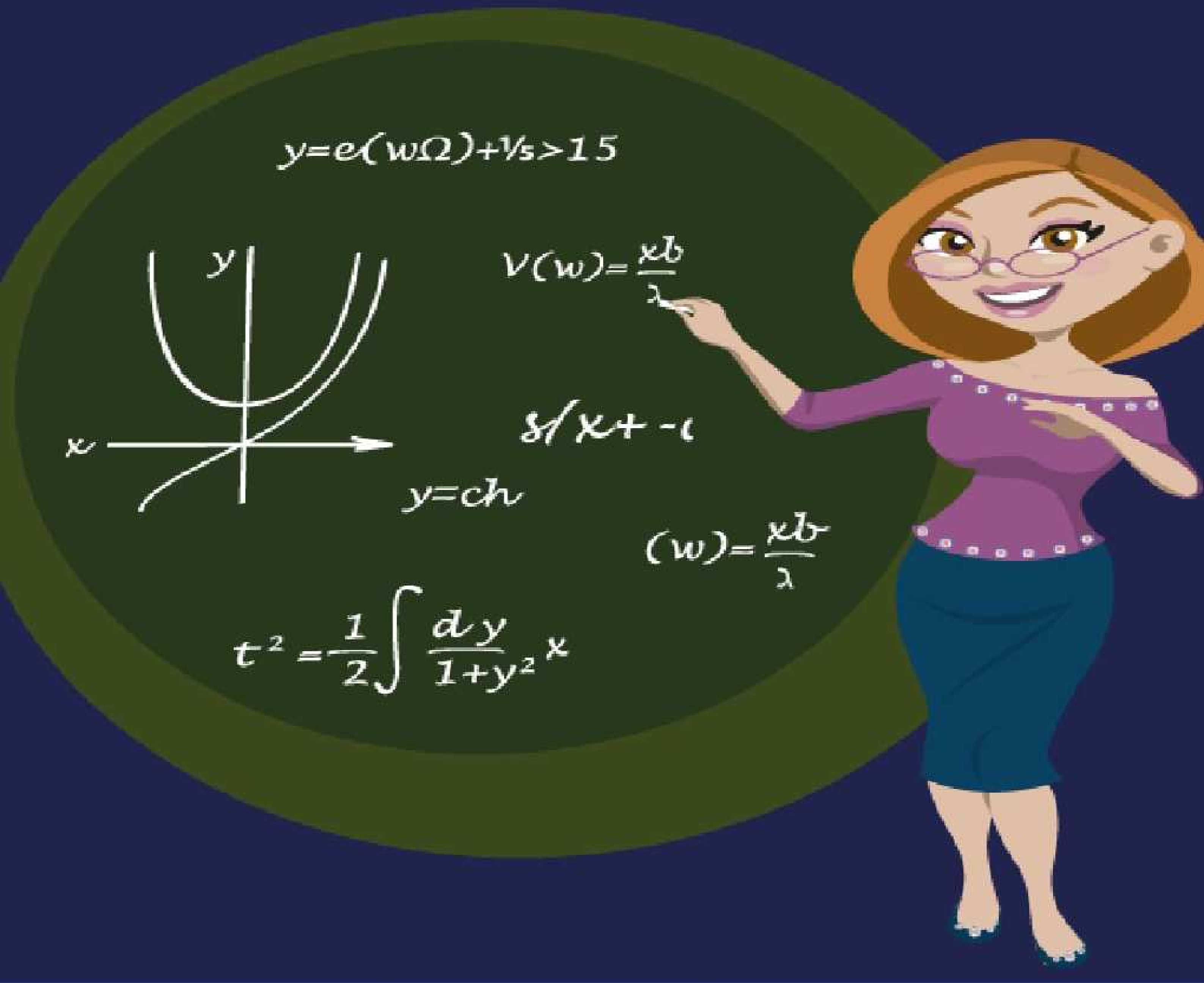
UN PROCESO EFECTIVO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA

OCTAVO AÑO



RUTH CUEVA RODRÍGUEZ
PROFESORA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ISBN: 978-9942-20-874-3
9 789942 208743

1. Tabla de contenido

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo actual y perspectivo de la sociedad así como el nivel alcanzado por la Ciencia y la Tecnología exigen una formación profesional integral, que se manifiesten en nuevas formas de actuación del hombre y que éste sea capaz de plantear y resolver problemas con un alto criterio de responsabilidad moral. Los últimos foros internacionales, sobre problemas tanto sociales como educativos, han evidenciado la necesidad de impulsar estrategias de desarrollo acordes a la realidad actual, y es así como surgen propuestas educativas, que se espera favorezcan las transformaciones que demanda la sociedad moderna.

Dentro de este contexto, el Gobierno Ecuatoriano inicia en 1992 el diseño de la Reforma Curricular para la educación básica, debido a que considera que: "La inversión prioritaria en capital humano constituye en la actualidad, un prerrequisito indispensable para el crecimiento económico de un país. El capital humano es el recurso más precioso, tesoro invalorable, y garantía de futuro para la sociedad. De los recursos humanos depende el avance y uso apropiado de la tecnología, la conservación de la naturaleza. De las personas dependen: la paz, la democracia, la producción, la seguridad, la responsabilidad del planeta...."

La Reforma Curricular Ecuatoriana contiene: "Un nuevo pensum de la educación básica ecuatoriana, los lineamientos curriculares referidos al tratamiento de las prioridades transversales del currículo, las destrezas fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios para cada año y las recomendaciones metodológicas generales para cada área de estudio"

Tanto la acción de este proyecto educativo, como la formación de los hombres que requieren los nuevos tiempos, deben centrar su atención en privilegiar su capacidad de incorporarlos a la sociedad con el mayor desarrollo posible de sus potencialidades. Lo que se puede lograr siempre y cuando se conciba a la educación como un proceso que debe ser dirigido científicamente, considerando su carácter sistémico, dando prioridad al tratamiento metodológico, en el que no atienda solamente los resultados del proceso pedagógico sino que privilegie el estudio de los estadios intermedios en función del desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

Los procesos curriculares, desde el diseño hasta la evaluación de su efectividad, requieren de sólidas bases científico-pedagógicas, es por ello que en la Reforma Curricular para la educación básica se han determinado las áreas fundamentales, considerando a la Matemática una de ellas. Debido a que en su desarrollo histórico, la matemática nos muestra que sus conocimientos, surgidos de las necesidades prácticas del hombre mediante un largo proceso de abstracción, tienen un gran valor para la vida. La matemática es aplicada, entre otras áreas, en la planificación económica, en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, en la dirección de la producción, en la estrategia militar, en el estudio del rendimiento de los atletas, con lo que se evidencia que la matemática está presente en todos los campos del saber humano.

Debido a que durante el estudio de la matemática se presentan: necesidad de deducciones, representación mental de relaciones reales, entes abstractos como objetos de estudio, lógica de estructura y rigurosidad de lenguaje, desarrollo de generalizaciones relativamente rápidas, mediante reconocimiento de analogías y diferencias, evidenciamos que se observan exigencias para el uso y desarrollo del intelecto, así como una convicción de la complejidad de sus formas. Por esto su estudio exige hábitos de disciplina, de persistencia y de trabajo ordenado, que contribuye de manera decisiva en el desarrollo multilateral de la personalidad.

El presente trabajo pretende ser un aporte para mejorar el nivel de la Educación en el país, así como tratar sobre la base de la Reforma Curricular, de completar un trabajo en el cual el país ha invertido ingentes recursos.

Dentro de la Reforma Curricular, en lo que tiene que ver con el Área de Matemática, "se privilegian el valor y los métodos de la Matemática, a base de los conocimientos necesarios para el desarrollo personal y la comprensión de las posibilidades que brinda la tecnología moderna"

En la Reforma Curricular los conocimientos se estructuran de una forma "sistémica", lo que, a criterio de los autores permite unificar todas las ramas de la ciencia, garantizando su estudio y facilitando su articulación con las otras áreas. Se han seleccionado los contenidos de modo que puedan "ser tratados según sus características y formas propias de aprender del estudiante en cada uno de sus períodos de desarrollo, con carácter de continuidad dentro de la educación básica, en el contexto de la realidad nacional".

Los sistemas que han sido propuestos son:

- Numérico.
- De funciones.
- Geométrico y de medida.
- De estadística y probabilidad.

1.1 FUNDAMENTOS DE LA IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- El reconocido valor de los conocimientos matemáticos en la solución de los problemas de nuestra sociedad.
- El desarrollo del pensamiento se realiza a través de la contribución de las potencialidades que radican en el aprendizaje de las matemáticas.
- La enseñanza de la matemática contribuye al desarrollo de la conciencia y a la educación de nuevas generaciones.

1.2 BASES PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Leyes generales de la pedagogía
- Teorías psicológicas del aprendizaje.
- Higiene escolar (cuidado de la higiene mental).

1.3 TAREAS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- A partir de las bases determinadas por la sociedad se debe orientar la enseñanza de la matemática, determinando y derivando los objetivos, y seleccionando adecuadamente los contenidos.
- Determinar y desarrollar métodos que dirijan adecuadamente el proceso, precisando secuencia, enfoque y estructuración del contenido.
- Investigar y precisar las regularidades del proceso pedagógico en la enseñanza de la matemática.

1.4 FUNCIONES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Proveer a los alumnos de sólidos conocimientos matemáticos (conceptos, teoremas, reglas, relaciones, relaciones y procedimientos) de importancia general y que han sido estables históricamente.
- Desarrollar habilidades en el trabajo con algoritmos y cálculos elementales, así como con métodos y procedimientos indispensables para llevar a la práctica los conocimientos antes referidos.
- Familiarizar al alumno con las siguientes características de la ciencia matemática:

    1. El carácter abstracto.
    2. Formas fundamentales del pensamiento matemático.
    3. El carácter lógico deductivo.
    4. La estructura.

- Formar en los estudiantes la convicción de que una buena educación matemática es parte integrante de una personalidad al servicio de la sociedad.
- Que los alumnos evidencien la importancia creciente de la Matemática en la vida social.
- Contribuir a la formación mediante el desarrollo de las capacidades intelectuales, formas de trabajo y razonamiento, así como los hábitos de trabajo que siendo esenciales para la actividad matemática pueden desarrollarse a través del trabajo con los conceptos y procedimientos propios de la Matemática.
- El desarrollar en forma sistemática el poder, sobre todo en lo que se refiere a la aplicación independiente de los conocimientos, hábitos y habilidades en la solución de problemas intra y extramatemáticos y en la posterior adquisición de conocimientos.

1.5. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

1.5.1 Objetivos en el campo del saber y el poder.

SABER. Se entenderá por saber los conocimientos matemáticos que pueden ser adquiridos por los alumnos durante el curso escolar. Éstos pueden ser sobre conceptos, sobre proposiciones (teoremas y fórmulas), y sobre procedimientos o métodos de trabajo característicos de la matemática (métodos de demostración, procedimientos para la resolución de ecuaciones, para calcular, etc.).

PODER. Se entenderá por poder los hábitos, habilidades, y capacidades específicas de la matemática, desarrollado por los alumnos para operar con los conocimientos adquiridos y darles aplicación, así como las normas de conducta y cualidades de la personalidad.

1.5.2 Respecto al saber.

La adquisición de sólidos conocimientos sobre:

- Conocimientos importantes del curso escolar de matemáticas.
- Proposiciones matemáticas.
- Procedimientos de trabajo matemático.
- Símbolos y fórmulas matemáticas.

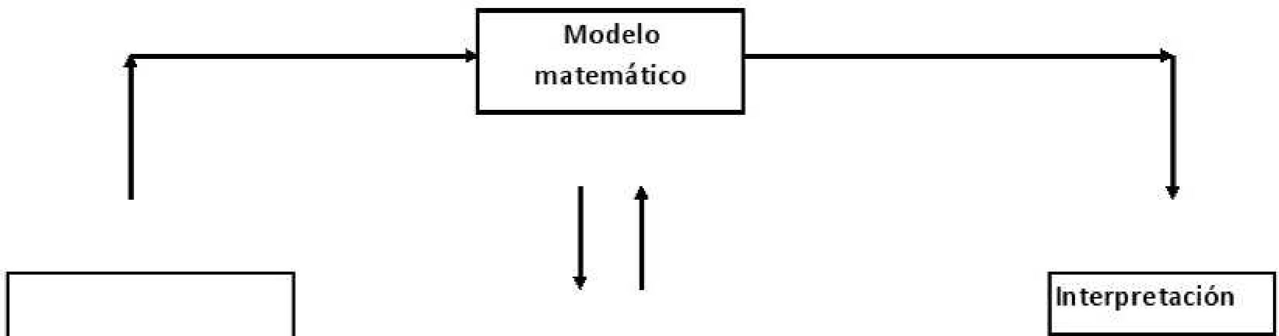
1.5.3 Respecto al poder.

La formación y el desarrollo de hábitos y habilidades para:

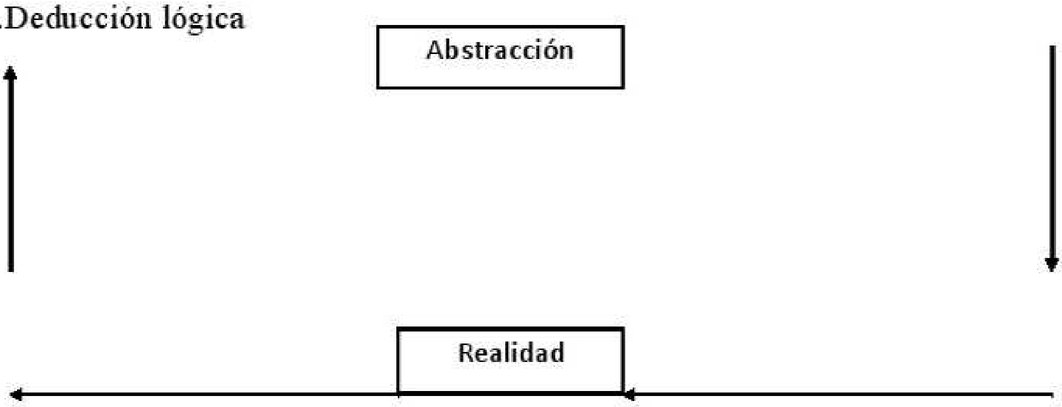
- La realización de operaciones básicas de cálculo.
- La resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- El trabajo con funciones elementales.
- La representación y el cálculo de objetos sencillos en el plano y en el espacio.

El sistema básico de habilidades en la enseñanza de la matemática en el nivel medio es el siguiente:

- Analizar y sintetizar, comparar y clasificar, generalizar y concretar y particularizar, como habilidades generales que contribuyen al desarrollo del pensamiento general.
- Algoritmizar, calcular, graficar, interpretar, identificar, recodificar, definir y demostrar, como habilidades particulares de la Matemática.
- La abstracción como la vía del pensamiento matemático para poder resolver problemas prácticos mediante modelos.



1.1.1.1.Deducción lógica



La formación y el desarrollo de capacidades para:

- Entender y realizar independientemente demostraciones sencillas.
- Comprender la esencia de los conceptos y como llegar a su definición y caracterización.
- Aplicar correctamente la terminología, simbología y el lenguaje matemáticos.
- Reconocer, analizar y solucionar problemas matemáticos.

1.5.4 Objetivos en el campo del desarrollo intelectual.

Éstos expresan la contribución que debe hacer la enseñanza de la Matemática al desarrollo del pensamiento en general vinculado con:

- El desarrollo del pensamiento lógico-deductivo. Para ello se debe hacer una utilización correcta de las operaciones lógicas y sus formulaciones correspondientes.
- El desarrollo del pensamiento creativo y la fantasía. Para ello se debe participar activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos y relaciones entre ellos; de ideas para la solución de ejercicios y problemas.
- La formación lingüística. Para ello se debe capacitar para el uso correcto del lenguaje normado de la asignatura, para transferir formulaciones del lenguaje común al matemático y viceversa.
- El desarrollo del pensamiento geométrico espacial. Para ello se debe formar un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, pueden

los estudiantes representar, mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométricas espaciales.

- El desarrollo del pensamiento final. Entendiéndose a éste como los procesos del pensamiento encaminados a un producto final determinado.
- El desarrollo del pensamiento algorítmico.
- El desarrollo del pensamiento funcional.
- La racionalización del trabajo mental de los alumnos. Para ello se debe preparar para trabajar de modo racional, planificado y orientado hacia el cumplimiento de objetivos específicos.

1.5.5 Objetivos educativos.

Los objetivos educativos de la enseñanza de matemática se orientan hacia la formación de convicciones, actitudes y normas de conducta, así como cualidades morales, los mismos que se logran al incluir en la educación:

- El trabajo planificado, consciente y creador.
- La exactitud, el cuidado, el esmero y la limpieza.
- La perseverancia, la disciplina y el aprendizaje consciente.
- La sinceridad, la crítica y la autocrítica.
- El compañerismo, la complacencia y la conducta colectiva.

1.6 CONOCIMIENTOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

- Dominios numéricos.
- Cálculo con magnitudes y valores aproximados.
- Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas. Optimización lineal.
- Correspondencia, transformación, función.
- Geometría
- Combinatoria, probabilidades.

1.7 MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

1.7.1 Del profesor.

El profesor debe dominar los métodos para la familiarización con los programas de matemática, conocidos como: corte vertical, corte horizontal y panorámica del contenido.

Corte vertical. Se utiliza para obtener información respecto a las condiciones previas que poseen los estudiantes, sobre las premisas fundamentales que se deben crear en una unidad, de modo de contribuir a la consecución de los objetivos en las unidades posteriores.

Corte horizontal. Se utiliza para obtener la información que proporcionan los programas sobre la distribución o dosificación del contenido en una unidad o parte de él.

La panorámica del contenido. Se utiliza para obtener información de los programas sobre los contenidos fundamentales

1.7.2 Del contenido.

Debido al lugar que ocupa el método en la cadena lógica de los componentes no personales del proceso pedagógico (objetivo, contenido, métodos, medios, formas organizativas y evaluación), éstos deben cumplir las siguientes exigencias:

- Deben hacer un importante aporte al logro de los objetivos, no solo de la enseñanza de la matemática sino de toda la enseñanza en general.
- Deben ser métodos que tengan en cuenta tanto las particularidades del contenido matemático (imágenes ideales de la realidad), como los modos objetivos de asimilación de este contenido por parte de los estudiantes de forma que tengan capacidad para determinar ese modo de proceder.

1.7.3 Aspecto interno y externo del método.

EXTERNO. Es el modo visible de las relaciones entre maestro, alumno y los conocimientos (forma de enseñar), aquí se distinguirán tres formas:

Exposición del profesor.

La fuerza activa está en el profesor, la actividad del alumno es receptiva. En la enseñanza de la matemática se la usa si:

1. Aparecen indicaciones sobre…..
2. Hay que presentar informaciones sobre…..
3. Se debe complementar una información matemática mediante una información adicional.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Se representa la materia completa en el aspecto del contenido (aclaración).
2. Contribuye al adiestramiento lógico lingüístico de los alumnos.
3. Permite dar indicaciones para resolver un ejercicio o para realizar determinada forma de trabajo.(instrucción).
4. Es importante para mostrar numerosos procedimientos y formas de trabajo y pensamiento de la matemática (ejemplificación).

Exposición con carácter de aclaración.	Exposición con carácter de instrucción.	Exposición con carácter de ejemplificación
Introducción de conceptos, símbolos y formas de escritura(frase conceptual. Deducción de teoremas y reglas. Fundamentación de los diferentes pasos de una demostración o construcción.	Planteamiento de objetivos. Planteamiento de ejercicios. Indicaciones sobre la forma de trabajo.	Introducción de procedimientos de construcción. Introducción de métodos de demostración. Ejemplificación de las formas de representación de demostraciones.

Explicación de leyes. Aclaración de vías de solución.		

Trabajo independiente.

Predomina el aprendizaje productivo en la solución de ejercicios o en el trabajo con el libro de texto.

Se lo usará en la enseñanza de la matemática:

1. Para el descubrimiento de determinadas leyes matemáticas.
2. Para adquisición de nuevos conocimientos sobre conceptos.
3. Cuando se quieren presentar definiciones o teoremas.
4. Para la ejercitación de procedimientos de solución.
5. Para lograr la sistematización de contenidos.

Las ventajas que su uso tiene son:

1. Desarrollo del pensamiento de los alumnos en cuanto al dominio de operaciones lógicas como: analizar, inducir, sintetizar, abstraer, generalizar procedimientos, inducir y deducir.
2. El desarrollo de la habilidad de solucionar problemas.
3. Entrenamiento para el trabajo en silencio, con notas de clase, con el libro de texto y con libros de consulta en la biblioteca.
4. El desarrollo de la independencia en la realización de tareas.
5. Desarrollo de la habilidad de exponer.
6. El adiestramiento en hacer valoraciones críticas en cuanto a la comprensión y la representación de relaciones matemáticas.

Trabajo individual	Trabajo individual frontal	Trabajo en equipos
Exposición de los alumno. Hacer cálculos en la pizarra, realización de construcciones en la pizarra. Controles orales de los resultados. Solución de tareas.	Ejercicios para la realización de cálculos, solución de ecuaciones, etc. Solución de ejercicios de demostración, realización de descripción de construcciones. Elaboración de resúmenes. Sistematización del saber adquirido. Elaboración independiente de nuevos conocimientos con el libro de texto. Empleo de hojas de trabajo para la adquisición de nuevos conocimientos. Controles escritos de los resultados.	Solución comentada de ejercicios.

Elaboración conjunta.

Adopta distintas formas de conversación.

En la enseñanza de la matemática se lo usará:

1. Si se desea dar pasos cortos en la actividad mental de los alumnos.
2. Si se quiere realizar controles orales en los alumnos para el aseguramiento del nivel de partida.
3. Si se intenta dirigir el pensamiento de los alumnos para que encuentren o descubran, por sí mismos, determinados problemas matemáticos.

Las ventajas de su uso son:

1. Desarrollar las habilidades de: fundamentar, definir y explicar relaciones.

2. Incide en la capacidad de formular proposiciones, y encontrar un procedimiento.

Conversación Socrática	Conversación heurística	Discusión
Ejercitaciones diarias de todo tipo: cálculo oral, propiedades de objetos geométricos, trabajo con variables.	Elaboración de nuevos conocimientos sobre la base del poder y del saber ya adquiridos.	Búsqueda común de vías de solución. Análisis de problemas. Trabajo en el problema.
Controles breves con preguntas sobre fórmulas de cálculo	Ordenamiento de nuevos conocimientos en sistemas de conocimientos ya existentes.	Discusión de posibilidades de solución Valorización y evaluación de soluciones ofrecidas.
Preparación de conceptos conocidos, definiciones, teoremas para el trabajo siguiente.	Resúmenes de generalizaciones. Descubrimiento del núcleo matemático de una situación dada. Solución por paso de ejercicios. Interpretación de expresiones matemáticas.	Contraposición con problemas actuales

INTERNO. Es la expresión de procesos más profundos, que se encuentran determinados por la lógica interna del proceso de enseñanza y que le imprimen al método una estructura interna peculiar. Aquí consideraremos los siguientes métodos.

* **Los métodos analíticos, sintéticos y analítico-sintéticos.**

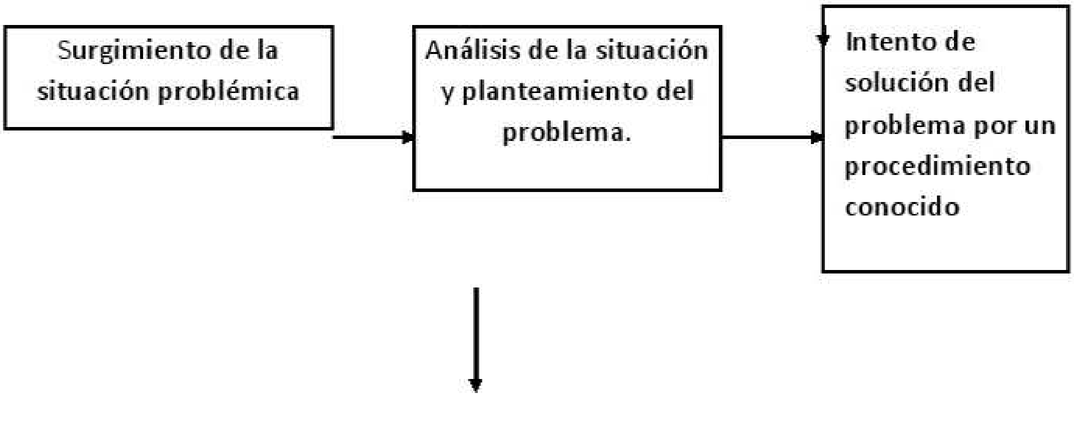
Siendo el análisis y la síntesis métodos de la investigación científica, juegan un gran papel en el proceso de la cognición que tiene lugar en la matemática por lo tanto deben reflejarse en su enseñanza.

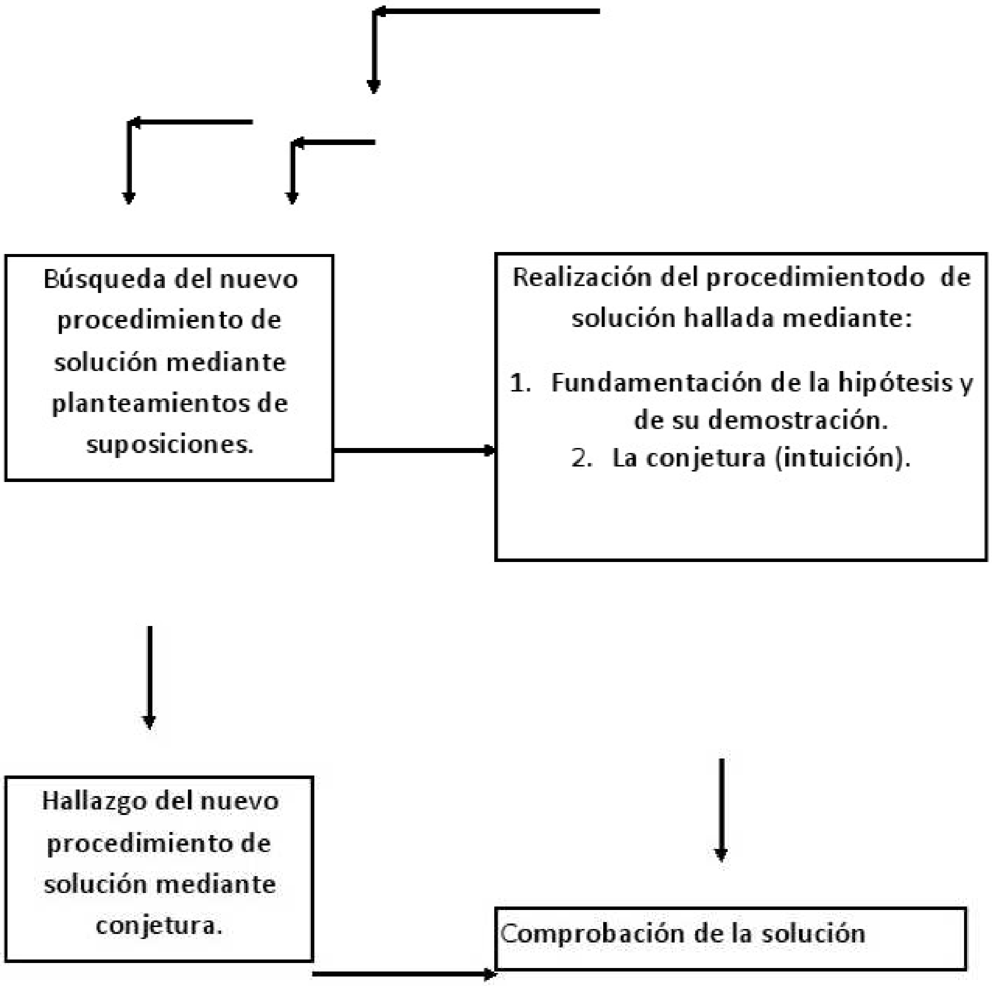
- **Los métodos genéticos, constructivos y axiomáticos.**

Al aplicar el método genético se citan pintorescamente hechos históricos que revelan causas de la aparición de las teorías matemáticas; se trata de que los alumnos con ayuda del profesor, descubran los teoremas y las reglas esenciales comprendiendo la estructura. Al aplicar el método constructivo se introducen conceptos que se logran en forma constructiva. El método axiomático se basa en representar todo el sistema de los conceptos y teoremas partiendo de leyes básicas que se consideran axiomas irrefutables.

- **El método problémico.**

Este consiste en que mediante el proceso de solución por parte de los alumnos, del sistema especialmente elaborado de problemas y ejercicios problémicos, éstos llegan a dominar la experiencia creadora, a asimilar los conocimientos y modos de actividad creadora. A continuación se presentará un esquema del método problémico.





1.8 MEDIOS PARA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Aparte de los medios elementales de la enseñanza de la matemática como son el pizarrón, la tiza, el retroproyector, las láminas, las reglas, el compás, etc., consideraremos un grupo de medios que los llamaremos medios auxiliares.

Para que los estudiantes puedan aprovechar al máximo los medios, deben saber cuál es su contenido, cuáles son los valores que contienen y cómo trabajar con ellos. El profesor es el ejemplo de su utilización, no solo en el momento de su enseñanza. El facilitador debe realizar con los alumnos un entrenamiento para dominar las técnicas del uso, a través de un trabajo sistemático. Asímismo debe propiciar la memorización de las fórmulas simples que son de uso frecuente. Algunos de los medios que se consideran de importancia en la enseñanza de la matemática son:

Libro de texto. Donde se ofrece una representación de los contenidos del curso. Con ayuda de éste los alumnos pueden realizar tres grupos de actividades fundamentales: actividades de búsqueda de información, de toma de información, y de elaboración o transformación de la información.

Plantillas para la construcción de figuras y para el trazado de gráficos de funciones elementales. La construcción del gráfico de algunas funciones (cuadráticas,homográficas,etc.) exige mucho tiempo y a menudo el dibujo no es limpio y la curva no adquiere su forma verdadera producto de los errores cometidos, el tiempo puede ser ahorrado para emplearlo en la actividad mental y creativa de los alumnos, si éstos disponen de un juego de plantillas que pueden ser confeccionados por ellos mismos.

Los formularios y las tablas de valores funcionales. Estos medios tienen un carácter eminentemente racionalizador, con su ayuda se puede en breve tiempo, precisar fórmulas, conceptos, teoremas, gráficos, valores para funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, etc. que resulten necesarias para la solución de un problema dado.

La calculadora. Es una herramienta que se puede introducir en el momento en que los cálculos requieran de procedimientos muy largos y que abarquen números racionales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc.

1.9 FORMAS ORGANIZATIVAS.

El proceso pedagógico para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio de la educación en el Ecuador debe organizarse en forma horizontal, en años, trimestres (cuatrimestres, quimestres, etc.), meses, semanas, módulos y clase, y de manera vertical en asignaturas. A éstas últimas se les organiza de modo que permitan la función integradora del proceso.

Es en las clases en donde se manifiesta la relación facilitador-estudiante, y es allí donde se produce el desarrollo metodológico del proceso, mediante el cual los estudiantes deben apropiarse del contenido logrando los objetivos.

Creemos que las clases de Matemática deben desarrollarse principalmente entre la práctica con un porcentaje de trabajo investigativo. En las clases debe tratarse de mantener la expositiva, la práctica y los talleres con un peso igual. No debería, sin embargo, dejarse de desarrollar clases donde se trate la autopreparación y la consulta, de forma que se logren los objetivos propuestos y fomente el autocontrol como un aporte para el desarrollo de la personalidad.

Así, la relación Método-medio-forma es dinámica, determinando la eficiencia del sistema, manifestándose de modo categórico, como en ningún otro componente del sistema, la relación afectivo-cognitiva y de la actividad-comunicación.

1.10 EVALUACIÓN.

Se debe entender a la evaluación como la integridad de sus funciones: pedagógica, innovadora y de control. Aunque en un instante parecería que la función que se encuentra rectorando la evaluación es la de control, si se aplica adecuadamente la estrategia evaluativa sugerida por el Dr. Castro, obtendríamos una evaluación que utilice la medición, la comprobación, la retroalimentación y sobre todo la autoevaluación como actividades frecuentes y sistemáticas.

Para que la evaluación cumpla con su función pedagógica se debería estructurar medológicamente:

- La motivación.
  Para que los alumnos adquieran conciencia de la necesidad de aprender.
- La orientación hacia el objetivo.
  La información anticipada a los alumnos del resultado de su actividad.
- El aseguramiento del nivel de partida (diagnóstico).
  Lo que implica que se debe prestar atención a las condiciones previas generales y la disponibilidad de conocimientos y habilidades.
- La fijación.

En todas sus etapas: ejercitación, repaso, sistematización y profundización del contenido.

- Del control.

Dentro de las técnicas de control que sugerimos tenemos: la evaluación frecuente a través del método de elaboración conjunta, trabajo en clase y extraclase, y las pruebas y exámenes. Para la estructuración metodológica del control se debe tener en cuenta:

- Características de los ejercicios. Estos se los utiliza como un medio para el control, y deben estar confeccionados según el modelo de los que representan las exigencias derivadas de los objetivos a lograr.
- Principios para la selección de ejercicios en una prueba o examen.

1. Hay que lograr variedad en el planteamiento de los ejercicios
2. Debe tener al menos un ejercicio que provenga del curso anterior.
3. Por lo menos en un ejercicio los alumnos deben reconocer el núcleo matemático de una situación dada
4. Debe estar contenida las exigencias de una demostración, de una fundamentación o de una sistematización (generalización).
5. En la fijación del valor de las preguntas tiene que dar suficiente peso a los conocimientos y habilidades principales.
6. Deben estar contenidos ejercicios que posibiliten también a los alumnos de menos capacidad una elaboración exitosa.
7. Deben estar contenidos ejercicios en los que los alumnos de mayor capacidad puedan mostrar que dominan la materia amplia y profundamente.

- Valorización adecuada y justa de los ejercicios de control.

Esto se realiza sobre todo mediante el elogio, la crítica, pero también mediante la calificación. Para que la evaluación cumpla sus propósitos el alumno debe reconocer por qué fue elogiado o criticado o el por qué de su calificación. Además se necesita que concientice del estado del desarrollo de sus habilidades para fundamentar, para demostrar, para sistematizar.

- La elevación de la efectividad de la evaluación.

Para esto el profesor a de tener en cuenta:

1. Realizar observaciones frecuentes y detalladas durante la clase sobre la calidad de las respuestas, los comentarios, la realización de tareas por los alumnos y al final de la clase informar sobre el resultado.
2. Durante la evaluación individual plantear ejercicios adecuados de acuerdo con la capacidad de rendimiento de los alumnos, incorporándolos a tareas de observación de la precisión, la forma racional de la representación lingüística y matemática.

3. El estado de desarrollo tanto de los conocimientos como de las habilidades generales y específicas.
4. Que los alumnos deben reconocer la fuente de sus errores y que los reconozcan. Anotar errores comunes y ejemplificarlos con caso análogos y cómo remediarlos.
5. Después de las pruebas y exámenes resolver todos los ejercicios en la forma que espera que los hayan resuelto los alumnos.
6. Mostrar las dificultades existentes y en qué forma pueden aumentar sus esfuerzos.
7. Velar no solo porque los resultados sean correctos desde el punto de vista matemático sino por la forma de trabajo limpia e inmejorable.
8. Indicar tareas individuales a los alumnos con indicaciones para actuar y ejercicios del libro de texto.
9. Reflexionar sobre el resultado del rendimiento de sus alumnos de modo que retroalimente y mejore sus métodos de trabajo.

2.
3. 2. ESQUEMA DEL MÓDULO DE CAPACITACIÓN

El presente trabajo contiene las orientaciones metodológicas para el octavo año, que constituyen un material de apoyo para los profesores. Se ha procurado que contengan, tanto las ideas esenciales de la concepción general de la matemática, cuanto las ideas de carácter general que están relacionadas con todas las unidades o con algunas de ellas.

Esta presentación se la ha organizado por unidad y ésta a su vez por unidad temática. Dentro de cada unidad se ha clasificado de la siguiente manera la presentación:

- Introducción.- Donde se explican las características generales de la unidad en relación con la nueva concepción de la matemática que presenta la Reforma Curricular, poniendo de manifiesto los cambios más significativos en el contenido y en el tratamiento metodológico.
- Composición de la Unidad.- Aquí se presenta inicialmente un esquema en el que se evidencian las condiciones previas más importantes para el tratamiento de la unidad, así como los aspectos fundamentales de ella.
- El hilo conductor.- Constituye un conjunto de ideas que rigen el desarrollo de la unidad, y permiten determinar lo esencial y lo que esperamos lograr en los alumnos.
- Exigencias mínimas.- Indican el nivel mínimo que deberán alcanzar los alumnos, se las representarán por ejercicios, que orientarán con claridad lo que se espera que los estudiantes puedan hacer. Se debe indicar que no se pretende presentar ejercicios "tipo", sino ejercicios que ilustran el nivel que esperamos, sin mermar la posibilidad de trabajar de modo de lograr más con aquellos alumnos que tengan más posibilidades de desarrollo.
- Unidades Temáticas.- Se clasificará cada una de éstas en los puntos esenciales que se sugieren subdividir cada unidad temática. A su vez dentro de cada uno de éstos se propondrá las metodologías a seguir, así como se expondrán ejemplos de qué tipo de ejercicios presentar, y cómo resolverlos.

4. 3. TRATAMIENTO METODOLÓGICO GENERAL DEL CONTENIDO
5. DE LA ASIGNATURA EN EL AÑO.

La vía metodológica fundamental que se ha seguido para el tratamiento de los contenidos objeto de estudio se basa en la resolución de sistemas de ejercicios cada uno de los cuales tiene objetivos bien definidos, que determinan su ubicación dentro del sistema y su relación con el resto de los ejercicios.

Se debe partir de ejemplos de situaciones concretas de la vida práctica o de ejercicios elaborados con fines didácticos para, apoyándose en ellos, hacer la introducción de los nuevos contenidos teóricos. En otras ocasiones el tratamiento se hace a la inversa, se introduce el nuevo contenido teórico (definiciones de conceptos, enunciados de teoremas, descripción de procedimientos) y posteriormente se ejemplifica su utilización en la resolución de ejercicios intra y extramatemáticos.

La vía a utilizar depende fundamentalmente de las características del contenido a tratar y del desarrollo que tenga un grupo concreto de alumnos, no obstante en ambos casos los ejercicios y problemas juegan un papel fundamental.

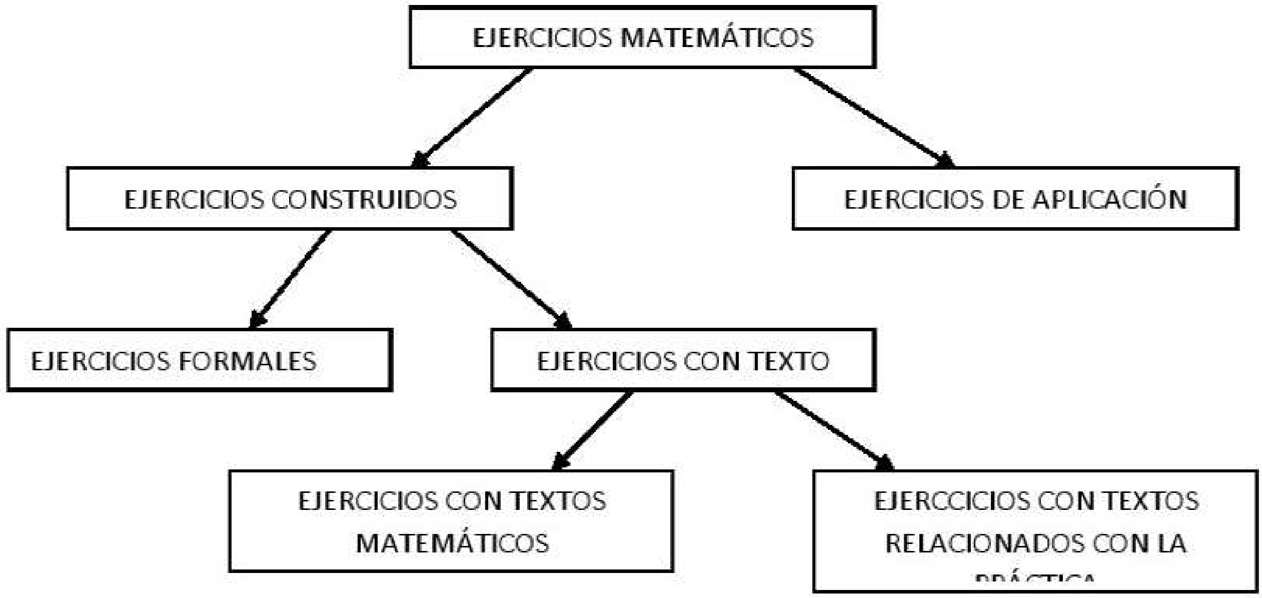
Apoyándonos en los ejercicios es que se le puede dar cumplimiento a los objetivos en cada una de las etapas del tratamiento del contenido teórico de la asignatura, hasta lograr que los alumnos asimilen sólidamente los conocimientos y desarrollen las habilidades necesarias para operar con ellos de manera consciente.

La resolución de ejercicios y problemas es la vía fundamental para realizar la enseñanza y el estudio de la Matemática y es por esto que los profesores deben saber cuál es la forma más efectiva de utilizarlos de manera que puedan explotar al máximo todas las posibilidades que ellos nos brindan.

En el programa y en estas orientaciones metodológicas indistintamente se hacen referencia a ejercicios formales, ejercicios con texto, problemas; ejercicios de cálculo, demostración y construcción, etc. Estas denominaciones corresponden a las diferentes clasificaciones de los ejercicios que son de más dominio de los profesores; no obstante, dada la importancia que tiene que ellos conozcan bien las características de los ejercicios que van a utilizar, consideramos útil hacer en este material algunas aclaraciones sobre la utilización de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática y algunas de sus clasificaciones.

6. 4. SOBRE LAS CLASIFICACIONES DE LOS EJERCICIOS
7. MATEMATICOS QUE SE UTILIZAN EN LA ESCUELA.

Existen muchas clasificaciones de los ejercicios matemáticos. La más conocida:



Los ejercicios de aplicación no se basan en problemas matemáticos sino en problemas que surgen directamente de la práctica, en relación directa con el medio que rodea a los alumnos; pero en la solución de éstos se aplican procedimientos matemáticos. Un problema de este tipo se presenta cuando, por ejemplo, los alumnos miden las dimensiones de una parcela signada a la escuela para su explotación productiva y determinan el número de posturas a cada planta que se pueden sembrar teniendo en cuenta que a cada planta le corresponde una cantidad de superficie vital para su mejor desarrollo.

Los ejercicios construidos son aquellos que se han elaborado por razones didácticas con el fin de ejercitar, profundizar y aplicar lo aprendido. En los libros generalmente aparecen muchos de estos ejercicios, ellos se subdividen en ejercicios formales y ejercicios con texto.

Por ejemplo:

Ejercicios formales

- Reduce términos semejantes.

  $2x^2 - 5y^2 + 6y^2 + 3x^2$

- Efectúa.
  2ab(3a + 5b)

- En un ortoedro V, a, b y c representan el volumen y las aristas. Calcula V sí:

  a) a= 5m, b= 3m, c= 7m

  b) a= 20 cm b= 1m, c= 15dm

Observe que en estos ejercicios se dan órdenes directas de lo que se debe hacer. El contenido matemático aparece explícito. En el caso del cálculo del volumen se aplica un procedimiento algorítmico conocido por los alumnos.

Ejercicios con textos matemáticos

En este material se les denominarán simplemente ejercicios con texto. Son formas preliminares de ejercicios con textos relacionados con la práctica (problemas). Por lo general el contenido matemático no aparece en forma explícita sino que los datos sobre operaciones aparecen, relacionados entre números o cantidades se expresan mediante términos propios de la asignatura que el alumno debe dominar para su interpretación. Por ejemplo:

- Hallar el volumen de una pirámide de 2,10 m de altura, cuya base es un triángulo de 0, 36m de altura.
- El duplo de un número más el triplo del mismo es igual a –80. ¿Cuál es el número?

Ejercicios con textos relacionados con la práctica

- ¿Qué cantidad de arena se necesita para cubrir un patio rectangular de 15 m de largo y de 38 m de perímetro con una capa de 1,0 dm de altura?

En estos problemas los datos son posibles, pero no exactamente reales; sin embargo, el profesor debe construir problemas de este tipo con datos actualizados, publicados en la prensa nacional o local.

Entre otras clasificaciones de los ejercicios podemos destacar la que los divide en ejercicios de cálculo, de construcción, de demostración y de investigación.

