UN PROCESO EFECTIVO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA

NOVENO AÑ

RUTH CUEVA RODRÍGUEZ
PROFESORA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ISBN: 978-9942-20-876-7

9 789942 208767

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo actual y perspectivo de la sociedad así como el nivel alcanzado por la Ciencia y la Tecnología exigen una formación profesional integral, que se manifiesten en nuevas formas de actuación del hombre y que éste sea capaz de plantear y resolver problemas con un alto criterio de responsabilidad moral. Los últimos foros internacionales, sobre problemas tanto sociales como educativos, han evidenciado la necesidad de impulsar estrategias de desarrollo acordes a la realidad actual, y es así como surgen propuestas educativas, que se espera favorezcan las transformaciones que demanda la sociedad moderna.

Dentro de este contexto, el Gobierno Ecuatoriano inicia en 1992 el diseño de la Reforma Curricular para la educación básica, debido a que considera que: "La inversión prioritaria en capital humano constituye en la actualidad, un prerrequisito indispensable para el crecimiento económico de un país. El capital humano es el recursos más precioso, tesoro invalorable, y garantía de futuro para la sociedad. De los recurso humanos depende el avance y uso apropiado de la tecnología, la conservación de la naturaleza. De las personas dependen: la paz, la democracia, la producción, la seguridad, la responsabilidad del planeta...."

La Reforma Curricular Ecuatoriana contiene: "Un nuevo pénsum de la educación básica ecuatoriana, los lineamientos curriculares referidos al tratamiento de las prioridades transversales del currículo, las destrezas fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios para cada año y las recomendaciones metodológicas generales para cada área de estudio"

Tanto la acción de este proyecto educativo, como la formación de los hombres que requieren los nuevos tiempos, deben centrar su atención en privilegiar su capacidad de incorporarlos a la sociedad con el mayor desarrollo posible de sus potencialidades. Lo que se puede lograr siempre y cuando se conciba a la educación como un proceso que debe ser dirigido científicamente, considerando su carácter sistémico, dando prioridad al tratamiento metodológico, en el que no atienda solamente los resultados del proceso pedagógico sino que privilegie el estudio de los estadios intermedios en función del desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

Los procesos curriculares, desde el diseño hasta la evaluación de su efectividad, requieren de sólidas bases científico-pedagógicas, es por ello que en la Reforma Curricular para la educación básica se han determinado las áreas fundamentales, considerando a la Matemática una de ellas. Debido a que en su desarrollo histórico, la Matemática nos muestra que sus conocimientos, surgidos de las necesidades prácticas del hombre mediante un largo proceso de abstracción, tienen un gran valor para la vida. La matemática es aplicada, entre otras áreas, en la planificación económica, en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, en la dirección de la producción, en la estrategia militar, en el estudio del rendimiento de los atletas, con lo que se evidencia que la matemática está presente en todos los campos del saber humano.

Debido a que durante el estudio de la Matemática se presentan: necesidad de deducciones, representación mental de relaciones reales, entes abstractos como objetos de estudio, lógica de estructura y rigurosidad de lenguaje, desarrollo de generalizaciones relativamente rápidas, mediante reconocimiento de analogías y diferencias, evidenciamos que se observan exigencias para el uso y desarrollo del intelecto, así como una convicción de la complejidad de sus formas. Por esto su estudio exige hábitos de disciplina, de persistencia y de trabajo ordenado, que contribuye de manera decisiva en el desarrollo multilateral de la personalidad.

El presente trabajo pretende aportar a mejorar el nivel del la Educación en el país, así como tratar sobre la base de la Reforma Curricular, de completar un trabajo en el cual el país ha invertido ingentes recursos.

Dentro de la Reforma Curricular, en lo que tiene que ver con el Área de Matemática, "se privilegian el valor y los métodos de la Matemática, a base de los conocimientos necesarios para el desarrollo personal y la comprensión de las posibilidades que brinda la tecnología moderna"

En la Reforma Curricular los conocimientos se estructuran de una forma "sistémica", lo que, a criterio de los autores permite unificar todas las ramas de la ciencia, garantizando su estudio y facilitando su articulación con las otras áreas. Se han seleccionado los contenidos de modo que puedan "ser tratados según sus características y formas propias de aprender del estudiante en cada uno de sus períodos de desarrollo, con carácter de continuidad dentro de la educación básica, en el contexto de la realidad nacional".

Los sistemas que han sido propuestos son:

- Numérico.
- De funciones.
- Geométrico y de medida.
- De estadística y probabilidad.

FUNDAMENTOS DE LA IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- El reconocido valor de los conocimientos matemáticos en la solución de los problemas de nuestra sociedad.
- El desarrollo del pensamiento se realiza a través de la contribución de las potencialidades que radican en el aprendizaje de las matemáticas.
- La enseñanza de la matemática contribuye al desarrollo de la conciencia y a la educación de nuevas generaciones.

BASES PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Leyes generales de la pedagogía
- Teorías psicológicas del aprendizaje.
- Higiene escolar (cuidado de la higiene mental).

Tareas de la enseñanza de la matemática.

- A partir de las bases determinadas por la sociedad se debe orientar la enseñanza de la matemática, determinando y derivando los objetivos, y seleccionando adecuadamente los contenidos.
- Determinar y desarrollar métodos que dirijan adecuadamente el proceso, precisando secuencia, enfoque y estructuración del contenido.
- Investigar y precisar las regularidades del proceso pedagógico en la enseñanza de la matemática.

FUNCIONES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Proveer a los alumnos de sólidos conocimientos matemáticos (conceptos, teoremas, reglas, relaciones, relaciones y procedimientos) de importancia general y que han sido estables históricamente.
- Desarrollar habilidades en el trabajo con algoritmos y cálculos elementales, así como con métodos y procedimientos indispensables para llevar a la práctica los conocimientos antes referidos.
- Familiarizar al alumno con las siguientes características de la ciencia matemática:

    1. El carácter abstracto.
    2. Formas fundamentales del pensamiento matemático.
    3. El carácter lógico deductivo.
    4. La estructura.

- Formar en los estudiantes la convicción de que una buena educación matemática es parte integrante de una personalidad al servicio de la sociedad.
- Que los alumnos evidencien la importancia creciente de la Matemática en la vida social.
- Contribuir a la formación mediante el desarrollo de las capacidades intelectuales, formas de trabajo y razonamiento, así como los hábitos de trabajo que siendo esenciales para la actividad matemática pueden desarrollarse a través del trabajo con los conceptos y procedimientos propios de la Matemática.
- El desarrollar en forma sistemática el poder, sobre todo en lo que se refiere a la aplicación independiente de los conocimientos, hábitos y habilidades en la solución de problemas intra y extramatemáticos y en la posterior adquisición de conocimientos.

OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Objetivos en el campo del saber y el poder.

SABER. Se entenderá por saber los conocimientos matemáticos que pueden ser adquiridos por los alumnos durante el curso escolar. Éstos pueden ser sobre conceptos, sobre proposiciones (teoremas y fórmulas), y sobre procedimientos o métodos de trabajo característicos de la matemática (métodos de demostración, procedimientos para la resolución de ecuaciones, para calcular, etc.).

PODER. Se entenderá por poder los hábitos, habilidades, y capacidades específicas de la matemática, desarrollado por los alumnos para operar con los conocimientos adquiridos y darles aplicación, así como las normas de conducta y cualidades de la personalidad.

Respecto al saber.

La adquisición de sólidos conocimientos sobre:

- Conocimientos importantes del curso escolar de Matemáticas.
- Proposiciones matemáticas.
- Procedimientos de trabajo matemático.
- Símbolos y fórmulas matemáticas.

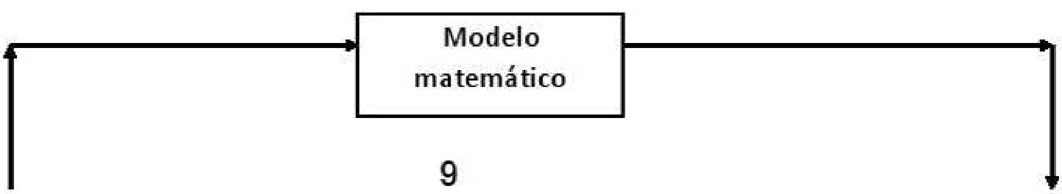
Respecto al poder.

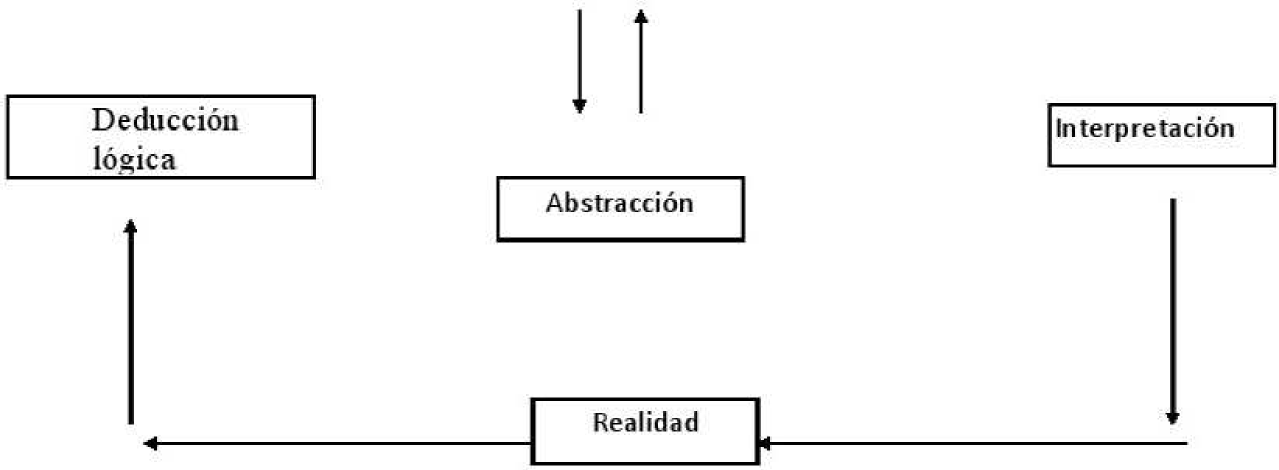
La formación y el desarrollo de hábitos y habilidades para:

- La realización de operaciones básicas de cálculo.
- La resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- El trabajo con funciones elementales.
- La representación y el cálculo de objetos sencillos en el plano y en el espacio.

El sistema básico de habilidades en la enseñanza de la matemática en el nivel medio es el siguiente:

- Analizar y sintetizar, comparar y clasificar, generalizar y concretar y particularizar, como habilidades generales que contribuyen al desarrollo del pensamiento general.
- Algoritmizar, calcular, graficar, interpretar, identificar, recodificar, definir y demostrar, como habilidades particulares de la Matemática.
- La abstracción como la vía del pensamiento matemático para poder resolver problemas prácticos mediante modelos.





La formación y el desarrollo de capacidades para:

- Entender y realizar independientemente demostraciones sencillas.
- Comprender la esencia de los conceptos y como llegar a su definición y caracterización.
- Aplicar correctamente la terminología, simbología y el lenguaje matemáticos.
- Reconocer, analizar y solucionar problemas matemáticos.

Objetivos en el campo del desarrollo intelectual.

Éstos expresan la contribución que debe hacer la enseñanza de la Matemática al desarrollo del pensamiento en general vinculado con:

- El desarrollo del pensamiento lógico-deductivo. Para ello se debe hacer una utilización correcta de las operaciones lógicas y sus formulaciones correspondientes.
- El desarrollo del pensamiento creativo y la fantasía. Para ello se debe participar activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos y relaciones entre ellos; de ideas para la solución de ejercicios y problemas.
- La formación lingüística. Para ello se debe capacitar para el uso correcto del lenguaje normado de la asignatura, para transferir formulaciones del lenguaje común al matemático y viceversa.
- El desarrollo del pensamiento geométrico espacial. Para ello se debe formar un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, pueden los estudiantes representar, mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométricas espaciales.

- El desarrollo del pensamiento final. Entendiéndose a éste como los procesos del pensamiento encaminados a un producto final determinado.
- El desarrollo del pensamiento algorítmico.
- El desarrollo del pensamiento funcional.
- La racionalización del trabajo mental de los alumnos. Para ello se debe preparar para trabajar de modo racional, planificado y orientado hacia el cumplimiento de objetivos específicos.

Objetivos educativos.

Los objetivos educativos de la enseñanza de matemática se orientan hacia la formación de convicciones, actitudes y normas de conducta, así como cualidades morales, los mismos que se logran al incluir en la educación:

- El trabajo planificado, consciente y creador.
- La exactitud, el cuidado, el esmero y la limpieza.
- La perseverancia, la disciplina y el aprendizaje consciente.
- La sinceridad, la crítica y la autocrítica.
- El compañerismo, la complacencia y la conducta colectiva.

CONOCIMIENTOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Dominios numéricos.
- Cálculo con magnitudes y valores aproximados.
- Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas. Optimización lineal.
- Correspondencia, transformación, función.
- Geometría
- Combinatoria, probabilidades.

MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Del profesor.

El profesor debe dominar los métodos para la familiarización con los programas de matemática, conocidos como: corte vertical, corte horizontal y panorámica del contenido.

Corte vertical. Se utiliza para obtener información respecto a las condiciones previas que posen los estudiantes, sobre las premisas fundamentales que se deben crear en una unidad, de modo de contribuir a la consecución de los objetivos en las unidades posteriores.

Corte horizontal. Se utiliza para obtener la información que proporcionan los programas sobre la distribución o dosificación del contenido en una unidad o parte de él.

La panorámica del contenido. Se utiliza para obtener información de los programas sobre los contenidos fundamentales

Del contenido.

Debido al lugar que ocupa el método en la cadena lógica de los componentes no personales del proceso pedagógico (objetivo, contenido, métodos, medios, formas organizativas y evaluación), éstos deben cumplir las siguientes exigencias:

- Deben hacer un importante aporte al logro de los objetivos, no solo de la enseñanza de la matemática sino de toda la enseñanza en general.
- Deben ser métodos que tengan en cuenta tanto las particularidades del contenido matemático (imágenes ideales de la realidad), como los modos objetivos de asimilación de este contenido por parte de los estudiantes de forma que tengan capacidad para determinar ese modo de proceder.

ASPECTO INTERNO Y EXTERNO DEL MÉTODO.

EXTERNO. Es el modo visible de las relaciones entre maestro, alumno y los conocimientos (forma de enseñar), aquí se distinguirán tres formas:

Exposición del profesor.

La fuerza activa está en el profesor, la actividad del alumno es receptiva. En la enseñanza de la matemática se la usa si:

1. Aparecen indicaciones sobre.....
2. Hay que presentar informaciones sobre.....
3. Se debe complementar una información matemática mediante una información adicional.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Se representa la materia completa en el aspecto del contenido (aclaración).
2. Contribuye al adiestramiento lógico lingüístico de los alumnos.
3. Permite dar indicaciones para resolver un ejercicio o para realizar determinada forma de trabajos.(instrucción).
4. Es importante para mostrar numerosos procedimientos y formas de trabajo y pensamiento de la matemática (ejemplificación).

Exposición con carácter de aclaración.	Exposición con carácter de instrucción.	Exposición con carácter de ejemplificación
Introducción de conceptos, símbolos y formas de escritura(frase conceptual. Deducción de teoremas y reglas. Fundamentación de los diferentes pasos de una demostración o construcción. Explicación de leyes. Aclaración de vías de solución.	Planteamiento de objetivos. Planteamiento de ejercicios. Indicaciones sobre la forma de trabajo.	Introducción de procedimientos de construcción. Introducción de métodos de demostración. Ejemplificación de las formas de representación de demostraciones.

Trabajo independiente.

Predomina el aprendizaje productivo en la solución de ejercicios o en el trabajo con el libro de texto.

Se lo usará en la enseñanza de la matemática:

1. Para el descubrimiento de determinadas leyes matemáticas.
2. Para adquisición de nuevos conocimientos sobre conceptos.
3. Cuando se quieren presentar definiciones o teoremas.
4. Para la ejercitación de procedimientos de solución.
5. Para lograr la sistematización de contenidos.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Desarrollo del pensamiento de los alumnos en cuanto al dominio de operaciones lógicas como: analizar, inducir, sintetizar, abstraer, generalizar procedimientos, inducir y deducir.
2. El desarrollo de la habilidad de solucionar problemas.
3. Entrenamiento para el trabajo en silencio, con notas de clase, con el libro de texto y con libros de consulta en la biblioteca.
4. El desarrollo de la independencia en la realización de tareas.
5. Desarrollo de la habilidad de exponer.
6. El adiestramiento en hacer valoraciones críticas en cuanto a la comprensión y la representación de relaciones matemáticas.

Trabajo individual	Trabajo individual frontal	Trabajo en equipos
Exposición de los alumno. Hacer cálculos en la pizarra, realización de construcciones en la pizarra. Controles orales de los resultados. Solución de tareas.	Ejercicios para la realización de cálculos, solución de ecuaciones, etc. Solución de ejercicios de demostración, realización de descripción de construcciones. Elaboración de resúmenes. Sistematización del saber adquirido. Elaboración independiente de nuevos conocimientos con el libro de texto. Empleo de hojas de trabajo para la adquisición de nuevos conocimientos. Controles escritos de los resultados.	Solución comentada de ejercicios.

Elaboración conjunta.

Adopta distintas formas de conversación.

En la enseñanza de la matemática se lo usará:

1. Si se desea dar pasos cortos en la actividad mental de los alumnos.

2. Si se quiere realizar controles orales en los alumnos para el aseguramiento del nivel de partida.
3. Si se intenta dirigir el pensamiento de los alumnos para que encuentren o descubran, por sí mismos, determinados problemas matemáticos.

Las ventajas de su uso son:

1. Desarrollar las habilidades de: fundamentar, definir y explicar relaciones.
2. Incide en la capacidad de formular proposiciones, y encontrar un procedimiento.

Conversación Socrática	Conversación heurística	Discusión
Ejercitaciones diarias de todo tipo: cálculo oral, propiedades de objetos geométricos, trabajo con variables.	Elaboración de nuevos conocimientos sobre la base del poder y del saber ya adquiridos.	Búsqueda común de vías de solución. Análisis de problemas. Trabajo en el problema.
Controles breves con preguntas sobre fórmulas de cálculo	Ordenamiento de nuevos conocimientos en sistemas de conocimientos ya existentes.	Discusión de posibilidades de solución Valorización y evaluación de soluciones ofrecidas.
Preparación de conceptos conocidos, definiciones, teoremas para el trabajo siguiente.	Resúmenes de generalizaciones. Descubrimiento del núcleo matemático de una situación dada. Solución por paso de ejercicios. Interpretación de expresiones matemáticas.	Contraposición con problemas actuales

INTERNO. Es la expresión de procesos más profundos, que se encuentran determinados por la lógica interna del proceso de enseñanza y que le imprimen al método una estructura interna peculiar. Aquí consideraremos los siguientes métodos.

* **Los métodos analíticos, sintéticos y analítico-sintéticos.**

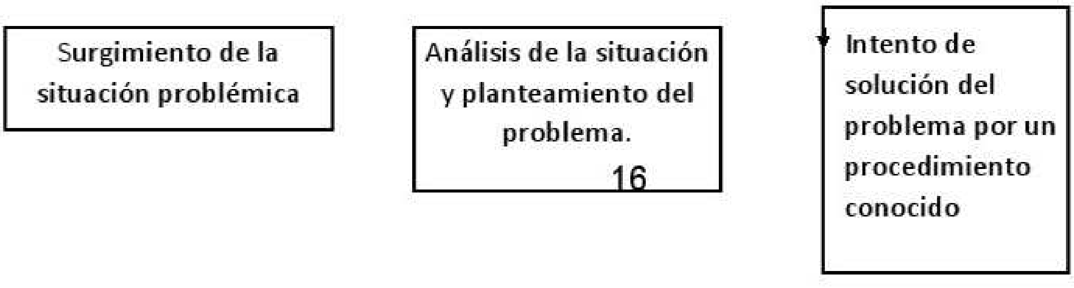
Siendo el análisis y la síntesis métodos de la investigación científica, juegan un gran papel en el proceso de la cognición que tiene lugar en la matemática por lo tanto deben reflejarse en su enseñanza.

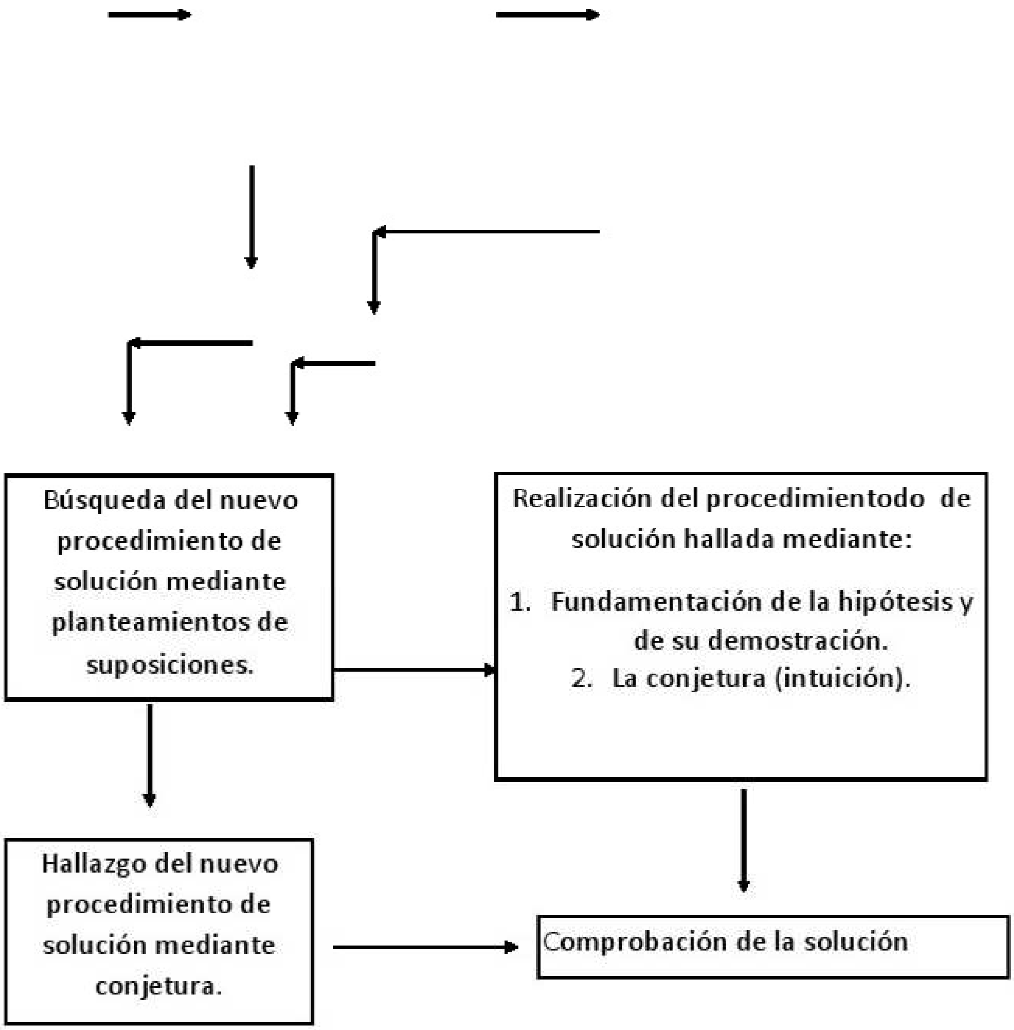
- **Los métodos genéticos, constructivos y axiomáticos.**

  Al aplicar el método genético se citan pintorescamente hechos históricos que revelan causas de la aparición de las teorías matemáticas; se trata de que los alumnos con ayuda del profesor, descubran los teoremas y las reglas esenciales comprendiendo la estructura. Al aplicar el método constructivo se introducen conceptos que se logran en forma constructiva. El método axiomático se basa en representar todo el sistema de los conceptos y teoremas partiendo de leyes básicas que se consideran axiomas irrefutables.

- **El método problémico.**

Este consiste en que mediante el proceso de solución por parte de los alumnos, del sistema especialmente elaborado de problemas y ejercicios problémicos, éstos llegan a dominar la experiencia creadora, a asimilar los conocimientos y modos de actividad creadora. A continuación se presentará un esquema del método problémico.





MEDIOS PARA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Aparte de los medios elementales de la enseñanza de la matemática como son el pizarrón, la tiza, el retroproyector, las láminas, las reglas, el compás, etc., consideraremos un grupo de medios que los llamaremos medios auxiliares.

Para que los estudiantes puedan aprovechar al máximo los medios, deben saber cuál es su contenido, cuáles son los valores que contienen y cómo trabajar con ellos. El profesor es el ejemplo de su utilización, no solo en el momento de su enseñanza. El facilitador debe realizar con los alumnos un entrenamiento para dominar las técnicas del uso, a través de un trabajo sistemático. Asímismo debe propiciar la memorización de las fórmulas simples que son de uso frecuente. Algunos de los medios que se consideran de importancia en la enseñanza de la matemática son:

Libro de texto. Donde se ofrece una representación de los contenidos del curso. Con ayuda de éste los alumnos pueden realizar tres grupos de actividades fundamentales: actividades de búsqueda de información, de toma de información, y de elaboración o transformación de la información.

Plantillas para la construcción de figuras y para el trazado de gráficos de funciones elementales. La construcción del gráfico de algunas funciones (cuadráticas,homográficas,etc.) exige mucho tiempo y a menudo el dibujo no es limpio y la curva no adquiere su forma verdadera producto de los errores cometidos, el tiempo puede ser ahorrado para emplearlo en la actividad mental y creativa de los alumnos, si éstos disponen de un juego de plantillas que pueden ser confeccionados por ellos mismos.

Los formularios y las tablas de valores funcionales. Estos medios tienen un carácter eminentemente racionalizador, con su ayuda se puede en breve tiempo, precisar fórmulas, conceptos, teoremas, gráficos, valores para funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, etc. que resulten necesarias para la solución de un problema dado.

La calculadora. Es una herramienta que se puede introducir en el momento en que los cálculos requieran de procedimientos muy largos y que abarquen números racionales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc.

FORMAS ORGANIZATIVAS.

El proceso pedagógico para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio de la educación en el Ecuador debe organizarse en forma horizontal, en años, trimestres (cuatrimestres, quimestres, etc.), meses, semanas, módulos y clase, y de manera vertical en asignaturas. A éstas últimas se les organiza de modo que permitan la función integradora del proceso.

Es en las clases en donde se manifiesta la relación facilitador-estudiante, y es allí donde se produce el desarrollo metodológico del proceso, mediante el cual los estudiantes deben apropiarse del contenido logrando los objetivos.

Creemos que las clases de Matemática deben desarrollarse principalmente entre la práctica con un porcentaje de trabajo investigativo. En las clases debe tratarse de mantener la expositiva, la práctica y los talleres con un peso igual. No debería, sin embargo, dejarse de desarrollar clases donde se trate la autopreparación y la consulta, de forma que se logren los objetivos propuestos y fomente el autocontrol como un aporte para el desarrollo de la personalidad.

Así, la relación Método-medio-forma es dinámica, determinando la eficiencia del sistema, manifestándose de modo categórico, como en ningún otro componente del sistema, la relación afectivo-cognitiva y de la actividad-comunicación.

EVALUACIÓN.

Se debe entender a la evaluación como la integridad de sus funciones: pedagógica, innovadora y de control. Aunque en un instante parecería que la función que se encuentra rectorando la evaluación es la de control, si se aplica adecuadamente la estrategia evaluativa sugerida por el Dr. Castro, obtendríamos una evaluación que utilice la medición, la comprobación, la retroalimentación y sobre todo la autoevaluación como actividades frecuentes y sistemáticas.

Para que la evaluación cumpla con su función pedagógica se debería estructurar medológicamente:

- La motivación.
  Para que los alumnos adquieran conciencia de la necesidad de aprender.
- La orientación hacia el objetivo.
  La información anticipada a los alumnos del resultado de su actividad.
- El aseguramiento del nivel de partida (diagnóstico).
  Lo que implica que se debe prestar atención a las condiciones previas generales y la disponibilidad de conocimientos y habilidades.
- La fijación.
  En todas sus etapas: ejercitación, repaso, sistematización y profundización del contenido.
- Del control.
  Dentro de las técnicas de control que sugerimos tenemos: la evaluación frecuente a través del método de elaboración conjunta, trabajo en clase y extraclase, y las pruebas y exámenes. Para la estructuración metodológica del control se debe tener en cuenta:
- Características de los ejercicios. Estos se los utiliza como un medio para el control, y deben estar confeccionados según el modelo de los que representan las exigencias derivadas de los objetivos a lograr.
- Principios para la selección de ejercicios en una prueba o examen.

1. Hay que lograr variedad en el planteamiento de los ejercicios
2. Debe tener al menos un ejercicio que provenga del curso anterior.
3. Por lo menos en un ejercicio los alumnos deben reconocer el núcleo matemático de una situación dada
4. Debe estar contenida las exigencias de una demostración, de una fundamentación o de una sistematización (generalización).
5. En la fijación del valor de las preguntas tiene que dar suficiente peso a los conocimientos y habilidades principales.
6. Deben estar contenidos ejercicios que posibiliten también a los alumnos de menos capacidad una elaboración exitosa.
7. Deben estar contenidos ejercicios en los que los alumnos de mayor capacidad puedan mostrar que dominan la materia amplia y profundamente.

- Valorización adecuada y justa de los ejercicios de control.
  Esto se realiza sobre todo mediante el elogio, la crítica, pero también mediante la calificación. Para que la evaluación cumpla sus propósitos el alumno debe reconocer por qué fue elogiado o criticado o el por qué de su calificación. Además se necesita que concientice del estado del desarrollo de sus habilidades para fundamentar, para demostrar, para sistematizar.

- La elevación de la efectividad de la evaluación.
  Para esto el profesor a de tener en cuenta:

1. Realizar observaciones frecuentes y detalladas durante la clase sobre la calidad de las respuestas, los comentarios, la realización de tareas por los alumnos y al final de la clase informar sobre el resultado.
2. Durante la evaluación individual plantear ejercicios adecuados de acuerdo con la capacidad de rendimiento de los alumnos, incorporándolos a tareas de observación de la precisión, la forma racional de la representación lingüística y matemática.
3. El estado de desarrollo tanto de los conocimientos como de las habilidades generales y específicas.
4. Que los alumnos deben reconocer la fuente de sus errores y que los reconozcan. Anotar errores comunes y ejemplificarlos con caso análogos y cómo remediarlos.
5. Después de las pruebas y exámenes resolver todos los ejercicios en la forma que espera que los hayan resuelto los alumnos.
6. Mostrar las dificultades existentes y en qué forma pueden aumentar sus esfuerzos.
7. Velar no solo porque los resultados sean correctos desde el punto de vista matemático sino por la forma de trabajo limpia e inmejorable.
8. Indicar tareas individuales a los alumnos con indicaciones para actuar y ejercicios del libro de texto.
9. Reflexionar sobre el resultado del rendimiento de sus alumnos de modo que retroalimente y mejore sus métodos de trabajo.

2. ESQUEMA DEL MÓDULO DE CAPACITACIÓN

El presente trabajo contiene las orientaciones metodológicas para el octavo grado, que constituyen un material de apoyo para los profesores. Se ha procurado que contengan, tanto las ideas esenciales de la concepción general de la matemática, cuanto las ideas de carácter general que están relacionadas con todas las unidades o con algunas de ellas.

Esta presentación se la ha organizado por unidad y ésta a su vez por unidad temática. Dentro de cada unidad se ha clasificado de la siguiente manera la presentación:

- Introducción.- Donde se explican las características generales de la unidad en relación con la nueva concepción de la matemática que presenta la Reforma Curricular, poniendo de manifiesto los cambios más significativos en el contenido y en el tratamiento metodológico.
- Composición de la Unidad.- Aquí se presenta inicialmente un esquema en el que se evidencian las condiciones previas más importantes para el tratamiento de la unidad, así como los aspectos fundamentales de ella.
- El hilo conductor.- Constituye un conjunto de ideas que rigen el desarrollo de la unidad, y permiten determinar lo esencial y lo que esperamos lograr en los alumnos.
- Exigencias mínimas.- Indican el nivel mínimo que deberán alcanzar los alumnos, se las representarán por ejercicios, que orientarán con claridad lo que se espera que los estudiantes puedan hacer. Se debe indicar que no se pretende presentar ejercicios "tipo", sino ejercicios que ilustran el nivel que esperamos, sin mermar la posibilidad de trabajar de modo de lograr más con aquellos alumnos que tengan más posibilidades de desarrollo.
- Unidades Temáticas.- Se clasificará cada una de éstas en los puntos esenciales que se sugieren subdividir cada unidad temática. A su vez dentro de cada uno de éstos se propondrá las metodologías a seguir, así como se expondrán ejemplos de qué tipo de ejercicios presentar, y cómo resolverlos.

3. TRATAMIENTO METODOLÓGICO GENERAL DEL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA EN EL NOVENO AÑO.

SOBRE LOS PROBLEMAS QUE CONDUCEN A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

La resolución de ejercicios con textos matemáticos y de ejercicios con textos relacionados con la práctica o problemas, posibilitan el desarrollo del pensamiento de los alumnos y un nivel superior en la asimilación de la idea de la "dependencia funcional". Mediante la resolución de estos ejercicios y problemas, se desarrollan en los alumnos habilidades y hábitos para la modelación de objetos y fenómenos reales.

En años anteriores ya se inició el trabajo con ejercicios y problemas que conducen a la resolución de ecuaciones y se realizó una etapa propedéutica que sirve de base al tratamiento de los problemas que se harán en este grado.

Para realizar el trabajo sobre los problemas que conducen a la resolución de ecuaciones, es necesario, activar habilidades y hábitos desarrollados por los alumnos, como por ejemplo los siguientes:

- Leer y analizar cuidadosamente el texto de los problemas.
- Separar las condiciones que se dan (datos numéricos, relaciones) y la pregunta (la incógnita, lo que queremos hallar).
- Realizar esquemas a partir del texto de los problemas que faciliten su comprensión.
- Reconocer las dependencias entre las magnitudes que figuran en el problema y traducir estas dependencias al lenguaje matemático (hacer la traducción del lenguaje común al algebraico).

En cada ejercicio con texto o problema se reflejan una o varias situaciones relacionadas entre sí, que pueden formalizarse mediante una relación básica. Por ejemplo, mediante la fórmula $m \times n = \lambda$ se puede formalizar diferentes situaciones como las siguientes (relación entre la densidad, la masa y el volumen; entre la distancia recorrida por un móvil con MOVIMIENTO rectilíneo uniforme, la velocidad y el tiempo; el costo total, el precio de un artículo y el número de artículos que se compran; etcétera).

El reconocimiento de relaciones como éstas y su representación mediante ecuaciones constituye la parte fundamental en la elaboración de modelos matemáticos de los problemas correspondientes.

En la metodología de la enseñanza de la Matemática se acostumbra a dividir el proceso de la resolución de problemas en 4 etapas.

1. Análisis del texto del problema.
2. Búsqueda de un procedimiento para dar solución al problema y elaboración del plan de solución.
3. Realización del plan de solución.

4. Análisis de la solución hallada.

En el proceso real de resolución de un problema no siempre aparecen delimitadas de forma clara estas 4 etapas, esto depende de la medida en que le es conocido al hombre el procedimiento para resolverlo. No obstante, estas 4 etapas que se destacan, sirven de base orientadora en la que se apoya el profesor para dirigir las acciones de sus alumnos en el proceso cuyo objetivo es desarrollar las habilidades de éstos en la resolución de problemas.

- **Primera etapa**

En esta etapa el profesor debe dirigir sus acciones a que los alumnos asimilen el problema, o sea, que comprendan su sentido y lo conviertan en el objetivo de su actividad.

Los alumnos han de separar las condiciones del problema: los datos y las relaciones entre ellos, así como las exigencias que éste plantea.

El análisis de las condiciones del problema y las exigencias, da la posibilidad de determinar la "relación fundamental" que nos orienta en el proceso de búsqueda de su solución y definir si los datos son suficientes para dar respuesta a la pregunta del problema; así como también si hay datos innecesarios o contradictorios.

La utilización en esta etapa de tablas, esquemas y dibujos ayuda a ilustrar el contenido del problema y la dependencia entre las magnitudes que entran en él.

- **Segunda etapa**

Lo esencial de esta etapa es la búsqueda de una estrategia para resolver el problema. Se precisa en ella si la incógnita con relación a la cual se va a plantear una ecuación es la magnitud que se quiere hallar mediante la magnitud intermedia.

Esta etapa concluye con la obtención de una ecuación que modela la situación planteada en el problema.

Durante el análisis del plan de solución con los alumnos, resulta útil escribir en forma de tabla los distintos pasos del plan de solución.

En el caso que se considere necesario se pueden escribir los pasos de éste, ya que él constituye en sí un procedimiento para la resolución del problema, que puede jugar el papel de base de orientación de la actividad de los alumnos.

- **Tercera etapa**

En esta etapa se realiza el plan de solución, se comprueba el resultado obtenido y se da la respuesta al problema.

- **Cuarta etapa**

El análisis de la solución del problema tiene como objetivo el precisar la idea fundamental del plan de solución empleado, sus momentos esenciales, la generalización del procedimiento para resolver los problemas de un tipo determinado.

Se analizan también otras vías de solución en busca de la solución más racional.

Analicemos el ejemplo siguiente:

Un terreno rectangular tiene 40 m más de largo que de ancho. Si tuviese 20 m menos de largo y 10 m más de ancho, su área sería la misma. Calcula las dimensiones del terreno.

Análisis del texto del problema

Después de leer el texto del problema se puede realizar su análisis con ayuda de las siguientes preguntas.

- ¿Qué magnitudes figuran en el problema?
- ¿Cómo están relacionados entre sí el largo, el ancho y el área de un rectángulo?
- ¿Cuántas situaciones diferentes se presentan en el problema?
- ¿Cuáles de las magnitudes que figuran en las condiciones que establece el problema y en la pregunta son desconocidas?
- ¿Qué magnitudes son las que se desean hallar?
- ¿Qué datos se ofrecen sobre las cantidades de una misma magnitud en las situaciones que presenta el problema?

- ¿Qué datos se ofrecen que relacionen las cantidades de diferentes magnitudes?

En una etapa inicial del trabajo con este tipo de problemas, si el profesor lo considera necesario puede apoyarse en una tabla donde se recoge el texto del problema.

Esta tabla se elabora con las respuestas a las preguntas anteriores.

- Las magnitudes que figuran en el problema son L, a y A.
- Están relacionadas mediante la fórmula A = L.a

Esta es la relación fundamental que permite orientarnos después en la búsqueda de la vía para dar solución al problema.

- En el problema se reflejan dos situaciones. Una situación referida a las dimensiones reales del terreno y la otra a nuevas dimensiones cuando se hacen variar el largo y el ancho.
- Las tres magnitudes son desconocidas.
- Se desean hallar L y a.

Magnitudes	Situación 1 (dimensiones reales)	Situación 2 (nuevas dimensiones)
L		
a		
A		

L	a

?	?

Los signos >, <, = en las tablas, reflejan las relaciones entre cantidades de una misma magnitud y de magnitudes diferentes.

Búsqueda de un procedimiento para dar solución al problema y elaboración del plan.

Para precisar la estrategia a seguir para dar solución al problema nos apoyamos en la relación fundamental: A = L.a, esta relación da la posibilidad de plantear una ecuación donde la incógnita puede ser una de las dimensiones que se desea hallar.

La tabla siguiente se puede elaborar apoyándonos en las anteriores.

Magnitudes	Situación 1	Situación 2
L	x	$x - 20$
a	$x - 40$	$(x - 40) + 10 = x - 30$
A	$x(x - 40)$	$(x - 20)(x - 30)$

Obtenemos la ecuación $x(x-40)=(x-20)(x-30)$

- **Realización del plan de solución**

$$x(x-40)=(x-20)(x-30)$$
$$x^2-40x=x^2-50x+600$$
$$50x-40x=600$$
$$10x=600$$
$$x=60$$

< en 20 m

L = 60 m;   a = 60 m – 40 m = 20 m.

Es ahora necesario comprobar si los valores hallados satisfacen las condiciones del problema.

- **<u>Análisis de la solución hallada</u>**

Los problemas como éste, sobre magnitudes que están relacionadas mediante una fórmula del tipo m.n = L, se pueden resolver siguiendo un proceso similar a éste.

UNIDAD 2

POTENCIACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

INTRODUCCIÓN

En la unidad anterior se ha introducido los números racionales y se han estudiado sus cuatro operaciones fundamentales. En la presente se introducirán las potencias con base racional y exponente entero cualquiera, sus propiedades y la aplicación de éstas al cálculo con potencias.

En la presente unidad se profundiza en el cálculo con números racionales, se introduce el uso de calculadoras para la determinación de cuadrados, raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas, y se continua el cálculo con números aproximados.

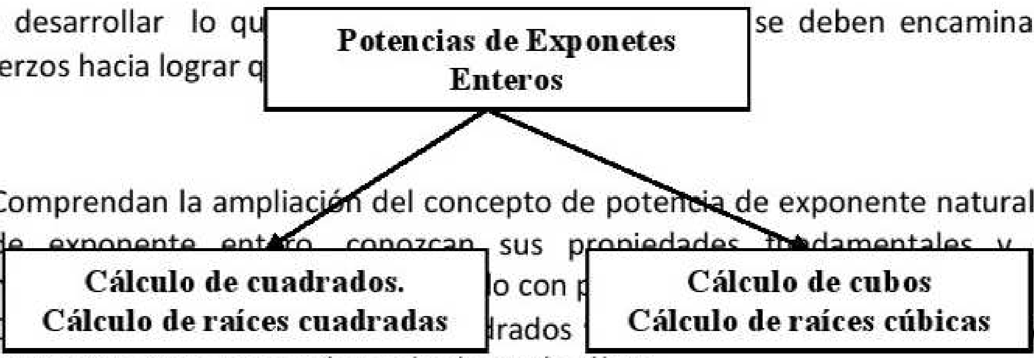
Esta unidad también se aprovecha para hacer la ampliación del dominio numérico al conjunto de los números reales, cuando se enfrenta la imposibilidad de efectuar la extracción de la raíz cuadrada de ciertos números enteros no negativos dentro del dominio de los números racionales.

COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

HILO CONDUCTOR

Lo esencial de la presente unidad es que los estudiantes desarrollen habilidades en el cálculo con potencias con base racional y exponente entero y en el cálculo del cuadrado, cubo, raíz cuadrada y raíz cúbica de números utilizando calculadora.

EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD



Para desarrollar lo qu se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr q

- Comprendan la ampliación del concepto de potencia de exponente natural a potencia de exponente entero, conozcan sus propiedades fundamentales y desarrollen h o con p
- C drados los de sus operaciones inversas: raíz cuadrada y raíz cúbica.
- Desarrollen habilidades en el cálculo de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y raíces cúbicas de números racionales utilizando calculadoras y teniendo en cuenta las reglas del cálculo aproximado.
- Comprendan que existen puntos sobre la recta numérica a los cuales no se les puede hacer corresponder ningún número racional, conozcan la existencia de números irracionales y del conjunto de los números reales.

Para el logro de las exigencias planteadas, se debe constatar que los estudiantes puedan resolver ejercicios como los que proponemos.

