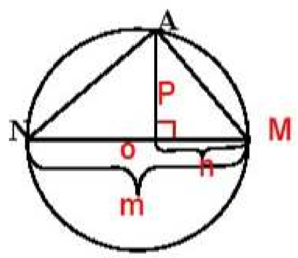
Se traza un segmento de longitud *m* + *n*. Se determina su punto medio y después se traza la circunferencia que tiene a $\overline{MN}$ como diámetro ($\overline{MN} = m+n$) (figura adjunta).

Finalmente se levanta una perpendicular a $\overline{MN}$ en P. PA es la altura de ΔMAN, donde $\angle A = 90°$

Esta construcción también puede hacerse considerando a x como la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo, a *m* como la longitud de la hipotenusa y a *n* como la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto considerado.

Construcción:
La construcción es similar a la anterior.

$x = \overline{AM}$ en la figura adjunta.



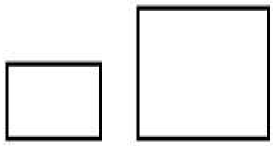
3. Construya segmentos de longitudes:
   a. $\sqrt{2}$ cm
   b. $\sqrt{3}$ cm
   c. $\sqrt{5}$ cm
   d. $\sqrt{6}$ cm

Resolución.

Este ejercicio es similar al ejercicio anterior. Inicialmente hay que hacer la consideración siguiente:

a. Si $x = \sqrt{2}$ cm, entonces $x = \sqrt{2cm \cdot 1cm}$, o sea m = 2cm y n = 1cm.
La construcción que se haga puede ser igual a cualquiera de las dos del ejercicio anterior.

4. Construya un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados de la figura siguiente.



Resolución

Se construye un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan respectivamente, las mismas longitudes que los lados de los cuadrados. El cuadrado que se quiere construir tendrá como lado un segmento de igual longitud que la hipotenusa del triángulo construido. La construcción se apoya en el teorema de Pitágoras.

5. **Demuestre los teoremas recíprocos del teorema de las alturas y del teorema de los catetos.**

Resolución.

En este ejercicio se piden dos demostraciones que son similares. Una de ellas debe realizarse en el aula y la otra proponerla de tarea para que los alumnos la realicen como trabajo independiente.

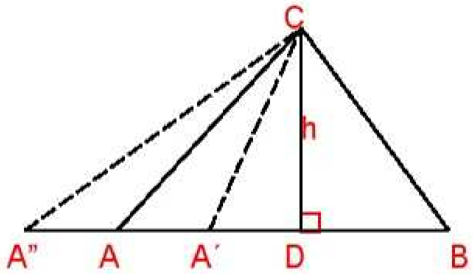
Las dos demostraciones se hacen por reducción al absurdo, por eso es muy importante que los alumnos las realicen.

Recíproco del teorema de las alturas

Si en un triángulo el cuadrado de la longitud de la altura a uno de sus lados es igual al producto de la longitud de los segmentos en que el pie de la altura divide a dicho lado, entonces el triángulo es rectángulo y el ángulo recto es el opuesto al considerado.

Demostración:

Consideremos el ΔABC (figura siguiente) donde se cumple que: $h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.



Supongamos que $\angle ACB$ no es recto. Si no es recto será entonces obtuso o agudo.

Analicemos el primer caso ($\angle ACB$ es obtuso).

Podemos entonces trazar $\overline{CA'}$ de manera que $\angle A'CB = 90°$ y entonces tendríamos que $h^2 = \overline{A'D} \cdot \overline{DB}$ (por el teorema de las alturas); pero esto está en contradicción con los datos ya que $h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$ y $\overline{AD} > \overline{A'D}$.

Si analizamos el segundo caso ($\angle ACB$ es agudo) se podría trazar $\overline{CA''}$ de manera que $\angle A''CB = 90°$ y por un análisis similar al anterior llegamos a una contracción. Por lo tanto, la suposición hecha al inicio es falsa y $\angle ACB$ es recto.

En los ejercicios siguientes se aplica el recíproco del teorema de Pitágoras.

6. **Los lados de un triángulo miden 9,0; 12 y 15 cm respectivamente. Comprueba que este triángulo es rectángulo.**
7. **Los lados de un triángulo son proporcionales a los números 13; 12 y 5. Demuestra que este, triángulo es rectángulo.**

En el ejercicio 6 se puede comprobar que $15^2 = 12^2 + 9^2$.

En el ejercicio 7 se puede comprobar que un triángulo cuyos lados midan 13, 12 y 5 unidades es rectángulo ya que $13^2 = 12^2 + 5^2$.

Otro triángulo cuyos lados sean proporcionales a los del primero es semejante a él por el teorema (p.p.p.) y por lo tanto tendrá los ángulos iguales; uno de ellos es recto.