Esta clasificación usada para clasificar los ejercicios teniendo en cuenta las habilidades y capacidades fundamentales que se quieren desarrollar mediante la utilización de cada uno de ellos no resulta ser un instrumento eficaz para determinar la actividad mental que deben desarrollar los alumnos para darles solución.

Esto se debe fundamentalmente a que en muchos casos (dadas las exigencias propias del nivel medio, básico y superior) estos tipos de ejercicios no se diferencian unos de otros por su nivel de complejidad.

Por ejemplo, en la resolución de ejercicios de cálculo y construcción, también es necesario fundamentar y demostrar nuestros razonamientos o procedimientos empleados. Para realizar construcciones y demostraciones también es necesario hacer investigaciones sobre la diferenciación de casos posibles, sobre la generalidad del procedimiento de construcción empleado o la vía utilizada para hacer la demostración, etc.

Por lo señalado anteriormente es necesario que los profesores, al seleccionar o elaborar los ejercicios que van a plantear a sus alumnos, tengan en cuenta no sólo la clasificación a que hicimos referencia, sino que también deben analizar el nivel de complejidad y dificultad de éstos, así como la actividad mental que deben desarrollar los alumnos en el proceso de solución.

8. 5. LAS FUNCIONES DE LA EJERCITACION EN LA ENSEÑANZA
9. DE LA MATERMATICA

De la efectividad en la utilización de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática depende, en gran medida, el grado de preparación de los alumnos para la actividad práctica en cualquier esfera de la vida social. Resolviendo ejercicios matemáticos estructurados en un sistema bien elaborado, podemos lograr una buena preparación matemática en los alumnos, que implica el desarrollo del pensamiento matemático.

La ejercitación hace un gran aporte al cumplimiento de los objetivos de la enseñanza de la Matemática: pero para el logro de cada uno de ellos en particular, es necesario un sistema de ejercicios bien determinados y respectivamente una metodología específica para su resolución. Por esto cada ejercicio debe estar dirigido a la realización de objetivos concretos.

Como los componentes fundamentales de la enseñanza de la Matemática son la instrucción, la educación y el desarrollo del pensamiento, es provechoso considerar como funciones rectoras de los ejercicios, las instructivas, educativas y de desarrollo. Además de estas funciones los ejercicios tienen otra función de gran importancia que es la función de control del aprendizaje.

Estas funciones prácticamente nunca aparecen aisladas unas de otras, no obstante, la función que prevalece en un ejercicio, que es la que determina el objetivo fundamental por el cual éste se le plantea a los alumnos es a la que se le debe prestar una mayor atención.

Es necesario destacar que hay ejercicios en los que prevalecen más de una de estas funciones (las tres inclusive pueden tener el mismo grado de importancia), estos son ejercicios que tienen una gran carga instructiva, educativa y de desarrollo y que los profesores deben utilizar siempre que les sea posible.

Como funciones instructivas generales de los ejercicios se consideran aquellas dirigidas a la formación en los alumnos de un determinado sistema de conocimientos, habilidades y hábitos en las distintas etapas de asimilación.

Una de las causas fundamentales del formalismo en la enseñanza de la Matemática escolar radica en no valorar consecuentemente las distintas funciones de los ejercicios o las características que deben cumplir los sistemas de ejercicios para dar cumplimiento a los objetivos de la enseñanza de la Matemática.

En la práctica escolar muchas veces se tienen en cuenta solamente algunas de las funciones instructivas de los ejercicios. Se plantean a los alumnos un gran número de ejercicios tipo, haciendo del algoritmo para la resolución de éstos el objetivo fundamental y no se tienen en cuenta las restantes funciones. Esta práctica no ayuda a la mejor formación matemática de los alumnos.

10. 6. SOBRE LA ELABORACION DE SISTEMAS DE EJERCICIOS

Un sistema de ejercicios no es un grupo cualquiera de ejercicios, este conjunto debe cumplir determinados principios.

Cuando un profesor va a elaborar un sistema de ejercicios, para dar cumplimiento a objetivos concretos, tiene que hacer un análisis cuidadoso de cada uno de los ejercicios y en particular del sistema en su conjunto.

Vamos a enunciar ahora algunos principios que deben cumplir los sistemas de ejercicios dirigidos a la asimilación de los contenidos teóricos en los distintos niveles que se especifican en los objetivos del programa.
Para que resulte más fácil la elaboración de estos sistemas enunciaremos los principios en forma constructiva, o sea, indicaremos qué tipo de ejercicio debe formar parte del sistema. Los tipos de ejercicios están aquí determinados por el objetivo fundamental que persiguen.

En un sistema de ejercicios cuyo objetivo es la asimilación de un concepto se debe incluir ejercicios dirigidos a:

- Preparar las condiciones previas para la introducción del nuevo concepto.
- Lograr la asimilación de la nueva terminología y simbología y además la formación en los alumnos de una idea clara del contenido y la extensión del concepto.
- Posibilitar el desarrollo de habilidades para aplicar el concepto de forma directa en situaciones sencillas.
- Realizar el enlace y reconocimiento de las relaciones lógicas con otros conceptos (incorporarlos a un sistema de conceptos).
- Aplicar el concepto conjuntamente con otros conceptos teoremas en situaciones donde la aplicación no es directa (o sea, en el enunciado del ejercicio no se especifica la necesidad de aplicar el concepto).

Entre estos ejercicios deben incluirse aquellos que establecen la vinculación con situaciones de la vida práctica.

En un sistema de ejercicios cuyo objetivo es la asimilación de un teorema debe incluirse ejercicios dirigidos a:

- Repasar los contenidos esenciales en los que se fundamenta la demostración del teorema.
- Advertir regularidades y enunciar hipótesis.

Por ejemplo, para hacer el tratamiento del producto de potencias de igual base de exponente natural n (n ≥1), se puede utilizar un ejercicio como el siguiente:
Representar los siguientes productos como una potencia cuya base sea la misma de los factores.

$$2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^8$$
$$x^4 \times x^3 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^7$$

Después de realizados estos ejercicios, los alumnos pueden llegar a advertir la regularidad existente y formular la hipótesis:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

- Aplicar el teorema en forma directa.
- Aplicar el teorema conjuntamente con otros contenidos teóricos estudiados anteriormente.
- Aplicar el teorema en demostraciones sencillas.

Un sistema de ejercicios dirigido a la asimilación de procedimientos debe incluir ejercicios dirigidos a:

- Organizar la asimilación de los distintos procedimientos que forman parte de uno más complejo que es objeto de estudio. Por ejemplo, cuando se va ha hacer el tratamiento de la adición de números racionales con signos diferentes es conveniente resolver ejercicios como el siguiente:

   a) Halla los módulos de los números siguientes: 3 y 5; -10 y 4
   b) Calcula la diferencia entre los valores obtenidos, en cada uno de los casos del inciso anterior.

- Aplicar el procedimiento conjuntamente con otros ya estudiados de manera que los alumnos determinen con precisión la posibilidad de aplicar uno u otro procedimiento. Por ejemplo: -4 – 6 +2
- Lograr que no se cree un estereotipo en los alumnos con relación a un procedimiento apropiado.

Por ejemplo, un ejercicio cuya esencia es la solución de la ecuación $2x + 7 = -9$ se puede presentar a los alumnos de diferentes formas:

1. Resolver la ecuación $2x + 7 = -9$
2. Determinar para qué valores de la variable la ecuación anterior es una proposición verdadera.

Hemos señalado algunas consideraciones generales que se deben tener en cuenta en relación con los sistemas de ejercicios que componen el sistema, el profesor debe atender otros aspectos como son los siguientes:

- Qué función o funciones rectoras pueden realizar cada uno de los ejercicios y qué objetivo u objetivos específicos nos proponemos alcanzar mediante ellos.
- Si resulta conveniente utilizar las magnitudes o datos numéricos que aparecen en el ejercicio u otros.
- Si el texto del ejercicio es adecuado y puede despertar el interés de los alumnos porque su respuesta es importante, o porque el procedimiento para su resolución resulta novedoso y atractivo.
- Si pueden los alumnos resolver este ejercicio de forma independiente y qué conocimientos y habilidades les son necesarios.
- En qué aspectos y en qué medida se les debe brindar ayuda.
- A qué conclusión se puede llegar sobre la preparación de un alumno que no pueda resolver el ejercicio.
- Cómo este ejercicio está relacionado con los contenidos estudiados y con los que se estudiarán posteriormente.

Finalmente queremos señalar que en ocasiones es necesario que el profesor elabore ejercicios en correspondencia con los objetivos que se propone o que transforme algunos que aparecen en el texto de manera que se ajusten a sus necesidades.

10.1.1.1.1.1.1.UNIDAD 1

10.1.1.1.1.1.2.NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES. OPERACIONES FUNDAMENTALES

10.2. INTRODUCCIÓN

Esta unidad tiene gran importancia, debido a que se realiza una nueva ampliación del dominio numérico, del conjunto de números fraccionarios a los números racionales. El trabajo con los números racionales está presente a lo largo de toda la enseñanza de la matemática.

Los conocimientos que aquí obtendrán los estudiantes constituyen la base del cálculo algebraico, del trabajo con funciones y ecuaciones, de la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal

Cuando los alumnos obtienen conocimientos sobre los números racionales y desarrollan destrezas para realizar con ellos las cuatro operaciones fundamentales, se encuentran en capacidad para trabajar sobre un nuevo dominio, el de las variables, que les preparará para resolver ecuaciones, inecuaciones y problemas de la vida práctica, que antes no podían resolver.

Para el desarrollo de esta unidad, se han hecho las siguientes consideraciones:

- No se parte desde el punto de vista de la formación de clases de equivalencias (clases de diferencias). Todo el tiempo que se hubiese empleado en el desarrollo de la carga teórica concerniente a dichos temas se lo empleará en la ejercitación de las operaciones de cálculo con los números racionales.

- Se debe partir de ejemplos de la vida práctica en los que aparecen magnitudes consideradas en sentidos contrarios, a fin de introducir los números negativos.
- Se llega al concepto de números opuestos, y se concluye que el conjunto formado por los fraccionarios y sus opuestos forman los números racionales.
- Aunque es posible tratar los números opuestos dentro del campo de los racionales, en los cuadernos de trabajo de los alumnos se ha optado por considerar primero los enteros relativos.
- Se identificarán los números racionales no negativos con los números fraccionarios y, en general, no se utilizará el signo "+" para los positivos, con lo que se simplifica la notación.
- Los algoritmos para las cuatro operaciones fundamentales deben simplificarse, de modo que los alumnos se apropien de éstos rápidamente y puedan desarrollar las destrezas en el cálculo.
- En los cuadernos de trabajo se ha incluido una amplia y variada ejercitación, prestándole particular interés a ejercicios donde se combinan las cuatro operaciones fundamentales, debiéndose tener en cuenta el orden en que se deben realizar las operaciones, además es importante notar que aparecen ecuaciones, cuya resolución exige operar con números racionales.
- En las ecuaciones que aparecen en los ejercicios lo fundamental es el cálculo con números racionales.
- El profesor debe tener en cuenta que el contenido teórico se encuentra simplificado, porque se hace mayor énfasis en los procedimientos prácticos del cálculo que se fijarán mediante ejercicios.
- Al final de la unidad se deben realizar ejercicios que contribuyan a la consolidación y sistematización de los conocimientos adquiridos.
- Se recomienda especialmente resolver ejercicios con texto (problemas) en cada uno de los puntos esenciales. Dichos ejercicios se encuentran en el cuaderno de trabajo.

10.2.1.COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

Números enteros

10.2.1.1.

↓

10.2.1.2.Números racionales

↓

Orden en los números racionales

↓

Operaciones de cálculo

10.2.1.2.1. Propiedades

Suma y resta. Multiplicación y división. Propiedades

Prioridad de las operaciones. Operaciones combinadas

10.2.1.3.Resolución de ecuaciones

HILO CONDUCTOR.

Dentro de esta unidad lo más importante es que los alumnos tengan una comprensión clara de la representación geométrica de los números racionales en la recta numérica, conozcan el orden de los mismos y desarrollen habilidades en el cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con estos números.

10.2.2.

10.2.3.EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Dominen la relación de orden existente entre los números racionales, los puedan representar en una recta numérica y desarrollen habilidades en la comparación de números racionales.
- Dominen los algoritmos para la resolución de las cuatro operaciones fundamentales con números racionales y los memoricen en la forma más simple posible.
- Desarrollen habilidades en la suma, resta, multiplicación y división con números racionales.
- Apliquen correctamente el orden en que se realizan las operaciones de cálculo en ejercicios donde aparezcan combinaciones de éstas.
- Resuelvan ecuaciones lineales.

Para el logro de las exigencias planteadas, se debe constatar que los estudiantes puedan resolver ejercicios como los que proponemos a continuación.

En lo concerniente al orden y la representación de números racionales en la recta numérica, tenemos por ejemplo:

1. Representar en una recta numérica los números racionales siguientes:

   $\frac{3}{2}$; $-0{,}5$; $2{,}4$; $-2{,}4$; $-(1+\frac{1}{4})$.

2. Ordenar los siguientes números racionales, comenzando por el mayor:

   -1; $\frac{1}{2}$; 0; -3; 1,2; $-\frac{3}{2}$

3. Comparar los siguientes pares de números racionales colocando en cada cuadradito el signo de relación correspondiente: > ; = ; < .

   a. 2 $\square$ - 5,5

   b. –3,8 $\square$ - 3

   c. – 1,4 $\square$ 0

d. $\frac{1}{10}$ $\square$ 0,1

4. Sustituir en cada caso el cuadradito por una cifra de modo que las siguientes relaciones se cumplan:
   a. $\square 6 > 89$
   b. $-319 < -3\square 9$
   c. $-23{,}8 > -23{,}\square$
   d. $-\square 0{,}5 > -20$

5. Escribir, en cada caso, tres números racionales que se encuentran comprendidos entre:
   a. -1 y 1
   b. $-\frac{1}{2}$ y 0
   c. $-1{,}5$ y $-1{,}4$

6. Dados los números racionales siguientes:
   $\frac{3}{4}$; $-2{,}5$; -4; $\frac{5}{2}$; $-0{,}5$; $1{,}2$.

   a. Ordénalos, comenzando por el menor
   b. Represéntalos en una recta numérica.

Para fijar los algoritmos de las cuatro operaciones fundamentales, sugerimos:

Adición y Sustracción

7. Calcular
   a. $-23+9$
   b. $-15-12$
   c. $3-10$
   d. $-8{,}5+13{,}7$
   e. $-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$
   f. $2{,}4-7{,}65$

Multiplicación y División

8. Efectuar
   a. $12 \times (-5)$
   b. $-\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$
   c. $-0.65 \times (-6)$
   d. $72 \div (-6)$
   e. $-\frac{1}{4} \div \frac{3}{7}$
   f. $-12,6 \div (-9)$

En cuanto a las operaciones combinadas, sugerimos ejercicios como los siguientes:

8.
   a. $-8+7-6-10$
   b. $-4+2,6-7+7,4$
   c. $-5 \times 8,9 \times (-2)$
   d. $-24 \div 2 \times (-6)$
   e. $-2-6 \times (-5)$
   f. $-7-5 \times 2,6$
   g. $-\frac{1}{4}+\frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$
   h. $-\frac{3}{5} \times 5+2,3-12,6 \div (-3)$

10.2.3.1.1.1.1.1.INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguiente unidades temáticas:
1. Introducción de los números racionales. Orden.
2. Suma y resta de números racionales.
3. Multiplicación y división de números racionales.
4. Resolución de ecuaciones.

1. INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES. ORDEN

Se sugiere tratar esta unidad temática en 10 horas y distinguir en ella los siguientes puntos fundamentales:
- Repaso sobre los números enteros y fraccionarios.
- Números racionales.

- Orden en los números racionales.

1.1. Repaso sobre números enteros y fraccionarios

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Se debe lograr que los alumnos reactiven los conocimientos adquiridos en 7to. grado sobre el orden y las cuatro operaciones fundamentales con números enteros y fraccionarios (incluyendo operaciones combinadas). Todo esto constituye la base de conocimientos que deben tener los alumnos para comprender, sin mucha dificultad, el trabajo con los números racionales.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, el profesor debe tener en cuenta que lo esencial lo constituyen los procedimientos; luego este repaso debe ser en forma activa, con la participación de los alumnos.

El profesor puede repasar primero el orden y la representación en la semirrecta numérica de números enteros en primer lugar, luego de los fraccionarios y finalmente las operaciones con éstos.

Para la parte concerniente al orden y la representación recomendamos el siguiente ejemplo:

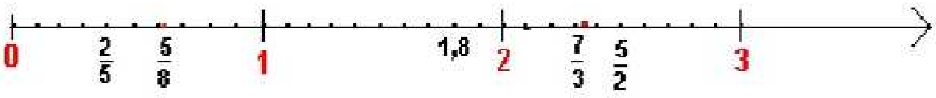
10.2.3.1.1.2.Representar en la semirrecta numérica los siguientes números fraccionarios:

$$\frac{2}{5};\quad 1{,}8;\quad 2+\frac{1}{2};\quad \frac{5}{8};\quad \frac{7}{3}$$

Resolución.

Para representar números fraccionarios dados, se analiza, si el número se puede escribir en notación decimal finita. Es conveniente esta forma, pues para su representación basta trabajar con subdivisiones del segmento unidad en 10 partes, en 100, etc.

Por ejemplo $\frac{2}{5} = 0.4$



Si tiene varios lugares decimales puede redondearse a uno (o a dos) por ejemplo $\frac{5}{8} = 0{,}625 \approx 0{,}6$.

Si el número tiene una representación decimal infinita se acostumbra a aproximarlo mediante una representación decimal finita, haciendo un redondeo adecuado: por ejemplo

$\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots \approx 2{,}3\,3.$

En lo referente a las operaciones puede comenzarse por repasar, a través de ejemplos, los algoritmos para las cuatro operaciones fundamentales con números enteros y fraccionarios y proponer un bloque de ejercicios. Debe hacerse referencia a la posibilidad de realizar las operaciones en los racionales positivos, destacando que la resta no siempre puede realizarse en este dominio numérico.

Es necesario también repasar el orden en que se realizan las operaciones cuando éstas aparecen en forma combinada, lo cual puede ilustrarse con el siguiente ejemplo

Calcular:

a. $3 \times 2^2 + 5 - 7$

b. $(5 - 0{,}4) \div 2$

c. $2 + 0{,}8 \div 4$

Resolución:

a. $3 \times 2^2 + 5 - 7$

$= 3 \times 4 + 5 - 7$

$= 12 + 5 - 7$

$= 17 - 7$

$= 10$

b. $(5 - 0{,}4) \div 2$
$= 4{,}6 \div 2$

$= 2{,}3$

c. $2 + 0{,}8 \div 4$
$= 2 + 0{,}2$

$= 2{,}2$

10.2.3.1.1.3.Resolver la ecuación $2x + 1{,}4 = 5$

Resolución

$2x + 1{,}4 = 5$ (Primero se despeja $2x$)

$2x = 5 - 1{,}4$ (Después se despeja x pasando a dividir 2 al otro miembro)

$2x = 3{,}6$

$x = \frac{3{,}6}{2}$

$x = 1{,}8$

Observar que el orden a seguir para realizar las operaciones, cuando aparecen en forma combinada, es el siguiente:

Primero: Las operaciones dentro de los paréntesis.

Segundo: Las potencias

Tercero: Multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.

Cuarto: Sumas y restas en el orden en que aparecen.

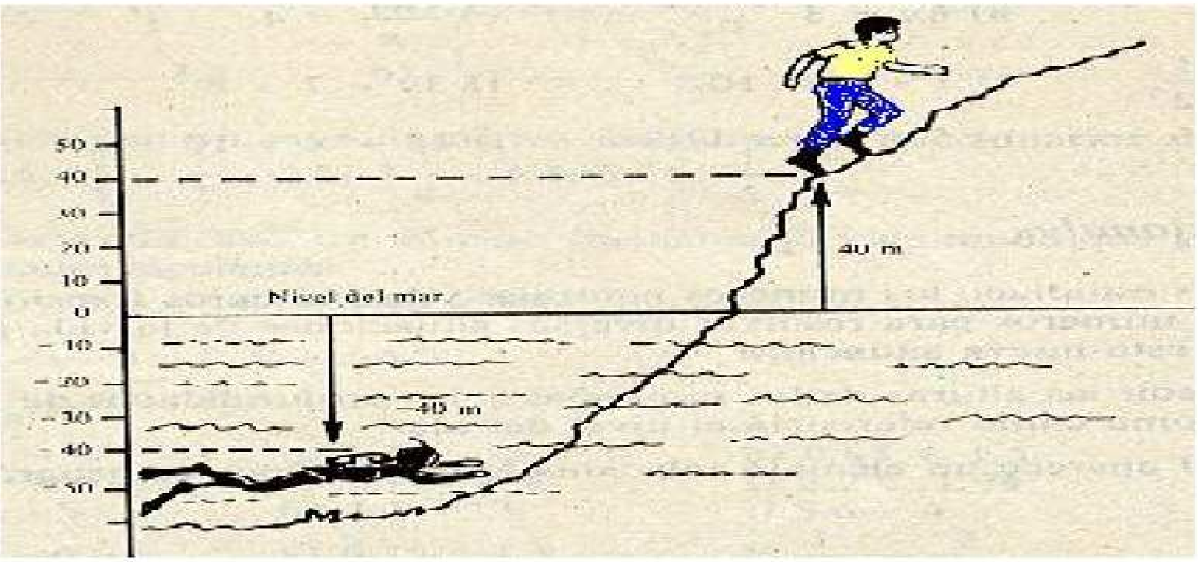
Se debe recordar que la resta es la operación inversa de la suma, así como también la división es la operación inversa de la multiplicación.

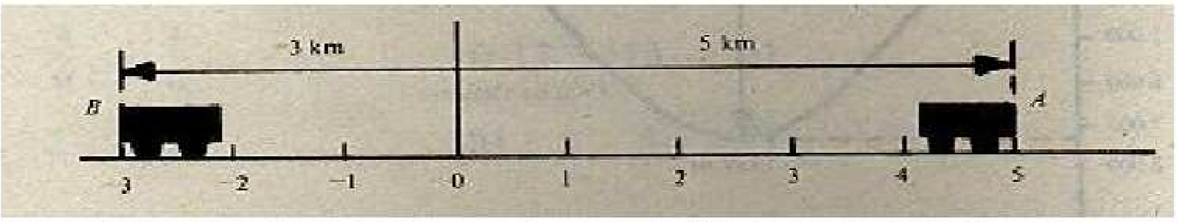
1.2. Números racionales

Para el tratamiento de este punto se dispone de 2 horas. Se debe lograr que los alumnos conozcan los elementos que forman el conjunto de los números racionales y sepan representar números racionales en una recta numérica.

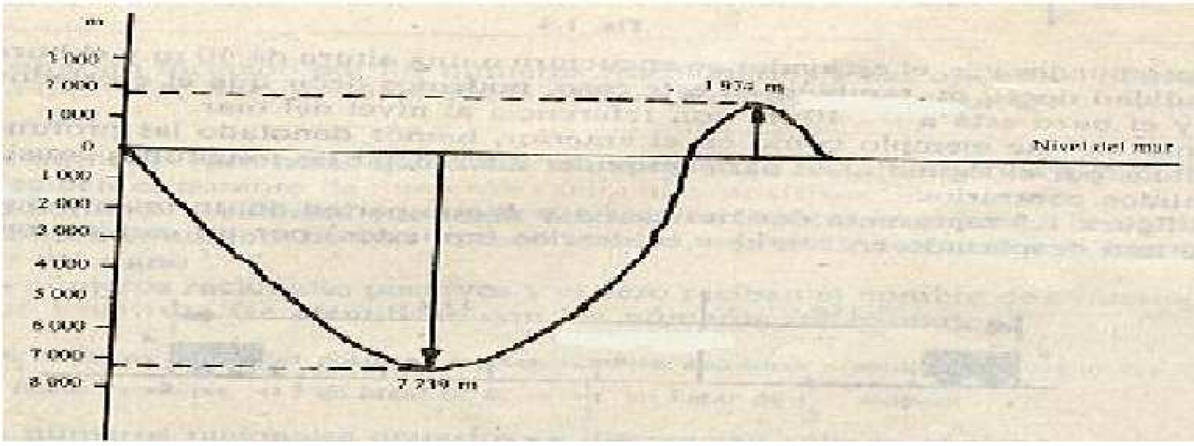
Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, resulta conveniente partir de situaciones de la vida práctica en las cuales es necesario considerar magnitudes en dos sentidos diferentes (opuestos) y que los alumnos comprendan la necesidad de establecer una diferenciación entre las clases de magnitud; de ahí surge el signo "-" y los números negativos.

El tratamiento de esta parte debe ser de una forma ágil y dinámica: se recomienda seguir las tres situaciones que se ilustran a continuación, la última de ellas (la de los dos móviles) prepara las condiciones para introducir la recta numérica y los números negativos.





De una forma natural se introduce el concepto “números opuestos” como aquellos situados simétricamente en la recta numérica con respecto al cero. Apoyándonos en este concepto, se introduce inmediatamente la definición del conjunto de los números racionales, como el conjunto formado por los números fraccionarios y sus opuestos; luego para que un número sea racional tiene que ser, o bien, entero o fraccionario, o bien, el opuesto de un entero o de un fraccionario.



Debe informarse a los alumnos acerca de la clasificación de los números racionales en positivos, negativos. Desde un inicio se trabajará con los números positivos, considerándolos como fraccionarios, con lo cual se simplifica la notación.

El procedimiento a fijar en este punto esencial es la representación de números racionales en la recta numérica; esto ya está resuelto en parte, pues los alumnos conocen cómo representar los números racionales no negativos. El profesor debe recalcar que para representar los números racionales negativos nos basamos en la simetría con respecto al punto que corresponde al cero.

Además es necesario informar a los alumnos que todo número racional puede escribirse de la forma $\frac{p}{q}$ donde p, q son números enteros con $q \neq 0$ y que al efectuar la división se obtiene una expresión decimal finita o infinita y en este último caso siempre va a ser periódica. Es conveniente que los alumnos tengan esta información para que cuando en una unidad posterior se hable de los números irracionales, comprendan la diferencia esencial entre estos últimos y los números racionales.

Para los mejores alumnos pueden proponerse ejercicios más complejos, como el siguiente:

- Señala en qué porción de la recta numérica están situados los opuestos de los siguientes subconjuntos de números racionales:

a) Los números racionales situados a la derecha de 5.
b) Los números racionales situados a la izquierda de –2.
c) Los números racionales situados entre –4 y –1.
d) Los números racionales mayores que 0.

1.3 Orden en los números enteros y racionales

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Lo fundamental que es que los alumnos se apropien del concepto "valor absoluto" o "módulo" de un número racional, dominen la relación de orden existente en el dominio de los números racionales y desarrollen habilidades en la comparación de números racionales.

Cómo vía metodológica para el tratamiento de este punto esencial, primeramente los alumnos deben conocer el concepto "valor absoluto" o "módulo" de un número racional. Se puede tratar este concepto de una forma muy simple ya que sólo se pretende que los alumnos comprendan cómo se determina el módulo de un número racional cualquiera, y que el módulo siempre es un número no negativo. Para una mejor comprensión de este concepto recomendamos incluir la interpretación geométrica, a partir de la cual los estudiantes deben llegar a la conclusión de que dos números opuestos tienen el mismo módulo.

Como ejercitación de este aspecto se recomienda los ejercicios siguientes:

1. Determinar el valor absoluto de los números racionales siguientes:

   $5;\quad -5;\quad 7{,}8;\quad -\frac{3}{4};\quad 0;\quad 3{,}4;\quad -1{,}75.$

2. Señalar en una recta numérica todos los números racionales cuyos módulos sean iguales a:

   $\frac{5}{2};\quad 1;\quad 0{,}5;\quad 3{,}75;\quad 0;\quad 4+\frac{1}{3}$

3. Determinar los números racionales que satisfacen las igualdades siguientes:

   a. $|x| = 3$

   b. $|a| = 0{,}6$

c. $|y| = 0$
d. $|x| - 1 = 0$
e. $|b| + 2 = 3,5$
f. $|z| = -4$

El orden de los números racionales se introduce haciendo extensiva la relación de orden ya conocida para los números fraccionarios. Es importante que los alumnos fijen el procedimiento práctico para comparar números racionales. Es necesario, además, informarles sobre la densidad del conjunto de los números racionales, la misma que constituye una de sus propiedades más importantes.

A manera de motivación para este aspecto, el profesor puede comenzar recordando que los racionales positivos forman un conjunto denso, o sea que entre dos números fraccionarios diferentes existen otros números fraccionarios (infinitos), por ejemplo: entre 0 y 1. Seguidamente puede plantear la interrogante siguiente: ¿Se cumplirá también esta propiedad en el conjunto de los números racionales?

Puede pedirse a los alumnos que mencionen números racionales comprendidos entre dos números dados y que concluyan que es también un conjunto denso. Debe quedar bien claro para los alumnos que ningún número racional posee antecesor ni sucesor.

Para la ejercitación correspondiente al orden en los números racionales, no deben dejar de hacerse ejercicios como los siguientes:

1. Ordenar los siguientes números racionales comenzando:

Por el menor
a. -3; 2; -9; 0; -1; 17
b. $-\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; -2; 0; $-0,7$
c. $-1,75$; -8; $\frac{1}{10}$; 1; $0,5$; $-1,6$

Por el mayor
a. $2,3$; $-1,8$; $-0,9$; $-1,9$; 0
b. $-2,5$; 0; -2; $\frac{7}{2}$; 4; $-\frac{1}{2}$
c. -3; $-2,8$; $0,2$; $-\frac{9}{4}$; $\frac{3}{2}$; -1

2. Colocar en el espacio en blanco el signo de relación correspondiente (<; =; >).
a. $0 \ \square \ 3$

b. $0 \ \square \ -5$

c. $2 \ \square \ -1$

d. $-3 \ \square \ -12$

e. $-1{,}8 \ \square \ -1{,}9$

f. $\frac{3}{2} \ \square \ \frac{15}{10}$

g. $-1{,}6 \ \square \ 1{,}6$

h. $0{,}85 \ \square \ 0{,}9$

i. $-\frac{3}{4} \ \square \ -2$

3. Sustituir en cada caso el asterisco por una cifra de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

a. $98 < 9*$
b. $2 * 9 > -219$
c. $-78,* < -78{,}8$
d. $4{,}85 < 4,*$
e. $-0* > -0{,}2$
f. $-22,* < -22{,}7$

4. Indicar en cada caso cinco números racionales que se encuentren entre:

a. -2 y 1
b. -3 y -2
c. -2 y $-1{,}5$
d. $-1{,}8$ y $-1{,}7$

5. Determinar todos los números enteros que se encuentren entre:

a. -3 y 3
b. -9 y -4
c. -4 y -2
d. -1 y 0

6. ¿El conjunto de los enteros es denso? Justificar la respuesta.

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son falsas? Justificar la respuesta.

a. $-3 < -2{,}7$
b. $3 < 2{,}7$
c. $-3 < |-2{,}7|$
d. $|-\frac{4}{7}| > -1$
e. $|-5| < 5$
f. $|-1{,}7| = 1{,}7$
g. $|-2| > |-1|$
h. $|-\frac{41}{10}| = 4{,}1$
i. $|-3{,}5| = -3{,}5$

8. Indicar entre qué números enteros están situados los números racionales siguientes:
a. 3,7
b. – 2,7
c. – 5,9
d. $\frac{7}{4}$
e. – 1,4
f. $-\frac{3}{5}$

9. Dados los siguientes números racionales
a. – 2; 0,7; 230; - 0,9; 0,1; - 2,7; - 329
b. – 150; - 10; 0,6; - 0,5; 15,5; 130; $-\frac{1}{4}$

i) ¿Cuál es el mayor?
ii) ¿Cuál es el menor?
iii) ¿Cuál es el que tiene mayor módulo?
iv) ¿Cuál es el que tiene menor módulo?.

Los ejercicios 1 al 3 fijan el procedimiento para comparar números racionales.
Los ejercicios 4 al 6 tratan sobre densidad.
En el ejercicio 7 se combina la determinación del módulo con la comparación de números racionales.
Los ejercicios 8 y 9 pueden ser resueltos oralmente por los alumnos.

El profesor puede proponer además ejercicios como el siguiente.

- Sean los números racionales: -1,3 ; 0,4; -3,5; 1,5

a) Ordénalos comenzando por el mayor

b) Represéntalos en una recta numérica
c) Selecciona de los números dados, dos que tengan el mismo módulo. Fundamenta tu selección.
d) Determina 5 números racionales x tales que $-3{,}5 < x < -\frac{3}{2}$.

En ejercicios como éste se observa una integración de conocimientos; queremos aclarar que este tipo de ejercicio (u otros similares) debe plantearse cuando los alumnos ya hayan alcanzado un nivel adecuado en el desarrollo de habilidades para resolver ejercicios más simples.

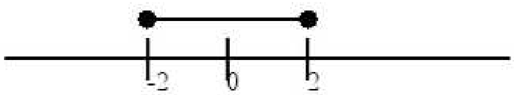
Para los alumnos más avanzados, pueden proponerse ejercicios más complejos como el siguiente:

Señalar, en cada caso, la porción de recta numérica en que se encuentran los subconjuntos de números racionales que satisfacen las condiciones siguientes:

a. $|x| < 2$
b. $|x| > 3$

A manera de ilustración ofrecemos la solución del inciso a).

- Los alumnos saben que $|x| = 2$ para $x = 2$ o $x = -2$, luego todos aquellos números cuyo módulo sea menor que 2 tienen que estar comprendidos entre - 2 y 2 o sea $-2 < x < 2$.
  Gráficamente:



1.4 Ejercicios que representan las siguientes exigencias mínimas parciales de la unidad matemática.

- Ejercicios sobre representación de números racionales en una recta numérica (ejercicio 1).
- Ejercicios sobre relaciones de pertenencia de elementos en un dominio numérico dado o sobre relaciones de inclusión entre los dominios numéricos estudiados (ejercicio 2).
- Ejercicios para determinar el opuesto de números racionales dados (ejercicio 3).
- Ejercicios sobre ordenamiento y comparación de números racionales (ejercicios 4 y 7).
- Ejercicios para determinar el módulo de números racionales dados así como la solución de ecuaciones modulares sencillas (ejercicios 5 y 6).
- Ejercicios sobre densidad (ejercicio 8)

1. Representar en una recta numérica los números racionales siguientes:

   $-1{,}5$; $\frac{7}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $1{,}5$; $-2{,}2$

   ¿Cuáles de los números citados anteriormente son opuestos? Justifica

.

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas?. Justifica:
   a. $-2 \in Q^{+}$
   b. $5 \in Z$
   c. $-4 \in N$
   d. $-1{,}5 \in Q^{+}$
   e. $Z \in Q$

3. Determinar los opuestos de los siguientes números racionales:

   -4; $\frac{1}{5}$; 0; $-3{,}5$; $1{,}6$

4. Dados los siguientes números racionales:

   -5; $\frac{2}{3}$; 1, $-0{,}5$; 0; $-\frac{7}{2}$; $\frac{5}{3}$.

   Ordénalos comenzando por el mayor (menor)

5. Determinar el módulo de los números racionales siguientes

   $-\frac{2}{5}$; $2{,}8$; 0; $\frac{1}{2}$; $-2{,}8$; -1

6. Resolver las siguientes ecuaciones
   a. $|x| = 8$
   b. $|a| = 3{,}5$
   c. $|z| = \frac{1}{3}$
   c. $|b| = 0$

7. Comparar los pares de números racionales siguientes; utilizando el signo de relación $>$, $=$, $<$ correspondiente.
   a. $-\frac{1}{4}$ $\boxed{}$ 0
   b. $0{,}2$ $\boxed{}$ -6
   c. -1 $\boxed{}$ -8
   d. $-\frac{5}{4}$ $\boxed{}$ -1

8. Determinar, en cada caso, tres números racionales comprendidos entre:
   a. -3 y -2
   b. $-0{,}5$ y 0
   c. $-1{,}6$ y $-1{,}5$

Queremos aclarar que los ejemplos anteriores no constituyen "ejercicios tipo" sino que es una forma de ilustrar la caracterización hecha inicialmente.

2. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Se sugiere tratar esta unidad temática en 14 horas, y distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Suma de números racionales.
- Resta de números racionales.

2.1. Suma de números racionales

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Lo fundamental es que los alumnos dominen los algoritmos para sumar dos números racionales, atendiendo a los signos de los sumandos, y que desarrollen habilidades para calcular la suma de dos (o más) números racionales.

Al aspecto concerniente a la introducción y fijación de los algoritmos para sumar dos números racionales (incluyendo su correspondiente ejercitación), recomendamos añadir las propiedades de la suma de números racionales y ejercicios de suma con más de dos sumandos.

Como vía metodológica para el inicio del tratamiento de este punto, el profesor puede partir planteando a los alumnos que para introducir un procedimiento que permita sumar dos números racionales cualesquiera, se considerarán diferentes casos, atendiendo a los signos de los sumandos.

Primer caso: Primero se tratará el caso en que los dos sumandos tienen signos iguales; este caso es conveniente subdividirlo a su vez en dos, o sea, cuando los dos sumandos son positivos y cuando ambos son negativos.

El caso en que los dos sumandos son positivos ya es conocido por los alumnos, pues se reduce a una suma de números fraccionarios.

El caso en que los dos sumandos son negativos es nuevo para los alumnos. Se recomienda seguir la vía que parte de una ilustración en una recta numérica.

Ya los alumnos conocen que cuando se hace referencia a un desplazamiento en sentido positivo, es hacia la derecha y si es en sentido negativo, es hacia la izquierda.

La ilustración puede ir acompañada de una explicación como la siguiente:

Si consideramos un desplazamiento de 2 unidades en sentido negativo (hacia la izquierda), seguido de otro desplazamiento de 3 unidades también en sentido negativo, esto equivale a un desplazamiento total de 5 unidades en sentido negativo, luego: -2 + (-3) = -5.

El profesor puede hacer ver a los alumnos como en general la suma de dos números racionales negativos siempre va a ser otro número negativo y hacer notar que para obtener el resultado se calcula la suma de los módulos de los sumandos (2 + 3 = 5) y se pone al resultado el signo menos.

Inmediatamente puede pasarse a enunciar el algoritmo para sumar dos números racionales negativos; para fijar el mismo se recomienda el siguiente ejemplo:

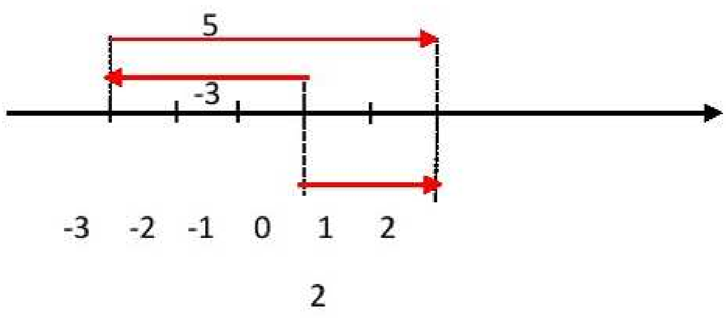
Calcular las siguientes sumas:

- -2 + (-3)
- 3,5 + 1
- -3,2 + (-4,3)
- $-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})$

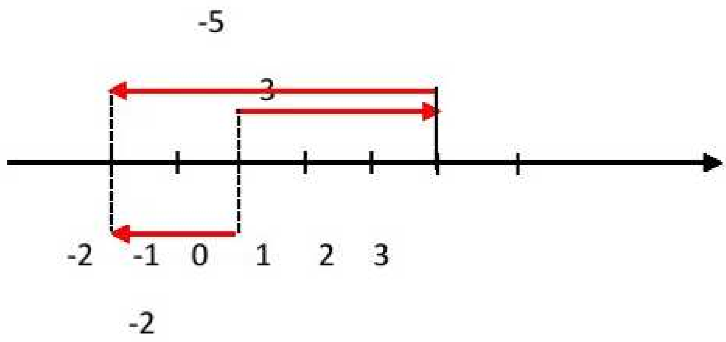
Segundo caso: Los dos sumandos tienen signos diferentes, es decir, un sumando es positivo y el otro es negativo. Se recomienda hacerlo de forma análoga a la anterior, es decir, partiendo de una ilustración en una recta numérica, como la siguiente:

En las figuras siguientes 1 y 2 se ilustra gráficamente la suma de dos números racionales con signos diferentes.

a. Adición - 3 y 5



b. Adición 3 y - 5



Estos mismos resultados se obtienen aplicando el procedimiento siguiente:

Para sumar dos números racionales con signos diferentes:

1. Se sustrae del de mayor módulo de estos números el menor.
2. Al resultado se le pone el signo del número de mayor módulo.

El profesor puede hacer ver que en ambas situaciones se trata de la suma de dos números racionales con signos diferentes y que en un caso el resultado es positivo mientras que en el otro, es negativo. Debe destacarse que el signo del resultado coincide con el sentido de la flecha mayor y dar la idea que para obtener dicho resultado se halla la diferencia de los módulos de los sumandos.

Una vez que los alumnos hayan comprendido esto, se procede a enunciar el algoritmo para sumar dos números racionales con signos diferentes; para fijar el mismo se recomienda el siguiente ejemplo:

Calcular las adiciones siguientes:

a. $3+(-5)$
b. $-8+10$
c. $-7{,}5+6$
d. $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)$
e. $-7{,}4+7{,}4$

Resolución

a. $3+(-5)$ — 1. Se sustraen los módulos de los sumandos:

$5-3=2 \;\; (|3|=3; |-5|=5) \;\; (5>3)$

2. Se pone al resultado el signo del número que tiene mayor módulo (“ – “ en este caso)

3 + (- 5) = -2

b) - 8 + 10 = 2 — pues 10 – 8 = 2 y el resultado es positivo (ya que el sumando de mayor módulo es positivo).

c. –7,5 + 6 = - 1,5 — (7,5 – 6 = 1,5 y el resultado lleva el signo del sumando de mayor módulo).

d. $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$ $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\ \text{y el resultado es positivo}\right)$

e. $-7{,}4 + 7{,}4 = 0$ pues en este caso, como los dos sumandos tienen igual módulo, la diferencia de estos es cero: (7,4 – 7,4 = 0). Esto ocurre siempre cuando los dos sumandos sean números opuestos.

En este caso, como los dos sumandos tienen igual módulo, la diferencia de estos es cero: (7,4 - 7,4 =0). Esto ocurre siempre cuando **los sumandos son números opuestos.**

La suma de dos números racionales opuestos es igual a cero.

En las clases siguientes recomendamos una ejercitación variada que abarque todos los casos estudiados.

Con respecto al estudio de las propiedades de la suma de números racionales, puede iniciarse recordando las propiedades que cumple la suma de números fraccionarios y hacerlas extensivas para la suma de números racionales. Debe ilustrarse cada caso.

Lo esencial del conocimiento de estas propiedades es su aplicación en ejercicios de suma con más de dos sumandos. El profesor debe aclarar que en ejercicios como –3 + 8 + (-1) + 6, se puede calcular reordenando y/o agrupando los sumandos en la forma que les resulte más ventajosa para realizar los cálculos, sin que esto signifique que se les imponga a los alumnos un patrón de cálculo.

La ejercitación correspondiente a este aspecto debe estar constituida en su mayoría por bloques de ejercicios de suma con más de dos sumandos, como los siguientes

10.2.3.1.1.4. Calcular

a. 3 + (- 7) + 17

b. $-5 + 10 + (-3)$
c. $12 + (-15) + (-3)$
d. $-20 + 13 + 6$
e. $-3 + 8 + (-1) + 6$
f. $4 + (-7) + 12 + (-9)$
g. $-20 + (-14) + 9 + (-6)$
h. $-12 + (-9) + 11 + (-18) + 8$
i. $-4 + (-14) + 21 + (-17) + 10$
j. $-4{,}2 + 3{,}6 + (-1{,}4)$
k. $5 + (-1{,}4) + 2{,}3 + (-6)$
l. $-8 + 1{,}5 + (-7{,}3) + 4$
m. $0.4 + (-4{,}5) + 6{,}2 + (-2{,}05) + 1$
n. $-\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}$
o. $\frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{7}{8} + \left(-\frac{1}{6}\right)$
p. $-\frac{1}{2} + 5 + \frac{3}{2} + (-6)$

1.2. Resta de números racionales

Para el tratamiento de este punto se dispone de 10 horas. Los alumnos deben: comprender que la resta de números racionales se puede reducir a una suma, aprender a restar un número racional de otro y calcular sumas algebraicas con dos o más sumandos. Además, deben saber que la resta de números racionales es la operación inversa de la suma y aplicar esto a la solución de ecuaciones sencillas de la forma $x + a = b$ con $a, b \in \mathbf{Q}$.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, puede comenzarse recordando a los alumnos que en el dominio de los números fraccionarios, la resta no siempre se puede realizar y que ahora en el dominio de los números racionales van a aprender un procedimiento mediante el cual la resta siempre se puede realizar.