Calcular

a. $6^2 \times (-4)^3$
b. $(-2)^2 \times 4 + 6$
c. $(-7)^0 + 9 \times 3^{-1}$
d. $(-4)^2 \times 2^{-3} \times 7^0$

2 Calcular, aplicando las propiedades de las potencias:

a. $5^5 \times 5^3$
b. $(3^2)^3$
c. $(-2)^4 \times (-2)$
d. $a^9 \times a^{-2} \times a^4$
e. $\dfrac{a^5 b^3}{a^2 b}$
f. $(-3b)^{-2}$
g. $\left(\dfrac{2m^{-2}}{p}\right)^3$
h. $(3 \times 10^{-1})^2$
i. $\dfrac{2^2 \times 5^2}{10^3}$

3 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas? Justifica tu respuesta.

a. $6^2 \times 6^3 = 36^5$
b. $\dfrac{6^5}{6^3} = 6^2$
c. $3^{-2} = \dfrac{1}{6}$
d. $3^{-8} \times (3^2)^4 = 1$

4 Determinar el cuadrado de:

a. -12
b. $\dfrac{3}{8}$
c. 3,15
d. 40,8
e. 0,173
f. 27,16

5 Determinar la raíz cuadrada de:

a. 16

b. $\frac{4}{25}$

c. 21,07

d. 0,22

e. 2830

6 Determinar el cubo de:

a. -8

b. $\frac{1}{2}$

c. 8,05

d. 5,50

e. 0,292

f. 34,7

7 Determinar la raíz cúbica de:

a. 343

b. $\frac{64}{125}$

c. 52,31

d. 49

e. 0,002

f. 1,743

8 Sustituir las variables por los números indicados y calcular:

a. $\sqrt{3 \times A - B^2}$ **(A = 313; B = 4,1)**

b. $\sqrt{M^2 + N}$ **(M = 4,97; N = 3,93)**

Determinar el área de un cuadrado de 2.17 m de lado.
Hallar la arista de un cubo de 154 cm de volumen.

INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguiente unidades temáticas:

1. Potencias de exponente entero
2. Cálculo de cuadrados y raíces cuadradas. Uso de la calculadora.
3. Cálculo de cubos y raíces cúbicas. Uso de la calculadora.

1. POTENCIAS DE EXPONENTES ENTEROS

Se sugiere tratar esta unidad temática en 9 horas, y distinguir en ella los siguientes puntos:

- Repaso del concepto de potencia.
- Propiedades de las potencias.
- Notación científica..

1.1. Repaso del concepto de potencia

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 1 hora. Se debe lograr que los alumnos reactiven los conocimientos adquiridos sobre potencias y lo hagan extensivo al caso donde la base es un número racional cualquiera. Esto constituye la base de conocimientos que deben tener los alumnos para trabajar con potencias de números racionales con exponentes enteros.

Este repaso debe ser en forma activa, mediante la resolución de ejercicios por parte de los alumnos. En él debe aclararse que $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores } a}$ es una operación: la potenciación.

Es importante que se realicen ejercicios sencillos como el siguiente, donde se aplica el concepto de potencia.

Calcular:

a. 2^4
b. $(-3)^3$
c. $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

Puede proponerse a los alumnos el siguiente ejercicio para reafirmar lo anterior.
Calcular:

a. $(-3)^2$
b. 2^4
c. $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

<u>Resolución:</u>

a. $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
b. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

Observar que en cada caso se toma la base como factor tantas veces como indica el exponente

Es importante que los alumnos sepan determinar el signo de una potencia en dependencia del signo de la base. Se puede para ello analizar el siguiente ejemplo

Calcular:

a. 5^4
b. $(-1)^6$
c. $(-2)^5$

Resolución:

a. $5^4 = 625$
b. $(-1)^6 = 1$
c. $(-2)^5 = -32$

Nota: cuando la base es negativa, debe siempre escribirse entre paréntesis para evitar errores.

Por ejemplo: $(-5)^2 \neq -5^2$ pues $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ y $-5^2 = -(5\cdot 5) = -25$.

Aunque ya los alumnos conocen el orden en que se realizan las operaciones, resulta conveniente reactivar este aspecto mediante ejercicios sobre operaciones combinadas en las que se incluya la potenciación, tales como.

Calcular:

a. 2 - 12 $\times$ (-2)
b. 5$\times$ (-3) + 4

Debe quedar bien claro que en ejercicios como estos, primero se calculan las potencias, después las multiplicaciones y/o divisiones (según el orden en que estén) y por último las adiciones y/o sustracciones.
Recomendamos presentar los siguientes ejemplos:

Calcular: $4\times(-3)^2 + 14$.

Resolución

$$\begin{aligned} 4\times(-3)^2 + 14 &= 4\times 9 + 14 \\ &= 36 + 14 \end{aligned}$$

$= 50$

Aquí se calcula primero la potencia, después la multiplicación y por último la adición.

Realizar los siguientes ejercicios:

1. Indicar, sin calcular en cada caso, cuáles de las siguientes potencias son positivas y cuáles son negativas:
   a. 5^6
   b. $(-4)^5$
   c. $(-3)^8$
   d. 0.2^7
   e. $(-1)^{10}$
   f. $\left(\frac{2}{9}\right)^9$
   g. $-(2,5)^7$
   h. $(-0,1)^6$
   i. $(-3)^8$
   j. $\left(\frac{2}{9}\right)^9$
   k. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

2. Calcular
   a. $2 \cdot 5^2$
   b. $(2 \cdot 5)^2$
   c. $-3 \cdot 4^2 + 8$
   d. $\frac{12^2}{3} - 20$
   e. $2^3 \times (1,5)^2$
   f. $75 + 3 \cdot (-5)^3$
   g. $-6^2 + 7 \cdot (-2)$
   h. $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4$
   i. $\frac{8^2 - 28 \cdot (-2)}{(-2)^3 \cdot 5}$

1.2. Propiedades de las potencias

Para el tratamiento de este punto se dispone de 7 horas. Lo fundamental es que los alumnos comprendan la ampliación del concepto de potencia incluyendo las de exponente entero cualquiera, que aprendan las propiedades de las potencias y las apliquen al cálculo con potencias de exponentes entero.

Los alumnos conocen ya el concepto de potencia con exponente natural (diferente de cero) y saben cómo calcular estas potencias. Es precisamente dentro de este punto que se hace la ampliación del concepto de potencia, al introducir los exponentes cero y entero negativo, así como su significado. Precisamente, esta ampliación se hace de una forma natural apoyándose en las propiedades de las potencias, en particular, estos exponentes surgen al tratar el cociente de potencias de igual base.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, recomendamos tratar las propiedades de las potencias en el siguiente orden:

- Producto de potencias de igual base

- Potencia de una potencia
- Cociente de potencias de igual base
- Exponente cero
- Exponente negativo: $a^{-k} = \dfrac{1}{a^{k}} \quad (a \in \angle;\ a \neq 0;\ \mathrm{k} \in \subseteq)$
- Potencia de un producto
- Potencia de un cociente

Puede seguirse la vía que parte de enunciar la propiedad y después se ilustra mediante ejemplos donde se manifieste la misma.

También puede utilizarse el proceso inverso, o sea, partir de ejemplos particulares para luego llegar a la generalización

Primero se tratan el producto de potencias de igual base y la potencia de una potencia. En ambos casos lo esencial es que los alumnos comprendan y fijen las propiedades antes mencionadas.

Para la ejercitación de estas propiedades recomendamos los siguientes ejercicios que pueden ser elaborados por el profesor.

Calcular, aplicando las propiedades de las potencias, según corresponda en cada caso.

a. $4^2 \times 4^3$
b. $m^7 \times m^3$
c. $(-2)^4 \times (-2)^2$
d. $b^3 \times b^4 \times b^2$
e. $(-10)^2 \times (-10)$
f. $(3^3)^2$
g. $(2^2)^5$
h. $(x^5)^6$
i. $[(-a)^4]^5$
j. $(a^2)^3 \cdot a^4$
k. $2^5 \div 2^2$
l. $9^6 \div 9^5$
m. $x^{10} \div x^3$
n. $(-3)^4 \div (-3)^4$
o. $4^5 \div 4^7$
p. $m^4 \div m^5$
q. $\dfrac{x^4 y^3}{x^3 y}$
r. $(-b^2)^5 \times b^{10}$
s. $\dfrac{2^{-4} \times 2^5}{2^3}$
t. $(2m)^4$
u. $\left(\dfrac{3}{p}\right)^2$
v. $(8 \times 10^{-1})^2$
w. $\left(\dfrac{x^{-4} y}{z}\right)^3$
x. $(-7a)^{-2}$
y. $10^2 \times 5^{-2} + 9^0$
z. $5x^{-2} y^4 z^3 \times \dfrac{x^2}{10 y^2 z^4}$.

A continuación se trata el cociente de potencias de igual base. El tratamiento de esta propiedad es importante, pues a partir de ella se hace la ampliación del concepto de potencia al surgir los exponentes cero y negativo.

Según expresa la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, se deben considerar los casos m > n; m =n y m<n .

Primero se ilustra la propiedad para el caso m >n; donde se obtiene una potencia a^{m-n} con m – n > 0, que está dentro de la definición de potencia, ya conocida por los alumnos.

El siguiente ejemplo resulta muy apropiado para motivar la ampliación del concepto de potencia, ya que en los incisos c) y d), al aplicar la propiedad, se obtienen el exponente cero y un exponente negativo, extendiéndose así la definición de potencia para cualquier exponente entero.

Calcular:

a. $\frac{(-2)^6}{(-2)^2}$

b. $\frac{3^4}{3^3}$

c. $\frac{6^4}{6^4}$

d. $\frac{7^3}{7^5}$

<u>Resolución</u>:

a. $\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = (-2)^{6-2} = (-2)^4 = 16$

b. $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

Observar que en cada caso, al calcular el cociente, se mantiene la base y se restan los exponentes

c. $\frac{6^4}{6^4} = 6^{4-4} = 6^0 = 1$ Pero por otra parte simplificando tenemos:

$\frac{6^4}{6^4} = 1$

Entonces debe tenerse que: $6^0 = 1$.

d. $\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = ?$ Pero por otra parte simplificando tenemos que

$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7^3}{7^3 \cdot 7^2} = \frac{1}{7^2}$.

Entonces debe tenerse que $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$.

Sugerimos tratar a continuación el siguiente ejemplo.

a. 8^0

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$

c. 3^{-3}

d. $(-2)^{-4}$

<u>Resolución:</u>

a. $8^0 = 1$

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

c. $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

d. $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

Ya una vez ampliado el concepto de potencia, puede pasar a tratarse la potencia de un producto y la potencia de un cociente: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Proponemos tratar el siguiente ejemplo para fijar estas dos propiedades.

Calcular:

a. $(3m)^2$

b. $\left(\frac{2}{b}\right)^3$

c. $\left(\frac{a^{-2}b}{c}\right)^4$

<u>Resolución:</u>

a. $(3m)^2 = 3^2 \cdot m^2 = 9m^2$

b. $\left(\frac{2}{b}\right)^3 = \frac{2^3}{b^3} = \frac{8}{b^3}$

c. $\left(\frac{a^{-2}b}{c}\right)^4 = \frac{(a^{-2}b)^4}{c^4} = \frac{a^{-8}b^4}{c^4} = \frac{b^4}{a^8 \cdot c^4}$

Queremos llamar la atención que aunque no se tratan de una forma explícita como tales, el producto y el cociente de potencias de igual exponente, el profesor puede informar que la aplicación en sentido inverso de las dos últimas propiedades estudiadas, permite calcular un producto (o cociente) de potencias de igual exponente.

Esto último puede ilustrarse con algunos ejemplos, tales como:

a. $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$

b. $\dfrac{12^3}{6^3} = \left(\dfrac{12}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$

De las 7 clases que se dedican a este punto, deben dejarse al menos 3 clases para una ejercitación variada, recomendamos el sistema de ejercicios siguiente, los ejercicios 1 al 3 (que constituyen bloques) y además los ejercicios 4 y 5, o también, si lo considera necesario, el profesor puede crear otros ejercicios.

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas? Justificar su respuesta.

a. $7^2 - 7^3 = 49^6$

b. $\dfrac{6^5}{6^2} = 6^3$

c. $(2^5)^2 = 2^{10}$

d. $(-6)^0 = 0$

e. $(4^{-1}) = -4$

f. $6^2 \times 2^2 = 12^4$

g. $2^{-2} \times 2 = \dfrac{1}{2}$

h. $4^{-6} \times (4^2)^3 = 1$

i. $\dfrac{5^{-3} \times 5^4}{5^2} = 5$

j. $\dfrac{6^{-6} \times 6^8}{3^2} = 4$

2. ¿Para qué valores de x se satisfacen las siguientes ecuaciones?

a. $2^x = (2^2)^3$

b. $2^4 \times 2^x = 2^{-2}$

c. $(-5)^x \div (-5)^3 (-5)^{-1}$

d. $(3^2)^x = \dfrac{1}{3^2}$

Creemos que en los primeros ejercicios es conveniente que los alumnos expresen oralmente lo que hacen para asegurar que logren operar en el plano conceptual y no que repitan formalmente operaciones que no llegan a comprender.

Después de proceder en esta forma con unos cuantos ejercicios, se pasa a la automatización; se debe lograr que los alumnos realicen los cálculos sencillos en forma directa sin escribir las etapas intermedias, es decir, que calculen

$$x^7 \cdot x^3 = x^{10} \quad \text{y no} \quad x^7 \cdot x^3 = x^{7+3} = x^{10}.$$

Al resolver un ejercicio de cálculo con potencias, se debe expresar el resultado en la forma más simple posible, para lo cual tendremos en cuenta lo siguiente:

- Si el resultado es una potencia de exponente negativo, ésta debe transformarse de modo que el exponente sea positivo.
- Si el resultado es una potencia cuya base y exponente son números, debe calcularse esta potencia.

Por ejemplo, si calculamos:

a. $3^{-9} \cdot 3^{5}$

b. $\dfrac{2^{10}x^{3}}{2^{7} \cdot x^{5}}$

el resultado en cada caso es (en su forma más simple):

a. $3^{-9} \cdot 3^{5} = 3^{-4} = \dfrac{1}{3^{4}} = \dfrac{1}{81}$

b. $\dfrac{2^{10}x^{3}}{2^{7}x^{5}} = 2^{3}x^{-2} = \dfrac{8}{x^{2}}$

Observación: En la ejercitación, deben evitarse ejercicios que conduzcan a resultados numéricos que sean potencias muy "grandes" en las que el cálculo resulta engorroso (por ejemplo 7^{8}.

Es importante que una vez concluido este punto esencial, los alumnos hayan desarrollado habilidades en el cálculo con potencias de exponente entero y que hayan adquirido una sólida base de conocimientos que les hará falta posteriormente en otras unidades, tanto del año actual como en los años posteriores.

1.3. Notación científica

Para el tratamiento de este punto se dispone de 1 hora. Se debe lograr que los alumnos aprendan a escribir en notación científica números escritos en notación decimal y viceversa, y que comprendan además las ventajas de la notación científica para representar números muy grandes o muy pequeños.

Puesto que sólo se dispone de una clase para desarrollar este contenido, no se profundizará sobre las aplicaciones de la notación científica en otros campos, sino que el trabajo se limitará a que los alumnos conozcan el procedimiento para representar números en notación científica, así como el procedimiento inverso.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto puede informarse a los alumnos, a manera de motivación, que existe una forma abreviada para escribir cantidades muy grandes o muy pequeñas, que se llama notación científica, la cual es muy utilizada en diversas ramas de la ciencia y la técnica; por ejemplo en la Física, en la Astronomía, etc.

Pueden citarse ejemplos que ilustren lo anterior, tales como:

- El diámetro de un glóbulo rojo (0,00008 cm) se expresa en notación científica como 8×10^{-5} cm.
- La distancia de la Tierra al Sol (149 . 000. 000 km.) se expresa en notación científica como $1{,}49\times10^{8}$ km.

A continuación pueden mostrarse en dos columnas, donde aparezcan números expresados en notación decimal y en notación científica, insistiendo a los alumnos que un número está escrito en notación científica cuando se expresa como el producto de un número, comprendido entre 1 y 10, por una potencia de 10.

Recomendamos presentar en notación científica los siguientes números:

a. 234.000
b. 0,0000026
c. 0,001

Resolución:

a. $234\ 000 = 2{,}34\times10^{5}$

5 lugares a
la izquierda

b. $0{,}000\ 00\ 2\ 6 = 2{,}6\times10^{-6}$

6 lugares a
la derecha

c. $0{,}\ 001 = 1\times10^{-3}$

3 lugares a la
derecha

A continuación sugerimos realizar los siguientes ejercicios

Escribir en notación científica:

a. 35 400
b. 0,0005
c. 9 300 000
d. 0,238
e. 8 000
f. 0,0035
g. 534
h. 0,000 008

i. 287 000 000
j. 0,009
k. 456 370
l. 0,000785

2. Escribir en notación decimal:

a. 5×10^{3}
b. 4×10^{-3}
c. $2{,}73\times10^{4}$
d. $4{,}6\times10^{-2}$
e. $3{,}5\times10^{2}$
f. $3{,}43\times10^{-4}$
g. $6{,}42\times10^{7}$
h. $8{,}3\times10^{-5}$
i. $4{,}1\times10^{8}$
j. 7×10^{-7}
k. $2{,}6\times10^{6}$
l. 1×10^{-9}

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- Ejercicios para calcular potencias con exponente entero (como el ejercicio 1).
- Ejercicios sobre operaciones combinadas que incluyan la potenciación con exponente entero (como el ejercicio 2).
- Ejercicios de cálculo donde se apliquen las propiedades de las potencias (como los ejercicios 3 y 4).
- Ejercicios para escribir en notación científica números expresados en notación decimal y viceversa (como los ejercicios 5 y 6).

2. CÁLCULO DE CUADRADOS Y RAÍCES CUADRADAS. UTILIZACIÓN DE CALCULADORA.

Se sugiere tratar esta unidad temática en 6 horas, y distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Operación de elevar al cuadrado. Cálculo de cuadrados utilizando calculadora.
- Extracción de raíz cuadrada. Cálculo de raíces cuadradas utilizando calculadora.
- Raíces cuadradas no racionales. Números irracionales y números reales.

2.1. Operación de elevar al cuadrado. Cálculo de cuadrados utilizando la calculadora

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Se debe lograr en él que los alumnos desarrollen habilidades en el cálculo de cuadrados de números racionales, ya sea por procedimientos de cálculo mental o utilizando la calculadora.

En este punto es importante que los alumnos reactiven sus conocimientos sobre redondeo y sobre el concepto “cifras significativas”.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto esencial puede comenzarse por recordar a los alumnos que la segunda potencia de un número se denomina cuadrado y la operación de cálculo, elevación al cuadrado.

A manera de motivación puede proponerse un ejercicio como el siguiente:

- El cuadrado tiene 4,0 cm de lado. Determina su área.

Antes de presentar a los alumnos la calculadora para el cálculo de cuadrados y su utilización, puede proponerse que calculen los cuadrados de algunos números, por ejemplo: 7,6; 27; 4,32 u otros similares donde los cálculos resulten engorrosos, e informar que en la práctica se hace necesario calcular con frecuencia cuadrados de números dados y que resultaría útil el empleo de un medio auxiliar que lo constituye la calculadora.

Seguidamente, puede pasarse a explicar el uso de la calculadora, destacando que la mayoría de los cuadrados que pueden leerse en la calculadora son valores aproximados.

Desde el punto de vista metodológico, de acuerdo al grado de dificultad, recomendamos tratar en este orden los casos siguientes:

1. Los cuadrados de números comprendidos entre 1 y 10 que tengan a lo sumo tres cifras significativas (en estos casos el cuadrado se obtiene directamente en la calculadora).
   Por ejemplo: $(3{,}86)^2 \approx 14{,}90$

2. Los cuadrados de números comprendidos entre 1 y 10 que tengan más de tres cifras significativas (en estos casos hay que redondear previamente el número dado a tres cifras).
   Por ejemplo: $(8{,}367)^2 \approx (8{,}37)^2 \approx 70{,}1$ (en calculadora se obtiene que $(8{,}37)^2 \approx$ 70,06 pero la respuesta se da en este caso con tres cifras).

3. Los cuadrados de números mayores que 10 o comprendidos entre 0 y 1 (en algunos casos es conveniente usar la notación científica). Por ejemplo: $(0{,}124)^2 = 1{,}54 \times 10^{-2}$.

Antes de tratar el caso 2, pueden proponerse algunos ejercicios de redondeo a manera de repaso o reactivación, como por ejemplo:

Redondear a las centésimas:

a. 3,462
b. 8,246
c. 9,135

Redondear a las décimas:

a. 18,74

b. 23,25
c. 77,48

Para la ejercitación sugerimos los ejercicios que aparecen en el texto de ejercicios que pueden ser enriquecidos por el profesor.

2.2. Extracción de la raíz cuadrada. Cálculo de raíces cuadradas utilizando la calculadora.

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Lo fundamental a lograr en este punto es que los alumnos desarrollen habilidades en el cálculo de raíces cuadradas de números racionales no negativos, ya sea por procedimientos de cálculo mental o utilizando la calculadora.

Es necesario hacer notar que dado un número positivo a existen dos números x, uno positivo y otro negativo, tales que $x^2 = a$. Así, si $a = 4$, $x = 2$ **o** $x = -2$ pues $2^2 = 4$ $y\,(-2)^2 = 4$.

Para el tratamiento metodológico de este punto se puede proponer a los alumnos un ejercicio como el siguiente:

Determinar los números que elevados al cuadrado son iguales a:

a. 16
b. 0,81
c. $\frac{1}{4}$.

<u>Resolución:</u>

a. 4 y -4 porque $4^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.
b. 0,9 y $-0,9$ porque $(0{,}9)^2 = 0{,}81$ y $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$.
c. $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

El número positivo x tal que $x^2 = a$ se llama la ***raíz cuadrada de a*** y se lo nota $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{4} = 2, \sqrt{16} = 4, \sqrt{0{,}09} = 0{,}3.$$

La raíz cuadrada de un número racional no negativo *a* es el número positivo cuyo cuadrado es *a*.

En los alumnos debe quedar claro que ningún número racional negativo tiene raíz cuadrada, pues todo número elevado al cuadrado es positivo.

Debe aclararse que en la igualdad $\sqrt{4} = 2$; 4 se denomina cantidad subradical o radicando y 2 es la raíz cuadrada de 4.

Se debe destacar que un número positivo a no tiene dos raíces sino que existen dos números $\sqrt{a}$ **y** $-\sqrt{a}$ cuyos cuadrados son iguales a a. $\sqrt{4}$ no es ± 2 sino 2.

Es importante el cálculo de raíces cuadradas de potencias de 10; este contenido puede tratarse teniendo en cuenta los casos siguientes:

1. Si el exponente es par, la raíz cuadrada es una potencia de 10.
2. Si el exponente es impar, la raíz cuadrada no es una potencia de 10.

EJEMPLOS

Calcular, en cada caso, la raíz cuadrada de los siguientes números

a. 4
b. 100
c. 225
d. $\frac{1}{9}$
e. 1000
f. 10 000

<u>Resolución:</u>

a. $\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$
b. $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$
c. $\sqrt{225} = 15$ porque $15^2 = 225$
d. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
e. $\sqrt{1000}$ No existe ningún número natural, ni una fracción evidente cuyo cuadrado sea 1000
f. $\sqrt{10000} = 100$ porque $100^2 = 10.000$

Es recomendable que en los ejercicios que lo requieran se haga un estimado o cálculo aproximado antes de resolverlo para tener una idea del rango en que estará el resultado.

Antes de presentar el uso de la calculadora para el cálculo de raíces cuadradas, se deben proponer algunos ejercicios de cálculo como los siguientes:

- **a.** $\sqrt{36}$
- **b.** $\sqrt{100}$
- **c.** $\sqrt{0{,}81}$
- **d.** $\sqrt{\frac{25}{49}}$
- **e.** $\sqrt{2{,}25}$
- **f.** $\sqrt{18{,}66}$

En los incisos a). al e). se puede determinar sin mucha dificultad la raíz cuadrada; sin embargo en el inciso f) y en la mayoría de los casos se presentan radicandos que no son cuadrados perfectos, en estos casos se puede utilizar la calculadora para determinar un valor aproximado de la raíz cuadrada de estos números, ya que como planteamos anteriormente, la extracción de la raíz cuadrada es la operación inversa de la elevación al cuadrado.

Es necesario destacar que si el radicando es un número aproximado, la raíz cuadrada se acostumbra a dar con la misma cantidad de cifras que tenga el radicando.

EJEMPLO

$\sqrt{3{,}28} = 1{,}81$. En la calculadora se obtiene $\sqrt{3{,}28} = 1{,}811077$.

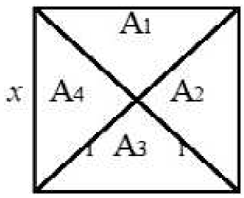
Para la ejercitación sugerimos trabajar con los ejercicios correspondientes del texto u otros creados por el profesor.

2. 3 Raíces cuadradas no racionales. Números irracionales y números reales.

Para el tratamiento de este contenido se dispone de 1 hora. Lo fundamental en el tratamiento de este contenido es que el alumno conozca que existen números no racionales, denominados irracionales, y que para operar con ellos se usan aproximaciones decimales correspondientes a números racionales. Deben saber además que el conjunto numérico unión de los racionales e irracionales se denomina conjunto de los números reales y que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y viceversa.

Para el tratamiento metodológico se puede partir de que existen números racionales no negativos cuya raíz cuadrada no es un número racional, es decir, no es una expresión decimal finita ni infinita periódica y que los valores encontrados en la calculadora sólo son aproximaciones racionales de estas raíces (ilustrar esto con $\sqrt{2}$ por ejemplo), por lo que se hace necesario ampliar el dominio de los números racionales de modo que el nuevo dominio incluya las expresiones decimales infinitas no periódicas. A continuación se definen los números irracionales y se introduce el conjunto de los números reales.

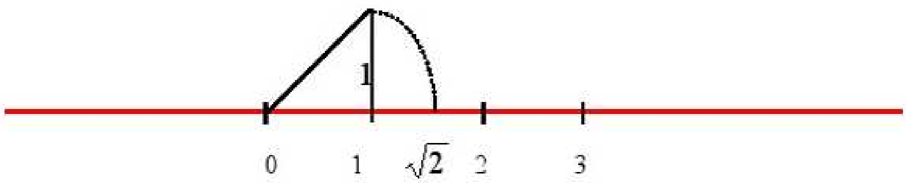
Dado el cuadrado formado por cuatro triángulos isósceles rectángulos, cuyos catetos tienen longitud 1



$$A_i = \frac{1\times1}{2} = 0{,}5u^2$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$A_T = 0{,}5u^2 + 0{,}5u^2 + 0{,}5u^2 + 0{,}5u^2$$
$$A_T = 2u^2$$

Debe cumplirse entonces que $x^2 = 2$, lo que sugiere que existe un número positivo cuyo cuadrado es 2. A este número lo notaremos $\sqrt{2}$. Es necesario explicar a los alumnos –aunque por ahora no es posible demostrarlo- que este número no es ninguno de los números racionales y que existen muchos otros números que no son racionales. A estos números los llamaremos ***números irracionales***.

En el ejemplo se concluye que el lado de dicho cuadrado tiene longitud $\sqrt{2}$, luego existen segmentos cuya longitud viene dado por un número irracional y a continuación se transporta esta longitud sobre la recta numérica, quedando determinado en ésta un punto que corresponde a un número irracional. Por último se informa acerca de la correspondencia biunívoca de los números reales con los puntos de la recta numérica.



Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Ejercicios de cálculo de cuadrados.
Ejercicios de determinación de cuadrados mediante la calculadora.
Ejercicios de cálculo de raíces cuadradas:
Ejercicios de aplicación del cálculo de cuadrados y raíces cuadradas:

3. CÁLCULO DE CUBOS Y RAÍCES CÚBICAS. UTILIZACIÓN DE CALCULADORA.

Se sugiere tratar esta unidad temática en 3 horas, y distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Operación de elevar al cubo. Cálculo de cubos utilizando la calculadora.
- Extracción de la raíz cúbica. Cálculo de raíces cúbicas utilizando la calculadora.

3.1. Operación de elevar al cubo. Cálculo de cubos utilizando la calculadora.

Para el tratamiento de este punto se dispone de 1 hora. Se debe lograr que los alumnos sean capaces de calcular el cubo de un número racional, ya sea por procedimientos de cálculo mental o mediante el empleo de la calculadora. Debido a que los alumnos ya han calculado cubos y conocen esta operación, sólo se dedicará una clase a este contenido.

El desarrollo de habilidades en el cálculo de cubos se continuará al trabajar la unidad de potenciación en noveno año.

En los primeros minutos de la clase, el profesor puede, de forma resumida, recordar en qué consiste la operación de elevar al cubo. La motivación puede hacerse con ejercicios como los siguientes:

1. Un cubo tiene 3,0 cm de arista. Determinar su volumen.

2. Calcular:

   a. 1^3
   b. 2^3
   c. 4^3
   d. 5^3

Al analizar el ejercicio 1 se debe hacer notar la relación entre la operación realizada para calcular el volumen y el cubo del número y concluir que la tercera potencia de un número se llama cubo del número, debido a esta relación.

Acto seguido, se destaca la expresión "elevación al cubo", con la que se denomina la operación que permite mostrar la idea de los cubos perfectos".

Para que los alumnos comprendan que el cubo de un número es único, puede partirse de un análisis de los casos presentados hasta aquí o, si se prefiere, orientar el cálculo de cubos de modo semejante al ejemplo siguiente.

Calcular los cubos siguientes:

a. 3^3
b. $(-2)^3$
c. $(0,5)^3$
d. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

Resolución:

a. $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

b. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

c. $(0,5)^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$

De este ejemplo debe concluirse también acerca del signo del cubo de un número racional, el cual depende del signo del número.

En cuanto al uso de la calculadora para el cálculo de cubos, dado que el procedimiento es similar al empleado para calcular cuadrados, basta recordar este último mediante algunos ejercicios y después presentar un primer ejemplo para calcular cubos.

Al escoger los casos a tratar en la clase deben tenerse en cuenta las siguientes posibilidades:

- Números mayores que 1 y menores que 10 (el cubo se obtiene directamente en la calculadora).
- Números mayores que 10 o comprendidos entre 0 y 1 (en estos dos casos es conveniente emplear la notación científica).
- Números con más de tres cifras significativas (deben utilizarse el redondeo y las reglas para el cálculo aproximado).

Recomendamos los ejemplos siguientes:

1. Calcular los cubos de los números siguientes:

a. 7
b. –6
c. 10
d. 30
e. –1
f. 0,4
g. 9
h. $\frac{1}{3}$
i. $-\frac{1}{4}$
j. 20
k. –8
l. $\frac{2}{5}$

2. Copiar la siguiente tabla y completarla.

x	1	$-0,5$	$-\frac{2}{3}$	40	-9	-3
x^3						

3. Calcular, utilizando la calculadora los cubos de los números siguientes:

a. 3,45
b. 6,04

c. 9,27
d. 1,6
e. 7,2
f. 4,79
g. 8,234
h. 14,2
i. 20,3
j. 65,70
k. 231
l. 18,41
m. 38,04
n. 50,9
o. 0,15
p. 0,73
q. 0,025
r. 0,643

4. Calcular el volumen de un cubo, cuya arista a tiene la longitud que se indica en cada caso.
   a. $a = 2{,}1$ cm
   b. $a = 3{,}8$ cm
   c. $a = 0{,}40$ m
   d. $a = 19{,}6$ mm
   e. $a = 6{,}24$ m
   f. $a = 0{,}35$ cm

3.2. Extracción de la raíz cúbica. Cálculo de raíces cúbicas utilizando la calculadora

Para el tratamiento de este punto se dispone de 2 horas. Lo fundamental es que los alumnos sean capaces de calcular la raíz cúbica de un número racional, mediante el cálculo mental o con el uso de la calculadora

Como introducción al tema se puede proponer algunos ejercicios como los siguientes:

1. Determina el volumen de un cubo de 2,0 cm de arista.
2. Calcula la longitud de la arista de un cubo de 27 dm^3 de volumen.

Debe destacarse, al analizar el ejercicio 2, que se trata de hallar un número que "elevado al cubo" permite obtener un resultado conocido. Dicho número es la "raíz cúbica" de este resultado. En el caso propuesto, 3 es la raíz cúbica de 27.

Finalmente, se debe destacar que la operación mediante la cual se determina la raíz cúbica, se llama "extracción de la raíz cúbica".

Luego pueden mostrarse ejemplos similares al siguiente:

EJEMPLO

Determinar la raíz cúbica de los siguientes números
   a. 8
   b. -27

Resolución:
   a. La raíz cúbica de 8 es 2, porque $2^3 = 8$
   b. La raíz cúbica de -27 es -3, porque $(-3)^3 = -27$

Debe comentarse el hecho de que cada número racional tiene una sola raíz cúbica y que dado un número a, existe un único número x tal que $x^3 = a$. Debe tenerse en cuenta el análisis del signo; el siguiente ejemplo o ejercicios similares a él son adecuados para el tratamiento de este aspecto.

EJEMPLO

Calcular:

a. $\sqrt[3]{125}$

b. $\sqrt[3]{-8}$

c. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$

<u>Resolución:</u>

a. $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$

b. $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

c. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$ porque $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

Al igual que en el caso de las raíces cuadradas, existen raíces cúbicas que no son números racionales. Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ son números irracionales.

La existencia de raíces cúbicas no racionales se comentará de manera muy sencilla, dado que ya el alumno conoce lo que sucede con las raíces cuadradas.

El empleo de la calculadora para el cálculo de las raíces cúbicas puede realizarse de modo análogo al caso de las raíces cuadradas. Debe tenerse en cuenta cada uno de los casos posibles, tal y como se hizo entonces. Aquí también hay que tener presente las reglas del cálculo aproximado al dar la respuesta en los casos que lo requieran.

Para la fijación pueden emplearse los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS

1. Calcular utilizando la calculadora:

a. $\sqrt[3]{72}$

b. $\sqrt[3]{841{,}2}$

<u>Resolución:</u>

a. $\sqrt[3]{72} = 4{,}16016758 \approx 4{,}16$

b. $\sqrt[3]{841{,}2} = 9{,}4398786 \approx 9{,}44$

2. Calcular utilizando la calculadora:

a. $\sqrt[3]{9664}$

b. $\sqrt[3]{0{,}35}$.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- Ejercicios de cálculo de cubos.
- Ejercicios de determinación de la raíz cúbica mediante la calculadora.
- Ejercicios de aplicación del cálculo de cubos y raíces cúbicas.

UNIDAD 2

TRABAJO CON VARIABLES

INTRODUCCIÓN

Esta unidad ha sido concebida como una continuación del trabajo con variables estudiado en el octavo año, donde se inició el tratamiento sistemático del tecnicismo algebraico.

En este año se retoman como base los procedimientos algebraicos aprendidos en el curso anterior y se estudian las cuatro operaciones básicas con polinomios, para luego aplicar los procedimientos estudiados a la resolución de ecuaciones y al despeje en fórmulas, y se hace hincapié en la resolución de problemas que conducen al planteo de una ecuación.

Los conceptos: "término", "expresión algebraica" y "polinomio", constituyen la base teórica sobre la cual se construye esta unidad.

Se comienza retomando el concepto expresión algebraica y se hace énfasis en el procedimiento de cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas (este procedimiento se mantiene a lo largo de toda la unidad). En esta primera parte se incluyen también los conceptos "grado de un monomio" y "grado de un polinomio"; a continuación se repasan las operaciones con términos estudiadas en octavo grado, que sirven de base para las que se introducen en la presente unidad de noveno grado.

De los procedimientos nuevos lo primero que se trata es la suma y la resta de polinomios, conjuntamente con lo cual se estudian las reglas para la eliminación e introducción de paréntesis que estén precedidos por los signos "+" o "-" y esto se extiende a la simplificación de expresiones que contengan paréntesis superpuestos.

Luego se tratan (en este orden) la multiplicación y la división de polinomios.

El algoritmo para la multiplicación se introduce tomando como base la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la multiplicación de un monomio por un polinomio.

Con respecto al algoritmo para la división, aparece enunciado y ejemplificado en el texto de una forma asequible y los ejercicios correspondientes se restringen al caso en que el divisor es un binomio.

También se presta particular atención en el texto a la resolución de ejercicios donde aparezcan de forma combinadas las cuatro operaciones básicas con términos y polinomios, es decir, donde se integren los procedimientos algebraicos estudiados.

Análogamente a como se hizo en octavo año, a continuación se trata la resolución de ecuaciones en las que hay que aplicar los procedimientos estudiados en la unidad, lo cual adquiere un mayor peso en este año con relación al año anterior. Además se trabaja el despeje en fórmulas, lo cual es un aspecto importante no sólo dentro de la matemática, sino que también este contenido sirve de articulación con otras asignaturas como la física.

En esta unidad adquiere un gran peso el tratamiento de problemas que conducen al planteo de ecuaciones lineales (o de ecuaciones que se pueden transformar en ecuaciones lineales).

En el trabajo con los problemas, resulta fundamental que los alumnos se percaten de la importancia de los conocimientos matemáticos para modelar situaciones concretas, ya sean intramatemáticas o aquellas relacionadas con otros campos del saber y con la vida práctica, y que desarrollen habilidades en su aplicación.

Los ejercicios que aparecen en el cuaderno de trabajo, contribuyen a consolidar y sistematizar los conocimientos adquiridos a lo largo de toda la unidad.

En resumen, podemos plantear que la unidad "**Trabajo con variables**" constituye la base para las restantes unidades que se desarrollarán en este mismo grado y prepara las condiciones para su continuación en grados posteriores.

Entendemos que el conocer las reglas básicas y dominar los procedimientos fundamentales para operar con variables, es decir, dominar el tecnicismo algebraico, contribuye en gran medida a la formación y al desarrollo de habilidades y capacidades en los alumnos.

ESTRUCTURA DE LA UNIDAD

Operaciones con polinomios

Resolución de ecuaciones.

Despejo de fórmulas.

Resolución de problemas

HILO CONDUCTOR

Lo fundamental en esta unidad es que los alumnos desarrollen habilidades en las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios y puedan aplicar estas habilidades a la resolución de ecuaciones y de problemas.

EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Desarrollen habilidades en el cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas y sepan determinar para qué valores está definida una expresión algebraica.

- Dominen y desarrollen habilidades en la suma y resta de polinomios.
- Dominen los algoritmos para la multiplicación y la división de polinomios (el divisor debe ser un binomio) y desarrollen habilidades en el cálculo de estas operaciones.
- Desarrollen habilidades en la eliminación de paréntesis superpuestos y en la simplificación de expresiones donde aparezcan operaciones combinadas con términos y polinomios.
- Sean capaces de aplicar los procedimientos algebraicos estudiados a la resolución de ecuaciones y al despeje en fórmulas.
- Puedan resolver problemas matemáticos y de la vida práctica que conduzcan al planteo y resolución de una ecuación.

Para el logro de las exigencias planteadas anteriormente, el nivel mínimo que deben alcanzar todos los alumnos se caracteriza mediante ejercicios como los que aparecen a continuación:

1 Dadas las expresiones algebraicas siguientes:

$$\frac{0{,}5a^2 - b}{a + 4} \quad (1) \qquad\qquad \frac{8x^2 + xy}{2y^3} \quad (2)$$

a. Determinar, en cada caso, para qué números reales está definida la expresión.

b. Calcular su valor numérico para los valores que se indican: $a = -6$; $b = 10$; $x = 2$; $y = -3$.

2 Sumar los polinomios siguientes:

a. $2a - 5b$; $-a + 4b$

b. $5x^2y + 3xy^2$; $2x^2 - xy^2 - 3x^2y$

c. $-m^2 + 2m - 3$; $2m^2 - 7m + 14$

3 Restar:

a. $cd + d^2$ de $4cd - 7d^2$

b. $-p + 3q$ de $2p - 8q$

c. $x^3 + 6x^2y - 3xy^2$ de $2x^3 - 2x^2y$

4 Efectuar:

a. $3b^2 + bc^2 + (7b^2 - 4bc^2)$

b. $5m - n^2 - (2m + 3 - 4n^2)$
c. $(7a^2 + 2ab) + (-4a^2 + ab - 11) - (4ab - 2a^2)$.

5 Calcular

a. $(3x - 4)(x + 2)$
b. $(4a^2 + b)(a^2 - 3b)$
c. $(2m - 5)(m^2 + 4m - 1)$
d. $(x^2 + 2x - 15) \div (x - 3)$
e. $(3c^2 - 11c + 10) \div (3c - 5)$
f. $(2m^3 + 3m^2 - 6) \div (m + 2)$

6 Simplificar

a. $7a^2 - [-3ab - (2a^2 - ab) + 4]$
b. $3p^2q - \{5pq + [-2p^2q - (pq - 3) + p^2q]\}$
c. $4x^2 - [2xy + 3x(x - 5y) - x]$
d. $5a^2 + 3[2q^2 - (3p + q)(p - 4q)]$

7 Calcular y simplificar

a. $(2m + n)(m - 3n) - (m^2 - 5n^2)$
b. $(8b^2 - 10b + 3) \div (2b - 1) + (-3b + 4)$
c. $\dfrac{3x(4x - 3) - (4x^2 - 3x + 5)}{2x - 1}$

8 Probar que las siguientes igualdades se cumplen:

a. $7a^2 - [2ab + (6a^2 - 3ab)] = a^2 + ab$
b. $3x^2 - [-5x - 3(2 - x^2) + 5] - 5x = 1$
c. $\dfrac{3m^2 - 13mn - 10n^2}{m - 5n} - 3(m + n) = -n$

9 Sean: $A = 3c^2 + 2d^2$; $B = 2c - d$; $C = c + 4d$; $D = 8c^2 + 7cd$

a. Calcular $2A + Bc$
b. Hallar el valor numérico de la expresión D para $c = \dfrac{1}{4}$ y $d = -2$.

10 Resolver las ecuaciones siguientes:

a. $4x-(x-3)=13-2x$

b. $a+(a+2)=4(5-a)$

c. $7(1{,}4x-2)-8-3x-(4{,}8x+6)$

d. $(2x+3)(x-4)=2x^2+x$

e. $x(x-6)+1=(x+5)(x-3)$

11 Despejar, en cada caso, la variable que se indica en las fórmulas siguientes:

a. $A=\frac{d_1d_2}{2}$ (d_1)

b. $s=s_0+vt$ (t)

c. $\mathrm{A}=\pi r(g+r)$ (g)

1. Se tienen dos números de los cuales uno es menor en 3 unidades que el otro. Si se multiplica el mayor por 5 y se sustrae 30 de dicho producto, se obtiene el duplo del número menor. ¿Cuáles son los números?

2. El perímetro de un triángulo isósceles es de 34 cm. El lado base es 8,0 cm menor que uno de los otros lados. ¿Cuánto mide cada lado?

3. Un rectángulo tiene 5,0 cm más de largo que de ancho. Si el largo se disminuye en 4,0 cm y el ancho se aumenta en 3,0 cm, el área resulta la misma. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

4. Juan y Antonio acumularon entre ambos durante el mes de abril un total de 73 horas de trabajo voluntario. Si Antonio realizó 5 horas más que Juan. ¿Cuántas horas de trabajo voluntario realizó cada uno?

