

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE CIENCIAS

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS: UN ESTUDIO COMPARATIVO BASADO EN SIMULACIONES COMPUTACIONALES

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO
MATEMÁTICO**

JAIME ESTUARDO FERNÁNDEZ ROMERO
jefr@andinanet.net

DIRECTOR: DR. LUIS MIGUEL TORRES
ltorres@gollum.math.epn.edu.ec

QUITO, ABRIL 2008

DECLARACIÓN

Yo, JAIME ESTUARDO FERNÁNDEZ ROMERO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jaime Estuardo Fernández Romero

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JAIME ESTUARDO FERNÁNDEZ ROMERO bajo mi supervisión.

Dr. Luis Miguel Torres
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Mi gratitud y reconocimiento:

Al Creador por sus ilimitadas bendiciones, su misericordia y amor infinitos que nos llevan siempre adelante.

Al Dr. Luis Miguel Torres por brindarme su confianza, dirección y apoyo desinteresados en todas las oportunidades que coincidimos a lo largo de mi carrera y, de manera especial, en este proyecto.

A todos y cada uno de los profesores de quienes tuve la gran oportunidad de recibir valiosos conocimientos.

DEDICATORIA

A mi Papá porque con su esmero, dedicación y la guía de nuestro Señor ha sabido instruirme y porque siempre ha estado junto a mi brindándome todo su apoyo y respaldo.

Jaime

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN	x
Capítulo 1: Introducción a la Teoría de Portafolios	1
1.1. Portafolios de inversión	1
1.2. Modelos clásicos	3
1.2.1. Técnicas de análisis bursátil	5
1.2.2. Conceptos preliminares	9
Capítulo 2: Modelos Determinísticos	18
2.1. El modelo original de Markowitz	18
2.1.1. Enfoques del inversor	21
2.1.2. Manejo de cartera	21
2.1.3. Formulación del modelo	23
2.2. Modelos lineales	25
2.2.1. Programación lineal	25
2.2.2. Tres Modelos de optimización de portafolio basados en programación lineal	30
2.2.3. Modelo alternativo basado en el modelo de Konno	36
2.3. Modelos no lineales	37
2.3.1. Modelo de la recta de mercado de capitales	38
2.3.2. Modelo de optimización por escenarios	40
Capítulo 3: Modelos Probabilísticos	46
3.1. Modelo con restricciones de dominación estocástica	46
3.1.1. El problema del portafolio con dominación restringida	48
3.1.2. Optimalidad y Dualidad	50
3.1.3. Un caso particular de función objetivo	54
3.2. Modelo basado en búsqueda TABÚ	59
3.2.1. Búsqueda TABÚ	59
3.2.2. Selección de instrumentos financieros	65
3.2.3. Construcción de pronósticos y series sintéticas	66
3.2.4. Optimización del portafolio	67
Capítulo 4: Implementación de los modelos	69
4.1. Modelo de Markowitz	69
4.2. Modelo original de Konno	71
4.3. Modelo de Cai	73

4.4. Modelo de Teo	73
4.5. Modelo con restricciones de dominación estocástica discretizado	75
4.6. Modelo modificado de Konno	77
Capítulo 5: Resultados Fundamentales	79
5.1. Empresas del promedio Dow Jones industrial (DJIA)	80
5.1.1. Instancia 2006	82
5.1.2. Instancia 2007	86
5.2. Empresas del sector tecnológico en NASDAQ	88
5.2.1. Instancia 2006	89
5.2.2. Instancia 2007	92
5.3. Empresas del sector financiero en NASDAQ	94
5.3.1. Instancia 2006	95
5.3.2. Instancia 2007	98
Capítulo 6: Conclusiones y Recomendaciones	104
6.1. Resumen	104
6.1.1. Selección de modelos a estudiar	104
6.1.2. Implementación	104
6.1.3. Selección de instancias	104
6.1.4. Pruebas computacionales	105
6.2. Conclusiones	109
6.3. Recomendaciones	111
Apéndice A: Código fuente de los modelos implementados en Matlab	112
A.1. Modelo de Markowitz	112
A.2. Modelo original de Konno	113
A.3. Modelo de Cai	114
A.4. Modelo de Teo	115
A.5. Modelo con restricciones de dominación estocástica	116
A.6. Modelo modificado de Konno	117

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Frontera Eficiente	15
1.2. Valor en Riesgo	16
2.1. Recta de Mercado de Capitales	39
3.1. Diagrama de la metodología	59
3.2. Simulación del flujo de caja para determinar la capacidad real de compra del inversionista.	65
4.1. Distribución de los retornos	75
4.2. Distribución del retorno inicial	77
5.1. Cotizaciones DJIA Sep-Dic 2006	82
5.2. Valor neto del portafolio DJIA, Oct-Dic 2006	85
5.3. Cotizaciones DJIA Sep-Dic 2007	86
5.4. Valor neto del portafolio DJIA, Oct-Dic 2007	89
5.5. Cotizaciones NASDAQ-TEC Sep-Dic 2006	90
5.6. Valor neto del portafolio NASDAQ-TEC, Oct-Dic 2006	95
5.7. Cotizaciones NASDAQ-TEC Sep-Dic 2007	96
5.8. Valor neto del portafolio NASDAQ-TEC, Oct-Dic 2007	101
5.9. Cotizaciones NASDAQ-FIN Sep-Dic 2006	101
5.10. Valor neto del portafolio NASDAQ-FIN, Oct-Dic 2006	102
5.11. Cotizaciones NASDAQ-FIN Sep-Dic 2007	102
5.12. Valor neto del portafolio NASDAQ-FIN, Oct-Dic 2007	103

ÍNDICE DE ALGORITMOS

4.1. Markowitz	70
4.2. Konno	72
4.3. Cai	73
4.4. Teo	74
4.5. Estocástico	76
4.6. Konno modificado	78

RESUMEN

La tesis presenta los resultados de un estudio comparativo de seis modelos de optimización de portafolios, cinco de ellos tomados de la literatura especializada: Markowitz, Konno, Cai, Teo, y un modelo basado en restricciones de dominación estocástica, el sexto modelo es propuesto como una modificación al modelo original de Konno. Los seis modelos son implementados en Matlab y se realizan pruebas de calidad de las soluciones tomando como instancias los precios de las acciones de las empresas que componen el índice Dow Jones industrial, de catorce de las más grandes empresas del sector tecnológico y doce del sector financiero que cotizan en Nasdaq.

Palabras claves: Optimización de portafolios, inversiones, finanzas, rendimiento, riesgo, simulación computacional.

Capítulo 1

Introducción a la Teoría de Portafolios

1.1. Portafolios de inversión

Un portafolio de inversión dictamina la forma en que un cierto monto de capital se asigna para comprar un conjunto específico de acciones que se negocian en un mercado de valores. Debido a que las cotizaciones de las acciones varían de acuerdo a fluctuaciones no previsibles del mercado, el valor total del portafolio cambia a lo largo del tiempo. El problema de optimizar un portafolio es un problema bicriterio en el que intervienen dos objetivos contrapuestos: aumentar la ganancia esperada y minimizar el riesgo de pérdidas debido a caídas en las cotizaciones de las acciones. Se han propuesto algunos modelos y algoritmos para optimizar portafolios, siendo el más conocido un modelo cuadrático planteado por Markowitz a mediados del siglo pasado que busca minimizar el riesgo del portafolio, mientras se garantiza un cierto nivel de ganancia. Posteriormente se han propuesto diversos modelos alternativos, que pueden ser de tipo lineal, no lineal, determinísticos, estocásticos, y emplear otros paradigmas como maximizar la ganancia esperada sujeta a un cierto nivel de riesgo, o incluso optimizar una combinación parametrizada de ganancia y riesgo.

Con su artículo publicado hacia la mitad del siglo pasado, Markowitz en [18] inició lo que ahora se reconoce como una revolución, tanto por su impacto en la transformación del sistema de intermediación financiera así como por haber desatado una profunda renovación en la investigación científica dentro del campo de la economía financiera, centrada en la gestión del riesgo. El tema desarrollado por Markowitz, se refiere a la selección de inversiones, es decir, al problema de cómo asignar los recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles para tal efecto. Antes de que se popularizara el enfoque de Markowitz, la selección de inversiones implicaba un costoso proceso de recopilación y procesamiento de información muy diversa acerca de las empresas emisoras de activos. Esta información consistía, entre otras cosas, de balances y estados financieros, situación de la empresa dentro de la industria y de ésta dentro de la economía en su conjunto, calidad de la gestión de la empresa, políticas de dividendos, etc. El enfoque de Markowitz simplificó notablemente el problema de selección de inversiones al considerar los rendimientos de los activos como un proceso estocástico y centrarse exclusivamente en los indicadores estadísticos de los resultados de las empresas

emisoras y, más específicamente, en tres parámetros básicos: media, varianza y covarianzas de las tasas de rendimiento de los activos.

Markowitz advirtió que el problema de selección de inversiones estaba vinculado a una noción central de incertidumbre (o riesgo), lo cual significaba reconocer que cualquier inversión financiera tiene más de un resultado posible en términos de rendimiento y que, en el mejor de los casos, sólo es posible conocer o inferir una distribución de probabilidades para el rendimiento. Si no existiera incertidumbre, todos los inversionistas invertirían en el activo que ofreciera la más alta tasa de rendimiento, lo que equivale a decir que sólo podía existir un único activo de inversión. De igual forma, si se considera sólo el valor esperado de los rendimientos, una política óptima de inversión consistiría en escoger aquel activo que tuviese el valor esperado más alto. En ambos casos, no se plantearía el problema de la diversificación de activos. Por otra parte, el contexto de incertidumbre en el que se da necesariamente el proceso de inversión, requiere incorporar alguna hipótesis acerca del comportamiento del inversionista cuando se enfrenta a las opciones de inversión desconociendo con certeza el resultado futuro de las mismas. El inversionista típico de Markowitz busca la más alta expectativa de rendimiento y el riesgo más bajo posible, y está dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento. En los términos actuales, es la descripción de una persona con aversión al riesgo. Es fácil cuantificar el rendimiento esperado de una inversión si se conocen los valores iniciales y finales esperados de la misma. En cuanto al riesgo financiero, desde Markowitz se acepta que una medida de ella es la varianza (o desviación estándar) de los rendimientos. Puesto que normalmente no es posible encontrar activos que al mismo tiempo tengan los rendimientos esperados más altos y el riesgo más bajo, el inversionista se encuentra en un dilema entre rendimiento y riesgo que se resuelve dependiendo de la tasa personal a la que él está dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento. El análisis reconoce que no todos los inversionistas tienen el mismo grado de hostilidad al riesgo y, por lo tanto, la tasa a la que cada inversionista prefiere canjear más riesgo por más rendimiento es variable y subjetiva.