En los primeros minutos de la clase, para asegurar el nivel de partida, puede proponerse algunos ejercicios como los siguientes:

1. Calcular:

   a. $7 + (-10)$
   b. $-8 + (-2)$
   c. $-7{,}5 + 3$

2. Determinar el opuesto de los números siguientes.

   7; -4; 2,5; -6

Seguidamente se pasará a dar el procedimiento para restar un número racional de otro (reduciendo la resta a la suma del opuesto del sustraendo). Para ilustrar esto recomendamos el siguiente ejemplo:

Calcular:

a. $3 - 7$
b. $-5 - 2$
c. $-3 - (-4)$
d. $3{,}5 - 6$

<u>Resolución:</u>

a) $3 - 7$

$3 + (-7)$	1. Transformemos la resta en una suma. (El opuesto de de 7 es -7).
$3 + (-7) = -4$	2. Efectuamos la suma aplicando el procedimiento estudiado para la suma de números racionales con signos diferentes (en este caso).
por tanto: $3 - 7 = -4$	

b) - 5 – 2 = - 5 + (- 2) como -5 + (- 2) = - 7 tenemos que:

-5 – 2 = - 7

c) - 3 – (- 4) = - 3 + 4 = 1 (el opuesto de –4 es 4 y la resta se transforma en una suma).

d) 3,5 - 6 = - 2,5 ya que 3,5 + (- 6) = - 2,5

Como conclusión:

La resta de números racionales siempre puede realizarse

En la práctica, para restar un número racional de otro se procede directamente, interpretando *cada caso como una suma*.

Por ejemplo: -10 -15 es la suma de los números racionales –10 y –15; 7 – 9 es la suma de los números racionales 7 y –9. En casos como estos, al calcular, se escribe directamente el resultado.

En la práctica, se debe lograr que los alumnos interpreten la resta de números racionales como una suma y calculen directamente el resultado, como en el siguiente ejemplo:

Calcular:

a. -10 –15
b. 7 - 9

<u>Resolución</u>:

a) – 10 – 15 = -25 (pues se trata de la suma de dos números racionales negativos).
b) 7 – 9 = - 2 (pues se trata de la suma de dos números racionales con signos diferentes).

A partir de este momento toda suma de números racionales (independientemente de los signos que tengan los sumandos) la denominaremos *suma algebraica.*

Nota: La notación en forma de suma algebraica simplifica la escritura de los sumandos, pues no es necesaria la utilización de paréntesis.

Con estas consideraciones, no es necesario escribir los sumandos negativos entre paréntesis.

En los casos de resta donde el sustraendo es negativo, se recomienda transformarlos previamente en una suma y después calcular, aunque no deben limitarse las posibilidades de aquellos alumnos que sean capaces de calcular directamente el resultado.

Para la ejercitación se recomienda un bloque de ejercicios como el siguiente

Calcular:

a. 5 – 9
b. 8 – 10
c. – 7 – 3
d. –1 – 1
e. 6 – (- 9)
f. – 4 – (- 11)
g. 25 – 40
h. – 13 – 47
i. – 10 – (- 12)
j. 4,6 – 6,4 - 7,8 – 2
k. – 5 – (- 8,5)
l. 7,35 – 7,5
m. 1,57 – 4
n. – 9,5 – 1,05
o. $\frac{1}{10} - \frac{3}{5}$
p. $-\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$
q. $-\frac{4}{9} - \left(-\frac{5}{12}\right)$

El concepto “suma algebraica” se introduce de forma natural como una suma de números racionales en la que intervienen tanto sumandos negativos como positivos, dichos sumandos se escriben unos a continuación de otros.

Recomendamos analizar con los alumnos el siguiente ejemplo:

Calcular las siguientes sumas algebraicas:

a. $-5 + 8 - 6$
b. $4 - 9 + 1 - 3$

<u>Resolución</u>:

En estos casos se puede reordenar y agrupar los sumandos en la forma que sea más conveniente para realizar los cálculos.

a) $-5 + 8 - 6 = -3$

Se puede calcular como:

$-5 + 8 - 6 = -11 + 8 = -3$ o $-5 + 8 - 6 = 3 - 6 = -3$

b) $4 -9 + 1 - 3 = -7$

Aquí se puede calcular por ejemplo como:

$4 - 9 + 1 - 3 = 5 - 12 = -7$ o $4 - 9 + 1 - 3 = -5 - 2 = -7$

Al calcular (reducir) una suma algebraica, el profesor puede sugerir a los alumnos que los sumandos pueden reordenarse y/o asociarse de la forma que les resulte más conveniente para realizar los cálculos (en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa), por ejemplo:

4 - 9 + 8 - 3 - 1 = 4 + 8 - 9 - 3 - 1 (agrupando los números según el signo)

= 12-13 (efectuando la suma de los números positivos y de los negativos)

= -1.

No obstante, volvemos a recalcar que lo anterior sólo es una sugerencia y que no se les debe imponer a los alumnos un patrón de cálculo.

Para el desarrollo de habilidades en el cálculo de sumas algebraicas sugerimos bloques de ejercicios como el siguiente:

Efectuar:

a. $-5-3+10$
b. $18-20+4$
c. $-6-10-9$
d. $4-6$
e. $8+3+1-11$
f. $10-6-5-7$
g. $-6+7-11+10$
h. $-7+9-2+5-6$
i. $-15+6-4+9-10$
j. $-17-21+19+22-40$
k. $-2{,}6+1{,}4-3{,}2$
l. $6{,}5-10{,}2+2{,}7$
m. $4-2{,}6+7-7{,}4$
n. $0{,}5-4{,}2+5{,}6-1{,}05$
o. $3{,}4-7{,}25-5{,}8+16{,}75$
p. $-3{,}5+1{,}45-2{,}3+0{,}55-7$
q. $7-3{,}8+2{,}25-6{,}2+0{,}75$
r. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{5}{4}.$
s. $-0{,}7-\frac{3}{2}-\frac{2}{5}+2{,}6$
t. $-0{,}7-3-2+2{,}6$

En el siguiente ejercicio hay que sustituir las variables por números y efectuar las operaciones indicadas.

Si $A = 15$; $B = 3$ y $C = -4$. Calcular:

a. $A+B-C$
b. $A-B+C$

No deben dejar de realizarse ejercicios como los siguientes, los mismos que constituyen aplicaciones a situaciones prácticas de la resta de números racionales y, si es posible, proponer ejercicios similares:

- *¿Cuál es la diferencia entre un punto que está a 1500m sobre el nivel del mar y otro que está a -300m?*

- *En Moscú se lee la temperatura que marca un termómetro a las 11h00 y ésta es de 6 ℃. Si a las 2h00 del siguiente día la temperatura disminuyó en 10 ℃, ¿qué temperatura marcaba en ese momento?*

3. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Se sugiere tratar esta unidad temática en 16 horas y distinguir en ella los siguientes puntos esenciales:

- Multiplicación de números racionales.
- División de números racionales.
- Operaciones combinadas con números racionales.

3.1 Multiplicación de números racionales

Para el tratamiento de este punto se dispone de 4 horas. Es importante que los alumnos dominen el algoritmo para multiplicar dos números racionales, atendiendo a los signos de los factores, y que desarrollen habilidades para calcular el producto de dos (o más) números racionales.

El algoritmo para multiplicar números racionales es el siguiente:

1. Se multiplican sus módulos.
2. Si los factores tienen signos iguales, el producto es positivo; si los factores tienen signos distintos, el producto es negativo.

Después de haber fijado el algoritmo se sugieren los siguientes ejercicios:

10.2.3.1.1.5.Calcular

a. 3×5
b. $(-3) \times (-5)$
c. $(-4) \times 8$

d. $4 \times (-8)$
e. $(-0,5) \times (-4)$
f. $(-1) \times 2$

Resolución

a. $3 \times 5 = 15$
b. $(-3) \times (-5) = 15$
c. $(-4) \times 8 = -32$
d. $4 \times (-8) = -32$
e. $(-0,5) \times (-4) = 2$
f. $(-1) \times 2 = -2$.

En ambos casos los dos factores tienen signos iguales y por eso el producto es positivo.
En estos dos casos los dos factores tienen signos diferentes, por tanto el producto es negativo.

Para la ejercitación consideramos que no deben dejar de realizarse los ejercicios 1, 2 y 3 (el profesor puede crear otros similares). Los ejercicios 4 al 6 requieren un poco más de razonamiento, éstos deben ser resueltos por reflexiones lógicas, pues los alumnos no poseen hasta el momento otros recursos.

1. Determinar sin calcular, en cada caso, cuáles de los siguientes productos son positivos y cuáles son negativos.

a. $(-2) \times (-50)$
b. 38×45
c. $(-32) \times 29$
d. $78,5 \times (-16)$

2. Calcular

a. $7 \times (-5)$
b. $(-6) \times 8$
c. $(-4) \times (-9)$
d. $(-1) \times (-1)$
e. 15×8
f. $14 \times (-9)$
g. $(-7) \times 24$
h. $(-15) \times (-12)$
i. $(25) \times (-20)$
j. $(-1) \times (0, 2)$
k. $(5, 6) \times (-5)$
l. $(-0,1) \times (-1)$
m. $(-0,5) \times 4$
n. $7,5 \times (-0,4)$
o. $(-3,6) \times (-0,2)$
p. $(0,25) \times (1,2)$
q. $(-3,45) \times (0, 4)$
r. $(1,06) \times (-2,5)$
s. $(-2,08) \times (-0,15)$
t. $(-1) \times (4)$
u. $8 \times (-3)$
v. $(-4) \times (-5)$
w. $0 \times (-7)$
x. $5 \times (-0,8)$

3. Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas? Justificar la respuesta

a. $(2{,}5) \times (-2) = -5$
b. $0 \times (-7) = -7$
c. $(-2) \times (-1) = -1$
d. $(-1) \times (4{,}5) = -4{,}5$
e. $(0{,}5) \times (-2) = -10$
f. $1 \times (-10) = 5$
g. $(-1{,}5) \times (-0{,}6) = 9$
h. $(-1) \times (-28{,}5) = -28{,}5$

4. Si el producto de dos números racionales es -24 y uno de los factores es:

a. 12
b. -4
¿Cuál es el otro factor?

5. Indicar en cada caso un número racional x de modo que se cumplan las siguientes desigualdades:

a. $-3x > 6$
b. $2x < -1$
c. $-4x < -4$
d. $5x > -20$
e. $-8x < 8$
f. $-7x > 7$

6. Determinar en cada caso si **a** debe ser un número racional positivo o negativo para que las siguientes relaciones sean verdaderas.

a. $5a > 6$
b. $8a < 0$
c. $-3a < 0$
d. $-9a > 0$
e. $2a > a$
f. $-6a < a$

Para el tratamiento de las propiedades de la multiplicación de números racionales el profesor puede, previamente, proponer a los alumnos ejercicios como los siguientes.

1. Calcular

a. $8 \times \left[-\frac{1}{4}\right]$

b. $-\frac{1}{4} \times 8$.

2. Efectuar

a. $[3 \times (-4)] \times (-5)$
b. $3 \times [(-4) \times (-5)]$

Compara, en cada caso, el resultado obtenido en los incisos a) y b). ¿ A qué conclusión puedes llegar?

El profesor hará notar a los alumnos que la aplicación de estas propiedades les permitirá calcular productos con más de dos factores en la forma más ventajosa que consideren, aunque al igual que en el caso de la suma, no se les debe imponer un patrón.

Por ejemplo, en productos como

a. $-4 \times 13 \times \frac{1}{4}$.

b. $-3{,}5 \times (-5) \times 2$

Conviene agrupar los factores de la forma siguiente:

a. $\left[-4 \times \frac{1}{4}\right] \times 13$

b. $-\mathbf{3.5} \times \mathbf{(-5 \times 2)}$.

De esta manera los cálculos resultan más sencillos.

A continuación sugerimos analizar el signo que le corresponde al producto de varios números racionales, atendiendo a la cantidad de factores negativos que intervengan.

Para la ejercitación recomendamos un bloque de ejercicios de multiplicación con más de dos factores, como en el siguiente ejercicio.

a. $5 \times (-1) \times 4$

b. $-5 \times (-3) \times 2$

c. $-7 \times (-9) \times (-2)$

d. $-2 \times 6 \times (-5) \times (-3)$

e. $-5 \times (-10) \times 3 \times 2$

f. $4 \times 5 \times (-1) \times 8$.

3.2 División de números racionales

10.2.3.1.2.Para el tratamiento de este punto se dispone de 5 horas. Lo fundamental es que los alumnos dominen el algoritmo para dividir dos números racionales y desarrollen habilidades en su aplicación. Además, deben saber que la división de números racionales es la operación inversa de la multiplicación y aplicar esto a la solución de ecuaciones de la forma $ax = b$ ($a, b \in Q$; $a \neq 0$).

También deben ser capaces de resolver ejercicios donde se combinen multiplicaciones y divisiones (o varias divisiones).

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto, puede comenzarse dando a los alumnos el algoritmo para dividir dos números racionales y fijándolo mediante un ejemplo:

a. $20 \div 5$
b. $-20 \div (-5)$
c. $-12 \div 4$
d. $12 \div (-4)$
e. $-1{,}8 \div (-2)$
f. $\frac{1}{3} \div \left(-\frac{2}{5}\right)$

<u>Resolución</u>

a. $20 \div 5 = 4$ b. $-20 \div (-5) = 4$	Como en ambos casos el dividendo y el divisor tienen signos iguales, el cociente es positivo.
c. $-12 \div 4 = -3$ d. $12 \div (-4) = -3$	Observar que en estos dos casos el dividendo y el divisor tienen signos diferentes y por eso el cociente es negativo.

e. $-1{,}8 \div (-2) = 0{,}9$
f. $\frac{1}{3} \div \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{6}$.

10.2.3.1.3.Una vez fijado el procedimiento para dividir dos números racionales, puede pasarse al aspecto concerniente a la división de números racionales como la operación inversa de la multiplicación

También debe informarse a los alumnos acerca de la existencia del recíproco para todo número racional diferente de cero.

Por último, recomendamos presentar a los alumnos algunos ejemplos donde aparezcan combinadas multiplicaciones y divisiones (o varias divisiones) y recordarles que en estos casos las operaciones deben realizarse según el orden en que aparecen; se sugiere el siguiente ejemplo

Calcular:

a. $-24 \div 4 \times 0{,}5$

b. $40 \div (-2) \div \frac{1}{4}$

Resolución

a. $-24 \div 4 \times 0{,}5 = -6 \times 0{,}5 = -3$

b. $40 \div (-2) \div \frac{1}{4} = -20 \div \frac{1}{4} = -80$

Observar que en ambos casos hemos efectuado las operaciones en el mismo orden en que están; si se procede de otra forma el resultado obtenido no es correcto. Sin embargo, en situaciones como éstas es preferible poner paréntesis para evitar confusiones:

$$(-24 \div 4) \times 0{,}5$$

Para la ejercitación proponemos los siguientes ejercicios, u otros que pueden ser creados por el profesor.

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $-4x = 48$

b. $12x = -60$

c. $3a = -11{,}7$

d. $-10b = -15$

e. $\frac{x}{5} = -6$

f. $x : (-7) = 10$

g. $-0{,}5z = -12$

h. $2y - 5 = -7$

i. $\frac{1}{2}a = -3$

j. $-3p + 8 = 2$

k. $4x - 1{,}4 = -5$

l. $2{,}4 - 5a = -2{,}6$

2. Copiar la siguiente tabla y completarla

10.2.3.1	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	-7	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{7}$
$\frac{1}{a}$							

3. Reducir las siguientes divisiones a multiplicaciones y calcular:

a. $6 \div \frac{3}{2}$

b. $-\frac{2}{5} \div 4$

c. $\frac{6}{5} \div \left(-\frac{3}{10}\right)$

d. $-\frac{5}{2} \div (-10)$

e. $-8 \div \left(-\frac{2}{5}\right)$

f. $\frac{3}{4} \div (-1)$

4. Si el producto de dos números racionales es – 12,8 y uno de los factores es:

a. – 8

b. 0,4

Calcular el otro factor.

5. El cociente de dos números racionales es - 4

a. Calcular el dividendo si el divisor es -15.

b. Calcular el divisor si el dividendo es 84.

6. Calcular

a. $15 \div 5 \times 3$

b. $-20 \div \frac{1}{3} \times 6$

c. $-35 \times 1{,}6 \div (-2)$

d. $28 \div (-4) \times 0{,}5$

e. $-20 \div 4 \times \frac{1}{5}$

f. $-10 \div \frac{1}{2} \times 2$

g. $-4{,}5 \div 9 \times (-5)$

h. $12 \div (-2{,}4) \div \frac{1}{5}$

i. $-48 \div \frac{3}{2} \div (-4)$

j. $-\frac{5}{2} \div (-10) \div (-2)$

k. $-15 \times 0{,}4 \div 2 \times 5$

l. $-10 \times 2 \div 0{,}5 \times (-4)$

m. $4 \div \left(-\frac{1}{5}\right) \times 10 \div (-50)$

n. $-36 \div 4{,}5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \div 4$

o. $60 \times (-0{,}6) \div (-3) \times \frac{2}{3}$

p. $-29 \div (-0{,}8) \times 10 \div (-2)$

3.3. Operaciones combinadas con números racionales.

Para el tratamiento de este punto se dispone de 7 horas. Queremos informar que este punto esencial es eminentemente práctico y que consta de toda una variedad de ejercicios donde se integran las cuatro operaciones fundamentales con números racionales.

Precisamente, lo fundamental de este punto es que los alumnos desarrollen habilidades en la solución de ejercicios donde aparezcan combinadas las cuatro operaciones básicas con los números racionales.

Para resolver operaciones combinadas con números racionales debemos analizar los diferentes casos que pueden presentarse y establecer el orden en que deben realizarse las operaciones.

1. Si aparecen multiplicaciones combinadas con sumas y sustracciones; se efectúan las multiplicaciones y cuando la operación sólo presente sumas y sustracciones, éstas se resuelven en el orden que sea más ventajoso.

2. Si aparecen divisiones combinadas con sumas y sustracciones; se efectúan las divisiones y cuando la operación sólo presente sumas y sustracciones, éstas se resuelven en el orden que nos sea más ventajoso.

3. Si aparecen combinadas varias divisiones, éstas se efectúan en el orden en que se encuentren, aunque, como se dijo anteriormente, es preferible poner paréntesis para indicar con precisión el orden de las operaciones.

4. Si aparecen combinadas multiplicaciones y divisiones, éstas deben efectuarse en el orden en que aparecen. Ahora bien, si se encuentran varias multiplicaciones, una a continuación de la otra, sabemos que el resultado no se altera si alteramos el orden en que se realizan las operaciones.

5. Si aparecen las cuatro operaciones combinadas, primero se efectúan las multiplicaciones y divisiones (según el orden en que estén) y después las sumas y las sustracciones.

Para ilustrar esto recomendamos el siguiente ejemplo u otros similares creados por el profesor

Calcular:

$- 5 - 6 \div 0,4 \times (- 2) + 3$

10.2.3.1.3.2.<u>Resolución</u>

$-5 - 6 \div 0,4 \times (- 2) + 3$

$= - 5 - 15 \times (- 2) + 3$

$= - 5 + 30 + 3$

$= 28.$

Ejercicios que representen las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- **Ejercicios formales de multiplicación y división de números racionales.**
- Ejercicios con textos sencillos que conducen a multiplicaciones o divisiones de números racionales.
- Ejercicios combinados de multiplicación y división.
- Ejercicios donde se combinan las cuatro operaciones.
- Ecuaciones.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

La presente unidad temática se debe tratar en 3 horas. No la hemos dividido en puntos esenciales, debido a que se trata de una unidad eminentemente de aplicación. Sugerimos que se la aborde en este momento, cuando el estudiante ya ha desarrollado las habilidades de cálculo correspondientes.

Como el estudiante ya ha abordado el tratamiento del aspecto concerniente a la resta de números racionales como la operación inversa de la suma, se puede presentar la aplicación de esto a la solución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ ($a, b \in Q$).

Como vía metodológica sugerimos que puede comenzarse planteando a los alumnos algunos ejercicios como los siguientes:

- $7 - 9 = -2$, entonces $-2 + 9 =$
- $3 - 5 = -8$, entonces $-8 + 5 =$

Debe hacerse ver que en ambos casos se obtiene como resultado el minuendo, lo cual hace suponer que la resta de números racionales es la operación inversa de la suma.

Una vez que los alumnos hayan comprendido lo anterior, se les muestra su aplicación a la solución de ecuaciones del tipo $x + a = b$.

Ya es conocido por los alumnos que al resolver ecuaciones, los términos se transponen de un miembro a otro realizando la operación inversa a la que hacían en el miembro en que se encontraban inicialmente.

Recomendamos tratar el siguiente ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $x + 5 = 3$
b. $-6 + x = -7$
c. $5 - x = 8$

Resolución

a. $x + 5 = 3$
$x = 3 - 5$
$x = -2$

Comprobación

Miembro izquierdo		Miembro derecho
$-2 + 5$		3
3		

Comparación
$3 = 3$

b. $-6 + x = -7$
$x = -7 + 6$
$x = -1$

Comprobación

Miembro izquierdo		Miembro derecho
$-6 + (-1)$		-7
-7		

Comparación

$-7 = -7$

c. $5 - x = 8$

$-x = 8 - 5$

$-x = 3$

Como $-x$ (el opuesto de x) es 3 entonces $x = -3$

Comprobación

Miembro izquierdo		Miembro derecho
$5 - (-3)$		8
8		

Comparación

$8 = 8$

En este ejemplo, en cada caso, el sumando que acompaña a la incógnita (x) "pasa" al otro miembro restando. Ahora bien, puesto que restar un número equivale a sumar su opuesto, se les puede hacer ver a los alumnos que en la práctica el sumando "pasa" al otro miembro con su signo cambiado, tal es la idea que se persigue con este ejemplo.

En la ecuación $5 - x = 8$ correspondiente al inciso c), al transponer el 5 al otro miembro obtenemos que $-x = 3$. Esto quiere decir que el opuesto de x es igual a 3; luego $x = -3$.

Otra vía es basándose en la operación inversa y transformando la ecuación original $5 - x = 8$ en $8 + x = 5$, de donde $x = -3$.

Los alumnos en estos momentos deben resolver ecuaciones con esta dificultad siguiendo alguno de los razonamientos anteriores.

Para la ejercitación recomendamos los siguientes ejercicios:

1 Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $x + 4 = -6$

b. $x - 5 = -1$

c. $3 + a = 0$

d. $-8 + b = -8$

e. $7 - x = -2$
f. $-0,4 + y = -2$
g. $x + 1,6 = -3$
h. $3,5 + z = 1,8$
i. $x + \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}$
j. $\frac{4}{3} - a = -1$

De modo semejante, trataremos la solución de ecuaciones de la forma ax = b (a,b $\in \angle$; a $\neq$ 0) y además ecuaciones del tipo ax + b = c.

El profesor puede comenzar planteando a los alumnos algunos ejercicios como los siguientes

- Si $9 \times (-4) = -36$ entonces $-36 \div (-4) =$
- Si $-5 \times (-6) = 30$ entonces $30 \div (-5) =$

Debe hacerse ver que en ambos casos se obtiene como resultado uno de los factores, lo cual hace suponer que la división de números racionales es la operación inversa de la multiplicación.

A continuación, puede mostrársele a los alumnos ejemplos de ecuaciones lineales sencillas de la forma ax = b (a,b $\in$ Q; a $\neq$ 0). Estas ecuaciones ya han sido trabajadas por los alumnos, sólo que ahora se va a calcular con números racionales.

Se recomienda tratar el siguiente ejemplo

10.2.3.1.4.Resolver las siguientes ecuaciones

a. $2x = -10$
b. $\frac{x}{-8} = -5$
c. $3x + 8 = -1$

<u>Resolución</u>

a. $2x = -10$

$x = -\frac{10}{2}$ (el 2 pasa dividiendo)

$x = -5$

Comprobación

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$2 \times (-5)$	-10

-10

Comprobación: - 10 = -10

b. $\frac{x}{-8} = -5$

x = - 5 $\times$ (- 8) (el – 8 pasa multiplicando)

x = 40

Comprobación

Miembro izquierdo | Miembro derecho

$\frac{40}{-8}$ | - 5

-5

Comprobación: - 5 = -5

c. 3x + 8 = - 1

3x = - 1 – 8

3x = - 9

x = - 3

Comprobación

Miembro izquierdo | Miembro derecho

$3 \times (-3) + 8$ | - 1

$-9+8$

- 1

Comprobación: - 1 = -1

11. UNIDAD 2

11.1. POTENCIACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

11.1.1.INTRODUCCIÓN

En la unidad anterior se han introducido los números racionales y se han estudiado sus cuatro operaciones fundamentales. En la presente se introducirán las potencias con base racional y exponente natural, los conocimientos que se adquieren en esta unidad preparan y sirven de base para una gran parte de los contenidos que se desarrollarán en los años posteriores.

En la presente unidad se profundiza con el cálculo de los números racionales, se introduce el uso de calculadoras para la determinación de las potencias.

11.1.2.COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

$$\boxed{\text{Números racionales}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Potencias naturales de números racionales}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Notación científica}}$$

11.1.3.HILO CONDUCTOR

Lo esencial de la presente unidad es que los estudiantes desarrollen habilidades en el cálculo de potencias con base racional y exponente natural, y que manejen la notación científica con exponentes positivos.

11.1.4.EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Comprendan el concepto de potencia con exponente natural y desarrollen habilidades en su aplicación al cálculo.
- Comprendan los conceptos de cuadrados, cubos y, en general, de una potencia cualquiera de un número racional.
- Desarrollen habilidades en el cálculo de potencias de números racionales utilizando calculadoras y teniendo en cuenta las reglas del cálculo aproximado.
- Manejen apropiadamente la notación científica, usando solamente potencias de números naturales.

Para el logro de las exigencias planteadas se debe constatar que los estudiantes puedan resolver ejercicios como los que proponemos.

1. Calcular

   a. $(-3)^3$

b. $(-0{,}1)^5$

c. $\left(\frac{2}{7}\right)^2$

d. $\left(-\frac{7}{5}\right)^3$

2. Calcular y simplificar si es posible

a. $\left(-\frac{2}{5}\times\frac{10}{3}\right)^3$

b. $\left(\frac{11}{15}\right)^0$

c. $(-1)^{20}$

3. Decir si las igualdades siguientes son verdaderas o falsas.

a. $\left(\frac{18}{27}\right)^3 = \frac{18^3}{27^3}$ V ☐ F ☐

b. $(7-4)^3 = (4-7)^3$ V ☐ F ☐

c. $(a\times b)^{10} = a^{10}\times b^{10}$ V ☐ F ☐

d. $\left((123)^5\right)^3 = (123)^{15}$ V ☐ F ☐

4. Calcular

   a. $3{,}81 \times 10^5$

   b. $10^8 \div 10^3$

   c. $0{,}000\,000\,1 \times 10^8$

5. Escribir los siguientes números en notación científica. (La notación científica tiene la forma $a \times 10^n$, donde a es un número decimal tal que $1 \leq a < 10$).

   a. 3800

   b. $75{,}8 \times 10^3$

   c. 127×10^7

6. Se puede suponer que la Tierra es una esfera cuyo radio mide $6{,}3 \times 10^6$ m. Calcular el volumen de la Tierra y expresar el resultado en notación científica redondeando a dos cifras decimales.

11.1.5.INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Potencias con exponente natural.
2. Notación científica.

11.1.5.1.1. POTENCIAS CON EXPONENTES NATURALES

Se sugiere tratar esta unidad temática en 2 horas y, debido a lo corto de la unidad, no se han determinado puntos esenciales.

Se debe lograr que los alumnos adquieran el concepto de potencia y lo hagan extensivo al caso donde la base es un número racional cualquiera. Esto constituye la base de conocimientos que deben tener los alumnos para trabajar con potencias de números racionales con exponentes enteros.

Este repaso debe ser en forma activa, mediante la resolución de ejercicios por parte de los alumnos. En él debe aclararse que:

- $a^n = a \times a \times ... \times a \quad (a^0 = 1)$ es una operación: la potenciación.

Es importante que se realicen ejercicios sencillos como el siguiente, donde se aplica el concepto de potencia.

11.1.5.2.Calcular

a. $(-0{,}1)^5$

b. $\left(\frac{2}{7}\right)^2$

c. $\left(-\frac{7}{5}\right)^3$

Puede proponerse a los alumnos el siguiente ejercicio para reafirmar lo anterior.

11.1.5.3.Calcular y simplificar si es posible

$$\left(-\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2$$

Es importante que los alumnos sepan determinar el signo de una potencia en dependencia del signo de la base. Se puede para ello analizar el siguiente ejemplo:

$(-2)^3 = -8; \quad (-2)^4 = 16.$

Resulta conveniente hacer ver a los alumnos que cuando la base de una potencia es un número negativo, debe escribirse entre paréntesis, de lo contrario puede incurrirse en un error, que se evidencia en caso de que el exponente sea par. Por ejemplo, no es lo mismo $(-4)^2$ que -4^2 pues $(-4)^2 = 16$ y $-4^2 = -(4 \times 4) = -16$. En el primer caso el signo "-" es el signo de la base y en el segundo, el signo "-" está antepuesto a la base.

Aunque ya los alumnos conocen el orden en que se realizan las operaciones, resulta conveniente reactivar este aspecto mediante ejercicios sobre operaciones combinadas en las que se incluya la potenciación, tales como:

$$\left(-\frac{2}{5}\times\frac{10}{3}\right)^3 + 5^2 - 12\times\frac{1}{5}.$$

Debe quedar claro que en ejercicios como éstos, primero se calculan las potencias, después las multiplicaciones y divisiones (según el orden en que estén) y por último las adiciones y sustracciones.

11.1.5.4.2 NOTACIÓN CIENTÍFICA O EXPONENCIAL

Para el tratamiento de esta unidad temática se dispone de 2 horas. Lo fundamental es lograr que los alumnos aprendan a escribir en notación científica números en notación decimal y viceversa, y que comprendan además las ventajas de la notación científica para representar números muy grandes.

Como vía metodológica para el tratamiento de este punto esencial, puede informarse a los alumnos, a manera de motivación, que existe una forma abreviada para escribir cantidades muy grandes, que se llama notación científica, la cual es muy utilizada en diversas ramas de la ciencia y la técnica por ejemplo en la física, en la astronomía, etc.

Pueden citarse ejemplos que ilustren lo anterior, tales como:

- La distancia de la Tierra al Sol (149 000 000 km) se expresa en notación científica como $1{,}49 \times 10^8$ km.

A continuación pueden mostrarse en dos columnas, donde aparezcan números expresados en notación decimal y en notación científica, insistiendo a los alumnos que un número está escrito en notación científica cuando se expresa como el producto de un número, comprendido entre 1 y 10, por una potencia de 10.

Recomendamos presentar los siguientes ejercicios:

1. Escribir los siguientes números en notación científica.

a. $3800 =$

b. $681{,}23 \times 10 =$

c. $127 \times 10^{7} =$

2. Realizar las operaciones indicadas con calculadora y escribir los resultados en notación científica redondeando a 3 cifras decimales.

a. $\dfrac{5{,}4 \times 19}{21}$

b. $7{,}81 \times 9{,}2 + 0{,}23 \times 0{,}12$

3. Se puede suponer que la Tierra es una esfera cuyo radio mide $6{,}3 \times 10^{6}$ m. Calcular el volumen de la Tierra y expresar el resultado en notación científica redondeando a dos cifras decimales.

(El volumen de una esfera es $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^{3}$, donde R es el radio y $\pi = 3{,}14$).

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- Ejercicios para calcular potencias con exponente natural.
- Ejercicios sobre operaciones combinadas que incluyan la potenciación con exponente natural.
- Ejercicios para escribir en notación científica números expresados en notación decimal y viceversa.

12. UNIDAD 3

12.1. INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

12.1.1.INTRODUCCIÓN

En esta unidad se introduce el concepto de función, concepto de vital importancia en matemática y que desempeña un papel fundamental en la enseñanza media, por ello constituye una línea directriz y a partir de octavo grado un objeto directo de estudio.

Esta unidad ha sido concebida para que los alumnos comprendan el concepto de función, así como las diferentes formas de representar una función.

El desarrollo de éste concepto en los alumnos comienza desde la edad preescolar cuando el niño se relaciona con correspondencias unívocas a través de la estructura familiar y del medio, así, todo niño tiene una madre, a los objetos se hacen corresponder nombres, a las familias casas, a las casas números, etc.

En el nivel primario aprende que todo número natural tiene exactamente un sucesor, que a cada número fraccionario le corresponde exactamente un punto en la semirrecta numérica, que a cada par de números fraccionarios corresponde un único número fraccionario mediante las operaciones de cálculo, que a determinadas figuras y cuerpos les corresponde un área y un volumen, que a cada punto del plano le corresponde un único punto del mismo mediante un movimiento dado, etc. Además completa tablas como las siguientes:

m	$m+5$

a	$3a$

Un aspecto esencial en este sentido lo constituye la proporcionalidad directa y su representación gráfica que se tratan en el séptimo grado.

En el octavo grado se sistematizan y profundizan estas ideas al aprender que a cada número real le corresponde un único punto en la recta numérica, un único opuesto, un único inverso si es distinto de cero, etc. En este grado el alumno también conoce relaciones de física que representan funciones, tales como:

12.1.1.1. $s = vt$; $m = \rho V$.

Los conocimientos sobre el concepto de función que se imparten en el octavo grado constituyen la base para el estudio de las funciones elementales, que comienza al tratar las funciones lineales en el noveno grado y continúa en el décimo grado.

Es de señalar que en la nueva concepción que presenta la Reforma Curricular de los programas de Matemática, al estudiar las funciones lo esencial es el trabajo con las imágenes y no con las funciones como tales. Además este contenido se dedica a funciones numéricas que se expresan mediante una ecuación que, aunque constituyen un caso particular, son de gran importancia.

Esta unidad se inicia con un repaso para luego ampliar el sistema de coordenadas rectangulares a los cuatro cuadrantes.

Para el mejor desarrollo del trabajo con la unidad, se han hecho las siguientes consideraciones:

- Definir el concepto de función como correspondencia unívoca entre dos conjuntos, pues es más natural y comprensible para el alumno que definirla como conjunto de pares ordenados.
- Incluir una amplia y variada ejercitación, dirigida a los aspectos centrales de la unidad.
- Se ha simplificado el contenido teórico y su tratamiento metodológico.

12.2.

12.2.1.COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

Relaciones funcionales.

↓

El plano cartesiano.

↓

Representación de funciones.

12.2.2.HILO CONDUCTOR

Dentro de esta unidad lo más importante es que los alumnos comprendan el concepto de función como correspondencia y su relación con la dependencia funcional.

12.2.3.

12.2.4.EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos a lograr que los estudiantes:

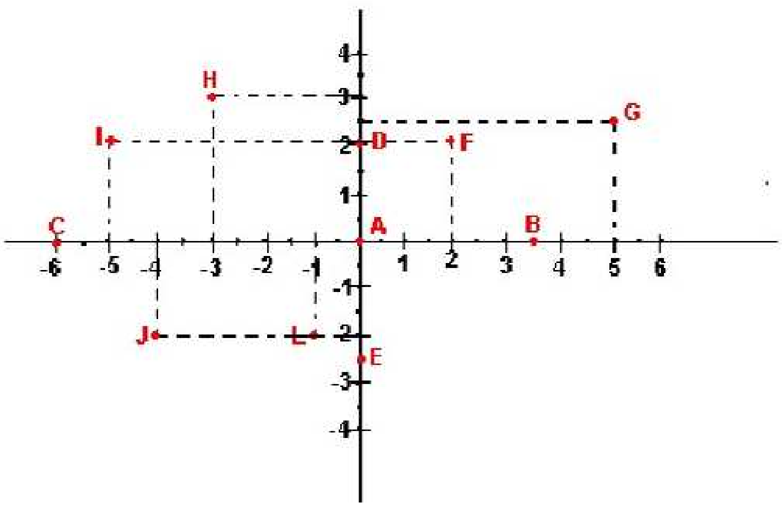
- Representan puntos en un sistema de coordenadas rectangulares e identifiquen las coordenadas de puntos representados en el mismo.
- Comprendan el concepto función como correspondencia unívoca entre dos conjuntos y tengan una representación mental clara del mismo.
- Decidan si una correspondencia dada es o no función.
- Comprendan las distintas formas de representar una función.

Para el logro de las exigencias planteadas, se debe constatar que los estudiantes puedan resolver ejercicios como los que proponemos a continuación.

1. Representar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos A(- 2; 5); B(0; 4); C(5; 0); D(3; 1) ; E(- 6; - 2); F(4 ; - 1); G(0; - 2); H(- 1; 0); I $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$; J (- 0,8; 2); K $\left(-\frac{1}{2};-3.5\right)$.

2. Determinar las coordenadas de los puntos representados en la figura.

12.2.4.1.1.



3. Los vértices de un rectángulo son A(- 2; 3); B(8; 3); C(8; - 3) y D(- 2; - 3).

a. Represéntalo en un sistema de coordenadas rectangulares.
b. Calcula su área.
c. Determina gráficamente las coordenadas del punto I de intersección de sus diagonales.

4. Analiza cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta

a. A cada $x \in \Theta$ se asocia $-3x + 4$
b. A cada $x \in \Theta$ se asocia $|x|$
c. A cada $x \in \Theta$ se asocia sus múltiplos

5. Dada la función f definida por $f(x) = x^2 + 5x$

a. Calcular $f(0)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(0,3)$; $f(-5, 1)$; $f(a)$ y $f(3a)$
b. Probar que $f(a) - f(-a) = 10a$

12.2.4.1.1.1.

6. De un triángulo isósceles se conoce que sus lados son proporcionales a 5; 7 y 5 respectivamente. Si su perímetro es 78 mm. ¿Cuánto miden sus lados?.

7. **Los ángulos interiores de un triángulo son proporcionales a 20, 12 y 4 respectivamente. Si el mayor ángulo mide 100°. ¿Cuánto miden los otros dos?.**

8. Una mezcla está compuesta por las sustancias A, B y C. Si se sabe que éstas son proporcionales a 10, 12 y 15 respectivamente y que hay 3g más de la sustancia B que la de A. ¿Cuál es la masa de la mezcla?.

12.2.5.INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Sistemas de coordenadas rectangulares.
2. Concepto de función.

12.2.5.1.1. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Se sugiere tratar esta unidad temática en 2 horas. Debido a lo corto de la unidad temática no se la ha dividido en puntos esenciales.

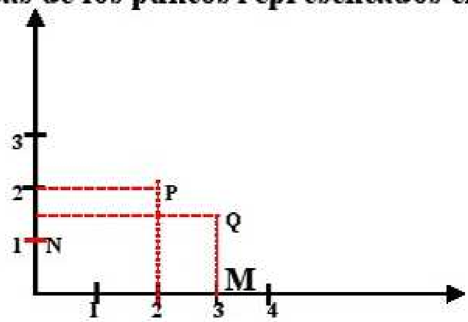
Los profesores deben lograr en estas dos clases que los alumnos puedan representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, así como determinar las coordenadas de puntos representados en el mismo.

Se sugiere que la primera clase se dedique a introducir el sistema de coordenadas rectangulares y se realicen ejercicios como los siguientes, a fin de fijar los procedimientos de trabajo.

1. **Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos:**

   A(2; 3); B $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$; C(0; 0,5) ; D(5; 10); E(-2; 1); F(-3; - 3); G(6; - 2)

2. **Determina las coordenadas de los puntos representados en la figura:**



En la segunda clase se continúa ejercitando, para ello se pueden seleccionar los siguientes ejercicios, u otros creados por el profesor, que sirvan para profundizar los procedimientos de esta temática.

1. **Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación:**

   a. **(3; 0)**

   b. **(0; 3)**

   c. **(0; 0)**

   d. **(2; 8)**

   e. **(- 3; 5)**

   f. **(- 1; - 1)**

   g. **(4; - 6)**

h. $\left(\frac{1}{2}; -5\right)$

i. $\left(-0{,}4; \frac{3}{2}\right)$

j. $\left(0; \sqrt{2}\right)$

k. **(-0,8; 6)**

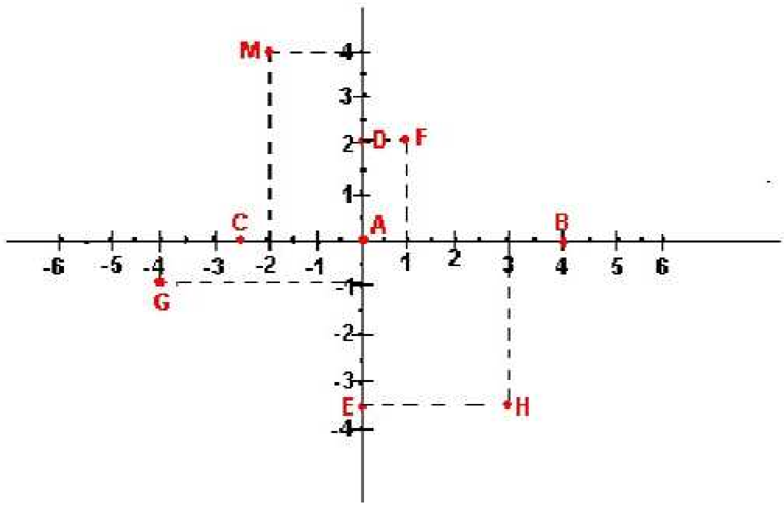
l. **2,1 ; - 3,2)**

m. $\left(-4, \frac{4}{5}\right)$

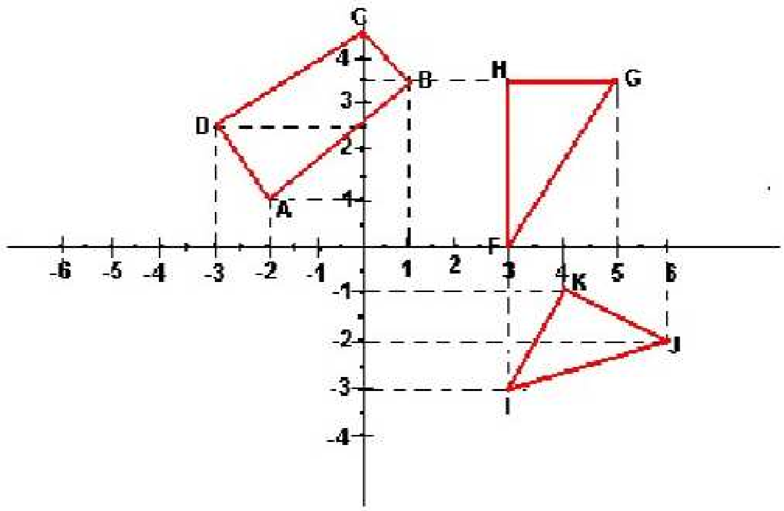
n. **(- 6; 9)**

o. $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

2. **Determina las coordenadas de los puntos que se indican en la figura.**



3. **Determina las coordenadas de los vértices de los polígonos representados en la figura:**



4. **Traza los segmentos que tienen por extremos**
   a. **M(- 6; 4) y N(- 1; - 1)**
   b. **A(2; - 3) y B(2; 4)**
   c. **P(2; - 2) y Q(0; - 2)**
   d. **X(0; 0) y R(3; - 5)**

5. **Traza las rectas que pasan por los puntos A y B si:**
   a. **A(5; 4) y B(- 2; - 3)**
   c. **A(0; 0) y B(2; - 2)**
   c. **A(0; - 3) y B(- 3; 0)**

   En la primera clase se debe comenzar con un repaso activo, donde se actualicen los conceptos: abscisa, ordenada, coordenadas, ejes de coordenadas, origen de coordenadas y sistema de coordenadas, así como los procedimientos para determinar y representar puntos en el primer cuadrante. Para ello se puede proponer a los alumnos ejercicios como los siguientes.

6. **Representa en un plano coordenado el triángulo cuyos vértices son:**

   A(-3; - 2), B(1; 4) y C(- 5; 0)

   Determina mediante la medición qué tipo de triángulo es, considerando la longitud de sus lados.

7. **Representa gráficamente los puntos: M** $\left(4{,}5; \frac{3}{2}\right)$**, N (1; 5), P(- 2; 2) y Q**$\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$**.**

   Determina qué tipo de cuadrilátero es MNPQ midiendo sus lados y sus ángulos.