5. La edad de un padre es el triplo de la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Cuáles son sus edades actuales?

6. Dos móviles A y B parten simultáneamente de un mismo punto en línea recta y en sentidos opuestos. El móvil A marcha a una velocidad mayor en 13 km/h que el móvil B. ¿A qué velocidad marcha cada móvil si a las 3,0 horas los separa una distancia de 381 km?

Queremos aclarar que los ejercicios anteriores no constituyen "ejercicios tipo" sino que es una forma de ilustrar la caracterización hecha anteriormente con respecto a las exigencias mínimas de la unidad.

INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMATICAS

En esta unidad podemos distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Repaso y profundización sobre operaciones con términos.
2. Operaciones con polinomios.
3. Resolución de ecuaciones. Problemas.

1. REPASO Y PROFUNDIZACIÓN SOBRE OPERACIONES CON TÉRMINOS

Esta unidad temática, como su nombre indica, constituye un repaso y una profundización de los procedimientos algebraicos estudiados en el octavo grado, los cuales constituyen la base para los contenidos correspondientes a la nueva materia que se tratará en noveno grado.

Para esta unidad temática se dispone de 6 horas – clase y se pueden distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Expresiones algebraicas. Valor numérico. Grado de un monomio y de un polinomio.
- Operaciones con términos y polinomios.

1.1 Expresiones algebraicas. Valor numérico. Grado de un monomio y de un polinomio.

Para el tratamiento de este punto se dispone de 2 horas. Se debe lograr que los alumnos sean capaces de calcular con seguridad el valor numérico de una expresión algebraica y sepan determinar para qué valores está o no definida una expresión, además deben saber determinar el grado de un monomio y de un polinomio.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, el profesor puede comenzar recordando a los alumnos, mediante ejemplos, los conceptos "término", "polinomio" y "expresión algebraica", así como el cálculo del valor numérico de términos y extender esto al cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas, donde hay que tener presente el orden en que se realizan las operaciones. Para ello puede presentarse el siguiente ejemplo o proponer otro ejemplo similar y aprovechar el mismo para tratar lo referente a los valores para los cuales está definida una expresión algebraica.

EJEMPLO

Halle el valor numérico de la expresión algebraica

$\dfrac{a^2b-5c}{a+1}$ para: a = -2 ; b =1/4 ; c = 0,6.

<u>Resolución</u>:

$$\frac{a^2b-5c}{a+1}=\frac{(-2)^2\times\frac{1}{4}-5\times 0{,}6}{-2+1}$$ (sustituyendo las variables por los valores indicados)

$$=\frac{4\times\frac{1}{4}-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2\,.$$

En el caso anterior, la expresión algebraica dada carece de valor numérico para a = -1 debido a que al sustituir la variable por este valor, el denominador se anula y la división por cero no está definida.

En esta expresión algebraica, las variables pueden ser sustituidas por números reales cualesquiera excepto el caso a = -1. También podemos decir que la expresión está definida para todo a, b, $c \in \nabla$ con a $\neq$ -1.

Debe quedar bien claro para los alumnos que una expresión algebraica está definida para aquellos valores para los cuales al sustituir la variable por esos valores, es posible calcular el valor numérico de dicha expresión.

En particular, este análisis debe centrarse en las expresiones algebraicas fraccionarias, es decir, las que contengan denominadores con variables (es conocido por los alumnos que la división por cero no está definida). El profesor puede presentar a los alumnos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

1. Determine para qué números reales están definidas las expresiones algebraicas siguientes:

   a. $3x+2$

   b. $\dfrac{7}{3-m}$

   c. $a+\dfrac{b}{a}$

d. $\dfrac{2-3x}{6+y}$

Resolución:

a. La expresión $3x + 2$ está definida para todo $x \in \nabla$, ya que la variable puede ser sustituida por cualquier número real y siempre será posible calcular el valor numérico de esta expresión.

b. La expresión $\dfrac{7}{3-m}$ está definida para $m \in \nabla$, con $m \neq 3$ debido a que el denominador se anula para $m = 3$ y no es posible calcular el valor numérico en este caso.

c. La expresión $a + \dfrac{b}{a}$ está definida para $a,\ b \in \nabla$, con $a \neq 0$.

d. La expresión $\dfrac{2-3x}{6+y}$ está definida para $x,\ y \in \nabla$, con $y \neq -6$.

Para la ejercitación de estos aspectos recomendamos los siguientes ejercicios u otros similares creados por el profesor.

1. Calcule el valor numérico (en caso de que exista) de las expresiones algebraicas siguientes, para los valores de las variables que se indican en cada caso.
   a. $\dfrac{1}{2}x^{-1}y^{2}$ para $x = 2$; $y = -4$
   b. $5x^2 + 3x$ para $x = -4$
   c. $3a^2b + 2a$ para $a = -0{,}5$; $b = \dfrac{2}{3}$
   d. $(p - q)\times 2r$ para $p = -1$; $q = 3$; $r = -5$
   e. $-8(a^2 + a)$ para $a = \dfrac{1}{2}$
   f. $(a + b)\times c - d$ para $a = 1$;.$b = 0{,}2$; $c = 3$; $d = 4{,}2$
   g. $\dfrac{2m}{n} + p^2$ para $m = -5$; $n = 5$; $p = -3$
   h. $\dfrac{3a^2 - 0{,}4b}{c}$ para $a = -2$; $b = 5$; $c = 4$
   i. $(4x^2 + y)^2$ para $x = 1{,}5$; $y = 6$
   j. $\dfrac{b^2c + 3d}{b-2}$ para $b = -3$; $c = \dfrac{2}{3}$; $d = -0{,}5$
   k. $\dfrac{5x^2}{x + yz}$ para $x = -1$; $y = 4$; $z = \dfrac{1}{4}$

l. $4x^0 + 3y^2z^{-3}$ para $x = \dfrac{1}{2}$; $y = 4$; $z = -2$

m. $4a^2b^{-2} - 3a^{-2}b^3$ para $a = 3$; $b = 6$

n. $2x\sqrt{x^3 + 2b}$ para $x = 3$; $b = -1$

o. $\dfrac{3bd}{c} - \sqrt{2b + d} + 2b^0$ para $b = 4$; $c = -2$; $d = 1$

2. ¿Para qué números reales están definidas las expresiones algebraicas siguientes?:

a. $\dfrac{1}{x}$

b. $a-5$

c. $\dfrac{x}{y-1}$

d. $\dfrac{b-2}{b+5}$

e. $\dfrac{2a}{a-b}$

f. $\dfrac{7}{x+y}$

g. $\sqrt{8-p}$

3. Determine si es posible calcular el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las variables que se indican:

a. $x + 3$ para $x = -3$

b. $\dfrac{ab}{a-5}$ para $a = 5$; $b = -1$

c. $\dfrac{2-m}{m-1}$ para $m = 2$

d. $\dfrac{2x}{x+y}$ para $x = 7$; $y = -7$

e. $\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{c-2}$ para $b = 2$; $c = 0$

f. $\dfrac{2p-q}{p+q}$ para $p = q$

g. $\dfrac{2m+n}{mn-p}$ para $m = 3$; $n = \dfrac{1}{3}$; $p = -1$

h. $\sqrt{6-2t}$ para $t = 5$

Dentro de este mismo punto esencial se incluyen los conceptos "grado de un monomio" y "grado de un polinomio".

Para introducir el concepto grado de un monomio, el profesor puede comenzar dando el concepto y después ejemplificar o bien seguir el proceso inverso, o sea, proponer a los alumnos un listado de términos (monomios), destacando la parte literal y planteando a los alumnos que calculen la suma de los exponentes de los factores literales para de esta forma llegar al concepto. Queremos destacar que este concepto solo se va a definir para los monomios cuyos factores literales tengan exponentes enteros no negativos; se excluyen por ejemplo casos como los siguientes:

$$2x^2y^{-3};\ \ \frac{a}{b}.$$

Además, debe destacarse que el grado de un monomio en que sólo aparezca el coeficiente, es 0 (la parte literal se considera elevada al exponente 0).

Para la fijación del concepto anterior, puede presentarse el siguiente ejemplo o proponer otro similar.

EJEMPLO

Determine el grado de los monomios siguientes:

a. $3x$
b. $2a^2$
c. rst
d. $4m^3n$
e. 8

Resolución:

a. $3x$ es de grado 1 (o de primer grado).
b. $2a^2$ es de grado 2 (o de segundo grado).
c. rst es de tercer grado.
d. $4m^3n$ es de cuarto grado.
e. 8 es de grado cero.

En general, los términos en que solo aparece el coeficiente numérico tienen grado cero.

Se denomina **grado de un polinomio** al mayor de los grados de los términos (monomios) que lo componen.

Si se ha fijado bien lo concerniente al grado de un monomio, entonces resultará fácil introducir el concepto grado de un polinomio, lo cual puede hacerse por dos vías (de forma análoga a como se puede hacer con respecto al grado de un monomio).

Para la fijación de este concepto, puede presentarse el siguiente ejemplo, o proponer ejemplos similares.

EJEMPLO

Determine el grado de los polinomios siguientes:

a. $2x + 3$
b. $3a^2 + 2a - 8$

c. $1 + 3b - b^3 + b^2$
d. $m^2 + 2mn + n^2$
e. $6x^3y + 3x^2y^2 - 2xy + 5$

Resolución:

a. $2x + 3$ es de primer grado (el término de mayor grado es $2x$).
b. $3a^2 + 2a - 8$ es de segundo grado (el término de mayor grado es $3a^2$).
c. $1 + 3b - b^3 + b^2$ es de tercer grado (el término de mayor grado es b^3).
d. $m^2 + 2mn + n^2$ es de segundo grado (los tres términos son de grado 2).
e. $6x^3y + 3x^2y^2 - 2xy + 5$ es de cuarto grado (los términos de mayor grado son $6x^3y$ y $3x^2y^2$).

Para la fijación de este aspecto recomendamos ejercicios como los siguiente u otros similares.

1. Determinar el grado de los monomios siguientes:

a. $4a$
b. $3mn$
c. x^2
d. b^3c^2
e. $-xy^2z$
f. -2
g. $8r^2s^4$
h. a^2b
i. $5p^3q^4r$

2. Determinar el grado de los polinomios siguientes:

a. $x + x^2$
b. $2a - 5$
c. $b^2 - b - 20$
d. $2 - c^2 + c^4$
e. $t^3 - 3t^2 + 2t - 6$
f. $5m - 3m^2 + 4m^4 - 6$
g. $a^3 + a^2 - ab^3$
h. $p^2q - 2pq^3 + 3q^4 - 1$
i. $3abc + 2a + 3ab^2 + 4ab$
j. $x^5 - 6x^4y^3 - 4x^2y + x^2y^4 - 3y^6$

1.2 Operaciones con monomios y polinomios

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Lo fundamental es lograr que los alumnos reactiven sus conocimientos sobre las operaciones con monomios, y con monomios y polinomios estudiadas en octavo grado:

- Reducción de términos semejantes

- Multiplicación de términos (monomios) y de un término por un polinomio.
- División de términos (monomios) y de un polinomio por un término.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, se puede comenzar repasando mediante ejemplos, cada uno de los procedimientos que hemos mencionado. Este repaso debe desarrollarse en una forma activa y dinámica con la participación directa de los alumnos, quienes en la práctica recordarán cómo proceder en cada uno de los casos; para ello el profesor debe escoger ejemplos apropiados como los siguientes u otros que considere convenientes.

EJEMPLO

1 Reduce términos semejantes en:

a. $3x - 8x + 2x + 6x - 5x$
b. $24a^2 - 40a^2b + 8ab^2 - 10a^2b + 10ab^2$

Resolución:

Recuerde que primeramente debe reconocer los términos semejantes y luego reducir éstos a un solo término, calculando la suma algebraica de los coeficientes y manteniendo la parte literal.

a. $3x - 8x + 2x + 6x - 5x = (3 - 8 + 2 + 6 - 5)x = -2x$
b. $24a^2 - 40a^2b + 8ab^2 - 10a^2b + 10ab^2 = 24a^2 - 50a^2b + 18ab^2$

EJEMPLO

1. Calcula:

a. $(-5a^4b)(4a^2bc)$
b. $2xy^2(x^2 - 3xy + 2y^2)$

Resolución:

Debe recordar que para calcular un producto de términos (monomios), se multiplican los coeficientes y las partes literales. Para multiplicar un polinomio por un término se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica el término por cada uno de los términos del polinomio.

a. $(-5a^4b)(4a^2bc) = -20a^6b^2c$
b. $2xy^2(x^2 - 3xy + 2y^2) = 2x^3y^2 - 6x^2y^3 + 4xy^4$

EJEMPLO

Efectúe:

a. $\dfrac{24m^4n^2p}{-6mn^2}$
b. $\dfrac{6x^3y-3x^2y^2-9xy^3}{3xy}$

Resolución:

Para calcular el cociente de dos términos, se dividen los coeficientes y las partes literales. Para dividir un polinomio por un término, se divide cada uno de los términos del polinomio por dicho término.

a. $\dfrac{24m^4n^2p}{-6mn^2} = -4m^3p$
b. $\dfrac{6x^3y-3x^2y^2-9xy^3}{3xy} = 2x^2 - xy - 3y^2$

Veamos ahora un ejemplo donde aparecen en forma combinada las operaciones que hasta ahora se han estudiado.

EJEMPLO

Simplifique la expresión algebraica siguiente y calcule su valor numérico para $x = -1$; $y = 3$

$$\frac{36x^3y^2+18xy^3-24x^2y}{6xy} - 4x\left(2xy - 5 + \frac{y^2}{x}\right).$$

Resolución:

Debe saber que para simplificar una expresión algebraica hay que efectuar las operaciones que aparecen indicadas y reducir los términos semejantes, de modo que dicha expresión en su forma más simple, sea una suma algebraica de términos que no sean semejantes.

$$\frac{36x^3y^2+18xy^3-24x^2y}{6xy}-4x\left(2xy-5+\frac{y^2}{x}\right)= 6x^2y + 3y^2 - 4x - 8x^2y + 20x - 4y^2$$

$$= -2x^2y + 16x - y^2 \quad \text{(reduciendo términos semejantes)}$$

Para $x = -1$ e $y = 2$ se tiene

$$-2(-1)^2(3) + 16(-1) - 3^2 = -31.$$

Como un primer nivel de ejercicios sugerimos proponer bloques de ejercicios como los que aparecen a continuación.

1 Reducir términos semejantes en:

a. $-9a + 2a + 6a$

b. $3b - 5 - 8b + 2 + 2b$

c. $6x + 3y + 8y - 2x - y$

d. $x^3 - x^2 + 1 - 2x + x^2 - 3x - 8x^3 + x^2$

e. $9a^2 - 5a - a^2 + 8 - 3a^2 - 4a - 2 + a^2 + a$

f. $5{,}6m^2 - 0{,}4m^2 - 4m^2 + 3m - 7{,}6m^2n$

g. $3a^2b - 2ab^2 + 5ab^2 + 6a^2b + 3ab^2 - 4a^2b$

h. $3x^3y^2 - 5x^4 + 6y^2 + x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^4 - 3y^2$

i. $b^3 + 2b^2c - c^3 + 3bc^2 + 2b^3 - 6b^2c + 2c^3$

j. $\frac{1}{3}p^2q - pq + \frac{1}{2}p^2q + 3pq - 4pq^2$

k. $\frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy + x^2y^2$

l. $2ab^{-1} + 5a^{-1}b + 6a^{-2}b^{-3} + 6ab^{-1} + 3a^{-1}b$

m. $m^2 + n^2 - mn + m^{-1}n^3 + 3mn + m^3n^{-1} - 2m^2 - n^2 - m^{-1}n^3$

n. $-2x^2yz + 6xyz + 2xyz^2 + 3x^2yz - 5xyz - xyz^2$

o. $4a^nb^m + 2a^mb^n - 5a^2b^m - 3a^nb^m + 6a^2b^m$

2 Calcule:

a. $3x^2y\,(-4xy^3)$

b. $\dfrac{-15a^3b^4}{5a^2b^5}$

c. $-5{,}7a^4m^3p \div (-3a^3m)$

d. $1{,}4p^3q \times 5p^2qr$

e. $3xy\ (1{,}5x^2 - 4y)$

f. $(0{,}4b - 5a) \times (-3a^2b)$

g. $\dfrac{4x^4 - 8x^7}{4x^3}$

h. $5pq\ (pq^2 - \dfrac{1}{10}p^2q)$

i. $(9a^3 - 18a^4) : (-6a^2)$

j. $-5c^2d(c^2 + 3cd - 0{,}4d^3)$

k. $(6a^3 - 4a^2b + 10ab^3) \div 2ab$

l. $(5x^3y^2 + 3y - 2{,}5\ x^2z) \times (3{,}2x^2y)$

m. $\dfrac{-4m^8n^4 + 8m^6n^6 - 16m^4n^8}{-4m^3n^4}$

n. $\dfrac{2}{5}a^2bc\ (2bc - a^2c + 5ab)$

o. $\dfrac{4x^6y^8z^2 - 6x^4y^2z^5 + x^2y^3z^2}{2x^2yz^3}$

p. $-5a^4bc^2(3a^2b^{-1}c + 0{,}4a^{-3}b^2c^3 - 2a^2bc^{-3})$

q. $\dfrac{24{,}8p^3q - 6{,}2p^4q^3 - 3{,}1p^2q^2}{0{,}31p^3q^2}$

3 Simplificar las expresiones algebraicas siguientes y calcular su valor numérico para los valores de las variables que se indican:

a. $2a(a - 3b) + b(a - b)$ para $a = -1$; $b = 3$

b. $\dfrac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x$ para $x = \dfrac{2}{3}$; $y = -2$

c. $4c(c^2 + 0{,}5d) - 5c\left(0{,}6c^2 - \dfrac{1}{5}d\right) + 3c^3$ para $c = -2$; $d = 5$

d. $y^2 + x^2y^3 - y^3(x^2 + 1) + y^2\ (x^2 + 1) - y^2(x^2 - 1)$ para $x = 1$; $y = -2$

e. $\dfrac{48m^3n^2 + 24m^2n^3 - 6m^4n^5}{6m^2n^2} + 4m\left(2mn^3 - 3 - \dfrac{n}{m}\right)$ para $m = -0,5$; $n = 2$

f. $(24a^2b^2 - 18a^2b) : 6a^2b - 4a^3(-5ab^2 + 3a^2) - 15a^4b^2 + 12a^5$ para $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -8$

g. $-8x^3yz - 4x^2y(5y^2z - 2xz) + (20x^5y^4z^2 - 12x^4yz) : 4x^3yz$ para $x = -3$; $y = \dfrac{1}{3}$; $z = -1$

4. Determinar la expresión algebraica que dividida por el monomio $-4b^2c$ dé como resultado $3bc^3 - 4b^3c^2 + 2b^2c$.

Una vez reactivados los procedimientos estudiados, los alumnos deben estar en condiciones de poder resolver ejercicios donde se integren dichos procedimientos. Para ello, el profesor puede proponer un ejercicio como el siguiente.

Halle la expresión algebraica que multiplicada por $8x^2y^3z$ dé como resultado $24x^3y^5z + 16x^2y^4z^3 - 8x^4yz^2$.

Los alumnos deben estar bien claros que cuando se da la orden de simplificar una expresión algebraica, esto significa que se deben efectuar las operaciones que aparecen indicadas y reducir los términos que sean semejantes de manera que la expresión resultante (en su forma más simple) sea una suma algebraica de términos que no sean semejantes.

Para la ejercitación recomendamos el siguiente ejercicio el cual contribuye a sistematizar de una forma integrada los procedimientos algebraicos conocidos por los alumnos. También recomendamos incluir otras variedades de ejercicios.

EJERCICIO

1 Simplifica las expresiones algebraicas siguientes y calcular su valor numérico para los valores de las variables que se indican:

a. $2a(a - 3b) + b(a - b)$ para $a = -1$; $b = 3$

b. $\dfrac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x$ para $x = \dfrac{2}{3}$; $y = -2$

c. $4c(c^2 + 0,5d) - 5c\left(0,6c^2 - \dfrac{1}{5}d\right) + 3c^3$ para $c = -2$; $d = 5$

d. $y^2 + x^2y^3 - y^3(x^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) - y^2(x^2 - 1)$ para $x = 1$; $y = -2$

e. $\dfrac{48m^3n^2 + 24m^2n^3 - 6m^4n^5}{6m^2n^2} + 4m\left(2mn^3 - 3 - \dfrac{n}{m}\right)$ para $m = -0{,}5$; $n = 2$

f. $(24a^2b^2 - 18a^2b) : 6a^2b - 4a^3(-5ab^2 + 3a^2) - 15a^4b^2 + 12a^5$ para $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -8$

g. $-8x^3yz - 4x^2y(5y^2z - 2xz) + (20x^5y^4z^2 - 12x^4yz) : 4x^3yz$ para $x = -3$; $y = \dfrac{1}{3}$; $z = -1$

En el siguiente ejercicio se trata de resolver una ecuación donde tanto la incógnita como los coeficientes son expresiones algebraicas.

h. Si $A = 4r^3t$; $B = 5r^5t^2$; $C = 21\ r^5t^2 - 4r^3t^4$, calcula la expresión algebraica X tal que $A \times X + B = C$. Comprueba que para $r = \dfrac{1}{4}$; $t = \dfrac{1}{2}$ se cumple que $X = 0$.

Para resolver este ejercicio pueden seguirse dos vías (ambas conducen a lo mismo):

1. Primero despejar X y después sustituir por las expresiones.
2. Primero sustituir por las expresiones y después despejar X.

Entendemos que la primera vía resulta más accesible para los alumnos.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Los ejercicios que se deben realizar son de los siguientes tipos:

- **Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.**
- Determinar los valores para los cuales está definida una expresión algebraica.
- Determinar el grado de un monomio y de un polinomio .
- Reducir términos semejantes.
- Calcular productos y cocientes de términos y de un polinomio por un término.
- Resolver ejercicios donde aparecen de forma integrada los procedimientos algebraicos estudiados.

2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

En la presente unidad temática se tratarán los algoritmos para las cuatro operaciones básicas con polinomios, lo cual constituye el eje central de la unidad "Trabajo con variables" en este año; por lo tanto, resulta muy importante que al finalizar esta unidad temática los alumnos hayan logrado un buen desarrollo de habilidades en el cálculo de las operaciones básicas con polinomios.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 20 horas y podemos distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Suma y resta de polinomios. Eliminación e introducción de paréntesis.
- Uso de otros signos de agrupación. Paréntesis superpuestos.
- Multiplicación de polinomios.
- División de polinomios.

2. 1 Suma y resta de polinomios. Eliminación e introducción de paréntesis.

Para el tratamiento de este punto se sugieren 4 horas. Se debe lograr que los alumnos dominen los algoritmos para sumar y restar polinomios y desarrollen habilidades en la simplificación de expresiones que contengan paréntesis precedidos por el signo "+" o por el signo "-".

Desde el punto de vista metodológico lo primero que debe tratarse es la suma de polinomios.

Para el tratamiento de este aspecto se puede partir de un caso particular: dados dos polinomios calcular su suma.

Desde octavo grado los alumnos conocen que para calcular la suma (algebraica) de varios números racionales, se colocaban estos unos a continuación de otros con sus propios signos y luego se calculaba dicha suma. Esto constituyó la base para hallar la suma algebraica de varios monomios donde se efectúa la reducción de los términos semejantes.

Debe aclararse que para sumar dos (o más) polinomios lo que se hace es precisamente sumar los términos de estos polinomios. De aquí se infiere el procedimiento siguiente:

Para sumar polinomios se escriben uno a continuación del otro, conservando cada término su signo y reduciendo términos semejantes en caso de que existan.

Todas estas consideraciones deben explicarse a los alumnos de una forma breve y lo más simple posible, mediante ejemplos concretos.

Por ejemplo, puede proponerse un ejercicio como el siguiente:

Calcular:

a. $-5a+3b+7a-2b$
b. $(7x-3y)+(3x-y)$

En el inciso a) se trata de una suma de monomios (caso ya estudiado) mientras que en el inciso b) aparece indicada una suma de dos polinomios, que se reduce a una suma de términos (monomios) lo cual debe mostrarse a los alumnos.

Otra guía que puede seguirse es comenzar dando a los alumnos el procedimiento y luego ejemplificar.

Recomendamos tratar las formas horizontal y vertical de cómo disponer los polinomios sumandos y que luego, en la práctica los alumnos procedan de la forma que les resulte más cómoda.

Para fijar el procedimiento, sugerimos el siguiente ejemplo, u otro similar.

EJEMPLO

Efectúe las adiciones siguientes:

a. $3b+c-4+(2b-3c+d-9)$
b. $x^3-5x^2+2x-6+(3x^2-4x+3)$
c. $(2xy+3x)+(3xy+2y-x)+(-2xy+y)$

<u>Resolución:</u>

a. $3b+c-4+(2b-3c+d-9) = 3b+c-4+2b-3c+d-9$
$= 5b-2c+d-13$

b. $\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 2x - 6 \\ \underline{\quad\ \ 3x^2 - 4x + 3} \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \end{array}$ aquí hemos dispuesto los cálculos en columna

c. $(2xy + 3x) + (3xy + 2y - x) + (-2xy + y) = 2xy + 3x + 3xy + 2y - x - 2xy + y$
$= 3xy + 2x + 3y.$

Nota: En la práctica, cuando se va a indicar una suma de polinomios (en forma horizontal), no es necesario escribir el primer sumando entre paréntesis.

Inmediatamente después de fijado el procedimiento para sumar polinomios, sugerimos tratar la resta de polinomios.

Para tratar este aspecto, puede comenzarse recordando a los alumnos que en octavo grado aprendieron que la resta de dos números racionales (reales) se reduce a una suma: se adiciona al minuendo el opuesto del sustraendo, es decir, el sustraendo cambiado de signo.

Debe informarse entonces que para restar un polinomio de otro se sigue el mismo procedimiento. Por ejemplo, si del polinomio $7p + 3q$ se quiere sustraer el polinomio $4p - 7q + 8$, podemos indicar:

$$(7p + 3q) - (4p - 7q + 8)$$

Esto es lo mismo que si al minuendo $(7p + 3q)$ le sumamos el sustraendo $(4p - 7q + 8)$ cambiando el signo. El polinomio $4p - 7q + 8$ cambiando de signo es $-4p + 7q - 8$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} (7p + 3q) - (4p - 7q + 8) &= (7p + 3q) + (-4p + 7q - 8) \quad \textbf{(1)} \\ &= 7p + 3q - 4p + 7q - 8 \quad \textbf{(2)} \\ &= 3p + 10q - 8 \end{aligned}$$

En la práctica se procede según el algoritmo siguiente: en casos como el que acabamos de ilustrar, se omite el paso (1) y se pasa directamente al paso (2).

Para fijar el procedimiento, recomendamos el siguiente ejemplo u otro similar.

EJEMPLO

1. **Efectúa las sustracciones siguientes:**

   a. **De** $x^2 - 5x$ **resta** $-5x + 6$
   b. **De** $4c^2d - 7d^2$ **resta** $c^2d - 5cd^2 + 3d^2$
   c. **De** $-3m^2 - 5m + 4$ **resta** $-m^2 + 2m - 1$

<u>**Resolución:**</u>

a. $x^2 - 3x - (-5x + 6) = x^2 - 3x + 5x - 6$
$= x^2 + 2x - 6$

b. $4c^2d - 7d^2 - (c^2d - 5cd^2 + 3d^2) = 4c^2d - 7d^2 - c^2d + 5cd^2 - 3d^2$
$= 3c^2d + 5cd^2 - 10d^2$

Observe que para calcular, en cada caso, escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo con sus signos cambiados.

c. $$\begin{array}{r} -3m^2 - 5m + 4 \\ \underline{m^2 - 2m + 1} \\ -2m^2 - 7m + 5 \end{array}$$

Aquí hemos dispuesto los cálculos en columna.

Al igual que en la suma, la resta de dos polinomios puede calcularse de dos formas: disponiendo los polinomios uno a continuación de otro (no es necesario escribir el minuendo entre paréntesis), o debajo del minuendo colocar el sustraendo cambiado de signo y proceder igual que si fuese una suma. Lo que resumimos en el siguiente procedimiento:

> Para restar un polinomio de otro se escribe el minuendo tal y como está, y a continuación el sustraendo cambiándole el signo a cada uno de sus términos. Luego se reducen los términos semejantes.

Los alumnos procederán de la forma que les resulte más conveniente, según el caso.

Los ejercicios siguientes resultan apropiados para un primer nivel dentro de la ejercitación, éstos contribuyen a desarrollar habilidades en la aplicación de los dos procedimientos estudiados.

1. Sume los polinomios siguientes:

   a. $2c$; $-c + 3d$
   b. $-m + 3n$; $3m - 2n$
   c. $2b^2c - b^2$; $3b^2c + 2b^2 - bc^2$
   d. $4x^2 - 3x^2y - 2y^2$; $-3y^2 - 5xy + y^2$
   e. $x^2 - 3x$; $-2x^2 + 5x - 6$
   f. $2x + 3x^2y - z^2$; $2z^3 + z^2 - 4x^2y$
   g. $a - b$; $2a + 3b - c$; $-4a + 5b$
   h. $-3mn - 2m^2 + 6$; $2mn + 5m^2 - 3$; $2m^2 - 8$
   i. $2p^2q - 5pq^2 + 7$; $-3pq^2 + p^2q$; $8 - pq^2 - p^2q$
   j. $2{,}5a^2b - ab^2 - a - 5$; $a^2b - ab^2 + 4$; $-3a^2b + 2a$

2. Reste:

   a. $2a^3 - x$ de $5a^3$
   b. $-x + 2y$ de $2x - 3y$
   c. $3pq + q^2$ de $p^2 - pq$
   d. $-x + 2y + 3z$ de $2x - 3y - 2z$
   e. $m^2 - 8mn - 10n^2$ de $3m^2 - 5n^2$
   f. $6a^2b - 3ab^2 + a^3$ de $-2a^2b + 2a^3$
   g. $-2x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3$ de $x^2y + 2xy^2 - y^3$
   h. $x^4 + y^4 - 2x^3y + 3xy^3$ de $x^3y - xy^3 + y^4 - x^4$
   i. $-2abc + 3a^2bc - 5ab^2c + 6abc^2$ de $ab^2c - 4a^2bc - 3abc^2$
   j. $3{,}5p^nq^{2n}r - 1{,}6p^{2n}q^nr^3 + p^3q^nr^{2n}$ de $4p^nq^{2n}r + 2{,}5p^3q^nr^{2n} - 2{,}6p^{2n}q^nr$

A continuación, dentro de este mismo punto y a manera de generalización de los procedimientos de suma y resta de polinomios, se concluye con las reglas prácticas que se siguen para eliminar (e introducir) paréntesis que estén precedidos por el signo "+" o por el signo "-", ya que expresiones que contengan paréntesis con estas características se presentan frecuentemente.

Se puede comenzar planteando a los alumnos que en la práctica suelen presentarse expresiones que pueden contener uno o varios paréntesis que pueden estar precedidos de uno de los signos "+" o "-" (poner ejemplos). Dichas expresiones pueden convertirse en otras equivalentes que no tengan paréntesis, para ello se aplicará una regla práctica que se basa en los procedimientos ya conocidos para sumar y restar polinomios. Seguidamente puede presentarse a los alumnos el siguiente procedimiento:

1. Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "+" los términos que se incluyen en él conservan sus propios signos.
2. Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "-", se cambia el signo a los términos que se incluyen en él.

A continuación se sugiere ejemplificar cómo se calcula, en la práctica en estos casos, y para esto se sugiere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

$$5a^2-(2ab-3a^2+b^2)+(-4ab+3b^2) = 5a^2-2ab+3a^2-b^2-4ab+3b^2$$

$$= 8a^2-6ab+2b^2.$$

Debe aclararse que el paréntesis se elimina conjuntamente con el signo que le precede.

Para contribuir a fijar este procedimiento e integrar algunos conocimientos, puede proponerse el siguiente ejemplo u otro ejemplo similar.

EJEMPLO

Sean: $A = -5b^3c + 2b^2$; $B = -3b^3c + 5bc$; $C = 6b^3c + 5bc - b^2$

a. Simplifica $A - B + C$.
b. Halla el valor numérico del resultado para $b = -2$; $c = \frac{1}{8}$

<u>Resolución:</u>

a. $(-5b^3c + 2b^2) - (-3b^3c + 5bc) + (6b^3c + 5bc - b^2) =$
$-5b^3c + 2b^2 + 3b^3c - 5bc + 6b^3c + 5bc - b^2 = 4b^3c + b^2$

b. $4 \times (-2)^3 \times \frac{1}{8} + (-2)^2 = -4 + 4 = 0$

A veces resulta conveniente asociar determinados términos de un polinomio utilizando paréntesis que estén precedidos, ya sea por el signo "+" o por el signo "-".

Para ello debe tener presente que:

1) Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "+", los términos que se incluyen en él conservan sus propios signos.
2) Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "-", se les cambia el signo a los términos que se incluyen en él.

Aunque en este grado debe presentarse un mayor énfasis a la eliminación de paréntesis, debe informarse a los alumnos que en ocasiones resulta conveniente agrupar determinados términos de una expresión polinómica para lo cual se hace necesario introducir paréntesis que pueden estar precedidos por signo "+" o por signo "–" (según sea el caso) y que éste es el proceso inverso de la eliminación de paréntesis.

Lo anterior puede ilustrarse con el siguiente ejemplo u otro ejemplo similar.

EJEMPLO

Dado el polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, encierre los dos últimos términos en un paréntesis que esté precedido:

a. Por el signo " + ".
b. Por el signo " - ".

<u>Resolución:</u>

a. $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^3 - 3x^2 + (2x - 6)$
b. $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^3 - 3x^2 - (-2x + 6)$

Para desarrollar habilidades en la eliminación y en la introducción de paréntesis sugerimos los siguientes ejercicios.

1. Calcula:

   a. $3x^2y + (3xy^2 - 2x^2y)$
   b. $5x - (3a - x)$
   c. $(15a + 2b) + (4a - 3b)$
   d. $a + b - (3a - 2b)$
   e. $2m + 3n + (3m - 4n + p)$
   f. $7b - c^2 - (2b + 2 - 4c^2)$
   g. $4rt - 5t^2 + (-rt + 3t^2 - t^3)$
   h. $(-5c^2 + 3) - (2c^2 - 3c + 4)$
   i. $(3m^2 - 4mn + n^2) + (-8mn - 3n^2 + m^2)$
   j. $-2pq^3 - 3p^3q^2 -(pq^3 + 2p^3q^2 - 4p^2q^3)$
   k. $(-3x^2y - 5xy^2 + y^3) - (-2x^2y + xy^2 - 4y^3)$
   l. $5{,}6a^3b^2 - 1{,}4\, ab^2 + 2a^3b^3 - (3{,}6ab^2 - 3{,}4a^3b^2 + a^3b^3)$

2. Simplifica las expresiones siguientes:

   a. $5x^2 + (-x + 2x^2) + (2x - x^2)$
   b. $6b^3 - (5b^2 + b) - 2b - (-b^3 + 8 + 4b^2)$
   c. $(2y^3 -5y^2) - (4y^2 + 6y^3 - 3y - 5) + (-y^2 - y)$
   d. $7a^2b + (4ab^2 + 9) - (-2a^2b + ab^2 + 1)$
   e. $(3ax^2 - 2a^2x + 5) + (-3a^2x - 4) - (6 - 2ax^2)$
   f. $-2p^2q + (5pq^2 - 3q^2 - p^2q) + 2pq^2 - (3pq^2 + q^2)$
   g. $2{,}9a^3b^2 - (0{,}8a^2b^3 + 0{,}1a^3b^2) + (-a^3b^2 + 1{,}6a^2b^3)$
   h. $1{,}5m^2 + (-3{,}4m^2n + 6.7m^2) - (-4{,}3m^2n + 8{,}1n)$
   i. $-p^2q^3r^4 - (4p^3q^2r^4 - 3p^4q^3r^2) + (-2p^3q^2r^4 + 2p^2q^3r^4) - 3p^4q^3r^2$
   j. $-4xy + (2x^2y - 3xy^2) - (-2xy - 8x^2y - 10xy^2) + 2x^2y$
   k. $\frac{1}{2}a^2bc - \left(\frac{1}{8}abc^2 - \frac{2}{5}ab^2c\right) + \left(-\frac{5}{6}a^2bc + \frac{1}{10}ab^2c\right)$
   l. $-r^2st + 3{,}5rst^2 - (4r^2st - 1{,}3rst^2) + (-2rs^2t + 7.5r^2st) - rs^2t$

3. Introduce en un paréntesis precedido por el signo "+" el segundo y el tercer término de los polinomios:

a. $2a + 3b - c$
a. $2x - 3y + z$
b. $2x^2 - 3xy - 4y^2 - 2a^3$
c. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
d. $3a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 5$

4. En cada uno de los polinomios del ejercicio anterior, introduce los dos últimos términos en un paréntesis precedido por el signo "-".

5. Sean: $A = 3xy - x^2$; $B = 3x^2 - 4xy$
   a. Calcula $A + B$.
   b. Halla el valor numérico del resultado obtenido para $x = 1{,}5$; $y = -4$.

6. Sean: $C = -3m^2n + n^3$; $D = 7m^2n + 2n^3 - mn^2$.
   a. Calcula $C - D$.
   b. Halla el valor numérico del resultado obtenido para $m = 2$; $n = -3$.

7. Sean: $P = 7a^2b - a$; $Q = 4ab^2 + a^3$; $R = -a^2 + 7a^2b + ab^2$.
   a. Calcula $P + Q - R$..
   b. Halla el valor numérico del resultado obtenido para $a = -2$; $b = 0{,}5$.

Los ejercicios 5,6 y 7 resultan importantes, pues integran conocimientos, en ellos se ve implícita la sustitución y el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica.

No debe dejar de incluirse algunos ejercicios con texto, como los siguientes.

1. Halla el polinomio que sumado con $2x^3y^2 + 5x^2y^3$ da como resultado $5x^3y^2 + 9x^2y^3 - 3x^3y$.

2. Para obtener como diferencia $4x^2 - 7x + 5$, ¿qué polinomio debe sustraerse de $x^3 - 4x^2 + 5x - 4$?

3. Si el sustraendo es $4xy + 5x^2 - 8y^2$, ¿cuál ha de ser el minuendo para que la diferencia sea $x^2 - 6xy + 9y^2$?

4. Si $5mn^2 - n^3$ se sustrae de $m^3 + 7mn^2 - 2n^3$, ¿qué polinomio hay que adicionar a esta diferencia para obtener $2m^3 - mn^2$?

5. Prueba que si la suma de $4a^4b^2 - 7a^2b^4$ y $-3a^2b + 7a^2b^4$ se sustrae de $-2a^2b + 5a^4t^2$, se obtiene como resultado $a^2b + a^4b^2$.

Para ilustrar cómo proceder en estos ejercicios, ofrecemos a continuación la resolución del ejercicio 4.

Primero efectuamos la resta:

$$\begin{aligned}(m^3+7mn^2-2n^3)-(5mn^2-n^3) &= m^3+7mn^2-2n^3-5mn^2+n^3\\ &= m^3+2mn^2-n^3.\end{aligned}$$

Ahora hay que determinar qué polinomio hay que sumar a la diferencia que acabamos de calcular, par obtener como resultado $2m^3-mn^2$.

Sea P el polinomio que hay que encontrar; luego resulta la ecuación:

$(m^3+2mn^2-n^3)+P=2m^3-mn^2$ de donde

$$\begin{aligned}P &= 2m^3-mn^2-(m^3+2mn^2-n^3)\\ &= m^3-3mn^2+n^3.\end{aligned}$$

2.2 Uso de otros signos de agrupación. Paréntesis superpuestos.

Para el tratamiento de este punto se sugieren 4 horas. Lo fundamental es que los alumnos desarrollen habilidades en la simplificación de expresiones que contengan varios signos de agrupación, incluidos unos dentro de otros, que es lo que se conoce como *paréntesis superpuestos.*

El tratamiento de este punto puede iniciarse informando a los alumnos que además de los paréntesis existen otros signos de agrupación que también se utilizan en la práctica: los corchetes y las llaves, los cuales tienen la misma significación que los paréntesis ordinarios y, por tanto, se eliminan del mismo modo.

Puede proponerse, por ejemplo simplificar la expresión:

$$7m-(2m-p)+[-3p+m]-\{2p+1\}.$$

En casos como este no se aprecia la necesidad de utilizar varios signos de agrupación diferentes. Ahora, resulta conveniente informar a los alumnos que frecuentemente se presentan expresiones que contienen varios signos de agrupación de modo que unos están incluidos dentro de otros; en estos casos es necesario el uso de signos de agrupación diferentes para así evitar confusiones. Esto puede ilustrarse a los alumnos con un ejemplo.

Seguidamente, se informa que cuando nos estemos refiriendo a expresiones de este tipo, suele hablarse de paréntesis superpuestos.

Ahora bien, lo que resulta más importante es que los alumnos conozcan y desarrollen habilidades en la aplicación del procedimiento para simplificar expresiones que contengan paréntesis superpuestos.

Debe tenerse presente que en estas expresiones los signos de agrupación se eliminan sucesivamente, pero siguiendo un orden determinado que puede ser de dos formas:

1. Comenzando por los más interiores, es decir, "de adentro hacia fuera".
2. Comenzando por los más exteriores, es decir, "de afuera hacia adentro".

Puede mostrarse a los alumnos, a través de un ejemplo, las dos formas de como proceder. No obstante, recomendamos seguir la primera vía, es decir "de adentro hacia fuera" como aparece ilustrado en siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Simplifique las expresiones algebraicas siguientes:

a. $2a^2 - [3a - (4a^2 - 5a) - 3a^2]$
b. $2x - \{3y + [4x - (x - 2y)] - y\}$

<u>Resolución:</u>

a. $2a^2 - [3a - (4a^2 - 5a) - 3a^2] = 2a^2 - [3a - 4a^2 + 5a - 3a^2$ (eliminando paréntesis)
$= 2a^2 - 3a + 4a^2 - 5a + 3a^2$ (eliminando corchetes)
$= 9a^2 - 8a$ (reduciendo términos semejantes)

b. $2x - \{3y + [4x - (x - 2y)] - y\} = 2x - \{3y + [4x - x + 2y] - y\}$ (eliminando paréntesis)
$= 2x - \{3y + 4x - x + 2y - y\}$ (eliminando corchetes)
$= 2x - 3y - 4x + x - 2y + y$ (eliminando llaves)
$= -x - 4y$ (reduciendo términos semejantes)

Con respecto a la resolución de este ejemplo, queremos señalar que en ambos incisos se eliminan primero todos los signos de agrupación y después se reducen los términos semejantes. Desde el punto de vista metodológico esto resulta apropiado, sobre todo en los primeros ejemplos y ejercicios.

Una vez desarrolladas las habilidades suficientes, no debe limitarse a aquellos alumnos que simplifiquen este proceso y efectúen parcialmente la reducción de los términos que sean semejantes.