El planteamiento singular de Markowitz tuvo como pilares estos tres conceptos claves:

- (a)** el resultado (rendimiento) de una inversión debe ser tratado como un fenómeno estocástico,
- (b)** el inversionista típico actúa con aversión al riesgo,
- (c)** el rendimiento y el riesgo esperados de los activos de inversión tienen medidas estadísticas en la media y la varianza de una distribución.

La simple observación de la literatura actual y de la práctica de la inversión financiera nos permite comprobar el profundo y duradero impacto de la innovación producida por el trabajo de Markowitz. Sin embargo, su contribución específica más notoria consistió en el desarrollo de un método de selección de inversiones para un único período, en un contexto de incertidumbre y para inversionistas con aversión al riesgo: el enfoque ahora conocido como *media - varianza*. El resultado más importante del enfoque de Markowitz es que permite deducir combinaciones de activos (portafolios) que simultáneamente cumplen con dos condiciones:

(a) tienen la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles que tienen un rendimiento esperado dado y

(b) tienen el rendimiento esperado máximo dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada.

Aquellas combinaciones que reúnen estos dos atributos se llaman *portafolios eficientes* y el conjunto de portafolios eficientes es conocido como la *frontera de portafolios eficientes*. Los portafolios eficientes *dominan* todos los que no lo son y por ello este resultado reduce drásticamente el número de posibilidades de inversión a escoger por un inversionista hostil al riesgo y que toma una decisión de manera racional, es decir, considerando los parámetros de riesgo y rendimiento.

Actualmente, con la integración de los grandes centros financieros del mundo, los inversionistas pueden acceder a la información diaria y en tiempo real relacionada con los diferentes instrumentos financieros con miras a estructurar sus carteras de la mejor manera posible. Como consecuencia, la investigación en el campo de la optimización de portafolios ha crecido notablemente, lo que se revela en la cantidad de modelos propuestos hasta la fecha. Examinaremos en esta tesis algunos de los más comunes, y estudiaremos su comportamiento sobre instancias reales. Exploraremos además los resultados obtenidos al combinar ideas de algunos modelos en un nuevo algoritmo de optimización.

1.2. Modelos clásicos

En esta sección formalizaremos el problema objeto del presente estudio. El problema de construir un portafolio de inversión ha sido estudiado desde mucho antes de la mitad del siglo pasado, sin embargo, fue Markowitz quien sentó las bases para su análisis como lo conocemos en la actualidad.

Sharpe, Alexander y Baily ([33]) han contribuido en gran parte al desarrollo de las teorías modernas financieras en torno a la teoría de portafolios, además de Miller y Modigliani. Entre otras contribuciones, estos autores desarrollaron algunas

proposiciones que caracterizan el equilibrio de los mercados de capitales.

A Markowitz, le corresponde el mérito del desarrollo del modelo de media-varianza [19] que constituye un intento pionero de enfocar la demanda de activos con riesgo.

La Moderna Teoría de Portafolio ha cambiado la forma en que los inversionistas pensaban acerca de sus estrategias. La teoría asume que los mercados financieros son eficientes, significando que el precio de cualquier acción incorpora toda la información acerca de la acción.

El Modelo de Valoración de Activos (Capital Asset Pricing Theory, CAPM) parte del supuesto de que el mercado de capitales es perfecto, es decir, que existe la posibilidad de prestar y endeudarse en cantidad ilimitada a un tipo libre de riesgo común para todos los agentes y que las expectativas del público son homogéneas, y proporciona fundamentalmente dos conclusiones: la primera se refiere al grado de diversificación de la cartera óptima en equilibrio de mercado, la segunda trata sobre la apropiada medida de riesgo de un activo y la relación que guarda en equilibrio con su tipo de rendimiento esperado.

En 1952, Markowitz publica el artículo "Portfolio Selection" donde centra su atención en la diversificación de carteras, demostrando como un inversor puede reducir el riesgo eligiendo acciones cuyas oscilaciones no sean paralelas. En su modelo utiliza conceptos que han sido de gran avance teórico y cuya utilidad está fuera de toda duda. El primer pilar de su teoría es la relación entre el riesgo y las variables estadísticas, cuya medición es posible, específicamente la varianza histórica de la rentabilidad. El artículo argumenta que los inversores demandan un retorno mayor para inversiones mas riesgosas.

Antes de Markowitz, se conocía de la experiencia práctica que un portafolio con un mayor número de acciones era menos riesgoso que uno con pocas acciones. Acciones que se desempeñan mal, tienden a estar compensadas por acciones que se desempeñan bien, por lo tanto el retorno del portafolio varía menos que el retorno de un portafolio con un menor número de acciones o de una acción individual. Markowitz demostró que la clave para diversificar un portafolio no estaba simplemente en el número de acciones que lo componen, sino también y más importante aún, en la correlación de los retornos de las acciones que lo conforman.

En el proceso de estructurar carteras de inversión, se encuentran activos con correlación positiva, negativa o muy cercana a cero. Cuando todos los activos están correlacionados en forma positiva, desde la mirada teórica y matemática, es imposible la diversificación, entendida ésta como la distribución de las inversiones entre diferentes opciones financieras y no financieras, reduciendo el impacto que una inversión individual (desde el punto de vista de un rendimiento bajo o una

pérdida de capital) pueda provocar en el portafolio o cartera administrada. Cuando el índice de correlación entre los activos es muy cercano a cero, es posible encontrar un portafolio con un riesgo inferior al menor riesgo individual presente en la cartera; en este caso se habla de diversificación leve. El tercer caso, o escenario de total diversificación, se presenta cuando los activos están correlacionados en forma negativa (inversa), es aquí donde es posible hallar el portafolio óptimo para el inversionista racional con aversión al riesgo.

1.2.1. Técnicas de análisis bursátil

Existen diferentes teorías y técnicas de análisis destinadas a seleccionar y estudiar los valores bursátiles con mayor potencial alcista o en determinados momentos a identificar aquellos instrumentos del mercado con tendencia a la baja. De los principales métodos de análisis de inversiones que han demostrado su eficiencia a lo largo del tiempo, los dos más utilizados en la bolsa son el Análisis Fundamental y el Análisis Técnico. Cada uno de estos métodos de análisis tiene sus principios, ventajas, limitaciones y se basa en un componente diferente del mercado accionario.

Análisis Fundamental

El Análisis Fundamental es el estudio de toda la información disponible en el mercado sobre el emisor (empresa o gobierno) y su entorno empresarial, financiero y económico, con la finalidad de obtener su verdadero valor y así formular una recomendación de inversión. Este método recopila y analiza la información histórica pretendiendo anticipar el comportamiento futuro de un determinado título valor que se cotiza en la Bolsa. La hipótesis fundamental en que se basa este método es que aunque el mercado puede no ser eficiente a corto plazo, sí lo es a largo plazo, por lo que una empresa termina cotizando en la bolsa al precio que le corresponde. El Análisis Fundamental trata en todo momento de descubrir subvaloraciones o sobrevaloraciones, con base en determinadas informaciones aún no asimiladas por el mercado y que sólo se pueden apreciar en el largo plazo.

Este método parte del supuesto de que los movimientos de los precios de las acciones tienen causas, ya sea económicas o de otro tipo, y que ellas pueden identificarse y ponderarse antes de producir su efecto en el mercado. Para ello es necesario analizar la situación financiera de los mercados tanto en el entorno macroeconómico, como en las condiciones microeconómicas de interés de las empresas, sus estados financieros, balances, los resultados de ventas, el flujo de

efectivo, las políticas de dividendo e inversión, la capacidad gerencial y productiva, la competencia que existe en el sector, los proyectos de inversión, las perspectivas de crecimiento, el entorno político, el tipo de cambio, los tratados internacionales de comercio, y la legislación, entre otros. La diversidad de sectores cotizados hace que apenas se pueda hablar de reglas generales para la valoración y el análisis de los diferentes factores ya que los mismos criterios no son aplicables a todos los sectores. Por lo tanto, no se puede hablar de una metodología de Análisis Fundamental, sino de varias, en función del sector que se analice.

La principal limitación del Análisis Fundamental es que mucha información relativa a una empresa ya ha sido conocida por personas que tienen información privilegiada antes de ser publicada. Estas personas están en capacidad de tomar posiciones antes de que se conozcan oficialmente los datos, con lo cual producen una alteración de las cotizaciones, antes de que un inversionista externo (sin información privilegiada) pueda entrar en la negociación. Además, existe una relativa probabilidad de que las empresas alteren o maquillen los resultados de una sociedad en un período determinado, razón por la cual puede resultar difícil obtener parámetros reales de comparación con otras empresas del mismo sector que cotizan en la bolsa. Otra limitación consiste en la complejidad de los modelos y la dificultad técnica requerida para recopilar tanta información.

Análisis Técnico

El Análisis Técnico de valores pretende pronosticar las variaciones futuras de un valor bursátil basándose exclusivamente en la observación de la evolución histórica de sus cotizaciones. A diferencia del Análisis Fundamental, éste no estudia las variables económicas, sino los movimientos que se han producido en las cotizaciones de un título dentro de la dinámica del mercado.

Este estudio se realiza mediante el manejo de indicadores y gráficos que reflejan el precio de una acción y su volumen a través del tiempo, con el fin de determinar las tendencias futuras de los precios, mediante el análisis de factores claves: el precio, el tiempo y el volumen negociable.