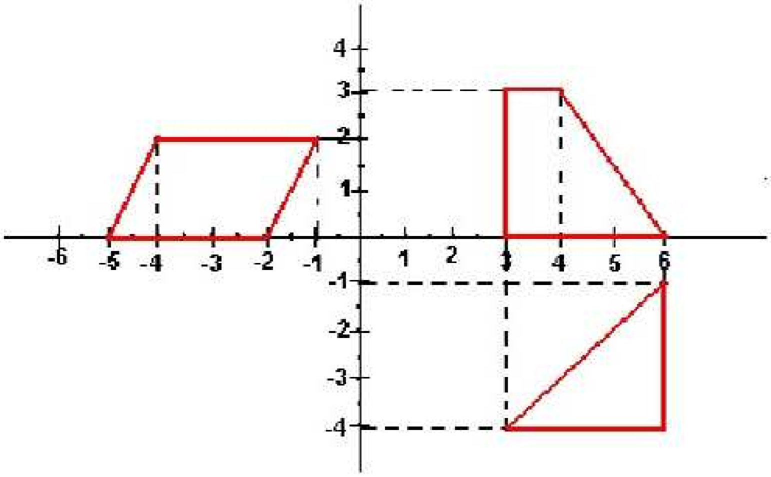
8. **Comprueba gráficamente que los puntos cuyas coordenadas son: (5; - 3), (4; - 10), (- 3; - 9) y (- 2; - 2) están situados en una circunferencia con centro en el punto M(1; - 6).**

9. **Represent a en el plano coordenado los puntos cuyas coordenadas se indican. Determina, además, las coordenadas de P'.**

   a. **P(4; 6) y P' simétrico de P respecto al eje de las abscisas.**
   b. **P(- 2; 3) y P' simétrico de P respecto al origen de coordenadas.**
   c. **P(- 1; - 4) y P' simétrico de P respecto al origen de coordenadas.**

   ¿En qué se diferencian las coordenadas de los puntos P y P' en cada caso?

10 **Calcula el área de los polígonos representados en la figura:**



11 **Los vértices A y C de un cuadrado ABCD tienen por coordenadas (2; 3) y (- 3; -2) respectivamente y sus lados son paralelos a los ejes coordenados.**

a. **Represéntalo gráficamente**

b. **Calcula el área y la longitud de las diagonales del cuadrado.**

En la resolución del ejercicio 1 se actualizan los conceptos y procedimientos antes mencionados y a la vez se motiva con la representación de los puntos E, F y G la introducción del concepto de sistema de coordenadas rectangulares y cuadrantes. Para esto último el alumno debe comprender que dos semirrectas perpendiculares entre sí no son suficientes para representar cualquier punto del plano, por lo que se hace necesario considerar dos rectas numéricas perpendiculares entre sí; además debe comprender de forma natural que los procedimientos para representar y determinar las coordenadas de puntos del primer cuadrante son válidos para cualquier otro cuadrante.

Una vez introducido el concepto de sistema de coordenadas rectangulares se representará los puntos E, F, G y se resolverá el segundo ejercicio.

De estos dos ejercicios y otros que proponga el profesor para fijar los conceptos y procedimientos introducidos, el alumno debe inducir que los puntos de la forma P(x; 0) y Q(0; y); están situados sobre el eje "x" y el eje "y" respectivamente; que el módulo de las coordenadas de un punto representa las distancias de este a los ejes coordenados y que los puntos de igual abscisa (ordenada) están situados en una recta vertical o paralela al eje "y" (horizontal o paralela al eje "x"). El resto del tiempo debe dedicarse a representar puntos y a determinar las coordenadas de un punto representado en un sistema de coordenadas.

12.2.5.2.2. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Se sugiere tratar esta unidad temática en 3 horas. Debido a lo corto de la unidad temática no se la ha dividido en puntos esenciales.

Lo fundamental que debe lograr el profesor en estas clases es que los alumnos comprendan el concepto de función como correspondencia y que sepa determinar valores funcionales mediante la ecuación que define la función, lo que servirá de base para la representación gráfica de las funciones elementales, así como la relación del concepto función con la dependencia funcional.

Para el tratamiento de este contenido se puede seguir la vía inductiva o la vía deductiva.

Se sugiere, por las características de los alumnos y su edad y por la importancia del concepto función, seguir la vía inductiva.

Un primer aspecto esencial en este contenido es el concepto de función como correspondencia.

El concepto de correspondencia es familiar al alumno desde los primeros grados, por lo que es necesario partir de una conversación donde se presenten correspondencias entre objetos familiares al alumno, por ejemplo: cada niño tiene una sola madre, a las casas se asocian números, etc., con esto se destaca el concepto de correspondencia y se plantea que éstas juegan un papel importante en matemática. Luego de esta breve conversación se pueden presentar varios ejemplos de correspondencias unívocas y no unívocas relacionados con situaciones que el alumno conoce de las clases de matemática y de física, por ejemplo:

1 Completa las siguientes tablas

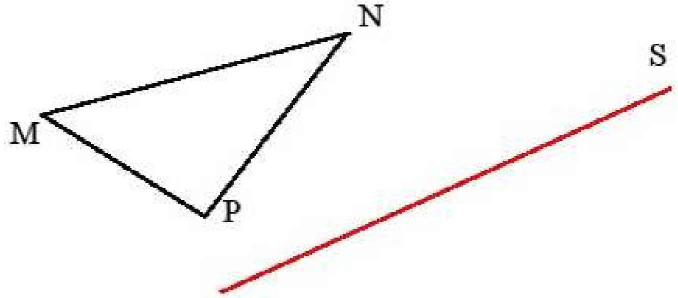
a)

a	$a + 3$
13	
16	
17	

b)

x	$5x$
0,3	
1,2	
0	

2 Determina la imagen del triángulo MNP por una simetría de eje S.



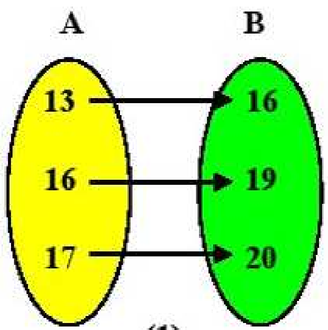
3 Determinar los divisores de cada elemento del conjunto A si:

$A = \{ 1; 2; 4; 5 \}$

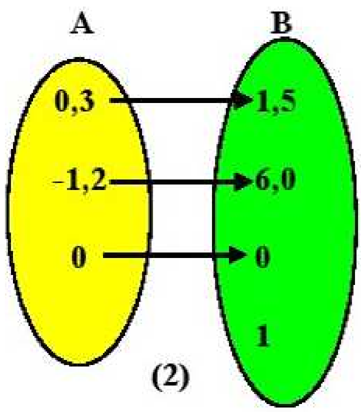
4 ¿Cuál es la masa de una pieza de plomo que tiene por volumen las medidas indicadas en la siguiente tabla? (La densidad del plomo es $\rho = 11{,}358\ \text{g/cm}^3$).

Vol. en cm^3	2,0	2,3	3,1	4,5	5,0	5,3
Masa en g						

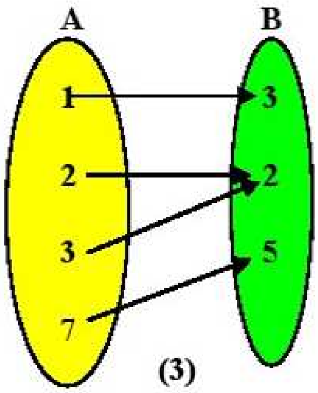
De estos ejemplos u otros similares el alumno debe concluir que en cada caso intervienen dos conjuntos A y B, y una regla o ley que asocia los elementos de A con los de B, esto lo podemos representar utilizando diagramas de la siguiente forma:



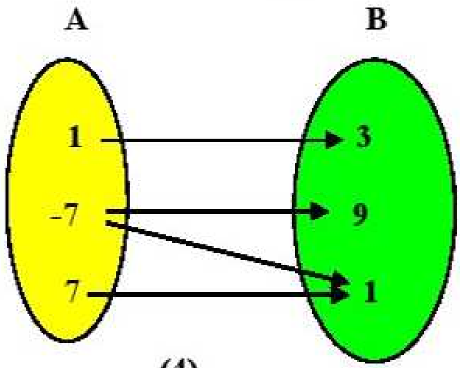
(1)



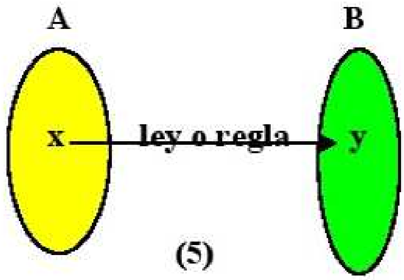
(2)



(3)



(4)



(5)

Para llegar al concepto de función se puede formular la siguiente pregunta: Analizando el ejercicio anterior ¿Es posible hacer corresponder en todos los casos a cada elemento de A un único elemento de B?

De la respuesta a la pregunta se concluirá que hay correspondencias como (1), (2), y (3) en que es posible esto y otras como (4) en que no es posible. Las correspondencias como (1), (2) y (3) caracterizan un nuevo concepto matemático muy importante, el concepto de función.

Una vez dada la definición de función se debe introducir los conceptos de argumento o preimagen, dominio, imagen y conjunto imagen, así como el de función numérica y ejemplificar éstos, así por ejemplo en (1) el dominio es A = {13; 16; 17}. La funciones representadas son numéricas, pues su dominio e imagen son conjuntos numéricos, etc. Luego se deben introducir las notaciones para las funciones y para la imagen de un elemento, es decir f, g y f(x), g(x) respectivamente, lo que permite calcular valores funcionales como los planteados en el siguiente ejemplo:

Dadas las funciones h, g y p tales que $h(x) = 4x$; $g(x) = 3x - 2$ y $p(x) = 5$; $x \in 3$. Determina la imagen de – 2; 3 y 4 para cada una de las funciones dadas.

<u>Resolución.</u>
La función h asigna a cada número su cuádruplo, así:

$$h(-2) = 4 \times (-2) = -8$$
$$h(3) = 4 \times 3 = 12$$
$$h(4) = 4 \times 4 = 16.$$

La función g hace corresponder a cada número su triplo disminuído en 2, por tanto:

$$g(-2) = 3 \times (-2) - 2 = -8$$
$$g(3) = 3 \times 3 - 2 = 7$$
$$g(4) = 3 \times 4 - 2 = 10.$$

La función p asocia a cada número el valor 5, luego:

$$p(-2) = 5$$
$$p(3) = 5$$
$$p(4) = 5.$$

Antes de continuar el tratamiento del contenido deben realizarse algunos ejercicios para fijar el concepto de función y el cálculo con valores funcionales, para ello pueden seleccionarse ejercicios como los siguientes:

1. Determina cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tus respuestas.
   a. A cada número real se asocia su cubo.

b. A cada número natural se hace corresponder sus múltiplos.

c. A cada número real se hace corresponder su módulo.

d. A cada número real se asocia su cuadrado aumentado en 2.

2. Determina cuáles de las correspondencias dadas en las siguientes tablas son funciones y cuáles no. Fundamenta tus respuestas.

a.

Distancia en km	2	3,5	4	10	12,1	13	15,1	29,2
Tiempo en h	0,5	1	1,8	3	3,1	3	3,8	5

b.

X	1	-4	1	3	0	7	2	2
Y	3	8	5	-2	6	4	3	-3

3. Dada la correspondencia que a cada número del conjunto $A = \{-10; -9; -8; \ldots; 1; 2; 3; \ldots; 10\}$, le hace corresponder su módulo.

a. Representa esta correspondencia mediante una tabla.

b. Representa la correspondencia gráficamente

c. Escribe la ecuación que define esta correspondencia y fundamenta por qué es una función.

d. Si denotamos por f esta correspondencia. Di cuáles son los valores de $f(-2)$, $f(-4)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(9)$.

e. ¿Para qué valores de x tenemos que: $f(x) = 4$, $f(x) = 10$, $f(x) = 0$?

4. Si f es una función de Θ en Θ tal que $f(x) = 5x + 2$, prueba que:

$$f(a + 1) + 4f(a) = 25a + 15.$$

Un segundo aspecto esencial en este contenido es el trabajo con las funciones mediante ecuaciones y la introducción de la dependencia funcional.

Para ello se debe partir de considerar algunas funciones dadas por la expresión que define la imagen, es decir: $f(x) = x + 2$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; etc. Entonces se introduce para la imagen de un elemento x la variable y, de donde se obtiene las ecuaciones:

$y = x + 2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Así el alumno tendrá otra forma de representar una función, este es el momento apropiado para introducir la idea de dependencia funcional, así se introduce el nombre de variable independiente para la x, que representa los elementos del dominio y de variable dependiente para la y que representa los elementos del conjunto imagen, de manera que mediante una ecuación queda establecida una dependencia entre las variables x e y, por eso es usual decir que y es una función de x o que y depende de x. También se aprovecharán estos ejemplos para establecer el convenio siguiente:

Cuando una función se representa por una ecuación, su dominio será el subconjunto de Θ, para el cual está definida la expresión donde aparece la variable independiente, así en los tres casos anteriores el dominio será $x \in \Theta$; $x \in \Theta$ con $x \geq 0$ y $x \in \Theta$ con $x \neq 0$ respectivamente.

El tercer aspecto esencial de este contenido es el relacionado con la representación gráfica de funciones. Para ello, como no se conoce la definición de función como un conjunto de pares ordenados, se puede partir de una función dada mediante una tabla, que servirá primero para mostrar que hay funciones cuyo dominio es un conjunto finito y segundo para destacar que el conjunto formado por un elemento x del dominio de una función f y su imagen $f(x)$ en ese orden $(x\ ;\ f(x))$, se puede interpretar como las coordenadas de un punto del plano coordenado, luego esto nos permitirá representar las funciones gráficamente e introducir el nombre de par numérico ordenado para este conjunto.

Se debe entonces representar gráficamente una función de la forma $y = mx$. Es importante que el alumno aprenda a determinar el dominio y la imagen de una función a partir de la gráfica, para esto debe proyectar la gráfica en el eje x y en el eje y respectivamente. Por último se deben mostrar ejemplos de funciones que vengan dadas por su gráfica, estas pueden tomarse de informaciones de la prensa sobre datos económicos, deportivos, etc.

El tratamiento del concepto función debe ser sencillo, los ejemplos no deben ser complejos ni de situaciones poco usuales; no se prestará especial atención al análisis de correspondencias representadas gráficamente para decidir si son o no funciones, esto se hará en noveno grado cuando se profundice en el concepto y se defina como conjunto de pares ordenados, aquí solo se inicia el trabajo con las funciones el mismo que continuará sistematizándose posteriormente.

Se sugiere que en las dos primeras clases se traten los tres aspectos esenciales analizados con algunos ejercicios para fijar estas ideas.

13.
14. UNIDAD 4

14.1. ESTADÍSTICA

14.1.1.INTRODUCCIÓN

Si una persona ve el fútbol por la televisión o escucha las noticias se verá sometido (incluso abrumado) a una gran cantidad de cifras, a las que comúnmente se denomina *estadísticas*. Estas cifras pueden referirse a deportes, al mercado de valores, al desempleo, a la producción industrial o a la esperanza de vida.

Nuestros niños y jóvenes no pueden abstraerse de la realidad de su entorno, y como la misión de la educación es ante todo prepararlos para la vida, debemos permitirles la posibilidad de entender el lenguaje del medio. Por esto la Reforma Curricular ecuatoriana, en su área de matemática, ha considerado conveniente introducir desde los primeros años de la educación básica las nociones necesarias para el manejo del lenguaje estadístico.

La estadística es la parte de la matemática que trata de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisiones más efectiva. En el octavo grado se estudiarán precisamente estos temas.

Los gráficos son utilizados en la mayoría de libros y periódicos como medio para ilustrar algún tipo de información. Es importante introducir a los niños, desde pequeños, en la manera como estos gráficos ayudan a visualizar la información y a sintetizarla.

En esta unidad se abordará, básicamente, el manejo de los términos más elementales como son la media, la mediana, frecuencia absoluta y la frecuencia relativa, así como la organización de datos en diagramas de barras, pasteles y en tablas.

14.1.2.COMPOSICIÓN DE LA UNIDAD

14.1.2.1.1. Elaboración de diagramas

↓

Frecuencias

↓

Media y mediana

14.1.3.HILO CONDUCTOR

Lo esencial en la presente unidad es que los estudiantes desarrollen habilidades en el cálculo de la media, la mediana y la frecuencia, tanto absoluta como relativa, y que puedan presentar e interpretar datos en gráficos.

14.1.4.EXIGENCIA MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial, se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los estudiantes:

- Comprendan el concepto de media y desarrollen habilidades en su cálculo.
- Comprendan el concepto de mediana y desarrollen habilidades en su cálculo.
- Sean capaces de organizar los datos en los gráficos más apropiados para una mejor visualización de éstos.
- Comprendan cuán útil es el recurso del gráfico como medio de resumir información y presentarla de una manera más visual.

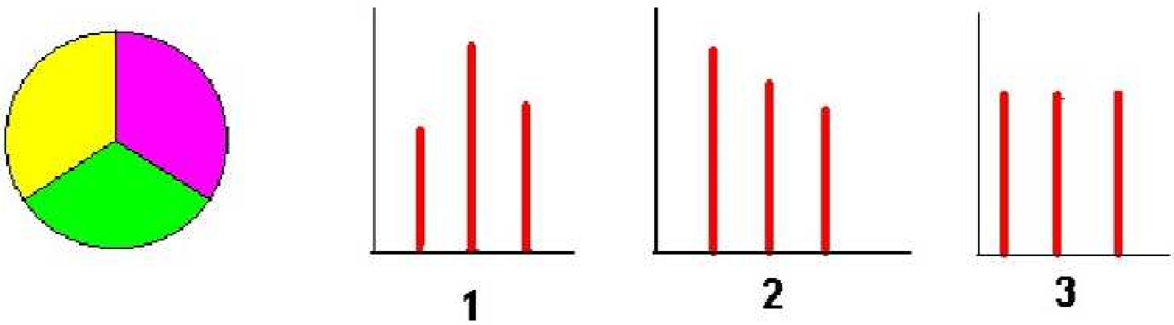
Para el logro de las exigencias planteadas, se debe constatar que los estudiantes puedan resolver ejercicios como los que proponemos:

1. El cuadro siguiente muestra la repartición de los treinta y dos niños de una clase de acuerdo con sus edades.

14.1.4.1.1. dad	11	12	13	14
No. Niños	8	16	4	4

Representar esta repartición: a) mediante un diagrama de barras, b) usando un diagrama circular o de pastel.

2. ¿Por cuál de los diagramas de barras se puede reemplazar el diagrama circular?



3. El cuadro siguiente muestra las notas (sobre 10) obtenidas por 30 alumnos de una clase de octavo año, en la materia de matemáticas.

4	3	7	3	6	6	5	8	8	10
6	5	3	4	4	6	9	2	5	9
2	4	5	6	8	7	10	7	9	7

a. Completar el cuadro:

14.1.4.2 ota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia											
Frecuencia relativa											

b. Representar la repartición de notas en un diagrama de barras.

c. Calcular la nota promedio de la clase y determinar la mediana.

14.1.5.INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Repaso de diagramas
2. Concepto de frecuencia absoluta y relativa
3. Concepto de media y de mediana.

14.1.5.1.1. REPASO DE DIAGRAMAS

Se sugiere tratar esta unidad temática en dos horas, y debido a lo corto de la unidad no se la ha dividido en puntos esenciales.

Se debe lograr que los alumnos reactiven sus conocimientos de la organización de los datos en diagramas. Como vía metodológica se sugiere que la exposición del profesor sea con carácter de ejemplificación debido a que se basa en la introducción de procedimientos de construcción cuando el alumno está organizando su diagrama o gráfico.

Los estudiantes deberán trabajar en grupos y de manera cooperativa. Se pretende encaminar el pensamiento de aquellos a trabajar en grupo con igual responsabilidad para cada miembro. Se debe insistir en encaminar la solución de la actividad con la cooperación y participación de los integrantes del equipo.

Se recomienda que el profesor encamine la actividad combinando la conversación heurística y la discusión. El primer modelo plantea la elaboración de nuevos conocimientos sobre los ya existentes y su ordenamiento en los esquemas existentes: solución por pasos del problema planteado e interpretación de expresiones matemáticas por la vía pregunta y respuesta. El segundo modelo es aplicable en cuanto a que se basa en la búsqueda de métodos de solución. Debe analizar el problema, discutirlo y tomar decisiones del procedimiento. Este último punto es valioso si se pretende crear ambientes de comunidad en el aula de clase.

Para el tratamiento del los gráficos de barras se sugiere que el profesor lleve a la clase dos ejemplos de gráficos de barras para colgarlos en la pared. Mientras se enseña los ejemplos de los gráficos se va explicando de que parte consiste cada uno y las dos maneras de hacer barras: horizontales y verticales.

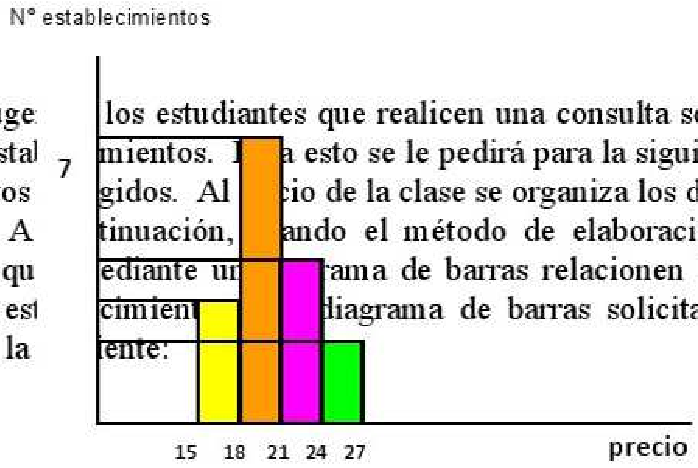
Se puede hacer que un alumno pida a sus compañeros que digan el sabor de su helado favorito y él va recopilando información para luego hacer el gráfico siguiendo la explicación del profesor.

Se pueden hacer los dos tipos de barras con el fin de que los alumnos puedan comparar entre uno y otro y darse cuenta que reflejan la misma información.

Se debe aclarar que los gráficos de barras tienen un título, y un enunciado en cada uno de los ejes que son los items a comparar. Se usa este tipo de gráficos para comparar cantidades.

Se propone a continuación, una actividad grupal donde los estudiantes decidirán qué desean comparar. Desarrollarán la tarea y luego la compartirán con toda la clase. Se propone el siguiente ejemplo:

14.1.5.1.1.1.1.1.1.EJEMPLO



Se puede suge[illegible] los estudiantes que realicen una consulta sobre el precio de la papá en diferentes esta[illegible]mientos. [illegible]a esto se le pedirá para la siguiente clase que traigan como tarea los datos [illegible]gidos. Al [illegible]io de la clase se organiza los datos en grupos en intervalos de precios. A [illegible]tinuación, [illegible]ando el método de elaboración conjunta, se pide a los estudiantes qu[illegible]ediante u[illegible]ama de barras relacionen los precios de la papa y el número de es[illegible]cimien[illegible]diagrama de barras solicitado puede tener una forma semejante a la [illegible]ente:

Precio de la @ en miles de sucres	De 15 a 18	De 18 a 21	De 21 a 24	De 24 a 27
Número de establecimientos	3	7	4	2

Para reactivar el diagrama circular, o de pastel, es conveniente usar el mismo ejemplo de los helados y dirigir, del mismo modo anterior, la elaboración del gráfico. No se debe olvidar que el profesor debe presentar un ejemplo de diagrama circular, con colores muy llamativos, de modo que los estudiantes se familiaricen con él.

Debe hacerse mucho énfasis en los datos que se repiten, para que cuando les hablemos de frecuencia ya estén familiarizados con ella aunque todavía no conozcan su denominación.

La representación gráfica que tiene que ver con las tablas es la que más han usado y es la que menos problemas de visualización les ocasiona a los alumnos, debido a que ya las han manejado, tanto en la proporcionalidad, como en el estudio de funciones.

Sin embargo, se sugiere seguir la misma vía metodológica indicada en los otros dos casos. A continuación se sugiere realizar ejercicios como el siguiente:

En un grupo de 120 personas 24 hablan alemán, 52 inglés y 44 español. Se quiere representar esta repartición en un diagrama circular.

a. Elaborar un cuadro que represente la repartición indicada.

b. Calcular los ángulos que corresponden a los diferentes idiomas en el diagrama circular.

c. Dibujar el diagrama.

14.1.5.2.2. CONCEPTO DE FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA

Para el tratamiento de esta unidad temática se sugieren dos horas de clase divididas en los dos puntos siguientes:

- Frecuencia Absoluta
- Frecuencia Relativa.

14.1.5.2.1.2.1 Frecuencia Absoluta

Para el tratamiento de este punto se sugiere usar 1 hora de clase. Lo fundamental es que los estudiantes puedan, a partir de un conjunto de datos, determinar la frecuencia de cada uno de ellos y expresarla adecuadamente usando cualquiera de los diagramas estudiados anteriormente.

Como vía metodológica se sugiere partir de un ejemplo como el de los helados, y a partir de aquí pedir a los estudiantes que indiquen cuántas veces se repite el de chocolate, el de crema, etc. Se les procede entonces a indicar que ese número es lo que se entiende por frecuencia.

Dado un conjunto de datos, la frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que éste se repite.

Se debe proceder a continuación a elaborar los tres tipos de diagramas revisados en la unidad temática anterior, indicando a los estudiantes que en un diagrama de barras la altura (diagrama vertical), o el largo (diagrama horizontal) de cada barra es proporcional a cada una de las frecuencias. Así mismo, que en un diagrama circular el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia.

14.1.5.2.2.2.2 Frecuencia relativa

Para el tratamiento de este punto se sugiere utilizar una hora. Se debe asegurar el nivel de partida, es decir comprobar que los estudiantes manejan adecuadamente los porcentajes. Lo fundamental es que los estudiantes puedan a partir de un conjunto de datos determinar la frecuencia relativa de cada uno de ellos, y expresarlo en un diagrama de los estudiados anteriormente

Como vía metodológica se sugiere partir de un ejemplo, como el de los sabores de helados, y a partir de aquí pedir a los estudiantes que indiquen cuántas veces se repite el de chocolate, crema, etc. A continuación se les pide que indiquen la razón entre el número de veces que aparece el dato y el número total de datos. Se procede, entonces, a indicarles que esa razón es lo que se entiende por frecuencia relativa. A continuación se plantea la siguiente definición:

Dado un conjunto de datos, la frecuencia relativa de un dato es el cociente entre el número de veces que éste se repite y el número total de datos (incluyendo los que se repiten).

Se sugiere que se realicen ejercicios como:

El cuadro siguiente muestra las notas (sobre 10) obtenidas por 30 alumnos de una clase de octavo año, en la materia de matemáticas.

4	**3**	**7**	**3**	**6**	**6**	**5**	**8**	**8**	**10**
6	**5**	**3**	**4**	**4**	**6**	**9**	**2**	**5**	**9**
2	**4**	**5**	**6**	**8**	**7**	**10**	**7**	**9**	**7**

a. Completar el cuadro:

14.1.5.3 ota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14.1.5.3.1.1.F recuencia											
Frecuencia relativa											

b. Representar la repartición de notas en un diagrama de barras.

14.1.5.4.3. CONCEPTO DE MEDIA Y DE MEDIANA

Estos conceptos deben haberse tratado en años anteriores y en éste se los considera únicamente a manera de revisión.

- La media
- La mediana.

14.1.5.4.1.3.1 La media

Para el tratamiento de este punto se dispondrá de una hora de clase. Lo fundamental es que los estudiantes entiendan lo que es la media y puedan calcularla cuando se les presente un conjunto de datos.

Como vía metodológica se sugiere presentar a los alumnos grupos de datos que representen el costo de, por ejemplo, una libra de arroz en los dos últimos meses, y pedirles a continuación que indiquen cuál sería el promedio del costo de la libra de arroz en esos meses. Se puede también aprovechar las notas en la última prueba de matemáticas y solicitarles que indiquen cuál es el promedio del grado, e indicarles que lo que acaban de determinar es lo que se conoce como la media.

Se procede entonces a presentar la siguiente definición:

La media de un conjunto de datos es la suma de los datos (incluyendo los que se repiten) dividida por el número total de datos.

Los ejercicios, en lo posible, deben estar relacionados con los otros conceptos estudiados, como por ejemplo:

El cuadro siguiente muestra las notas (sobre 10) obtenidas por 30 alumnos de una clase de octavo año, en la materia de matemáticas.

4	**3**	**7**	**3**	**6**	**6**	**5**	**8**	**8**	**10**
6	**5**	**3**	**4**	**4**	**6**	**9**	**2**	**5**	**9**
2	**4**	**5**	**6**	**8**	**7**	**10**	**7**	**9**	**7**

a. Completar el cuadro:

14.1.5.5 ota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia											
Frecuencia relativa											

b. Representar la repartición de notas en un diagrama de barras.

14.1.5.5.1.3. 2 La mediana

Para el tratamiento de este punto se dispone de 1 hora. Es importante que el alumno distinga claramente cual es la diferencia entre media y mediana. La mediana es una medida de tendencia central que separa los datos en dos mitades, la mitad de los elementos se encuentran por arriba de este valor y la otra mitad por debajo de él.

Así por ejemplo si tenemos los datos ordenados:

2 5 8 14 27 31 42

la mediana es **14.** Si el número de datos es impar, la mediana es el promedio de los dos datos centrales.

Dado un conjunto de datos la mediana es el dato que permite dividir al conjunto en dos partes del mismo número.

Como vía metodológica para reactivar el concepto de mediana se sugiere realizar ejercicios como el siguiente, en el cual se pude comparar la diferencia entre la media y la mediana:

El siguiente cuadro muestra la distribución de los estudiantes de una clase con respecto a la nota obtenida en la materia de matemáticas.

N° de alumnos	Nota
1	6
3	7
5	8
5	9
1	10
1	11
1	12
1	14
2	15
3	16
2	17

3	18
2	19

Calcular la nota promedio (media) y la nota mediana (la nota que divide a los alumnos en dos grupos iguales)

Resolución

Es importante notar que se trata de una media ponderada, es decir, que cada nota debe contarse tantas veces como ésta se repite:

$$media = \frac{1\times 6 + 3\times 7 + \ldots + 3\times 18 + 2\times 19}{1 + 3 + \ldots + 3 + 2} = \frac{363}{30} = 12{,}10$$

Para el calculo de la mediana observamos en el cuadro que la nota correspondiente al alumno que se encuentra en la posición décimo quinta es10 y que la correspondiente al alumno en la posición décimo sexta es 11. La nota mediana es entonces:

$$mediana = \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$$

Se debe hacer notar al estudiante que no se está pidiendo la mediana de los datos que se encuentran en la columna "nota", sino la que divide a los treinta estudiantes en dos grupos de igual número, el uno formado por los estudiantes que tienen una calificación inferior a la "nota mediana", y el otro una calificación superior.

15. UNIDAD 5

15.1. GEOMETRIA PLANA

15.1.1.INTRODUCCIÓN

Esta unidad inicia con la sistematización de los conocimientos sobre los movimientos del plano y el trabajo con los teoremas fundamentalmente en lo que tiene que ver con las relaciones entre pares de ángulos y los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

Es por eso que esta unidad comienza con una presentación de los conceptos de los contenidos fundamentales de la geometría y, sobre la base de los conocimientos de los alumnos y las habilidades y hábitos desarrollados, se estructura el estudio sistemático de dos temas fundamentales como son "la congruencia de triángulos" y "los cuadriláteros convexos y sus propiedades".

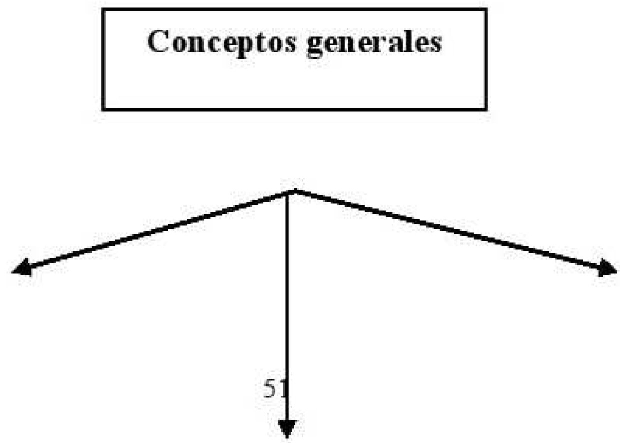
La nueva concepción de la asignatura matemáticas en la Reforma Curricular ha introducido cambios importantes en el estudio de la Geometría Plana.

Se aprecian los dos temas a los que hicimos referencia, que constituyen el nuevo contenido de esta unidad de octavo año, que en los programas vigentes anteriormente se incluían en el séptimo año.

Estos cambios favorecen el estudio sistemático de la Geometría Plana, ya que de esta forma aparece contemplada en los programas de los tres años del ciclo básico, lo que posibilita la realización de un trabajo más profundo en la dirección del desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos y de sus capacidades para demostrar proposiciones matemáticas y darles aplicación en la resolución de problemas intra y extramatemáticos.

Los contenidos de esta unidad constituyen una base esencial sobre la cual se desarrolla el curso completo de la Geometría Plana y de la Geometría del Espacio en los niveles de secundaria básica y de preuniversitario, de aquí la importancia de lograr en este año los objetivos que plantea el programa en relación con esta unidad.

15.1.2.ESTRUCTURA DE LA UNIDAD



Congruencia de triángulos

Propiedades de algunas figuras geométricas

1.1.1.1.Paralel

15.1.3.HILO CONDUCTOR

Lo esencial de esta unidad es que los alumnos dominen los movimientos del plano, los teoremas de congruencia de triángulos y las propiedades de los cuadriláteros de manera que puedan aplicarlos, conjuntamente con otros contenidos estudiados en los años anteriores, en la resolución de problemas geométricos de cálculo, de construcción y de demostraciones sencillas donde se incluyen situaciones de la vida práctica.

15.1.4.EXIGENCIAS MÍNIMAS DE LA UNIDAD

Para desarrollar lo que hemos definido como esencial se deben encaminar todos los esfuerzos hacia lograr que los alumnos:

- Dominen los movimientos en el plano y los teoremas de congruencia de triángulos de manera que puedan aplicarlos en la resolución de problemas de cálculo de construcción y demostración intra y extramatemáticos.
- Conozcan las clasificaciones de los triángulos y los cuadriláteros, reconozcan sus elementos y dominen sus propiedades fundamentales de manera que puedan operar con ellas.
- Conozcan y memoricen las fórmulas para el cálculo del área de triángulos y de cuadriláteros y las apliquen con seguridad a la resolución de problemas geométricos de cálculo.
- Desarrollen habilidades para fundamentar adecuadamente sus razonamientos y sean capaces de comprender y realizar demostraciones sencillas.
- Consoliden sus habilidades en el uso de instrumentos de trabajo geométrico y sean capaces de realizar construcciones geométricas, propias del nivel, con seguridad y limpieza.

El nivel mínimo que deben alcanzar los alumnos para dar cumplimiento a estas exigencias se caracteriza mediante ejercicios como los que aparecen a continuación:

1. El triángulo $A'B'C'$ es imagen del triángulo ABC por una reflexión de eje $l(l \;||\; \overline{AB}$) que no interseca al triángulo.
Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y justifique sus respuestas.

a. Δ ABC $\neq$ Δ $A'B'C'$
b. $\overline{AB}$ || $\overline{A'B'}$
c. $\overline{BC} = \overline{B'C'}$
d. $P_{\Delta \mathrm{ABC}} = P_{\Delta ABC}$
(P = perímetro)

e. $\angle$ ABC = $\angle$ $A'B'C'$

2. Diga si es posible construir un triángulo rectángulo cuyos lados sean congruentes, justifique sus respuestas
3. En la figura 1, $\angle$ ABD = 35°, $\angle$ BAD = 50°, $\overline{BD} = \overline{DC}$, calcular $\angle$ BCD.

Fig.1

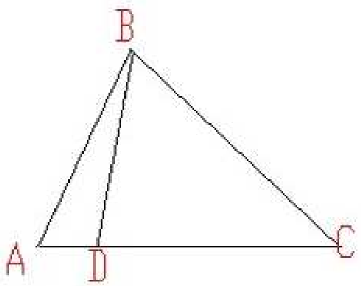


Fig.2

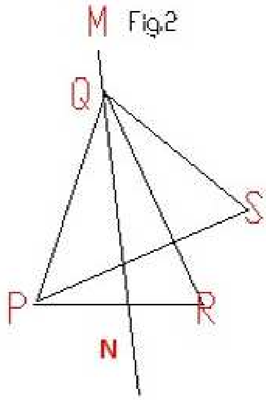


Fig.3

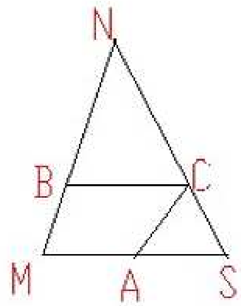
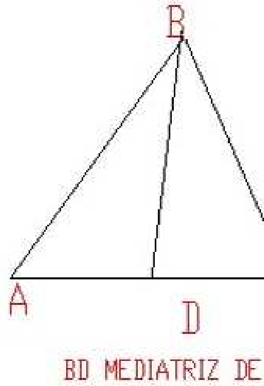


Fig.4



4. En la figura 2, MN es eje de simetría del Δ PQR, $\overline{QS} = \overline{QR}$ y $\angle$ QPS = 40°. Diga qué tipo de triángulo es PQS según sus lados y calcule $\angle$ PSQ y $\angle$ PQS.

5. En la figura 3, $\overline{BC} \parallel \overline{MS}$, $\angle$ NBC = $\angle$ CAS y C punto medio de $\overline{NS}$. Demuestre que: Δ BNC = Δ ACS y que $\overline{BC} = \overline{AS}$.

6. En la figura 4, BD es mediatriz de $\overline{AC}$. Determinar, mediante la construcción necesaria un punto que equidiste de A y C y que también equidiste de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Justifique su construcción.

7. Al trazar una diagonal de un paralelogramo se forman dos triángulos congruentes. Justifique por qué ésta es una proposición verdadera.

8. En la figura 5, ABCD es un rectángulo y $\overline{BE}$ es prolongación del lado BC de este rectángulo. Calcule $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ si se conoce que $\angle 1$ es igual a 50°.

Fig.5

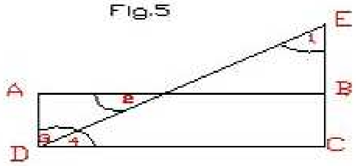


Fig.6

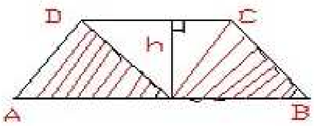
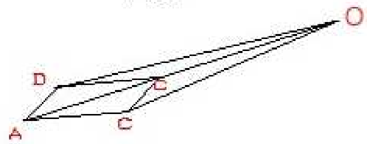


Fig.7



9. En la figura 6, ABCD es un trapecio. $\overline{AB}$ = 8,5 cm, $\overline{DC}$ = 6,0 cm y la altura h mide 5,0 cm. Calcular el área de la parte sombreada.

10. En la figura 7, ABCD es un rombo y su diagonal AC se prolongó hasta el punto D. Demuestre que Δ DOB es isósceles.

15.1.5.INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En la presente unidad se pueden distinguir las siguientes unidades temáticas:

1. Conceptos generales.
2. Congruencia de triángulos.
3. Propiedades de algunas figuras geométricas.
4. Paralelogramos. Propiedades y construcción.

15.1.5.1.1. CONCEPTOS GENERALES

Para el desarrollo de esta unidad temática se sugiere emplear 10 horas; y distinguir en ella cuatro puntos esenciales.

- La reflexión (simetría axial) y sus propiedades. Propiedades de los movimientos.
- Relaciones entre ángulos.
- Introducción de triángulos.
- Ejercicios complementarios.

15.1.5.1.1.1.1 La traslación y la reflexión (simetría axial) y sus propiedades. Propiedades de los movimientos.

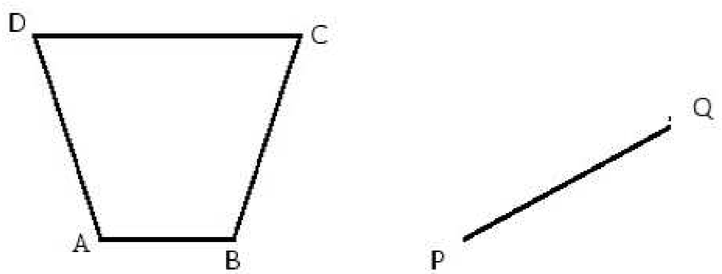
15.1.5.1.2.

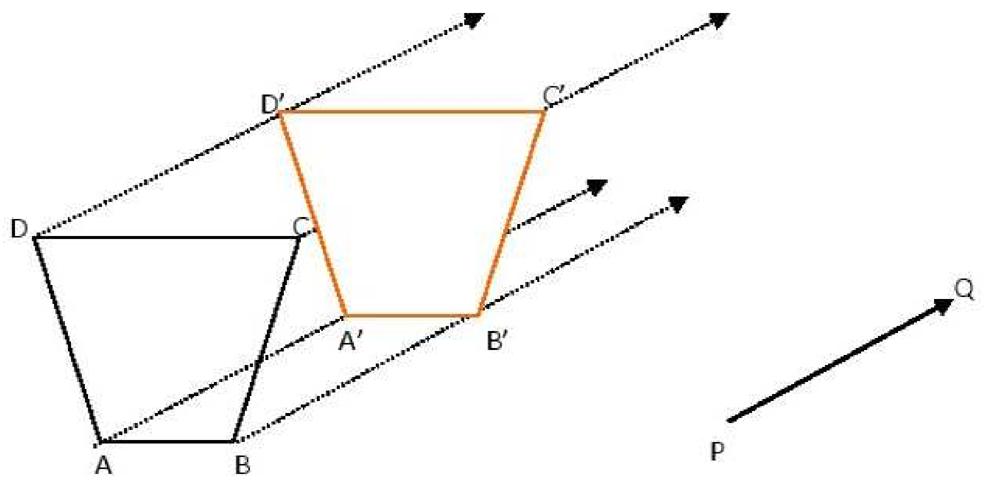
Para el tratamiento de este punto se sugiere emplear 4 horas. El método que proponemos seguir al dar tratamiento a la unidad temática es el "aprendizaje activo", con esto queremos decir que el aprendizaje debe desarrollarse con la participación activa de los alumnos en la que la ejercitación desempeña un papel fundamental.

La teoría correspondiente a este punto se debe tratar en el siguiente orden: primero las definiciones de los movimientos (la traslación y la reflexión o simetría axial); segundo sus propiedades; y en tercer lugar los procedimientos para la obtención de imágenes de figuras geométricas mediante la aplicación de los movimientos.

Para el tratamiento de la traslación se debe empezar por realizar ejemplos de traslación de algunas figuras planas, para a continuación presentar la definición, sugerimos desarrollar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:
Aplicar la traslación que **transforma P en Q** al cuadrilátero ABCD que aparece en la siguiente figura.





Resolución:

Para construir la imagen del cuadrilátero ABCD por la traslación que **transforma P en Q** es necesario obtener la imagen de cada uno de sus vértices. Procederemos de la siguiente forma:

1. Trazamos rayos con la misma dirección de $\overline{PQ}$ que tengan su origen en cada uno de los vértices.
2. Tomamos sobre los rayos a partir de cada vértice, una longitud igual a la de $\overline{PQ}$ y así obtenemos las imágenes de los vértices que denotaremos por A', B', C' y D' respectivamente.

3. Unimos los puntos A', B', C' y D' mediante segmentos y de esta forma queda construida la imagen del cuadrilátero ABCD.

La **traslación que transforma A en B** asigna a cada punto M del plano el punto M' tal que ABM'M es un paralelogramo.

Las propiedades se presentarán utilizando la vía inductiva, es decir ir descubriéndolas junto con los estudiantes. Inmediatamente se deben realizar ejercicios como los siguientes:

1. Dibujar un triángulo y construir su imagen por una traslación de 2 cm de longitud.

2. Trazar un rayo MN y construir su imagen por una traslación de 25 mm de longitud.

3. El triángulo $A'B'C'$ es la imagen del triángulo escaleno ABC por una traslación que transforma M en N ($A'B'C'$ son las imágenes de los puntos A, B y C respectivamente). Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamente sus respuestas.
   a. $\angle$ ABC = $\angle$ $A'B'C'$
   b. $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

c. $\overline{AB} \parallel \overline{C'B'}$

d. $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta A'B'C'}$ (P= perímetro)

e. $\overline{CB} \parallel \overline{C'B'}$

f. La recta AC y la recta $A'C'$ se intersecan en un punto

g. La imagen de un punto de la recta AC está sobre la recta $A'C'$

h. Δ ABC $\equiv$ Δ $A'B'C'$

i. $\angle$ ACB = $\angle$ $A'B'C'$.