En el ejercicio siguiente se aplican los recíprocos de los tres teoremas estudiados

8. Indica, de acuerdo con las medidas siguientes, si el Δ ABC con el pie de la altura, D, desde C, es rectángulo o no.

$\overline{DB} = 5{,}0$ cm $\qquad \overline{AD} = 6{,}0$ cm

En los ejercicios siguientes se deben aplicar el teorema de Pitágoras conjuntamente con conceptos y propiedades sobre los triángulos, los cuadriláteros, la circunferencia, etc. Estos ejercicios son de gran importancia ya que posibilitan la sistematización de los conocimientos a la vez que se desarrollan habilidades para darles aplicación. En estos ejercicios es muy importante construir una figura de apoyo utilizando los datos

9. Un punto interior de un ángulo recto se encuentra a las distancias a y b de los lados del ángulo. ¿Cuál es la distancia del punto al vértice del ángulo?

10. Calcula el área de un cuadrado si su diagonal mide $\sqrt{72}cm$

11. Calcula la longitud de una altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden 4,0cm (si mide a cm).

12. La base de un triángulo isósceles mide 12 cm. Halla los otros dos lados si su altura a la base mide 8,0 cm.

13. Dada una circunferencia con radio igual a 10cm.
    a. ¿A qué distancia del centro se halla una cuerda de 14cm de longitud?

¿ A qué distancia del centro se halla un punto P que pertenece a una tangente a la circunferencia, si la distancia desde un punto hasta el punto de tangencia es de 15cm?

14. Una cuerda de 6,0 cm de longitud dista 4,0 cm del centro de la circunferencia.¿A qué distancia del centro se encuentra una cuerda que mide 8,0cm?

15. El perímetro de un triángulo isósceles es de 24cm, el lado base mide 9,0 cm. Calcula la longitud de la altura a la base del triángulo.

16. Las diagonales de un rombo miden 26 y 24 cm respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.

17. Una altura de un triángulo equilátero mide 5,7 cm. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

18. Los lados de un triángulo ABC miden 5 ; 12 y 15 cm respectivamente. Calcula las tres alturas de este triángulo.

19. En un trapecio isósceles las bases miden 10 y 24 cm respectivamente y los lados no paralelos miden 25cm. Calcula la altura del trapecio.

20. Una de las diagonales de un paralelogramo coincide con una altura de éste. Calcula la longitud de esta diagonal si el perímetro del paralelogramo es de 50cm y la diferencia entre las longitudes de dos lados consecutivos es de 1,0cm.

21. Demuestra que en todo triángulo rectángulo el cubo de la longitud de la hipotenusa es mayor que la suma de los cubos de las longitudes de los catetos.

22. Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un trapecio rectángulo, es igual a la diferencia entre los cuadrados de las longitudes de las bases.

23. Sea M un punto cualquiera de la altura AM de un triángulo $\overline{ABC}$. Demuestra que

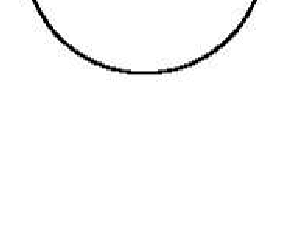
$$AC^2 - AB^2 = CM^2 - B$$

24. Calcula la mayor longitud que puede tener un lápiz para que se pueda introducir hasta el fondo de una caja en forma de prisma de base rectangular, si las dimensiones de la base son 12 y 9.0 cm respectivamente.

Resolvamos algunos:

13

14 Por ejemplo, en el ejercicio 12a) si construimos la circunferencia, la cuerda y su distancia al centro resulta más fácil llegar a la idea de hacer una construcción auxiliar para obtener así un triángulo rectángulo (fig.) donde $\overline{DB} = 7{,}0cm$; $\overline{OB} = r = 10cm$.

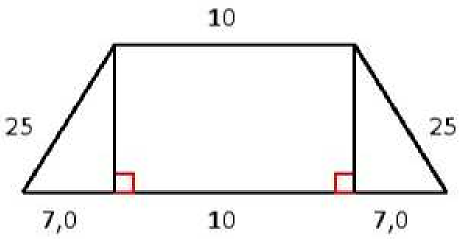


- EJERCICIO 18:

Aquí es importante probar primero que el triángulo dado es rectángulo, por lo tanto los dos catetos del triángulo son dos de las alturas.

- EJERCICIO 19:

  Si se construye el trapecio y se trazan dos alturas, se puede determinar fácilmente la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es dato y el otro cateto es la altura que se requiere calcular.



- EJERCICIO 21:

En un triángulo ABC donde $\angle C = 90°$:

$c^2 = a^2 + b^2$ (1) donde c > a y c > b.

Multiplicando por c ambos miembros de la igualdad (1) obtenemos que $c^3 = ca^2 + cb^2$ (2).

Además $a^3 < ca^2$ (3) y $b^3 < cb^2$ (4).

$\overline{AB} = 7{,}0$ cm $\overline{AD} = 3{,}0$ cm

De (2), (3) y (4) podemos concluir que: $\overline{DB} = 5{,}0$ cm

$\overline{AC} = 5{,}0$ cm $\overline{DB} = 12$ cm $\overline{AB} = 20$ cm

$\overline{BC} = 4{,}3$ cm $\overline{CD} = 6{,}0$ cm $c^3 > a^3 + b^3$ $\overline{BC} = 10$ cm

- EJERCICIO 24:

La mayor longitud es la de la diagonal del rectángulo que es base del prisma.