A manera de ilustración ofrecemos la resolución del ejemplo 1 b) aplicando la vía "de afuera hacia adentro".

$$
\begin{aligned}
2x-\{3y+[4x-(x-2y)]-y\} &= 2x-3y-[4x-(x-2y)]+y \\
&= 2x-3y-4x+(x-2y)+y \\
&= 2x-3y-4x+x-2y+y \\
&= -x-4y\,.
\end{aligned}
$$

Para la ejercitación entendemos que no debe dejar de hacerse los siguientes ejercicios, los cuales contribuyen a fijar el procedimiento para eliminar paréntesis superpuestos y al desarrollo de habilidades.

1. Simplifique las expresiones siguientes:

   a. $50 - [3b + (4a - 3b)]$
   b. $4b + [3c - (-6b + 5c)]$
   c. $3x^2 - [2z + (-x^2 - z)]$
   d. $-3r - [5s - (2s + 3r) - 4r]$
   e. $3x - [x + y - (2x + y)]$
   f. $-(-2x^2 + a^2) - 3a^2 + [- 3a^2 - (x^2 - a^2)]$
   g. $-[-c^2 - (cd - 6) + cd] \quad - (c^2 \quad - cd - 5)$
   h. $3xy^2 - (3x^2y - x^3) + [y^3 - (3xy^2 - 3x^2y - y^3) - x^3]$

i. $6a - \{-2a + [3b - (a - b)]\}$

j. $8x^2y - \{4xy^2 - [2x^2y + (-5xy^2 - 3x^2y)]\}$

k. $2d - \{5b - [3c - (2a + 3b) - 4c] - d\}$

l. $2r - \{3t - [w - (-2t + 3r) - w] - 3t\}$

m. $16 - \{-3x + y - [2y + 5x - (-6 - 2x - y)]\}$

n. $3b^2 + \{2ab - a^2 - [-5ab - (-a^2 - b^2)] + 4a^2\}$

o. $2m^3n^2 - \{0{,}4m^2n^3 + [-mn - (1{,}6m^3n^2 + 5m^2n^3)] - 2{,}5mn\}$

2. **Simplifique las expresiones siguientes y calcule en cada caso el valor numérico del resultado obtenido para los valores de las variables que se indican:**

a. $5p^2 - [-2pq - (2p^2 - pq) - p^2]$ **para** $p = \dfrac{1}{4}$; $q = -6$

b. $4a^2b\ [2ab + (-2{,}1 + 0{,}2a^2b) - ab] + 0{,}9$ **para** $a = -2$; $b = 0{,}5$

c. $5x^2y + [-xy - (4x^2y - 1{,}2) + 4xy] + 2{,}8$ **para** $x = -\dfrac{1}{4}$; $y = 8$

d. $5{,}2mn^2 + [2m^2n - (-3.8mn^2 + 1{,}4m^2n) - 9mn^2 + 7]$ **para** $m = -1$; $n = 5$

e. $4b^2 - \{3b - [5c - (-b^2 + 4c) + 2b] - c\}$ **para** $b = 0{,}6$; $c = 0{,}5$

f. $2xy - \{-3y^2 + [4x^2y - (2y^2 - 2xy) + 3y^2] - 3x^2y\}$ **para** $x = -4$; $y = 0{,}5$

g. $4a^2 - \{3a - [a^2 - (4 + a)] + [a^2 - (a - 3)]$ **para** $a = -2$

3. **Pruebe que son válidas las igualdades siguientes:**

a. $x - [x - (y - x) + y] = -x$

b. $10m^2n - [8m^2n - 3n - (-2m^2n + n)] = 4n$

c. $xy - [-x^2y + (-xy + x^2y) - xy] = 3xy$

d. $-(2r + 3t) - [-2r + (t - r)] = r - 4t$

e. $2cd - (6c^2 - cd) - [-c^2 + (4cd - 5c^2)] = -cd$

f. $a - \{a - [-a - (-a - a)]\} = a$

g. $4d + \{5x - [3x + (-d + 2x)]\} = 5d$

h. $6a^2b - \{2a^2 + [-7 - (2a^2 - a^2b) + 6] + 5a^2b\} = 1$

Los siguientes ejercicios se sugieren ya que requieren de la sustitución de variables por expresiones algebraicas.

1. Sean: $A = 7x^2$; $B = x^2 + 5{,}4xy$; $C = 4x^2 - 6{,}4xy$
   a. Calcule $A - (B + C)$.
   b. Compruebe que para $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$ el resultado del inciso a es igual a 0.

2. Sean: $M = 3a^2b$; $N = 2ab^2 - 7$; $P = 2ab^2$; $Q = 3a^2b + 5$. Compruebe que $M - [N - (P - Q)] = 2$.

Deben incluirse también algunos ejercicios con texto, como el siguiente.

1. Efectúe, en cada caso, las operaciones que se indican:

   a. De $-2b^2y - 3by^2$ sustraiga la suma de $2b^2y + by^2 - 4$ con $b^2y + 5$.
   b. Sustraiga $-3xy^2 + xy - 2$ de la suma de $2xy + 5$ con $-xy^2 - 3xy$.
   c. Sustraiga de $8c^2$ la diferencia que resulta de sustraer $5c^2 - c^2d$ de $-7c^2 + 2c^2d$.

El siguiente ejercicio conduce, en cada caso, a una ecuación donde para determinar la expresión incógnita *E* hay que eliminar primeramente los signos de agrupación

1. Determine, en cada caso, la expresión E tal que se cumplan las igualdades siguientes:

   a. $8a - [3b - (E - b) + a] = 9a - 4b$
   b. $7x - [E - (-2x + 3y) - y] = 4x + 3y$
   c. $3c^2d - 5cd + [-4c^2d - (2cd^2 - E) + 7cd] = 3cd - 2cd^2$
   d. $5p^3q - [-7p^3q^2 + (-4p^3q + 5p^2q^3) - E] = 10p^3q^2 - 5p^2q^3$
   e. $-2ab + [7 - 4ab^2 - (-2ab - E + 6) + 3ab^2] = 1$

Ofrecemos, a manera de ejemplo, la resolución del inciso b).

$$7x - [E - (-2x + 3y) - y] = 4x + 3y$$
$$7x - [E + 2x - 3y - y] = 4x + 3y$$
$$7x - E - 2x + 4y = 4x + 3y$$
$$-E = -x - y$$

Luego: $E = x + y$.

2.3 Multiplicación de polinomios

Para el tratamiento de este punto se sugieren 5 horas. Los alumnos deben desarrollar habilidades en la multiplicación de polinomios, así como en la simplificación de expresiones algebraicas que contengan signos de agrupación con productos indicados.

Para introducir la multiplicación de polinomios se puede partir del producto de un monomio por un polinomio, que resulta ya conocido para los alumnos y se realiza utilizando la propiedad distributiva. Ahora se plantea el problema nuevo: ¿cómo proceder para calcular el producto de dos polinomios?

La idea se obtiene del procedimiento ya recordado y se resalta el instrumento necesario: *la propiedad distributiva*.

Aplicando esta propiedad, la multiplicación de dos polinomios se reduce a la multiplicación de un monomio por un polinomio.

Así, por ejemplo, si queremos calcular el producto de $3x+y$ y $2x-5y$ procedemos a calcular por etapas como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}(3x+y)(2x-5y) &= 3x(2x-5y)+y(2x-5y)\\ &= 3x\cdot 2x-3x\cdot 5y+y\cdot 2x-y\cdot 5y\\ &= 6x^2-15xy+2xy-5y^2\\ &= 6x^2-13xy\ -5y^2.\end{aligned}$$

De aquí resulta el algoritmo para multiplicar dos polinomios, el cual se presenta a continuación:

> Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se reducen términos semejantes, en caso de que existan.

Los alumnos deben estar bien claros de que al multiplicar dos polinomios se obtiene un nuevo polinomio cuyos términos son los productos parciales de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

Para fijar este procedimiento resulta apropiado el siguiente ejemplo u otro similar.

EJEMPLO

Calcula:

a. $(a^2 + 3a^3)(2a^2 - 5a)$
b. $(2x - 3)(x^2 - 5x + 2)$
c. $(2x^2 + 3y^2 - xy)(4xy + 3x^2 - y^2)$
d. $(a^4 - a^2 - 2a + 3)(a^3 - 2a + 1)$

Resolución:

a. $(a^2 + 3a^3)(2a^2 - 5a) = 2a^4 - 5a^3 + 6a^5 - 15a^4$ (efectuando los productos parciales)
$= -13a^4 - 5a^3 + 6a^5$ (reduciendo términos semejantes)

Por lo general, se acostumbra a dar el resultado de modo que los términos del polinomio estén ordenados en potencias decrecientes (de mayor a menor exponente) de la variable que contenga, o de una de ellas si contiene más de una.

Luego, en el caso anterior tendremos que la respuesta se expresa: $6a^5 - 13a^4 - 5a^3$. También, en la práctica, suelen ordenarse los términos de los factores y así, el polinomio que resulta como producto, queda ya ordenado.

Veamos:
a. $(3a^3 + a^2)(2a^2 - 5a) = 6a^5 - 15a^4 + 2a^4 - 5a^3 = 6a^5 - 13a^4 - 5a^3$

b. $(2x - 3)(x^2 - 5x + 2) = 2x^3 - 10x^2 + 4x - 3x^2 + 15x - 6$
$= 2x^3 - 13x^2 + 19x - 6$

Otra forma de disponer los cálculos es la siguiente.

$$\begin{array}{ll}
\underline{(2x - 3)(x^2 - 5x + 2)} & \\
2x^3 - 10x^2 + 4x & \text{(producto de } 2x \text{ por } x^2 - 5x + 2) \\
\underline{\quad - 3x^2 + 15x - 6} & \text{(producto de } -3 \text{ por } x^2 - 5x + 2) \\
2x^3 - 13x^2 + 19x - 6 & \text{(reduciendo términos semejantes)}
\end{array}$$

En este caso, los términos semejantes se colocan en columna, lo cual facilita su reducción.

c. $(2x^2 + 3y^2 - xy)(4xy + 3x^2 - y^2)$

En casos como este, y en general, cuando los factores contengan muchos términos, resulta conveniente ordenar estos desde un principio para así facilitar los cálculos.

$$\begin{array}{l}
\underline{(2x^2 - xy + 3y^2)(3x^2 + 4xy - y^2)} \\
6x^4 + 8x^3y - 2x^2y^2 \\
\quad -3x^3y - 4x^2y^2 + xy^3 \\
\underline{\qquad\qquad 9x^2y^2 + 12xy^3 - 3y^4} \\
6x^4 + 5x^3y + 3x^2y^2 + 13xy^3 - 3y^4
\end{array}$$

(Aquí hemos ordenado ambos polinomios con respecto a las potencias de x)

d. $$\begin{array}{rrrrrrr}
\multicolumn{7}{l}{\underline{(a^3 - 2a + 1)(a^4 - a^2 - 2a + 3)}} \\
a^7 & - a^5 & - 2a^4 & + 3a^3 & & & \\
 & - 2a^5 & & + 2a^3 & + 4a^2 & - 6a & \\
 & & + a^4 & & - a^2 & - 2a & + 3 \\
\hline
a^7 & - 3a^5 & - a^4 & + 5a^3 & + 3a^2 & - 8a & + 3
\end{array}$$

Resulta conveniente sugerir a los alumnos que antes de efectuar la multiplicación de dos polinomios se deben ordenar éstos en potencias decrecientes (de mayor a menor exponente) de la variable que contenga o de ellas, si contiene varias, de esta forma el resultado queda también ordenado.

Queremos aclarar que sólo en los primeros ejemplos o ejercicios se deben indicar los productos parciales; en la práctica debe lograrse rápidamente que los alumnos realicen la operación en dos pasos: calcular los productos parciales y reducir términos semejantes (si existen).

Es conveniente mostrar a los alumnos las dos formas de cómo disponer los polinomios factores para realizar los cálculos, tal como se ilustra en el ejemplo anterior, inciso b).

De modo general, cuando los dos factores son binomios, puede calcularse el producto aplicando el algoritmo correspondiente y colocando los productos parciales uno a continuación del otro en una misma fila.

Ahora bien, cuando al menos unos de los factores tiene más de dos términos entonces resulta más apropiado utilizar el otro esquema de cálculo, donde se van colocando convenientemente (uno debajo del otro) los términos semejantes para así facilitar su reducción.

Este esquema no es exactamente igual al que se utiliza en aritmética (para multiplicar números), aunque la disposición en filas horizontales sí es igual. Resulta conveniente que los alumnos sepan que es más racional colocar primero (a la izquierda) el factor que tenga menos términos pues así se reducen los pasos.

Cuando se utiliza este esquema de cálculo, el profesor debe resaltar la necesidad de que los factores polinomios estén ordenados según sus términos de mayor a menor grado de la variable que contenga (o con respecto a una de ellas) y además dejar los espacios en blanco correspondientes a las potencias que faltan, tal como se muestra en la resolución de los incisos c) y d) del ejemplo anterior.

Queremos aclarar al profesor que no debe imponer a los alumnos un esquema de cálculo determinado en unos u otros casos, sino sólo sugerir que calculen de la forma que les sea más ventajosa.

Para lograr un desarrollo de habilidades pueden hacerse los siguientes ejercicios u otros similares que el profesor puede crear.

1 Calcula:

a. $(a - 2)(a + 6)$
b. $(x + 5)(x - 5)$
c. $(c - 4)(3 + c)$
d. $(b + 7)^2$
e. $(4m - 1)(m - 2)$
f. $(3a + 2b)(a - 5b)$
g. $(x^2 + 2a)(a^2 + 2x)$
h. $(2x^2y + 3yz)(3x^2 - 4z)$
i. $(2p^2 - 5q)(p^2 - 0{,}4q)$
j. $(3c^2 - 0{,}4dg)(5c^2 + 6dg)$
k. $(2p^3q + 4qr^2)(p^3 - 3r^2)$
l. $(-2ab^2 + 3b^3)(ab^2 - b^3)$
m. $(x - 5y)(3x + y)^2$
n. $(c^2 + 3)(c^2 - 3)(3c^4 + 5)$

2. Efectúa:

a. $(2m - 3)(m^2 + 4m - 1)$
b. $(a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^2 + b^2)$
c. $(x^4 + x^2 - 1)(x + 2)$
d. $(2.4c^2 - 5c + 3)(0{,}5c + 1{,}2)$
e. $(m^4 - 3m^2 + 4)(3m^3 - 2m + 1)$
f. $(6y^2 + 2x^2 - 5xy)(3x^2 - 4y^2 + 2xy)$
g. $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 - ab + b^2)$
h. $(3x - 2y)(x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - y^3)$
i. $(x - 4x^2 + x^3 - 3)(x^3 - 1 + 4x^2)$
j. $2a^2b(a^2 - 2ab)(2a^2 + 3ab - b^2)$

Al resolver los incisos c) y d) del ejercicio 1 los alumnos deben aplicar la definición de potencia y descomponer estas potencias en factores iguales; así resulta

$(b+7)^2 = (b+7)(b+7)$ y luego calcular el producto de estos factores; en los incisos n) y o) hay que aplicar la propiedad asociativa.

Como otra variedad, proponemos los siguientes tres ejercicios.

1. Probar que:

   a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   b. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
   c. $(m-5)(m+4) = m^2 - m - 20$
   d. $(p+q)(p^2 - pq + q^2) = p^3 + q^3$
   e. $(c+1)(c^3 - c^2 + c - 1) = c^4 - 1$
   f. $(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$

2. Sean: $A = 5c - d$; $B = c^2 - 3cd + 9d^2$; $C = c + 3d$
   a. Calcule $A \times B$.
   b. Determine el valor numérico de $B \times C$ para $c = -2$; $d = \frac{1}{3}$

3. Diga sin calcular, en cada caso, cuántos términos tendrán los productos siguientes que aparecen indicados:

   a. $(a+c)(c+d)$
   b. $(p+q)(r-s+t)$
   c. $(m-n-p)(x+y+z)$
   d. $(a-c+c+d)(e+f-g)$

El ejercicio 3 resulta interesante, ya que contribuye a desarrollar el pensamiento combinatorio de los alumnos. Por ejemplo, ofrecemos una idea para la resolución del inciso b). $(p+q)(r-s+t)$

Se trata del producto de un polinomio de dos términos por otro de tres términos; luego según el algoritmo habrá $2 \times 3 = 6$ productos parciales y por tanto el producto resultante tendrá 6 términos.

Puede proponerse además un ejercicio como el siguiente, que también contribuye al desarrollo del pensamiento combinatorio.

- Diga sin calcular, en cada caso, cuántas veces aparecerá en el producto resultante el factor indicado.

  a. $(a+b)(a+b)$; ab
  b. $(x-y)(x-y)(x-y)$; x^2y, y^3

Una idea para la resolución de este ejercicio es la siguiente:

Por ejemplo, en el inciso a) para obtener el producto parcial ab existen dos posibilidades: el producto de a (del primer factor) por b (del segundo factor) y viceversa; luego el término ab aparecerá dos veces en el producto resultante.

En el inciso b) el producto parcial x^2y es es producto formado por tres factores. De una forma intuitiva (aplicando relaciones combinatorias) los alumnos deben llegar a la conclusión que existen tres posibilidades, tomando la *x* de dos de los factores binomios y la y del factor restante. Para obtener y^3 sólo existe una posibilidad que es el producto de los factores *y* que aparecen en cada uno de los factores binomios del producto indicado.

Inclusive, el profesor puede (a manera de comentario con los alumnos) explicar cómo puede obtenerse utilizando las ideas combinatorias el desarrollo de la expresión $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, pues se obtienen 4 términos: a^2 (una vez), ab (dos veces) y b^2 (una vez), de donde resulta $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e informar que ésta es una fórmula que estudiarán posteriormente.

Una vez fijado el procedimiento y desarrolladas las habilidades correspondientes en la multiplicación de polinomios, puede pasarse a la resolución de ejercicios donde aparecen en forma combinada multiplicaciones con sumas y restas, así como la simplificación de expresiones donde aparezcan varios signos de agrupación con productos indicados.

Los alumnos deben tener bien claro que en las operaciones combinadas con términos y polinomios se sigue el mismo orden que ya conocen por años anteriores.

Para el tratamiento de estos ejercicios sugerimos al profesor que proponga a los alumnos el siguiente ejemplo u otro ejemplo con características similares.

EJEMPLO

Calcule:

a. $4x - 3(x + y)$
b. $7c + (2c - 5)(c + 4)$
c. $5a^2 - (a + 5b)(2a - 3b)$
d. $3x^2 + 2[2x - x(x - 3) - 4x]$

Resolución:

a. $4x - 3(x + y)$

Calculamos primero el producto $-3(x + y) = -3x - 3y$ y adicionamos este resultado a $4x$. Resulta entonces:
$4x - 3(x + y) = 4x - 3x - 3y = x - 3y$

b. $7c + (2c - 5)(c + 4)$

En este caso hay que calcular el producto $(2c - 5)(c + 4)$ y luego adicionarlo a $7c$.

$$\begin{aligned} 7c + (2c - 5)(c + 4) &= 7c + (2c^2 + 8c - 5c - 20) \\ &= 7c + 2c^2 + 8c - 5c - 20 \\ &= 2c^2 + 10c - 20 \end{aligned}$$

c. $5a^2 - (a + 5b)(2a - 3b)$

De forma análoga al caso anterior, se calcula primero el producto y luego se sustrae de $5a^2$.

$$\begin{aligned} 5a^2 - (a + 5b)(2a - 3b) &= 5a^2 - (2a^2 - 3ab + 10ab - 15b^2) \\ &= 5a^2 - 2a^2 + 3ab - 10ab + 15b^2 \\ &= 3a^2 - 7ab + 15b^2 \end{aligned}$$

d. $3x^2 + 2[2x - x(x - 3) - 4x]$

En este caso, para eliminar los signos de agrupación, deben calcularse los productos que aparecen indicados:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2[2x - x(x - 3) - 4x] &= 3x^2 + 2[2x - x^2 + 3x - 4x] \\ &= 3x^2 + 4x - 2x^2 + 6x - 8x \\ &= x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Sobre la resolución del ejemplo a): $4x - 3(x + y)$ haremos los siguientes comentarios:

Aquí resulta conveniente interpretar esta expresión como la suma de $4x$ con $-3(x+y)=-3x-3y$ Luego: $4y-3(x+y)=4x-3x-3y=x-3y$.

Otra interpretación que puede darse a este caso es que se trata de una resta donde el minuendo es $4x$ y el sustraendo es $3(x+y)=3x+3y$.

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} 4x-3(x+y) &= 4x-(3x+3y) \\ &= 4x-3x-3y = x-3y. \end{aligned}$$

Como hemos visto, con cualquiera de las dos interpretaciones se llega al mismo resultado (lo cual resulta obvio, pues la resta no es más que una suma algebraica). Entendemos que la primera interpretación resulta más conveniente en casos como éste en que se trata de un monomio que multiplica a un polinomio.

En el ejemplo c): $5a^2-(a+5b)(2a-3b)$, en que los factores son polinomios, es mejor interpretar la expresión como una resta. En nuestro ejemplo el minuendo es $5a^2$ y el sustraendo es $(a+5b)(2a-3b)$.

Primero se calcula el producto $(a+5b)(2a-3b)$ y luego se sustrae de $5a^2$.

Esta interpretación resulta más conveniente para los alumnos en casos como éste, pues así existen menos posibilidades de incurrir en errores de signos, que si se calcula directamente toda la operación.

La resolución del inciso d) indica una vía de como proceder en los casos en que aparezcan varios signos de agrupación con productos indicados. Aquí también es recomendable proceder "de adentro hacia fuera" .

Con respecto a la ejercitación se sugiere el sistema de ejercicios siguientes.

1. Calcular:

a. $2a+a(a-7)$

b. $5d-2(d-4)$

c. $4c^3+3c(c-c^2)$

d. $3b^2-b(b+2)-b$

e. $3x^2-x(x-3)+x$

f. $4m+5(2-m)+1$

g. $7p + 2q - 3(2p - q)$

h. $5x^2 + (x + y)(x - y)$

i. $2a^2 - (2a + 3b)(a - b)$

j. $-(p + q)(3q - p) + 2pq$

k. $(x + 3)(x - 4) + 3(x - 1)(x + 2)$

l. $-5x^2y - (2x^2 - 3y)(x^2 - y) + 3x^4$

m. $3a^2b^2 - 2a(ab - b^2)(b - 3)$

n. $2c(c - 3d^2) - 3d(2c + d)(c - d)$

o. $9x^2 - x(x + y) - (2x + y)(3x - y)$

2. Simplifique:

a. $5x + [2x + 2(x - y)]$

b. $6a^2 + [3a - 4(a^2 - a)]$

c. $10p - [-2q + 5(2p - q)]$

d. $2b - [3a - 2(b + 4a) + b]$

e. $6t^2 - 2[2t^2 - t(t - 5)]$

f. $4m - 3[2m - m(m - 4) - 3m^2]$

g. $7y^2 - y[2 - 3(y^2 - 4y) -2y^2]$

h. $6a + 2\{3a - 3[2a -(a-2)]\}$

i. $5c + \{c - 2 [c + 3d - 4(c + d)]\}$

j. $-7b – [3b^2 -(b^2 + 2b - 1) - 3b] + 1$

k. $8r^2 + 2[3q^2 -(2p + 3q)(p - q)]$

l. $8r^2 - [-t^2 + 3(r + 2t)(2r - t)]$

m. $8a^2b - [3b^3 - 2(a^2 - 3b)(2a^2 + b) - a^4]$

n. $5m^3n^2 - \{-2m^2n^3 + 4[2m^3n^2 - mn(3m^2n + 3mn^2)] - 4m^3n^2\}$

o. $*-5x^4 - \{3x^2(2y - x^2) - [2x^2y + (2x^2 - y)(x^2 + 3y) - 2y^2]\}$

3. Simplificar las expresiones siguientes y calcular su valor numérico para los valores de las variables que aparecen indicados:

a. $3x^2 - [5xy + 2x(x - 3y) - x^2]$ *para* $x = 0{,}5$; $y = - 3$

b. $7ab - 3[2b - b(5 - a)]$ *para* $a = -\frac{1}{2}$; $b = 8$

c. $5bcd - [10bc^2 - 5bc(3c - d) + b^2c]$ *para* $b = 1{,}5$; $c = -2$; $d = 1$

d. $5pqr - [3pq(r - p) - 2{,}1p^2q + 0{,}5pqr]$ *para* $p = -1$; $q = 2$; $r = -3$

e. $10m^4 - [3n^2 + (2m^2 + n)(m^2 - 3n)]$ *para* $m = \frac{1}{2}$; $n = -2$

f. $-2y^2 + [-2x^2 - (4x + y)(x - 2y)]$ *para* $x = -1$; $y = \dfrac{2}{7}$

g. $2rt - 4[2t^2 + (2r + t)(r - t) - 3r^2]$ *para* $r = -2$; $t = \dfrac{1}{2}$

h. $3ab - 12b^2 - \{[(2a - b)(a + 2)] + a^2\}$ *para* $a = 0{,}4$; $b = -\dfrac{1}{2}$

4. Probar que se cumplen las igualdades siguientes:

a. $3ab^2 - [ab - 3(2 - ab^2) + 5] + ab = 1$

b. $3x^2 - (4x^2 + 2x^2y - 2x^2) + 2x^2y = x^2$

c. $11\,rt + [-7rt - 2rt(3r - 4) - 5r^2t] = -rt$

d. $-5p^2q - \{5pq^3 + [-2p^2q - 2p(pq + 3q^2)]\} = -p^2q + pq^2$

e. $-10c - \{3 + [4c^2 - 2(c + 3)(2c - 1)] - 11\} = 2$

f. $12n^2 - 2[-4mn - (2m - 3n)(m + 2n) + m^2] = 2m^2 + 10mn$

g. $1976c^2 - [-652c^2 + 3(25c - 52)(5c - 352) + 2253c^2] = 27180c - 52912$

h. $4xy + \{-2x^2 - 2[2xy + (2x - y)(2x + y)] - y^2\} = -10x^2 - y^2$

5.

a. Simplificar la expresión $2x - (3y^2 - x) + 4y\left(y - \dfrac{1}{4}x\right)$.

b. Comprobar que para $x = \dfrac{1}{6}$; $y = -3$ el resultado del inciso a) es 10.

6. Sean: $H = 4a$; $K = 2a - b$; $L = 6a^2 - 3ab$

a. Hallar $T = HK\text{-}L$.

b. Calcular el valor de T para $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -1$.

7. Sean: $A = 3p^2 + q$; $B = 3p^2 - q$; $C = 4p^4 - q^2$ Comprobar que $AB - 2C = p^4 + q^2$

8. Sean: $P = 0{,}6x^2 - \dfrac{7}{5}y^2$; $Q = 3x - 4y$; $R = x - 2y$

a. Simplificar $5r$ - QR.

b. Si se conoce que $y = -3$, ¿cuál debe ser el valor de x para que el resultado obtenido en el inciso a sea igual a 0?

9. Dados los polinomios: $S_1 = 2x + 3$; $S_2 = x - 4$; $S_3 = 3x^2 - x + 2$. Calcular y simplificar:

a. $S_1 - S_2 - S_3$

b. $(S_1 + S_2)\,S_3$

c. $(S_3 - S_1)\, S_2$
d. $S_1 + S_2\, S_3$

10. Determinar el polinomio que hay que adicionar al producto de $3x + 5y$ y $2x - y$ para obtener $10xy - 6y^2$.

11. ¿De qué expresión algebraica hay que sustraer el producto de $3a^2b - 2c$ y $2a^2b - c$ para obtener $-5a^4b^2 - a^2b + 3c^2$?

12. Para obtener como resultado $a^2 + 10a^2 - a - 1$, ¿qué expresión hay que sustraer del producto de $3a - 2$ y $a^2 + 4a - 1$?

13. Probar que si el producto de $3p + 1$ y $2p - 3$ se sustrae de $6p^2 - 1$ y se adiciona $-7p + 2$ al resultado obtenido, finalmente se obtiene 4.

Del sistema de ejercicios, debe comenzarse por los ejercicios 1 y 2 que contribuyen al desarrollo de habilidades en la simplificación de expresiones algebraicas donde aparecen multiplicaciones combinadas con sumas y restas. El ejercicio 3 incluye el cálculo del valor numérico. Los restantes ejercicios (del 4 al 13) constituyen otras variedades de ejercicios donde se integran los conocimientos.

Por ejemplo, en los ejercicios del 11 al 13 puede sugerirse a los alumnos que procedan a calcular por pasos. A continuación ofrecemos la resolución del ejercicio 11.

1. Calculamos el producto de $3a^2b + 2c$ y $2a^2b - c$:

$$(3a^2b + 2c)(2a^2b - c) = 6a^4b^2 + a^2bc - 2c^2.$$

Según el texto del ejercicio, la expresión incógnita que designaremos por x es igual a la suma del polinomio $-5a^4b^2 - a^2bc + 3c^2$ con $6a^4b^2 + a^2bc - 2c^2$; luego calculamos dicha suma y obtenemos finalmente que $x = a^4b^2 + c^2$.

Otra forma para resolver el ejercicio es hacer el planteo de la ecuación que resulta, desde un inicio, y despejar la incógnita:

$$x - (3a^2b + 2c)(2a^2b - c) = -5a^4b^2 - a^2bc + 3c^2.$$

2. 4 División de Polinomios

Para el tratamiento de este punto se sugieren 7 horas. Se debe lograr que los alumnos aprendan el algoritmo para dividir dos polinomios y desarrollen habilidades en la división de un polinomio por un binomio, así como en la simplificación de expresiones algebraicas donde aparezcan de forma combinada las cuatro operaciones básicas con polinomios y términos.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, puede comenzarse planteando a los alumnos un ejercicio de multiplicación como el siguiente:

Calcular $(2x+1)(x-5)$.

Los alumnos calcularán y llegarán fácilmente al resultado: $(2x+1)(x-5)=2x^2-9x-5$, entonces el profesor recordará que como la división es la operación inversa de la multiplicación, debe cumplirse que:

$$(2x^2-9x-5)\div(x-5)=2x+1 \quad \textbf{o} \quad (2x^2-9x-5)\div(2x+1)=x-5\ .$$

Ahora bien, en ambos casos se trata del cociente de un polinomio por otro polinomio. Los alumnos ya saben calcular el cociente de un polinomio por un monomio; el problema nuevo radica en cómo calcular el cociente en el caso de que el divisor sea también un polinomio (en este año nos limitaremos al caso en que el divisor sea un binomio).

Una vez hecho lo anterior, a manera de motivación, puede pasarse seguidamente a explicar, a través de un ejemplo, cómo proceder para dividir un polinomio por otro polinomio. El profesor puede guiarse según el siguiente algoritmo:

Para dividir un polinomio por otro polinomio:

1. El dividendo y el divisor deben ordenarse en potencias decrecientes de una misma variable.
2. Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.
3. Este primer término del cociente se multiplica por el divisor y el producto resultante se sustrae del dividendo; de esta forma se obtiene el resto.

4. Si este resto es de mayor o igual grado que el divisor (atendiendo a la variable respecto a la cual se ordenaron los polinomios), lo consideramos como el nuevo dividendo y se repite así el proceso hasta obtener un resto de menor grado que el divisor, el cual será el resto de la división.

Es de resaltar que el esquema de cálculo que se utiliza en la división de polinomios es muy similar al que se emplea en aritmética para dividir números.

Para fijar el algoritmo de la división, sugerimos resolver el siguiente ejemplo u otro que tenga similares características (de acuerdo a la variedad de caso que se presentan).

EJEMPLO

Efectúa las divisiones siguientes:

a. $(3a^2 - 8a - 3) \div (3a - 2)$
b. $(2x^2 - 11y^2 + 3xy) \div (x - 2y)$
c. $(2b^3 - 4b - 2) \div (2b + 2)$
d. $(6c^4 - 7c^3 - 4c^2 + 5) \div (-c + 2c^2)$

Resolución:

a. $(3a^2 - 8a - 3) \div (3a - 2)$

Tanto el dividendo como el divisor están ordenados en potencias decrecientes de la variable a; luego procedemos a efectuar la división.

$$
\begin{array}{rl}
3a^2 - 8a - 3 & \lfloor \underline{3a - 2} \\
\underline{-3a^2 + 2a \quad} & \quad a - 2 \\
-6a - 3 & \quad \uparrow \\
\underline{6a - 4} & \text{Cociente}
\end{array}
$$

Resto $\rightarrow$ - 7

Al obtener -7 como resto la división termina, pues el grado de dicho resto es menor que el grado del divisor.
Como el resto de la división no es cero, la misma es inexacta.

Para comprobar el resultado verificamos que el producto del divisor por el cociente más el resto sea igual al dividendo.

Comprobación:

$(3a - 2)(a - 2) - 7 = 3a^2 - 6a - 2a + 4 - 7$

$= 3a^2 - 8a - 3$ que es el dividendo

b. $(2x^2 - 11y^2 + 3xy) \div (x - 2y)$

Antes de efectuar la división, ordenamos el dividendo según potencias decrecientes de x y luego calculamos:

$$
\begin{array}{ll}
2x^2 + 3xy - 11y^2 & \underline{\lfloor\, x - 2y\,} \\
\underline{-2x^2 + 4xy\quad} & 2x + 7y \\
\quad 7xy - 11y^2 & \quad\uparrow \\
\quad \underline{-7xy + 14y^2\quad} & \text{Cociente} \\
\text{Resto} \rightarrow 3y^2 &
\end{array}
$$

El resto de la división es $3y^2$ ya que el grado de este resto (con respecto a la variable x) es menor que el grado del divisor.

c. $(2b^3 - 4b - 2) \div (2b + 2)$

Observe que en el polinomio dividendo falta el término correspondiente a b^2 (podemos considerar que este término tiene coeficiente 0, es decir, $0b^2$). Luego, al disponer los cálculos, dejamos en el dividendo el espacio correspondiente a este término.

$$
\begin{array}{llll}
b^3 & & -4b - 2 & \underline{\lfloor 2b + 2 \quad} \\
\underline{-2b^3 - 2b^2} & & & b^2 - b - 1 \\
\quad -2b^2 - 4b & & \uparrow & \\
\quad \underline{\; 2b^2 + 2b \quad} & & \text{Cociente} & \\
\quad\quad -2b - 2 & & & \\
\quad \underline{\quad\quad 2b + 2} & & & \\
\quad \text{Resto} \rightarrow 0 & & &
\end{array}
$$

Comprobación:

$$(2b + 2)(b^2 - b - 1) = 2b^3 - 2b^2 - 2b + 2b^2 - 2b - 2$$

$$= 2b^3 - 4b - 2\,.$$

d. $(6c^4 - 7c^3 - 4c^2 + 5) \div (-c + 2c^2)$

Para calcular, ordenamos el divisor según potencias decrecientes de la variable c y dejamos en el dividendo el espacio que corresponde al término en c.

$$6c^4 - 7c^3 - 4c^2 \quad + 5 \qquad \underline{\lfloor 2c^2 - c \quad}$$

$-6c^4 + 3c^3$ $\quad\quad$ $3c^2 - 2c - 3$

$- 4c^3 - 4c^2$ $\quad\quad$ $\uparrow$

$4c^3 - 2c^2$ $\quad\quad$ Cociente

$- 6c^2$

$6c^2 - 3c$

Resto $\rightarrow$ $-3c + 5$

Al obtener como resto $-3c + 5$ la división termina, ya que dicho resto tiene menor grado que el divisor.

A continuación haremos las siguientes observaciones:

- Debe insistirse a los alumnos que antes de efectuar una división, cuando se dispone el esquema de cálculo, es necesario que tanto el dividendo como el divisor estén ordenados en potencias decrecientes de la variable que contengan o según una de ellas, si tienen más de una.
- Si en el polinomio dividendo falta el término correspondiente a una potencia, debe dejarse el espacio en blanco que corresponde a dicha potencia, pues la misma puede aparecer en uno de los restos parciales.
- Cuando uno de los restos parciales tenga un grado menor que el grado del divisor, la división se interrumpe y dicho resto parcial es el resto de la división.

Para controlar los resultados obtenidos, debe sugerirse a los alumnos que pueden comprobar la división, de forma análoga a como la aprendieron en la primaria, es decir, aplicando la relación D = d c + r (D = dividendo, d = divisor, c = cociente; r = resto).

No obstante, queremos aclarar que en los ejercicios de división no es necesario exigir a los alumnos la comprobación por escrito en todos los casos, sino que ésta constituya una forma de autocontrol para el alumno, si éste desea hacerlo.

Cuando la división no es exacta, no se exigirá a los alumnos (en este nivel) expresar el llamado cociente completo, es decir $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$ simplemente se da el cociente y se indica el resto.

Aunque el objetivo de esta unidad es aplicar el algoritmo de la división en los casos que el divisor sea un binomio, puede informarse a los alumnos que este procedimiento se hace extensivo a casos en que el divisor tenga más de dos términos.

Para la ejercitación, debe comenzarse por un bloque de ejercicios de división, haciendo un mayor énfasis en los casos donde el dividendo y el divisor son polinomios en una sola variable. Este primer nivel de ejercitación contribuirá a desarrollar las habilidades necesarias en la división de un polinomio por un binomio.

También recomendamos el siguiente ejercicio u otros similares en los que haya que sustituir y calcular el valor numérico del resultado.

Sean: $A = 6x^2 - xy - 2y^2$; $B = y + 2x$

a. Calcula $C = \dfrac{A}{B}$
b. Halla el valor numérico de C para $x = 4$; $y = -3$.

Los ejercicios siguientes resultan apropiados para que los alumnos apliquen la relación entre la multiplicación y la división como operaciones inversas (una de la otra), y entre el dividendo, el divisor y el cociente (en una división exacta).

1. Si el producto de dos polinomios es $12x^4 + 11x^2y^2 - 5y^4$ y uno de los factores es $3x^2 - y^2$, calcule el otro factor.

2. Si el cociente de dos polinomios es $a^2 - 3a - 4$ y el divisor es $a - 1$, calcule el dividendo.

3. El cociente de dos polinomios es $2rt - 3t^2$ y el dividendo es $10r^2t^2 - 11rt^3 - 6t^4$. Calcule el divisor.

En el ejercicio siguiente, de una división inexacta de dos polinomios se conoce que:

a. El resto es -2, el cociente es $3b - 1$ y el divisor es $4b + 5$. ¿Cuál es el dividendo?
b. El resto es $11q^2$, el cociente es $p + 2q$ y el dividendo es $p^2 - 2pq + 3q^2$. ¿Cuál es el divisor?,

Hay que aplicar la conocida relación: $D = d \cdot c + r$ que es equivalente a $d = \dfrac{D - r}{c}$.

El ejercicio siguiente conduce a dos divisiones reiteradas.

¿Por cuál expresión hay que dividir el cociente de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ y $x + 3$ para obtener $x - 2$?

Otro aspecto importante dentro de este punto es que los alumnos logren un desarrollo de habilidades en la resolución de ejercicios donde aparezcan en forma integrada las cuatro operaciones básicas con polinomios y términos.

Recomendamos el siguiente ejercicio, y para los alumnos de mayor rendimiento el literal f).

Copie la siguiente tabla y complétala:

	A	B	$A + B$	$A - B$	$A \times B$	$A \div B$
a)	$2a^2 + 7a - 4$	$a + 4$				
b)	$x^2 - 6x + 5$		$x^2 - 5x$			
c)		$b - 1$			$b^3 + b^2 - 5b + 3$	
d)		$x + 2$				$x - 7$
e)	$2m^3 - 5m + 6$			$2m^3 - 6m + 4$		
f)			$6p^2 + 8p$	$6p^2 + 2p - 8$		

A continuación ofrecemos una vía de solución para el inciso f), la resolución de este inciso constituye un anticipo para el trabajo con los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que se estudiará posteriormente.

Se conocen:
$$\begin{aligned} A + B &= 6p^2 + 8p \\ A - B &= 6p^2 + 2p - 8 \end{aligned}$$

Como acabamos de plantear en el párrafo anterior, estamos ante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A y B). Sólo se conoce la suma y la diferencia de A y B. Ahora bien, a manera de impulso, puede sugerirse que adicionen estos resultados y preguntar: ¿a qué será igual esta suma?

Evidentemente esta suma será igual a A + B + (A – B) que es igual a 2A, luego basta con dividir por dos para obtener la expresión A. Una vez obtenida A resulta fácil determinar B.

Otra vía sería despejar una de las incógnitas en una de las dos igualdades y sustituir en la otra con vista a trabajar en una ecuación con una sola incógnita; ahora bien, esto constituye la esencia del método de sustitución que se estudiará al resolver los sistemas de ecuaciones. Por lo tanto, recomendamos la primera vía que resulta mucho más rápida en este caso.

Los siguientes ejercicios integran, prácticamente, todos los procedimientos algebraicos estudiados en la unidad.

1 **Pruebe que las igualdades siguientes se cumplen:**

a. $(a^2 - 7a + 10) \div (a - 5) = a - 2$

b. $(9m^2 + 6m + 1) \div (3m + 1) - 1 = 3m$

c. $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^2 - 3} - 4(x - 0{,}5) = x^2 - 4x$

d. $\dfrac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2} - 2x = x - 4$

e. $\dfrac{c^2 - 7c - 18}{c - 9} + (3c - 2) = 4c$

f. $(2p^2 + 5p - 3) \div (2p - 1) - (p - 2) = 5$

g. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \div (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

h. $\dfrac{m^3 - 2m - 4}{m - 2} + (2m + 1)(m - 2) + m = 3m^2$

2 **Simplifique las expresiones siguientes y calcule su valor numérico para los valores de las variables que se indican en cada caso:**

a. $\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x - 3} + 2x$ para $x = \dfrac{2}{3}$

b. $(5m^2 + 18m - 8) \div (5m - 2) + (6 - 3m)$ para $m = 0{,}5$

c. $(3a^2 - 14a + 8) \div (a - 4) - (2a - 5)$ para $a = -3$

d. $\dfrac{4y^2-4y-3}{2y-3}+4y(y-0{,}5)$ para y = -3

e. $(x-3)(x^2+x-5)+\dfrac{2x^3-x^2+3x+6}{x+1}$ para $x = -2$

f. $(3p+1)(p-2)-\dfrac{3p^2-14p+8}{p-4}$ para $p = -1$

g. $\dfrac{3x^2-2x^2-16}{x-2}-(x+4)(x-6)-32$ _ para $x = -4$

h. $\dfrac{8c(c-2d)-(3c^2-3d^2)}{c-3d}\times(5c+d)$ para $c=-\dfrac{1}{5}$; $d = -1$

Los siguientes ejercicios constituyen ejercicios con texto que conducen a operaciones combinadas con polinomios. En ellos se puede ir calculando por etapas o hacer el planteo completo desde un inicio; esto lo dejamos a consideración del profesor, atendiendo a las características y posibilidades de sus alumnos.

Por ejemplo, en el ejercicio siguiente se sustrae $7a^2 - 3ab + 2b^2$ de $10ab + 13a^2 + 7b^2$ y se divide esta diferencia por $2a + b$. ¿Por cuál expresión hay que multiplicar este cociente para obtener como resultado $9a^2 - 25b^2$?

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Los ejercicios que se deben realizar son de los siguientes tipos:

- Calcular la suma o la diferencia de dos polinomios incluyendo ejercicios combinados de suma y resta.
- Simplificar expresiones donde aparezcan paréntesis superpuestos.
- Calcular el producto de dos polinomios.
- Simplificar expresiones donde se combine la multiplicación con suma y resta, así como expresiones donde aparezcan varios signos de agrupación con productos indicados.
- Calcular el cociente de un polinomio por un binomio.
- Simplificar expresiones donde aparezcan en forma combinada las cuatro operaciones básicas con polinomios.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. PROBLEMAS.