El Análisis Técnico parte del supuesto central de que los inversionistas son capaces de predecir los cambios y quiebres en los precios a partir de la información histórica de estas mismas variables, y considera que los inversionistas cuentan con series de precios, volúmenes transados de acciones, informaciones contables y un conjunto de hechos cuantificables sobre los que se pueden aplicar diferentes técnicas matemáticas y heurísticas. De hecho, el Análisis Técnico considera que la información que se tiene al presente se conservará en el futuro.

Aunque el Análisis Técnico ha ido ganando reconocimiento con el paso del tiempo, y son cada día menos aquellos que rechazan radicalmente sus posibilidades, es oportuno señalar algunas críticas que se han planteado respecto a la validez de sus postulados:

- Es el propio mercado el que ofrece información para poder predecir su tendencia futura. Los analistas técnicos opinan que el precio que tiene un activo refleja toda la información existente del mercado. Por lo tanto, estudiando los movimientos de precios de los activos estaremos estudiando indirectamente las expectativas de cómo eventos futuros, ya sean económicos, políticos, etc., pueden afectar a dichos activos. En [22] se sostiene que los métodos técnicos no se pueden usar para elaborar estrategias útiles de inversión.
- Los precios se forman por tendencias. Los precios normalmente siguen una única tendencia, hasta que sucede algo que hace cambiar ese escenario. Por tanto, el precio de una acción seguirá continuamente estas tendencias, formando ondas. El precio de un activo se estará moviendo en una misma dirección hasta que se produzca un cambio en las expectativas de los inversores, que haga cambiar la tendencia del activo. Los precios muchas veces no los forman sólo los análisis fundamentales que se realicen en una empresa, sino que influyen otro tipo de factores que deberían tenerse en cuenta. Entre ellos se pueden destacar: factores psicológicos (expectativas de éxito de la empresa en cuestión), opiniones del mundo empresarial, entre otras.
- Lo que sucedió en el pasado puede volver a ocurrir en el futuro. Estudiando las series históricas de los precios de los activos se puede observar que, en un gran número de ocasiones, el activo reacciona de una manera parecida a algunas formaciones gráficas del pasado. El Análisis Técnico parte de estas informaciones que se tienen al presente, y supone el futuro se mantendrá como el pasado, situación que puede ser o no cierta. De esta manera, lo que los inversionistas realmente conocen es el pasado y el presente de las acciones, además cuenta con una serie de información como son las series de precios, volúmenes transados de acciones, informaciones contables y un conjunto de hechos cuantificables sobre los que se puede aplicar diferentes técnicas matemáticas.
- Las figuras, o formaciones gráficas son casi completamente subjetivas y sólo existen en la mente del observador. En muchos casos las figuras gráficas no son fáciles de identificar y construir, sobre todo cuando se busca hacerlo

sobre los propios indicadores y osciladores. De allí que esta sea una de las principales críticas que suele hacerse a esta herramienta.

- Los analistas técnicos sostienen que los precios del pasado describen trayectorias que se repetirán en el futuro. Sin embargo, debe pensarse qué ocurre en aquellos mercados bursátiles como el ecuatoriano, más explícitamente el caso de la Bolsa de Valores de Quito, que no reúnen las características de ser competitivos con todo lo que ello implica. Por ejemplo, mercados con generación de información reservada o confidencial que es usada por algún grupo privilegiado de inversionistas, o bien con acciones altamente concentradas en pequeños grupos y que se transan generalmente fuera de Bolsa, con intermediarios que forman los precios a partir de remates ofreciendo grandes paquetes de acciones. Son hechos que por intuición o sentido común indican que el mercado bursátil no reúne las características para ser explicado totalmente por los analistas técnicos o por las teorías fundamentalistas.

Las teorías que soportan los dos tipos de análisis mencionados, se han desarrollado para mercados bursátiles con unas características diferentes a las del mercado ecuatoriano, ya que éste presenta particularidades que no son compatibles con las premisas de los mismos. Dichas características están relacionadas con variables como el tamaño y liquidez del mercado, la concentración de la atención de los inversionistas en unas pocas acciones de interés, o la eficiencia en la valoración de activos, entre otras. Tal situación dificulta en gran manera el desarrollo de un método concreto de análisis en la selección de un portafolio de acciones en el corto plazo que retribuya al inversionista cierta utilidad.

Dentro del análisis técnico existen varios modelos y métodos para la construcción de un portafolio óptimo. En los capítulos posteriores se abordarán aquellos que se consideran de mayor importancia, tanto por su contenido teórico, como por su aplicabilidad en el mundo financiero. A continuación se mencionan los principales modelos:

- Modelo de optimización cuadrático de Markowitz, enfoque media-varianza [18].
- Modelos de programación lineal [3] y [15].
- Modelo de control de horizonte en retroceso basado en programación estocástica [20].
- Modelo de optimización basado en búsqueda Tabú [34].

- Modelo basado en el método del punto interior primal-dual [8].
- Modelo de utilidad diferencial estocástica [29].
- Modelo con restricciones de dominación estocástica [4].
- Modelo de selección de cartera utilizando funciones borrosas de riesgo lateral [13]

1.2.2. Conceptos preliminares

En esta sección se definen con mayor precisión algunos conceptos que serán requeridos para formular los modelos de optimización de portafolios en los siguientes capítulos.

Retorno

El retorno es una medida de la ganancia obtenida sobre una inversión en un período de tiempo dado. Se expresa a través de tasas de rendimiento. Consideremos una acción S en el período $0, \dots, T$. Sean $S(0)$ y $S(T)$ los precios de la acción en los instantes 0 y T , respectivamente.

La cantidad

$$p_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} \quad (1.1)$$

se denomina **retorno simple** o **aritmético** en el período $0, \dots, T$.

La cantidad

$$r_T = \ln \frac{S(T)}{S(0)} \quad (1.2)$$

se denomina **log retorno** o **retorno geométrico** en el período $0, \dots, T$.

Análisis del Retorno Total

Una de las herramientas más simples en el diseño de un portafolio de inversión es el análisis del retorno total. Dado que los parámetros a considerar en la elección de una cartera óptima se refieren a valores esperados de los retornos y

riesgos para distintos activos alternativos, el análisis del retorno total responde a la pregunta de ¿cuál será el retorno esperado para un horizonte de tiempo definido?.

Es preciso establecer que para cierta clase de activos, como los de renta fija, existe una internalización explícita de los flujos en el precio de la transacción de los instrumentos. Sin embargo para activos de renta variable la situación es diferente. En estos últimos, es el precio de mercado el que internaliza implícitamente el dividendo futuro, dividendo que a su vez es esperado, lo cual le da la categoría de renta variable al instrumento en cuestión.

Aplicando estos conceptos a una cartera de renta variable, es posible proyectar los precios de cada instrumento de inversión e incorporar los retornos incrementales asociados a los cupones y la reinversión de estos. De igual forma, es posible identificar el tramo de la curva a invertir considerando únicamente el efecto cambio de precio.

Sin embargo si lo que se desea es ir un paso más allá y considerar los retornos esperados como insumo de análisis de optimización más completo, es necesario considerar todos los componentes del retorno total, para así permitir una comparación insesgada de retornos.

De esta forma, la proyección de precios de los distintos activos de renta fija puede deducirse de la comparación de la curva de rendimiento esperada con la curva de rendimiento actual, debido a la relación existente entre el cambio de rendimientos y la variación de precios.

Rentabilidad y Riesgo

Al hablar de inversiones y rentabilidad, no se puede dejar de mencionar al riesgo, al cual hasta ahora lo hemos tratado de una manera superficial, asumiendo la concepción básica que se tiene del mismo. Previo a la formulación matemática, en esta sección se busca establecer de manera más precisa las definiciones de rentabilidad y riesgo con la finalidad de proceder a su análisis y medida. Con referencia a la rentabilidad, el principal problema no es tanto su definición como los métodos de estimación utilizados: medias históricas de diverso tipo, CAPM, modelos de índices, modelos de factores, etc. La medida del riesgo que se considere es importante ya que de ella depende en gran parte el diseño del modelo matemático de selección de cartera dada la distribución de rentabilidades. En general, el riesgo surge como consecuencia de la incertidumbre en el resultado y suele considerarse mediante la probabilidad de conseguir resultados distintos a los esperados dada una posición de partida. Si se considera más de una fuente de incertidumbre, el riesgo se transforma en un vector aleatorio multidimensional,

lo que a nivel de modelización lleva a considerar diversos factores de riesgo: riesgo operativo, riesgo de precio, riesgo de tipo de interés, riesgo de volatilidad, riesgo sectorial, riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo de cambio, etc.

Es preciso identificar algunas técnicas de cuantificación del riesgo de mercado, tanto para inversiones individuales de renta fija (bonos) como de renta variable (acciones), así como para portafolios de inversión compuestos por múltiples activos (fondos de inversión, carteras de administración individual, etc). En este sentido, cabe la interrogante ¿existen instrumentos de inversión sin riesgo?. La respuesta es simple: no existe ninguna inversión en un mercado de valores que esté exenta de riesgo. A manera de resumen pueden identificarse fundamentalmente cinco tipos de riesgos que son inherentes a la compra venta de instrumentos de inversión:

Riesgo Precio Es aquel ligado a la disminución del precio de los títulos valores en los que se ha invertido. Puede presentarse, entre otras cosas, por un incremento en las tasas de interés del mercado.

Riesgo Solvencia del Emisor Se presenta cuando el emisor de los títulos valores no puede hacer frente a sus obligaciones, con lo cual habría una reducción del patrimonio del inversionista.

Riesgo de Liquidez Representa la posibilidad de que las inversiones no puedan ser redimidas en el momento en que se requiere, por lo que deba esperarse algún tiempo para convertirlas en efectivo.

Riesgo de Tipo de Cambio Se presenta cuando la moneda en que están denominadas las inversiones se deprecia frente a otras monedas, y el rendimiento no compensa esa depreciación.

Riesgo de Administración Se presenta cuando hay culpa, dolo o negligencia por parte del puesto de bolsa con el que se concretó la inversión.

Cabe señalar, además, que en cada activo financiero se debe diferenciar entre un riesgo general o sistemático y un riesgo específico o no sistemático. Por otra parte, cuando se considera más de un factor de riesgo, hay que determinar si su efecto es aditivo o multiplicativo, lo que puede resultar de suma importancia.