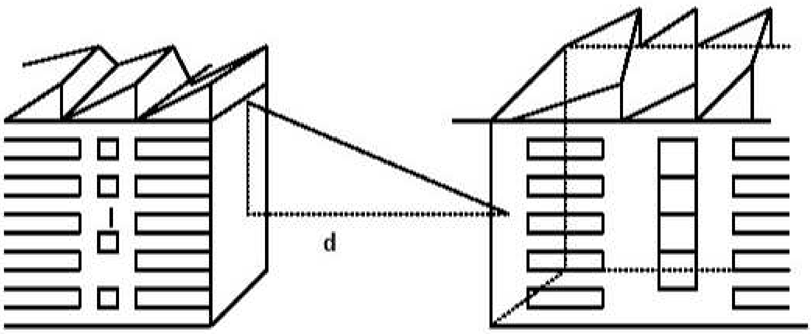
Los ejercicios siguientes están relacionados con situaciones de práctica y en ellos se aplican el teorema de Pitágoras conjuntamente con otros conocimientos sobre figuras planas y cuerpos.

Lo más importante en estos ejercicios es que se hace necesario modelar la situación concreta y reducirla a un problema matemático. Por esta razón los ejercicios señalados no deben dejar de hacerse.

25. El pie de la escalera de 5,0 m de longitud está situada a 2,0 m de la pared a la cual está recostada .¿A qué altura del piso se encuentra el extremo superior de la escalera?

26. Diga si es posible introducir en una caja cilíndrica de 3.00dm de altura y 1,40 dm de diámetro en la base, una pieza metálica que tiene forma de prisma de base cuadrada si los dos lados de la base miden 1,00 dm y tiene una altura de 2,00 dm

27. Entre los edificios de una fábrica (fig. siguiente) se ha instalado un cable para la transmisión de electricidad . La distancia entre los edificios es de 10m y los extremos del cable se encuentran a 8.0 y 4.0m del piso respectivamente. Calcula la longitud del cable



28. Una antena de 50 m de altura debe ser sujeta por cuatro cables a una altura equivalente a 4/5 de la misma. Los cables están sujetos al suelo a una distancia de 30m del pie de la torre. Calcular la longitud de cada cable.

29. En un campo rectangular cuya diagonal mide 1200m y uno de sus lados mide 850m se cosecharon 29880 quintales de maíz. Calcular la cosecha por hectárea.

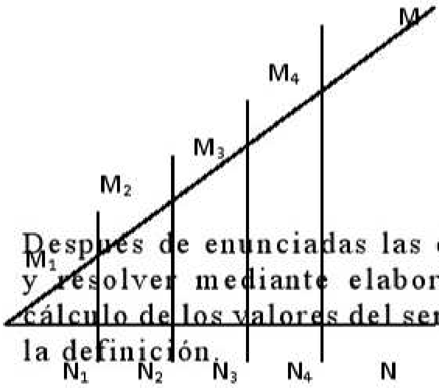
30. Un hombre ve sobre su cabeza un avión que vuela a 800m de altura ¿A qué distancia ve el mismo avión otro hombre que se encuentra a 100m de distancia del primero?.

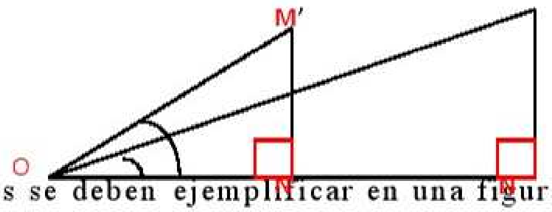
4.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Para el tratamiento de este punto esencial se cuenta con 5 horas de clase.

La teoría de este punto esencial es muy sencilla, aquí no se hacen demostraciones y lo fundamental es que los alumnos comprendan que en triángulos rectángulos para ángulos agudos respectivamente iguales se cumple que la razón entre dos lados de uno de los triángulos es igual a la razón entre sus lados homólogos en los otros, que el valor de estas razones no dependen de las longitudes de los lados del triángulo considerado, sino de la amplitud del ángulo.

En la primera clase se pueden tratar inicialmente estos aspectos teóricos apoyándose en figuras como las siguientes y fundamentándolos adecuadamente.





Después de enunciadas las definiciones se deben ejemplificar en una figura y resolver mediante elaboración conjunta el ejemplo 3 donde se hace el cálculo de los valores del seno, el coseno y la tangente de un ángulo aplicando la definición.

Seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo.

En la segunda clase se pueden mostrar a los alumnos las tablas de los valores de las funciones trigonométricas y enseñarles su manejo. Su uso se puede ejemplificar mediante el análisis conjunto de los ejemplos.