En esta unidad temática se aplicarán los procedimientos algebraicos estudiados, a la resolución de ecuaciones, al despeje de fórmulas y a la resolución de problemas que conducen al planteo de una ecuación.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 15 horas y podemos distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Resolución de ecuaciones.
- Despeje de fórmulas.
- Resolución de problemas.

3.1 Resolución de ecuaciones.

Para el tratamiento de este punto recomendamos dedicar 4 horas. Se debe lograr que los alumnos desarrollen habilidades en la resolución de ecuaciones lineales para lo cual tienen que aplicar los procedimientos algebraicos estudiados en las unidades temáticas anteriores.

Dentro de este punto no se aborda teoría nueva, es decir, no se trata de resolver un "nuevo tipo" de ecuaciones; lo que se pretende hacer es aplicar el procedimiento ya conocido desde años anteriores para la resolución de ecuaciones, pero incorporando los elementos del tecnicismo algebraico introducidos en este grado.

Para comenzar, puede presentarse el siguiente ejemplo o proponer otros ejemplos de similares características.

EJEMPLO

1. Resuelve y comprueba las ecuaciones siguientes:

   a. $9x - (5x - 2) - x = 8 + (4 - 2x)$
   b. $(2x + 1)(x - 4) + 13 = 2x^2 - 10x$
   c. $3x - [2(x + 5) - 4] = 7x$

<u>Resolución:</u>

a. $9x - (5x - 2) - x = 8 + (4 - 2x)$

Para resolver esta ecuación hay que eliminar previamente los paréntesis aplicando el procedimiento que ya conoce el alumno. Resulta entonces:

$9x - 5x + 2 - x = 8 + 4 - 2x$

$$3x + 2 = 12 - 2x$$
$$3x + 2x = 12 - 2$$
$$5x = 10$$
$$x = 2.$$

Comprobación:

M.I.: $9 \times 2 - (5 \times 2 - 2) - 2$
$= 18 - 8 - 2 = 8$

M.D.: $8 + (4 - 2 \times 2)$
$= 8 + 0 = 8.$

Comparación: $8 = 8$

Luego: $\boxed{x = 2.}$

b. $(2x + 1)(x - 4) + 13 = 2x^2 - 10x.$

En esta ecuación aparece indicado un producto de dos polinomios (binomios), por tanto, primero hay que calcular dicho producto.

$$2x^2 - 8x + x - 4 + 13 = 2x^2 - 10x$$
$$2x^2 - 7x + 9 = 2x^2 - 10x$$
$$2x^2 - 2x^2 - 7x + 10x = -9$$
$$3x = -9$$
$$x = -3$$

Comprobación:

Para comprobar también se puede sustituir el valor de la variable en ambos miembros de la ecuación e ir trabajando simultáneamente en ellos; al final se debe llegar a una proposición verdadera

M.I. M.D.

$$[(2\times(-3) + 1] (-3 - 4) + 13 = 2\times(-3)^2 - 10 \times (-3)$$
$$-5 \times (-7) + 13 = 2 \times 9 + 30$$
$$35 + 13 = 18 + 30$$
$$48 = 48$$

Luego: $\boxed{x = -3}$

c. $3x - [2(x+5)-4] = 7x$

En este caso, se eliminan primero los signos de agrupación y luego se resuelve la ecuación resultante.

$$3x - [2x + 10 - 4] = 7x$$
$$3x - 2x - 10 + 4 = 7x$$
$$x - 6 = 7x$$
$$x - 7x = 6$$
$$-6x = 6$$
$$x = -1$$

Luego: $\boxed{x = -1}$

En el inciso a. del ejemplo, hay que eliminar primero los paréntesis precedidos por los signos "+" y "-" respectivamente. La ecuación del inciso b. no es en sí lineal, pues contiene términos en *x* al cuadrado, pero dichos términos se cancelan y resulta entonces la ecuación lineal. En la ecuación correspondiente al inciso c) y, en general, en ecuaciones donde aparezcan varios signos de agrupación, el procedimiento a seguir es ir eliminando sucesivamente estos signos (como ya saben los alumnos) y luego resolver la ecuación resultante.

Con respecto a la comprobación de las ecuaciones, ésta debe quedar por escrito solamente cuando se especifica en la orden del ejercicio; no obstante los alumnos deben tener claro que comprobar si el valor hallado satisface la ecuación, constituye una forma de control. Aunque esto es conocido desde años anteriores, debe recordarse que la comprobación se realiza en la ecuación original.

Para la ejercitación, recomendamos los ejercicios siguientes, sólo en el ejercicio 1 se pide realizar la comprobación por escrito; en los restantes no se exige esto. No obstante, si el profesor lo considera necesario puede pedir que hagan la comprobación de algunas de estas ecuaciones.

1. Resuelva las ecuaciones siguientes y compruebe la solución.

   a. $4x + (x + 5) = 15$
   b. $18 - (2x - 6) = 0$
   c. $8x + (5 - 6x) = 17$
   d. $2x - (1 - 6x) = 15$

e. $3a = a + (4a - 8)$
f. $7b = 21 - (3 - 4b)$
g. $9 - (2m - 3) = 20 - 4m$
h. $n + (n + 7) = 27 - 2n$
i. $7p + (7 - p) - (p + 22) = 0$
j. $4 + (y + 3) = 2y - (5y - 27)$
k. $4z + (z - 0{,}7) = 7z - (4{,}9 + 5z)$
l. $8x + (-3x + 1{,}4) = 10{,}7 - (3 - 2x)$
m. $2a - 8 = 3(a - 2) + a$
n. $8(b + 7) - 2b = 5b - (3b - 4)$
o. $8t + 4(t - 2) = -2 - 6(2t + 9)$
p. $(x + 5)(x - 1) = x^2 - 7$
q. $x(x + 2) + 5 = (x + 7)(x - 3)$

2. Determine el valor de x que satisface las ecuaciones siguientes:

a. $x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)$
b. $4x - (3x + 5) + (x + 7) = 2x - 3(x - 1)$
c. $5x - (2x + 1) = 6 - (x - 5) + (2x + 4)$
d. $5x - 6 = 4(x - 1) + x$
e. $2(4x - 1{,}4) + 1 = 4x - (10{,}2 - x)$
f. $3(2{,}4x + 5) - 2{,}3 = 5{,}2x - (x - 10{,}7)$
g. $4(3{,}6x - 8) = 5x - (-1{,}4x + 3{,}7) -2{,}7$
h. $9x - (2x - 3) = 3(x + 1) + 4x$
i. $(x + 7)(x - 3) = 2x + (x^2 - 5)$
j. $(3x + 1)(x - 2) = 3x^2 - (-7x + 26)$
k. $2x^2 + (-x + 8) = (2x + 3)(x - 4)$
l. $(3x - 2)(x + 2) = 3x(x + 1) - (x - 2)$
m. $3x^2 - (x - 5)(x - 3) = 2x^2 + 1$
n. $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = 1$
o. $\frac{2x-7}{5} + \frac{x+11}{2} = -4$
p. $\frac{2x-1}{5} - \frac{5x+6}{10} = x + 8$

Entre los ejercicios propuestos no debe dejar de ponerse al menos un caso en que la ecuación no tenga solución (ejercicio 2, inciso d)), así como uno que tenga infinitas soluciones (ejercicio 2, inciso h)).

Con respecto a los tres últimos incisos del ejercicio 2, se trata de ecuaciones con un mayor grado de dificultad teniendo en cuenta que aparecen denominadores numéricos. Ya los alumnos en octavo grado han trabajado algunos casos sencillos de este tipo, por ejemplo: $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=9-\frac{x}{2}$ y han operado como si estuviesen trabajando con números fraccionarios.

En este año no se pretende dar a los alumnos un método para eliminar los denominadores en una ecuación (esto lo aprenderán cuando estudien las ecuaciones fraccionarias), sino que procedan de forma análoga a como si estuviesen operando con fracciones.

A continuación ofrecemos, a manera de ilustración, la resolución comentada del inciso o), por la vía que consideramos más racional.

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{5x+6}{10}=x+8.$$

Primero efectuamos la reducción de las dos fracciones en el miembro izquierdo de la ecuación; para ello se determina el denominador común y se procede a efectuar la operación, dejando indicado el producto de los numeradores por los factores de ampliación.

$$\frac{2(2x-1)-1(5x+6)}{10}=x+8.$$

Ahora efectuamos los productos indicados y "pasamos" el denominador 10 multiplicando, al otro miembro.

$$4x-2-5x-6=10(x+8)$$
$$-x-8=10x+80$$
$$-11x=88$$
$$x=-8$$

Otra vía es transformar $\frac{2x-1}{5}$ en $\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}$ y $\frac{5x+6}{10}$ en $\frac{5x}{10}+\frac{6}{10}=\frac{x}{2}+\frac{3}{5}$ y resolver la ecuación:

$$\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}-\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{5}\right)=x+8$$

3.2 Despeje de fórmulas.

Para el tratamiento de este punto se sugieren 2 horas. Los alumnos deben aplicar sus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones al despeje de variables en una fórmula o en una ecuación literal.

El contenido correspondiente a este punto esencial resulta muy importante desde el punto de vista de su aplicación, ya que el trabajo con fórmulas tiene una amplia utilización, no sólo en matemática sino también en otras asignaturas como por ejemplo en la física.

Los alumnos deben estar bien claros que una fórmula no es más que una ecuación, la cual expresa determinadas relaciones entre distintos elementos y que en muchas ocasiones se presenta la necesidad de calcular un elemento de una fórmula dada, para lo cual hay que realizar un despeje.

Esto no resulta nuevo para los alumnos, pues desde grados anteriores ya han trabajado con fórmulas.

El profesor puede citar ejemplos de fórmulas y preguntar cuáles son sus elementos o bien pedir a los alumnos que mencionen algunas de las fórmulas conocidas por ellos y preguntar qué relaciones expresan, así como sus elementos.

Es importante que los alumnos tengan presente que despejar una variable en una fórmula consiste en resolver una ecuación según la variable que se vaya a despejar. Luego, se aplica el mismo procedimiento que para resolver una ecuación.

A continuación puede proponerse a los alumnos que despejen determinados elementos de las fórmulas mencionadas anteriormente por ellos mismos o de las citadas por el profesor, y que oralmente vayan fundamentando los pasos que se siguen.

Puede remitirse a los alumnos al siguiente ejemplo u otro similar con fórmulas que seleccione el profesor.

EJEMPLO

Despejar las variables que se indican en las fórmulas siguientes:

a. $A = \frac{bh}{2}; b$

b. $a^2 = a + (n - 1)d \; ; n$

Resolución:

a) $A = \frac{bh}{2}$

$2A = bh$

$\frac{2A}{b} = h$

Observe que para despejar h se transpone el denominador 2 al otro miembro multiplicando y el factor b pasa dividiendo.

En el inciso *b)* se proceda de forma análoga, es decir, aislando en un miembro la variable a despejar y pasando al otro miembro los demás elementos con la operación inversa .

Dentro de la ejercitación pueden ponerse tanto fórmulas conocidas por los alumnos como otras que no lo sean, ya que el objetivo central lo constituye el hecho de que sean capaces de realizar el despeje de variables, independientemente de cual sea la fórmula (siempre que esté al alcance de las posibilidades de los alumnos).

También pueden incluirse algunas ecuaciones literales que no necesariamente constituyan fórmulas, por ejemplo el siguiente ejercicio.

En cada una de las ecuaciones siguientes, despeje la variable que aparece encerrada entre paréntesis:

a. $\frac{x}{a} + a^2 = 5a^2$; (x)

b. $by - b^2 = -by$; (y) $(b \neq 0)$

c. $-x + a = 2a$; (x)

d. $at + a^2c^2 = 5ac$; (t) $(a \neq 0)$

e. $a - \frac{b}{a} z = 0$; (z)

f. $a = - t\,(c + d)$; (t) $(c \neq -d)$

g. $V = \sqrt{2ae}$; (a) $(e \neq 0)$

h. $m = \frac{x^2}{3y}$; (x) $(x \geq 0)$

i. $6abc = 3ar - 9ac$; (r) $(a \neq 0)$

j. $b^2m + b^3 - b^2 = -2b^2m + 4b^3$; (m) $(b \neq 0)$

k. $3ax + a(x + 2) = 10a$; (x) $(a \neq 0)$

l. $17bc - 3c(c + 4b) = 7c^2$; (b) $(c \neq 0)$

m. $20p^2 - 5p(p^2 - 3pq) = 10pq$; (q) $(p \neq 0)$

n. $4bt = b^2(2bt + 3b^2)$; (t) $(b \neq 0)$

Se sugiere el siguiente ejercicio para vincular el despeje con el cálculo del valor numérico.

Despejar las variables que se indican en las siguientes ecuaciones y calcular su valor numérico para los valores que se dan, en cada caso:

a. $e = m + np$; n para $e = 4{,}5$; $m = 3$; $p = 5$
b. $ax + by = c$; y para $c = 7{,}4$; $a = 2$; $x = -3$; $b = -2$
c. $a^2 = b^2 - bd$; d para $a = 2$; $b = -8$
d. $xy - z = w$; x para $y = 4$; $w = -3{,}5$; $z = 8$
e. $A = 2a^2 + 4ah$; h para $A = 24{,}8$; $a = 20$

f. $A = ng(R + r)$; r para $A = 141{,}3$; $g = 5$; $n = 3{,}14$; $R = 6$
g. $r - s = -r - sq$; q para $r = 16{,}8$; $a = 1{,}2$
h. $M = al + bc$; l para $M = 8{,}5$; $a = 8$; $b = 4$; $c = 10$

Es conveniente además incluir algunos problemas, como los siguientes:

1. La suma S de los ángulos interiores de un polígono se calcula por la fórmula 800 (n - 2) donde n es el número de lados del polígono. ¿Cuántos lados tiene un polígono si se conoce que la suma de sus ángulos interiores es igual a 10 800?

2. El área total de un prisma recto de base rectangular puede calcularse mediante la fórmula $A = 2ab + 2(a + b) \cdot h$ donde a y b son las aristas de la base y h es la altura del prisma. Si se conoce que el área total es 94 u^2 y las aristas de la base miden 3u y 4u respectivamente ¿cuál es la altura del prisma?

3. 3 Resolución de problemas.

Para el tratamiento de este punto esencial se dispone de 9 horas. Lo fundamental es que los alumnos apliquen sus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones y la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, a la resolución de problemas intramatemáticos y relacionados con la vida práctica, que conduzcan al planteo de una ecuación.

Como se planteó en la parte correspondiente a la introducción, el trabajo con los problemas en esta unidad adquiere un considerable peso y se va a continuar posteriormente, cuando se estudien los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Ya los alumnos, desde grados anteriores, han resuelto algunos problemas sencillos que conducen a una ecuación; por lo tanto, el tratamiento de este aspecto no resulta nuevo en este grado.

Como condición previa para poder resolver estos problemas está el saber expresar en lenguaje algebraico las condiciones que contiene el enunciado de los mismos. Luego, se puede comenzar repasando la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico; este repaso debe ser con la participación activa de los alumnos.

Pueden proponerse ejercicios como los siguientes:

1. Escriba, utilizando el lenguaje algebraico:

    a. Un número aumentado en 5.
    b. Un número disminuido en 8.
    c. El quíntuplo de un número.
    d. El triplo de un número disminuido en 4.
    e. La mitad de un número aumentado en el duplo del mismo número.
    f. Tres números naturales consecutivos.
    g. Un número de dos cifras básicas y el número que se obtiene al invertir el orden de estas cifras.

2. Una persona tiene x años. Represente su edad.

    a. Hace 7 años.
    b. Dentro de 5 años.

3. La base de un rectángulo mide x cm y su altura es el duplo de la base. Represente:

    a. Su perímetro
    b. Su área.

4. Un automóvil camina a una velocidad de x km /h.

    a. ¿Cuántos kilómetros recorre en 4 horas?
    b. ¿Cuántas horas invierte en recorrer 3 kilómetros?

Estos ejercicios (u otros similares) pueden ser resueltos oralmente por los alumnos y contribuyen a crear las condiciones previas necesarias para la resolución de problemas.

Sugerimos comenzar por un ejercicio bien sencillo, como el siguiente y, aprovechar para elaborar las indicaciones que deben seguirse, de modo general, para resolver cualquier problema que conduzca al planteo de una ecuación.

El triplo de un número es igual al número aumentado en 8. ¿Cuál es el número?

Las indicaciones que deben seguirse pueden resumirse así:

1. Leer y analizar detenidamente el texto del problema.
2. Designar mediante el lenguaje algebraico qué representa la incógnita, así como las relaciones o combinaciones en que intervenga ésta.
3. Plantear la ecuación correspondiente.
4. Resolver la ecuación obtenida.
5. Comprobar si la solución obtenida satisface los requisitos del problema (puede ser mentalmente).
6. Dar la respuesta atendiendo a lo que se pide en el enunciado del problema.

No obstante, queremos aclarar que estos pasos no son para que el alumno los memorice mecánicamente, pues en la práctica éste va a actuar de una forma más concreta. Luego, no debe obligarse a los alumnos a seguir un determinado patrón de forma esquemática para resolver un problema, lo que se pretende es darles sólo una vía metodológica que los ayude a organizar sus ideas a la hora de enfrentarse a la resolución de un problema.

De modo general, en el proceso de resolución de un problema, podemos distinguir las etapas siguientes:

1. Comprender el enunciado del problema.
2. Encontrar una vía de solución (análisis) y elaborar un plan de solución.
3. Realizar el plan de solución elaborado (síntesis).
4. Comprobar la solución.

A manera de ilustración, ejemplificaremos la resolución del siguiente ejercicio.

Una granjero necesita abonar 20 hectáreas de terreno entre tierras ya cultivadas anteriormente y tierras a cultivar por primera vez. Para ello recibe 1 320 kg de fertilizante. Cada hectárea ya cultivada requiere 80 kg de ese fertilizante y cada hectárea de las otras requiere 45 kg ¿Cuántas hectáreas de cada tipo hay?

1. <u>Para comprender el problema.</u>

- ¿De qué se trata en el problema?
  Se trata de abonar un terreno.
- ¿Qué datos se dan?
  Superficie total del terreno, cantidad total de fertilizante y cantidad para cada tipo de terreno.
- ¿Qué se busca?
  Cantidad de hectáreas de cada tipo de terreno.
- ¿Es necesario usar variables?
  Sí, por ejemplo *x*.
- ¿Qué representa la variable *x*?
  La cantidad de hectáreas ya cultivadas anteriormente (la cantidad de hectáreas a cultivar por primera vez).
- ¿Cómo representar la cantidad de hectáreas a cultivar por primera vez (ya cultivadas anteriormente)?
  La representamos por $20 - x$
- ¿Son suficientes los datos?
  Sí.

2. Para la vía de solución:

- **¿Qué relación se puede establecer entre los datos y las variables?**
  $80x + 45(20 - x) = 1320$ o $80(20 - x) + 45x = 1320$
- **¿A qué modelo matemático conduce el problema?**
  A una ecuación lineal con una variable.

3. Para el plan de solución:

- **Resuelve la ecuación planteada.**
  $80x + 45(20 - x) = 1320 \leftrightarrow 35x = 420 \leftrightarrow x = 12$

4. Para comprobar el problema:

- **¿Es lógico el resultado? ¿Por qué?**
  Sí (porque la suma de las cantidades no excede el número total de hectáreas).

- ¿Es posible comprobar? ¿Cómo?
  Sí es posible, verificando si la solución hallada satisface los requisitos planteados en el problema.

En ejercicios como éste y, en general, en ejercicios donde haya más de una incógnita, se deben buscar rápidamente las relaciones entre éstas y plantear la ecuación en función de una sola incógnita, que es el tipo de ecuación que los alumnos saben resolver hasta estos momentos.

Queremos reiterar nuevamente que no se exigirá a los alumnos (por escrito) un esquema de resolución por pasos; simplemente el ejemplo ilustrado anteriormente constituye una guía para el profesor acerca de las preguntas o impulsos que debe dar a los alumnos para que esto los ayude en el proceso de resolución del problema, lo cual debe quedar plasmado en sus cuadernos de una forma lo más simple posible.

Los primeros ejercicios que se propongan deben ser bien sencillos como por ejemplo los siguientes.

1. Si se sustrae de 76 un cierto número y se multiplica la diferencia por 3, entonces se obtiene 210. ¿Cuál es el número?

2. La suma de dos números es 20. Si se multiplica uno de los números por 3 y se disminuye el otro en 12, entonces se obtienen números iguales. ¿Cuáles son los números?

3. Se tienen dos números de los cuales uno es menor en 2 que el otro. Si se multiplica el mayor por 4, el menor por 3 y se suman ambos productos, se obtiene 57. ¿Cuáles son los números?

4. La suma de tres números naturales consecutivos es igual a 45. ¿Cuáles son los números?

5. La suma de tres números es 40. El segundo número es 3 unidades mayor que el primero. El tercero es 8 unidades menor que el primero. Halla los tres números.

6. La suma de dos números es 131 y su diferencia es 63. ¿Cuáles son los números?

7. Del duplo de un número se sustrae 18, el resultado se resta de 7 y la nueva diferencia se

sustrae del número, obteniéndose finalmente 8. ¿Cuál es el número?

8. En un número de dos cifras, la cifra de las unidades excede en 2 a la cifra de las decenas. Si al número se le agrega el triplo de la cifra de sus unidades, resulta 36. ¿Cuál es el número?

9. La cifra de las unidades de un número de dos cifras es igual al triplo de la cifra de las decenas. Si el número se divide por la cifra de las unidades, el cociente es 4 y el resto es 1. Halle el número.

   Sugerencia: Tenga en cuenta la relación $\boldsymbol{D = d\,c + R}$
   (***D*** dividendo, ***d*** divisor, ***c*** cociente, ***R*** resto)

Dentro del sistema de ejercicios debe existir una gran variedad: ejercicios de cifras, ejercicios relacionados con la geometría, problemas de edades, problemas de móviles y problemas relacionados con la vida práctica entre otros.

No deben proponerse problemas de un solo tipo dentro de una misma clase de ejercitación, ya que esto contribuye a que los alumnos tiendan a "mecanizarse" en la resolución de los mismos y esto va en detrimento del desarrollo de su pensamiento y de sus capacidades.

Recomendamos también analizar con los alumnos, en el momento que se considere más oportuno, los ejemplos que aparecen desarrollados en el cuaderno de trabajo, lo cual contribuirá en gran medida a que los alumnos estén en condiciones de poder resolver la mayoría de los ejercicios que aparecen propuestos.

En el ejemplo siguiente, luego de resolverlo, haremos algunas aclaraciones.

En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es igual al duplo de la cifra de las unidades. Si al número se le resta 27, se obtiene otro número con las mismas cifras, pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Resolución:
Sea $10d + u$ un número de dos cifras básicas, donde d es la cifra de las decenas y u la cifra de las unidades.

Según el problema propuesto se tiene que:

$d = 2u$ (la cifra de las decenas es el duplo de la cifra de las unidades);
$10u + d$ es el número con las mismas cifras, pero en orden inverso.

Del enunciado del problema resulta la ecuación:

$$(10d + u) - 27 = 10u + d$$

Sustituyendo $d = 2u$ y resolviendo resulta:

$10 \times 2u + u - 27 = 10u + 2u$
$20u + u - 27 = 12u$
$21u - 12u = 27$
$9u = 27$
$u = 3$ cifra de las unidades; $d = 2 \times 3 = 6$ cifra de las decenas

Comprobación:
$63 - 27 = 36$

Respuesta: El número buscado es 63.

OBSERVACIONES AL EJEMPLO

En la resolución de dicha ecuación, primero se sustituye d = 2u y luego se procede a resolver la ecuación. Aquí también se puede, antes de realizar la sustitución (d = 2u) reducir los términos semejantes y por último sustituir. Resulta entonces

$(10d + u) - 27 = 10u + d$

$9d - 9u = 27$ (transponiendo convenientemente)

$9(d - u) = 27$ (Propiedad distributiva)

$d - u = 3$ (pasando el 9 al dividendo)

$2u - u = 3$ (sustituyendo $d = 2u$)

$u = 3$

En el siguiente ejemplo, referente a los dos móviles, después de resolverlo haremos algunas observaciones.

EJEMPLO

Un automóvil sale de A hacia B a una velocidad de 80 km/h al mismo tiempo que sale un ómnibus de B hacia A a 65 km/h. Si la distancia AB es de 435 km.

a. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
b. ¿A qué distancia de B se encontrarán?

Nota: Se supone que ambos móviles se mueven con velocidad constante.

Resolución:

Representemos por s la distancia entre A y B. Ahora consideremos como s_1 la distancia desde A hasta el punto M de encuentro (distancia recorrida por el automóvil) y s_2 la distancia recorrida por el ómnibus, es decir, la distancia desde B hasta M. Conocemos además las velocidades v_1 y v_2 de ambos móviles. Según el enunciado del problema, ambos móviles salen al mismo tiempo en sentidos opuestos (uno al encuentro del otro). El movimiento cumple la relación $s = vt$, donde t es el tiempo

Del gráfico se puede apreciar que la suma de las distancias recorridas por ambos móviles hasta el lugar de encuentro es igual a la distancia entre A y B, es decir $s_1 + s_2 = 435$. Puesto que $s_1 = v_1 t$ y $s_2 = v_2 t$ (el tiempo es común para ambos).

Sustituyendo por los valores respectivos se tiene que:

$80t + 65t = 435$
$145t = 435$
$t = 3$
$t = 3$ h, tiempo que tardarán en encontrarse

Para calcular la distancia s_2, sustituimos:
$s_2 = 65 \times 3 = 195$
$s_2 = 195$ km, distancia recorrida por el ómnibus desde B hasta el lugar de encuentro M.

Comprobación:
La distancia de A al lugar de encuentro es $435 - 195 = 240$ km y se cumple que $240 = 3 \times 80$km/h, lo cual coincide con la velocidad del automóvil que partió de A.

Respuesta:

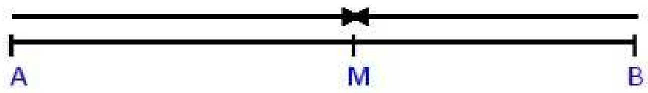
a) Ambos móviles tardarán 3 h para encontrarse.
b) La distancia desde B hasta el lugar de encuentro es de 195 km.

OBSERVACIONES AL EJEMPLO

También puede resolverse siguiendo el razonamiento siguiente:

Representemos por *x* la distancia (en km) desde A hasta el punto M de encuentro, es decir, la distancia recorrida por el automóvil. La distancia recorrida por el ómnibus (que salió de B) será entonces $435 - x$. Se conocen además las velocidades (en km/h) de ambos móviles.

$$V_1 = 80 \text{ (automóvil) y } V_2 = 65 \text{ (ómnibus)}$$



Como ambos móviles parten simultáneamente y se encuentran al cabo de un tiempo *t* (en h), utilizando la relación $t = \frac{s}{v}$ resulta la ecuación $\frac{x}{80} = \frac{435 - x}{65}$

Resolviendo la ecuación, se obtiene que $x = 240$, de donde se deduce que la distancia recorrida por el automóvil (que salió de A) es de 240 km.

Luego el tiempo *t* que tardarán en encontrarse es: $t = \frac{240}{80} = 3\,\text{h}$.

A manera de comprobación, calculamos la distancia de B hasta M (recorrida por el ómnibus), la dividimos por la velocidad respectiva y el tiempo ya calculado.

En los ejercicios donde intervengan datos que corresponden a magnitudes, debe tenerse en cuenta que la respuesta se da atendiendo al dato que menor cantidad de cifras significativas tenga (que no debe ser inferior a dos).

También los alumnos deben tener presente que en muchos casos resulta conveniente hacer un esquema o figura de análisis, lo cual ayuda grandemente a la comprensión del problema y a establecer las relaciones correspondientes entre los diferentes datos o magnitudes que intervengan en dicho problema.

A continuación ofrecemos la ilustración de la resolución de algunos problemas.

De los problemas relacionados con las cifras básicas de un número, ofrecemos la resolución del ejercicio siguiente

La suma de las cifras básicas de un número de tres cifras es igual a 12. La suma de la cifra de las centenas y la de las decenas es 9. Si se sustrae 99 al número que buscamos, entonces obtenemos un número escrito con las mismas cifras, pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Sea $100c + 10d + u$ el número de tres cifras básicas (c, d y u son dígitos).

El número invertido será $100u + 10d + c$. Del texto del problema resultan las relaciones:

$c + d + u = 12 \quad (1)$

$c + d = 9 \quad (2)$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene: u=3 (cifra de las unidades).

El planteo de la ecuación es el siguiente:

$(100c + 10d + u) - 99 = 100u + 10d + c$

Resolviendo:

$99c - 99u = 99$

$99(c - u) = 99$

$c - u = 1$

Como $u = 3$, se obtiene entonces $c = 4$ (cifra de las centenas).

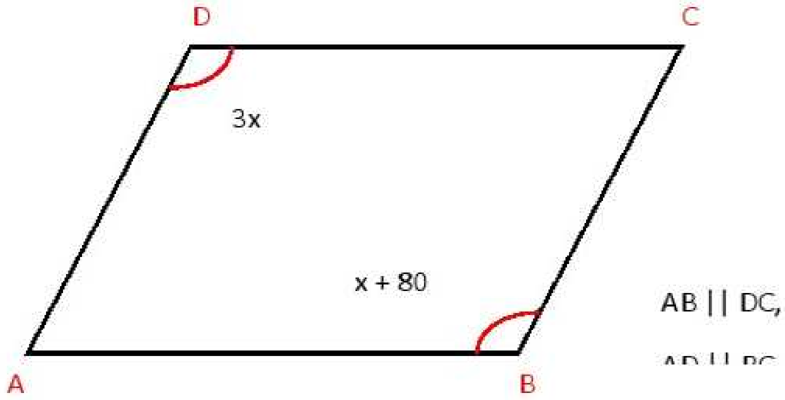
El número buscado es 453.

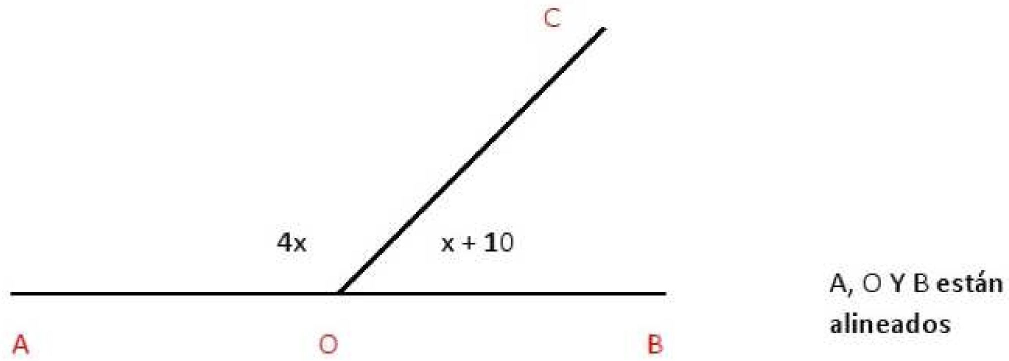
Otra vía consiste en sustituir $u = 3$ y $c = 9 - d$ en la ecuación original y resulta entonces una ecuación en función de la variable d:

$100(9 - d) + 10d + 3 - 99 = 100 \times 3 + 10d + (9 - d)$.

Dentro de ejercicios relacionados con la geometría, sugerimos comenzar por el ejercicio siguiente, donde aparecen las figuras geométricas y solamente hay que formar, en cada caso, la ecuación correspondiente atendiendo a la relación que existe entre los ángulos señalados en las respectivas figuras.

En cada una de las figuras siguientes, determine el valor de los ángulos señalados:





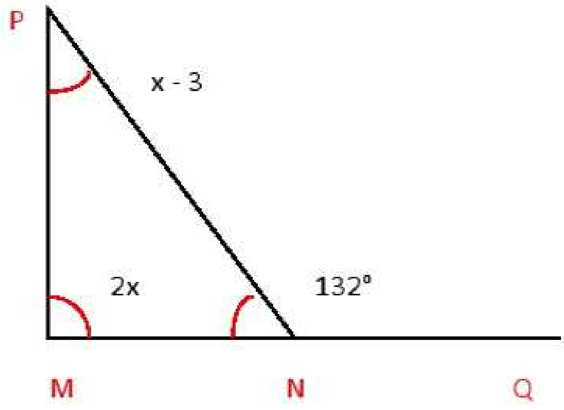
Ofrecemos a continuación la resolución de los siguientes ejercicios.

1. La diagonal de un rectángulo excede en 3,00 cm a su altura; si la base del mismo mide 9,00 cm. Calcule el área de dicho rectángulo.

<u>Resolución</u>

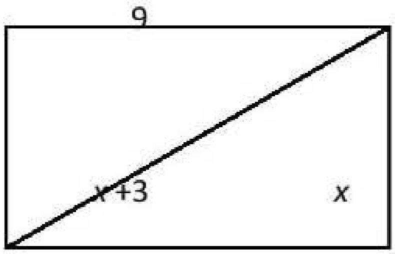
Consideremos las longitudes (en cm) de la base, la altura y la diagonal, teniendo en cuenta las relaciones entre ellas que se plantean en el enunciado del problema.

Base: 9 ; altura: x ; diagonal: $x + 3$



M N y Q están
alineados

En este ejercicio debe destacarse a los alumnos que resulta útil confeccionar una figura de análisis (ver figura siguiente) para poder apreciar con mayor claridad qué relación matemática existe entre estos tres elementos, de modo que se pueda plantear la ecuación correspondiente.



Los alumnos deben darse cuenta rápidamente que la relación que debe aplicarse es el Teorema de Pitágoras.

Luego, resulta la ecuación: $(x+3)^2 = x^2 + 9^2$ **. Debe tenerse en cuenta que:**

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3).$$

Al resolver la ecuación se eliminan los términos cuadráticos y se obtiene x = 12, de donde se tiene que la altura mide 12,0 cm.

El área será entonces $12 \times 9 = 108$ **cm .**

2. El largo de un rectángulo es al ancho como 5 es a 3 y su perímetro es 112 cm. Halle las dimensiones del rectángulo.

<u>Resolución</u>

Según el enunciado de este ejercicio, resulta fácil interpretar que el largo del rectángulo es $\frac{5}{3}$ veces el ancho.

Si designamos por x la longitud (en cm) del ancho del rectángulo, tendremos que el ancho es x y el largo $\frac{5}{3}x$.

Se conoce además el perímetro del rectángulo, de donde resulta la ecuación:

$$2\left(\frac{5}{3}x + x\right) = 112 \quad \textbf{o} \quad \frac{5}{3}x + x = 56$$

De los problemas referentes a edades, ilustraremos la resolución del siguiente ejercicio

3. La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo y dentro de 5 años será el triplo. ¿Cuáles son sus edades actuales?

Resolución

En este tipo de problemas conviene diferenciar por separado la relación entre las edades actuales y las edades dentro de *n* años (o hace *n* años).

Representemos estas relaciones en la tabla siguiente:

	Edades actuales	**Edades dentro de 5 años**
Padre	$4x$	$4x + 5$
Hijo	x	$x + 5$

Puesto que dentro de 5 años la edad del padre será el triplo de la de su hijo, resulta entonces la ecuación: $4x + 5 = 3(x + 5)$ cuya solución es x = 10.

La edad actual del hijo es, entonces, 10 años y la del padre, 4×10 = 40 años.

Comprobación:

Dentro de 5 años el hijo tendrá 15 años y el padre 45, que es el triplo de 15.

Ilustraremos ahora la resolución de un ejercicio relacionado con la práctica. Para ello escogemos el siguiente, el cual proponemos para los alumnos de más alto rendimiento.

4. En una movilización agrícola para la cosecha de papas, entre Félix, Enrique y Pablo recolectaron un total de 120 quintales de papas. Félix y Enrique recolectaron entre ambos 48 quintales más que Pablo, mientras que éste recogió un quintal más que Enrique. ¿Cuántos quintales de papas recogió cada uno?

Resolución

En este problema hay tres incógnitas; luego el mismo (de acuerdo a las relaciones que en él se plantean) puede conducir a un sistema de tres ecuaciones con tres variables, lo cual no está aún al alcance de las posibilidades de los alumnos.

Por tanto, para resolver este ejercicio debe buscarse una vía mediante la cual resulte una ecuación con una sola variable, que sea lo más sencilla posible. Una vez resuelta ésta, entonces se podrán determinar sin mucha dificultad los otros valores.

Para ello debemos analizar a cuál de las tres cantidades resulta más conveniente designar con la incógnita.

Teniendo en cuenta las relaciones que se establecen en el texto del problema, consideramos que la vía más racional es la siguiente:

Designemos por x la cantidad de quintales recogidos por Pablo. Luego, Félix y Enrique habrán recogido entre ambos (x + 48) quintales.

Puesto que entre los tres recolectaron 120 quintales, resulta la ecuación:

$$(x+48)+x=120$$

Resolviendo esta ecuación resulta x = 36 , que es la cantidad de quintales recolectados por Pablo.

Puesto que Pablo recogió 1 quintal más que Enrique, éste último habrá recogido 35 quintales.

Luego, la cantidad de quintales recolectada por Félix será 120 - (36 + 35) = 49.

5. Un tanque de agua tiene 2000 litros de capacidad y contiene una cantidad de agua equivalente al 25% de lo que le falta para llenarse. ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque?

Resolución

Designemos por *x* la cantidad de litros de agua que hay en el tanque. Luego, lo que le falta para llenarse es un total de $(2000 - x)$ litros.

Según el enunciado del problema, resulta la ecuación: $x = \frac{1}{4}(2000 - x)$ ya que el 25% equivale a $\frac{1}{4}$.

Resolviendo la ecuación se obtiene $x = 400$.

Al resolver problemas de móviles resulta muy útil hacer una figura de análisis que ayude a visualizar la situación que se plantea en el problema, lo cual facilita grandemente su comprensión y posterior resolución. La relación física que se utiliza en estos problemas es la fórmula $v = \frac{s}{t}$ que es conocida por los alumnos.

En los problemas de móviles (donde se supone que el movimiento es uniforme), se deben considerar dos casos atendiendo al sentido en que se desplazan éstos:

1. En el mismo sentido.
2. En sentidos contrarios.

Ilustraremos ahora un caso en el cual ambos móviles se desplazan en el mismo sentido.

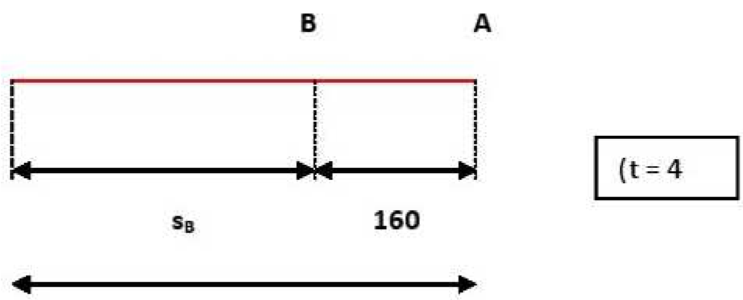
6. Dos móviles parten simultáneamente de un mismo punto y se desplazan en línea recta y en un mismo sentido con velocidades constantes. Al cabo de 4,0 h se encontraban a 160km uno del otro. Determine la velocidad de cada uno si se conoce que dichas

velocidades están en la razón 2 / 3.

Resolución

Designemos los móviles con *A* y *B*, respectivamente.
Supongamos que $v_A > v_B$; es decir, que el móvil A se desplaza más rápidamente que el móvil *B*.

Al cabo de 4 horas, el móvil A le llevará una ventaja de 160 km al móvil *B,* como en la figura siguiente**.**



Luego, en ese momento se cumplirá que $s_A - s_B = 160$ donde $s_A = v_A t$ y $s_B = v_B t$.

Resulta entonces $v_A t - v_B t = 160 \quad (1)$

Sustituyendo t = 4 en (1) se tiene que: $4v_A - 4v_B = 160$.

$$4(v_A - v_B) = 160 \ \textbf{de donde} \ v_A - v_B = 40 \qquad \textbf{(2).}$$

Según datos del problema se conoce además que:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{2}{3}(v_B < v_A) \text{ de donde } v_B = \frac{2}{3}v_A \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) resulta:

$v_A - \frac{2}{3}v_A = 40$ de donde se obtiene que $v_A = 120$ km/h.

Luego, $v_B = \frac{2}{3} \times 120 = 80$ km/h.

Además, si calculamos las distancias (en km) s_A y s_B se obtiene que $s_A = 120 \times 4 = 480$ y $s_B = 80 \times 4 = 320$.

Notemos que 480 – 320 = 160 que es la distancia (en km) que separa a ambos móviles al cabo de 4 horas.

Otra vía de resolución que puede seguirse es trabajar en función de las distancias s_A y s_B.

Si $s_B = x$, entonces $s_A = x + 160$.

Luego, si $\frac{V_B}{V_A} = \frac{2}{3}$ debe cumplirse también $\frac{s_B}{s_A} = \frac{2}{3}$, o sea: $3s_B = 2s_A$ de donde resulta la ecuación $3x = 2(x+160)$.

Resolviendo esta ecuación se obtiene x = 320, es decir: $S_B = 320$ km. Entonces las velocidades (en km/h) serán, respectivamente $v_B = \frac{320}{4} = 80$ y $v_A = \frac{480}{4} = 120$.

Queremos aclarar que no se debe exigir a los alumnos un esquema de resolución tan detallado como el que acabamos de exponer; basta con que éstos apliquen las relaciones correspondientes y lleguen al resultado correcto de la forma que les resulte más simple.

Para finalizar, queremos plantear que, independientemente de que en el libro de ejercicios haya una buena cantidad y variedad de problemas, el profesor puede crear otros (si lo considera conveniente) con datos de actualidad relacionados con la producción, el ahorro, etc.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Los ejercicios que se deben realizar son de los siguientes tipos:

- **Resolver ecuaciones lineales y ecuaciones transformables a lineales, donde hay que aplicar los procedimientos algebraicos estudiados .**

- Realizar el despeje de variables en una fórmula dada.

- Resolver problemas que conducen al planteo y resolución de ecuaciones.

UNIDAD 3

FUNCIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN

Actualmente es incuestionable que el poseer un conocimiento adecuado sobre las funciones forma parte de la formación general de los alumnos, con el fin de lograr este propósito en esta unidad se introduce y define el concepto función lineal, el objetivo esencial es que el alumno sea capaz de representar gráficamente las funciones lineales y de encontrar sus características.

Las características de las funciones se obtienen, en gran parte, a partir de las observaciones de sus gráficos. Recíprocamente, los gráficos se obtienen a partir del conocimiento de las propiedades de las funciones y de la determinación numérica de las propiedades locales.

Esta unidad ha sido concebida para que los alumnos comprendan el concepto de función lineal y su relación con la dependencia funcional, así como que conozcan las diferentes formas de representarla. Además se incluye la resolución de inecuaciones lineales sencillas.

Los conocimientos sobre el concepto función que se imparten en octavo año constituyen la base para el estudio de las funciones elementales, que comienza al tratar las funciones lineales en el noveno año. En décimo año se profundiza en el concepto función al continuar con el tratamiento de la función lineal, empezar a tratar la función afín, afín por intervalos, y la función valor absoluto.