Riesgo Sistemático y Riesgo no Sistemático

La rentabilidad de un valor mobiliario está afectada por dos tipos de riesgos: Un riesgo propio o “específico” que depende de las características específicas de

la entidad o empresa emisora, naturaleza de sus actividad productiva, competencia de la gerencia, solvencia financiera etc. este tipo de riesgo se conoce también como “no sistemático o diversificable” y un segundo tipo de riesgo, llamado “sistemático o de Mercado”, que no depende de las características individuales del título, sino de otros factores (coyuntura económica general) que inciden sobre el comportamiento de los precios en el mercado de valores. A este segundo tipo de riesgo también se lo denomina como “no diversificable” ya que no será posible eliminarlo mediante la diversificación, dada la correlación existente entre la rentabilidad del título en cuestión con las rentabilidades de otros títulos a través del Índice Bursátil que resume la evolución del mercado.

Cuando un inversor compra títulos en el mercado de valores con el fin de reducir el riesgo, tiene sentido la diversificación si las rentabilidades de los diferentes títulos adquiridos no están correlacionados, o tienen distinto grado de correlación con el índice del mercado. El modelo mas conocido para estimar la rentabilidad y el riesgo de los valores mobiliarios es el llamado “Modelo de Mercado” de Sharpe (ver [31]), que sirve de base al “Modelo Diagonal”.

Uno de los criterios para la clasificación de los activos financieros es el basado en el coeficiente beta de Sharpe [32] o coeficiente de volatilidad. El coeficiente beta se emplea para medir el riesgo no diversificable. Se trata aquí de un índice del grado de respuesta de un activo ante un cambio en el rendimiento de mercado. El coeficiente beta que caracteriza al mercado es 1; todos los demás coeficientes se juzgan en relación con este valor. Las betas de los activos pueden adoptar valores ya sean positivos o negativos, si bien aquellos (positivos) constituyen la norma. La mayor parte de los coeficientes beta se hallan entre 0,5 y 2.

Otra definición es la que presenta William Sharpe en [31]: “El coeficiente de volatilidad *beta* de un activo financiero indica cuánto varía el rendimiento de dicho activo en función de las variaciones producidas en el rendimiento del mercado en el que aquel se negocia”.

Según este criterio, los activos financieros se suelen clasificar en tres grandes grupos o categorías:

1. Activos “poco volátiles” o “defensivos”, que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es inferior a la unidad.
2. Activos “muy volátiles” o “agresivos”, que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es superior a la unidad.
3. Activos de “volatilidad normal” o “neutros”, que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es igual a la unidad.

Teoría del equilibrio en el Mercado de Capitales

La Teoría del equilibrio en el Mercado de Capitales es una extensión del modelo de Markowitz y consiste en introducir la posibilidad de que el inversor no invierta todo su presupuesto en activos con riesgo, sino que una parte del mismo la dedique a la adquisición de activos sin riesgo o bien lo ceda en préstamo al tipo de interés de dicho activo sin riesgo.

También tiene la posibilidad de invertir en valores mobiliarios una cantidad superior al presupuesto de inversión disponible, financiando la diferencia como endeudamiento. De este modo se puede hablar de carteras con préstamo (Lending Portfolios) cuando una parte del presupuesto de inversión se presta al tipo de interés del activo sin riesgo y de carteras con endeudamiento (Borrowing Portfolios) cuando se pide prestado para invertir en valores mobiliarios, al mismo tipo de interés.

Los bonos del tesoro y la deuda pública a corto plazo, pueden considerarse como activos sin riesgo, ya que el inversor conoce regularmente y por anticipado y con certeza la renta periódica que el inversor va a recibir en forma de intereses y también el precio de reembolso al término de la vida del empréstito.

Al incluir la posibilidad de prestar (o pedir prestado) una parte del presupuesto de inversión, la curva de carteras eficientes del modelo de Markowitz se convierte en una recta. La cartera estará formada ahora por dos tipos de activos: Un activo sin riesgo que será la parte prestada (o adeudada) y un activo con riesgo, concretado en un valor mobiliario o combinación de varios valores mobiliarios (cartera), perteneciente a la frontera eficiente original, generada conforme a la lógica del modelo de Markowitz, cuando no se había tenido en cuenta la existencia de activos sin riesgos.

En la teoría clásica de las finanzas el riesgo ha tenido una consideración arbitraria (primas de riesgo en tasas de descuento, penalización por riesgo en los rendimientos esperados futuros, etc.), pero lo más habitual es la consideración de la varianza de la cartera, obtenida como una forma cuadrática cuya matriz simétrica es la matriz de varianzas-covarianzas de las rentabilidades, o en su caso la desviación estándar. En la práctica existen muchos y sofisticados métodos más allá de la simple obtención a partir de datos históricos que establece el riesgo en función de errores de predicción pasados que hay que minimizar. No obstante, cabe recordar que el vector de medias muestrales y la matriz de covarianzas muestrales son estadísticos suficientes para distribuciones normales conjuntas.

Otras medidas del riesgo de la cartera son la desviación absoluta total (citada en [19]) y la desviación absoluta media ([16]), que utiliza el vector de medias

muestrales y las realizaciones muestrales del vector de rendimientos, y que a nivel poblacional equivale al modelo media-varianza al ser la desviación absoluta media de la distribución normal proporcional a la desviación estándar. Igualmente, destaca la Beta, sobre todo si es importante considerar el riesgo sistemático, siendo la misma una función lineal de las Betas de los activos considerados.

Las distribuciones asimétricas ya fueron tratadas por Markowitz ([19]), quien proponía el modelo media-semivarianza, estando ya presente la idea en el criterio "Safety First" de Roy ([27]), que trata el riesgo con restricciones de déficit que limitan la probabilidad de que el retorno de la cartera no supere un valor mínimo).

El tratamiento asimétrico del riesgo es apropiado para carteras con opciones, activos con respaldo hipotecario, y también para factores de riesgo con distribución asimétrica. Además de la semivarianza existen otras medidas del riesgo de dominio parcial inferior, o "Downside risk", que consideran sólo retornos por debajo de un determinado nivel crítico. La mayor parte de medidas del riesgo que se manejan en selección de cartera se pueden englobar en la fórmula,

$$L_{\alpha}(\tau, T) = \int_{-\infty}^T |R - T|^{\alpha} dF(R) \quad (1.3)$$

donde $F(R)$ es la función de distribución de los retornos, T es el nivel mínimo aceptable, nivel de desastre, o un objetivo preestablecido para los mismos, que incluso puede ser un índice, τ puede ser ∞ si la medida es de dominio global o puede ser T si es una medida de dominio parcial, y $\alpha \in [0, \infty[$ es un parámetro de importancia relativa de las desviaciones, tal que $\alpha > 1$ supone aversión al riesgo, y para dominio estocástico de grado n se exige que $\alpha \geq n - 1$. Sin embargo, existen medidas del riesgo que no quedan recogidas directamente en dicha fórmula, como las medidas lineales-cuadráticas por subdominios ([14]), que además toma como $\tau = T$ el máximo rendimiento.

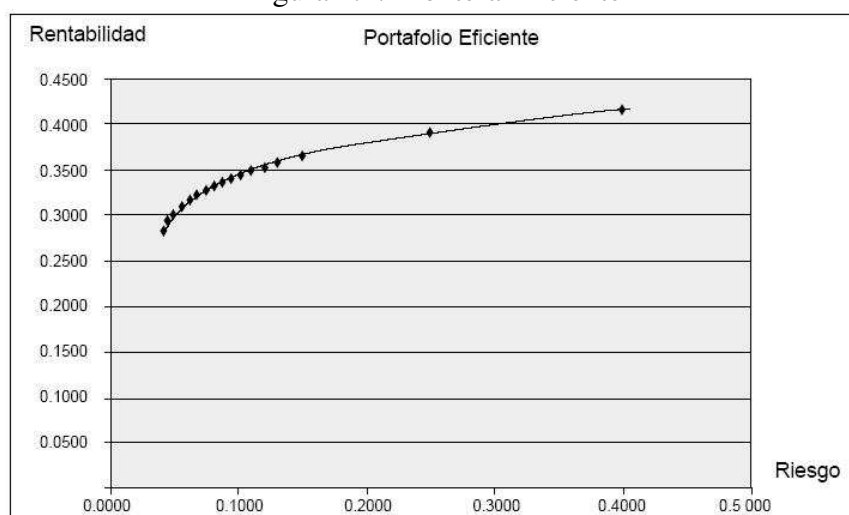
Frontera Eficiente

En la Frontera Eficiente (figura 1.2.2) están situadas las mejores rentabilidades para un riesgo determinado, clasificadas de la forma que a mayor riesgo corresponda una mayor rentabilidad. Según el grado de aversión al riesgo, el inversor se situará de forma razonable en uno u otro punto de la línea de la frontera eficiente. Cualquier otro punto sería irracional.

Cabe destacar, que la evidencia muestra que para niveles bajos de riesgo es posible incrementar retornos sin una adición significativa de volatilidad, sin embargo llega un momento en que la unidad de retorno adicional genera incrementos

en la volatilidad muy por encima de los niveles observados a niveles de retornos bajos. Esta relación se conoce como Coeficiente de Sharpe [33], y define la razón Retorno / Riesgo de portafolios alternativos a lo largo de la frontera eficiente, la cual presenta, una relación normalmente decreciente a lo largo de la frontera eficiente a medida que se exige mayor nivel de retorno a un portafolio.

Figura 1.1: Frontera Eficiente



Métodos Alternos de Medición de Riesgo de Mercado

Antiguamente en el área de las matemáticas financieras bastaba con manipular eficientemente la relación de valor presente para dominar relativamente el área. Actualmente los desafíos son otros. Duración, Convexidad, Fronteras Eficientes, Portafolio Comparador, Valor en Riesgo, Tracking Error, Pruebas Retrospectivas o Backtesting, Escenarios de Crisis o Stress Testing, entre otros, son algunos elementos que se deben manejar al momento de diseñar un portafolio de inversión.