EJEMPLO

En el Δ MNL (figura siguiente), $\angle N = 90°$, $\angle M = 50°$ y NL = 6.0 cm. Calcular ML

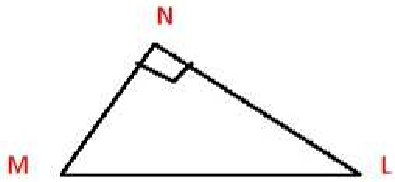
Resolución

Como conocemos $\angle$M y $\overline{NL}$ podemos plantear una razón trigonométrica en la que ellos estén relacionados con $\overline{ML}$.

$$\text{sen}\angle M = \frac{\overline{NL}}{\overline{ML}}, \ despejando \overline{ML}, tenemos que$$

$$\overline{ML} = \frac{\overline{NL}}{\text{sen}\angle M}, sustitiyendo los datos se tiene$$

$$\overline{ML} = \frac{6}{\text{sen}50°}$$



El valor de sen 50° lo calculamos con la calculadora:

sen 50°= 0,7660

$$luego \overline{ML} = \frac{6}{0{,}766}$$

Cálculo auxiliar:

$$\boxed{\overline{\text{ML}} = 7{,}8cm}$$

La respuesta se da con dos cifras significativas de acuerdo con las reglas del cálculo con números aproximados.

EJEMPLO

En el ΔABC rectángulo en A, se tiene que AC= 4,0 cm y AB =8,0 cm. Hallar la amplitud del $\angle$B.

Resolución

$\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ están relacionados con el $\angle$B mediante la razón trigonométrica

$$tan\angle B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Sustituyendo los datos tenemos que:

$tan\angle B = \frac{4}{8} = 0,5$

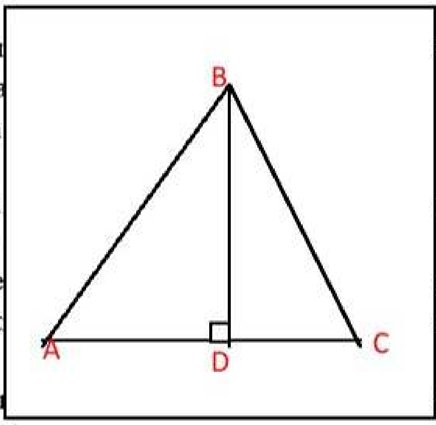
Buscamos ahora en la calculadora el valor del $\angle$ B.

$\angle$ B = 27°

El resto de esta clase y las tres clases restantes debe dedicarse a la ejercitación.

1. En un ΔMNR rectángulo en R, MN = 1,25m; RN = 7,5dm y RM = 1,0m. Calcular los valores del seno, el coseno y la tangente de uno de sus ángulos agudos del triángulo.

2. En un Δ PQS r... 36.
   a. Calcular la...
   b. ¿Determin... la tangente de $\angle$ PQS



3. En un triángu... la tangente de uno de sus ángulos son 24/40 y 24/32 ...
   a. Diga cuále... ados de este triángulo.
   b. ¿Cuántos t... ndiciones dadas en este problema?

4. En el $\angle$ ABC ... AB = 25dm.
   a. Calcula CB .
   b. Calcula AC y $\angle$CBA

5. En la figura siguiente, el ΔABC es equilátero, $\overline{BD}$ es una altura, $\overline{AB} = 1{,}0$ y $\overline{BD} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ m
   a. Diga cuáles son las amplitudes de $\angle$ A y $\angle$ ABD.
   b. Calcula los valores del seno, el coseno y la tangente de $\angle$ A y $\angle$ ABD sin utilizar ni tabla ni calculadora.

Aclaraciones sobre el sistema de ejercicios.

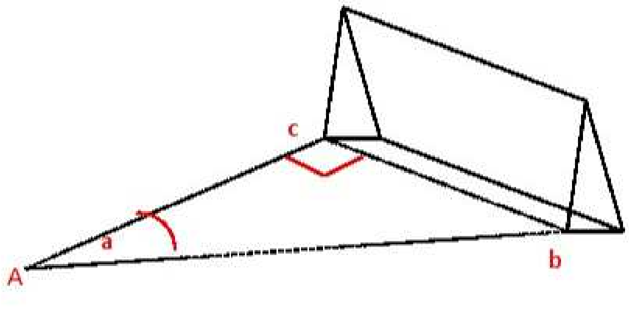
En el sistema aparecen ejercicios formales en los que se aplican directamente las definiciones y se hace uso de la tabla, así como otros en los que se aplican los nuevos contenidos conjuntamente con conocimientos anteriores sobre los cuadriláteros, la circunferencia, etcétera.

- EJERCICIO 2:

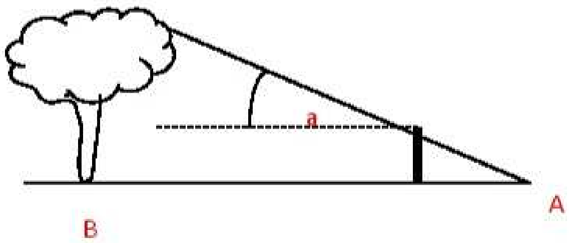
Las longitudes de los lados expresadas en la misma unidad de medida pueden ser 24 u, 32 u y 40 u o cualquier terna de segmentos que sean proporcionales a estos, por ejemplo los que midan 48 u, 64 u y 80 u. Hay infinitos triángulos que cumplen estas condiciones, todos semejantes entre sí.