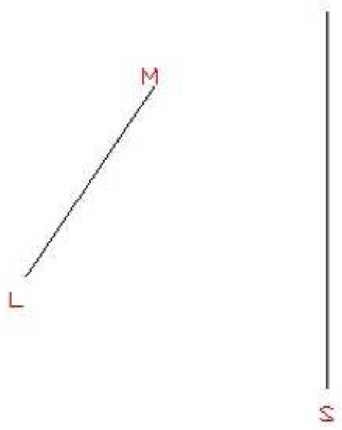
Se debe hacer algunas aclaraciones sobre las soluciones de los incisos del ejercicio 3:

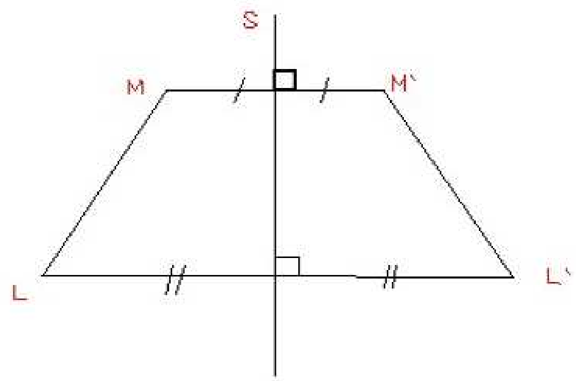
- En inciso c) debe señalarse que AB no es paralela a C'B' ya que AB no es necesariamente paralela a CB y CB || C'B' (propiedad de la traslación).
- En el inciso i) debe aclararse que $\angle$ ACB = $\angle$ A'B'C' solo en el caso en que $\angle$ ACB = $\angle$ ABC.
- El inciso d) puede fundamentarse teniendo en cuenta que mediante la traslación no varía la longitud de los lados del triángulo (segmentos) y por tanto no varía el perímetro

Para el tratamiento de la simetría axial se sugiere presentar primero ejemplos de simetría axial como el siguiente:

EJEMPLO:

Construir la imagen de $\overline{LM}$ por la reflexión de eje S (simetría axial de eje S) dadas en la siguiente figura.





Resolución:

Para construir la imagen de $\overline{LM}$ por esta reflexión basta con determinar las imágenes de sus extremos (L' y M'). Procedemos de la siguiente forma:

1. Trazamos la recta perpendicular al eje S que pasa por L (denotaremos por L_S el punto de intersección de esta recta con el eje S).
2. Tomamos sobre la recta trazada a partir de L_S y del lado opuesto al que se encuentra el punto L con respecto al eje S, una longitud igual a la del segmento LL_S y así queda determinado el punto L' (figura (b)).

Para obtener la imagen del punto M se procede de la misma forma.
A continuación se presentará la siguiente definición:

> **La reflexión del eje S es una transformación del plano, mediante la cual cada punto P del plano se transforma en un punto P', tal que PP' es perpendicular a S y, además, P y P'equidistan de S. Se dice entonces que los puntos P y P' son** *simétricos respecto a S*

A continuación se deben tratar las propiedades, siguiendo siempre la vía inductiva.

Sugerimos presentar y desarrollar ejercicios como los siguientes:

1. Dibujar un cuadrilátero y construir su imagen por una reflexión.

2. Construir la imagen de una circunferencia de 1,5 cm de radio por una reflexión con respecto a una recta que no la interseca.

3. Decir cuál es la imagen por una reflexión de eje P:
   a. de una recta perpendicular al eje P.
   b. del eje P.
   c. de una recta que interseca al eje P en un punto cualquiera.
   d. de un segmento paralelo al eje P.

4. ¿Cuál es la relación de posición entre una recta y su imagen por una reflexión?

5. El cuadrilátero A'B'C'D' es la imagen de un cuadrilátero ABCD por una reflexión de eje m (m $\parallel \overline{BC}$) que no interseca a este cuadrilátero. Diga si son verdaderas las siguientes proposiciones y justifique sus respuestas.
   a. $\angle ABC \neq \angle A'B'C'$
   b. $\overline{AC} = \overline{A'C'}$
   c. $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$
   d. $\overline{BD} \neq \overline{B'D'}$
   e. El cuadrilátero ABCD es igual al cuadrilátero A'B'C'D'.

Se deben hacer algunas aclaraciones sobre las soluciones de los incisos c), d), y e) del ejercicio 3:

- El inciso c). Una recta que interseca al eje P en el mismo punto que la recta original y además forma con él un ángulo de la misma amplitud que el que forma la original.

- El inciso d). Un segmento no paralelo al eje P que tiene su misma longitud.

El sistema de ejercicios propuesto está dirigido a la asimilación consciente y activa de la teoría que posteriormente se aplicará con frecuencia.

Es importante destacar que uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en el octavo año es que los alumnos comprendan la utilidad del "método de las transformaciones geométricas" para resolver problemas y, que sean capaces de aplicarlo en aquellos casos en que constituye la vía más fácil para darles solución. Para lograr esto es necesario que los alumnos puedan operar con los movimientos y sus propiedades.

Para el tratamiento de los movimientos se debe precisar las siguientes observaciones:

Para todo movimiento se cumple:

1. La imagen de una recta es siempre una recta y la de una semirrecta es siempre una semirrecta.
2. Si un punto A está situado en una recta a, entonces el punto imagen A' esta situado en la recta imagen a'.
3. La imagen de un segmento es un segmento que tiene la misma longitud que el segmento original.
4. La imagen de un ángulo es un ángulo que tiene la misma amplitud que el ángulo original.

Los movimientos del plano son las transformaciones del plano que conservan las distancias entre los puntos

A continuación se sugieren realizar los siguientes ejercicios:

1. ¿Qué se entiende por figuras axialmente simétricas?
2. ¿Mediante qué movimiento la imagen de una recta por simetría axial, se transforma en la recta original?
3. ¿Por qué podemos afirmar que la composición de dos movimientos cualesquiera es un movimiento?.

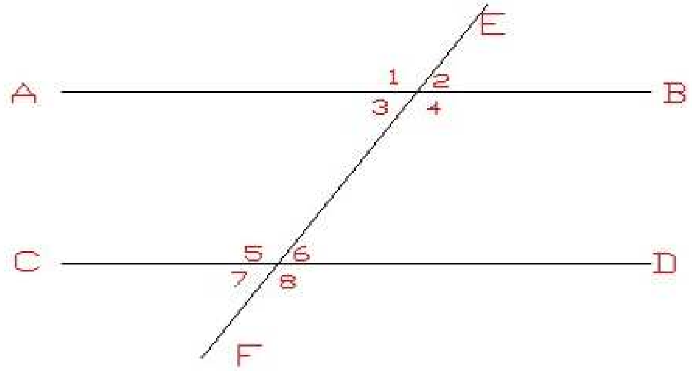
15.1.5.1.3.1. 2 Relaciones entre ángulos.

Se sugiere tratar este punto en 2 horas. Lo fundamental en este punto es que los alumnos sean capaces de reconocer los distintos pares de ángulos que son objeto de estudio y recuerden las relaciones que existen entre sus amplitudes, de manera que puedan aplicarlas en la resolución de ejercicios.

Proponemos que se inicie su tratamiento con un ejercicio similar al ejemplo siguiente:

EJEMPLO:

1. En la figura siguiente: Si AB || CD. Diga qué pares de ángulos son:
   a. Correspondientes
   b. Conjugados
   c. Alternos
   d. Adyacentes
   e. Opuestos por el vértice



2. En la figura siguiente. Si RS no es paralelo a PQ. Diga que pares de ángulos son:
   a. Correspondientes
   b. Opuestos por el vértice
   c. Alternos
   d. Adyacentes
   e. Conjugados

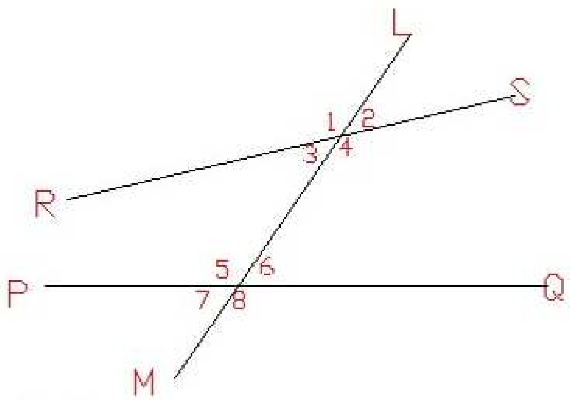


Fig. 2

3. Nombrar las pares de ángulos que son congruentes y los que cumplen que la suma de sus amplitudes es 180° en:
   a. la figura (1),
   b. la figura (2).

Resolución:

1.

a. Angulos correspondientes: 1 y 5; 3 y 7; 2 y 6; 4 y 8.
b. Angulos conjugados: 1 y 7; 3 y 5; 2 y 8; 4 y 6
c. Angulos alternos: 1 y 8; 2 y 7; 3 y 6; 4 y 5.
d. Angulos adyacentes: 1 y 2; 2 y 4; 4 y 3; 3 y 1; 5 y 6; 6 y 8; 8 y 7; 7 y 5.
e. Angulos opuestos por el vértice: 1 y 4; 2 y 3; 5 y 8; 6 y 7.

2. La respuesta es igual a la del ejercicio 1.

3.

a. En la figura (1) los ángulos congruentes son:
Los correspondientes: 1 y 5; 3 y 7; 2 y 6; 4 y 8.
Los alternos: 1 y 8; 2 y 7; 3 y 6; 4 y 5.
Los opuestos por el vértice: 1 y 4; 2 y 3; 5 y 8; 6 y 7.
Los ángulos cuyas amplitudes suman 180° son:
Los conjugados : 1 y 7; 3 y 5; 2 y 8; 4 y 6.
Los adyacentes: 1 y 2; 2 y 4; 4 y 3; 3 y 1; 5 y 6; 6 y 8; 8 y 7; 7 y 5

b. En el caso de la figura (2) como RS no es paralelo a PQ, son congruentes sólo los ángulos opuestos por el vértice y los ángulos cuyas amplitudes suman 180° solo son los adyacentes.

Este ejemplo debe ser resuelto usando el método de elaboración conjunta. Este es un ejercicio de reconocimiento de los diferentes pares de ángulos y en el proceso de Resolución el profesor puede detectar las deficiencias que presentan los alumnos en este sentido.

El profesor debe preguntar a los alumnos las definiciones de los diferentes pares de ángulos para que posteriormente puedan reconocerlos en distintas figuras.

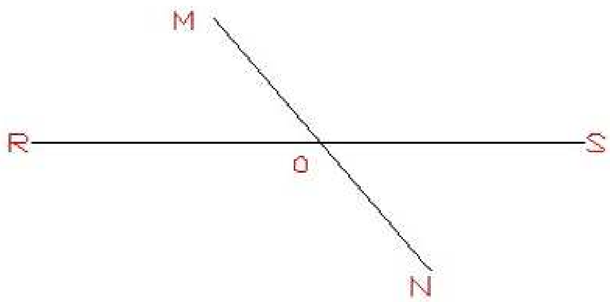
El ejercicio 3 posibilita el repaso de las relaciones entre los pares de ángulos, que finalmente pueden resumirse así:

La suma de las amplitudes de los ángulos adyacentes es 180°.
Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

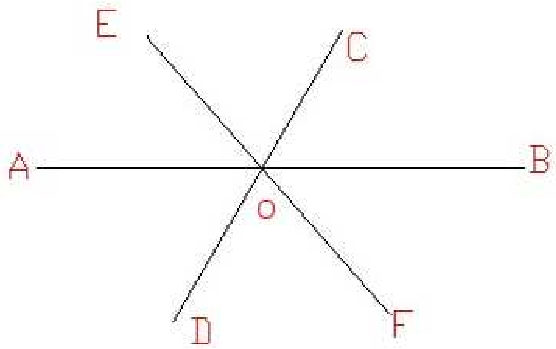
Si una recta es cortada por varias rectas paralelas entonces se forman:
a) Pares de ángulos correspondientes y pares de ángulos alternos congruentes.
b) Pares de ángulos conjugados cuyas amplitudes suman 180°

A continuación se deben resolver ejercicios como los que proponemos:

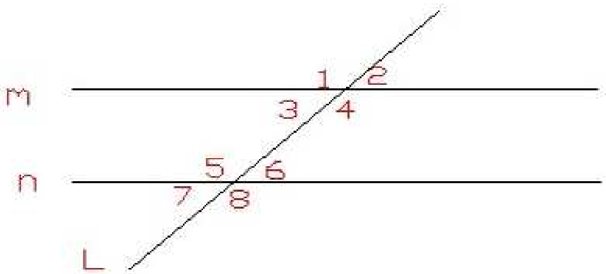
1. En la figura siguiente: $\angle$ ROM = 70°. Hallar $\angle$ MOS, $\angle$ SON y $\angle$ RON



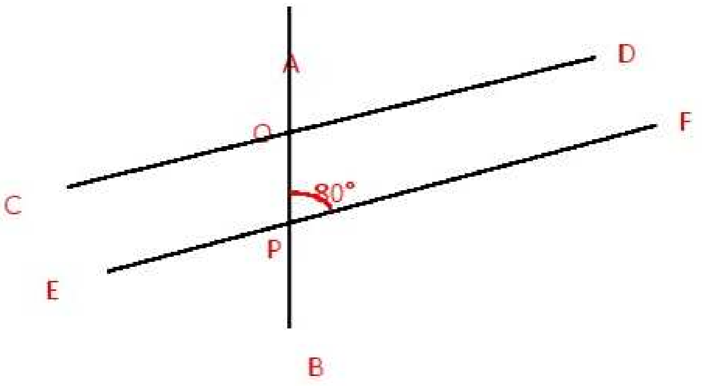
2. En la figura siguiente ∠ EOA = 55° y ∠ COB = 65°. Halle ∠ EOC, ∠ BOF, ∠ FOD y ∠ DOA.



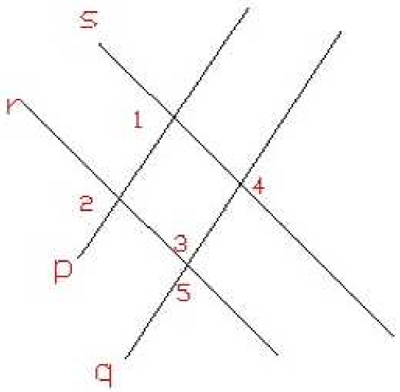
3. En la siguiente figura m | | n y ∠ 1 = 130°. Halle ∠2, ∠3, ∠ 4, ∠ 5, ∠ 6, ∠ 7 y ∠ 8.



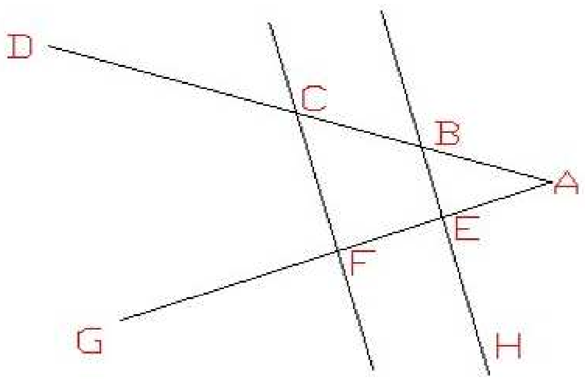
4. En la siguiente figura CD || EF. Hallar ∠AOD, ∠ AOC, ∠ EPB, ∠ COP, ∠ DOP, ∠ APE, ∠ FPB.



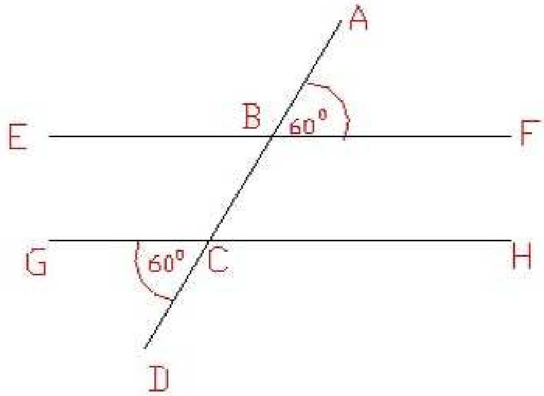
5. En la siguiente figura p || q, r || s y ∠1 = 95°. Calcular : ∠ 2, ∠ 3, ∠ 4 y ∠ 5.



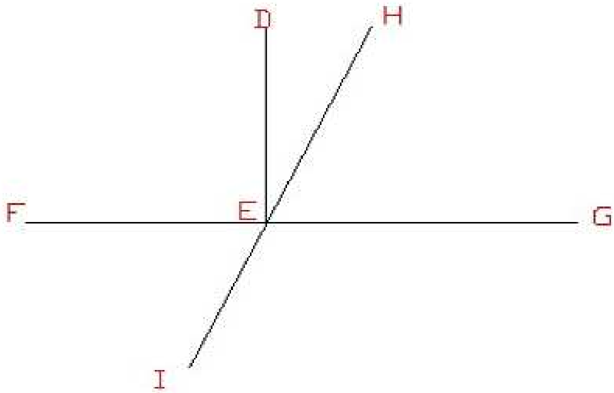
6. En la siguiente figura BH || CF, ∠ DCF = 148° y ∠ CFG = 98°. Calcule ∠ABE y ∠ HEF.



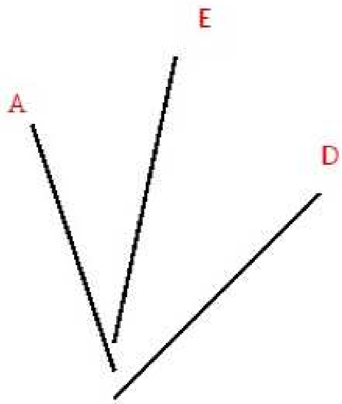
7. En la siguiente figura ∠ ABF = ∠ GCD = 60°. ¿Qué podemos afirmar sobre la posición relativa de las rectas EF y GH?



8. En la siguiente figura $\overline{DE} \perp \overline{FG}$ y $\angle$ FEH = 120°. Halle $\angle$ FED, $\angle$ DEH, $\angle$ HEG, $\angle$ FEI y $\angle$ GEI.

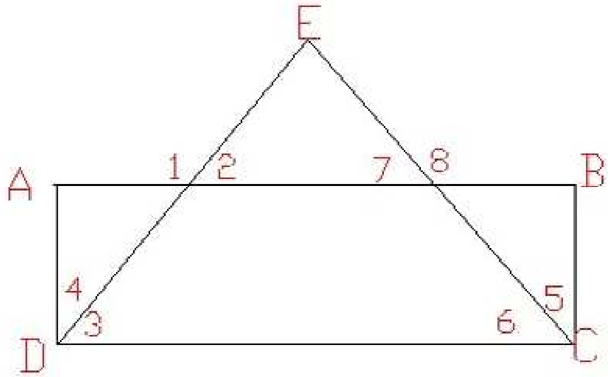


9. En la siguiente figura, $\overline{OE}$ es bisectriz del $\angle$ AOD y $\angle$ AOE = 35°. Calcule: $\angle$ 1, $\angle$ 2 y $\angle$ 3.



15.1.6.

10. En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo y $\angle 2 = \angle 7 = 50°$. Halle $\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 4$,
$\angle 5$ y $\angle 6$.



Los ejercicios 7, 8, 9 y 10 deben ser resueltos obligatoriamente por los alumnos, en el aula o como tarea ya que en el caso del ejercicio 8 se aplica el recíproco de una de las propiedades enunciadas anteriormente. En los otros casos se vinculan los contenidos de este punto con otros conceptos y procedimientos como son la resolución de ecuaciones y los conceptos de perpendicularidad y bisectriz de un ángulo.

El ejercicio 11, aunque tiene una mayor complejidad, puede ser resuelto por todos los alumnos. Se debe hacer hincapié en que los alumnos presenten las soluciones de los ejercicios en forma limpia y organizada.

No es indispensable que en la solución escrita de estos ejercicios aparezca una justificación detallada de cada uno de los pasos, aunque el profesor puede pedir a cualquier alumno que justifique oralmente su trabajo.

En la medida que se vaya desarrollando el trabajo, en esta unidad se irán elevando las exigencias respecto a la justificación escrita en forma breve de los pasos esenciales en la solución de los ejercicios.

15.1.6.1.1.1.3 Introducción de triángulos.

Se sugiere emplear en el desarrollo de este punto 6 horas, y es conveniente abordarlo tratando los temas siguientes:

I. Ángulos interiores y exteriores de un triángulo, reconocimiento en figuras y enunciado de los teoremas.

II. Enunciado de los teoremas sobre las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Desigualdad triangular.

III. Clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos.

A continuación se presenta un resumen de las relaciones más importantes que debe desarrollar el profesor:

En todo triángulo se cumple que:

a) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 180°
b) La amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.

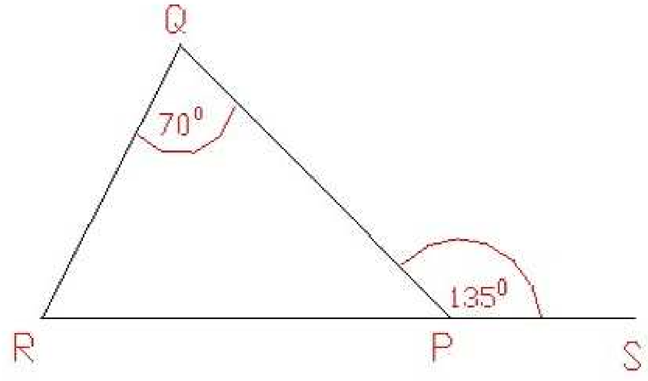
En todo triángulo se cumple:

a) A lados congruentes se oponen ángulos congruentes.
b) Al mayor de dos lados se opone el mayor de los dos ángulos opuestos a esos lados.
c) La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercero (Desigualdad Triangular).

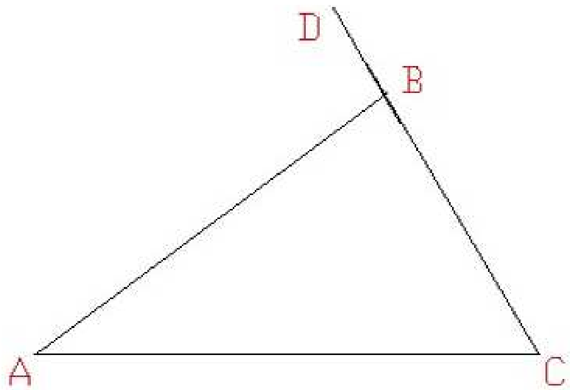
Esta presentación se puede desarrollar dirigiendo preguntas a los alumnos y apoyándose en ilustraciones. La activación completa de los conocimientos y las habilidades puede lograrse mediante la resolución de ejercicios como los siguientes:

1. En un triángulo ABC, se tiene que $\angle$ ABC = 25° y $\angle$ ACB = 80°. Halle la amplitud del tercer ángulo.

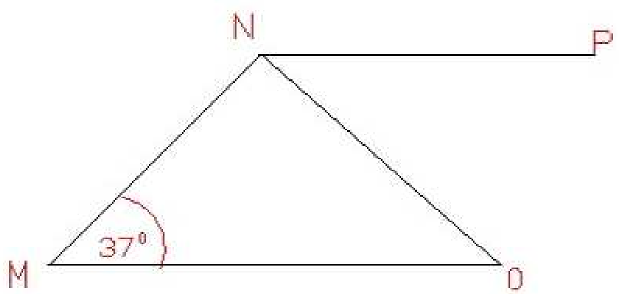
2. En la siguiente figura calcule $\angle$ QRP y $\angle$ QPR.



3. En la siguiente figura $\angle$ BCA = 60°, $\angle$ BAC = 50° y $\angle$ ABD = 3x + 35°. Halle el valor de x ,y halle $\angle$ ABC



4. En la siguientes figura Δ MON es isósceles de base MO, $\overline{NP} \parallel \overline{MO}$. Calcule $\angle$ MNO y $\angle$ PNO.



5. En un Δ ABC, $\overline{AB}$ = 20 cm, $\overline{BC}$ = 15 cm y $\overline{AC}$ = 11 cm. Diga qué ángulo de este triángulo es el menor y cuál es el mayor.

6. ¿Cuál es el l

7. ado mayor en un triángulo obtusángulo? ¿Y de un triángulo rectángulo?

8. Diga si es posible construir un triángulo ABC que tenga los elementos siguientes: Justifique sus respuestas.
   a. $\overline{AB}$ = 12 cm, $\overline{BC}$ = 8 cm, $\overline{AC}$ = 24 cm.
   b. $\angle$ ABC = 100°, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$
   c. $\angle$ ABC = 50°, $\angle$ BAC = 80° y $\angle$ BCA = 60°
   d. $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{BC}$ = 10 cm, $\overline{AC}$ = 6 cm.

9. En un triángulo isósceles se tiene que:
   a. La base mide 20 cm. ¿Qué condición se cumple para la longitud de los otros dos lados?.
   b. Un lado opuesto a un ángulo mide 15 cm. ¿Qué condición se cumple para la longitud de la base?.
   c. ¿Un ángulo es la amplitud de un ángulo exterior cuyo vértice es el opuesto de la base?.

10. En un triángulo isósceles el ángulo opuesto a la base tiene 60° de amplitud.
   a. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos adyacentes a la base?
   b. ¿Qué se puede afirmar sobre las longitudes de los lados de este triángulo?.
   c. ¿Qué tipo de triángulo es según sus lados?

11. Dados los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 formado por los triángulos:
A_1: escalenos, A_2: isósceles, A_3: equiláteros, A_4: acutángulos, A_5 : rectángulos, A_6 obtusángulos. Diga qué pares de estos conjuntos no tienen elementos comunes.

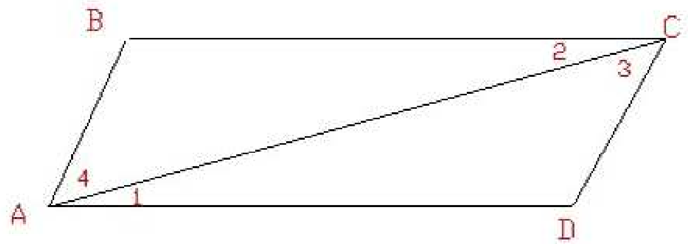
11. ¿Cuál puede ser la amplitud del ángulo principal de un triángulo isósceles para que se cumpla que la longitud de los lados opuestos a los ángulos base sea menor (mayor) que la longitud de la base?.

12. ¿Cuál es la suma de los ángulos exteriores de un triángulo?.

13. ¿De qué tipo son los ángulos exteriores de un triángulo rectángulo, no adyacentes al ángulo recto?.

14. Diga cuál es el lado mayor del triángulo DMN donde: $\angle DMN = 58°$ y $\angle DNM = 60°$.

15. En la siguiente figura, (el cuadrilátero ABCD) $\angle 1 = \angle 2$, y $\angle 3 = \angle 4$. Compare las amplitudes de los ángulos ABC y ADC.



A continuación se hacen algunas aclaraciones sobre el sistema de ejercicios propuesto.

No deben dejar de resolverse los ejercicios 3, 4, 5, 6, y 7. Los ejercicios 5, 6, 7, 8, 9, y 10 pueden ser resueltos oralmente. En cada uno de ellos se pedirá que se justifique la respuesta.

Si los alumnos no pueden dar solución a un ejercicio en forma oral, se les debe sugerir que hagan una figura de análisis que les facilite la comprensión del ejercicio. Estas figuras pueden ser esbozos, no es necesario una construcción rigurosa. Ahora bien, la respuesta tiene que ser justificada y no por la apreciación en la figura construida. Hay otros ejercicios del sistema que también pueden ser resueltos oralmente en dependencia del desarrollo de los alumnos.

El ejercicio 7 se puede justificar como ejemplificamos a continuación.

a. No. Los lados no cumplen la desigualdad triangular.
b. No. No es posible construir un triángulo equilátero que tenga un ángulo de 100°
c. No. Basándose en el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
d. Sí. Los lados cumplen la desigualdad triangular.

La respuesta al ejercicio 8 son las siguientes:

a. La longitud de los otros dos lados es mayor que 10 cm. Ya que como ellos tienen la misma longitud sólo así se cumple la desigualdad triangular.
b. La longitud de la base es menor que 30 cm., así se cumple la desigualdad triangular.
c. 100°. Basándose en el teorema sobre la amplitud de un ángulo exterior.

Después de resolver el ejercicio 9 se debe concluir que si un triángulo isósceles tiene un ángulo de 60°, entonces es equilátero.

En el ejercicio 10 hay que analizar la intersección entre los conjuntos

(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, A_6)
(A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4), (A_4, A_3), (A_4, A_6)
(A_3, A_4), (A_3, A_5), (A_3, A_6)
(A_4, A_5), (A_4, A_6)
(A_5, A_6).

En el ejercicio 11 la longitud de los lados opuestos a los ángulos base es igual a la longitud de la base si el triángulo es equilátero, o sea, cuando el ángulo principal tiene una amplitud de 60°, es menor si la amplitud de este ángulo es mayor que 60° y mayor en el caso contrario.

En la solución de los ejercicios restantes también debe darse una justificación adecuada.

15.1.6.1.2. Ejercicios complementarios.

Para el tratamiento de este punto se usarán 3 horas. Se presentará un sistema de ejercicios variados con la ayuda de los cuales se puede concluir la consolidación y sistematización de la materia tratada en esta unidad temática.

Estos ejercicios pueden ser utilizados por el profesor tanto en el momento en que se van desarrollando los puntos esenciales como en la etapa final de consolidación.

Dada la importancia que tiene dominar los contenidos de la temática, estos ejercicios pueden incluirse en las tareas que se asignen a los alumnos aún después de iniciar el tratamiento de otra temática, si todavía se presentan algunas deficiencias.

Los ejercicios del 1 al 21 están dirigidos a consolidar los conocimientos y habilidades sobre los movimientos y las figuras axialmente simétricas, que tienen gran aplicación en el tratamiento de toda la unidad de aprendizaje.

Los ejercicios del 1 al 15, con excepción del 7 y el 11 se pueden resolver oralmente.

En los ejercicios del 22 al 35 se hace aplicación de los teoremas sobre pares de ángulos y sobre triángulos.

1. ¿Cuántos ejes de simetría tiene:
   a. Una recta?,
   b. Un segmento?

2. Dados los puntos A y B diga cuál es la posición de un punto O tal que A y B son simétricos respecto a él.

3. ¿Qué puntos del plano se transforman en sí mismos por una traslación $\overline{AB}$ con $\overline{AB} \neq 0$

4. ¿Qué tipo de triángulos son axialmente simétricos?

5. ¿Qué tipo de triángulos tienen un solo eje de simetría (más de un eje de simetría)?

6. ¿Cuáles son los ejes de simetría de dos puntos?

7. Construya la figura formada por dos segmentos congruentes que tiene dos ejes de simetría.

8. ¿Cuál es el eje de simetría de un ángulo?.

9. ¿Cuántos ejes de simetría tiene una semirrecta?.

10. ¿Cuáles son los puntos del plano que coinciden con su imagen por una simetría axial?

11. En una recta están dados los segmentos congruentes AB y A_1, B_1. Diga cuál es el centro de simetría de la figura formada por estos segmentos.

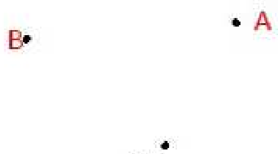
12. En un plano hay situadas dos circunferencias congruentes ¿mediante qué traslación se puede transformar una de ellas en la otra?.

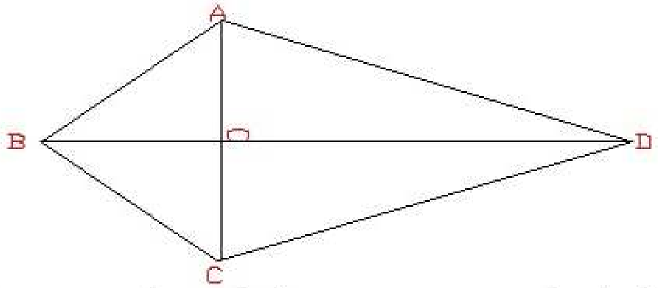
13. Se tienen dos segmentos en el plano ¿qué condiciones tienen que cumplir estos segmentos para que uno sea imagen del otro por una traslación?.

14. A una figura F se le aplicó una traslación y se obtuvo su imagen F', después se aplicó a F' otra traslación y se obtuvo nuevamente la figura F. ¿Qué relación existe entre esas dos traslaciones?.

15. En la siguiente figura $\overline{BD}$ es el eje de simetría del cuadrilátero ABCD, A y C son puntos simétricos.

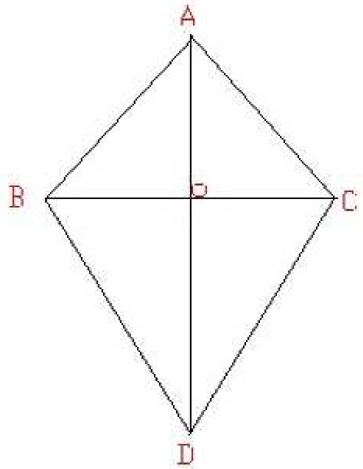
a. Qué tipo de triángulo es el ΔABC, según sus lados?
b. Comparar las amplitudes de los ángulos BAD y BCD.
c. ¿Qué tipo de triángulo es el Δ AOB, según sus ángulos?.





16. Se tiene en el plano un conjunto de 4 puntos, como en la siguiente figura. Hallar el número total de las traslaciones mediante las cuales cada uno de los puntos se transformaría en otro punto cualquiera del conjunto.

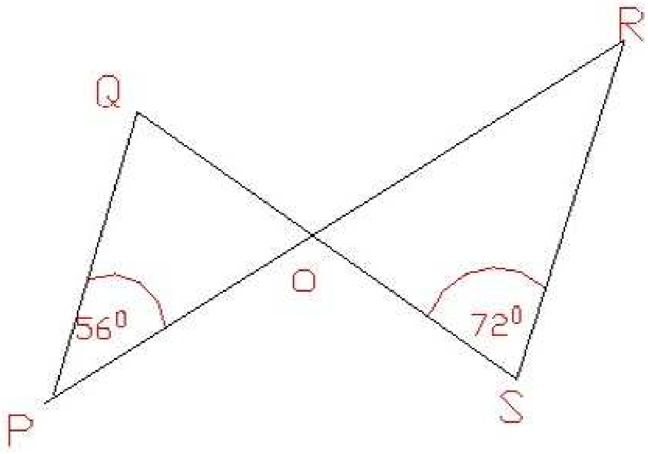
17. De acuerdo a la siguiente figura, determinar cuál es el recorrido más corto: AODBOC o ACDBO. Justifique la respuesta.



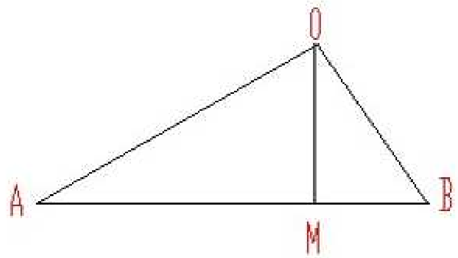
18. Diga que tipo de triángulo según sus ángulos es el ΔABC donde se tiene que uno de sus ángulos es igual (mayor, menor) que la suma de los otros dos.

19. Justificar por qué un triángulo no puede tener dos ángulos exteriores agudos.

20. En la siguiente figura donde $QP \parallel RS$. Halle $\angle PQS$, $\angle QOP$, $\angle ORS$, $\angle ROS$.



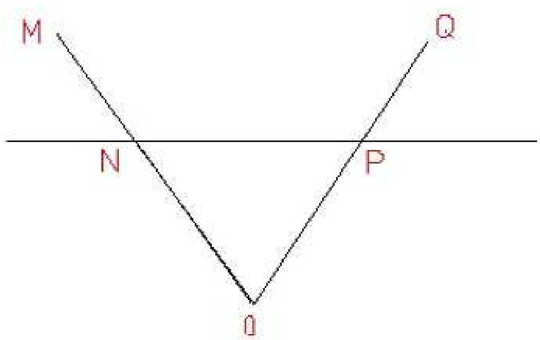
21. En la siguiente figura donde $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OA} > \overline{OB}$. Justifique por qué $\angle$ BOM es menor que $\angle$ MOA.



22. Construir un ángulo de 30° sin utilizar directamente graduador.

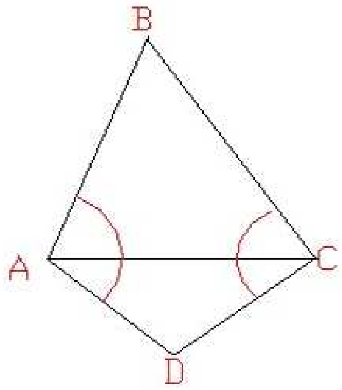
23. En la siguiente figura $\overline{ON} = \overline{OP}$

   a. Compare $\angle$ MNP y $\angle$ NPQ
   b. Calcule $\angle$ MOP si $\angle$ MNP = 110°.



24. Dado el triángulo ABC, en el que $\angle$ C es recto y CD $\perp$ AB pruebe que $\angle$ A = $\angle$ BCD.

25. En la siguiente figura $\angle$ BAD = $\angle$ BCD y ΔABC es isósceles. Pruebe que el triángulo ABC es también isósceles.

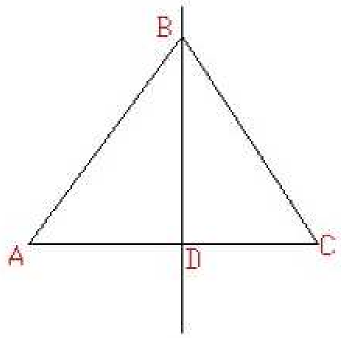


26. Sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del ΔABC se encuentran situados los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente; ninguno de estos puntos es vértice del ΔABC. Demuestre que el perímetro del $\Delta A_1B_1C_1$ es menor que el perímetro del ΔABC.

27. En la siguiente figura, el triángulo ABC es equilátero y $\overline{BD}$ es su eje de simetría; A y C son puntos simétricos

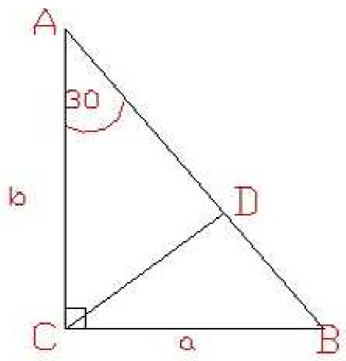
a. Calcule $\overline{AD}$ si se conoce $\overline{AC} = 30$ cm

b. Halle $\angle$ABC.

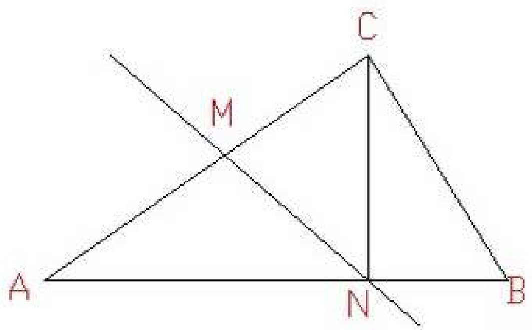


28. Demostrar que el lado de un triángulo rectángulo opuesto a un ángulo de 30°, tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado opuesto al ángulo recto.

29. En la siguiente figura hallar $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ si se conoce que $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\angle$BAC = 30° y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.



30. En la siguiente figura M es punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ $\angle CAN = 40°$, $\angle NCB = 30°$. Determinar qué tipo de triángulo es ABC según sus lados.



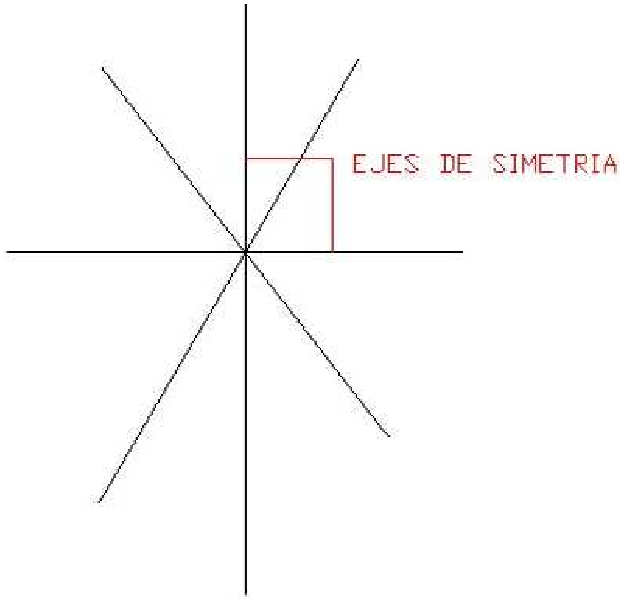
A continuación se hacen algunas aclaraciones sobre las soluciones de los ejercicios.

1.

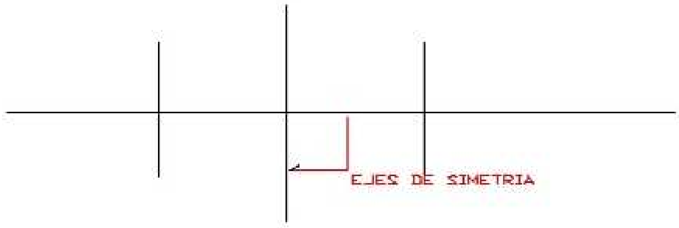
a. La recta tiene infinitos ejes de simetría.

3. Como $\overline{AB} \neq 0$, no hay ningún punto del plano que se transforme en sí mismo

7. La figura formada por dos segmentos congruentes que se intersecan en su punto medio puede ser la siguiente:



También podrían ser paralelos los segmentos



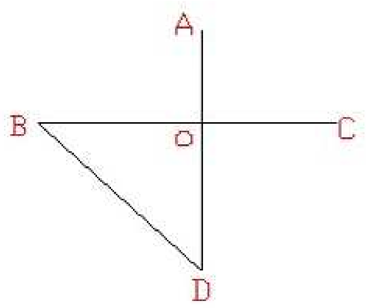
9. Una semirrecta tiene un eje de simetría que es la recta que la contiene.

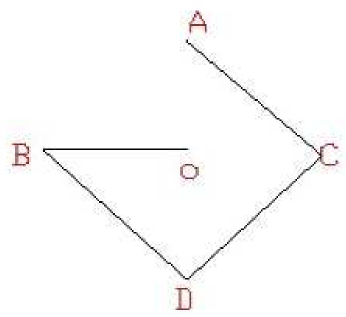
14. La traslación tiene la misma dirección, la misma longitud y sentido opuesto.

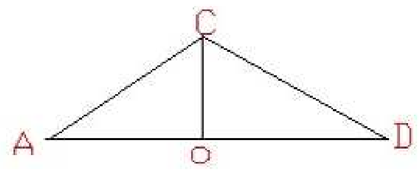
16. Este ejercicio está dirigido a desarrollar el pensamiento combinatorio de los alumnos. Teniendo como origen un punto cualquiera de los lados se pueden trazar 3 traslaciones que cumplen las condiciones del problema. Como son 4 puntos ($3 \times 4 = 12$), el total de traslaciones es 12.

17. Para resolver este ejercicio resulta útil dibujar dos recorridos, esto facilita la comprensión.

1er. Recorrido 2do. Recorrido







Si eliminamos la parte común de los recorrido (poligonal DBO) el problema se reduce a comparar lo que resta de cada recorrido. Como $\overline{DC}$ está considerado dos veces en el primer recorrido se pueden plantear las dos desigualdades siguientes:

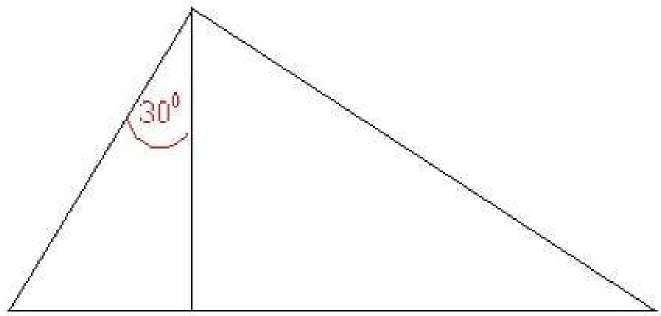
$$\overline{AO}+\overline{OC}>\overline{AC} \text{ y } \overline{\mathrm{DO}}+\overline{OC}>\overline{CD}$$

Por lo tanto, y de acuerdo a la figura, el segundo recorrido es el más corto.