Estas metodologías tienen la ventaja de entregar un marco de referencia que permita formalizar la asesoría de riesgo bursátil, de manera de ampliar el horizonte de evaluación de la gestión de una cartera considerando criterios de riesgo, adicionalmente a consideraciones de retorno.

Valor en Riesgo

El concepto de Valor en Riesgo VaR(Value at Risk), proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo.

Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar en el ámbito financiero es calcular el VaR con un nivel significancia del 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir una vez al mes con datos diarios, o una vez cada 5 meses con datos semanales) el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR. De esta forma, considerando una serie de retornos históricos de un portafolio que posee n activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del histograma.

Es común encontrar fluctuaciones de retorno en torno a un valor medio que no necesariamente es cero (este concepto en estadística se denomina proceso de reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal. Leves asimetrías son a veces percibidas en los retornos, pero desde un punto de vista práctico es suficiente asumir simetría en la distribución.

Una vez generada la distribución se debe calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja un 5% del área en su rango inferior. Este punto en el dominio de la distribución se denomina Value at Risk.

La figura 1.2 ilustra lo dicho anteriormente acerca del valor en riesgo.

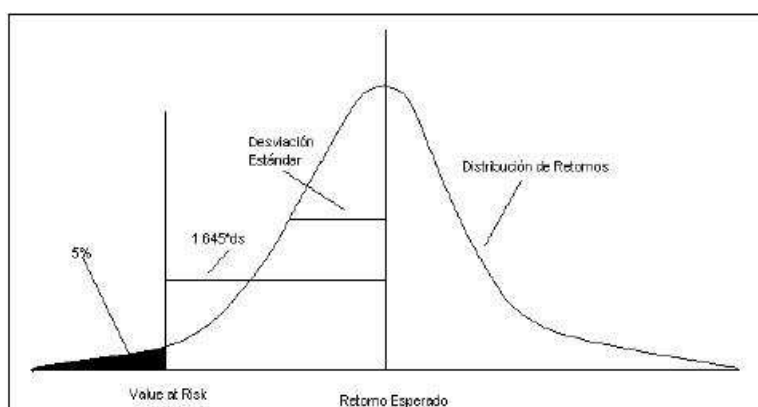


Figura 1.2: Valor en Riesgo

Portafolio Comparador

Un Portafolio Comparador es aquel referente con el cual es evaluada la gestión de operaciones de inversión efectuadas por un administrador de portafolio. Debe ser un portafolio neutral “factible” de reproducir, y debe incorporar todas las restricciones institucionales vigentes en el portafolio inversión. Estas restricciones se incorporan en el proceso de generación de la frontera eficiente, de manera que, si bien es cierto que el área de riesgo-retorno factible se ve disminuida, con la consiguiente reducción de los portafolios factibles a invertir, se estaría incluyendo otra

dimensión de riesgos que para la gestión del portafolio son importantes y que no son cuantificables en el plano de rentabilidad y riesgo financiero.

Capítulo 2

Modelos Determinísticos

2.1. El modelo original de Markowitz

El problema de optimizar un portafolio compuesto por un número finito de acciones es un problema clásico en finanzas computacionales y teóricas. De acuerdo a los trabajos realizados por Markowitz en [18] y [19], trabajos que más tarde le harían acreedor al premio nobel de economía, el rendimiento de un portafolio debería ser medido en dos dimensiones distintas: la *media*, que describe el retorno esperado, y el *riesgo*, que mide la incertidumbre del retorno.

En la construcción de un portafolio de inversión para maximizar el retorno del mismo, se asumen conocidas las distribuciones de probabilidad de los retornos de los instrumentos financieros en consideración, pero en la ausencia de datos de períodos futuros, dichas distribuciones tendrán que ser obtenidas de algún modelo adicional.

Desde su aparición, el modelo de Markowitz ha conseguido un gran éxito a nivel teórico, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones, e incluso sentando las bases de diversas teorías de equilibrio en el mercado de activos financieros. Sin embargo, su utilización en la práctica entre gestores de carteras y analistas de inversiones no ha sido tan extensa como podría suponerse de su éxito teórico.

Inicialmente, una de las principales causas de este hecho contradictorio radicaba en la complejidad matemática del método. Por una parte, al ser un programa cuadrático paramétrico, el algoritmo de resolución era complejo; por otra, el número de estimaciones de rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas a realizar es muy elevado. De ahí que William F. Sharpe ([30], [31]) planteara poco tiempo después una simplificación que consistió en suponer la existencia de una relación lineal entre el rendimiento del título y el de la cartera de mercado. Significa que podemos definir el riesgo de la cartera sin utilizar las covarianzas, suponiendo una gran simplificación en el cálculo.

Sharpe consideró que el modelo de Markowitz implicaba un dificultoso proceso de cálculo ante la necesidad de conocer de forma adecuada todas las covarianzas existentes entre cada pareja de títulos. Para evitar esta complejidad, Sharpe propone relacionar la evolución de la rentabilidad de cada activo financiero con un determinado índice, normalmente macroeconómico, únicamente. Este fue el denominado modelo diagonal, debido a que la matriz de varianzas y covarianzas sólo

presenta valores distintos de cero en la diagonal principal, es decir, en los lugares correspondientes a las varianzas de las rentabilidades de cada título. Sharpe exploró un acercamiento conocido por estos días como “Modelo de Mercados” o “Modelo de un sólo factor” o “Modelo Diagonal”. Él asume que el retorno sobre cada título es linealmente relacionado con un exponente único, usualmente tomado para ser el retorno sobre algunos exponentes de mercados, por ejemplo un índice de mercado, ahora conocido como coeficiente beta ([28]). La motivación de Sharpe para formular este modelo era empírica. Según él, la mayoría de los capitales se mueven juntos la mayoría del tiempo. Por lo tanto, es natural pensar que un sólo factor (o un pequeño número de factores) determina las variaciones en retornos. Esta relación lineal puede estimarse fácilmente, y los coeficientes obtenidos pueden usarse para construir covarianzas, las cuales, pueden, a su vez, usarse para construir portafolios óptimos. La tentativa de Sharpe redujo dramáticamente la dimensión del problema del portafolio y simplificó el cálculo de los portafolios eficientes. Más tarde, Sharpe dedicó su atención a la teoría de equilibrio de mercado de capitales. Él se preguntó como sería si todos los inversionistas se comportaran como optimizadores del portafolio de Markowitz. Ellos pueden tener diferente cantidad de dinero invertida en el mercado de valores, pero cada uno escogería el mismo portafolio de activos de riesgo. Sharpe se dio cuenta que si todos retuvieran el mismo portafolio de activos de riesgo, sería medir ese portafolio. Se necesitaría mirar la liquidez total invertida en determinados activos, y dividirla por la liquidez total en el mercado de capitales. Sharpe, decía que, en equilibrio, el portafolio de activos de riesgo individual es simplemente el portafolio de mercado. Esta observación implica que el portafolio de mercado es de eficiente variación, es decir, se apoya en la frontera del conjunto eficiente, y por tanto satisface las condiciones de primer orden de eficiencia, lo cual se convierte en una de las importantes ideas del celebrado Modelo de Precios de Activos de Capital (CAPM, siglas en inglés). Pero como en todos los modelos, este también tiene sus supuestos, a saber:

- Los inversionistas son adversos al riesgo y maximizan la utilidad esperada de su riqueza al fin del período.
- Los inversionistas son tomadores de precios y tienen expectativas homogéneas acerca de los rendimientos de los activos que tienen distribución normal conjunta.
- Existe un activo libre de riesgo tal que los inversionistas puedan pedir en préstamo o prestar montos limitados a la tasa libre de riesgo.
- Las cantidades de todos los activos riesgosos son fijas.

- Los mercados de activos están libres de fricciones, la información no tiene costo alguno y está al alcance de todos los inversionistas.
- No existen imperfecciones de mercado como impuestos, leyes o restricciones sobre ventas de recorte.

Este modelo se ha venido utilizando durante un tiempo en sustitución del modelo de Markowitz, sobre todo por la mayor sencillez de sus cálculos. Sin embargo, hoy en día, se dispone del software y hardware necesarios para resolver este tipo de problemas, lo que convierte en innecesario el modelo de Sharpe. Por lo tanto, las razones de su escasa utilización son otras. Entre ellas, podríamos citar algunas hipótesis restrictivas que el modelo de Markowitz contiene: no tiene en cuenta los costes de transacción ni los impuestos, considera la perfecta divisibilidad de los títulos - valores seleccionados y además, no proporciona ninguna herramienta para que el inversor valore su actitud ante el riesgo y deduzca su función de utilidad, necesaria para la elección de su cartera óptima. La mayoría de estos inconvenientes pueden solucionarse con la introducción en el modelo de nuevas restricciones. Por ejemplo: introducir los costes de transacción en el modelo asignándoles un límite; considerar los rendimientos después de impuestos para un determinado inversor; añadir una nueva restricción que garantice un mínimo de liquidez para los activos.

También puede influir el hecho de que la mayor parte de los gestores de carteras tienden a fundamentar sus decisiones en valoraciones subjetivas y no en el empleo de técnicas de selección de inversión de tipo cuantitativo. Algunos de ellos piensan que con el empleo de este tipo de técnicas su labor dejaría de ser fundamental y podrían incluso llegar a perder su puesto de trabajo.

No obstante, ninguna de estas causas es definitiva. Iglesias hace un repaso ([11]) de los argumentos a favor y en contra de la utilización del modelo de Markowitz y concluye que ninguno de estos últimos puede considerarse un obstáculo insalvable, señalando que “las hipótesis restrictivas en las que se basa admiten hasta cierto punto su relajación introduciendo nuevas restricciones en el planteamiento. Además, no es tan importante el que se asiente en hipótesis limitadas como que funcione bien en la práctica”. Michaud en [21] señala una serie de ventajas que tiene la utilización de una técnica de optimización como el modelo de Markowitz: satisfacción de los objetivos y restricciones de los inversores, control de la exposición de la cartera al riesgo, establecimiento de un estilo de inversión, uso eficiente de la información, etc.