Son también de gran importancia los ejercicios vinculados con la práctica, como los siguientes

6. Una pelota de balompié se encuentra en un punto A del campo (fig. siguiente) a una distancia de 23 y 24 m respectivamente los extremos C y D de la portería. ¿Qué valores puede tener el ángulo de tiro a para que la pelota entre en la portería?



7. Para medir la altura de un árbol se utiliza un instrumento con el cual se determina la amplitud del ángulo agudo a que se forma con la dirección horizontal (fig. siguiente). Calcula la altura del árbol si AB = 12m y a=40°.

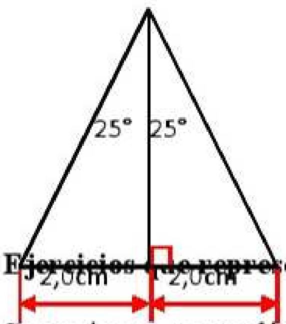


8. En una pirámide de base cuadrada el ángulo que forman las alturas de dos caras consecutivas tiene una amplitud de 50° y los lados de la base miden 4.0 cm. Calcula la altura de la pirámide.

- <u>EJERCICIO 6</u>:

El ángulo α tiene una amplitud mayor que 0° y menor que la del ángulo cuyo coseno es $\frac{23}{24}$.

- <u>EJERCICIO 8:</u>



En este ejercicio es necesario dibujar una pirámide y analizar que el problema se reduce a hallar la altura de un triángulo isósceles del que se conocen la base y el ángulo opuesto a ella (figura adjunta).

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Sugerimos se realicen ejercicios de los siguientes tipos

- Ejercicios formales donde se aplican los teoremas del grupo de teoremas de Pitágoras.
- Ejercicios de construcción.
- Ejercicios donde se aplican los teoremas recíprocos del grupo de teoremas de Pitágoras.
- Ejercicios donde se aplican el teorema de Pitágoras conjuntamente con otros conocimientos.
- Ejercicios formales donde se apliquen las razones trigonométricas.
- Ejercicios donde se apliquen las razones trigonométricas conjuntamente con otros conocimientos o ejercicios de aplicación a la práctica.

15 UNIDAD 5

1.32 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

1.32.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de la probabilidad fue aplicada con buenos resultados a los juegos de azar y, lo que es aún más importante, se aplicó a otros problemas socioeconómicos. Las empresas de seguros, en el siglo XIX, requerían un conocimiento exacto del riesgo de perder, pues de lo contrario no se podían calcular las pólizas. Al cabo de cincuenta años, muchos centros de enseñanza, estaban estudiando las probabilidades como un instrumento que les permitiría entender los fenómenos sociales. En la actualidad la teoría matemática de la probabilidad constituye el fundamento de las aplicaciones estadísticas tanto en la investigación social como en la toma de decisiones.

La probabilidad forma parte de la vida diaria, es por esto que la Reforma Curricular consideró importante, dentro de la visión de formar el hombre del futuro, incluirla en el contenido matemático necesario para la educación básica. En las decisiones de carácter personal y gerencial, enfrentamos la incertidumbre y nos valemos de la teoría de la probabilidad, sin importar si admitimos o no el empleo de un instrumento tan refinado.

Es importante preparar al estudiante para situaciones como cuando oye el pronóstico del tiempo según el cual hay un 70% de probabilidades de lluvia, ya que va a vivir un mundo donde somos incapaces de pronosticar el futuro con absoluta certeza. La necesidad que se le presentará a los estudiantes de sortear la incertidumbre los debe llevar a aplicar la teoría de probabilidad.

Es importante que desarrollemos valores en los estudiantes ya que ellos, como ciudadanos honestos, tendrán algún conocimiento sobre los posibles resultados de una decisión. Si organizan esta información y la analizan sistemáticamente, podrán reconocer sus suposiciones, comunicar a otros sus razonamientos y tomar una decisión más inteligente de la que lograría recurriendo a un método no científico.

Debido a lo que hemos expuesto, la presente unidad se ha estructurado en primer lugar, con un acercamiento a los diagramas de árbol, para permitir a los estudiantes que evidencien de forma gráfica, las posibilidades de ocurrencia de un evento o suceso. A partir de aquí que comprendan, sin nombrarlas, lo que significa una permutación o un arreglo.

La otra unidad temática que se ha diseñado es la de probabilidad clásica, con el fin de preparar al estudiante para el estudio más profundo de la probabilidad. La idea de probabilidad ya ha sido desarrollada el año anterior, en este momento necesitamos empezar a formalizar la misma y a utilizar el lenguaje y la notación propias de este concepto matemático.

1.32.2 COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

1.32.3 HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos desarrollen habilidades en la determinación de la probabilidad de que un evento suceda, y que puedan calcularla e interpretarla.

1.32.4 EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

Técnicas de conteo

$\downarrow$

Probabilidad

- Utilicen correctamente las técnicas de conteo.
- Sean capaces de [illegible] e que un evento suceda.