Esta unidad se inicia con un repaso donde se amplía el conocimiento previo del concepto de relación, y se logra una sistematización al incorporar un nuevo concepto: "función lineal". Es importante destacar que la resolución de inecuaciones con una incógnita, es abordado como una aplicación de los temas tratados anteriormente.

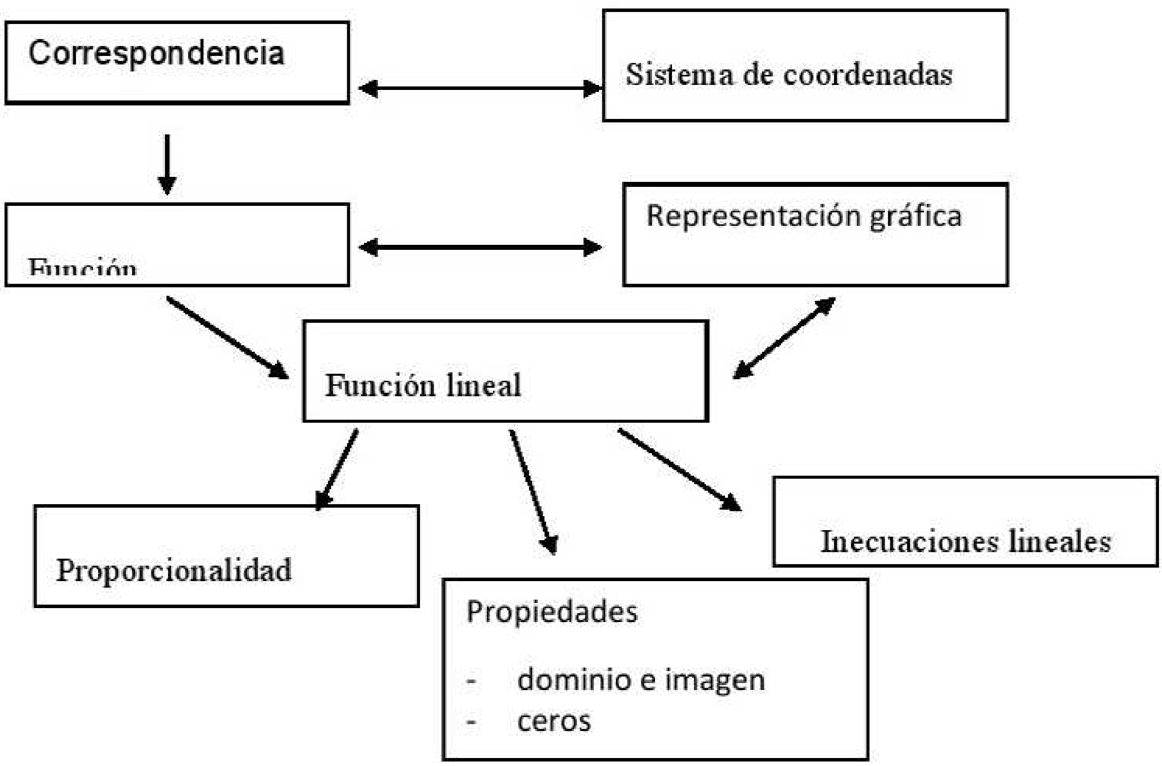
Para un mejor desarrollo del trabajo con la unidad, se han hecho las siguientes consideraciones:

- Definir el concepto de función lineal como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos, pues es más natural y comprensible para el alumno que definirla como conjunto de pares ordenados.
- Definir función lineal como la correspondencia determinada por la ecuación $y = mx + n$; por ser su gráfica una línea recta, eliminándose la diferencia entre función afín y función lineal.
- No demostrar la propiedad que garantiza que la gráfica de $y = mx + n$ es una recta, por no tener los elementos de la semejanza y por resultar de difícil comprensión para los alumnos.
- Incluir la resolución de inecuaciones lineales sencillas, fundamentando el cambio de signo de la desigualdad a partir del signo de la función lineal.
- Incluir la resolución de problemas de reparto proporcional, utilizando la ecuación $y = mx$.
- Incluir una amplia y variada ejercitación, dirigida a los aspectos centrales de la unidad.

Como se aprecia, en la unidad se ha simplificado el contenido teórico y su tratamiento metodológico.

Al final aparece una ejercitación variada que sirve para consolidar y sistematizar los conocimientos adquiridos en la unidad o para enriquecer los ejercicios realizados.

COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD



HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos dominen el concepto "función lineal", sus propiedades y representación gráfica. Además deben desarrollar habilidades en la resolución de inecuaciones lineales sencillas y problemas de reparto proporcional.

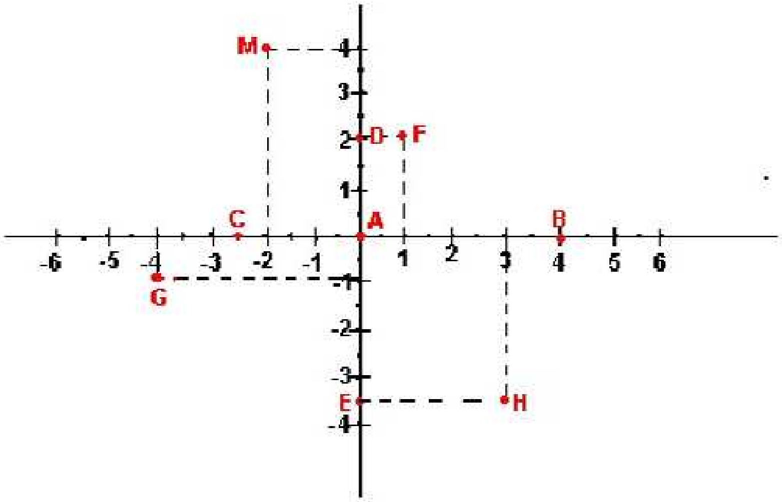
Para lograr lo anterior los alumnos deben:

- Representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares e identificar las coordenadas de puntos representados en el mismo.
- Comprender el concepto de función lineal como correspondencia unívoca entre dos conjuntos y tener una representación mental clara del mismo.
- Decidir si una correspondencia dada es o no función lineal.
- Comprender las distintas formas de representar una función lineal.
- Reconocer que las funciones lineales se definen por la ecuación $y = mx + n$, que su gráfica es una recta y que tienen por dominio ∇ e imagen el mismo conjunto si $m \neq 0$.
- Comprender los conceptos: cero de una función lineal, pendiente de una recta y función lineal creciente o decreciente.
- Calcular el cero de una función lineal así como la pendiente de una recta conocidos dos puntos de la misma.
- Representar gráficamente funciones lineales dadas por sus ecuaciones correspondientes.
- Resolver problemas de proporcionalidad directa y de reparto proporcional.
- Resolver inecuaciones lineales sencillas.

Para el logro de las exigencias planteadas anteriormente el nivel mínimo que deben alcanzar todos los alumnos se caracteriza mediante ejercicios como los que aparecen a continuación.

1. Representar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos A(- 2; 5); B(0; 4); C(5; 0); D(3; 1); E(- 6; - 2); F(4; 1); G(0; - 2); H(- 1; 0); I$\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$; J(- 0,8; 2); K$\left(-\frac{1}{2};-3{,}5\right)$
.

2. Determinar las coordenadas de los puntos representados en la figura siguiente.



3. Los vértices de un rectángulo son A(- 2; 3); B(8; 3); C(8; - 3) y D(- 2; - 3).

a. Representarlos en un sistema de coordenadas rectangulares.

b. Calcular su área.

c. Determinar gráficamente las coordenadas del punto I de intersección de sus diagonales.

4. Analizar cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamentar

a. A cada $x \in \nabla$ se asocia $-3x+4$

b. A cada $x \in \nabla$ se asocia $|x|$

c. A cada $x \in \nabla$ se asocia sus múltiplos

5. Dada la función "*f*" definida por *f*(*x*) = $x^2 + 5x$

a. Calcula *f*(0); *f*(2); $f\left(\frac{1}{2}\right)$; *f*(0,3); *f*(5,1); *f*(*a*) y *f*(3*a*)

b. Prueba que $f(a) - f(a) = 10a$.

6. Dadas las funciones lineales representadas por las ecuaciones y = -3x y $y = 5x - 1$

a. Calcular sus ceros.

b. Representarlas gráficamente.

c. Analizar si son crecientes o decrecientes. Fundamentar.

7. En un triángulo isósceles se conoce que sus lados son proporcionales a 5; 7 y 5 respectivamente. Si su perímetro es 78 mm. ¿Cuánto miden sus lados?

8. Los ángulos interiores de un triángulo son proporcionales a 20, 12 y 4 respectivamente. Si el mayor ángulo mide 100° ¿Cuánto miden los otros dos?

9. Una mezcla está compuesta por las sustancias A, B y C. Si se sabe que estas son proporcionales a 10; 12 y 15 respectivamente y que hay 3 g más de la sustancia B que la A. ¿Cuál es la masa de la mezcla?

10. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $3x + 2 < 5x - 4$
b. $8(2x - 5) < 6x$
c. $-2(5 - x) \geq x + \dfrac{1}{2}$
d. $2x(x - 1 + 4x \leq 2(x^2 - 4) + x$
e. $\dfrac{1}{2}(x + 3) - 0{,}2x > 0{,}5(2x - 3)$
f. $5(x + 2) - (2 - x) < 8x - 4(x + 3)$

INDICACIONES PARA EL DESARROLLO DE LAS UNIDADES TEMATICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas, es importante evidenciar que por ser muy cortas no se las ha dividido en puntos esenciales:

1. Función lineal.
2. Funciones lineales y proporcionalidad directa.
3. Inecuaciones lineales

1. FUNCIÓN LINEAL

Para el desarrollo de esta unidad temática se recomienda 4 horas clase. El profesor en estas clases debe conseguir que los alumnos comprendan los conceptos de función lineal y cero de una función lineal, y que la representación gráfica de estas funciones es una recta.

Para introducir el concepto función lineal se sugiere seguir una de las tres vías siguientes:

1 Vía deductiva, donde se plantea a los alumnos que van a estudiar un caso particular de función que se denomina función lineal y se da la definición, seguidamente se preguntará por la ecuación que representa a esta función ($y = mx + n$) y se pedirán algunos ejemplos, tratando que se consideren todos lo casos según los valores de m y n.

2 Vía inductiva (variante 1): se parte de un ejercicio como el siguiente. Analizar si las siguientes correspondencias son funciones o no.

a. A cada $x \in \nabla$ corresponde $2x + 3$.
b. A cada $x \in \nabla$ corresponde $-5x$
c. A cada $x \in \nabla$ corresponde 4
d. A cada $x \in \nabla$ corresponde 0
e. A cada $x \in \nabla$ corresponde $x^2 + 5$

Después de analizar los cinco incisos y concluir que son funciones, se llama la atención sobre las características comunes de los incisos a) al d) en los que la imagen se obtiene como el producto de x por un número real m, adicionándole un número real n (mx + n), concluyendo con la definición y destacando cuál es la ecuación que define la función.

3. Vía inductiva (variante 2): Partir de una situación problémica como la siguiente:

Un grupo de pioneros exploradores se aleja del campamento 3 km y luego caminan a razón de 5 km/h. Expresar mediante una ecuación la dependencia entre la distancia recorrida (y) y las horas caminadas (x).

En el análisis del ejercicio se debe concluir que se trata de una función cuya ecuación corresponde a la forma $y = 5x + 3$, se destaca que las funciones definidas por ecuaciones de la forma $y = mx + n$ $(m; n \in \nabla)$ se denominan lineales y se da la definición.

Después de dar la definición por cualquiera de las variantes se debe analizar que el dominio de una función lineal es el conjunto ∇ si no se indica otra cosa, pues la expresión $mx + n$ está definida para cualquier valor real de x.

Un segundo aspecto esencial lo constituye el análisis de la imagen de una función lineal y la representación gráfica de estas funciones.

Se sugiere primero analizar la representación gráfica de las funciones lineales, para ello se puede proponer a los estudiantes un ejercicio como el siguiente.

Representar gráficamente las funciones definidas por:

a. $y = 3x + 1$
b. $y = -3x$
c. $y = 3$

Se le indicará al alumno que utilice una tabla para representar las coordenadas de los puntos del gráfico de cada función. Luego de representados los puntos, llamar la atención respecto a que se obtiene una idea más clara del gráfico mientras más puntos se tengan y que en estos 3 casos se induce que es una recta.

Concluir que si el gráfico es una recta basta con determinar dos puntos para poderla trazar, y dos puntos cómodos son aquellos en que la gráfica corta a los ejes es decir, $P_1(0; y)$ y $P_2(x; 0)$ destacando que las coordenadas *x* e *y* de P_2 y P_1 respectivamente se denominan interceptos.

Además en P_1 se tiene $y = n$ pues $y = m \times 0 + n$ de donde $y = n$.

Aprovechar este momento para destacar la relación entre los valores de *m* y *n* y la posición de la recta, usando el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:

Represente gráficamente las funciones lineales definidas por

a. $y = 2x + 1$ b. $y = - 2x$ c. $y = 2$

Resolución

Determinamos las coordenadas de algunos puntos de cada gráfica y la representamos utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

a.

x	-2	-1	0	0,5	1
y	-3	-1	1	2	3

b.

x	-0,5	0	0,5	1	2
y	1	0	-1	-2	-4

c.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2

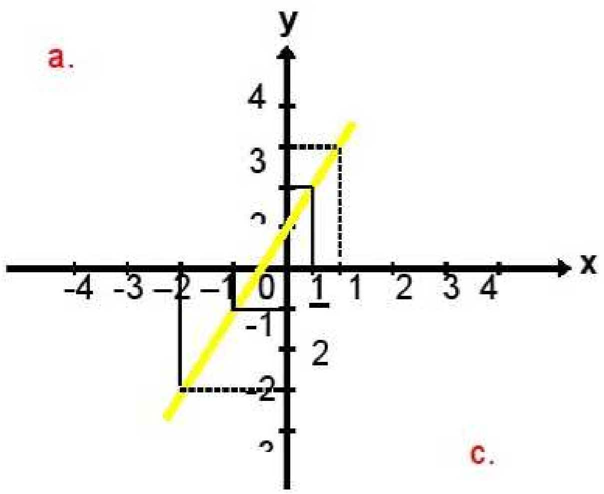
Observe que en los 3 casos se pudo trazar una recta que pasa por los puntos representados. Si para otro valor cualquiera de $x \in \nabla$ obtenemos el valor correspondiente de y mediante las ecuaciones dadas, podemos comprobar que los puntos que tengan estas coordenadas también pertenecen a las rectas trazadas, por lo que llegamos a la conclusión siguiente:

La gráfica de una función lineal es una recta.

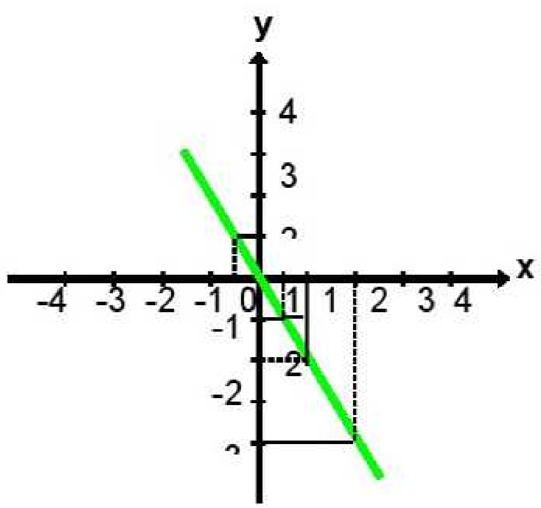
Esta propiedad no la vamos a demostrar en este año.

Si se observan las ecuaciones correspondientes a las funciones lineales del ejemplo, se notará que en el inciso a) $m > 0$, en el b) $m < 0$ y en el c) $m = 0$ y que las rectas representadas tienen distintas posiciones respecto al eje x. Así, si $m > 0$ la recta se inclina hacia arriba, si $m < 0$ la recta se inclina hacia abajo y si $m = 0$ la recta es paralela al eje x. Además, estas rectas intersecan al eje Y en los puntos (0;1); (0;0) y (0;2) respectivamente, y los valores de n en las ecuaciones correspondientes coinciden con las ordenadas de estos puntos. En el inciso a) $n = 1$, en el b) $n = 0$ y en el c) $n = 2$. Luego el valor de n coincide con la ordenada del punto (0; y) del gráfico de la función lineal dada.

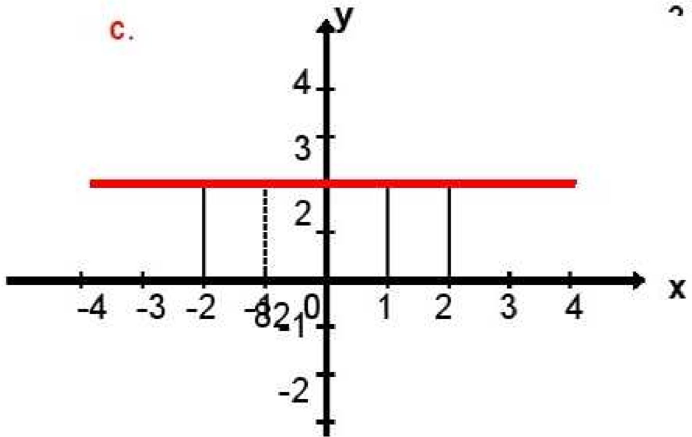
a.



b.



c.



Si proyectamos sobre el eje Y las gráficas de las dos primeras funciones, en cuyas ecuaciones $m \neq 0$, obtenemos como imagen el conjunto ∇, mientras que en el, caso de la función del inciso c) en cuya ecuación $m = 0$, obtenemos como imagen el conjunto $\{2\}$.

A las funciones lineales como las del inciso c), cuyo conjunto imagen consta de un solo número se les llaman **funciones constantes** y su gráfica es siempre una recta horizontal (paralela al eje X).

De años anteriores se conoce que para trazar una recta basta determinar dos puntos por los que ella pasa, luego para representar gráficamente una función lineal basta determinar dos puntos; por lo general es cómodo utilizar los puntos de coordenadas (0; *y*) y (*x*; 0) que son los puntos donde la recta interseca a los ejes coordenados.

Por último se debe estudiar la imagen de las funciones lineales, esto se hará apoyándose en el ejercicio anterior destacando que al proyectar la gráfica en el eje x se obtiene el dominio que es ∇ como ya se conoce, ahora se puede preguntar a los alumnos ¿cuál será la imagen de estas funciones? Por analogía proyectarán los gráficos en el eje Y y obtendrán que en los incisos a) y b) se obtiene como imagen ∇ y en el inciso c) el conjunto unitario {3}, esto último ocurre cuando m = 0 . Completar el análisis cuando m = n = 0, en este caso la recta coincide con el eje X y la imagen es {0}.

Antes de tratar lo referente a ceros de las funciones lineales se deben hacer algunos ejercicios para fijar estos contenidos, pueden ser los siguientes:

1.- Determine cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales:

a. $y = -x - 2$ b. $y = 3x$ c. $y = x^2$ d. $y = 1 + \frac{3}{x}$, $x \neq 0$

e. $y = x^3 + 5$ f. $y = \frac{x}{2}$ g. $y = \text{x}$ h. $3x + y = 0$

i. $x + 2y = 8$

2.- Dada la función f tal que $f(x) = 5x - 2$

a. Halle $f(0)$; $f(1)$ y $f(2)$.
b. Determine x si $f(x) = 13$; $f(x) = -12$; $f(x) = -6$; $f(x) = -1$.
c. Determine los valores de x y y para los cuales los puntos $A(x; -3)$, $B(2; y)$, $C(-1\,; y)$ pertenecen a la gráfica de f.
d. Represente gráficamente la función.

3.- Represente gráficamente las funciones lineales siguientes:

a. $y = x$ b. $y = -x$ c. $f(x) = \; x\,\frac{1}{2}$ d. $y = -4x$

e. $y = -0{,}2x$ f. $f(x) = x + 2$ g. $h(x) = 4x - 3$ h. $y = \frac{1}{2}\,x + 1$ i. $y = 0{,}3x - 2$ j. $g(x) = -3$ k. $g(x) = 2 - x$ l. $y = 0{,}8 - 2x$

m. $j(x) = 4 - 0{,}5x$

4.- De una función lineal $f(x) = mx + n$ se conocen m y n.
Indique dos pares numéricos que satisfagan la ecuación correspondiente y trace su gráfico.

a. $m = 4$ y $n = 1$ b. $M = 2$ y $n = -3$ c. $M = -3$ y $n = 1{,}5$

d. $m = 1$ y $n = 0$ e. $m = 0$ y $n = -5$ f. $M = 0$ y $n = \frac{3}{2}$

El *cero* de una función lineal puede introducirse mediante una conversación con los alumnos donde se destaque que la intersección de la gráfica de esta función con el eje X es uno de los puntos que puede utilizarse para trazar la gráfica de la función lineal.

Formular entonces la pregunta: ¿qué es necesario conocer para determinar el punto de intersección con el eje X?

Basta conocer la abscisa del punto y así se introduce el concepto cero de una función lineal como el elemento del dominio que tiene imagen cero. Debe destacarse la diferencia entre el cero y el punto de intersección con el eje X.

Por último se debe proponer un ejercicio como el siguiente:

Calcular los ceros de las funciones lineales siguientes:

- **a.** $y = 2x - 4$
- **b.** $y = 2x$
- **c.** $y = 5$
- **d.** $y = 0$

Primero se debe precisar el algoritmo para calcular el cero de una función lineal:

1. Sustituir la "*y*" por cero.
2. Despejar "*x*" en la ecuación obtenida en 1.

Al resolver el ejercicio se debe destacar que los incisos a) y b) donde m $\neq$ 0 se obtuvo un único cero, mientras que en el inciso c), se obtiene una igualdad falsa (0 = 5) por lo que ningún valor de x la satisface, luego no hay ceros y en el inciso d) se obtiene una igualdad verdadera (0 = 0) la que se satisface para cualquier valor de $x \in \nabla$ por lo que hay infinitos ceros.

Debe además destacarse la correspondencia que existe entre este razonamiento analítico y la interpretación geométrica del concepto cero de una función lineal, ya que en los incisos a) y b) las rectas cortan al eje X en un único punto, en el inciso c) la recta es paralela al eje X por lo que no tienen puntos comunes y en el inciso d) la recta coincide con el eje X por lo que tienen infinitos puntos comunes (todos los del eje X).

Debe quedar claro para el alumno que cuando m $\neq$ 0 las funciones lineales sólo tienen un único cero.

Es importante que el alumno comprenda la interpretación geométrica del concepto cero de una función lineal.

Se sugiere dedicar la primera clase a la introducción del concepto *función lineal* y su representación gráfica y la segunda clase para tratar lo relacionado con el cero de las funciones lineales y comenzar a ejercitar los contenidos tratados en ambas clases.

La tercera y cuarta clases se dedicarán a ejercitar, para ello se pueden seleccionar ejercicios como los siguientes, u otros creados por el profesor.

1. En la función $y = mx + 3$. ¿Cuál debe ser el valor de m para que el punto (2;14) pertenezca a su gráfico?

2. Halla el valor de n si se sabe que el gráfico de $y = 3x + n$ pasa por el punto:
   a. $P(-2;4)$ b. $R(5;2)$

3. Trazar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las gráficas de las funciones $y = -0,5x - 2$; $y = 2x + 5$

   a. Indica en cada caso 3 valores del dominio para los cuales las imágenes correspondientes sean positivas y 3 valores par los cuales sean negativas.

4. Calcula el cero, en caso que exista, de cada una de las funciones lineales siguientes :

   a. $y = x$ b. $y = -2x$ c. $y = 12x - 36$

   d. $y = 10x + 8$ e. $y = 5 - x$ f. $y = 4 - 2x$

   g. $y = -5x - 2$ h. $y = 0,8x - 16$ i. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$

   j. $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ k. $y = 2$ l. $y = 0$

5. Dada la función $y = 4 - 2x$:
   a. Represéntala gráficamente.
   b. Calcula el área de la figura formada por los ejes coordenados y la gráfica de la función.
   c. Calcula la longitud del lado mayor de la figura determinada en el inciso b).

6. Determina para qué valores de x la función:

   a. $y = 5x + 8$ toma el valor de 4.

b. $y = 12 - x$ toma el valor de $-\dfrac{2}{5}$

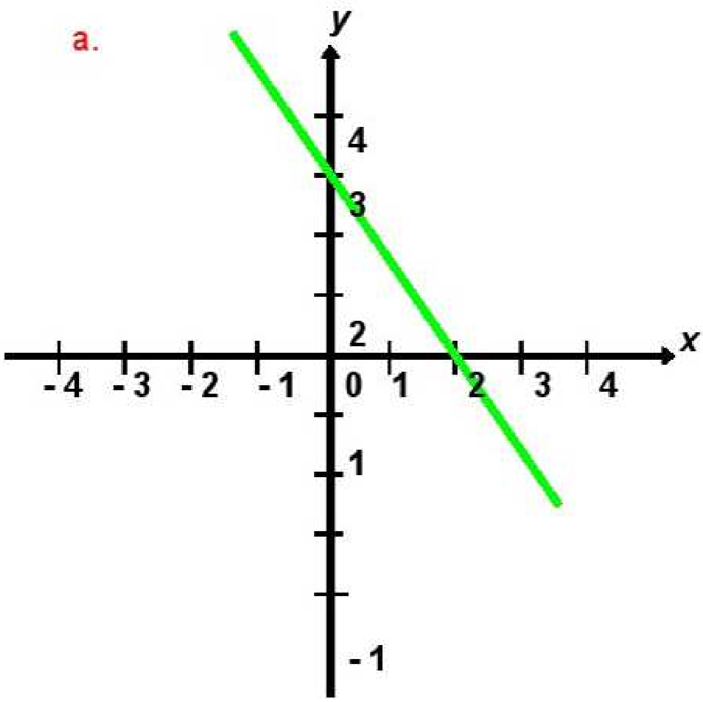
c. $y = -2x - 5$ toma el valor 0,4

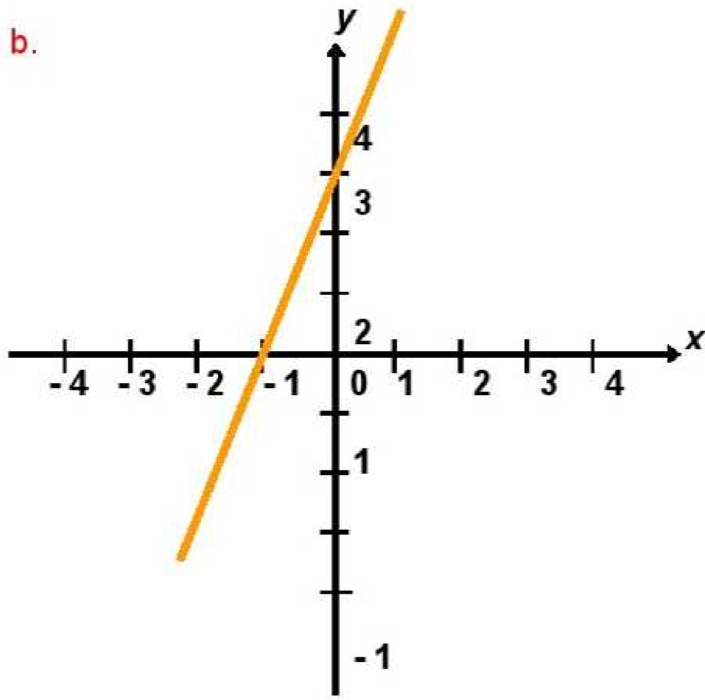
d. $y = -x$ toma el valor $\sqrt{3}$

7. Sea la función $y = 2x - 4$
   a. Calcula su cero
   b. Represéntala gráficamente

8. De una función lineal se sabe que su cero es -4 y que interseca al eje y en el punto de ordenada $-\dfrac{5}{2}$. Represéntala gráficamente.

9. En la figura siguiente están representadas dos funciones lineales. Apoyándose en el gráfico determina las ecuaciones de dichas funciones .





Para el desarrollo de esta unidad temática se sugiere se usen 4 horas. Y por lo corto de la unidad no se determinara puntos esenciales.

Se debe lograr que los alumnos apliquen los conocimientos sobre proporcionalidad directa a la resolución de problemas de reparto proporcional y de proporcionalidad.

Se sugiere comenzar con una actualización de los conocimientos sobre proporcionalidad directa y proporciones que trae el alumno, esto puede hacerse mediante ejercicios como los siguientes:

1. En la siguiente tabla se representa la correspondencia entre cantidades de dos magnitudes x e y.

X	1	1,2	2	2,5	3	4	4,7
Y	2	2,4	4	5	6	8	9,4

a. Analizar si estas magnitudes son proporcionales o no.
b. En caso de serlo, decir cuál es el factor de proporcionalidad.

2. En las siguientes proporciones calcule el término desconocido:

a. $\frac{x}{4}=\frac{7}{2}$

b. $\frac{1}{5}=\frac{3,2}{a}$

c. $\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{m}{0,4}$

3. De 150 quintales de remolacha se obtienen 25 quintales de azúcar.

a. ¿Cuántos quintales de azúcar se obtienen de 80 q de remolacha?
b. ¿De cuántos quintales de remolacha se obtienen 15 q de azúcar?

Con estos ejercicios u otros similares se recordarán los conceptos de proporcionalidad directa, factor de proporcionalidad, razón y proporción, así como el procedimiento para resolver una proporción, utilizando el teorema fundamental:

"El producto de los extremos es igual al producto de los medios".

En el ejercicio 1 se debe concluir que x e y son magnitudes directamente proporcionales con factor de proporcionalidad 2 y que esta proporcionalidad directa no es más que una función lineal de la forma $y = mx$ con $m = 2$, destacando que esta ecuación describe muchos procesos y fenómenos de la vida, la ciencia y la técnica y que por tal razón es importante aprender a resolver problemas relacionados con ella. También se recordará qué es una razón y qué es una proporción. Con los ejercicios 2 y 3 se precisará cómo resolver proporciones y problemas sencillos de proporcionalidad directa.

Es necesario además en estas clases utilizar algunas propiedades de las proporciones que el alumno no conoce pero que se pueden introducir de manera natural, como se ilustra en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO

Descomponer el número 72 en tres sumandos proporcionales a los números 3, 4 y 6 respectivamente.

Resolución

Se desea descomponer el número 72 en tres sumandos, ¿cómo representar estos? Utilizando variables podemos designar por x, y, z a los mismos, luego x + y + z = 72

¿Cómo representamos la condición de que x, y, z son proporcionales a 3, 4, 6 respectivamente? Formando razones iguales al factor de proporcionalidad k, es decir: $\frac{x}{3} = k;\quad \frac{y}{4} = k;\quad \frac{z}{6} = k$.

¿Qué debemos hacer para hallar x, y, z? Despejar en las igualdades, así tenemos x = 3k; y = 4k; z = 6k.

¿Qué nos hace falta para obtener los valores de x, y, z? Conocer el valor de k.

¿Cómo podemos relacionar k con el valor de 72 de la suma de los números? Sumando ordenadamente las igualdades:

$$
\begin{array}{lcl}
x = 3k & \text{pero} & x + y + z = 72 \\
y = 4k & \text{luego} & 72 = 13k \\
\underline{z = 6k} & & k = \dfrac{72}{13} \\
x + y + z = 13k & &
\end{array}
$$

¿Cuáles son los sumandos? $x = \frac{216}{13};\quad y = \frac{288}{13};\quad z = \frac{432}{13}$.

Como en todo problema, se debe comprobar en este caso que la suma es 72 y que los números son proporcionales a 3, 4 y 6 respectivamente. Finalmente dar la respuesta.

EJEMPLO

Las cantidades de zinc, cobre y níquel que componen una mezcla están en la razón 4 : 13 : 7, si se conoce que hay 2,4 kg más de cobre que de níquel. ¿Cuál es la masa de la mezcla?

Resolución:

Sean a, b, c las cantidades de zinc, cobre y níquel respectivamente.

Se sabe además que $\frac{a}{4}=\frac{b}{13}=\frac{c}{7}=k$ aquí se debe aclarar lo que se interpreta al plantear 4 : 13 : 7

¿Qué relación existe entre b y c?

La relación es b = c + 2,4, ahora la proporción se escribe así: $\frac{a}{4}=\frac{c+2{,}4}{13}=\frac{c}{7}=k$, de donde 13c = 7c + 16,8. Finalmente c = 2,8 y por tanto b = 5,2.

¿Cómo calcular a? Obteniendo el valor de k pues a = 4k. Es decir $\frac{2{,}8}{7}=k$, o sea $k=0{,}4$ de donde A = 1,6. Luego la masa de la mezcla es 9,6 kg.

Se sugiere dedicar la primera clase para repasar en forma activa lo referente a proporcionalidad directa, razones y proporciones, la segunda para tratar los primeros problemas de reparto proporcional; en esta clase el primer ejemplo debe ser resuelto en elaboración conjunta como se ejemplificó en estas orientaciones y los restantes ejercicios deben resolverse por parte de los alumnos en trabajo independiente, aunque si es necesario, el profesor dará algunos impulsos mediante preguntas. Las dos últimas clases se dedicarán a resolver problemas.

3. INECUACIONES LINEALES

Para el desarrollo del contenido correspondiente a esta unidad temática se dispone de 4 horas clase. Igual que en la unidades anteriores, por lo corto de la misma no se ha dividido en puntos esenciales.

Se trata de lograr en esta unidad que los alumnos comprendan la relación que existe entre el signo de la función lineal y la resolución de una inecuación lineal, así como desarrollar habilidades en la resolución de inecuaciones lineales sencillas.

Se debe comenzar con un repaso sobre inecuaciones en $\angle_+$; esto puede hacerse mediante un ejercicio como el siguiente:

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, si $x \in \angle_+$

a. $2x + 3 < 7$
b. $3x + 5 > 2x + 0$

El alumno conoce los conceptos inecuación, solución y conjunto solución de una inecuación, así como resolver en $\angle_+$ inecuaciones de la forma $ax + b < c$.

Apoyándonos en este ejercicio se actualizan estos contenidos, destacando que el conjunto solución puede variar en dependencia del dominio de la variable.

Ahora, para enunciar el teorema que permite trabajar en inecuaciones se puede partir de un ejercicio como el siguiente:

Suma (multiplica) a ambos miembros de las desigualdades siguientes el número "a" que se indica y compara los resultados.

a. $4 < 6,\ a = 2$
b. $-5 < -2,\ a = 3$
c. $3 < 7,\ a = -1$
d. $-2 < 8,\ a = -2$

De aquí se concluirá que:

1. Si se suma (resta) a ambos miembros de una desigualdad un número real cualquiera el signo de la desigualdad se mantiene.
2. Si se multiplica (divide) ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo la desigualdad se mantiene y se invierte si el número es negativo.

Este es el momento de presentar el teorema y su demostración.

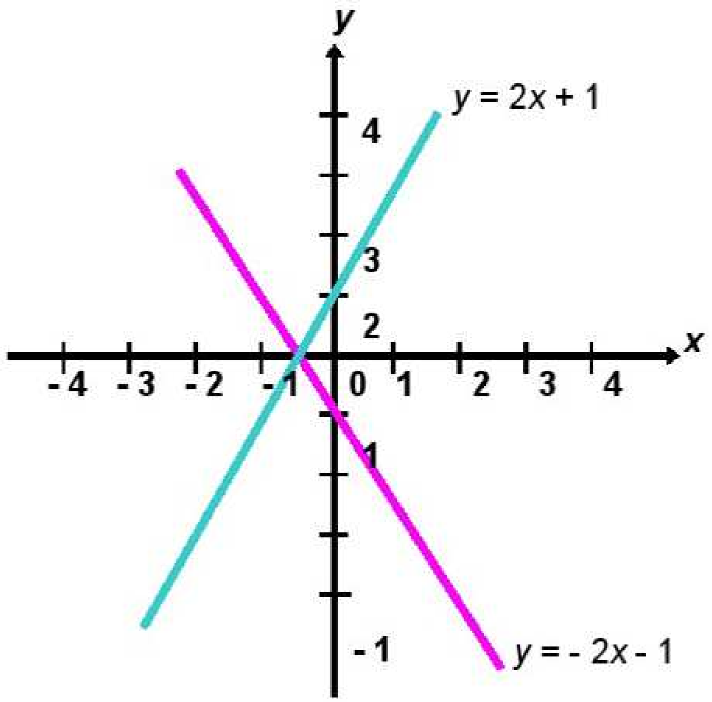
> Si en una desigualdad:
> 1.- Se suma o resta un mismo número real a ambos miembros de ésta, el signo de la desigualdad se mantiene.
> 2.- Se multiplican o dividen ambos miembros de ésta por un número real distinto de cero, el signo de la desigualdad se mantiene si el número es positivo y se invierte si el número es negativo.

Para fundamentar el cambio de signo de la desigualdad, el profesor se puede apoyar en la explicación a partir de la pendiente y del crecimiento de la función lineal, de la forma siguiente:

Resolver las inecuaciones lineales $2x + 1 > 0$ y $-2x - 1 > 0$ significa determinar los valores del dominio donde las funciones lineales $y = 2x + 1$, $y = -2x - 1$ tienen imágenes positivas, es decir $y > 0$.

En el primer caso $m = 2 > 0$, por lo tanto, la función es creciente y tiene imágenes positivas para $x > -\frac{1}{2}$ que es su cero. (como en la figura).

En el segundo caso $m = -2 < 0$, luego la función es decreciente y tiene imágenes positivas para $x < -\frac{1}{2}$ que es su cero (como se ve en la figura).



Concluimos que:

$2x + 1 > 0$ para $x > -\frac{1}{2}$

$-2x - 1 > 0$ para $x < -\frac{1}{2}$

Observe que al dar la respuesta, si $m > 0$ el signo de la desigualdad se mantiene y si $m < 0$ el signo de la desigualdad se invierte.

Este tratamiento se puede hacer en la primera clase y las tres restantes dedicarlas a ejercitar. En los primeros ejercicios se debe exigir la fundamentación del cambio de signo de la desigualdad.

Deben aprovecharse los ejercicios para variar el dominio y analizar la solución gráficamente. Se sugiere realizar los siguientes ejercicios:

1.- Determine para qué valores de $x \in \nabla$ se cumple que:

a. $2x + 5 > 0$ b. $-5x + 10 < 0$ c. $4 - x > 0$
d. $5 + 7x < 0$ e. $x + 3 > 7$ f. $2 - 4x < 9$
g. $x - 3{,}4 \geq 5$ h. $-2{,}1x + 4 \leq 8{,}1$

2.- Resuelva las inecuaciones siguientes:

a. $6x - 7 < 5x$ b. $3x + 7 < 13 + 2x$

c. $8 - x < 27 + 2x$ d. $6x - 9x < 7x - 7$

e. $3(a - 5) < 5 - 2(-a + 1)$ f. $4(2x + 3) < x - 3(3 - 2x)$

g $\frac{x}{4} + 3 < 4 - \frac{x}{8}$ h. $\frac{x+3}{4} < \frac{x-4}{6}$

i. $-4 + 0{,}4x > 0{,}6x - 2$ j. $4(x - 0{,}7) + 2 \leq -(0{,}3 - 2x)$

k. $(2x + 5)(x - 1) \geq 2x(x + 6) + 13$ l. $(x + 3)(x - 4) - 7 \leq (x - 6)^2 - 22$

m. $x + \left\{ \frac{3x}{5} + \left[4x - \left(\frac{3x}{2} + \frac{3x}{5} \right) \right] \right\} > 0$

3.- Para qué números naturales (enteros) las siguientes funciones tienen imágenes positivas.
a. $y = 4x + 3$ b. $y = 3x - 15$
c. $y = 5 - x$ d. $y = -2x + 8$

4.- Determine 5 valores de x para los cuales y sea negativa si:
a. $y = 1{,}5x + 3$ b. $y = 2 - 3x$
c. $y = 4{,}5 + 3{,}5x$ d. $y = -x$

5.- ¿Qué números naturales de dos dígitos satisfacen la condición de que al sumarle su mitad, el resultado es mayor que 130?

6.- Halle todos los números naturales de dos dígitos, mayores que 23 y menores que 43, en los que la cifra de las decenas sea menor en 2 que la de las unidades.

7.- Utilice la desigualdad triangular para demostrar que en todo triángulo, la mitad del perímetro es mayor que la longitud de cada lado.

EJERCICIOS QUE REPRESENTAN LAS EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD.

Se recomienda se realicen ejercicios del siguiente tipo:

- Ejercicios donde se deba representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Ejercicios para identificar las coordenadas de puntos representados en un plano cartesiano.
- Ejercicios para decidir si una correspondencia dada es o no una función lineal.
- Ejercicios para reconocer la ecuación de una función lineal, su representación gráfica, su dominio y su imagen.
- Ejercicios donde se daba resolver problemas de proporcionalidad directa y de reparto proporcional.
- Ejercicios sencillos para resolver inecuaciones lineales.

UNIDAD 4

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

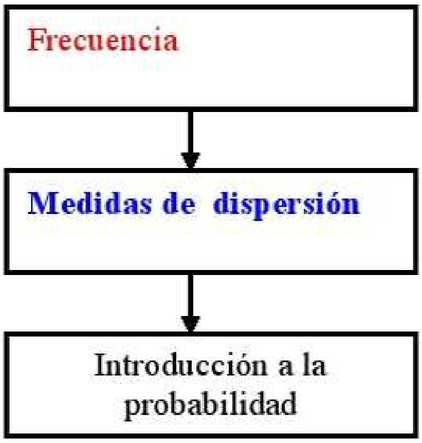
La estadística o los métodos estadísticos, como se denominan a veces, está jugando un papel más y más importante en casi todas las facetas del comportamiento humano. Ocupada inicialmente en asuntos de estado, y de ahí su nombre, la influencia de la estadística se ha extendido ahora a la agricultura, biología, negocios, química, comunicaciones, economía, educación, electrónica, medicina, física, ciencias políticas, psicología, sociología y otros muchos campos del saber humano.

El propósito de esta unidad es continuar con el tratamiento con carácter propedéutico de los principios básicos de la estadística, y hacer la introducción a las probabilidades, que serán de gran importancia en la vida futura de los estudiantes.

Como vía metodológica se ha estructurado esta unidad con enunciados claros de las definiciones pertinentes, junto con material ilustrativo. Ello viene seguido de problemas resueltos y suplementarios que en muchos casos utilizan datos obtenidos en situaciones estadísticas reales. Los ejemplos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, arrojan luz sobre los puntos sutiles, sin lo cual el estudiante se sentiría siempre en arenas movedizas, y proporciona la oportunidad de repetir los principios básicos, vital para un aprendizaje eficaz.

La única base matemática requerida para asegurar el nivel de partida, de los estudiantes, es la aritmética, los rudimentos del álgebra, el análisis de las distribuciones de frecuencia, y las medidas asociadas de tendencia central (media, mediana, moda)

La unidad ha sido concebida para, a partir de los conceptos adquiridos por los estudiantes en el sistema de probabilidades y estadística en grados anteriores, conducir naturalmente a una discusión de la teoría elemental de probabilidades y sus aplicaciones, que allanan el camino para la teoría del muestreo.



COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos desarrollen habilidades en la determinación de la probabilidad de que un evento o suceso ocurra, y que puedan calcular e interpretar medidas de dispersión.

EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Puedan determinar la frecuencia a partir de la frecuencia relativa y viceversa.
- Sean capaces de determinar cuán esparcidos se encuentran los datos a través de las medidas de dispersión.
- Identifiquen la probabilidad de un evento o suceso como frecuencia relativa.

INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Frecuencia
2. Medidas de dispersión.
3. Introducción a la probabilidad.

1. FRECUENCIA

Se sugiere tratar esta unidad temática en dos horas. Lo fundamental es que los estudiantes puedan, a partir de la frecuencia relativa, determinar la frecuencia de un evento.

Como vía metodológica se sugiere que se reactiven los conocimientos de frecuencia relativa y absoluta, a través de ejemplos, como el siguiente:

EJEMPLO

En la siguiente tabla se recogen los pesos de 40 trabajadores de una fábrica.

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

Completar la siguiente tabla

PESO (Lbs)	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
118-122		
123-127		
128-132		
133-137		
138-142		
143-147		
148-152		
153-157		
158-162		
163-167		
168-172		
173-177		

A partir de ejemplos como el anterior se puede definir la frecuencia acumulada como sigue y, solicitar su determinación.

Se llama frecuencia acumulada a la frecuencia total de todos los valores menores o iguales, que uno dado

En el ejemplo anterior se puede, entonces solicitar se complete la siguiente tabla.

PESO (Lbs)	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA ACUMULADA
118-122		
123-127		
128-132		
133-137		
138-142		
143-147		
148-152		
153-157		
158-162		
163-167		
168-172		
173-177		

2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugieren 6 horas. Se distinguen los siguientes puntos esenciales

- Desviación promedio.
- Varianza. Desviación estándar

2.1 Desviación Promedio

Para el tratamiento de este punto sugerimos 2 horas. Lo que se debe lograr es que los estudiantes comprendan que la desviación promedio no es más que la media de las distancias de cada uno de los datos con respecto a la media de éstos.

$$DP = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - m|}{n} \quad donde \quad x_1, x_2, ..., x_n, \text{ son datos y } m \text{ es la media de éstos.}$$

Como vía metodológica sugerimos constatar el nivel de partida de los estudiantes, en lo referente al concepto de valor absoluto y de distancia. Se puede empezar ejercitando el cálculo del valor absoluto con ejercicios planteados por el profesor. A continuación asociar el valor absoluto con el concepto de distancia, lo que se debe hacer a través de ejemplos para lograr la reactivación de los conocimientos. Por otra parte, no se recomienda a este nivel utilizar el símbolo $\sum$.

Seguidamente se debe presentar algunos ejemplos reales, como los que se sugieren a continuación, en los que se pida a los estudiantes calcular la media del conjunto de datos y, a partir de esto determinar la desviación (distancia) de cada uno de éstos a la media.

Es en este momento que se debe presentar la definición de desviación promedio, considerando que los estudiantes no manejan el símbolo sumatorio.

Se sugieren seguir los siguientes pasos para el cálculo de la desviación promedio de un conjunto de datos.

1. Determinar la media del conjunto de datos.
2. Determinar el valor absoluto de la diferencia entre cada elemento del conjunto y la media (ignorar el signo)
3. Sumar todas las diferencias anteriores.
4. Dividir para el número total de elementos del conjunto

Se recomienda que los pasos a seguir se organicen en una tabla como la que se presenta en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Las edades de un grupo de 20 alumnos pertenecientes a los tres últimos años de la educación básica son:

13 11 14 15 12 15 13 12 15 13

14 15 13 15 12 16 13 14 11 16

Calcular la media y la desviación promedio de estas edades. Completar el cuadro.

Edad (*x*)	**Frecuencia** (*f*)	$f \times x$	**Media** (*m*)	***x-m***	**|*x-m*|**	***f*× |*x-m*|**
11						
12						
13						
14						
15						
16						

m =

DP =

La desviación promedio proporciona una idea de cuán dispersos se encuentran los datos con respecto a la media.

2.2 Varianza. Desviación estándar

Para el tratamiento de este punto se sugieren 4 horas. Se debe lograr que los estudiantes desarrollen habilidades en el cálculo de la varianza y de la desviación estándar.

Al igual que la desviación promedio, la desviación estándar mide el grado de dispersión de los datos con respecto a la media. Se diferencia de ésta en que las distancias de los datos a la media se han reemplazado por el cuadrado de ellas. Esto permite obviar el valor absoluto que puede presentar dificultades en desarrollos posteriores.

$$VAR = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n} \quad donde \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ son\ datos\ y\ m\ es\ la\ media\ de\ éstos.$$

Como vía metodológica se sugiere abordar la definición de la misma forma que se lo hizo con la desviación promedio. Para a continuación realizar algunos ejemplos en los que se pida el cálculo de la varianza.

Se sugieren seguir los siguientes pasos para el cálculo de la varianza de un conjunto de datos.

1. Determinar la media del conjunto de datos.
2. Determinar la diferencia entre cada elemento del conjunto y la media
3. Elevar al cuadrado estas diferencias
4. Sumar los cuadrados de las diferencias anteriores.
5. Dividir para el número total de elementos del conjunto

La desviación estándar no es más que la raíz cuadrada de la varianza.

$$DE = \sqrt{VAR}$$

La desviación estándar nos permite determinar con mayor precisión dónde se sitúan los datos con relación a la media, posiblemente debido a que resultados matemáticos como el teorema Chebyschev se expresan en términos de ésta.

3. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Para el desarrollo de esta unidad temática se disponen de 6 horas, y en ella se han determinado los siguientes puntos esenciales:

- Sucesos o eventos.
- La probabilidad como frecuencia relativa.

3.1 Sucesos y eventos

Para el tratamiento de este punto se sugiere asegurar el nivel de partida de los estudiantes, es decir, deberán manejar adecuadamente las fracciones, su expresión decimal y los porcentajes, así como la organización de datos a través de tablas. Se puede disponer de 3 horas.

Debido a la gran importancia que tiene el manejo adecuado de los términos eventos o sucesos en la probabilidad, se debe tratar este punto con énfasis especial. Recomendamos introducir la definición a través de un ejemplo práctico como el siguiente:

EJEMPLO

Lanzar una moneda 50 veces y anotar los resultados de cada uno de sus lanzamientos. ¿Cuántas veces se obtiene cara? ¿Cuántas veces se obtiene sello?

A continuación se introduce la definición de evento o suceso.

Asociado con un experimento, un evento o suceso es cualquier subconjunto del conjunto de todos los casos posibles.

En el ejemplo anterior, "lanzamiento de una moneda", el evento "salir cara (sello)", consta de un solo elemento.

Si lanzamos un dado el evento "número impar" es el conjunto $\{1, 3, 5\}$.

Si de una caja con dos bolas blancas y tres negras se sacan dos bolas, el evento "sacar dos bolas negras" tiene tres elementos.

Para introducir la idea de probabilidad podríamos formular la siguiente pregunta: "En un experimento consistente en lanzar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara? Al respecto podemos hacer referencia a los resultados obtenidos al lanzar 50 veces una moneda. A continuación se puede hacer la misma pregunta sobre los otros ejemplos: el lanzamiento de un dado, el de las bolas blancas y negras, u otros similares. El objetivo es que los alumnos descubran la fórmula que les permita calcular la probabilidad de un evento.

La probabilidad se calcula dividiendo el número de casos favorables por el número de casos posibles

Si un evento A tiene m elementos y el número de casos posibles es n, entonces

$$\text{Probabilidad de A} = \frac{m}{n}.$$

Es importante hacer notar que se está suponiendo que en los experimentos que estamos considerando, todos los resultados tienen la misma posibilidad de éxito: si lanzamos una moneda, la posibilidad de obtener sello es la misma que la de obtener cara; si lanzamos un dado, cualquiera de los 6 números tiene la misma posibilidad de salir.

La definición misma de probabilidad muestra que ésta siempre está entre 0 y 1. El evento vacío tiene probabilidad 0, y el evento de todos los casos posibles tiene probabilidad 1. Se dice que el primero es el *evento imposible* y que el segundo es el *evento seguro*. A medida que la probabilidad de un evento se acerca a 1 es "más probable" que éste ocurra, por el contrario, si la probabilidad es cercana a 0, es "poco probable" que el evento ocurra.

En este año no se introducen técnicas de conteo. Para el cálculo del número de casos favorables y el número de casos posibles será necesario, a menudo, que el alumno describa exhaustivamente todos los casos.

EJEMPLOS

1. Se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una cara?

Casos posibles: CC – CS – SC - SS
Casos favorables: CC – CS – SC
A = {CC, CS, SC}

$$\mathbf{P(A)} = \frac{3}{4}.$$

2. Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 5?

Casos posibles: cada uno de los 6 números del primer dado se combina con cada uno de los 6 números del segundo dado, por tanto existen $6 \times 6 = 36$ casos posibles.
Casos favorables. (1,4), (4, 1), (2, 3), (3, 2).

A = {(1,4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}

$$\mathbf{P(A)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Se sugieren realizar los siguientes ejercicios o ejercicios similares.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 al lanzar un dado?.

2. Se lanzan tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una cara?.

3. Se lanzan dos dados.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 11?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7?

4. Determine las probabilidades de los siguientes eventos en la extracción de una carta de una baraja de 52 cartas.
   a. Un siete.
   b. Una carta negra.
   c. Un as o un rey.
   d. Un dos o un tres negros
   e. Una carta con figura humana (rey, reina, jota)

3.2 La frecuencia relativa como probabilidad

Para el tratamiento de este punto se sugiere 1 hora. El estudiante ya está familiarizado con los conceptos de frecuencia y frecuencia relativa y es entonces conveniente hacerle notar que la frecuencia no es más que una probabilidad, donde el número de casos favorables es el número de veces que se repite un dato, y el número de casos posibles es el número total de datos. En el ejemplo siguiente:

El cuadro inferior muestra la repartición de los treinta y dos niños de una clase de acuerdo con sus edades.

Edad	11	12	13	14
Frecuencia	8	16	4	4

La frecuencia relativa de los niños de 12 años es

$$\frac{16}{32} = 0{,}5$$

o, en términos de porcentaje, el 50%.

En lugar de preguntar por la frecuencia relativa podía preguntarse, ¿cuál es la probabilidad de que un niño de esa clase tenga 12 años? En este caso el evento es el conjunto de niños de 16 años y el conjunto de todos los casos posibles, el conjunto de los niños de la clase. La probabilidad de ese evento es entonces

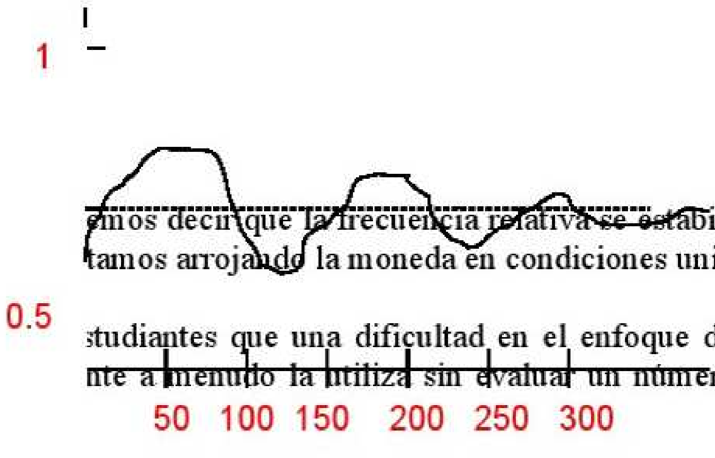
$$\frac{n° de niños de 12 años}{n° de niños de la clase} = \frac{16}{32} = 0{,}5$$

Determinamos la frecuencia con que algo ha sucedido en el pasado y mediante esa cifra calculamos la probabilidad de que vuelva a suceder en el futuro. Pongamos un ejemplo para ilustrar lo anterior. Supongamos que una compañía de seguros sabe por sus datos actuariales que, de todos los varones de 40 años de edad, unos 60 de cada 100 000 morirán al cabo de un año. Aplicando ese método, la compañía estima la probabilidad de fallecimientos en ese grupo de edad en los siguientes términos:

$$\frac{60}{100\,000} \quad \textit{o lo que es lo mismo} \quad 0.0006$$

Una segunda característica de las probabilidades establecida por la frecuencia relativa del método de ocurrencia puede demostrarse arrojando una de nuestras monedas 300 veces.

La figura siguiente muestra los resultados de esos 300 lanzamientos. En ella vemos que, pese a que la proporción de lados A está lejos de 0.5 en los primeros 100 lanzamientos, parece estabilizarse y acercarse a esa cifra al ir aumentando el número de lanzamientos.



En el lenguaje estadíst emos decir que la frecuencia relativa se estabiliza al crecer el número de lanzamient tamos arrojando la moneda en condiciones uniformes).

Debemos hacer notar studiantes que una dificultad en el enfoque de la frecuencia relativa consiste en qu nte a menudo la utiliza sin evaluar un número suficiente de resultados. Sugerimos sto.

Si oye a alguien decir íos se enfermaron de gripe este año, los dos tienen más de 65 años, de manera que todas las personas de esa edad probablemente se resfríen"

Se debe evidenciar que esa persona no basó sus suposiciones en suficiente evidencia, ya que no contaba con un número adecuado de datos para garantizar que su afirmación sea confiable.

Pueden realizarse los siguientes ejercicios que relacionan la probabilidad con la frecuencia relativa:

1. En la tabla siguiente se presenta una distribución de frecuencias de las comisiones de ventas anuales tomadas de una encuesta a 300 vendedores de publicidad. Basándose en esta información, ¿cuál es la probabilidad de que un vendedor logre una comisión

   a. entre 500 000 y 1'000 000
   b. menos de 1'500 000
   c. más de 200 000
   d. entre 1'500 000 y 2'000 000

COMISIÓN ANUAL	FRECUENCIA
$ 0 - 499 999	15
500 000 - 999 999	25
1'000 000 -1'499 999	35
1'500 000 -1'999 999	125
2'000 000 -2'499 999	70
2'500 000-	30

2. El supervisor de educación de la provincia dispone de los siguiente datos referentes al funcionamiento de las copiadoras de su oficina.

COPIADORA	DÍAS EN QUE FUNCIONA	DÍAS FUERA DE SERVICIO
1	209	51
2	217	43
3	258	2
4	229	31
5	247	13

¿Cuál es la probabilidad de que una copiadora esté fuera de servicio, basándose en estos datos?

UNIDAD 5

GEOMETRIA

INTRODUCCIÓN

Esta unidad ha sido concebida con el propósito especial tanto de sistematizar todos los conocimientos y habilidades desarrolladas por los alumnos durante el estudio de la geometría plana en los años anteriores, cuanto con el de servir de preparación para el estudio de los temas posteriores de geometría.

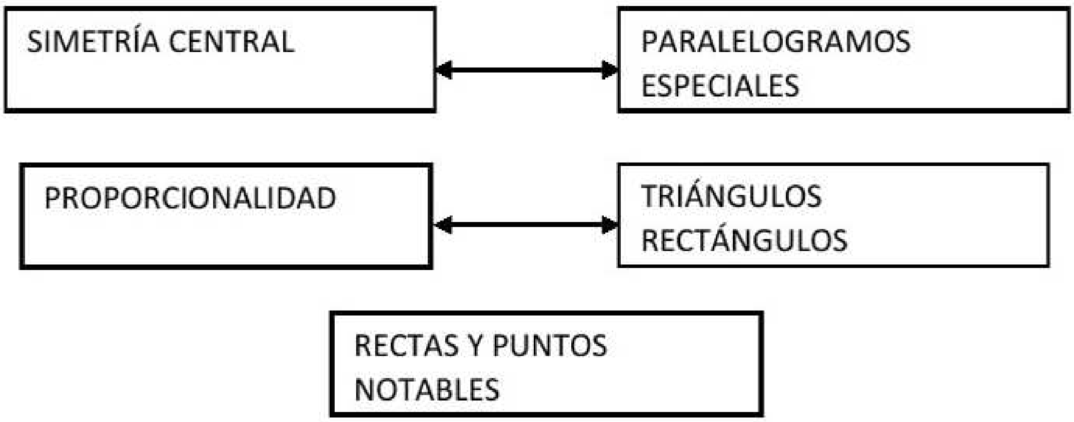
Es por eso que en esta unidad se hace una presentación de los conceptos de los contenidos fundamentales de la Geometría y, sobre la base de los conocimientos de los alumnos y las habilidades y hábitos desarrollados, de modo que se pueda estructurar el estudio sistemático deseado.

Esta estructura posibilita centrar la atención en lo esencial y dedicar mayor tiempo al desarrollo de las habilidades de los alumnos para operar con los conceptos y teoremas. Una de las unidades temática se dedica al estudio del teorema de Pitágoras que tiene como objetivo fundamental la articulación con la asignatura Física.

Los contenidos de esta unidad constituyen una base esencial sobre la cual se desarrolla el curso completo de la Geometría Plana y de la Geometría del Espacio en los niveles de Secundaria Básica y de Preuniversitario y, de aquí la importancia de lograr en este año los objetivos que plantea el programa en relación con esta unidad.

Durante todo el trabajo en la unidad se presta atención en la aplicación de las reglas del cálculo aproximado y el sistema de ejercicios está concebido de manera que se sistematicen todos los conocimientos sobre la planimetría.

COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD



HILO CONDUCTOR

Lo esencial en esta unidad es que los alumnos sistematicen los conocimientos sobre triángulos, movimientos, reflexión, simetrías, teorema de Pitágoras, paralelogramos, congruencia, rectas y puntos notables de un triángulo, círculos, de manera que pueda operar con ellos y aplicarlos conjuntamente en la resolución de problemas geométricos de cálculo, de construcción y de demostración donde se incluyen situaciones de la vida práctica.

EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para lograr lo que hemos definido como esencial es necesario al concluir la unidad que los alumnos:

- Dominen los conceptos razón entre segmentos proporcionales y puedan operar con ellos.
- Dominen el concepto polígonos semejantes y en particular el de triángulos semejantes, y los teoremas sobre la semejanza de triángulos y puedan aplicarlos conjuntamente con los conocimientos de geometría, estudiados anteriormente, en la resolución de problemas.
- Dominen el teorema de Pitágoras, comprendan el teorema recíproco, de manera que pueda aplicarlos convenientemente.
- Comprendan cómo se obtiene la proposición recíproca de un teorema, el método de demostración por la vía indirecta y continúen desarrollando habilidades en la realización de demostraciones sencillas par la vía directa.
- Desarrollen habilidades para fundamentar adecuadamente sus razonamientos y se-an capaces de comprender y realizar demostraciones sencillas.
- Conozcan las clasificaciones de los triángulos y los cuadriláteros, reconozcan sus elementos y dominen sus propiedades fundamentales de manera que puedan operar con ellas.
- Consoliden sus habilidades en el uso de instrumentos de trabajo geométricos y puedan realizar construcciones geométricas propias del año con seguridad y limpieza.

El nivel mínimo que deben alcanzar los alumnos par dar cumplimiento a estas exigencias se caracterizan mediante ejercicios como los que aparecen a continuación:

1. El triángulo P'Q'R' es la imagen de un triángulo PQR por una simetría central de centro O (el punto O es un punto exterior al triángulo PQR).
   Diga si son verdaderas o falsas las siguiente proposiciones y fundamente sus respuestas.
   - **a.** La imagen de un punto $\overline{QR}$ es un punto de $\overline{Q'R'}$.
   - **b.** Las semirectas QR y Q'R' son paralelas.
   - **c.** Las semirectas QR y Q'R' tienen la misma dirección y el mismo sentido.
   - **d.** $\overline{PQ'} = \overline{P'Q'}$
   - **e.** $\angle PQR = \angle P'Q'R'$

f. $\Delta PQR = \Delta P'Q'R'$

2. Diga si existe algún paralelogramo *ABCD* que cumpla las condiciones siguientes:
   a. Todos sus ángulo son agudos
   b. $\angle$ A y $\angle$ C agudos.
   c. $\angle$ A es agudo y $\angle$ B es obtuso
   d. $\angle$ A recto y $\angle$ B agudo.
   Fundamente sus respuestas.

3. Una diagonal de un paralelogramo forma con dos de sus lados ángulos de 30° y 50°. Hallar las amplitudes de los ángulos del paralelogramo.

4. Las diagonales de un rectángulo ABCD se intersecan en el punto O. Demuestre que los triángulos AOB y AOD son isósceles.

5. Construya un rombo ABCD del que se conoce:
   a. $\angle$ A =50° y $\overline{AC}$ = 4 cm.
   b. $\overline{AC}$ =5 cm. y $\overline{BD}$ =3
   c. $\overline{BD}$ = 6 cm. y $\angle$ A = 110°

6. En un rombo ABCD, $\overline{AC}$ = 8,0 cm. $\overline{BD}$ = 5,0 cm. Calcule el perímetro del triángulo COB (O punto de intersección de las diagonales).

7. Determine la posición de un punto que equidista de los vértices de un cuadrado.

8. Sean S el punto medio de $\overline{PR}$ y $\overline{PQ} = \overline{RQ}$. Diga si es posible asegurar que QS es la mediatriz de $\overline{PR}$

9. Construya la mediatriz de un segmento de 4 cm de longitud.

10. En una pirámide de base cuadrada el ángulo que forman las alturas de dos caras son consecutivas tienen una amplitud de 50° y los lados de la base miden 4.0 cm. Calcula la altura de la pirámide.

11. Trazar dos segmentos que estén en la razón:
    a. $\frac{3}{5}$
    b. 0,4
    c. 3,5

12. Dibujar un triángulo ABC y determinar un punto de la altura al lado AC que equidiste de los lados AB y AC.

ORIENTACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguiente unidades temáticas:

1. Simetría Central.
2. Paralelogramos especiales. Rectángulo. Rombo. Cuadrado
3. Triángulos Rectángulos: Teorema de la Mediana
4. Triángulos Rectángulos: Teorema de Pitágoras.
5. Proporcionalidad.
6. Sistematización de rectas y puntos notables de un triángulo.

1. SIMETRÍA CENTRAL. PROPIEDADES

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugiere 1 hora de clase. En el año anterior ya se hizo simetría axial y traslación, se ha creído conveniente dejar la simetría central para este año.

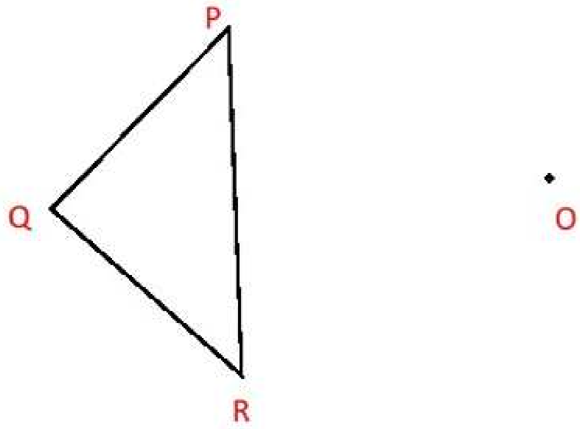
Debido a que el estudiante ya ha trabajado la simetría axial y la traslación, se considera conveniente que se presente la siguiente definición.

La simetría central (de centro O) es una transformación del plano, mediante la cual cada punto A del plano se transforma en un punto A'; tal que el punto O es un punto medio del segmento AA'.
Se dice entonces que los puntos A y A' son simétricos con respecto al punto O.

A continuación se sugiere realizar el siguiente ejemplo, con el propósito de poder determinar las propiedades.

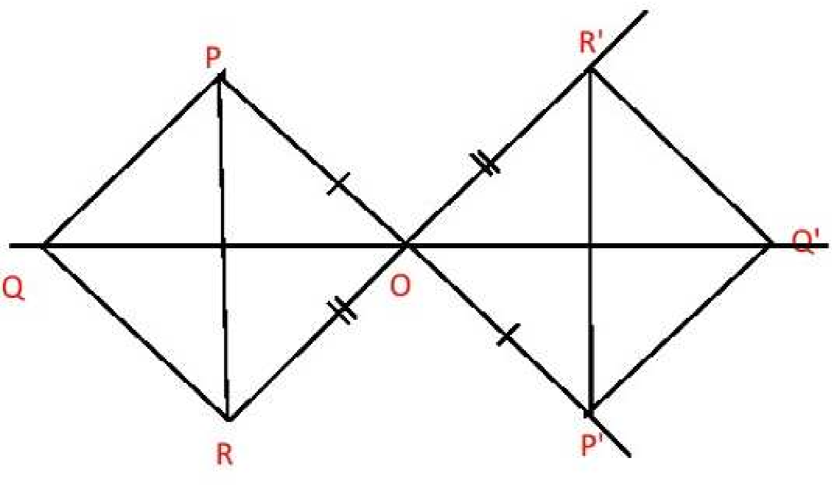
EJEMPLO

Construya la imagen del triángulo PQR, de la figura siguiente, por una simetría central de centro O.



Resolución

Para obtener la imagen del ΔPQR por la simetría central de centro O, es necesario obtener la imagen de cada uno de sus vértices.
Por ejemplo para obtener la imagen del vértice Q procedemos de la forma siguiente:



1. Trazamos la semirrecta QO
2. Sobre la semirrecta QO y del lado opuesto al que se encuentra Q respecto al centro O, tomamos a partir de O una longitud igual a la del segmento QO. Así queda determinado el punto Q' imagen de Q.
3. Para obtener las imágenes de los otros vértices se procede de la misma forma.

Se puede ahora presentar las propiedades de la simetría central:

La simetría central cumple las siguientes propiedades:

Por una simetría central:

1. La imagen de una recta, es una recta paralela a la recta original
2. La imagen de una semirrecta es una semirrecta con la misma dirección y sentido opuesto a la de la semirrecta original.
3. Si un punto A está situado en una recta *a*, entonces el punto imagen A' está situado en la recta imagen a'.
4. La imagen de un ángulo, es un ángulo que tiene la misma amplitud que el ángulo original.
5. La imagen de un segmento, es un segmento paralelo a él y que tiene su misma longitud.

A continuación se sugiere realizar los siguientes ejercicios.

1. Construya la imagen de un segmento $\overline{AB}$, de 3 cm de longitud por una simetría de centro O (el punto O no pertenece a $\overline{AB}$)
2. Dibuje un triángulo ABC y construya su imagen por la simetría central de centro B.
3. El triángulo P'Q'R' es la imagen de un triángulo PQR por una simetría central de centro O (el punto O es un punto exterior al triángulo PQR)
Diga si son verdaderas o falsas las siguiente proposiciones y fundamente sus respuestas.

a. La imagen de un punto $\overline{QR}$ es un punto de $\overline{Q'R'}$.
b. Las semirectas QR y Q'R' son paralelas.
c. Las semirectas QR y Q'R' tienen la misma dirección y el mismo sentido.
d. $\overline{PQ'} = \overline{P'Q'}$
e. $\angle PQR = \angle P'Q'R'$
f. $\Delta PQR = \Delta P'Q'R'$

Ejercicios que representan las exigencias mínimas de la unidad temática.

Se sugiere se realicen ejercicios del siguiente tipo:

- Ejercicios dirigidos a la aplicación de las propiedades de la simetría central para fundamentar el valor de verdad de proposiciones.
- Ejercicios en los que se determina, aplicando las propiedades de la simetría central, la imagen de una figura geométrica por una simetría central.

2. PARALELOGRAMOS ESPECIALES: RECTÁNGULOS, ROMBO Y CUADRADO.

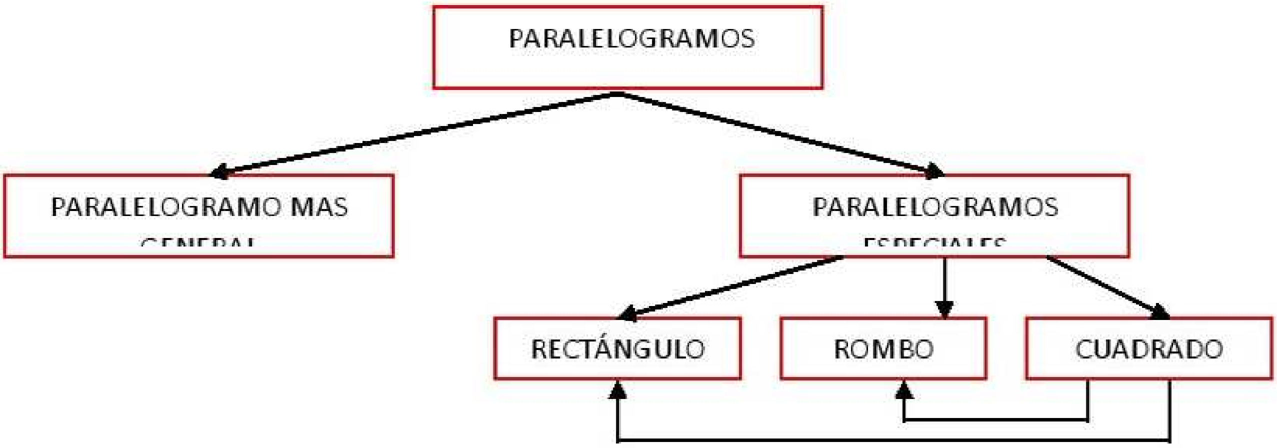
La presente unidad temática se ha dividido en los siguientes puntos esenciales.

- Repaso sobre paralelogramos
- Rectángulo.
- Rombo y Cuadrado.

2.1 Repaso sobre Paralelogramos.

Para el tratamiento de este punto esencial se sugieren se utilice 1 hora. El repaso se lo realizará a través de recordarse la clasificación de los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.

El año anterior los alumnos han estudiado esta clasificación y es posible que reconozcan estas figuras, para lo que consideramos que es conveniente presentar a los alumnos una ilustración como la figura siguiente y dar aquí las definiciones de paralelogramo.



Se sugiere se realicen los siguientes ejercicios:

1 Un ángulo exterior del paralelogramo *ABCD* tiene 155º de amplitud. Hallar las amplitudes de sus ángulos interiores.

2 Diga si el cuadrilátero *ABCD* es o no un paralelogramo en cada uno de los casos siguientes.

a. $1 = \angle 2 = \angle 4$
b. $1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 4$

Fundamente sus respuestas.

3 **Fundamente la siguiente propiedad:**

En todo paralelogramo la suma de las amplitudes de dos ángulos consecutivos es igual a 180°.

4 En cada uno de los siguientes casos hallar la amplitud de los ángulos del paralelogramo *ABCD:*

a. $\angle A = 84°$

b. $\angle A + \angle C = 142°$

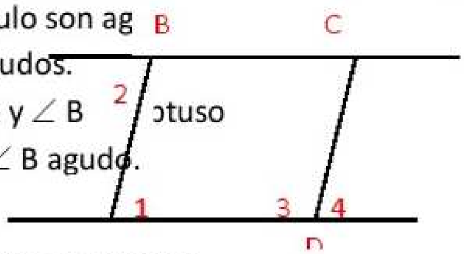
5 Diga si existe algún paralelogramo *ABCD* que cumpla las condiciones siguientes:

a. Todos sus ángulo son ag

b. $\angle A$ y $\angle C$ agudos.

c. $\angle A$ es agudo y $\angle B$ otuso

d. $\angle A$ recto y $\angle B$ agudo.



Fundamente sus respuestas.

6 Una diagonal de un paralelogramo forma con dos de sus lados ángulos de 30° y 50° Hallar las amplitudes de los ángulos del paralelogramo.

2.2 Rectángulo

Para el desarrollo de este punto esencial se dispone de 2 horas. El objetivo del estudio es que los alumnos comprendan la definición de rectángulo, así como sus propiedades fundamentales, de manera que sean capaces de aplicarlas en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo, de demostración y de construcción.

Este punto se inicia con la definición de rectángulo que tiene aplicación en la demostración del teorema, que debe tratarse a continuación.

> El paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos recibe el nombre de rectángulo.

Las diagonales de un rectángulo son iguales

Premisa: *ABCD* rectángulo

Tesis: $\overline{DB} = \overline{AC}$

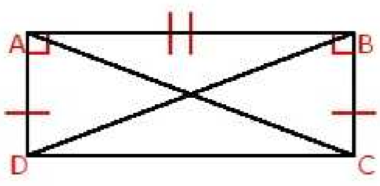
Demostración

$\Delta ADB \quad y \quad \Delta ABC$ (fig. siguiente)

$\overline{AD} = \overline{BC}$ propiedades del rectángulo

$\angle DAB = \angle ABC = 90°$

$\overline{AB}$ lado común



Por tanto $\Delta ABC = \Delta ADB$ por el teorema LAL y $\overline{DB} = \overline{AC}$ lados homólogos de triángulos iguales.

La demostración del teorema es sencilla por lo que sugerimos que la planteen para que sea realizada por los alumnos de forma independiente.

Una vez enunciado el teorema, el profesor puede pedir a los alumnos que escriban cuál es la premisa y cuál es la tesis del teorema.

A los alumnos que afronten dificultades en la búsqueda de la idea de la demostración se les puede sugerir lo siguiente:

- Dibuje el rectángulo.
- Queremos probar una propiedad de las diagonales, luego resultará útil trazar las diagonales en la figura que hemos dibujado.
- Analizar la premisa para precisar todos los datos que ella aporta.

Después de hecha la demostración se debe proponer a los alumnos la ejercitación siguiente.

Para resolver los ejercicios 1 y 2 los alumnos deben precisar los datos que se dan. Es importante que el profesor destaque la diferencia entre los datos de los ejercicios 1 y 2.

1. Demuestre que si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un rectángulo.
2. Demuestre que un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, es un rectángulo.
3. Demuestre que si un paralelogramo no tiene ángulo agudos, es un rectángulo.
4. Las diagonales de un rectángulo ABCD se intersecan en el punto O. Demuestre que los triángulos AOB y AOD son isósceles.
5. El perímetro de un rectángulo es 12 cm. Calcule la suma de la distancias de un punto interior a cada uno de sus lados.

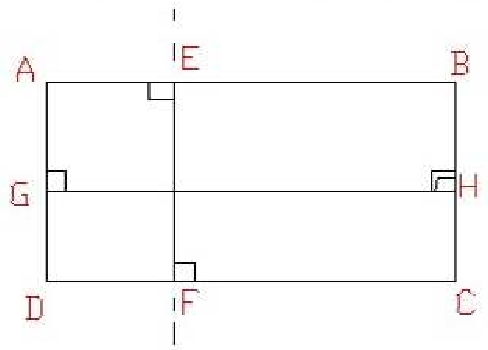
6. Construya un rectángulo conociendo que dos de sus lados consecutivos miden 3 cm y 5 cm respectivamente.

Las soluciones de los ejercicios anteriores se deben presentar de forma organizada y con la fundamentación de cada uno de los pasos.

En la solución del ejercicio 6 los alumnos pueden afrontar algunas dificultades para hacer la fundamentación. De una manera intuitiva es posible que lleguen a la conclusión de que al trazar las distancias del punto considerado a los lados opuestos se forma un segmento y que éste es paralelo a los otros dos lados del rectángulo, entonces el profesor debe ayudarlos a hacer la fundamentación.

Sugerimos que se le explique a los alumnos lo siguiente:

En la figura tenemos que EF y PF son segmentos que pertenecen a la recta EF que es perpendicular a AB y DC (solo hay una recta que pasa por P y es perpendicular a AB y DC)

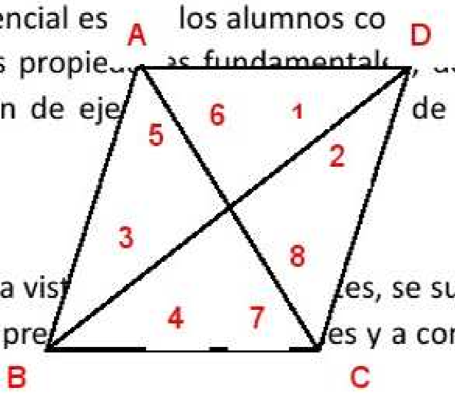


El cuadrilátero AEFD tiene 4 ángulos rectos y ya se demostró (ejercicio) que si un cuadrilátero tiene 3 ángulos rectos entonces es un rectángulo, por tanto EF = AD.

De forma análoga se demuestra que GH = AB.

2.3. Rombo y cuadrado

Para el tratamiento de este punto esencial se proponen 3 horas de clase. El objetivo del estudio de este punto esencial es los alumnos co ndan las definiciones de rombo y cuadrado, así como sus propie as fundamental de manera que sean capaces de aplicarlas en la resolución de eje de cálculo, de demostración y de construcción.



Como se trata de temas ya vis es, se sugiere se los reactive a través de la ejercitación. Se deben pre es y a continuación los teoremas con sus demostraciones

El paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales recibe el nombre de rombo

El paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales recibe el nombre de cuadrado.

El teorema sobre las diagonales del rombo no se va a demostrar en clase, sugerimos que esta demostración sencilla se oriente como tarea y se controle su estudio posteriormente.

Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente y cada una es bisectriz de los ángulos cuyos vértices unen.

Premisa ABCD rombo (figura siguiente)

$$Tesis: \begin{cases} 1.\ \overline{BD} \perp \overline{AC} \\ 2.\ \overline{AC}: bisectriz\ de\ \angle A\ y\ \angle C \\ \quad \overline{BD}: bisectriz\ de\ \angle B\ y\ \angle D \end{cases}$$

Demostración.

1) Los puntos B y D equidistan de los extremos de $\overline{AC}$, por tanto la recta BD es mediatriz de $\overline{AC}$ (es un eje de simetría) y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

2) Por la reflexión de eje BD, $\angle 1$ se transforma en $\angle 2$ por tanto $\angle 1 = \angle 2$ (propiedad de la reflexión). Análogamente podemos probar que $\angle 3 = \angle 4$, y por consiguiente, BD es bisectriz de los ángulos B y D del rombo.

De forma análoga se puede probar que AC es bisectriz del $\angle A$ y $\angle C$ si inicialmente demostramos que AC es mediatriz de $\overline{BD}$.

El teorema siguiente debe enunciarse a continuación y aclarar a los alumnos que en él se resumen las propiedades que poseen las diagonales del cuadrado por ser este rectángulo y rombo.

Las diagonales del cuadrado son iguales, se intersecan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

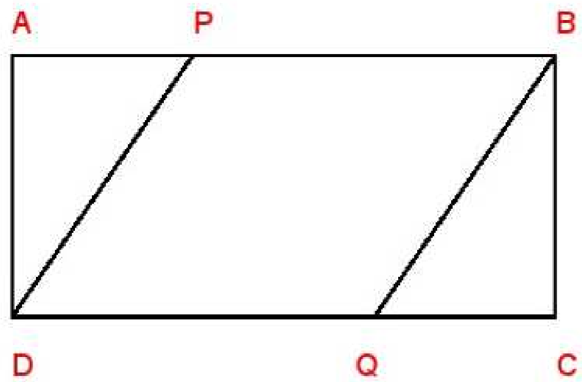
Proponemos se realicen los siguientes ejercicios

1. La diagonal de un rombo forma con uno de sus lados un ángulo de 40° .Halle las amplitudes de los ángulos del rombo.

2. Una diagonal de un rombo tiene la misma longitud que uno de sus lados. Calcule las amplitudes de los ángulos de este rombo.
3. Construya un rombo ABCD del que se conoce:
   a. $\angle$ A $=50^{\circ}$ y $\overline{AC}$ = 4 cm
   b. $\overline{AC}$ =5 cm y $\overline{BD}$ =3
   c. $\overline{BD}$ = 6 cm y $\angle$ A = 110°

4. En un rombo ABCD, $\overline{AC}$ = 8,0 cm, $\overline{BD}$ = 5,0 cm. Calcule el perímetro del triángulo COB (O punto de intersección de las diagonales).

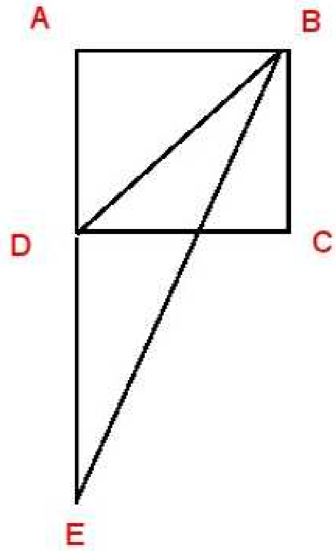
5. En la figura siguiente, ABCD es un rectángulo y DPBQ es un rombo, $\angle$ QBC=30° y $\overline{QC}$ = 4 cm. Calcule las amplitudes de los ángulos interiores y el perímetro de DPBQ.



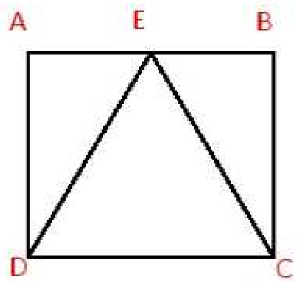
6. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamente sus respuestas.

   a. Un cuadrilátero que tenga sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados iguales es un cuadrado
   b. Un rectángulo cuyos lados son iguales es un cuadrado.
   c. Un rombo cuyas diagonales son iguales es un cuadrado.

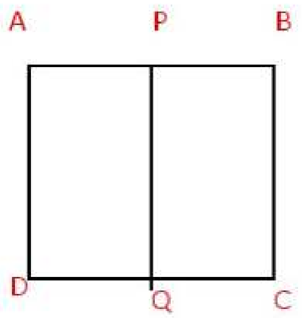
7. En la figura siguiente, ABCD es un cuadrado y el lado $\overline{AD}$ se prolonga de manera que $\overline{DE} = \overline{DB}$. Calcule las amplitudes de los ángulos del triángulo EDB.



8. En la figura siguiente ABCD es un cuadrado y E punto medio de $\overline{AB}$. Demuestre que Δ DEC es isósceles.



9. En la figura siguiente, ABCD es un cuadrado y PQ || AD. Demuestre que APQD es un rectángulo.



10. Construya un cuadrado ABCD del que se conoce:
    a. $\overline{AB}$ = 2 cm.
    b. $\overline{AC}$ = 6 cm.

11. Calcule el perímetro de un cuadrado ABCD del que se conoce que la suma de las distancias de un punto interior de este cuadrado a cada uno de sus lados es de 8,0 cm.

12. Determine la posición de un punto que equidista de los vértices de un cuadrado.

Aclaraciones sobre los ejercicios propuestos.

El sistema incluye ejercicios de cálculo, de demostración y de construcción.

No debe dejar de resolverse en clase el ejercicio 6, que ayuda a la mejor comprensión de los conceptos de rectángulo, rombo y cuadrado. Este ejercicio se hará oralmente, pero el profesor debe pedir una fundamentación clara de los razonamientos que hagan los alumnos.

En los ejercicios de construcción se pedirá también que los alumnos fundamenten el procedimiento empleado.

EJERCICIO 2: Al trazar la diagonal se forman dos triángulos equiláteros y de ellos es conocido que las amplitudes de sus ángulos es de 60°.

EJERCICIO 3: En la fundamentación de las construcciones se aplican la definición del rombo y sus propiedades.

Por ejemplo, en el ejercicio 6 a) lo primero que se construye es el ángulo A y el resto de la construcción se fundamenta aplicando la definición y propiedades del rombo.

Los pasos de la construcción son los siguientes:

Se construye el ángulo A

Se traza la bisectriz de $\angle$ A y se determina sobre ella el punto C, conociendo que AC = 4 cm.