Markowitz centró su atención en la práctica habitual de la diversificación de carteras y mostró como un inversor puede reducir la desviación típica de las renta-

bilidades de una cartera eligiendo acciones cuyas oscilaciones no sean paralelas. Markowitz continuó con el desarrollo de los principios básicos de la formación de carteras. Estos principios son el fundamento de todo lo que pueda decirse entre riesgo y rentabilidad. La rentabilidad de cualquier título o cartera, es una variable aleatoria de carácter subjetivo, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocido por el inversor. El valor medio o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión. Se acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la varianza o la desviación estándar, de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, ya sea de un valor individual o de una cartera. La conducta del inversor le lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo. En la primera etapa se determina el conjunto de Carteras Eficientes cuando proporciona la máxima ganancia para un riesgo (medido por la varianza) dado, o bien, proporciona el mínimo riesgo para un valor dado de ganancia (Esperanza Matemática).

2.1.1. Enfoques del inversor

En la gestión de carteras nos encontramos dos tendencias diferenciadas en cuanto a la estrategia o política más adecuada para conseguir los objetivos del inversor. Por un lado, la estrategia activa que se basa en el incumplimiento de la hipótesis de eficiencia del mercado y en consecuencia supone que los precios de cotización de los títulos no reflejan toda la información disponible. En estas circunstancias, los gestores piensan que pueden batir al mercado anticipándose a sus movimientos sobre la base de las malformaciones de precios que estiman pueden existir en el mercado. Esta estrategia se fundamenta en la posibilidad de identificar valores infravalorados o sobrevalorados cuya compraventa pueda generar rentabilidad suficiente para cubrir los costes de transacción y el riesgo asumido. Y por otro, la estrategia pasiva que supone el cumplimiento de la hipótesis de eficiencia del mercado, desarrollada a finales de los sesenta. Es decir, el precio de cotización de un título refleja toda la información existente en el mercado sobre su comportamiento. Por lo tanto, existe información perfecta y ningún inversor puede superar al mercado. En estas condiciones, la gestión pasiva se plantea seguir a una cartera de referencia que refleje los movimientos del mercado (ver [35]).

2.1.2. Manejo de cartera

El retorno $R(x)$ de una inversión con riesgo es una variable aleatoria, el valor esperado $E(R(x))$ hará referencia a este valor. La varianza $Var(R(x))$ será una

medida conveniente de riesgo. En algunas circunstancias la desviación estandar $\sigma(R(x)) = (Var(R(x)))^{1/2}$ de los retornos es una medida de riesgo más conveniente dependiendo de la acción a analizar. Una forma conveniente de comparar estas dos medidas es calcular $Var(aR(x))$ y $\sigma_a(R(x))$ pues $Var(aR(x)) = a^2 Var(R(x))$ y $\sigma_a(R(x)) = |a|\sigma(R(x))$ para $a \in \mathbb{R}$. Luego, dependiendo de la variable aleatoria y que medida se utilice el riesgo será mayor o menor.

Sean R_1, R_2, \dots, R_n las variables aleatorias que representan los retornos de las acciones 1, 2, ..., n. Asumimos que $E[R_j] = r_j < \infty$ para $j = 1, \dots, n$. El objetivo es invertir el capital en estas acciones de tal forma que se obtenga el mayor retorno total de la inversión. Notando por x_1, x_2, \dots, x_n las fracciones del capital invertido en las acciones 1, 2, ..., n, respectivamente, el retorno total está dado por:

$$R(x) = R_1x_1 + R_2x_2 + \dots + R_nx_n. \quad (2.1)$$

Claramente, el conjunto de todas las posibles asignaciones para las acciones, al que llamaremos *conjunto factible* es:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$$

Notemos por $\mu \in \mathbb{R}^n$ al vector de los retornos esperados de las acciones, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su matriz de varianzas-covarianzas.

En el modelo se incluye, además de las n acciones con riesgo, una acción con retorno conocido μ_0 sin riesgo que, en los grandes mercados de capitales, pertenece a una cuenta *money market*, y en mercados como el nuestro son los bonos emitidos por el gobierno. Es justamente la inclusión de esta acción libre de riesgo el pilar fundamental en la diversificación del portafolio.

Proposición 1. *El retorno esperado $\mu_R = E[R(x)]$ y la varianza total $\sigma_R^2 = Var(R(x))$ sobre un portafolio con pesos $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ para cada una de sus acciones, respectivamente, están dados por:*

$$\begin{aligned} \mu_R &= \mu^t x, \\ \sigma_R^2 &= x^t \Sigma x \end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
i) \quad \mu_R &= E[R(x)] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^n R_i x_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^n x_i E[R_i] \\
&= \sum_{i=1}^n x_i r_i \\
&= \mu^t x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad \sigma_R^2 &= \text{Var}(R(x)) \\
&= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n R_i x_i\right) \\
&= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n R_i x_i, \sum_{j=1}^n R_j x_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j) \\
&= x^t \Sigma x.
\end{aligned}$$

Definición 1. La familia de portafolio con mínima varianza entre todos los portafolios en el conjunto factible con retorno constante μ_R es llamada la línea de mínima varianza.

2.1.3. Formulación del modelo

Al momento de optimizar un portafolio con el modelo de Markowitz es necesaria la elección de la función objetivo, pudiéndose así:

- maximizar el retorno esperado(media) del portafolio sujeto a una cota superior para el riesgo, o
- minimizar el riesgo fijando una cota inferior para el retorno esperado.

Este enfoque se conoce como *optimización media-riesgo* o *media-varianza*.

El modelo original de Markowitz asume que μ y Σ son conocidos.

Sea R_0 el retorno mínimo aceptado, entonces, basándonos en la segunda forma de elegir la función objetivo. Notando por R al mínimo retorno aceptado, el modelo determinístico de Markowitz basado en el enfoque media-varianza es:

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} \min x^t \Sigma x \\ \text{s.a.} \\ \mu^t x \geq R_0 \\ \sum_{j=0}^n x_j = 1 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right.$$

2.2. Modelos lineales

Los modelos lineales en optimización de portafolios eran poco menos que una utopía una par de décadas atrás. Todo esto antes de Konno y Yamazaki ([16]), quienes en 1991 propusieron medidas alternativas de riesgo con la capacidad de “linealizar” el modelo cuadrático de Markowitz, fue entonces cuando se pudieron asociar estos dos campos de investigación; programación lineal y teoría de portafolios.

2.2.1. Programación lineal

En general, un problema de programación lineal consiste en maximizar o minimizar el valor de una función lineal $c^T x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, a la que llamaremos *función objetivo* para (x_1, \dots, x_n) , satisfaciendo un número finito de igualdades o desigualdades, a las que llamaremos *restricciones*, de alguno de los siguientes tipos:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b, \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq b \quad \text{o} \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b.$$

Con estas consideraciones, la forma canónica de un modelo de programación lineal es:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

Introducción

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario.

En la actualidad es una potente herramienta que ha permitido importantes ahorros de recursos en compañías y negocios, incluyendo empresas medianas en los distintos países industrializados del mundo. Su aplicación a otros sectores de la sociedad se está ampliando con rapidez. Una proporción muy grande de los cálculos científicos en computadoras está dedicada al uso de la programación lineal.

Una aplicación común de la programación lineal la constituye el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima). Con más precisión, este problema incluye

elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas. Los niveles de actividad elegidos dictan la cantidad de cada recurso que consumirá cada una de ellas. Cada actividad genera una cierta ganancia proporcional a su nivel, y el objetivo es maximizar la ganancia global obtenida.

La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones de producción a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de una cartera de inversiones, hasta la selección de los patrones de envío; desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación, etc. El ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las distintas actividades eligiendo los niveles de las mismas.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.

Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades. De hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal es un problema de programación lineal. Aún más, se dispone de un procedimiento de solución extraordinariamente eficiente llamado método simplex, para resolver estos problemas, incluso los de gran tamaño. Estas son algunas causas del gran auge de la programación lineal en las últimas décadas.

Un poco de historia

En los siglos XVII y XVIII grandes matemáticos como Newton, Leibnitz, Bernoulli y, sobre todo, Lagrange, que habían contribuido significativamente al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones. Posteriormente, el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para

encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En ese año, el matemático ruso Leonid Vitalevich Kantorovitch publica una extensa monografía titulada “Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción”, en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida, llamada hoy en día programación lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y por Kantorovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de problema de Koopmans-Kantorovitch.

Tres años más tarde, G. Stigler plantea otro problema particular conocido con el nombre de *problema del régimen alimenticio óptimo*.

Poco después del comienzo de la Segunda Guerra Mundial, George Dantzig se unió a la Fuerza Aérea de Estados Unidos y trabajó con el Combat Analysis Branch of Statistical Control. Después de recibir su Doctorado, regresó a la Fuerza Aérea como el asesor de Matemáticas del U. S. Air Force Controller. Fue en ese trabajo donde encontró los problemas que le llevaron a hacer sus grandes descubrimientos. La Fuerza Aérea necesitaba una forma más rápida de calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico.

Habiéndose ya establecido el problema general de Programación Lineal, fue necesario hallar soluciones en un tiempo razonable.

Otro de sus grandes logros es la teoría de la dualidad, ideado conjuntamente con Fulkerson y Johnson en 1954 para resolver el paradigmático problema del Agente Viajero (resolviendo entonces problemas con 49 ciudades cuando, hoy día, mediante modernas implementaciones del método, se resuelven problemas con varios miles de ciudades y hasta un millón de nodos)

Respecto al método simplex, señalaremos que su estudio comenzó en 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma International Business Machines (IBM).

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro John (Janos) Von Neumann (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo “Teoría de juegos”. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de Dávid Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la Universidad de Princeton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

Teorema fundamental de la programación lineal

Definición 2. Un hiperplano en \mathbb{R}^n es una variedad lineal de codimensión 1, es decir, $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = k, a \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}\}$.

Cada hiperplano determina dos semiespacios: $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq k\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq k\}$. Un poliedro es la intersección de un número finito de semiespacios.

Notemos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = k\}$ es un poliedro ya que puede escribirse como intersección de los semiespacios $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq k\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq k\}$. Además, es claro que la intersección de un número finito de poliedros es un poliedro. Esto muestra que el conjunto de todos los x que satisfacen las restricciones de un problema de programación lineal es un poliedro. Luego, un problema de programación lineal consiste en maximizar o minimizar el valor de una función lineal sobre un poliedro.