1.32.5 INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

Para el desarrollo de esta unidad se dispone de 5 horas, y en ella se han determinado las siguientes unidades temáticas:

1. Técnicas de conteo.
2. Probabilidad.

1 TÉCNICAS DE CONTEO.

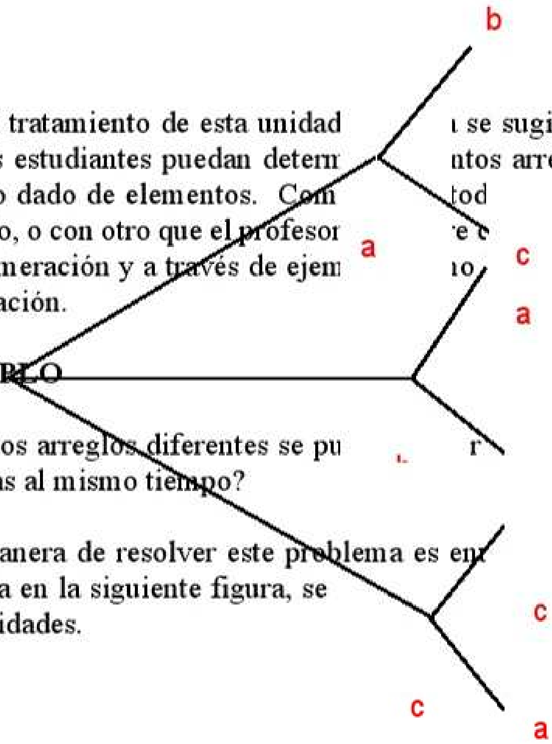
El tratamiento de la Probabilidad se diferencia fundamentalmente del que se presenta en el Noveno Año, en que ahora se introducen técnicas de conteo que permitan determinar fácilmente el número de elementos de un evento, y el número de elementos del espacio muestral.

Para el tratamiento de esta unidad [illegible] se sugieren 2 horas. Lo fundamental es lograr que los estudiantes puedan deter[illegible]ntos arreglos diferentes se pueden hacer con un número dado de elementos. Com[illegible]tod[illegible]nos comenzar con el siguiente ejemplo, o con otro que el profesor [illegible] partir de aquí dar la definición de enumeración y a través de ejem[illegible]onen, lograr la sistematización y la fijación.

EJEMPLO

¿Cuántos arreglos diferentes se pu[illegible]ras a, b, y c, usando dos letras distintas al mismo tiempo?

Una manera de resolver este problema es en[illegible]os posibles arreglos. Como se muestra en la siguiente figura, se [illegible]**e árbol**, para ilustrar todas las posibilidades.



Desde el punto llamado "comienzo", segmentos de recta salen hacia cada una de las tres posibles elecciones para la primera letra. Desde cada uno de éstos, un segmento de recta sale hacia cada una de las posibles elecciones para una segunda letra. Cada posible combinación corresponde a un camino o **rama del árbol** que empieza en el punto "comienzo" y va hacia la derecha a través del árbol. Vemos que hay seis diferentes arreglos.

Arreglos
ab
ac
ba
bc
ca
cb

Otra manera de resolver este problema es reconocer que cada arreglo consta de una selección de letras para llenar los dos espacios en blanco indicados.

Primera letra	Segunda letra

Cualquiera de las tres letras a, b o c se pueden escoger para la primera posición. Una vez que se haya hecho esta elección, cualquiera de las dos letras restantes se puede escoger para la segunda posición. Puesto que cada una de las tres letras de la primera posición se puede asociar con cualquiera de las dos restante, el número de arreglos está dado por el producto.

$$(\text{primera letra}) \times (\text{segunda letra})$$

Este simple ejemplo ilustra el principio fundamental de enumeración.

Principio fundamental de enumeración.

Si un resultado puede ocurrir de m maneras diferentes y, después de que ha sucedido, un segundo resultado puede ocurrir de n diferentes maneras, entonces el número total de las maneras en las cuales ambos resultados pueden ocurrir es el producto mn.

Este principio fundamental de enumeración puede extenderse a tres o más resultados de manera obvia, como se los presenta en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO

Un estudiante tiene 5 camisas, 3 pantalones, y dos pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones diferentes de una camisa, un pantalón y un par de zapatos puede usar?

Solución

Tres selecciones pueden ocurrir, con cinco opciones para la primera (escogiendo una camisa), tres opciones para la segunda (escogiendo un pantalón), y dos opciones para la tercera (escogiendo un par de zapatos). Según el principio fundamental de enumeración, el número de conjuntos diferentes es el producto $5 \times 3 \times 2 = 20$.

EJEMPLO

El prefijo telefónico de cierta residencia es 642. Si al prefijo le siguen tres dígitos, ¿cuántos números telefónicos diferentes son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo?

Solución

Pueden ocurrir tres sucesos: seleccionando el primer dígito después del prefijo, seleccionando el segundo dígito después del prefijo, y el tercer dígito después del prefijo. Puesto que los dígitos repetidos se permiten en los números telefónicos, cualesquiera de los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 pueden seleccionarse para cada posición. Entonces hay $10 \times 10 \times 10 = 1000$ diferentes números telefónicos posibles con el prefijo 642.

EJEMPLO

¿Cuántas formas posibles hay para ordenar las letras de la palabra CARTON?