18. Si existe un ángulo cuya amplitud es igual a la suma de las amplitudes de los otros dos, el triángulo es rectángulo, si es mayor es obtusángulo y si es menor puede ser de cualquier tipo (acutángulo, rectángulo u obtusángulo).

22. Hay varias vías, una de ellas es la de construir la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo equilátero.

28. Construimos el triángulo rectángulo con un ángulo de 60° y hacemos una reflexión del triángulo cuyo eje sea la recta que contiene al cateto mayor. Se forma así un triángulo equilátero.



$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AD}}{2}$$

Este ejercicio no se debe dejar de hacer ya que la propiedad que se demuestra tiene aplicaciones posteriores, además la vía de soluciones es una aplicación importante de los movimientos

29. Se aplica la propiedad demostrada en el ejercicio 28.

30. Considerando que MN es la mediatriz del lado AC y por tanto es eje de simetría del $\triangle$ ANC, tenemos que: $\angle$ ACN = 40°, $\angle$ ACB = 70° y $\angle$ CBA = 80°; luego el triángulo es acutángulo.

Los ejercicios que hemos presentado, pueden ser utilizados por el profesor cuando él lo estime conveniente, aunque su función fundamental es la dirigida al repaso y a la sitematización.

15.1.6.2. Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

Sugerimos se realicen ejercicios del siguiente tipo:

- Ejercicios dirigidos a la aplicación de las propiedades de los movimientos para fundamentar el valor de verdad de proposiciones.
- Ejercicios en los que se determina, aplicando propiedades de los movimientos, la imagen de una figura geométrica por un movimiento dado.
- Ejercicios donde se calcule la amplitud de determinados ángulos aplicando las relaciones entre pares de ángulos estudiados.
- Ejercicios donde se apliquen los teoremas sobre triángulos al cálculo de algunos de sus elementos o a la fundamentación de proposiciones. Pueden ser ejercicios en los que se apliquen conjuntamente con estos teoremas, otras relaciones y conceptos.

15.1.6.3.2. CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

Para el desarrollo de esta unidad temática se cuenta con 10 horas, en ella se destacan dos puntos esenciales:

- Congruencia de triángulos. Teoremas sobre la congruencia de triángulos.
- Construcciones de triángulos

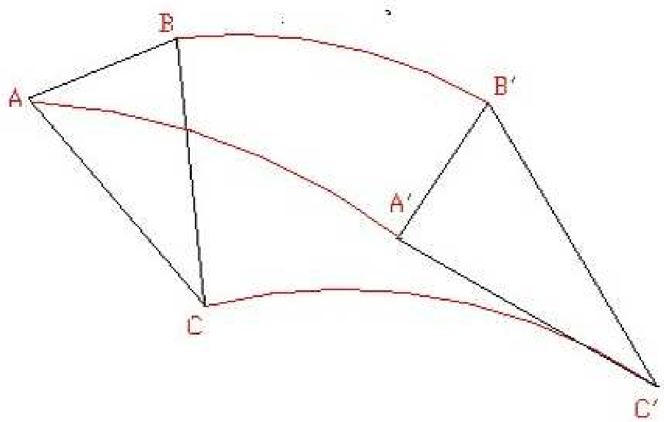
15.1.6.3.1.2.1 Congruencia de triángulos. Teoremas sobre la congruencia de triángulos.

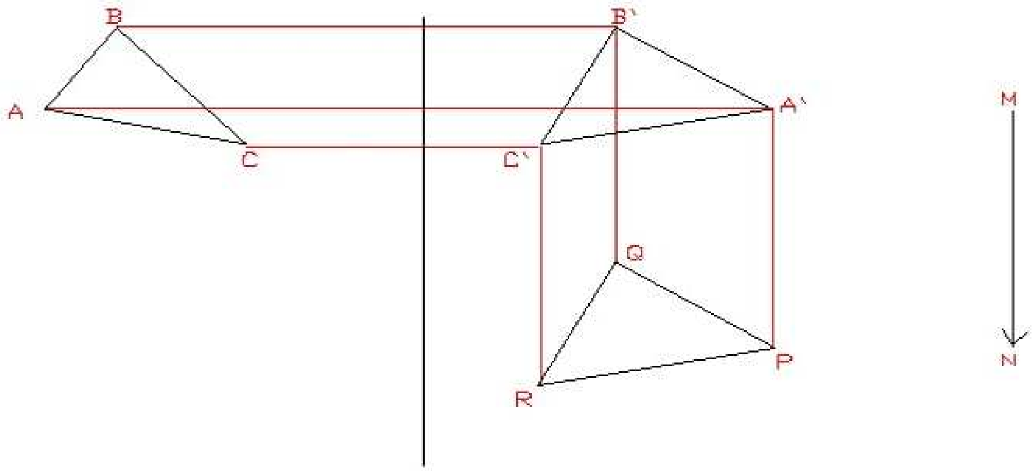
La congruencia de triángulos y los teoremas sobre ella son el centro de esta unidad de aprendizaje. Estos teoremas conjuntamente con los movimientos y sus propiedades los aplicaremos con mucha frecuencia en la resolución: de ejercicios y problemas de demostración, de cálculo y de construcción; además los aplicaremos en el estudio de las propiedades fundamentales de otras figuras geométricas como son los cuadriláteros.

Los contenidos correspondientes se deberán tratar en 7 horas. Se debe iniciar un trabajo sistemático dirigido a desarrollar las habilidades de los alumnos para realizar demostraciones sencillas en forma independiente.

El tratamiento de la nueva materia comienza con la aplicación del concepto "congruencia de figuras geométricas" a los triángulos. Proponemos a los profesores que en su introducción utilicen láminas o representaciones claras hechas en la pizarra (dibujadas con diferentes colores), que ayuden a la comprensión del concepto.

Apoyándose en ilustraciones similares a las siguientes:





se puede introducir el concepto de triángulos congruentes. Es importante que los alumnos comprendan que dos triángulos son congruentes si se pueden superponer de manera que coincidan sus vértices, esta idea la aplicarán con frecuencia en la resolución de ejercicios y en las demostraciones. Además deben fijar la definición de congruencia de triángulos, de manera que puedan operar con ella y aplicarla convenientemente.

El estudio de los teoremas se puede motivar a partir del conocimiento de que si dos triángulos son congruentes, entonces sus elementos correspondientes por la aplicación del movimiento que transforma uno en el otro también son congruentes.

Primero se plantean las interrogantes siguientes:

- ¿Será necesario siempre, para demostrar la congruencia de dos triángulos, encontrar un movimiento que transforme uno en otro?
- ¿Será necesario demostrar que sus tres lados y sus tres ángulos son respectivamente congruentes?

Se da a conocer a continuación que basta con conocer la congruencia de tres elementos de los triángulos para estar seguros de que los triángulos son congruentes entre sí; pero que no son tres elementos cualesquiera.

Los teoremas de congruencia de triángulos que se van a estudiar son precisamente los que establecen con claridad qué elementos son los que se deben tener en consideración.

La aplicación de estos teoremas posibilita hacer mucho más simple el proceso de demostración de la congruencia de dos triángulos.

Se sugiere que de los tres teoremas, se demuestre en clase solamente el de lado-ángulo-lado. Esta demostración debe desarrollarse en la pizarra apoyándose en ilustraciones que faciliten la comprensión de los pasos de la demostración.

Los alumnos deben atender al desarrollo de la demostración en la pizarra. Una vez enunciado el teorema, utilizando el método de elaboración conjunta, es importante que se destaquen la premisa y la tesis del teorema y de aquí pasar a precisar la idea de la demostración. El enunciado del teorema lado-ángulo-lado con el que se trabajará es el siguiente:

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces estos triángulos son congruentes

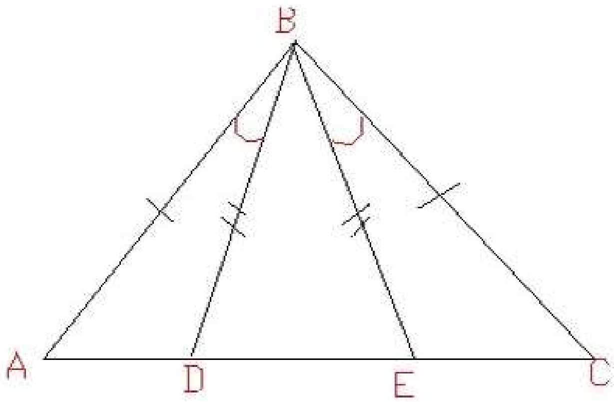
Para los alumnos debe quedar claro que ellos quieren probar que es posible superponer los triángulos de manera que coincidan sus vértices. Para ellos lo que se hace es aplicar un movimiento y tratar de hacer coincidir los elementos, que según establece la premisa, son congruentes. Basándonos en esto hay que probar que los tres vértices coinciden.

El profesor debe orientar el estudio de la demostración del teorema como tarea, de manera que los alumnos puedan fijar los pasos esenciales de la demostración.

Una vez realizada la demostración es conveniente ejemplificar la aplicación de este teorema. Los profesores pueden utilizar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

En la figura ABC y BDE son triángulos isósceles de base AC y DE respectivamente y $\angle$ ABD = $\angle$ EBC. Demuestre que Δ ABD = Δ EBC.



<u>Resolución:</u>

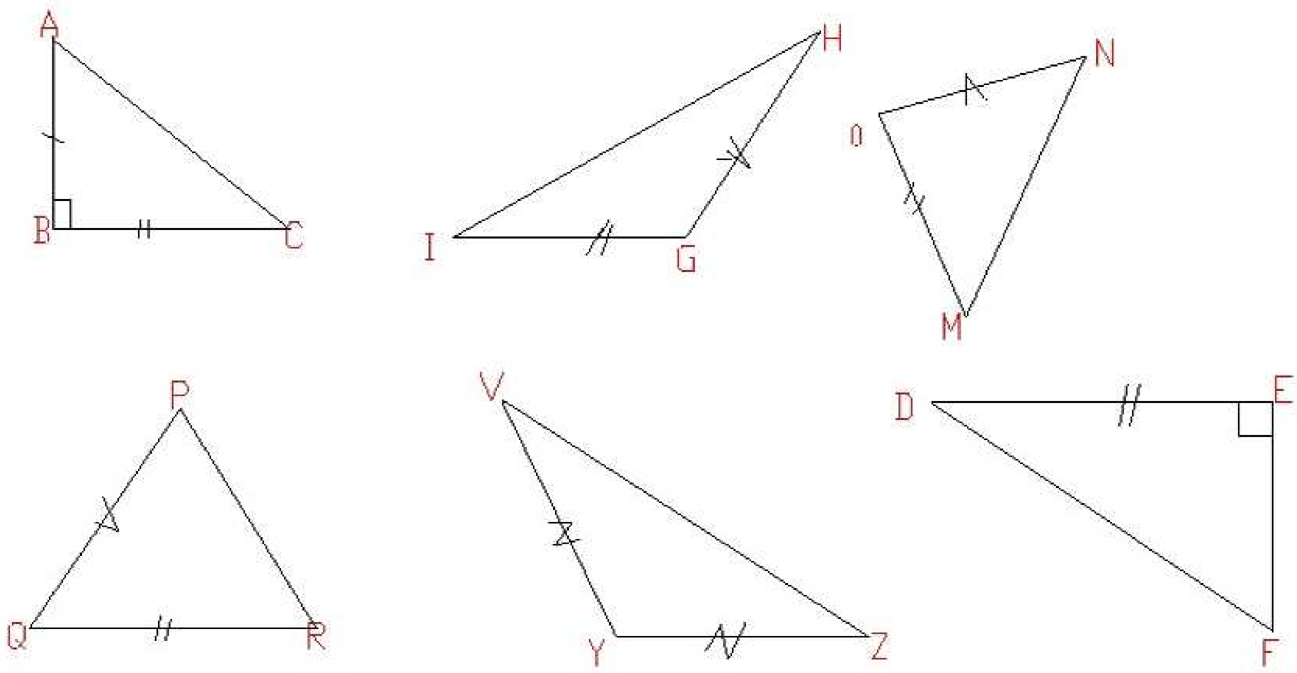
En Δ ABD y Δ EBC
$\angle$ ABD = $\angle$ EBC (dato)
$\overline{AB} = \overline{BC}$
$\overline{BD} = \overline{BE}$ (lados congruentes del triángulo isósceles)

Por tanto Δ ABD = ΔEBC por el teorema L A L

El profesor también puede elaborar un ejercicio similar (que no presente un mayor grado de dificultad); así los alumnos tendrán ejemplos de aplicación del teorema. En el ejemplo que presentamos es necesario, antes de iniciar la demostración, precisar qué tenemos y qué se quiere demostrar. Esto ayuda a su mejor comprensión.

Si el profesor lo considera conveniente, antes de continuar con el estudio de los teoremas, puede plantear a los alumnos el siguiente ejercicio de reconocimiento:

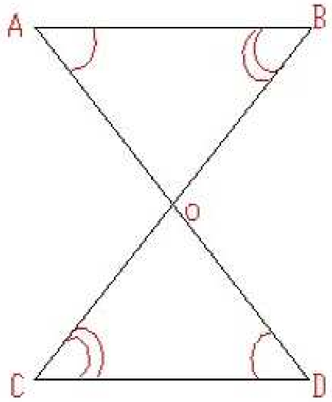
En la figura, nombre los pares de triángulos congruentes según el teorema LAL



Los otros dos teoremas no se van a demostrar en el aula, para su estudio proponemos lo siguiente:

Enunciar el teorema de ángulo-lado-ángulo, y con ayuda de una lámina o una figura dibujada en la pizarra, semejante a la que proponemos, destacar la premisa y la tesis del teorema de manera que los alumnos comprendan el enunciado de éste.
A continuación se puede resolver el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:
En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$. Demuestre que: Δ ABO $\equiv$ Δ CDO.



<u>Resolución:</u>

En Δ ABO y Δ CDO

$\angle$ A = $\angle$ D

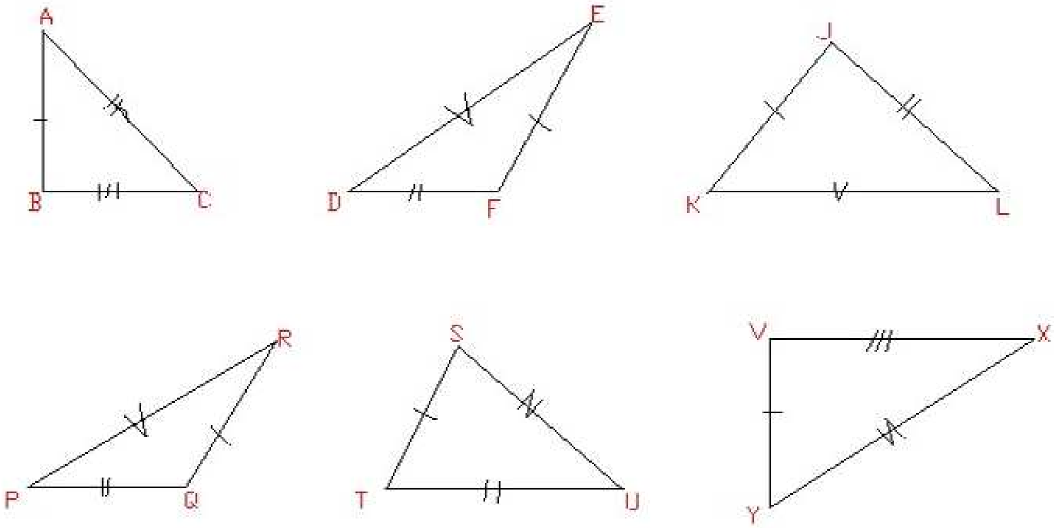
$\angle$ B = $\angle$ C, por ángulos alternos y por ser AB || CD.

$\overline{AB} = \overline{CD}$, dato

$\therefore$ Δ ABO = Δ CDO, por teorema A.L.A.

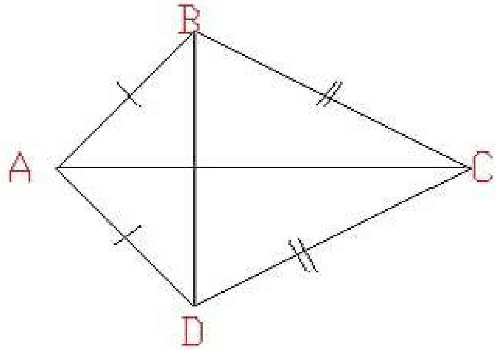
Después se puede a proponer a los alumnos el siguiente ejercicio que se puede resolver oralmente.

En la figura siguiente nombrar los pares de triángulos que son congruentes según el teorema A.L.A.



El teorema de lado-lado-lado se puede introducir de la misma forma que el anterior; a continuación recomendamos analizar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO:
En la figura $\triangle ABD$ y ΔADC son isósceles. Demuestre que $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$



<u>Resolución:</u>

En $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$

$\overline{AB} = \overline{AD}$
$\overline{DC} = \overline{BC}$ lados congruentes del triángulo isósceles

$\overline{AC} = \overline{AC}$ lado común
$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ por teorema L.L.L

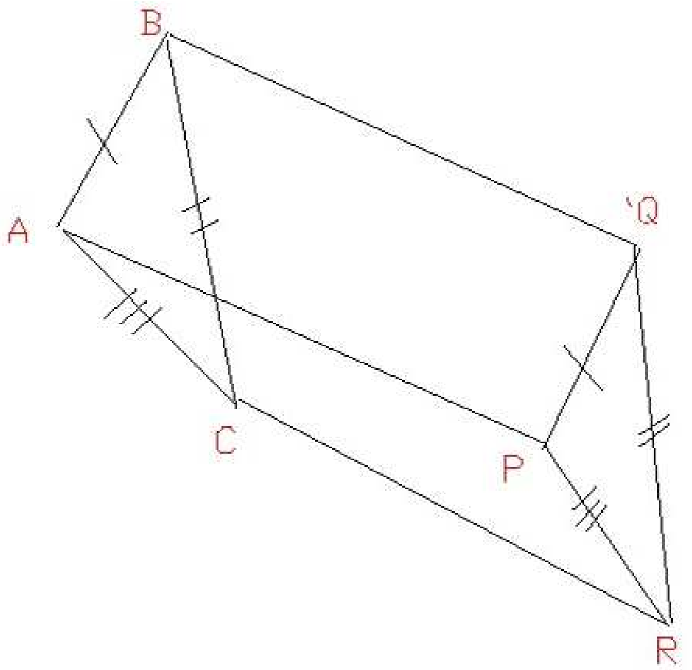
Se puede entonces presentar la siguiente definición.

> Los elementos de dos triángulos congruentes que se corresponden por un movimiento que transforma uno en el otro reciben el nombre de elementos homólogos.

Se podría preparar una hoja guía en donde conste la demostración de los dos teoremas, y se puede sugerir a los alumnos como tarea que la analicen.

Para concluir el tratamiento teórico del concepto "congruencia de triángulos" y de los teoremas, se debe analizar el siguiente ejemplo, que trata sobre los elementos homólogos de triángulos congruentes:

EJEMPLO:
En la figura $\triangle ABC = \triangle PQR$ y mediante un movimiento que transforma uno en el otro, coinciden los vértices A y P; B Y Q; C y R. Diga cuáles son los lados homólogos y los ángulos homólogos.



Resolución:

Lados homólogos	Angulos homólogos.
$\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$	$\angle$ BAC y $\angle$ QPR
$\overline{BC}$ y $\overline{QR}$	$\angle$ ACB y $\angle$ PRQ
$\overline{AC}$ y $\overline{PR}$	$\angle$ CBA y $\angle$ RQP.

Este ejemplo es muy importante ya que el concepto "elemento homólogo" de triángulos congruentes se aplicará con frecuencia en la resolución de problemas.

Finalmente, se debe dar lectura al siguiente enunciado de la relación entre ángulos y lados de triángulos congruentes:

> En triángulos congruentes a lados respectivamente congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.

Hemos propuesto un tratamiento concentrado de la teoría porque así, desde que se inicia la ejercitación, los alumnos tienen la posibilidad de aplicar los tres teoremas y, por tanto, cuando se les presente un ejercicio tendrán en primer lugar que reconocer, dadas las condiciones del problema planteado, qué teorema es posible aplicar. Este es un aspecto fundamental que evita que los alumnos apliquen mecánicamente un teorema sin hacer un análisis previo.

A continuación se pueden plantear ejercicios como los siguientes:

1. Diga en cuáles de los siguientes casos podemos asegurar que existe un movimiento mediante el cual el $\triangle ABC$ se transforma en el $\triangle A_1 B_1 C_1$
   a. $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$, $\overline{B_1C_1} = \overline{BC}$, $\overline{A_1C_1} = AC$
   b. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$
   c. $\overline{B_1C_1} = \overline{BC}$, $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$, $\angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1$
   d. $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,
   e. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

2. Para los triángulos ABC y MNK se cumplen las desigualdades: $\overline{AB} \neq \overline{MN}$, $BC \neq NK$, $CA \neq KM$ y $\Delta ABC = \Delta MNK$.

Analice si esto es posible y fundamente su respuesta.

Nota: **En las figuras los elementos iguales de los diferentes triángulos se han señalizado de la misma forma.**

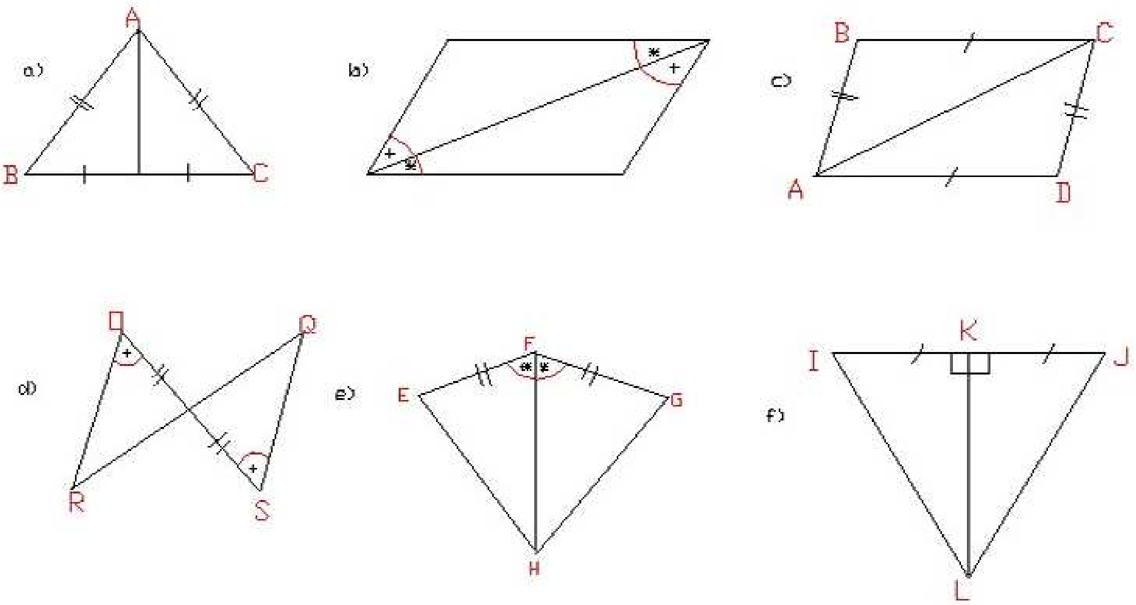
3. **Dados los triángulos congruentes ABC y MDE:**
   a. **Se conoce que AB = MD y BC = DE. Diga cuáles ángulos del Δ ABC son iguales a los ángulos M, E y D.**
   b. **Se conoce que $\angle B = \angle M = \angle A = \angle E$. Diga cuáles de los lados del triángulo ABC son iguales a los lados MD, DE y ME.**
4. **En los triángulos congruentes LAD e IHG, $\angle LAD = \angle IHG$, $\angle ADL = \angle HGI$, IG = 8cm, AD = 5 cm y AL = 7 cm.**
   a. **¿Cuáles son los lados homólogos de estos triángulos?**
   b. **Calcule el perímetro de estos triángulos.**
   c. **Diga cuál es el mayor ángulo en cada uno de ellos.**

5. **El triángulo NBK isósceles de base NK, es congruente al triángulo MQC, $\angle$ NBK = 50° y,**
   QMC = 65°.
   Diga cuáles lados de estos triángulos son respectivamente iguales.
   Halle $\angle$ MQC.

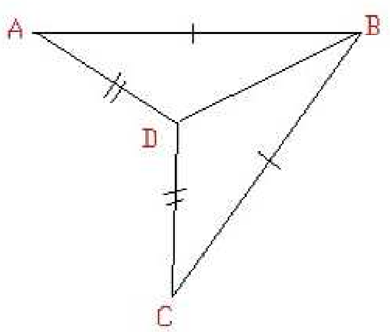
6. **Diga si podemos afirmar que son congruentes dos triángulos para los que se cumplen las condiciones siguientes. Fundamente sus respuestas.**
   a. **Tienen tres lados respectivamente iguales.**
   b. **Tienen un lado y un ángulo respectivamente iguales y la suma de las amplitudes de los ángulos adyacentes al tercer lado en cada triángulo es la misma.**
7. **Diga si son congruentes los triángulos y fundamente su respuesta en cada caso.**

a. Dos triángulos rectángulos donde los dos lados más pequeños son respectivamente iguales.
b. Dos triángulos que tienen respectivamente iguales el lado mayor y un ángulo agudo.
c. Un triángulo acutángulo y uno obtusángulo con dos lados respectivamente iguales.
d. Dos triángulos equiláteros con un lado igual.
e. Un triángulo isósceles y uno equilátero que tienen un lado y un ángulo respectivamente iguales.

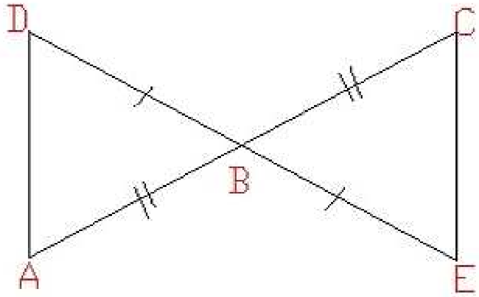
8. **En cada una de las ilustraciones que aparecen en la siguiente figura determine qué triángulos son congruentes y demuéstrelo (en cada ilustración se destacan los elementos que son congruentes):**



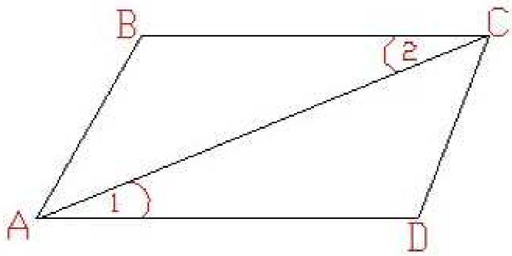
9. **En la figura siguiente, AB = BC y AD = DC. Demuestre que: $\Delta ABC \equiv \Delta CBD$.**



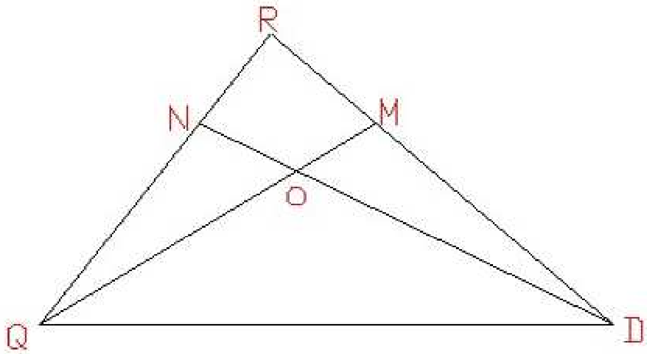
10. En la figura siguiente, B es el punto medio de AC y DE. Demuestre que: $\Delta ABD \equiv \Delta EBC$ y $AD = CE$.



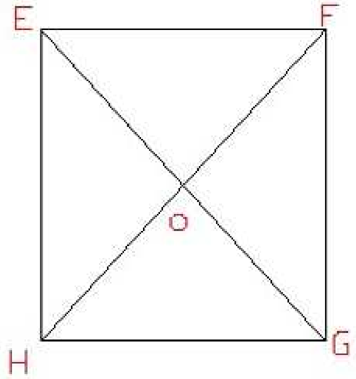
11. En la figura siguiente, $BC = AD$ y $\angle 1 = \angle 2$. Demuestre que:
   a. $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$
   b. $\angle ABC = \angle ADC$



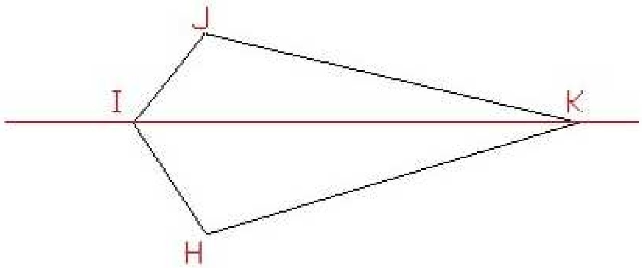
12. En la figura siguiente, los triángulos QRD y QOD son isósceles de base común QD. Demuestre que $\angle QND \equiv \angle QMD$.



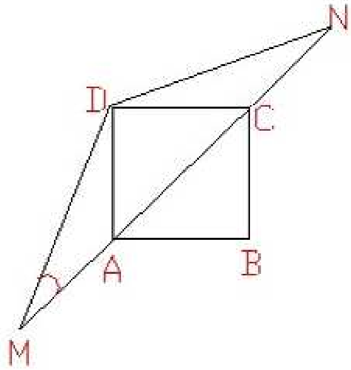
13. En la figura siguiente, $EF < HG$ y O punto medio de EG. Demuestre que: $\Delta OEF \equiv \Delta OGH$.



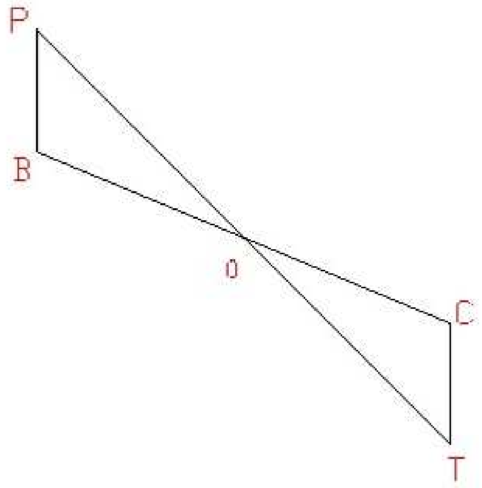
14. **En la figura siguiente tenemos que IK es un segmento común de las bisectrices de los ángulos HKJ y HIJ. Demuestre que HI = IJ y HK = JK.**



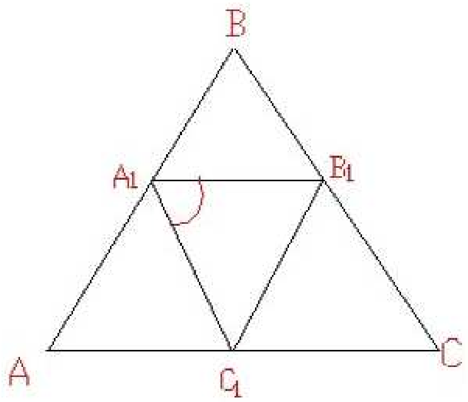
15. **En la figura siguiente, Δ MDN es isósceles de base MN, ABCD es una cuadrado y MA = CN. Demuestre que: ∠ MDN = ∠ NCD.**



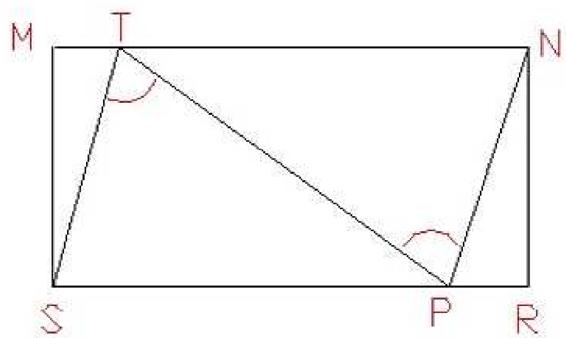
16. **En la figura siguiente, ∠ C y ∠ B son rectos. BO = OC y ∠ P = 67°. Halle ∠ T y demuestre que: OP = OT.**



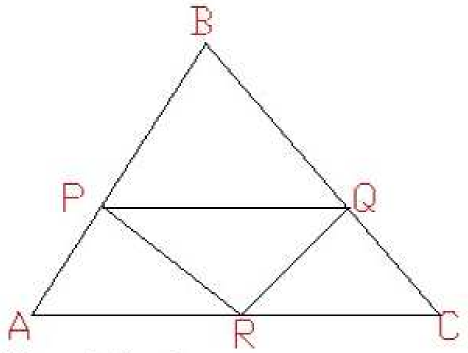
17. **En la figura siguiente, los triángulos A_1BB_1, AA_1C_1, CC_1B_1 son congruentes, y ΔABC es equilátero. Halle $\angle B_1A_1C_1$.**



18. **En la figura siguiente, $\Delta SMT = \Delta PRN$, $TN = SP$ y $\angle M = \angle R$. Demuestre que $\angle STP = \angle TPN$.**

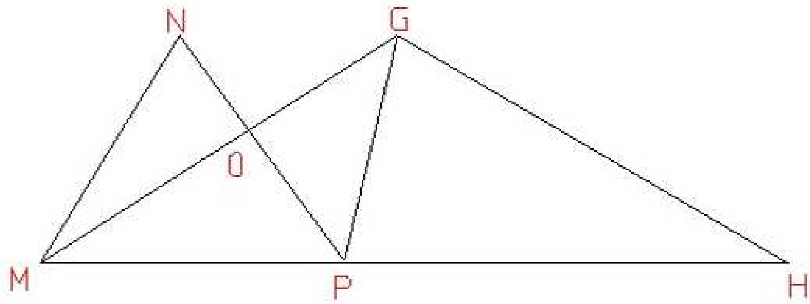


19. **En la figura siguiente, $\angle$ RPQ = $\angle$ PQR, QC = AP y R es punto medio de AC.**



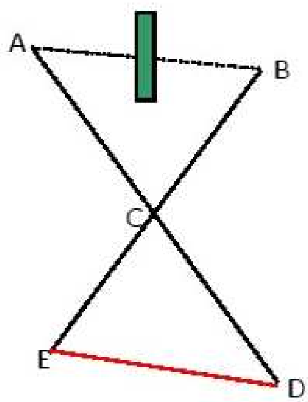
Demuestre que ΔABC es isósceles.

20. **En la figura siguiente, se hace el recorrido por la poligonal GMNP desde G hasta P y el recorrido por la poligonal HGPN desde H hasta N. Compare las longitudes de los caminos recorridos, si se conoce que O es punto medio de NP y de MG, y que ΔMGH es isósceles de base MH.**



21. **Para medir la distancia entre dos puntos A y B entre los que existe un obstáculo (ver figura), se procedió de la forma siguiente:**

1. **Se seleccionó un punto C desde el que podemos llegar hasta A y B, y desde el cual estos puntos son visibles.**
2. **Se midieron las longitudes de AC y CB y se prolongaron los segmentos de manera que CD = AC y EC = CB. (Todo esto puede hacerse con la ayuda de un cordel, clavando estacas en cada uno de los puntos que se muestran en la figura). Entonces ED es igual a la distancia entre los puntos A y B. Fundamente por qué.**



Debemos hacer las aclaraciones y recomendaciones siguientes:

Los ejercicios del 1 al 10 están dirigidos fundamentalmente a que los alumnos comprendan la esencia de los teoremas de congruencia de triángulos y desarrollen habilidades en la determinación de los elementos homólogos en triángulos semejantes.

La mayoría de estos ejercicios se pueden resolver oralmente, no obstante es preciso señalar que los alumnos deben copiar en sus cuadernos las respuestas con su justificación, ya que esto posibilita que posteriormente puedan estudiar.

Sugerimos de forma general, que en los casos en que se dificulte la comprensión del ejercicio, se haga una figura de análisis que facilite el reconocimiento de los elementos homólogos si se trata de triángulos congruentes, u otro reconocimiento importante para dar solución al ejercicio.

Ejercicio 2: Es posible lo que se plantea, ya que independientemente de las desigualdades que se señalan puede cumplirse cualquiera de los tres teoremas de congruencia de triángulos; por ejemplo, se puede cumplir que:
$\overline{AB} = \overline{NR}$
$\overline{BC} = \overline{KM}$
$\overline{CA} = \overline{MN}$
y entonces $\triangle ABC = \triangle MNK$ por el teorema L.L.L.

Ejercicio 4: En $\triangle LAD$ tenemos según datos que $\overline{AD} = 5$ cm y $\overline{AL} = 7$ cm; además $\overline{DL} = \overline{IG}$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes, por tanto $\overline{DL} = 8$ cm y p = 20 cm (p = perímetro).

Ejercicio 7e): Si un triángulo isósceles tiene un ángulo igual al de un triángulo equilátero (amplitud de 60°) entonces el resto de sus ángulos tienen también 60° de amplitud; por tanto todos los triángulos son congruentes por el teorema ángulo-lado-ángulo.

Los ejercicios del 1 al 10 sirven de base para resolver los ejercicios del 11 al 24 que están dirigidos a desarrollar habilidades en la aplicación de los teoremas estudiados para demostrar la congruencia de dos triángulos o de algunos de sus elementos.

Ejercicio 11: Este ejercicio no debe dejar de hacerse ya que prepara a los alumnos para hacer reconocimientos de figuras, él se diferencia de los ejercicios 4a) y 5a) en que es necesario buscar un tercer elemento para establecer la congruencia de los triángulos.

Es resto de los ejercicios son en su mayoría de demostración. Iniciar el desarrollo de habilidades en los alumnos para hacer demostraciones es uno de los objetivos del nivel y por eso estos ejercicios tienen gran importancia.

Hacemos hincapié en que cada paso de la solución debe tener su justificación, ésta debe escribirse en forma breve pero sin utilizar abreviaturas incorrectas y sin introducir nuevos símbolos ajenos a los estudiados.

Estos ejercicios deben ser resueltos por los alumnos con el mayor grado de independencia posible. El trabajo del profesor debe estar dirigido fundamentalmente a atender las diferencias y explicaciones generales cuando la mayoría de los alumnos afrontan dificultades con algún ejercicio. La forma más conveniente para aclarar las dudas y eliminar las dificultades que afrontan los alumnos es haciéndoles preguntas que les permitan comprender la vía de solución o la idea esencial de un ejercicio. Esto también permite al profesor determinar las deficiencias de sus alumnos.

Ejercicio 12: Este ejercicio presenta una mayor dificultad que los anteriores en los referente a determinar en la figura los elementos de los triángulos que son respectivamente congruentes.

Solución: En $\triangle$QND y ΔQMD, QD lado común.

$\angle NQD = \angle MDQ \}$ ángulo base de triángulo isósceles

$\angle NDQ = \angle MQD \}$ ángulo base de triángulo isósceles

entonces $\triangle QND = \Delta QMD$ por el teorema A.L.A.

Ejercicio 15:
Sugerencia: Probar primero que $\triangle CDN = \Delta ADM$ por el teorema L.L.L.

Ejercicio 17:
Solución:
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ por ser Δ ABC equilátero. $A_1B_1 = A_1C_1 = C_1B_1$ elementos homólogos de triángulos congruentes.
$\Delta\ A_1B_1C_1$ equilátero por tener 3 lados iguales y, por tanto: $\Delta\ B_1A_1C_1 = 60°$.

Ejercicio 18:
Sugerencia: Probar primero que Δ STP = Δ TPN por el teorema L.L.L.
El dato $\angle M = \angle R$ se da para poder determinar que $\overline{TN} = \overline{SP}$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

Ejercicio 19:
Sugerencia: Probar primero que Δ APR = Δ CQR por el teorema L.L.L.
$\angle A = \angle C$ elementos homólogos de triángulos congruentes.
Δ ABC isósceles por tener dos ángulos iguales (que es equivalente a tener dos lados iguales).

Ejercicio 20: Este ejercicio presenta un mayor grado de dificultad. El profesor puede utilizarlo, según el desarrollo alcanzado por sus alumnos, para resolverlo en el aula, como tarea para todo el grupo o asignarlo a determinados alumnos.
Solución:

Los recorridos son iguales ya que en las poligonales GMNP y HGPN:
PN = PN lado común
GM = HG por ser Δ MGH isósceles
MN = GP elementos homólogos de triángulos iguales.
Hay que probar previamente que Δ ONM = Δ GOP.

15.1.6.3.2.2.2 Construcción de triángulos.

Para el tratamiento de este punto se cuenta con 3 horas. Su objetivo es el de continuar desarrollando las habilidades de los alumnos en la construcción de figuras geométricas y aplicar varios de los teoremas estudiados para justificar si es o no posible realizar una construcción y su unicidad.

La materia correspondiente a este punto debe afrontarse tomando en cuenta las siguientes recomendaciones:

En primer lugar el profesor puede plantear en la pizarra los tres casos de construcción de triángulos que se van a estudiar, como se presentan en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO:
Construya un Δ ABC dados sus lados de longitudes a, b y c.

Resolución:
1. Construimos el segmento $\overline{AB}$ de longitud c.
2. Con centro en B trazamos un arco de radio b, y con centro en A trazamos un arco de radio a. Sea C el punto de intersección de los arcos.
3. Trazamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

De esta forma obtenemos el Δ ABC que cumple las condiciones del problema

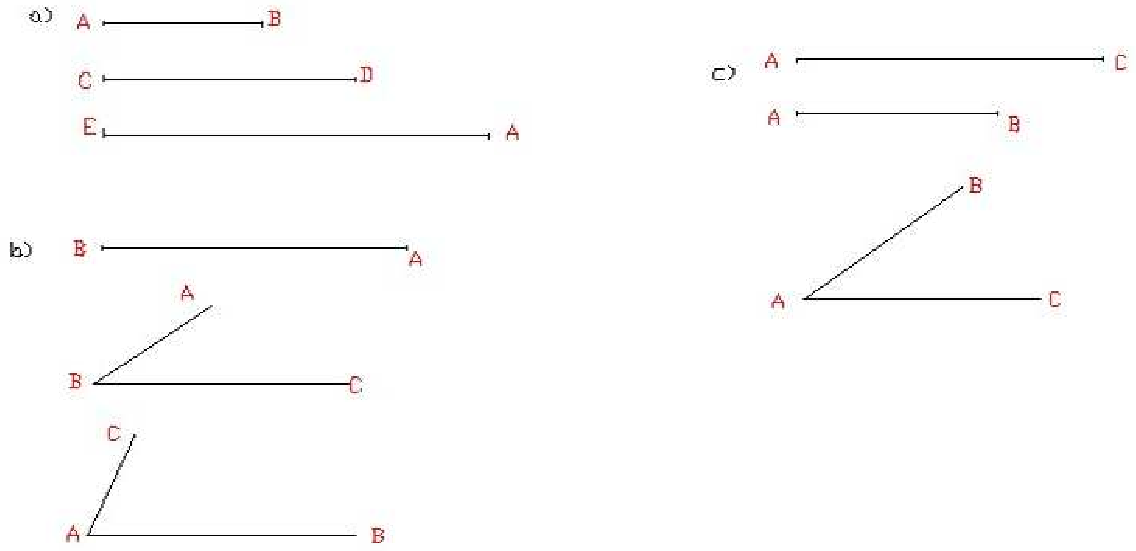
Basados en el teorema L.A.L. de congruencia de triángulos podemos considerar que la construcción es realizable de forma única.

Se recomienda que realice las construcciones a medida que va explicando los pasos.

Para la construcción de los ángulos se utilizará el graduador y el compás.

El profesor hará las aclaraciones pertinentes sobre la posibilidad de realizar estas construcciones y su unicidad. También se hará hincapié en la utilización correcta de los instrumentos geométricos.
A continuación se puede plantear a los alumnos los ejercicios siguientes, para que los realicen de forma independiente:

Construya un $\triangle$ ABC dados los siguientes elementos:



Si los alumnos afrontan dificultades en la realización de una construcción, se les debe remitir en primer lugar a la teoría, donde aparecen los ejemplos con su justificación correspondiente. Los profesores han de controlar la forma en que los alumnos realizan su trabajo y exigir limpieza en su presentación.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática

Los ejercicios que se deben realizar son de los siguientes tipos:

- **Ejercicios en los que se pide fundamentar la congruencia de dos triángulos.**
- **Ejercicios en los que se pide determinar cuáles son los elementos homólogos de triángulos congruentes.**
- **Ejercicios en los que se pide demostrar la igualdad de dos triángulos o de algunos de sus elementos y dónde es preciso aplicar los teoremas de igualdad de triángulos.**
- **Ejercicios de construcción de triángulos.**

15.1.6.4.3. PROPIEDADES DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Para el desarrollo de esta unidad temática se cuenta con 13 horas, y en ella se destacan los siguientes puntos esenciales:

- Propiedades de la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo y de las rectas paralelas.
- Alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo.