Definición 3. Un subconjunto K de \mathbb{R}^n se dice convexo ssi $\alpha y + (1 - \alpha)z \in K, \forall y, z \in K, 0 \leq \alpha \leq 1$.

Definición 4. Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de $Ax = b$ ssi $Ax = b$ y existen m índices i_1, \dots, i_m entre 1 y n tales que $x_j = 0, \forall j \neq i_1, \dots, i_m$ y las columnas i_1, \dots, i_m de A (que llamaremos la base) son linealmente independientes.

Definición 5. Dado un problema de programación lineal, diremos que x es una solución factible ssi x satisface las restricciones del problema.

Ahora tenemos la notación necesaria para formular el teorema fundamental de la programación lineal:

Teorema 1. Consideremos el problema de programación lineal en forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene rango m , $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Entonces se verifican las dos condiciones siguientes: **i)** si el problema tiene una solución factible entonces tiene una solución básica y factible. **ii)** si el problema tiene una solución óptima entonces tiene una solución óptima que es básica.

Esta demostración no se realizará en esta tesis, puesto que no es ese el objetivo central de la misma. Sin embargo, dicha demostración puede ser encontrada en cualquier texto introductorio de programación lineal.

Teorema de Dualidad

Teorema 2. Consideremos los problemas de programación lineal

$$(P) \begin{cases} \text{mín } c^T x \\ \text{s.a.} \\ Ax \geq b \end{cases}$$

y

$$(D) \begin{cases} \text{máx } y^T b \\ \text{s.a.} \\ y^T A = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene rango m , $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Supongamos que existe un x_0 que es solución óptima del problema (P) (es decir, $Ax_0 \geq b$ y el mínimo de $c^T x$ sobre el poliedro $\{Ax \geq b\}$ es $c^T x_0$). Entonces existe $y_0 \geq 0$ tal que $y_0 A = c$ y el máximo de $y^T b$ sobre el poliedro $\{y^T A = c, y \geq 0\}$ es igual a $y_0^T b$ (es decir, y_0 es una solución óptima del problema (D)) y además se verifica que $c^T x_0 = y_0^T b$.

(P) y (D) se conocen como el primal y el dual, respectivamente.

Por las razones previamente expuestas, este teorema tampoco será demostrado en este trabajo.

Desde el punto de vista económico, el significado de las variables duales es de gran interés para los gerentes, ya que representan el valor por unidad de recurso adicional, lo cuál permite tomar decisiones sobre donde invertir para incrementar las utilidades.

Descripción general del algoritmo del Simplex

Dado un sistema lineal de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ o & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_0 \\ b \end{pmatrix}$$

que está en forma canónica y que satisface $b \geq 0$, el algoritmo realiza los

siguientes pasos a partir de la matriz

$$i_1 \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_n & | & -z_0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ i_2 & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ i_m & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

donde i_k es la columna de A donde está el vector e_k

El procedimiento que sigue el Simplex es el siguiente:

1. Elegir una columna s de A tal que $c_s < 0$. Si no existe, stop (la presente solución básica $(z_0; \bar{x})$ es óptima).

2. Elegir una fila r de A tal que

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}$$

Si el conjunto fuera vacío, es decir, $\nexists i$ tal que $a_{is} > 0$, stop (el problema no tiene solución óptima).

3. Hacer una transformación con pivote en a_{rs} y poner

$$i'_k = \begin{cases} i_k & \text{si } k \neq r \\ s & \text{si } k = r \end{cases}$$

4. Si

$$\begin{pmatrix} 1 & c' & | & -z'_0 \\ 0 & A' & | & b' \end{pmatrix}$$

es la matriz obtenida en el paso 3, actualizar en la forma $c = c'$, $A = A'$, $z_0 = z'_0$, $b = b'$, $i_k = i'_k$.

5. Ir al paso 1.

2.2.2. Tres Modelos de optimización de portafolio basados en programación lineal

Entre los modelos lineales alternativos de rentabilidad-riesgo cabe mencionar el modelo "Safety First"[27], que trata el riesgo con restricciones "shortfall" que limitan la probabilidad de que el rendimiento de la cartera no supere un valor mínimo, y los modelos de Konno, Cai y Teo que utilizan transformaciones para linealizar las funciones de riesgo.

El modelo original de Markowitz utiliza el retorno como medida del rendimiento esperado de un portafolio y la varianza como medida del riesgo al cual se ve expuesto dicho portafolio. Muchos investigadores han puesto en tela de duda la eficiencia de la varianza como cuantificador apropiado del riesgo. Debido a esto se han estudiado otras posibles formas para medir el riesgo, en base a los cuales se formulan los modelos lineales para optimizar portafolios que se plantean a continuación. Estas medidas “alternativas” son, por ejemplo;

- la semi-varianza inferior,
- la semi-desviación estándar inferior,
- la desviación absoluta media,
- la riesgo bajo objetivo, etc.

Asumimos que se tienen n activos en el mercado. Sea R_i la variable aleatoria tasa de retorno del activo i y x_i la cantidad de dinero asignada al activo i , $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $r_i = E[R_i]$, para todo i .

Definición 6. La semi-varianza inferior se define como

$$V_-(x) = E[(R(x) - r(x))_-]^2, \text{ donde } (a)_- = \max\{0, -a\} \quad (2.2)$$

Esta medida se conoce como LSV por sus siglas en inglés (Lower Semi-Variance).

Definición 7. La semi-desviación estándar inferior se define como

$$\sigma_-(x) = \sqrt{V_-(x)} \quad (2.3)$$

Esta medida se conoce como LSSD.

Definición 8. Si ρ es la tasa de rendimiento que los inversores esperarían tener, entonces se define el riesgo de k -ésimo orden como

$$BT_k(\rho, x) = E[(\rho - R(x))_-^k]^{\frac{1}{k}} \quad (2.4)$$

Esta medida de riesgo calza perfectamente con el principio de MEU (máxima utilidad esperada). Para cualquier k , $BT_k(\rho, x)$ es convexo. Cuando $k = 1, 2$ la medida de riesgo obtenida produce modelos de programación lineal y cuadrática, respectivamente, lo cual es de mucha utilidad al momento de implementar en la práctica estos modelos.

Modelo de Konno

Definición 9. La desviación absoluta se define de la siguiente manera:

$$l_1(x) = E\left|\sum_{i=1}^n R_i x_i - E\left[\sum_{i=1}^n R_i x_i\right]\right| \quad (2.5)$$

En otras palabras, el riesgo del portafolio está medido por la desviación absoluta de la tasa de retorno de las acciones en lugar de su varianza. Se ha puesto mucha atención en esta función de riesgo ya que el problema de optimización de portafolios con esta medida de riesgo l_1 puede ser formulado como un problema de programación lineal, por lo cual, su implementación puede llevarse a cabo de forma eficiente.

El modelo de Markowitz ha sido criticado por no ser consistente con los modelos axiomáticos de preferencia de elección bajo riesgo al no reflejar una relación de dominación estocástica (se estudiará en el capítulo siguiente). En contraste, el modelo MAD es consistente con la dominación estocástica de segundo grado, del cual se desprende que el coeficiente que relaciona el riesgo y el retorno debe ser acotado por una constante.

Ogryzak y Ruszczyński ([23]) probaron que la solución óptima en la frontera eficiente que arroja el modelo MAD satisface el principio MEU sin importar como esté distribuido el vector (R_1, R_2, \dots, R_n) .

Sea M_0 el capital que dispone el inversor. Sea ρ la tasa de retorno mínimo requerida. Sea μ_i el monto máximo a invertirse en el activo i , $i = 1, 2, \dots, n$. En primera instancia, no se venden acciones, es decir, $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Notemos por:

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho M_0, 0 \leq x_j \leq \mu_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

El modelo de Konno consiste en minimizar la desviación absoluta $l_1(x)$ sobre el conjunto de soluciones con tasas de retorno esperadas mayores o iguales ρ :

$$(MK) \begin{cases} \text{mín} & w(x) = E\left|\sum_{j=1}^n R_j x_j - E\left(\sum_{j=1}^n R_j x_j\right)\right| \\ \text{s.a.} & \\ & x \in S \end{cases}$$

Como claramente se observa, la función objetivo del modelo es no lineal, por

lo cual se realiza una transformación para expresarlo de la siguiente manera:

$$(MKL) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad w(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ \text{s.a.} \quad y_t \geq \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \\ \quad \quad y_t \geq - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \\ \quad \quad x \in S \end{array} \right.$$

Aquí r_j es el retorno esperado del j -ésimo activo. r_{jt} es la tasa de retorno del j -ésimo activo durante el período t .

Es evidente que no es necesario calcular la matriz de varianzas covarianzas y el número de restricciones se ve directamente afectado por el número de períodos de estudio.

Modelo de Cai

Cai ([3]) propone un nuevo modelo de riesgo basado en MAD introduciendo la regla *minimax* en el modelo de selección de portafolio.

Definición 10. La función de riesgo de desviación absoluta máxima $l_\infty(x)$ está dada por

$$l_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} E|R_i x_i - E(R_i) x_i| \quad (2.6)$$

Esta función mide el máximo de los riesgos individuales de cada activo.

$$(MC) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad l_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} E|R_i x_i - E(R_i) x_i| \\ \text{s.a.} \\ \quad \quad x \in S \end{array} \right.$$

Este modelo puede ser transformado a un modelo lineal de la forma:

$$(MCL) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad y \\ \text{s.a.} \\ \quad \quad q_j x_j \leq y, \quad j = 1, \dots, n \\ \quad \quad x \in S \end{array} \right.$$

Donde $q_j = E|R_j - r_j|$, $j = 1, \dots, n$, el cual es la desviación absoluta esperada de R_j de su media. Obviamente, si la distribución de cada variable aleatoria R_j es

dada, esta función está explícitamente determinada. Los datos históricos también pueden ser utilizados para estimar r_j y q_j .