Solución

Puesto que cartón tiene 6 letras diferentes, hay 6 posibilidades: escoger la primera letra, escoger la segunda letra y así sucesivamente. Se puede escoger cualquiera de las seis letras para la primera posición, entonces, cualquiera de las cinco letras restantes se puede escoger para la segunda posición, luego, cualquiera de las cuatro letras restantes se puede escoger para la tercera posición y así sucesivamente. El número total de posibilidades es $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

1.32.6 EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD TEMÁTICA

Para el desarrollo de las habilidades requeridas se sugiere se realicen ejercicios como los siguientes:

1. Se dispone de dos juegos de cartas. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos cartas si se escoge una de cada juego?.

2. Se lanza un dado tres veces, ¿cuántas combinaciones posibles de resultados existen?.

3. De un grupo de cinco personas, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité de tres personas?.

4. ¿Cuántos números naturales de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 3, 7, 8 y 9?.

5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas a una mesa redonda alrededor de la cual se han colocado 6 sillas?.

2. PROBABILIDAD CLÁSICA

Para el tratamiento de esta unidad temática se dispone de 2 horas, y en ella se considera que lo fundamental es que los estudiantes puedan determinar la probabilidad de que un evento o suceso ocurra.

En el año anterior los estudiantes vieron que la probabilidad es la posibilidad o no de que ocurra algo, que las probabilidades se expresan como fracciones o decimales, que asignar una probabilidad de cero significa que el evento nunca ocurrirá, una probabilidad de 1 indica que el evento ocurrirá siempre.

Es ahora el momento de que los estudiantes recuerden el concepto clásico de probabilidad.

$$probabilidad\ de\ que\ ocurra\ un\ evento = \frac{Número\ de\ resultados\ donde\ ocurre\ el\ evento}{Número\ total\ de\ posibles\ resultados}$$

El conjunto de todos los posibles resultados se denomina *espacio muestral*. Si A es un evento y S es el espacio muestral se tiene entonces que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},$$

donde $n(\ldots)$ es el número de ...

Se debe recalcar que, a fin de que la igualdad anterior sea válida, cada uno de los resultados posibles debe tener la misma probabilidad. Para explicar la fórmula anterior el profesor puede comenzar realizando ejemplos sencillos como los siguientes.

EJEMPLOS

Primero, se debe formular la pregunta

- ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el lanzamiento de una moneda?

Podemos presentar la siguiente notación, para indicar que el símbolo matemático para indicar la probabilidad de que ocurra el suceso "cara" es:

P(cara)

Luego se obtiene:

Número de resultados favorables (en este caso cara)

$$P(cara) = \frac{1}{1+1} = 0.5 = \frac{1}{2}$$

Número total de resultados posibles en un lanzamiento (cara o sello)

Se les puede presentar a los estudiantes el ejemplo del lanzamiento de dados.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un 4 cuando lanzamos un dado?
- Es decir, ¿cuál es el valor de P(4)?

$$P(4) = \frac{1}{1+1+1+1+1+1} = \frac{1}{6}$$

Número de resultados favorables(en este caso 4)

Número total de resultados posibles en un lanzamiento del dado (1, 2, 3, 4, 5, 6)

El profesor debe indicar a los es presentando recibe, a menudo, el nombre de *probabilidad a priori*. Esto ya que, si se están usando ejemplos ordenados, como moneda, dado, o una baraja ordinaria. se puede dar la respuesta en forma anticipada (*a priori*) sin lanzar la moneda o el dado ni extraer un naipe.

Para los alumnos debe quedar claro que no es necesario que se realice experimentos para hacer afirmaciones de probabilidades acerca de monedas, dados o barajas. Por el contrario, los hacemos basándonos en el razonamiento lógico antes que efectuar el experimento.

1.32.7 EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD TEMATICA

Se recomienda realizar los siguientes ejercicios.

1. De una urna con 4 bolas rojas y 5 blancas se saca una bola,
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?,
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

2. De una urna con 3 bolas azules y 7 amarillas se sacan dos bolas.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean azules?.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que una sea azul y la otra amarilla?.

3. Se lanzan dos monedas y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y un 5?.

4. Se lanzan 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma obtenida sea 16?.

5. El estado de Probabilandia está dividido en 10 provincias cada una de las cuales aporta con 2 senadores para el congreso de su país. Se desea formar un comité de 3 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el presidente del comité sea de la Provincia de Estadilandia?.

6. Una fábrica produce cajas de cartón. El inspector de calidad ha observado que de cada 520 cajas 12 tienen fallas en el exterior, 9 en el interior y 6 tienen los dos tipos de fallas. Calcular la probabilidad de que una caja sea defectuosa.