15.1.6.4.1.3.1 Propiedades de la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo y de las rectas paralelas.

En este punto se aplican los teoremas de congruencia de triángulos a la demostración de nuevas propiedades de las figuras geométricas. Para su desarrollo se sugieren 4 horas.

De las tres propiedades se demostrará en clase sólo la propiedad de la mediatriz

Si un punto C está en la mediatriz de un segmento AB, entonces los segmentos AC y BC son iguales

Para la demostración de esta propiedad proponemos dos vías:
Primera vía. Plantear a los alumnos el siguiente ejercicio:

a. Construya la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ de cualquier longitud.
b. Denote con la letra P un punto que pertenezca a la mediatriz de $\overline{AB}$
c. Trace los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ y mida sus longitudes
d. Compare las longitudes de $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$
e. ¿Qué hipótesis se podría plantear dado el resultado de la medición anterior?.

Como se aprecia, este ejercicio está dirigido a que los alumnos enuncien una hipótesis que es el teorema que después se va demostrar. Después de enunciado el teorema se deben precisar la premisa y la tesis.

La demostración de este teorema es sencilla; los alumnos ya han hecho demostraciones similares, por eso consideramos que es posible que la realicen en forma independiente:

Si el profesor considera que sus alumnos no están preparados para esto, debe aplicar entonces el método de elaboración conjunta.

15.1.6.5.4. POLÍGONOS.- PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS.

Para el desarrollo de esta unidad temática se dispone de 19 horas-clase, en ella se destacan 4 puntos esenciales que son los siguientes:

1.- Cuadriláteros convexos. Propiedades del paralelogramo

2.- Paralelogramos especiales: rectángulo, rombo y cuadrado

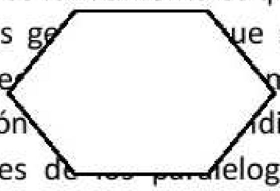
3.- Trapecios y trapezoides

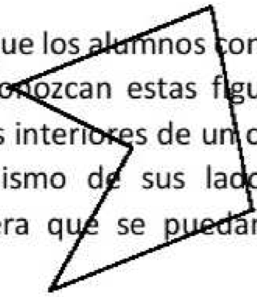
4.- Cálculo del perímetro y el área de polígonos

15.1.6.5.1.4.1. Cuadriláteros convexos. Propiedades del paralelogramo

Para el desarrollo de este punto se dispone de 6 horas. Los alumnos conocen de grados anteriores la definición de línea poligonal, la de polígono y la de cuadrilátero, por lo que el estudio de estas definiciones al iniciar el tratamiento del punto esencial constituye un repaso.

Como objetivos fundamentales queremos lograr que los alumnos conozcan las definiciones de las figuras ge ue se estudian, reconozcan estas figuras y sus elementos, dominen el te ma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, conozcan la clasificación diendo al paralelismo de sus lados y las propiedades fundamentales d elogramos de manera que se puedan aplicar todos estos conocimientos a la resolución de problemas.





POLÍGONO CONVEXO

POLÍGONO NO CONVEXO

Consideraremos únicamente polígonos convexos, es decir aquellos polígonos en los cuales cualquier segmento que una dos vértices, se encuentra en su interior.

Después de tratar las definiciones de poligonal, polígono y cuadrilátero y los elementos fundamentales de estas figuras (con el apoyo de ilustraciones), se debe introducir el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

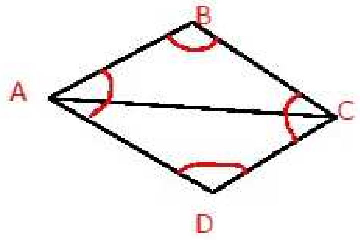
La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°

Esta demostración es muy sencilla por lo que se debe tratar que los alumnos la realicen en forma independiente.

Durante el trabajo en la búsqueda de la idea de la demostración, el profesor puede hacer preguntas a los alumnos y dar sugerencias. Por ejemplo, a los alumnos se les puede plantear lo siguiente:

Se quiere demostrar una propiedad de los cuadriláteros y para ello debemos apoyarnos en propiedades conocidas de otras figuras (triángulos).

En la figura que tenemos no aparecen triángulos. ¿ Cómo podríamos descomponer esta figura en triángulos?



La información que se da a los alumnos y las preguntas que se les hace constituyen impulsos que dirigen su atención hacia la idea de descomponer el cuadrilátero en triángulos:

Una vez hecha la descomposición del cuadrilátero en triángulos resulta fácil llegar a la demostración. A los alumnos que afronten dificultades se les puede hacer otra pregunta:

- ¿Cómo es la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, igual, mayor o menor que 180° ?

Esta pregunta dirige la atención de los alumnos hacia la aplicación del teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Después de concluida la demostración pueden resolverse los ejercicios siguientes.

1. Dibuje un cuadrilátero convexo MNPQ y trace en él las diagonales. Nombre:
   a. Los lados opuestos
   b. Los vértices opuestos.

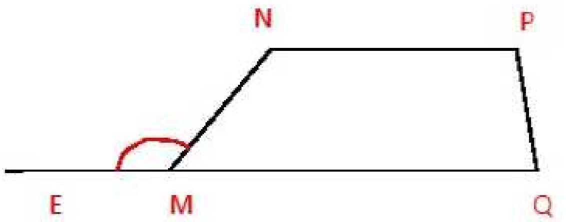
c. Los ángulos exteriores.

2. El cuadrilátero ABCD tiene dos ángulos interiores iguales y los otros dos ángulos (A y B) tienen una amplitud de 120° y 70° respectivamente. Halle $\angle C$ y $\angle D$.

3. ¿Qué amplitud tienen los ángulos interiores de un cuadrilátero si todos los ángulos son iguales?

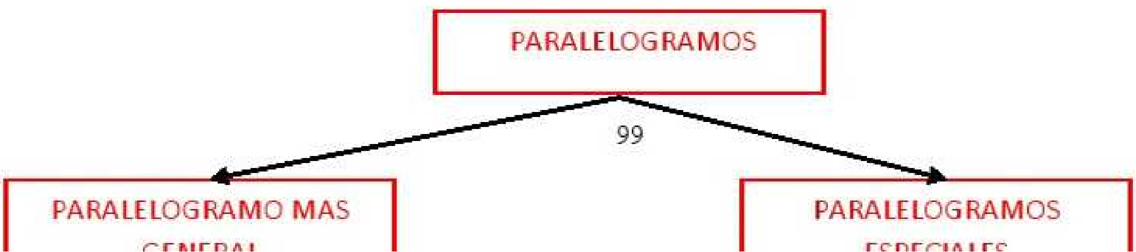
4. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   a. Un cuadrilátero puede tener cuatro ángulos interiores agudos.
   b. Existen cuadriláteros en los que todos sus ángulos interiores son obtusos.
   c. Un cuadrilátero puede tener dos ángulos obtusos.

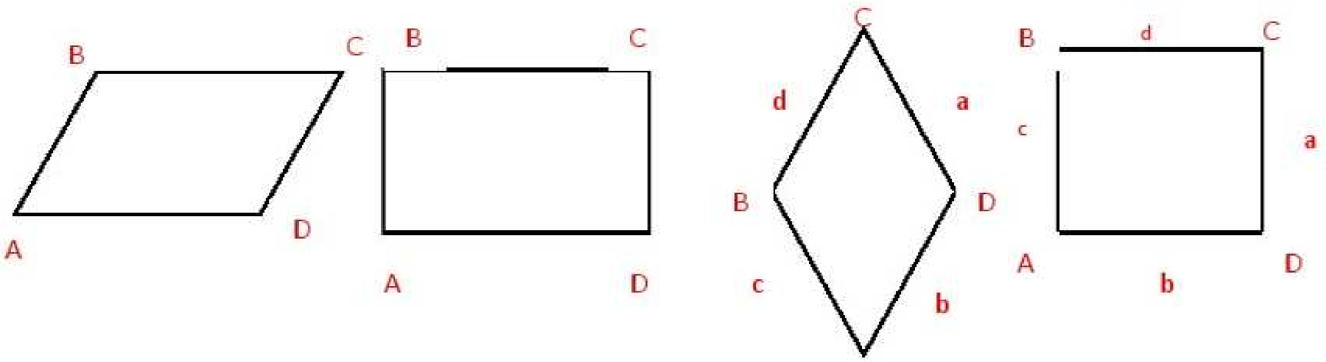
5. En el cuadrilátero MNPQ, $\overline{PN} \parallel \overline{QN}$, el ángulo exterior EMN tiene 130° de amplitud y $\angle NPQ = 92°$. Calcule la amplitud de los restantes ángulos interiores del cuadrilátero (ver fig. siguiente).



A continuación debe estudiarse la clasificación de los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.

En grados anteriores los alumnos han estudiado esta clasificación y es posible que reconozcan estas figuras, no obstante, consideramos que es conveniente presentar a los alumnos una ilustración como la figura siguiente y dar aquí las definiciones de paralelogramo y trapecio.





paralelogramo rectángulo rombo cuadrado

15.2. El paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos recibe el nombre de rectángulo.

El paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales se llama rombo

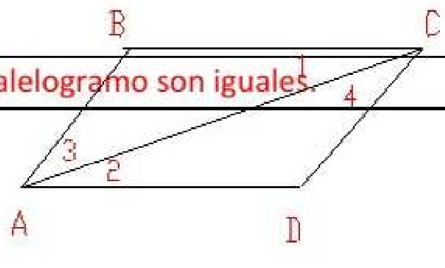
El cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos recibe el nombre de trapecio.

Es necesario aclarar a los alumnos que atendiendo a las definiciones, los paralelogramos son un caso particular de trapecio. Resulta conveniente mostrar una ilustración como la figura siguiente donde se aprecia que los paralelogramos son subconjunto de los trapecios.

Una vez aclarado todo lo necesario respecto a la clasificación de los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados se pasa hacer el estudio más detallado de los paralelogramos.

Se puede iniciar este tratamiento dando la noción de altura de un paralelogramo. Posteriormente se puede enunciar el teorema sobre la igualdad de los lados opuestos de un paralelogramo. Para su demostración utilizamos la caracterización ALA para la congruencia de triángulos.

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.



Demostración

Descomponemos el paralelogramo ABCD en triángulos, trazando una de sus diagonales, .en el ΔABC y ΔADC

$\angle 1 = \angle 2$ } Por alternos entre

$\angle 3 = \angle 4$ paralelas

AC lado común

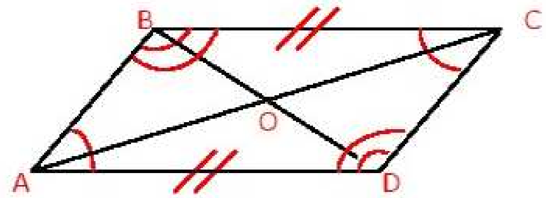
Por tanto $\Delta ABC = \Delta ADC$ por A.L.A.

$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ BC = AD \end{array}\right\}$ elementos homólogos de triángulos iguales

Después se sugiere presentar y demostrar los siguientes teoremas.

15.3. 2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

15.3.1.1.1.1. Demostración



Por el teorema anterior BC = AD Y AB = CD.

BD lado común

Por LLL se tiene que $\Delta ABC \equiv \Delta ACD$

$$\textbf{por tanto,} \begin{cases} \angle BCD = \angle BAD \\ \angle ADC = \angle ABC \end{cases}$$

De manera similar se demuestra:

15.4. **3. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.**

Los teoremas recíprocos de los tres anteriores también se aplican con frecuencia.

Sus enunciados son los siguientes:

15.5. 4. Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, entonces éste es un paralelogramo.

15.6. 5. Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, entonces éste es un paralelogramo.

16.

16.1. 6. Si las diagonales de un cuadrilátero convexo se intersecan en su punto medio entonces este es un paralelogramo.

Finalmente se deben analizar los enunciados de los últimos teoremas de manera que quede claro en los alumnos, cómo es que estos se enuncian a partir de los teoremas primeros.

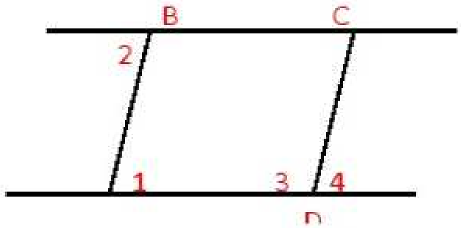
Se debe plantear a los alumnos los ejercicios siguientes. Los ejercicios 1, 3, 4, 6 y 10 son orales y no deben dejar de hacerse.

1. Resuma en un solo enunciado:
   a. los teoremas 1 y 4
   b. los teoremas 2 y 5
2. Un ángulo exterior del paralelogramo *ABCD* tiene 155º de amplitud. Hallar las amplitudes de sus ángulos interiores.
3. Diga si el cuadrilátero *ABCD* es o no un paralelogramo en cada uno de los casos siguientes.

a. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$

b. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 4$

Fundamente sus respuestas.



4. **Fundamente la siguiente propiedad:**

En todo paralelogramo la suma de las amplitudes de dos ángulos consecutivos es igual a 180°.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar la amplitud de los ángulos del paralelogramo *ABCD:*

a. $\angle A = 84^{\circ}$

b. $\angle A + \angle C = 142^{\circ}$

6. Diga si existe algún paralelogramo *ABCD* que cumpla las condiciones siguientes:

a. Todos sus ángulos son agudos

b. $\angle A$ y $\angle C$ agudos.

c. $\angle A$ es agudo y $\angle B$ es obtuso

d. $\angle A$ recto y $\angle B$ agudo.

Fundamente sus respuestas.

7. Una diagonal de un paralelogramo forma con dos de sus lados ángulos de 30° y 50° Hallar las amplitudes de los ángulos del paralelogramo.

8. Demuestre que una diagonal de un paralelogramo divide a éste en dos triángulos iguales.

9. Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos y el perímetro de cada uno de ellos es de 6,0 cm. Calcule la longitud de la diagonal si se conoce que el perímetro del paralelogramo es de 7,0 cm.

10. Dos lados de un paralelogramo tienen 3 cm y 5 cm de longitud respectivamente. Diga si la diagonal de este paralelogramo puede medir:
    a. 10 cm
    b. 8 cm
    c. 4 cm

11. Diga si existe algún paralelogramo en el que las diagonales y un lado tengan respectivamente las longitudes siguientes:
    a. 4 cm, 10 cm, 6 cm
    b. 8 cm, 10 cm, 9 cm
    c. 8 cm, 10 cm, 10 cm

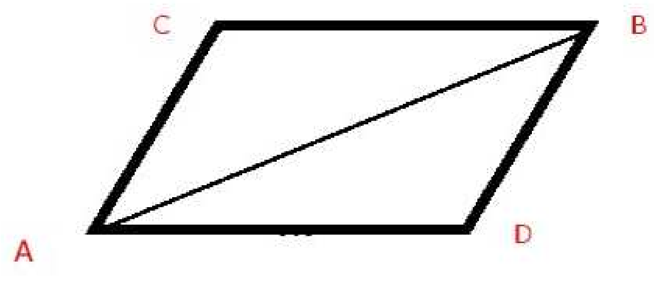
12. La bisectriz de un ángulo interior de un paralelogramo, al intersecar uno de sus lados, lo divide en dos segmentos: uno de 4,0 cm y otro de 5,0 cm de longitud. Calcule el perímetro del paralelogramo.

13. Demuestre que si un cuadrilátero convexo tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, entonces es un paralelogramo.

<u>Sugerencias y aclaraciones sobre la ejercitación</u>:

<u>EJERCICIO 9</u>: Si el perímetro del paralelogramo es de 7 cm, la suma de las longitudes de sus dos lados consecutivos es de 3,5 cm. El triángulo ABC está formado por dos lados consecutivos del paralelogramo y la diagonal y por tanto la longitud de ésta es de 2,5 cm.

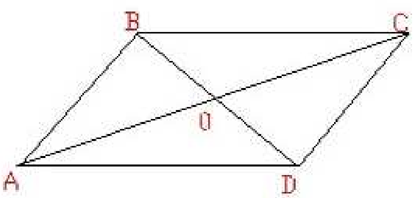
(6 cm – 3,5 cm = 2,5 cm).

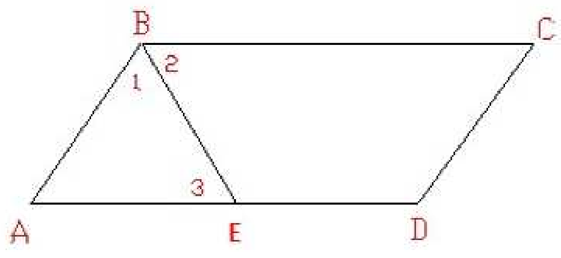


EJERCICIO 11 a): Se analiza el triángulo BOC. Sus lados tienen longitudes de 2 cm, 5 cm y 6 cm respectivamente y los segmentos que tienen estas longitudes cumplen la desigualdad triangular. A partir del Δ BOC se obtiene el paralelogramo ABCD que cumple las condiciones del problema.

En los incisos b) y c) los lados del Δ BOC no cumplen la desigualdad triangular.

EJERCICIO 12: En la figura, BE es la bisectriz de $\angle$ B. Puede darse dos casos: AE = 4 cm y ED = 5 cm o viceversa.





1er caso. AE = 4 cm.

Como $\angle 1 = \angle 2$ por ser BE bisectriz de $\angle B$

Y $\angle 2 = \angle 3$ por alternos entre paralelas

$\angle 1 = \angle 3$ por carácter transitivo

AB = AE = 4 cm por oponerse a ángulos iguales en ΔABE

AD = 4 cm + 5 cm = 9 cm

P = 2 (4 cm) + 2 (9 cm) = 26 cm (P – perímetro)

2do caso: AE = 5 cm.

P = 2 (5 cm) + 2 (9 cm) = 28 cm.

16.1.1.1.1.4.2. Paralelogramos especiales: rectángulos, rombo y cuadrado.

Para el desarrollo de este punto se dispone de 4 horas. El objetivo del estudio de este punto es que los alumnos comprendan las definiciones de rectángulo, rombo y cuadrado, así como sus propiedades fundamentales, de manera que sean capaces de aplicarlas en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo, de demostración y de construcción.

Este punto se inicia con la definición de rectángulo que tiene aplicación en la demostración del teorema, que debe tratarse a continuación.

16.2. El paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos recibe el nombre de rectángulo.

TEOREMA

16.3. Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Premisa: *ABCD* rectángulo

Tesis: $\overline{DB} = \overline{AC}$

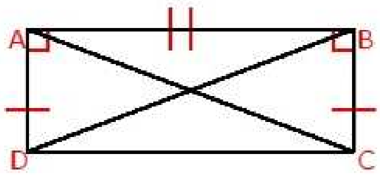
16.3.1.1. DEMOSTRACIÓN

$\Delta ADB \quad y \quad \Delta ABC$ (fig. siguiente)

$\overline{AD} = \overline{BC}$ propiedades del rectángulo

$\angle DAB = \angle ABC = 90°$

$\overline{AB}$ lado común



Por tanto $\Delta ABC \equiv \Delta ADB$ por la L.A.L.
Y $\overline{DB} = \overline{AC}$ lados homólogos de triángulos iguales.

La demostración del teorema es sencilla por lo que sugerimos que se plantee para que sea realizada por los alumnos de forma independiente.

Una vez enunciado el teorema, el profesor puede pedir a los alumnos que escriban cuál es la premisa y cuál es la tesis del teorema.

A los alumnos que afronten dificultades en la búsqueda de la idea de la demostración se les puede sugerir lo siguiente:

- Dibuje el rectángulo.
- Queremos probar una propiedad de las diagonales, luego resultará útil trazar las diagonales en la figura que hemos dibujado.
- Analizar la premisa para precisar todos los datos que ella aporta.

Después de hecha la demostración se debe proponer a los alumnos la ejercitación siguiente.

Para resolver los ejercicios 1 y 2 los alumnos deben precisar los datos que se dan. Es importante que el profesor destaque la diferencia entre los datos de los ejercicios 1 y 2.

1. Demuestre que si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.

2. **Demuestre que un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, entonces es un rectángulo.**

3. Demuestre que si un paralelogramo no tiene ángulos agudos, entonces es un rectángulo.

4. Las diagonales de un rectángulo ABCD se intersecan en el punto O. Demuestre que los triángulos AOB y AOD son isósceles.

5. El perímetro de un rectángulo es 12 cm. Calcule la suma de la distancias de un punto interior a cada uno de sus lados.

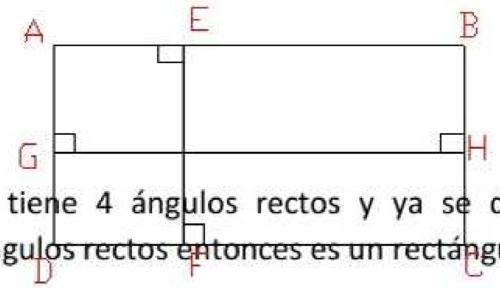
6. **Construya un rectángulo conociendo que dos de sus lados consecutivos miden 3 cm. y 5 cm, respectivamente.**

Las soluciones de los ejercicios anteriores se deben presentar de forma organizada y con la fundamentación de cada uno de los pasos.

En la solución del ejercicio 6 los alumnos pueden afrontar algunas dificultades para hacer la fundamentación. De una manera intuitiva es posible que lleguen a la conclusión de que al trazar las distancias del punto considerado a los lados opuestos se forma un segmento y que éste es paralelo a los otros dos lados del rectángulo, entonces el profesor debe ayudarlos a hacer la fundamentación.

Sugerimos que se le explique a los alumnos lo siguiente:

En la figura tenemos que EF y PF son segmentos que pertenecen a la recta EF perpendicular a AB y DC.



El cuadrilátero AEFD tiene 4 ángulos rectos y ya se demostró (ejercicio) que si un cuadrilátero tiene 3 ángulos rectos entonces es un rectángulo, por tanto EF = AD

De forma análoga se demuestra que GH = AB.

Una vez concluida la ejercitación se puede tratar las definiciones de rombo y cuadrado, destacando que un cuadrado es a la vez rombo y rectángulo.

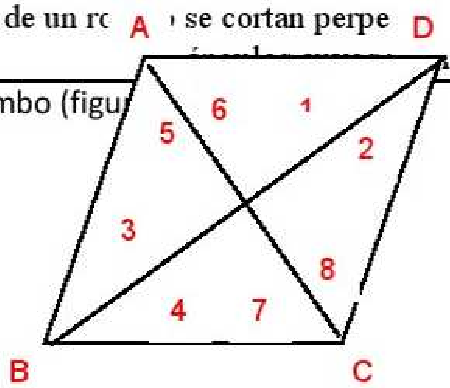
16.3.1.1.1.1.1.1.1.El paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales recibe el nombre de rombo

El paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales recibe el nombre de cuadrado.

El teorema sobre las diagonales del rombo no se va a demostrar en clase, sugerimos que esta demostración sencilla se oriente como tarea y se controle su estudio posteriormente.

Las diagonales de un rc se cortan perpe urmente y cada una es bisectriz de los ces unen.

Premisa ABCD rombo (figu



$$\textit{Tesis}: \begin{cases} \mathbf{1.}\ \overline{BD} \perp \overline{AC} \\ \mathbf{2.}\ \overline{AC}: \textit{bisectriz de } \angle A \text{ y } \angle C \\ \quad \overline{BD}: \textit{bisectriz de } \angle B \text{ y } \angle D \end{cases}$$

Demostración.

1) Los puntos B y D equidistan de los extremos de $\overline{AC}$, por tanto la recta BD es mediatriz de $\overline{AC}$ (es un eje de simetría) y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

2) Por la reflexión de eje BD, $\angle 1$ se transforma en $\angle 2$ por tanto $\angle 1 = \angle 2$ (propiedad de la reflexión). Análogamente podemos probar que $\angle 3 = \angle 4$, y por consiguiente, BD es bisectriz de los ángulos B y D del rombo.

De forma análoga se puede probar que la recta AC es bisectriz del $\angle$ A y $\angle$ C.

El teorema siguiente debe enunciarse a continuación y aclarar a los alumnos que en él se resumen las propiedades que poseen las diagonales del cuadrado por ser este rectángulo y rombo.

Las diagonales del cuadrado son iguales, se intersecan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulo cuyos vértices unen.

Proponemos se realicen los siguientes ejercicios

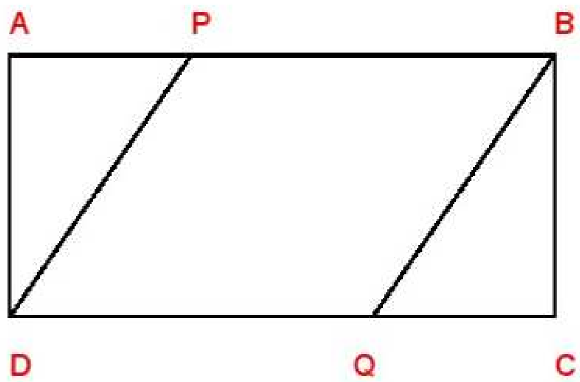
1. La diagonal de un rombo forma con uno de sus lados un ángulo de 40°. Halle las amplitudes de los ángulos del rombo.

2. Una diagonal de un rombo tiene la misma longitud que uno de sus lados. Calcule las amplitudes de los ángulos de este rombo.

3. Construya un rombo ABCD del que se conoce:
   a. $\angle$ A = 50° y $\overline{AC}$ = 4 cm.
   b. $\overline{AC}$ = 5 cm y $\overline{BD}$ = 3
   c. $\overline{BD}$ = 6 cm y $\angle$ A = 110°

4. En un rombo ABCD, $\overline{AC}$ = 8,0 cm y $\overline{BD}$ = 5,0 cm. Calcule el perímetro del triángulo COB (O punto de intersección de las diagonales).

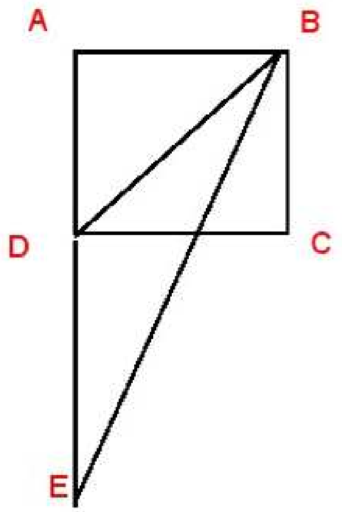
5.- En la figura siguiente, ABCD es un rectángulo y DPBQ es un rombo, $\angle$ QBC=30° y $\overline{QC}$ = 4 cm. Calcule las amplitudes de los ángulos interiores y el perímetro de DPBQ.



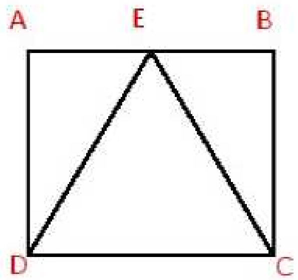
6. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamente sus respuestas.

   a. Un cuadrilátero que tenga sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados iguales es un cuadrado
   b. Un rectángulo cuyos lados son iguales es un cuadrado.
   c. Un rombo cuyas diagonales son iguales es un cuadrado.

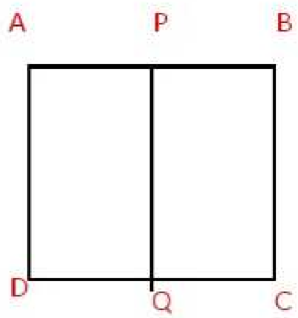
7. En la figura siguiente, ABCD es un cuadrado y el lado $\overline{AD}$ se prolonga de manera que $\overline{DE}$ = $\overline{DB}$. Calcule las amplitudes de los ángulos del triángulo EDB.



8. En la figura siguiente ABCD es un cuadrado y E punto medio de $\overline{AB}$. Demuestre que Δ DEC es isoscéles.



9.- En la figura, ABCD es un cuadrado y PQ||AD. Demuestre que APQD es un rectángulo.



10.- Construya un cuadrado ABCD del que se conoce:

a. $\overline{AB}$ = 2 cm.
b. $\overline{AC}$ = 6 cm.

11.- Calcule el perímetro de un cuadrado ABCD del que se conoce que la suma de las distancias de un punto interior de este cuadrado a cada uno de sus lados es de 8,0 cm.

12.- Determine la posición de un punto que equidista de los vértices de un cuadrado.

<u>Aclaraciones sobre los ejercicios propuestos</u>.

El sistema incluye ejercicios de cálculo, de demostración y de construcción.

No debe dejar de resolverse en clase el ejercicio 6, que ayuda a la mejor comprensión de los conceptos de rectángulo, rombo y cuadrado. Este ejercicio se hará oralmente, pero el profesor debe pedir una fundamentación clara de los razonamientos que hagan los alumnos.

En los ejercicios de construcción se pedirá también que los alumnos fundamenten el procedimiento empleado.

<u>EJERCICIO 2</u>: Al trazar la diagonal se forman dos triángulos equiláteros y de ellos es conocido que las amplitudes de sus ángulos es de 60°.

<u>EJERCICIO 3</u>: En la fundamentación de las construcciones se aplican la definición de rombo y sus propiedades.

Por ejemplo, en el ejercicio 6 a) lo primero que se construye es el ángulo A y el resto de la construcción se fundamenta aplicando la definición y propiedades de rombo.

Los pasos de la construcción son los siguientes:

Se construye el ángulo A

Se traza la bisectriz de $\angle$ A y se determina sobre ella el punto C, conociendo que AC = 4 cm.

Se trazan por C rectas paralelas a los lados del $\angle$ A

<u>EJERCICIO 5</u>: Como ΔQBC es rectángulo y QC se opone a un ángulo de 30° tenemos que:

$$QB = 2\,QC \quad , \quad QB = 8 \text{ cm}$$

<u>EJERCICIO 9</u>: La vía más rápida para hacer la demostración es la de probar que el cuadrilátero APQD tiene tres ángulos rectos.

La propiedad que se aplica se demostró en el ejercicio 2.

Los alumnos pueden hacer el ejercicio por cualquier vía siempre que se fundamente adecuadamente; pero el profesor no debe dejar de señalar que la vía a que hicimos referencia es la más corta.

<u>EJERCICIO 11</u>: El perímetro es de 16 cm, o sea, el doble de la suma de las distancias del punto a los lados.

16.3.1.1.2.4.3 Trapecios

Para el desarrollo de este punto se dispone de 2 horas.

La definición de trapecio se estudió cuando se hizo la clasificación de los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados y ahora en este punto corresponde hacer un tratamiento más detallado de sus elementos y propiedades fundamentales.

Al iniciar la primera clase de este punto, el profesor puede preguntar a los alumnos la definición de trapecio y a continuación hacer el estudio de sus elementos, de la propiedad de la paralela media del trapecio y de los trapecios isósceles y rectángulos.

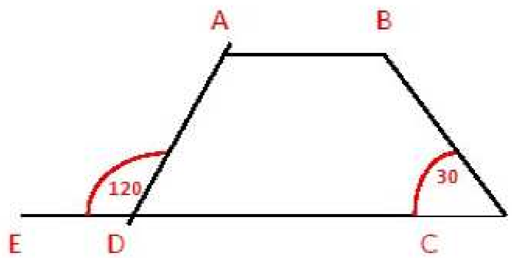
El teorema que trata sobre una propiedad de los trapecios isósceles no se demostrará en clase.

A continuación se pueden resolver los ejercicios siguientes.

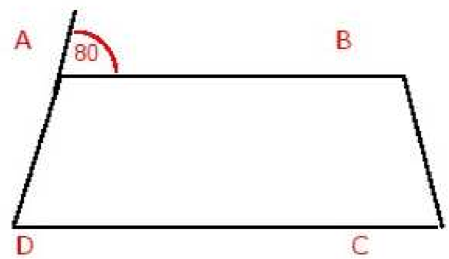
1. Fundamente por qué la siguiente proposición es verdadera:

La suma de las amplitudes de los ángulos que forma uno de los lados no paralelos de un trapecio con las bases es igual a 180°.

2. En la figura siguiente, ABCD es un trapecio. Calcule $\angle A$, $\angle B$ y $\angle ADC$



3. En la figura siguiente ABCD es un trapecio isósceles. Calcule las amplitudes del resto sus ángulos interiores.



4.
   a. Un ángulo de un trapecio rectángulo tiene $75°$ de amplitud. Calcule las amplitudes del resto de sus ángulos.
   b. Analice si un trapecio rectángulo puede ser también un trapecio isósceles. Fundamente su respuesta.

5. Demuestre que las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

6. Las bases de un trapecio miden 28 cm y 42 cm, respectivamente. Calcule la longitud de su paralela media.

7. Un trapecio isósceles tienen 34 cm de perímetro y sus bases miden 10 cm y 14 cm, respectivamente. Calcule la longitud de sus lados no paralelos.

8. La paralela media de un trapecio tiene una longitud de 12 cm y los lados no paralelos miden 10 cm y 18 cm, respectivamente. Calcule el perímetro del trapecio.

9. Diga si existe algún trapecio que cumpla las condiciones siguientes.
   a. Tiene dos ángulos rectos.
   b. Tienen tres ángulos rectos.
   c. Tiene tres lados iguales.

   Fundamente sus respuestas.

Los profesores deben orientar a los alumnos, como tarea, el estudio del resumen de las propiedades de los cuadriláteras convexos.

Aclaraciones a las soluciones de los ejercicios:

EJERCICIO 9:

a. Sí existen trapecios que cumplan las condiciones del problema, por ejemplo los trapecios rectángulos y los rectángulos (también son trapecios).

b. Los rectángulos cumplen las condiciones establecidas.

c. Sí existen trapecios con las características señaladas. Por ejemplo, los trapecios isósceles en los que los lados no paralelos tienen la misma longitud que una de las bases: los rombos.

16.3.1.1.3.4.4 Cálculo del perímetro y el área de polígonos.

Para el desarrollo de este punto se dispone de 6 horas

El objetivo esencial del estudio de este punto es que los alumnos conozcan y memoricen las fórmulas para el cálculo del perímetro y el área de polígonos de manera que las apliquen convenientemente en la resolución de ejercicios y problemas.

Para motivar el estudio de estos contenidos que tienen tanta aplicación en la vida práctica, los profesores pueden plantear a los alumnos un problema donde se aprecie la necesidad de calcular el área o el perímetro de polígonos.

Por ejemplo, se puede plantear un problema como el siguiente:

Se quiere enlosar el piso de una habitación rectangular de 5 m de ancho y 6 m de largo con losas cuadradas de 25 cm de lado. ¿Cuántas losas aproximadamente se necesitan para enlosar el piso?

En este problema se aprecia la necesidad de conocer las formulas para calcular el área de un rectángulo y de un cuadrado.

Las formulas para el cálculo de las áreas de los diferentes polígonos no se van a demostrar; pero si es necesario hacer un trabajo dirigido a que los alumnos comprendan la vía mediante la cual se puede llegar a demostrar estas formulas en los casos del paralelogramo, el triángulo y el trapecio.

Para el tratamiento de las fórmulas sugerimos lo siguiente:

Primero se debe recordar la fórmula que los alumnos conocen de grados anteriores, para calcular el área de un rectángulo y finalmente llegar a la formula $A = b \times h$ por una vía rápida como la siguiente.

En grados anteriores se ha calculado el área de rectángulos y se conoce que ella se puede determinar midiendo el largo y el ancho del rectángulo y multiplicando sus longitudes. $A = a \times b$ (A: área; a: largo; b: ancho), o sea, el área del rectángulo es igual al producto de las longitudes de dos lados consecutivos.

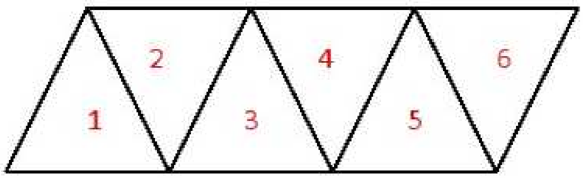
Con frecuencia, se acostumbra a llamar a uno de los lados del rectángulo lado base y al otro altura.

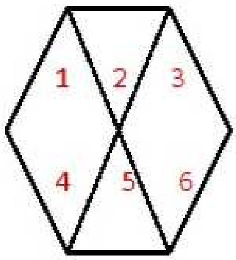
Es por eso que utilizando esta terminología la fórmula para determinar el área de un rectángulo se expresa de la forma siguiente:

$$\boxed{1.42.1.1.1 = b \times h}$$

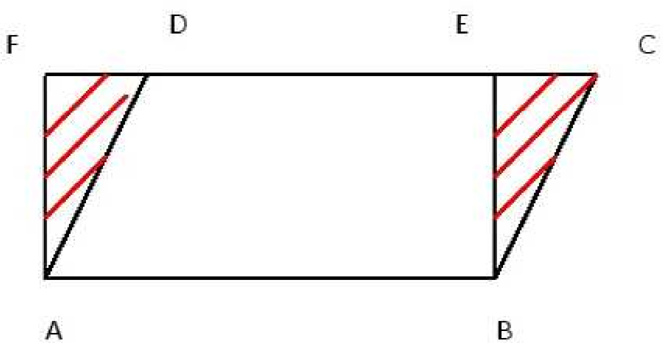
Donde b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura.

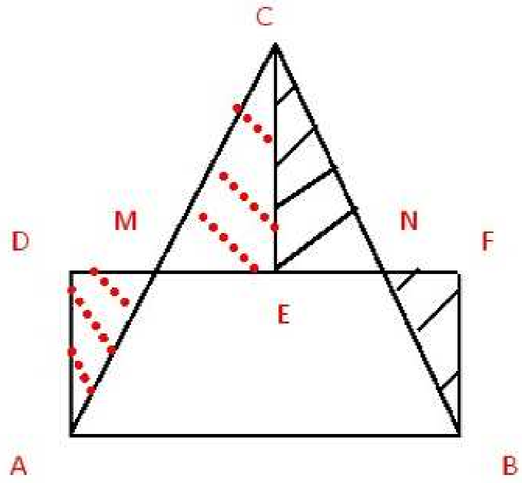
Después se debe explicar a los alumnos el concepto de "superficies equivalentes" y dar ejemplos similares al que se ilustra en la figura siguiente de manera que ellos puedan comprender la esencia del concepto.



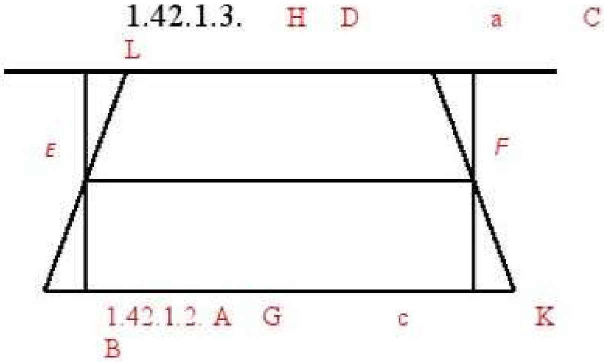


Apoyándose en el concepto de superficies equivalentes y en figuras similares a las siguientes se debe mostrar a los alumnos cómo se obtiene las fórmulas para el cálculo del área de paralelogramos, triángulos y rectángulos.





1.42.1.3.



1.42.1.2.

En todos los casos la idea es obtener la fórmula para calcular el área de la nueva figura, apoyándonos en la fórmula ya conocida para calcular el área del rectángulo.

La equivalencia de las superficies se demuestra haciendo aplicación de los criterios de congruencia de triángulos.

También se debe explicar a los alumnos, mostrando algunos ejemplos, que para calcular el área de un polígono cualquiera no utilizaremos una fórmula específica sino que se hará la descomposición del polígono en figuras más simples como los triángulos y los trapecios para los que ya conocemos la fórmula con la que calculamos el área.

El contenido referente a las fórmulas, se puede organizar como el profesor lo considere más provechoso. Se pueden tratar primero todas las fórmulas y después analizar los ejemplos siguientes en los que se les da aplicación o introducir cada fórmula y su ejemplo por separado.

EJEMPLO

Calcule el área de un paralelogramo de 3,2 cm de base y 4,0 cm de altura.

Resolución

Fórmula del área del paralelogramo:

$A = b \times h$	Cálculo auxiliar
$A = 3{,}2 \times 4{,}0$	$3{,}2 \times 4{,}0 = 12{,}8$

Es conveniente presentar el resultado con una cifra decimal ya que los datos tienen una cifra decimal: A = 13.

EJEMPLO

Calcule el área de un trapecio cuyas bases miden 3,4 dm y 3,6 dm respectivamente y que tiene una altura de 3,00 dm.

Resolución

Fórmula del área del trapecio:

$$A = \frac{(a + c)}{2} \cdot h$$

Cálculo auxiliar:

$3{,}4 + 3{,}6 = 7{,}0$

$7 \times 3 = 21$

$21 \div 2 = 10{,}5$

$10{,}5 \approx 11$

$$A = \frac{(3,4 + 3,6) \times 3}{2}$$

$$A = \frac{7 \times 3}{2}$$

$$A = \frac{21}{2}$$

$$A = 10,5\, dm^2$$

EJEMPLO

Calcular la altura de un triángulo cuya área es de 24,3 m^2 y que tiene 5,1 m de base.

<u>Resolución</u>

Fórmula del área del triángulo:

(Primero se despeja h en la fórmula)

$A = \dfrac{b \times h}{2}$ $\qquad h = \dfrac{2 \times 24{,}3}{5{,}1}$ $\qquad$ Cálculo auxiliar :

$2 \times 24{,}3 = 48{,}6$

$48{,}6 \div 5{,}1 = 9{,}52$

$2 \times A = b \times h$ $\qquad h = \dfrac{4{,}86}{5{,}1}$ $\qquad$ El resultado debe darse con dos cifras

$9{,}52 \approx 9{,}5$

$\dfrac{2A}{b} = h$ $\qquad h = 9{,}5 \text{ m}$

El objetivo esencial de los ejemplos presentados es mostrar a los alumnos la forma más adecuada de presentar la solución de los ejercicios y además que éstos observen la aplicación de las reglas del cálculo aproximado en el proceso de solución.
Finalmente se debe explicar a los alumnos la forma en que se calcula el perímetro de un polígono cualquiera y pasar a resolver el siguiente sistema de ejercicios.

Aclaraciones sobre las soluciones de los ejercicios.

En este sistema de ejercicios se incluyen ejercicios de construcción, de cálculo y de demostración en los que además de las fórmulas estudiadas se aplican propiedades de las diferentes figuras. No deben dejar de realizarse los ejercicios 4,10, 11, 12, 23, 24, 25 y 26.

1. En un triángulo, b es la longitud de la base, h la longitud de la altura y *A* es el área.
   a. Calcule *A*, si b = 8,0 cm, h = 3,0 cm
   b. Calcule *A*, si b = 4,6 cm, h = 5,0 cm
   c. Calcule *h* si *b* = 3,2 cm, *A* = 480 cm^2

2. El perímetro de un cuadrado es de 8,00 dm. Calcule su área en cm^2 .

3. Calcule el perímetro de un cuadrado que tiene un área de 25 m^2

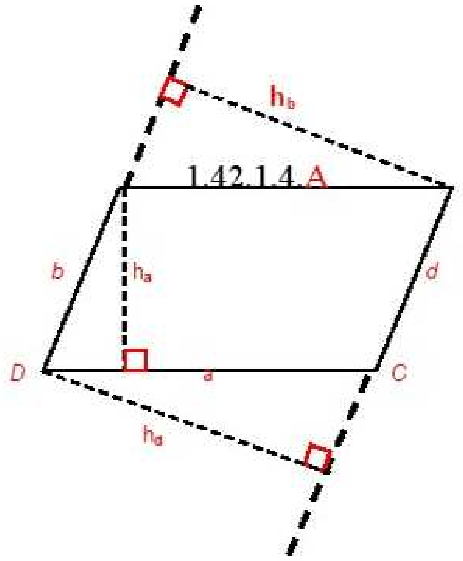
4. Se tiene un cuadrado cuyos lados miden 4,0 cm. Halle las longitudes de los lados de un rectángulo de 20 cm de perímetro y que tiene igual área que el cuadrado dado.