Se trazan por C rectas paralelas a los lados del $\angle$ A

EJERCICIO 5: Como ΔQBC es rectángulo y QC se opone a un ángulo de 30° tenemos que:

$$QB = 2\,QC \ , \quad QB = 8 \text{ cm}$$

EJERCICIO 9: La vía más rápida para hacer la demostración es la de probar que el cuadrilátero APQD tiene tres ángulos rectos.

La propiedad que se aplica se demostró en el ejercicio 2.

Los alumnos pueden hacer el ejercicio por cualquier vía siempre que se fundamente adecuadamente; pero el profesor no debe dejar de señalar que la vía a que hicimos referencia es la más corta.

EJERCICIO 11: El perímetro es de 16 cm, o sea, el doble de la suma de las distancias del punto a los lados.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- Ejercicios donde se apliquen la clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades al cálculo de algunos de sus elementos y a la fundamentación de proposiciones.
- Ejercicios de construcción donde se apliquen los conceptos y las propiedades de los cuadriláteros estudiados.
- Ejercicios de demostración donde se apliquen los conceptos y las propiedades estudiadas.

3. CÍRCULO CIRCUNSCRITO

La presente unidad temática se ha dividido en los siguientes puntos esenciales:

- Mediatriz de un segmento.
- Círculo circunscrito a un triángulo

3.1 Mediatriz de un segmento

En este punto esencial se aplican los teoremas de congruencia de triángulos a la demostración de nuevas propiedades de las figuras geométricas. Para su desarrollo se sugieren 4 horas. Lo fundamental que se debe lograr es que los estudiantes puedan determinar la mediatriz de un segmento.

A continuación se demostrará en clase la propiedad de la mediatriz:

Si un punto C está en la mediatriz de un segmento AB, entonces los segmentos AC y BC son iguales

Para la demostración de esta propiedad proponemos dos vías:

Primera vía. Plantear a los alumnos el siguiente ejercicio:

a. Construya la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ de cualquier longitud.
b. Denote con la letra P un punto que pertenezca a la mediatriz de $\overline{AB}$
c. Trace los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ y mida sus longitudes
d. Compare las longitudes de $\overline{PB} \wedge \overline{PA}$
e. ¿Qué hipótesis se podría plantear dado el resultado de la medición anterior?.

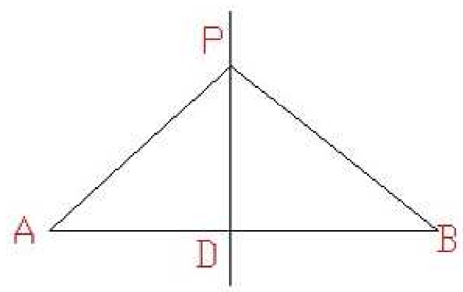
Como se aprecia, este ejercicio está dirigido a que los alumnos enuncien una hipótesis que es el teorema que después se va demostrar. Después de enunciado el teorema se deben precisar la premisa y la tesis.

La demostración de este teorema es sencilla; los alumnos ya han hecho demostraciones similares, por eso consideramos que es posible que la realicen en forma independiente:

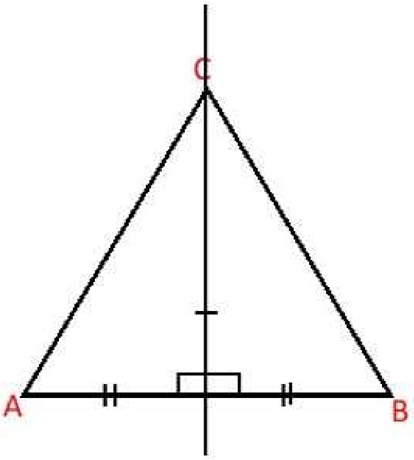
Si el profesor considera que sus alumnos no están preparados para esto, debe aplicar entonces el método de elaboración conjunta.

Segunda vía. Plantear a los alumnos el ejercicio siguiente:

En la figura siguiente "P" es un punto de la mediatriz de $\overline{AB}$ y D es el punto de intersección de la mediatriz con $\overline{AB}$. Demuestre que Δ APD = Δ BPD y que $\overline{AP} = \overline{PB}$.



Una vez resuelto el ejercicio debe hacerse el análisis retrospectivo para llegar a la conclusión de que lo que se cumple para el punto P se cumple también para cualquier punto de la mediatriz. Después de llegar a esa conclusión se puede enunciar y demostrar el teorema.



Demostración

Sea C un punto cualquiera de la mediatriz de $\overline{AB}$, de acuerdo a la figura anterior.

En ΔACP y ΔBCP

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AP}=\overline{PB}\\ \angle APC=\angle BPC=90°\end{array}\right\}\text{por ser } \overline{CP} \text{ mediatriz de } \overline{AB}$$

$$\overline{CP}=\overline{CP} \text{ lado común}$$

$$\text{Por tanto } \Delta ACP=\Delta BCP, \text{ por el teorema L.A.L y } \overline{AC}=\overline{BC} \text{ lados homólogos}$$

P

A continuación el profesor debe plantear que se cumple también la propiedad de que los puntos del plano que no están sobre la mediatriz de $\overline{AB}$, no equidistan de A y B. Esta propiedad no la vamos a demostrar.

Teniendo en cuenta las dos propiedades enunciadas se debe cumplir finalmente que:

La mediatriz de un segmento AB es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de A y B

A continuación se sugiere se realicen los siguientes ejercicios:

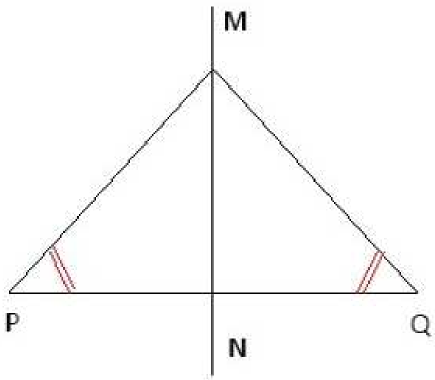
1 Enuncie el recíproco del teorema demostrado sobre la mediatriz de un segmento.

2 Construya la mediatriz de un segmento de 4 cm de longitud

3 Determine el punto medio del segmento $\overline{MN}$, de la siguiente figura

4 El punto O es la intersección de $\overline{PQ}$ con su mediatriz: $\overline{PQ}$=6 cm. ¿cuál es la longitud de $\overline{PO}$ y $\overline{OQ}$.

5 En la figura siguiente MN es la mediatriz de $\overline{PQ}$ Demuestre que $\angle$MPN = $\angle$MQN



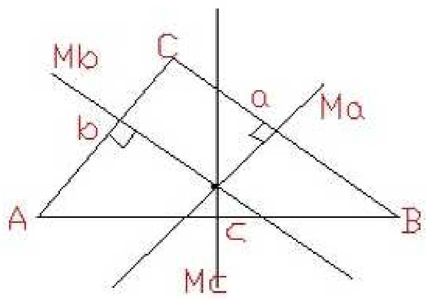
6 Sean S el punto medio de $\overline{PR}$ y $\overline{PQ} = \overline{RQ}$. Diga si es posible asegurar que QS es la mediatriz de $\overline{PR}$

3.2 Círculo circunscrito a un triángulo

Para el tratamiento de esta unidad temática se cuenta con 3 horas de clase. Debido a que el estudiante ya trató en años anteriores lo relacionado con la circunferencia, se ha determinado que en este punto lo esencial será que recuerde las propiedades de las mediatrices de un triángulo para la construcción del círculo circunscrito.

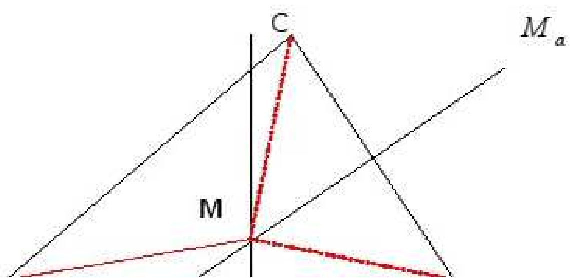
Primero se va a recordar que:

Se llaman mediatrices de un triángulo ABC a las mediatrices M_a, M_b, M_c de los lados de dicho triángulo.



Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, y éste se conoce como CIRCUNCENTRO. Es el centro del círculo circunscrito al triángulo.

Demostración



De acuerdo a la figura anterior sea M el punto de intersección de las mediatrices

M_a y M_c entonces:

$\overline{MC} = \overline{MB}$ $por\ ser\ punto\ de\ M_a$

$\overline{MA} = \overline{MB}$ $por\ ser\ punto\ de\ M_c$

$\overline{MC} = \overline{MA}$ $por\ transitividad$

Por tanto, M es un punto de M_b ya que equidista de los extremos de $\overline{AC}$. O sea que las tres mediatrices se cortan en el punto M

Se debe hacer notar a los estudiantes que será suficiente para encontrar el circuncentro, trazar las mediatrices de dos lados.

Se recomienda hacer los siguientes ejercicios

1. Dibujar un triángulo isósceles y construir la mediatriz (relativa al lado base).

2. En los triángulos acutángulos (rectángulos, obtusángulos) construya las mediatrices. Construir el círculo circunscrito.

A continuación se verá el caso particular del círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Para ello se debe recordar el concepto de mediana.

Se llama medianas de un triángulo ABC, a los segmentos m_a, m_b, m_c determinados por los vértices del triángulo y el punto medio de los lados opuestos.

Es conveniente en este momento introducir el siguiente teorema y a partir de él solicitar a los estudiantes que determinen la hipótesis y la tesis.

1. En un triángulo rectángulo, el punto medio d la hipotenusa es el centro del círculo circunscrito al triángulo.
2. En un triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa es equidistante de los tres vértices del triángulo.

A continuación se presentará el teorema recíproco, se procederá de la misma forma que antes, solicitando que los estudiantes determinen la hipótesis y la tesis, y pedirles que den una idea de la demostración.

1. Si un triángulo es inscrito en un círculo de diámetro a un lado del triángulo, entonces ese triángulo es rectángulo.
2. En un triángulo, si el punto medio de un lado es equidistante de los tres vértices, entonces ese triángulo es rectángulo.

A continuación se sugiere que se hagan los ejercicios del libro de trabajo.

4. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugieren 2 horas. Es importante que el estudiante reconozca la importancia que tiene el triángulo rectángulo, el mismo que será tratado de nuevo en el siguiente año.

El alumno conoce cuando un triángulo es rectángulo, entonces se puede introducir el teorema de Pitágoras de la siguiente manera.

Teorema de Pitágoras

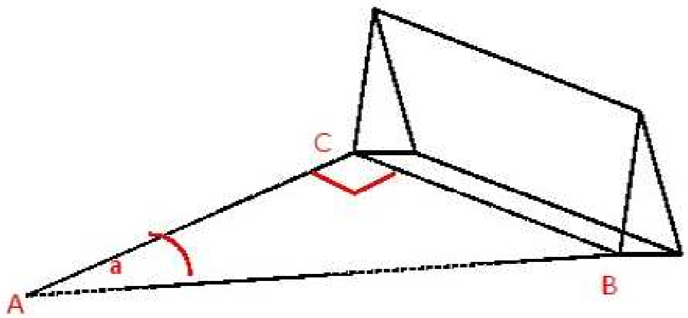
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Recíproco del Teorema de Pitágoras.

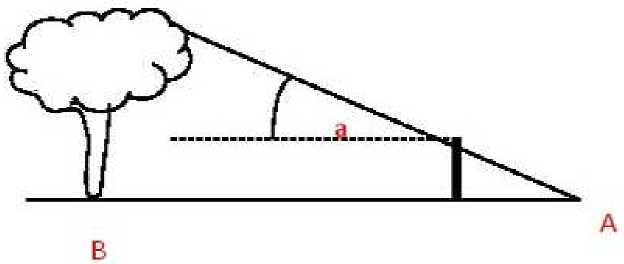
Si para los lados a, b, c, de un triángulo se cumple que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces el triángulo es rectángulo

Tanto la demostración del teorema de Pitágoras como su recíproco se encuentra en el cuaderno de trabajo, por lo que se sugiere al profesor que dirija a los estudiantes de la forma que allí se orienta. Así mismo se recomienda la ejercitación que se recomienda.

1. Una pelota de balompié se encuentra en un punto A del campo (fig. siguiente) a una distancia de 23 y 24 m respectivamente de los extremos C y B de la portería. ¿Qué valores puede tener el ángulo de tiro a para que la pelota entre en la portería?



2. Para medir la altura de un árbol se utiliza un instrumento con el cual se determina la amplitud del ángulo agudo a que se forma con la dirección horizontal (fig. siguiente). Calcula la altura del árbol si AB = 12m y a=40°.



3. En una pirámide de base cuadrada el ángulo que forman las alturas de dos caras consecutivas tienen una amplitud de 50° y los lados de la base miden 4.0 cm. Calcula la altura de la pirámide.

5. PROPORCIONALIDAD

Para el desarrollo de este unidad temática se cuenta con 2 horas, y se la ha dividido en los siguientes puntos esenciales:

- Repaso de razones y proporciones.
- Razón entre segmentos. Segmentos proporcionales.

5.1 Repaso sobre razones y proporciones.

Lo fundamental en este punto es activar los conocimientos y habilidades desarrolladas por los alumnos durante el estudio de las razones y proporcines, por lo que se debe construir un repaso mediante el trabajo directo en la solución de los ejercicios y problemas. Para el tratamiento de este punto esencial se cuenta con 2 horas de clase.

La primera clase puede dedicarse a hacer un repaso sobre la teoría: conceptos "razones entre los números ", "proporciones" y el teorema fundamental de las proporciones. El repaso se puede apoyar en el análisis de ejemplos similares a los ejemplos siguientes.

EJEMPLO

Hallar la razón entre los números siguientes:

a. 7 y 10
b. 20 y 30
c. 12 y 3
d. 3 y 12

<u>Resolución</u>

a. 7 y 10

La razón es el cociente entre 7 y 10, o sea, la fracción que tiene como numerador el primer número, que es 7, y como denominador el número 10.

Respuesta: La razón entre 7 y 10 es $\frac{7}{10}$

b. 20 y 30

Se plantea el cociente entre 20 y 30; $\frac{20}{30}$ ahora bien, esta fracción se puede simplificar y así obtenemos una fracción equivalente a ella: $\frac{20}{30}$.

Respuesta: La razón entre 20 y 30 es $\frac{2}{3}$.

c. 12 y 3

Se plantea el cociente $\left(\frac{12}{3} = 4\right)$ en este caso la razón es un número entero

Respuesta: La razón entre 12 y 3 es cuatro.

d. 3 y 12

Escribimos la fracción $\frac{3}{12}$ y la simplificamos.

Respuesta: La razón entre 3 y 12 es $\frac{1}{4}$.

Para hallar la razón entre dos números se plantea el cociente entre ellos y se lo simplifica tanto como sea posible.

EJEMPLO

Buscar tres pares de números que estén en la razón.

a. $\frac{3}{5}$

b. 8:2

<u>Resolución:</u>

a. Hay que hallar pares de números cuyo cociente sea $\frac{3}{5}$; para ello se buscan fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$, ampliando esta fracción.

$\frac{3}{5} \equiv \frac{6}{10} \equiv \frac{15}{25} \equiv \frac{30}{50}$.

Respuesta: Los pares de números 6 y 10; 15 y 25; 30 y 50 están en la razón $\frac{3}{5}$.

b. Hallamos fracciones equivalentes a $\frac{8}{2}$. Lo hacemos ampliando o simplificando esta fracción.

$$\frac{4}{1} \equiv \frac{8}{2} \equiv \frac{16}{4} \equiv \frac{8}{20}.$$

Respuesta: Los pares de números 4 y1; 16 y 4; 80 y 20 están en la razón 8: 2.

La igualdad entre dos razones es una proporción

Por ejemplo, la igualdad $\frac{3}{4}$ igual $\frac{6}{8}$ es una proporción, que también puede escribirse así: 3:4=6:8. En ambos casos se lee 3 es a 4 como 6 es a 8.

Los números que figuran en una proporción son sus términos y se les denomina de la forma siguiente:

Extremo medio medios

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \qquad\qquad 3 : 4 = 6 : 8$$

medio extremo extremos

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios

Por ejemplo, en la proporción anterior el producto de los extremos 3×8 es igual al producto de los medios 4×6.
$3 \times 8 = 4 \times 6 = 24$.

Esta propiedad nos posibilita calcular un término de una proporción si conocemos los tres restantes

EJEMPLO

Hallar el valor de x en las proporciones siguientes:

a. $\frac{x}{6} = \frac{12}{18}$

b. $\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$

Resolución

a. $\frac{x}{6} = \frac{12}{18}$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones obtenemos la ecuación
$18x = 72$ y resolviéndola obtenemos el valor de x; en este caso $x = 4$.

Comprobación:

Sustituimos el valor de x para verificar si es la solución de la ecuación original, o sea, si es el término de la proporción que queríamos hallar.

$\frac{4}{6}=\frac{12}{18}$ $4\times18=6\times12=72$

b. $\frac{2}{x}\equiv\frac{x}{32}$

$x^2=64$ $2\times32=8\times8=64$

$x=\underline{+}8$ $2\times32=-8\times(-8)=64$

En este caso hay dos soluciones: x = 8 y x = –8.
A partir de una proporción se pueden obtener otras tres proporciones si:
a) Intercambiamos sus medios,
b) Intercambiamos sus extremos
c) Invertimos las razones.

Por ejemplo, si tenemos la proporción $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$, podemos a partir de ella obtener tres proporciones aplicando las transformaciones dadas en a), b) y c).

a) $\frac{3}{15}=\frac{4}{20}$ b) $\frac{20}{4}=\frac{15}{3}$ c) $\frac{4}{3}=\frac{20}{15}$

Como tarea se debe añadir a los alumnos el estudio del contenido teórico y continuar la resolución de ejercicios similares a los anteriores u otros elaborados por el profesor.

La segunda clase debe estar dirigida a concluir la ejercitación para lo cual sugerimos los siguientes ejercicios.

1. La razón entre 15 y 20 es igual a la de 80 y un número x. Halla el valor de x.
2. Dos automóviles deben viajar 60 y 80 km. respectivamente. El primer automóvil ya ha avanzado 12 km. ¿Cuántos kilómetros ha avanzado el segundo automóvil si ambos han hecho la misma parte de su recorrido?.
3. Dos pedazos de madera se han dividido en el mismo número de partes iguales. De ellos se obtienen pedazos de 7,0 cm y 10 de longitud respectivamente. ¿Cuál es la longitud del segundo pedazo si la longitud del primero es 70 cm?

Los ejercicios 2 y 3, no son ejercicios formales sino problemas en los que los alumnos deben encontrar la vía para resolverlos. Lo esencial es que ellos reconozcan la posibilidad de plantear una proporción estableciendo la igualdad entre dos razones; en el problema 1 la igualdad es entre las partes del recorrido hecho por cada uno de los móviles; en el problema 2 es entre el número de pedazos.

Es preciso al terminar la segunda clase, que los alumnos obtengan nuevas proporciones a partir de las propiedades de las proporciones El ejercicio siguiente nos sirve para dar cumplimiento a este objetivo.

Los números 4 y 8 están en la misma razón que los números 15 y 30. Formar cuatro proporciones diferentes con estos números.

Como tarea correspondiente a la segunda clase, los profesores pueden plantear otros ejercicios y problemas similares a los tratados anteriormente.

5.2 Razón entre segmentos. Segmentos proporcionales.

Para el desarrollo de este punto esencial proponemos que se utilicen 2 horas. Lo fundamental que se debe lograr es que los estudiantes puedan identificar y construir segmentos proporcionales.

Sugerimos para la primera clase la estructura siguiente:

1. Introducir la definición del concepto "razón entre segmentos" y ejemplificar su cálculo.
2. Introducir la definición de segmentos proporcionales a través de un ejemplo.

Se llamará razón entre dos segmentos a la razón entre los números que expresan sus medidas en la misma unidad de longitud.

La razón entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ la denotamos así: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

EJEMPLO

Si $\overline{AB} = 2{,}0$ cm y $\overline{CD} = 5{,}0$ cm, tenemos que la razón entre ellos es $\frac{2}{5}$.

$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{5}\right)$

A continuación se puede presentar la siguiente definición

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{A_1B_1}$ ***y*** $\overline{C_1D_1}$ ***si*** $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{C_1D_1}}$

EJEMPLO

Compruebe en cada caso si los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

a. $\overline{RS}$ = 20 cm y $\overline{PQ}$ = 40 cm
   $\overline{AB}$ = 3,0 cm y $\overline{CD}$ = 6,0 cm
b. $\overline{RS}$ = 3,0 mm y $\overline{PQ}$ = 5,0 mm
   $\overline{AB}$ = 9,0 m y $\overline{CD}$ 15 m
c. $\overline{RS}$ = 1,0 m y $\overline{PQ}$ = 5,0 dm
   $\overline{AB}$ = 9,0 cm y $\overline{CD}$ = 3,0 cm

Resolución

Los segmentos son proporcionales si son iguales las razones entre los pares de segmentos dados, o sea : $\frac{\overline{RS}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

a) $\frac{20}{40} = \frac{3}{6}$ Comprobación: $20 \times 6 = 40 \times 3 = 120$

Respuesta: Son proporcionales.

b) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ Comprobación: $3 \times 15 = 9 \times 5 = 45$

Respuesta: Son proporcionales.

c) Expresamos primero las medidas de $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ en la misma unidad de longitud.
   $\overline{RS}$ = 1,0 m = 10 dm $\overline{PQ}$ = 5,0 dm
   $\frac{10}{5} = \frac{9}{3}$ Comprobación: $10 \times 3 \neq 5 \times 9$ $(30 \neq 45)$. Respuesta: No son proporcionales

Iniciar la ejercitación correspondiente a este punto esencial con ejercicios como los siguientes.

1. Hallar la razón entre los segmentos AB y CD si se conoce que:
   a. $\overline{AB}$ =36 cm y $\overline{CD}$ = 12 cm
   b. $\overline{AB}$ =0,25 cm y $\overline{CD}$ = 50 cm
   c. $\overline{AB}$ =75 cm y $\overline{CD}$ = 30 cm
   d. $\overline{AB}$ =1,4 cm y $\overline{CD}$ = 77 cm

2. Diga si la razón entre los segmentos del ejercicio cambia si sus longitudes se expresan en metros (decímetros).
3. Calcular las cantidades o números que correspondan a los espacios en blanco la tabla siguiente:

	Longitud m	Longitud n	$\frac{m}{n}$	$\frac{n}{m}$
a)	6,0 cm	18 cm		
b)	8,0 dm		0,5	
c)		20 m		$\frac{3}{5}$
d)	2,0 m	20 dm		

4. El punto P pertenece a $\overline{AB}$ y $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$
   a. Hallar las razones $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$

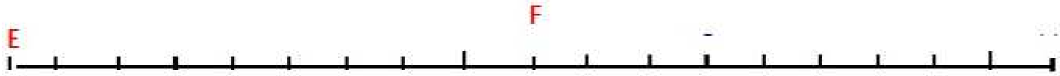
   b. Calcular $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ si $\overline{AB}$ = 15 cm.

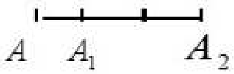
5. Calcular, basándose en los datos de la figura las razones siguientes

$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}, \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}, \frac{\overline{QP}}{\overline{MN}}, \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$

6. Calcular la razón entre segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ (en la siguiente figura) si como unidad de medida se toma
   a. $\overline{AA_1}$,

   b. $\overline{AA_2}$





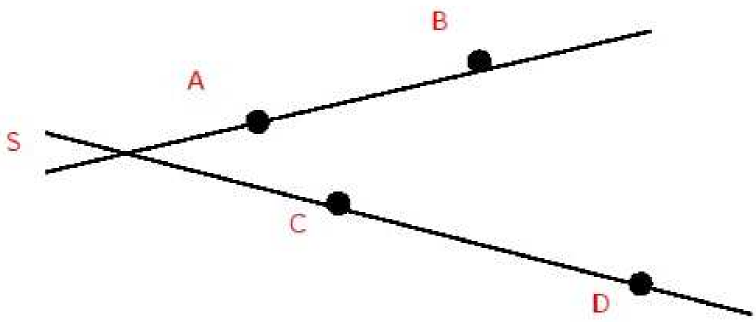
7. Trazar dos segmentos que estén en la razón:
   a. $\frac{3}{5}$
   b. 0,4
   c. 3,5

8. Un punto interior de un segmento $\overline{AB}$ lo divide en dos segmentos que están en la razón $\frac{3}{8}$; si uno de ellos es 2.5 cm mayor que el otro, ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$.

9. Diga si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ de acuerdo con la tabla siguiente:

	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{A'B'}$	$\overline{C'D'}$
a)	5,0 dm	15 dm	10m	30 m
b)	24 cm	7,2 dm	7,0 mm	21 mm
c)	8,0 dm	2,0 dm	4,0 dm	12 dm
d)	2,0 m	30 dm	6,0 mm	9,0 mm

10. En la siguiente figura $\overline{SA} = 5{,}0$ mm ; $\overline{AB} = 15$ mm y $\overline{SC} = 7{,}0$ mm. ¿Qué longitud debe tener $\overline{SD}$ para que $\overline{SA}$ y $\overline{AB}$ sean proporcionales a $\overline{SC}$ y $\overline{CD}$?

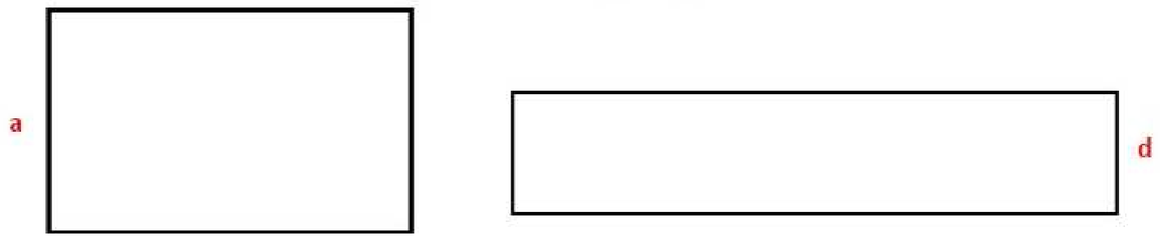


11. En la tabla siguiente determina el valor de x para que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean proporcionales a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$

	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$	$\overline{PQ}$
a)	12 cm	9,0 cm	x	2,7 dm
b)	0,6 m	3,0 m	5,0 m	X
c)	16 dm	x	x	9,0 dm
d)	x	2,5 dm	35 dm	20 dm

12. Los rectángulos de la figura siguiente tienen la misma área; a y b son las longitudes de los lados de uno de ellos, c y d son las longitudes del otro. Pruebe que.

$$\frac{a}{c} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$$



6. SISTEMATIZACIÓN DE RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO.

Esta unidad temática ha sido concebida para sistematizar todas aquellas definiciones que el estudiante ha visto desde años anteriores y las que se han presentado en esta unidad. Se ha considerado que se la puede desarrollar en 4 horas.

El tratamiento debe hacérselo a través de volver a definir algunos conceptos y de presentarlos en forma conjunta con los teoremas correspondientes.

Se llaman mediatrices de un triángulo ABC, a las mediatrices M_a, M_b, M_c de los lados a, b, c, de dicho triángulo.

Se llaman altura de un triángulo ABC, a los segmentos h_a, h_b, h_c de las perpendiculares trazadas desde los vértices del triángulo a las rectas que contienen a los lados opuestos; los pies de dichas perpendiculares se llaman pie de las alturas. A la distancia del vértice al lado opuesto se le llama longitud de la altura.

Se llaman medianas de un triángulo ABC a los segmentos m_a, m_b, m_c determinados por los vértices del triángulo y el punto medio de los lados opuestos.

Se llaman bisectrices de un triángulo ABC, a los segmentos de las bisectrices b_A, b_B, b_C de los ángulos interiores A, B, y C del triángulo, determinados por los vértices y el lado opuesto a cada uno de ellos.

En todo triángulo las mediatrices se cortan en un punto y esta misma propiedad se cumple para las alturas, las medianas y las bisectrices.

Al punto de intersección de las mediatrices se le llama CIRCUNCENTRO, al de las alturas ORTOCENTRO, al de las medianas BARICENTRO y al de las bisectrices INCENTRO.

A continuación se sugiere la siguiente ejercitación.

1. En los triángulos acutángulos (rectángulos, obtusángulos) construya:
   a. Las alturas
   b. Las medianas
   c. Las bisectrices
   d. Las mediatrices.

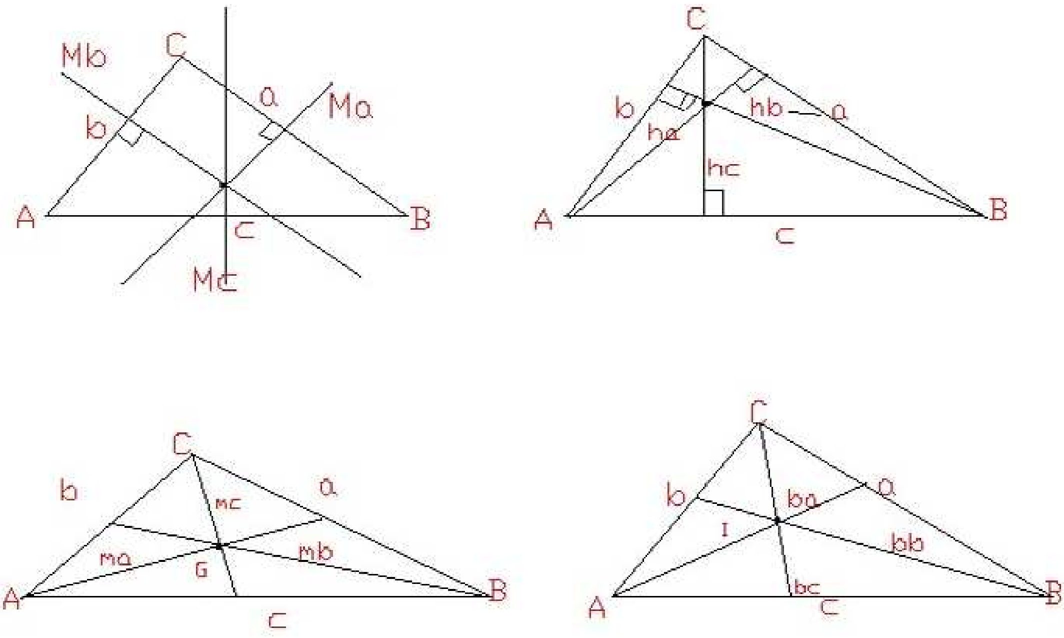
2. Dibujar un cuadrilátero ABCD y determinar un punto de BC, CD y AD.

3. Dibuja un triángulo isósceles RQS de base $\overline{QS}$ y determina un punto que cumpla las condiciones a) y b):

a. Equidista de los puntos Q y S

b. Equidista de $\overline{QR}$ y $\overline{QS}$

El tratamiento de los conceptos sugerimos que se haga de la forma siguiente:



1. Presentar una lámina similar a la anterior, o dibujarla en la pizarra (antes de iniciar la clase), utilizando tizas de colores de manera que se destaque lo que se considera esencial.

2. Apoyándose en la figura enunciar los nuevos conceptos y destacar la propiedad que se cumple en cada caso. Las definiciones y el enunciado de las propiedades deben los alumnos copiarlos en sus cuadernos.

Sugerimos que el primer ejercicio que se plantee a los alumnos sea el ejercicio número 1 anterior.

En este ejercicio se presentan distintos tipos de triángulos de manera que se puedan tratar las diferentes dificultades que se presentan en la construcción de las alturas. La parte del ejercicio que no se pueda realizar en la primera clase recomendamos que se plantee como tarea o en las clases restantes dedicadas a la ejercitación.

La segunda clase puede iniciarse con la demostración de la propiedad de las mediatrices del triángulo y todo el tiempo restante del asignado a este punto esencial dedicarlo a la ejercitación sistematizadora. La propiedad a demostrarse es la siguiente:

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.

El método que debería usarse es el de elaboración conjunta. Sugerimos que se envíe como tarea el estudio de la demostración y debe ser controlado en la clase siguiente.

Es el momento de presentar sin demostración el siguiente teorema:

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.

A pesar de que no se realizará la demostración se sugiere orientarla como tarea.

A continuación sugerimos realizar el sistema de ejercicios siguiente.

EJERCICIOS

1 En los triángulos acutángulos (rectángulos, obtusángulos) construya:
   a. Las alturas
   b. Las medianas
   c. Las bisectrices
   d. Las mediatrices.

2 Dibujar un cuadrilátero $ABCD$ y determinar un punto de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.

3 Dibujar un triángulo isósceles RQS de base $\overline{QS}$ y determinar un punto que cumpla las condiciones a) y b):
   a. Equidista de los puntos Q y S
   b. Equidista de $\overline{QR}$ y $\overline{QS}$

4 Dibujar un triángulo ABC y determinar un punto de la altura al lado $\overline{AC}$ que equidiste de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

5 Dibujar un triángulo isósceles y construir la altura, la mediana, la mediatriz (relativa al lado base) y la bisectriz del ángulo opuesto a este lado.

6 Dibujar un triángulo acutángulo TRS, construir la altura al lado TS, la mediana al lado RS y mida la amplitud de los ángulos que ellos forman al intersecarse.

7 Determinar la posción de un punto que equidista de tres puntos no alineados. ¿Cuántos puntos existen que cumplan esta condición?

8 Diga si son verdaderas o no las proposiciones siguientes y en caso negativo muestre un contraejemplo. En un triángulo cualquiera se cortan en un punto interior a él:

a. Las bisectrices
b. Las alturas.
c. Las medianas.
d. Las mediatrices.

9 ¿Cuál es el punto donde se intersecan las alturas de un triángulo rectángulo?

10 Demuestre que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles coincide con la mediana a este lado y con la bisectriz del ángulo opuesto a él.

11 Analice si en un triángulo equilátero se cumple también la propiedad demostrada en el ejercicio10, con respecto a sus tres lados y sus tres ángulos.

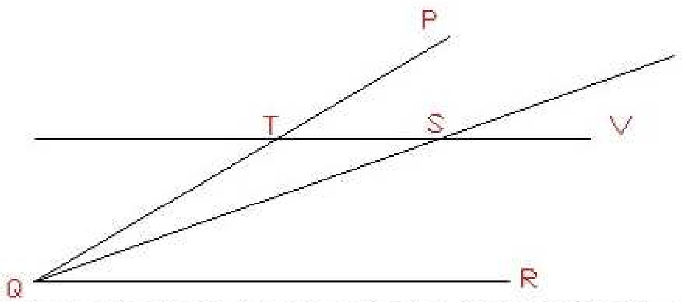
12 Demuestre que la mediana correspondiente a un cateto de un triángulo rectángulo es menor que la hipotenusa.

13 La base de un triángulo isósceles tiene el doble de la longitud de la altura relativa a ella. Hallar la amplitud de los ángulos de ese triángulo.

14 Hallar la amplitud de los ángulos de un triángulo rectángulo si el ángulo formado por la bisectriz y la altura trazadas desde el vértice del ángulo recto es 15°.

15 Demuestre que en todo triángulo dos vertices cualesquiera equidistan de la recta que contiene a la mediana del lado determinado por estos vértices.

16 Si en la siguiente figura, QS es la bisectriz del $\angle$PQR y TV || QR, pruebe que: TQ=TS.



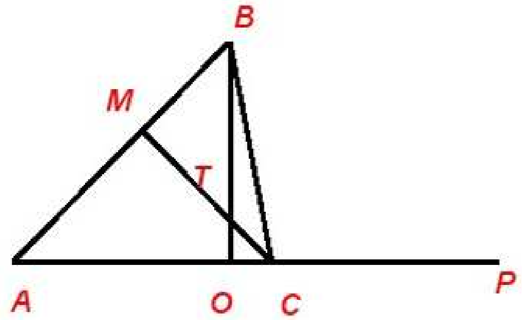
17 Demuestre que si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es paralela a uno de los lados, entonces dicho triángulo es isósceles.

18 Demuestre que la suma de las longitudes de las alturas de un triángulo es menor que la suma de sus tres lados.

19 En un triángulo isósceles demuestre que:

a. Las alturas correspondientes a los lados iguales son iguales.
b. Las medianas correspondientes a los lados iguales son iguales.
c. Las bisectrices de los ángulos iguales son iguales.

20 En la siguiente figura, $\overline{CM}$ es bisectriz del $\angle ACB$, $\overline{BO}$ es altura del lado $\overline{AC}$ y $\angle BCP$ = 100°. Hallar $\angle BTC$.



20 Demuestre que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el doble de la mediana correspondiente al tercer lado.

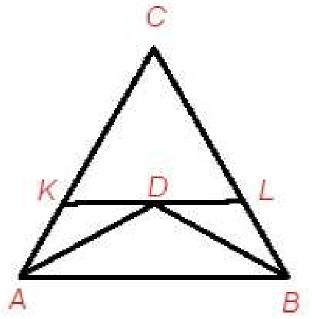
21 Demuestre que $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A_1B_1C_1$ si $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ $\angle A = \angle A_1$, y $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$ ($\overline{AD}$ y $\overline{A_1D_1}$ son bisectrices de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$).

22 Demostrar que el $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ si $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ y $\overline{AM} = \overline{A_1M_1}$, donde $\overline{AM}$ y $\overline{A_1M}_1$ son medianas de los triángulos.

23 La mediana $\overline{AD}$ de un triángulo ABC se prolonga hasta un punto E de forma tal que $\overline{AD}$ = $\overline{DE}$, $\angle ACD = 56°$ y $\angle ABD = 40°$. Calcular $\angle ACE$.

24 Demostrar que en todo triángulo rectángulo isósceles el ángulo vertical es el doble del ángulo formado por el lado base y la altura correspondiente a uno de los lados iguales.

25 En el $\Delta\ ABC$, $\angle A = 80°$, $\angle ABD = 40°$ y $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle A$. Demostrar que $\overline{BD}$= $\overline{AD}$. (figura siguiente).



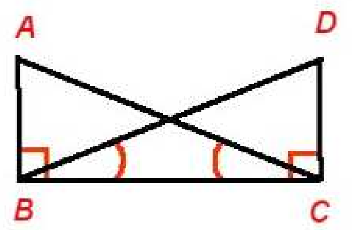
26 En la figura anterior

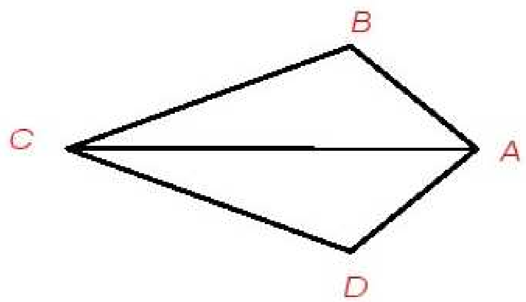
$\overline{AD}$ bisectriz del $\angle$ *KAB*

$\overline{BD}$ bisectriz del $\angle$*LBA*

$\overline{KL} \parallel \overline{AB}$. Probar que: $\overline{AK} + \overline{BL} = \overline{KL}$.

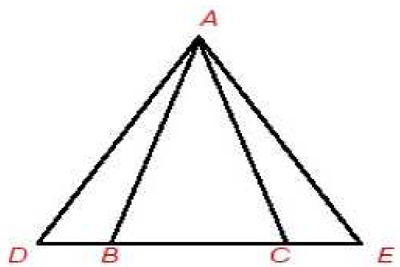
27 En la figura siguiente (izquierda), $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\angle$*DBC* = $\angle$ *ACB.* Demostrar que : $\overline{AB} = \overline{DC}$.

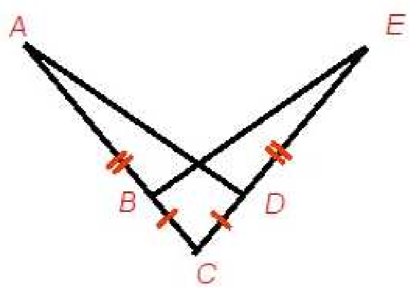




2ξ *BC* = $\angle$ ior, derecha). Demostrar que $\overline{BC} = \overline{CD}$.

29 En el Δ *ABC,* $\angle$ *ABC* = $\angle$ *ACD* y $\overline{DB} = \overline{EC}$. Demostrar que $\overline{AD} = \overline{AE}$ (fig. siguiente, izquierda).



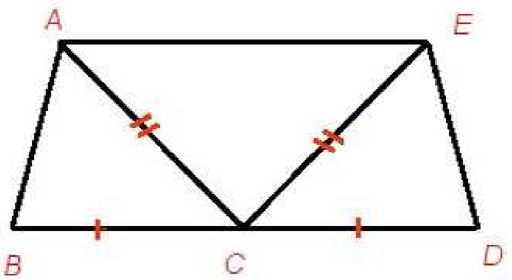


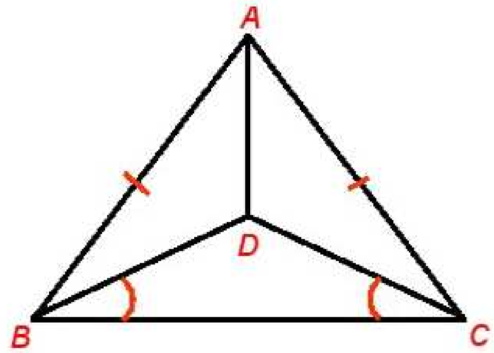
30 En la figura anterior (derecha), $\overline{AB} = \overline{ED}$, $\overline{BC} = \overline{DC}$. Demostrar que:

a. $\overline{AD} = \overline{EB}$.

b. $\angle CAD$ = $\angle CEB$

31 En la figura siguiente, (izquierda) $\overline{BC} = \overline{CD}, \overline{AC} = \overline{EC}$ y $\angle ACD$ = $\angle ECB$.
Demostrar que $\Delta\, ABC \;\equiv\; \Delta EDC$



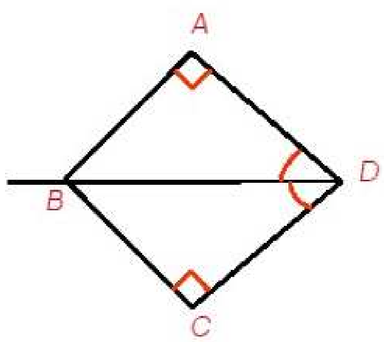


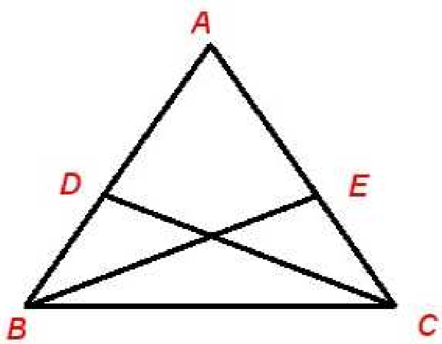
32 En el $\Delta\, ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ y $\angle\, DBC$ = $\angle\, DCB$. Probar que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle BAC$ (figura anterior derecha).

33 En la figura siguiente, izquierda, $\angle\, ADB$ = $\angle BDC$, $\overline{DA} \perp \overline{BA}$ y $\overline{DC} \perp \overline{BC}$.
Probar que:

a. $\Delta\, ABD \equiv \Delta\, CBD$

b. **$\overline{BD}$ bisectriz del $\angle$ ABC**





ISBN: 978-9942-20-876-7

9 789942 208767