1. BIBLIOGRAFÍA

1. Acosta Rosa, M y otros. Bases Psicopedagógicas del Proceso Pedagógico Profesional. La Habana, 1997.

2. Alvarez de Zayas, Carlos M. La Escuela en la vida. La Habana. Educación y Desarrollo. Artedu. 1992.
3. Apostol, Tom. Calculus Vol. I. Editorial Roverté, 1997.
4. Ballester Pedroso, Sergio, y otros, Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1992.
5. Ballester Pedroso, Sergio: La sistematización de los conocimientos matemáticos. En PROMET, Editorial Academia. La Habana. 1995
6. Ballester Pedroso, Sergio: Enseñanza de la Matemática y dinámica de grupos. En PROMET, Editorial Academia. La Habana. 1995.
7. Campistrous Pérez, L.A. Apuntes de un curso de Postgrado. Ciudad Habana. 1993.
8. Castillo, Carlos y Toro José. Estructuras Reales y Complejos. E.P.N. , 1995
9. Castro Pimienta, Orestes. Evaluación en la Escuela Actual: ¿Reduccionismo o Desarrollo?. INSPETD. La Habana. 1997.
10. Castro Pimienta, O. La evaluación pedagógica. CEPTP. ISPETP. P. 1-30. La Habana. 1992.
11. Castro Pimienta, O Algunos aspectos de la evaluación en Cuba/ Orestes Castro.-- 62-72.-- En Boletín Informativo ISPETP. La Habana 1987.
12. Castro Pimienta, O. Planificación y Evaluación de la Educación /Orestes Castro.-- Cap. X. En teoría y metodología de la Educación. ISPETP. La Habana. 1991.
13. Castro Pimienta, O Evaluación a través de la estructura modular de un programa docente. 2do. Premio. Academia Naval Granma. La Habana. 1990.
14. Costa, Arthur. El Colegio como hogar para la mente. Universidad del Estado de California. Sacramento. 1996.
15. Cuevas Casas, Carlos y Torres Pérez, Gisela. Formación Básica del Gerente Educacional, La Habana, 1996.
16. Demidovich. Problemas y ejercicios de análisis Matemático, Prentice Hall, 1987.
17. Fraga Rodríguez, Rafael, y otros. Diseño Curricular: Modelación del proceso de formación de profesionales. La Habana.1997.

18. Fraga Rodríguez, Rafael, y otros. De la Matemática, Su Enseñanza y Aprendizaje. E.S.P.E., Quito, 1995.

19. García González, Edelia. Dificultades de la Aplicación de la Computación a la Enseñanza. Posibles Soluciones. Revista Cubana de Educación Superior. No. 2 La Habana. 1995

20. González Rey, F. Y A. Mitjáns: La personalidad : su educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. Cuidad de la La Habana. 1989.

21. González Serra, Diego. Teoría de la Motivación y Práctica Profesional. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. l995.

22. González Serra, Diego. Psicología General para maestros, Ponencia en evento Pedagogía 97. La Habana. 1997.

23. Henao, Gloria. Procesos Pedagógicos y Tansformación Cultural. Corporación Calidad. Santafe de Bogota. 1994.

24. Hernández Fernández, Herminia. Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate. E.P.N. Quito. 1993.

25. Herrera Padrón, Caridad. Lo Profesional del proceso Pedagógico. Informativo Politécnico. Quito. Noviembre de 1996.

26. Jacques Delros y otros. La Educación encierra un Tesoro. Santillana, Ediciones Unesco. Madrid. 1996

27. Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2. Editorial Libros para la Educación. Ciudad Habana. 1982.

28. Kolominsky, Ya. L. La psicología de la relación recíproca en los pequeños grupos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1975

29. Kon, I. S. Pscicología de la edad juvenil. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1990.

30. Kóstikova, Margarita. El Concepto de Función en Matemáticas. A.E.C. Quito. 1988.

31. Lara, N. y Arroba C. Análisis Matemático. Universidad Central. Quito. 1992.

32. Melgarejo Peréz, y otros. Salomón: Un tutor Inteligente para el Trazado de curvas. Revista Cubana de Educación Superior. No. 2 La Habana. 1995

33.Montero García, C. I. Motivación y adolescencia, en Cuadernos de Pedagogía. Barcelona. 1987.

34.Monteverde, Mariana. Estrategias de Enseñanza. Informativo Politécnico. Quito Febrero 1994.

35.Oropesa Fernández, Ricardo R. Jugando También se aprende. Evento Pedagogía 97. Curso 57. La Habana. 1997.

36.Pérez F. Vicenta, De la Cruz, Pilar. Material de Apoyo de la Asignatura Informática Educativa. La Habana 1996.

37.Piskunov. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Mir. 1980

38.Reforma Curricular Para la Educación Básica, Propuesta consensuada. Consejo Nacional de Educación. M.E.C. Quito. 1996.

39.Saenz, Rolando. Fundamentos Matemáticos. Introducción al Cálculo. Universidad Central. Quito. 1988

40.Senk, Sharon. Curso de Matemáticas. Universidad del Estado de Michigan. Michigan. 1996.

41.Soto Alba, Narcizo. Talleres Docentes en las Ramas Técnicas. 1997

42.Thomas y Finney. Cálculo con geométria Analítica. Adison Wesley Iberoamericana. 1984.

43.Valdéz , P y Valdéz, R. Utilización de los ordenadores en la Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación de y Experiencias Didácticas, Enseñanza de la Ciencias. Volumen 12 No.3. Barcelona 1994.

44.Viñas, Gladys. Métodos activos para una enseñanza efectiva. Informativo Politécnico, Quito. Marzo de 1994.

ISBN: 978-9942-20-875-0