5. - En un triángulo, b es la longitud de la base, h es la longitud de la altura y A es el área.

   a. Calcule A, si b = 7,0 cm; h = 11,0 cm
   b. Calcule A, si b = 5,4 cm; h = 3,92 cm
   c. Calcule h, si b = 14 cm; A = 37,8 cm ^{2}

6. Calcule el área del paralelogramo ABCB (ver figura siguiente) si:

   a. a = 37,3 cm; h = 11.5 cm
   b. d = 11,6 cm; h = 10,4 cm
   c. b = 95,0 cm; h = 0,620 dm



7. Calcule el área de un trapecio, si las longitudes de sus bases son de 21,0 cm y 21,70 dm respectivamente, y su altura mide 7,00 cm.

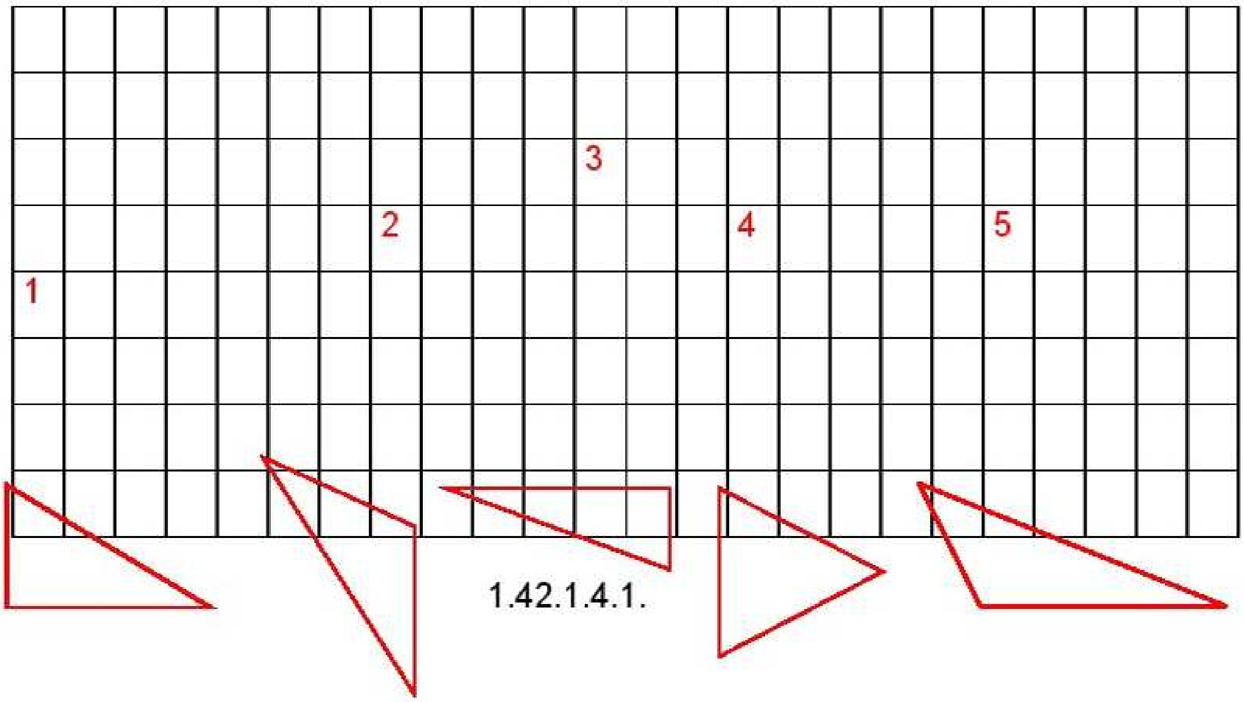
8.

   a. Dibuje un trapecio, haga las mediciones necesarias y calcule su área y su perímetro.

b. Construya un paralelogramo y un triángulo que tengan respectivamente la misma área que la del trapecio.

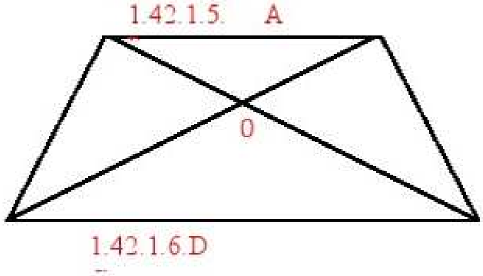
9. Calcule el área de un triángulo rectángulo si las longitudes de sus catetos son 4,0 cm y 11,2 cm respectivamente.

10. En la figura siguiente, aparecen dibujados sobre papel cuadriculado diferentes triángulos. Determinar cuáles de estos triángulos tienen la misma área.



1.42.1.4.1.

11. El cuadrilátero ABCD es un trapecio: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son sus bases (ver figura siguiente). Demuestre que $\Delta\, ADC$ y $\Delta\, BDC$ tienen la misma área.



1.42.1.6.1.

12. Demuestre que el área de un rombo es igual a $\frac{d_1 \times d_2}{2}$, donde d_1 y d_2 son sus diagonales.

13. ¿Qué área tiene la sección transversal, de forma trapezoidal, de un canal que mide en la parte superior 13,80 m de ancho, en la inferior 10,40 m de ancho y tiene 3,80 m de profundidad?

14. Calcule el perímetro de un triángulo *ABC* si:

a. *a* = 2,7 cm; b = 3,5 cm; c = 4,6 cm
b. *a* = 3,5 cm; b = 4,1 cm; c = 42 cm

15. En la tabla siguiente aparecen los datos sobre un trapecio *ABCD* ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$). Complete la tabla:

Base a	Base b	Paralela media *m*	Altura *h*	Área *A*
21 m	13 m		5,2 m	
44,0 cm		33,0 cm	12,0 cm	
102 dm		88 dm		440 dm^2

16. Calcule el perímetro de un paralelogramo en el que *a y b* son las longitudes de dos lados consecutivos.

a. *a = 2.7 m;* *b = 3.2* m
b. *a* = 11.2 km; *b* = 10.6 km

17. Calcule el área de un terreno en hectáreas, si éste es de forma rectangular y tiene 2.0 km de largo y 1.0 km de ancho

18. Calcule el área de un rombo cuyas diagonales miden 0,45 dm y 6,4 cm.

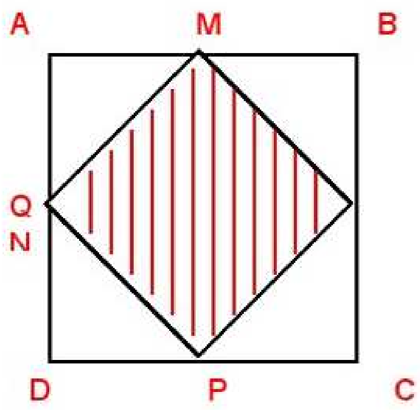
19. Dibuje un paralelogramo, haga las mediciones necesarias y calcule su área y su perímetro. Construya un rectángulo y un triángulo que tengan la misma área que el paralelogramo.

20. Dibuje un hexágono, descompóngalo adecuadamente y calcule su área.

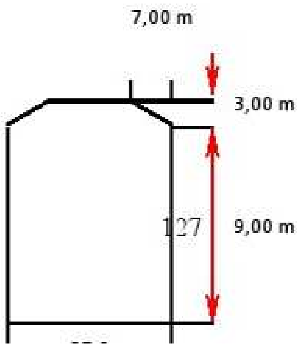
21. Dibuje un pentágono, descompóngalo adecuadamente y calcule su área.

22. Halle la longitud de los lados de un cuadrado equivalente a un triángulo de 4,0 cm. de base y 2,0 cm. de altura.

23. El cuadrado ABCD (ver figura siguiente) tiene 4,0 dm de lado. Si M,N,P,Q son los puntos medios de sus lados, halle el área de la parte sombreada.



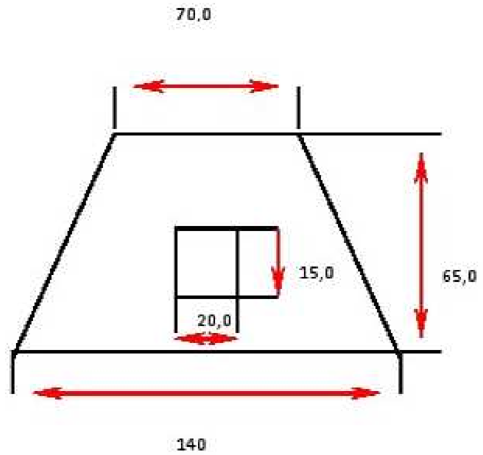
24. La figura siguiente muestra la fachada de una casa. La pared se debe pintar con pintura de aceite:

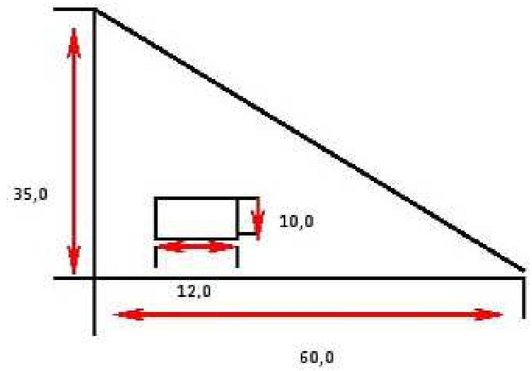


a. Calcule el área de la fachada de la casa

b. ¿Cuánto cuesta pintar la fachada si para cada metro cuadrado incluyendo todos los trabajos adicionales, se calcula un gasto de 245 000 sucres?

25. Calcule las áreas de las planchas metálicas representadas en las figuras siguientes. (medidas en milímetros).





26. Un circuito en el que tiene lugar una carrera de bicicletas tiene forma de hexágono regular y cada lado mide 150,0 m ¿Cuántos kilómetros ha recorrido un ciclista cuando ha dado 6 vueltas completas al circuito?

27. En un triángulo con un lado de 8,0 cm y otro de 4,0 cm se trazaron las alturas correspondientes a estos lados. La altura correspondiente al lado de 8,0 cm de longitud mide 3,0 cm. ¿Cuál es la longitud de la otra altura?

Aclaraciones y sugerencias del sistema de ejercicios

EJERCICIO 4: En este ejercicio es necesario encontrar dos números cuyo producto sea 16 y su suma 10 (la mitad del perímetro).

EJERCICIO 10: Para determinar el área de los triángulos se determina la longitud de un lado y la altura correspondiente, tomando como unidad de medida la longitud de un lado de cada cuadradito.

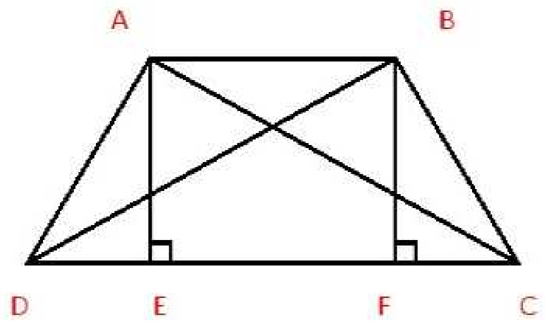
EJERCICIO 11: Para hacer la demostración se comparan las bases y las alturas de los triángulos.

Analizando los triángulos en la figura nos percatamos que tienen el lado DC común, entonces surge la idea de comparar las alturas correspondientes a estos lados. Para que los triángulos tengan igual área las alturas consideradas deben ser iguales.

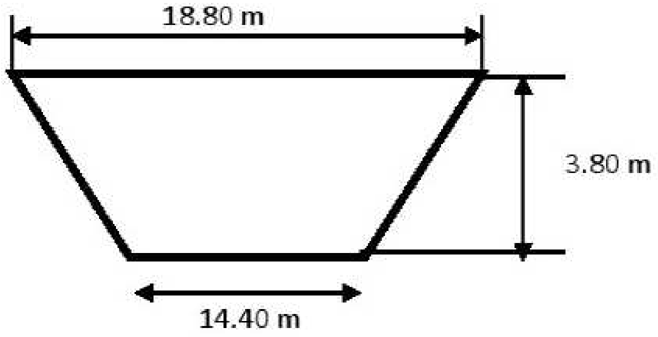
La demostración de la igualdad de las alturas es sencilla. Al trazarlas se forma el cuadrilátero ABEF que es un paralelogramo y AB || EF por ser AB y DC bases del trapecio y AE || BF por ser ambas perpendiculares a DC, por tanto AE = BF (lados opuestos de un paralelogramo)

EJERCICIO 12: Se construye un rombo y se trazan sus diagonales. Las diagonales del rombo son perpendiculares y se intersecan en su punto medio, por tanto:

$$A_{ABC} = A_{ADC} = \frac{d_1 \times \frac{d_2}{2}}{2} \qquad A_{ROMBO} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$



EJERCICIO 13: La sección transversal del canal se representa en la figura siguiente.



EJERCICIO 18: En la solución de este ejercicio se aplica la fórmula que se demostró en el ejercicio 12.

EJERCICIO 23: Para hallar el área de la parte sombreada se puede proceder de la forma siguiente:

1ra vía:

Calcular el área del cuadrilátero ABCD y restarle la suma de las áreas de los triángulos rectángulos AMQ, MBN, NCP y PDQ.

Los cuatro triángulos son iguales, por lo que la suma de sus áreas se obtiene cuadriplicando el área de uno de ellos. Es necesario fundamentar los pasos de la solución aplicando propiedades de los triángulos y los cuadrados.

2da vía:

Se puede probar inicialmente que el cuadrilátero QMNP es un cuadrado y que sus diagonales tienen la misma longitud que un lado del cuadrado ABCD. El área se puede calcular aplicando la fórmula que se mostró en el ejercicio 12.

Ejercicios que representan las exigencias mínimas parciales de la unidad temática.

- Ejercicios donde se apliquen la clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades al cálculo de algunos de sus elementos y a la fundamentación de proposiciones.
- Ejercicios de construcción donde se apliquen los conceptos y las propiedades de los cuadriláteros estudiados.
- Ejercicios de demostración donde se apliquen los conceptos y las propiedades estudiadas.
- Ejercicios sobre el cálculo del área y el perímetro de cuadriláteros u otros polígonos.

17.

MÓDULO DE ARTICULACIÓN ENTRE EL SÉPTIMO GRADO Y OCTAVO GRADO

1. INTRODUCCIÓN

El séptimo grado debe ser la prolongación de los seis primeros años, en el sentido de consolidar conocimientos básicos y fundamentalmente, el manejo de las operaciones. El octavo grado constituye el primer paso hacia la iniciación en el razonamiento matemático. Es necesario, entonces dar paso a una evolución adecuada de esta articulación pedagógica.

Para esto se tendrá en cuenta los siguientes aspectos::

- Las nociones nuevas deberán aparecer con la ayuda de ejemplos familiares a los alumnos. A partir de estos ejemplos los estudiantes estarán en condiciones de continuar con una exploración del tema propuesto, por medio de la búsqueda personal.
- Los ejercicios simples deben dar lugar a afirmar los conocimientos, y llegar a nuevos descubrimientos.

Al iniciar el octavo grado, el profesor debe tener en cuenta que su trabajo es lograr una formación intelectual del niño. Debe tratar de ampliar las aptitudes intelectuales e impulsar su desarrollo. Un trabajo bien guiado puede dar excelentes resultados. La articulación de la clase en equipos, debe realizarse únicamente en casos de solución de problemas que presentan alguna dificultad, o preparación de un trabajo de revisión, o casos muy puntuales; siempre bajo el control del profesor. Las actividades deben ser preferiblemente individuales, de manera que cada alumno consiga encontrar por si solo el camino de resolución .

Los deberes, lecciones, ejercicios, en general, no deben pasar de las posibilidades de la media de la clase. Esto no impide que el profesor proponga a los mejores alumnos un complemento a los deberes dados, o la preparación de nuevos temas. Esto motiva a los más ágiles. Y de esta manera, el curso no se siente desanimado al tener que enfrentar tareas demasiado difíciles.

Pruebas cortas, diarias, permitirán el control del trabajo personal y del esfuerzo hecho por el estudiante para adquirir y asimilar la lección anterior.

Aparte de la lección regular, las preguntas orales, de respuestas rápidas, y los ejercicios improvisados, deben ser constantes en el curso de la clase. Esto permite evaluar la atención y promover la participación permanente.

2. PROCESOS DE DESARROLLO DEL NIÑO

Los psicólogos distinguen diferentes fases en el desarrollo del niño, y de éstas depende la acción pedagógica.:

2.1. Desarrollo senso - motriz

El niño a la edad de 11 años inicia la adolescencia y una serie de transformaciones físicas e intelectuales; la altura del niño aumenta más rápido que el peso, el crecimiento de los órganos es apenas apreciable, el desarrollo de los músculos es mucho mayor, y hay una disminución de crecimiento de la cabeza con respecto al cuerpo.

2.2. Desarrollo intelectual

Si se define a la inteligencia como facultad de adaptación e invención, y se distinguen dos tipos, la inteligencia práctica, y la inteligencia teórica o de abstracciones. De hecho esta distinción no es exacta. La noción de inteligencia es bastante compleja, pero sí podemos decir que la inteligencia está relacionada con la personalidad del individuo y su equilibrio. De esta manera es posible mejorar esta inteligencia, a través de factores que desarrollen y den seguridad a la personalidad.

2.2.1. EVOLUCIÓN DEL PENSAMIENTO INFANTIL

El psicólogo suizo Jean Piaget hizo un estudio científico de la formación de la inteligencia. La clasificó en diferentes estadios:

EDAD	CARACTERIZACIÓN DEL ESTADIO	NATURALEZA DE LOS ESQUEMAS INTELECTUALES
4 a 7 años	Pensamiento intuititvo o preoperatorio impregnado de egocentrismo	Esquemas preoperatorios no reversibles y dominados por la percepción.
7-8 a 11-12 años	Pensamiento operatorio concreto y descentrado.	Esquemas operatorios reversibles ligados a la acción y no formalizables.
Después de los 12 años	Pensamiento hipotético deductivo.	Esquemas operatorios formalizables y separados de la acción.

2.2.2. EVOLUCIÓN PSÍQUICA Y MORAL

Entre los 9 y 10 años, prima el sentido de la injusticia, y el niño siente que hay preferencias individuales. Alrededor de los 11 o 12 años hay más equidad, y aceptación de los compañeros más favorecidos, o de las circunstancias que permiten mayor beneficio para algunos. La adquisisón de la capacidad de abstracción determina el predominio del pensamiento abstracto y conceptual; esto permite al niño un conocimiento más adecuado y profundo de las cosas, y le lleva a reflexiones y cuestionamientos más precisos acerca de la realidad.

3. MÉTODOS

17.1.1.1.1.Debe existir una pedagogía que considere a la vez la naturaleza de la matemática y la del niño. Por un lado la matemática es, por esencia, abstracta y deductiva, y por otro, el niño es incapaz de razonar lógicamente. Así, en el nivel de séptimo grado, todavía se trabajará con una matemática basada en situaciones prácticas, para iniciar en octavo, un proceso más abstracto.

3.1. El proceso de matematización

Se trata de matematizar lo real, que tiene tres niveles:

a. **De los objetos y sus representaciones (imágenes mentales).** Las cosas poseen una individualidad propia en el espacio y en el tiempo.

b. **De los conjuntos de objetos.** Son las relaciones que existen entre los diversos objetos de un conjunto.

c. **De las acciones.** Son las intervenciones susceptibles de modificar los objetos o los grupos de objetos.

A partir de lo real, el profesor puede pretender que los alumnos conciban una ley o una noción matemática. Se procede entonces a la matematización.

Matematizar una situación significa lograr una representación, una descripción en lenguaje convencional. Es necesario crear un modelo. Si el modelo no es conocido por el alumno, el maestro guiará a la reflexión.

La matematización de lo real no se reduce a la simple descripción de situaciones; es un llamado a actividades de organización, invención, decisión, simulación, repetición.

3.2. Organización de las actividades

17.1.1.1.2. Etapas de construcción de una noción.

a. Sensibilización y familiarización a través de ejemplos.
b. Estructuración y esquematización.
c. Aplicación en otras situaciones.

Las actividades matemáticas deben permitir a los alumnos desarrollar actitudes de investigación y motivación.

17.1.1.1.2.1. Organización de la clase

a. El trabajo en grupo obliga a los niños a explicitar los objetivos, las etapas de sus investigaciones y validar resultados. Es el momento para que la clase se apropie del razonamiento y lenguaje matemático.

b. Las secuencias de actividades matemáticas, en sucesión de ejercicios, o de trabajos diversos, da lugar a la toma de conciencia de las diferentes fases del aprendizaje.

4. PROGRAMA Y DISTRIBUCIÓN

4.1. Objetivos del séptimo grado.

Al finalizar el séptimo grado, y completar una etapa de aprendizaje elemental, el alumno deberá estar en capacidad de:

En el sistema numérico,:

1. Resolver situaciones prácticas.
2. Escribir, nombrar y comparar números naturales, decimales y en escritura fraccionaria.
3. Calcular con estos números.

En el sistema de funciones:

1. Representar y utilizar funciones numéricas
2. Resolver problemas de proporcionalidad.

En el sistema geométrico y de medida:

1. Describir y representar objetos geométricos.
2. Manejar los instrumentos de medida.
3. Calcular longitudes, áreas y algunos volúmenes.

En el sistema de estadística y probabilidad:

Interpretar algunos gráficos.

4.2. Desarrollo pedagógico

17.1.1.1.3. En cada uno de los campos matemáticos observados, los alumnos deben manejar las nociones matemáticas y cumplir con los pasos necesarios para arribar a ellas. El estudiante debe entrar en los dominios que implican los objetivos expuestos anteriormente:

RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PRÁCTICAS.

- Saber asociar la pregunta del problema con la información dada.
- Organizar esta información.
- Comunicar los resultados obtenidos.

NÚMEROS

- Manejar el uso de las reglas de numeración escrita y oral.
- Reconocer bajo diferentes formas de escritura un mismo número.
- Comparar los numéros, ubicarlos de acuerdo con un orden, e intercalarlos entre otros dos.

CÁLCULO

- Reconocer, analizar y resolver situaciones que requieren de diversas operaciones.
- Dar sentido a las operaciones.
- Organizar y efectuar cálculos que requieran de suma, resta, multiplicación y división.
- Aplicar las propiedades de las operaciones.
- Manejar las técnicas operatorias.
- Manejar los procesos mentales de cálculo.
- Determinar el orden de magnitud y encuadrar los resultados de un cálculo.

REPRESENTACIÓN Y UTILIZACIÓN DE FUNCIONES NUMÉRICAS

- Elaborar e interpretar descripciones, orales, escritas o gráficas de relaciones numéricas.
- Reconocer, utilizar y representar las funciones entre un número *n* y $n+a$ o $n \times a$. Utilizar las propiedades de estas relaciones.
- Reconocer, organizar y tratar situaciones que requieren de funciones numéricas, y en especial, la proporcionalidad.

ACTIVIDADES GEOMÉTRICAS

- Reproducir, describir y representar diferentes objetos geométricos: líneas, superficies o sólidos.

- Construir estos objetos a partir de una descripción o de una representación.
- Escoger y utilizar el instrumento de medida adecuado en cada construcción.
- Identificar y construir rectas paralelas y perpendiculares.

MEDIDA

- Construir y utilizar sistemas de medida para las magnitudes estudiadas, de acuerdo con el sistema internacional de medida.
- Encuadrar el resultado de una medida.
- Utilizar correctamente los instrumentos de medida de longitud y masa.
- Medir intervalos de tiempo y calcular duraciones.
- Comparar ángulos.
- Determinar la longitud y área de rectángulos y triángulos, y volumen de un paralelepípedo.

ACTIVIDADES ESTADÍSTICAS

- Interpretar gráficos estadísticos sencillos.
- Aplicar la proporcionalidad en situaciones estadísticas.

4.3. Objetivos del octavo grado

Al iniciar la segunda etapa de la educación básica, los objetivos de aprendizaje son:

En el sistema numérico:

- Consolidar los conocimientos adquiridos en los niveles elementales, y asegurar la práctica de la cuatro operaciones en los números naturales, decimales y escritura fraccionaria.
- Ampliar los conocimientos numéricos a los números negativos.
- Adquirir conocimientos prácticos, de técnicas usuales, de métodos operatorios que le permitan resolver problemas simples, de tipo práctico, o de aplicación a ciencias experimentales.

En el sistema de funciones:

- Iniciarse en el vocabulario algebraico y en operaciones de reducción de téminos.
- Resolver ecuaciones simples.
- Interpretar situaciones y expresarlas en forma de ecuación.
- Interpretar gráficamente y resolver situaciones de proporcionalidad.

En el sistema geométrico y de medida:
- Reconocer, construir, y manejar nociones triángulos y paralelogramos, de sus elementos y propiedades.
- Reconocer, construir e interpretar isometrías planas.
- Reconocer y aplicar el teorema de Thales.

En el sistema de estadística y probabilidad.
- Interpretar y construir gráficos estadísticos.

Los objetivos de aprendizaje en la última etapa de la educación básica (octavo, noveno y décimo grados) van acompañados de objetivos concretos de desarrollo intelectual:

- Desplegar cualidades de observación y análisis.
- Partir de una representación concreta de los objetos y llegar a una conceptual, y desarrollar de esta manera la capacidad de abstracción.
- Iniciarse en el pensamiento deductivo y en el rigor lógico. Tomar conciencia de las fallas en el razonamiento.
- Desarrollar la imaginación. Concebir un método y encontrar ejemplos que caractericen una propiedad, o contraejemplos que anulen una posibilidad.
- Expresarse con vocabulario simple y preciso
- Desarrollar cualidades de orden.

4.4. Desarrollo pedagógico

Los estudiantes de octavo grado deberán manejar los siguientes aspectos de cada campo de trabajo:

ORGANIZACIÓN DE UN CÁLCULO

- Calcular espresiones con o sin paréntesis.
- Suprimir paréntesis.
- Aplicar la propiedad distributiva.
- Simplificar escrituras.

NÚMEROS RELATIVOS

- Concebir los números negativos y relacionarlos con situaciones reales.
- Comparar y organizar los números relativos en una recta numérica.
- Ordenar e intercalar números relativos.

CÁLCULO

- Sumar y restar números relativos
- Calcular expresiones respetando las reglas de simplificación.

ECUACIONES

- Reconocer y utilizar el vocabulario de ecuaciones.
- Resolver ecuaciones de las formas $a + x = b$ y $ax = b$.
- Traducir a ecuación un problema.

PROPORCIONALIDAD

- Reconocer una relación de proporcionalidad.
- Determinar y representar a escala, objetos de mayor o menor dimensión.
- Interpretar y calcular porcentajes.

17.1.1.1.3.1.1.1.ACTIVIDADES GEOMÉTRICAS

- Manejar el lenguaje básico de la geometría.
- Construir triángulos y sus elementos.
- Leer y comprender enunciados.
- Construir puntos, segmentos y figuras simétricas con respecto a una recta y a un punto.
- Aplicar las propiedades de la simetría axial y central.
- Calcular los ángulos de una figura.
- Reconcer y construir paralelogramos.
- Identificar los elementos de los paralelogramos y sus propiedades.
- Realizar pequeñas demostraciones.
- Aplicar el Teorema de Thales en el triángulo y trapecio.

CASOS ESTADÍSTICOS

- Interpretar datos y diagramas.
- Construir diagramas.
- Calcular resultados estadísticos que requieren de la proporcionalidad.

4.5. Métodos de apoyo

Dependen de las deficiencias encontradas. Al iniciar el octavo grado, y dar lugar a nociones abstractas, el alumno tiende a rechazarlas; es necesario encontrar una fase transitoria, a través de situaciones concretas o intuitivas, asociadas a estas nociones.

El profesor puede proponer ejercicios de aplicaciones sencillas, y avanzar paulatinamente a los métodos racionales.

Hay que tener presente que la ayuda debe ser individual, en función de las dificultades de cada alumno.

Para consolidar y precisar los conocimientos de la enseñanza elemental, no se deben abandonar las técnicas pedagógicas a las que están acostumbrados los muchachos: repetición de ejercicios del mismo tipo, empleo de esquemas y de dibujos, vocabulario simple. Las reglas sin fundamentos serán excluídas. Las definiciones deberán introducirse con ejemplos.

La enseñanza se apoyará en las actividades de los alumnos. El profesor deberá tener en cuenta todas sus respuestas, primitivas, erradas, o inseguras, y tomarlas como base para llegar a respuestas verdaderas. Y es el momento para dar precisiones en los puntos mal comprendidos o mal concebidos.

El trabajo deberá ser guiado con mucho cuidado. Los alumnos deberán anotar muy pocas definiciones y resultados importantes, enunciados con precisión. El profesor deberá escribir en el pizarrón, dando el modelo de una presentación clara.

El control de lo aprendido deberá hacerse a través de preguntas específicas.

Los alumnos no deberán permanecer en un solo tipo de actividad durante un período de clase. Deberá existir actividad oral y escrita, búsqueda y redacción de ejercicios.

Cada vez que se introduzca una nueva noción, se recurrirá a la experiencia y a la síntesis concisa, y al momento de buena disposición psicológica del grupo..

Los deberes a casa deberán obligar al niño al hábito de una buena presentación y redacción, y comunicar claramente su pensamiento. Deberán ser frecuentes y cortos. El profesor deberá anotar, sobre estos trabajos, la exactitud e inexactitud de los resultados. Señalará las faltas de cálculo o de razonamiento, y las incorrecciones en la redacción.

Deberá insistir en el interés de los diferentes métodos encontrados en los deberes, y sugerir otros. Y regresar a las nociones que ha detectado con errores colectivos.

5. EJEMPLOS DE PRESENTACIÓN DE EJERCICIOS

17.2. 5.1 Números y cálculo numérico

Exhibimos algunos ejemplos de introducción a ciertas nociones, que deben empezar a abstraerse.

1. El cálculo numérico debe basarse en la experiencia:

a. Exposición de una situación real, cercana a los alumnos, en forma real, o a través de dibujos:

b. Redacción de la situación:

10 tabletas de chocolate de una marca cuestan 70 000 sucres. 6 tabletas, de otra marca, cuestan 60 000 sucres. ¿Qué compra es más conveniente?¿Por qué?

c. Impresiones verbales de la situación.

Hay más chocolates en el primer paquete. Conviene comprar este.

d. Cálculos numéricos, escritos:

$$
\begin{aligned}
70\,000 \div 10 &= 7\,000 \\
60\,000 \div 6 &= 10\,000
\end{aligned}
$$

e. Conclusión:

Cada chocolate del primer paquete cuesta 7 000 sucres, y cada chocolate del segundo, 10 000. El primer paquete es más barato que el segundo.

2. Para hacer hincapié en la jerarquía de las operaciones, los cálculos combinados de suma (resta), multiplicación (división), pueden realizarse con ayuda de colores u operaciones prioritarias subrayadas:

$$
\begin{aligned}
4{,}5 + \underline{3{,}1 \times 6{,}2} - \underline{2 \times 8{,}5} + 4 &= 4{,}5 + 19{,}22 - 17 \\
&= 6{,}72
\end{aligned}
$$

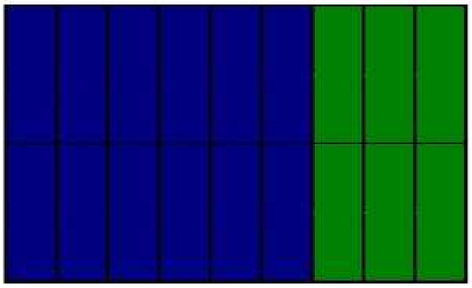
Posteriormente, deben excluirse los resaltamientos.

3. Las operaciones que llevan paréntesis, pueden ser resueltas con ayuda de cajas:

$$(4{,}5 + 3{,}1) \times (6{,}2 - 2) \times (8{,}5 + 4) = 4{,}5 + 3{,}1 \times 6{,}2 - 2 \times 8{,}5 + 4$$

$$= 7{,}6 \times 4{,}2 \times 12{,}5$$
$$= 399$$

4. La aplicación de la propiedad distributiva debe partir de la noción de área del rectángulo

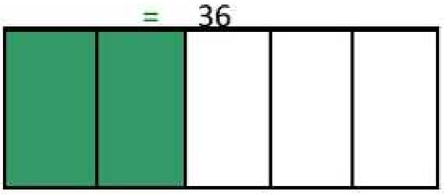


$4 \times 6 = 24$

$4 \times 3 = 12$

$24 + 12 = 36$

$$4 \times (6 + 3) = 4 \times 6 + 4 \times 3$$
$$= 24 + 12$$
$$= 36$$



5. La revisión de las fracciones debe hacerse partiendo de la situación práctica:

$$\frac{2}{5}$$

Los números en escritura fraccionaria deben evidenciarse como cociente de dos números, y manejarse indistintamente, como parte de un todo, o como número decimal. Es indispensable además, el dominio de las fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Las operaciones entre fracciones deben realizarse en forma argumentada, sin recurrir a reglas mecanizadas:

- $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{3}{2} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} + \frac{15}{10}$ **La suma debe realizarse con fracciones equivalentes con el mismo denominador.**

  $= \frac{16}{10}$

  La fracción resultante debe simplificarse

  $= \frac{8}{5}$

- $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{3 \times 10}{9 \times 5}$ **Se aplica la propiedad conmutativa**

  $= \frac{3}{9} \times \frac{10}{5}$ **Se separan las fracciones**

  $= \frac{1}{3} \times 2$ **Se simplifica**

  $= \frac{2}{3}$

5.2. Funciones numéricas

17.2.1.1.1.1.1.Proporcionalidad

17.2.1.1.1.1.1.1.1.Para reconocer las tablas de números que verifican las propiedades de proporcionalidad:

17.2.1.1.1.1.1.1.2. Propiedad de proporcionalidad

Coeficiente de proporcionalidad

Relación de situaciones experimentales y no experimentales con la proporcionalidad:

Un automó [illegible] elocidad constante, se demora 3 horas en recorrer una distancia de 200 km. ¿Cuán [illegible] o empleará en recorrer una distancia de 600 km?

4	8	10	7	2
12	24	30	21	6

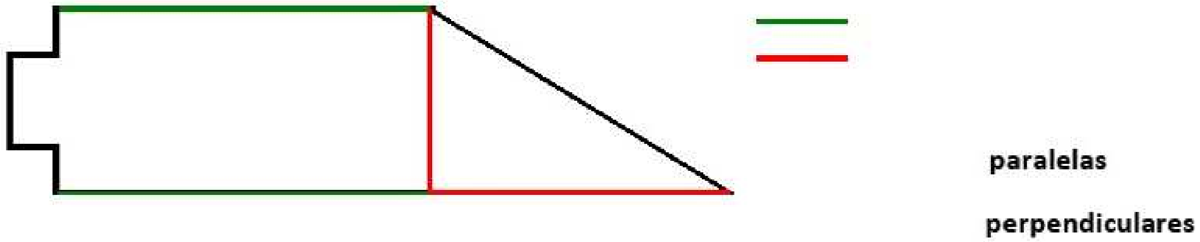
$\times 2$ $\times 2$ $\times 3$

Distancia	200	600
Tiempo (h)	3	9

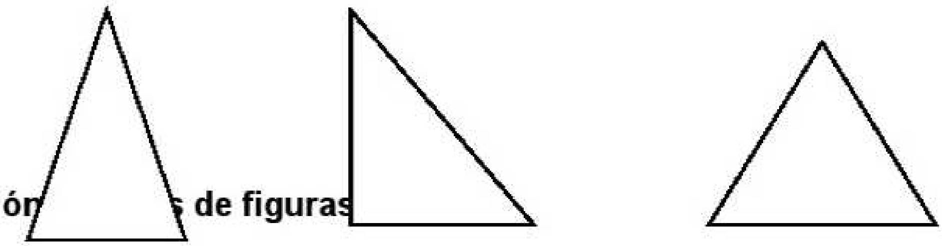
$\times 3$ $\times 3$ $\times \frac{1}{200}$

5.3. Actividades geométricas

Reconocimiento, sobre una figura, de las principales propiedades geométricas:



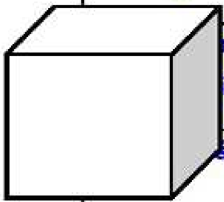
Diferenciación s de figuras

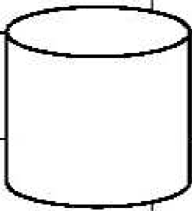


Triángulo isósceles Triángulo rectángulo Triángulo equilátero

	Triángulo isósceles	**Triángulo equilátero**	**Triángulo rectángulo**

Número de lados iguales	2	3	0
ro de iguales		3	0
ángulos		agudos	2 agudos





Caracterización y construcción de ciertos sólidos:

cubo **cilindro** **paralelepípedo**

	Cubo	Paralelepípedo	Cilindro

17.2.1.1.1.1.1. úmero de caras	6	6	3
Número de aristas	12	12	
Forma de las caras	cuadradas	rectangulares	Circulares y rectangular
Posición de las caras	paralelas	paralelas	2 paralelas

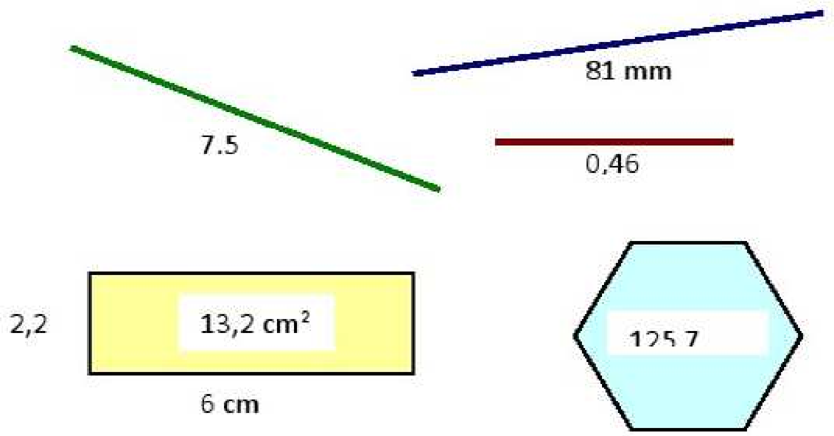
5.4. Actividades de medida

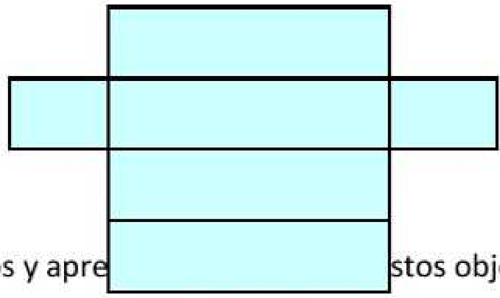
Caracterización de objetos por su medida:

	segmento	superficie	sólido	objeto	evento
17.2.1.1.2.tipo de medida	17.2.1.1.3 ongitud	área	volumen	masa	duración

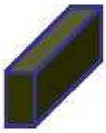
Conocimiento del sistema internacional de medida para cada una de estas nociones:

- Conversiones del sistema
- Resultados con naturales o decimales, y por encuadramientos entre dos números naturales o decimales.
- Construcción de objetos con medidas determinadas.
- Definición del orden de magnitud de un objeto, de acuerdo con una unidad .

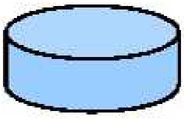




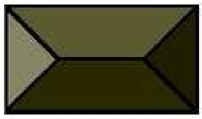
Construcción de cuerpos geométricos y apre stos objetos:



1 kg



60 g



34,4 mg

Determinación física de masas, con ayuda de balanzas elementales:

18. BIBLIOGRAFÍA

1. Acosta Rosa, M y otros. Bases Psicopedagógicas del Proceso Pedagógico Profesional. La Habana, 1997.
2. Alvarez de Zayas, Carlos M. La Escuela en la vida. La Habana. Educación y Desarrollo. Artedu. 1992.
3. Apostol, Tom. Calculus Vol. I. Editorial Roverté, 1997.
4. Ballester Pedroso, Sergio, y otros, Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1992.
5. Ballester Pedroso, Sergio: La sistematización de los conocimientos matemáticos. En PROMET, Editorial Academia. La Habana. 1995
6. Ballester Pedroso, Sergio: Enseñanza de la Matemática y dinámica de grupos. En PROMET, Editorial Academia. La Habana. 1995.
7. Campistrous Pérez, L.A. Apuntes de un curso de Postgrado. Ciudad Habana. 1993.
8. Castillo, Carlos y Toro José. Estructuras Reales y Complejos. E.P.N. , 1995
9. Castro Pimienta, Orestes. Evaluación en la Escuela Actual: ¿Reduccionismo o Desarrollo?. INSPETD. La Habana. 1997.
10. Castro Pimienta, O. La evaluación pedagógica. CEPTP. ISPETP. P. 1-30. La Habana. 1992.
11. Castro Pimienta, O Algunos aspectos de la evaluación en Cuba/ Orestes Castro.-- 62-72.-- En Boletín Informativo ISPETP. La Habana 1987.
12. Castro Pimienta, O. Planificación y Evaluación de la Educación /Orestes Castro.-- Cap. X. En teoría y metodología de la Educación. ISPETP. La Habana. 1991.
13. Castro Pimienta, O Evaluación a través de la estructura modular de un programa docente. 2do. Premio. Academia Naval Granma. La Habana. 1990.
14. Costa, Arthur. El Colegio como hogar para la mente. Universidad del Estado de California. Sacramento. 1996.
15. Cuevas Casas, Carlos y Torres Pérez, Gisela. Formación Básica del Gerente Educacional, La Habana, 1996.
16. Demidovich. Problemas y ejercicios de análisis Matemático, Prentice Hall, 1987.

17.Fraga Rodríguez, Rafael, y otros. Diseño Curricular: Modelación del proceso de formación de profesionales. La Habana.1997.

18.Fraga Rodríguez, Rafael, y otros. De la Matemática, Su Enseñanza y Aprendizaje. E.S.P.E., Quito, 1995.

19.García González, Edelia. Dificultades de la Aplicación de la Computación a la Enseñanza. Posibles Soluciones. Revista Cubana de Educación Superior. No. 2 La Habana. 1995

20.González Rey, F. Y A. Mitjáns: La personalidad : su educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. Cuidad de la La Habana. 1989.

*21.*González Serra, Diego. Teoría de la Motivación y Práctica Profesional. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. l995.

22.González Serra, Diego. Psicología General para maestros, Ponencia en evento Pedagogía 97. La Habana. 1997.

23.Henao, Gloria. Procesos Pedagógicos y Tansformación Cultural. Corporación Calidad. Santafe de Bogota. 1994.

24.Hernández Fernández, Herminia. Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate. E.P.N. Quito. 1993.

25.Herrera Padrón, Caridad. Lo Profesional del proceso Pedagógico. Informativo Politécnico. Quito. Noviembre de 1996.

26.Jacques Delros y otros. La Educación encierra un Tesoro. Santillana, Ediciones Unesco. Madrid. 1996

27.Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2. Editorial Libros para la Educación. Ciudad Habana. 1982.

28.Kolominsky, Ya. L. La psicología de la relación recíproca en los pequeños grupos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1975

29.Kon, I. S. Pscicología de la edad juvenil. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1990.

30.Kóstikova, Margarita. El Concepto de Función en Matemáticas. A.E.C. Quito. 1988.

31.Lara, N. y Arroba C. Análisis Matemático. Universidad Central. Quito. 1992.

32.Melgarejo Peréz, y otros. Salomón: Un tutor Inteligente para el Trazado de curvas. Revista Cubana de Educación Superior. No. 2 La Habana. 1995

33.Montero García, C. I. Motivación y adolescencia, en Cuadernos de Pedagogía. Barcelona. 1987.

34.Monteverde, Mariana. Estrategias de Enseñanza. Informativo Politécnico. Quito Febrero 1994.

35.Oropesa Fernández, Ricardo R. Jugando También se aprende. Evento Pedagogía 97. Curso 57. La Habana. 1997.

36.Pérez F. Vicenta, De la Cruz, Pilar. Material de Apoyo de la Asignatura Informática Educativa. La Habana 1996.

37.Piskunov. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Mir. 1980

38.Reforma Curricular Para la Educación Básica, Propuesta consensuada. Consejo Nacional de Educación. M.E.C. Quito. 1996.

39.Saenz, Rolando. Fundamentos Matemáticos. Introducción al Cálculo. Universidad Central. Quito. 1988

40.Senk, Sharon. Curso de Matemáticas. Universidad del Estado de Michigan. Michigan. 1996.

41.Soto Alba, Narcizo. Talleres Docentes en las Ramas Técnicas. 1997

42.Thomas y Finney. Cálculo con geométria Analítica. Adison Wesley Iberoamericana. 1984.

43.Valdéz , P y Valdéz, R. Utilización de los ordenadores en la Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación de y Experiencias Didácticas, Enseñanza de la Ciencias. Volumen 12 No.3. Barcelona 1994.

*44.*Viñas, Gladys. Métodos activos para una enseñanza efectiva. Informativo Politécnico, Quito. Marzo de 1994.

ISBN: 978-9942-20-874-3