El modelo l_∞ y las técnicas relacionadas son fáciles de manipular e implementar en la práctica. Más aún, la selección del portafolio óptimo no involucra las correlaciones entre los activos, por lo cual es similar al modelo de Konno, y el número de restricciones de este modelo está determinado por el número de activos.

La equivalencia entre MC y MCL se demuestra a continuación:

Teorema 3. x^* es una solución óptima para MC, si y solamente si (x^*, y^*) es una solución óptima para MCL, donde $y^* = \max_j q_j x_j$.

Demostración:

Si x^* es una solución óptima para MC, entonces (x^*, y^*) es una solución factible para MCL, donde y^* tiene la forma mencionada en el enunciado del teorema. Si (x^*, y^*) no es una solución óptima para MCL, entonces existe una solución factible (x, y) para P_2 tal que $y < y^*$.

Notemos que $q_j x_j \leq y$, entonces $\max_j q_j x_j \leq y < y^* = \max_j q_j x_j^*$, lo cual contradice el hecho de que x^* es una solución óptima para MC.

Por otro lado, si (x^*, y^*) es una solución óptima para para MCL, entonces x^* es una solución factible para MC.

Si x^* no es una solución óptima para MC, entonces existe una solución factible x para MC, tal que $\max_j q_j x_j < \max_j q_j x_j^*$.

Notemos por $y = \max_j q_j x_j$. Entonces se tiene que $y = \max_j q_j x_j < \max_j q_j x_j^* \leq y^*$. Esto contradice el hecho de que (x^*, y^*) es una solución óptima para MCL.

Modelo de Teo

Definición 11. La función de riesgo alternativa $H_\infty^T(x)$ se define por:

$$H_\infty^T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max_{1 \leq i \leq n} E |R_{it} x_i - r_{it} x_i| \quad (2.7)$$

Donde las R_{it} son variables aleatorias y r_{it} sus esperanzas, para $t = 1, 2, \dots, T$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Teo propone esta función como una extensión de $l_\infty(x)$ asumiendo que se tienen datos históricos disponibles de T períodos de tiempo. En cada período se calcula la desviación absoluta individual con respecto al valor esperado en ese período. Así, el riesgo total del portafolio se toma como el promedio de los máximos de las desviaciones absolutas individuales de todas las acciones en todos lo períodos pasados.

$$(MT) \begin{cases} \text{mín} & H_{\infty}^T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{máx}_{1 \leq i \leq n} E|R_{it}x_i - r_{it}x_i| \\ \text{s.a.} \\ x \in S. \end{cases}$$

Al igual que para el modelo de Cai, este modelo se puede transformar en uno lineal con la siguiente forma:

$$(MTL) \begin{cases} \text{mín} & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ \text{s.a.} \\ a_{jt}x_j \leq y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1, \dots, n \\ x \in S \end{cases}$$

Donde $a_{jt} = E|R_{jt} - E(R_{jt})|$, $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Obviamente, el número de restricciones está determinado por el número de activos y el número de períodos, por lo cual, si n o T son demasiado grandes, el tiempo de respuesta, computacionalmente hablando, podría también hacerse grande.

La equivalencia entre MT y MTL se demuestra a continuación:

Teorema 4. x^* es una solución óptima para MT, si y solamente si (x^*, y^*) es una solución óptima para MTL, donde $y^* = (y_1^*, \dots, y_t^*, \dots, y_T^*)$, $y_t^* = \text{máx}_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j^*$.

Demostración:

Si x^* es una solución óptima para MT, entonces (x^*, y^*) es una solución factible para MTL, donde y^* tiene la forma mencionada en el enunciado del teorema.

Si (x^*, y^*) no es una solución óptima para MTL, entonces existe una solución factible (x, y) para MTL, donde $y = (y_1, \dots, y_T)$ y tal que $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t < \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^*$.

Notemos que $a_{jt}x_j \leq y_t$, entonces

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{máx}_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t < \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{máx}_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j^*,$$

lo cual contradice el hecho de que x^* es una solución óptima para MT.

Por otro lado, si (x^*, y^*) es una solución óptima para MTL, entonces x^* es una solución óptima para MT, ya que de lo contrario, existe una solución factible

x para MT, tal que $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{máx}_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j < \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{máx}_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j^*$.

Notemos por $y_t = \max_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)$. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j < \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max_{1 \leq j \leq n} a_{jt}x_j^* \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^*$$

Esto contradice el hecho de que (x^*, y^*) es una solución óptima para *MTL*.

2.2.3. Modelo alternativo basado en el modelo de Konno

Como se dijo en el capítulo introductorio, existen modelos de selección de cartera que optimizan una combinación lineal de la esperanza del retorno del portafolio y su varianza. Konno utiliza una función de riesgo alternativa a la varianza clásica, conocida como desviación semi-absoluta, de la cual se deriva un problema de optimización lineal. La propuesta es crear un modelo que se basa en los supuestos del modelo de Konno, pero que optimiza una combinación lineal del retorno esperado del portafolio y la transformación lineal de la desviación semi-absoluta del mismo. Además haremos simulaciones sobre el parámetro λ para llegar a un modelo final completamente determinado que se ajuste a la estructura de las instancias obtenidas.

Con estos antecedentes, el modelo propuesto es

$$(MKM) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \lambda \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ \text{s.a.} \\ y_t \geq \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \\ y_t \geq - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \\ \sum_{j=1}^n x_j = M_0 \\ 0 \leq x_j \leq \mu, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1 \end{array} \right.$$

donde M_0 es el capital total disponible y μ es el capital máximo a destinarse a una acción individual. La demás notación es la misma que se utilizó en la descripción del modelo de Konno.

2.3. Modelos no lineales

En este capítulo se abordarán algunos modelos de selección de portafolios óptimos cuya función objetivo o alguna de sus restricciones son no lineales. No se incluye aquí el modelo cuadrático de Markowitz, que fue estudiado por separado debido a su importancia histórica en un capítulo anterior).

Revisando la literatura, queda constancia de la importancia teórica y práctica de la aproximación media-varianza, pero en realidad el problema es bastante más complejo: existen múltiples fuentes de incertidumbre, así como también múltiples criterios de elección, que a veces surgen como consecuencia de incluir más índices de referencia, etc. Además, todos los modelos pueden generalizarse considerando, junto a las ineludibles restricciones presupuestarias y de objetivos preestablecidos, imperfecciones de mercado o restricciones de diverso tipo: costes de transacción, impuestos, venta en corto o endeudamiento, lote mínimo y lote máximo de transacción, requerimientos de solvencia, etc. De ahí que el problema de selección de cartera haya evolucionado tanto en el planteamiento como en las técnicas. No obstante, el enfoque rentabilidad-riesgo sigue siendo el principio básico en el planteamiento de los modelos, con el consiguiente conflicto de objetivos, ya que para lograr mayor rendimiento se deben adoptar estrategias más arriesgadas dando lugar a un abanico de posibilidades que van desde las carteras de crecimiento hasta las carteras de seguridad.

Entre los modelos estáticos alternativos de rentabilidad-riesgo cabe mencionar el modelo “Safety First” ([27]), que trata el riesgo con restricciones “Shortfall” que limitan la probabilidad de que el rendimiento de la cartera no supere un valor mínimo.

Otro modelo a destacar es el de Konno y Yamazaki ([16]), estudiado en un capítulo anterior, que sustituye la varianza por la desviación absoluta media, una medida del riesgo que cuenta con la ventaja de que no se requiere distribución de probabilidad para las tasas de rendimiento, y que además se transforma dando lugar a un problema de programación lineal.

Frente a estos modelos encontramos los modelos de maximización de la utilidad esperada de la riqueza, que constituyen el referente teórico de la elección racional con incertidumbre. La hipótesis básica es que el inversor tiene preferencias racionales representables mediante una función de utilidad que depende de la riqueza final, $U(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En general, como condición necesaria, el modelo media-varianza resulta consistente con distribuciones elípticas: normal multivariante, exponencial multivariante, Cauchy multivariante, etc. Dichas distribuciones se caracterizan sólo por dos

parámetros, una medida central o de localización y una medida de dispersión o escala, lo que resulta suficiente para la consistencia, y en todo caso son distribuciones simétricas.

Otra línea argumental trata de refrendar el modelo media-varianza como aproximación lineal/cuadrática a funciones de utilidad ([17]). En todo caso el modelo media-varianza es una aproximación razonable de segundo orden para carteras bien diversificadas si el rendimiento total esperado de la cartera es conocido y la variación del rendimiento total respecto del esperado baja.

Para distribuciones asimétricas ni el modelo media-varianza ni el modelo desviación absoluta media resultan consistentes con la maximización de la utilidad esperada. No obstante, el planteamiento de un modelo de rentabilidad-riesgo es aceptable si se consideran las medidas asimétricas del riesgo como aproximaciones locales de segundo orden de la función de utilidad. Alternativas a los modelos citados son los modelos borrosos, que requieren medidas borrosas a partir de datos históricos y la experiencia de gestores expertos, así como la consideración de escenarios y su aplicación en optimización robusta, con bases en la programación por objetivos y la consideración de restricciones débiles ([12]).

2.3.1. Modelo de la recta de mercado de capitales

Este modelo planteado por Cuevas y Buenaventura ([34]) consiste en una ampliación del modelo original de Markowitz ([18]), con la particularidad de ser un modelo bietapa, que en primera instancia resuelve el problema cuadrático clásico para hallar la frontera eficiente, y en una segunda etapa resuelve un problema cuya función objetivo es no lineal para hallar un único portafolio óptimo sobre la frontera eficiente hallada previamente.

La recta de mercado de capitales

Se puede obtener un solo portafolio óptimo sobre la frontera eficiente por medio del cálculo de la recta del mercado de capitales. El portafolio óptimo es el punto de tangencia entre la recta del mercado de capitales y la frontera eficiente. Como este portafolio óptimo está sobre la frontera eficiente, entonces el punto de tangencia debe estar localizado en la recta con máxima tangente, conformada con el punto de tasa libre de riesgo r y el punto de la frontera eficiente.

El teorema de separación consiste en la determinación del portafolio óptimo, lo

cual requiere maximizar la pendiente de la recta:

$$m = \frac{R_p - r_0}{\sigma_p} \quad (2.8)$$

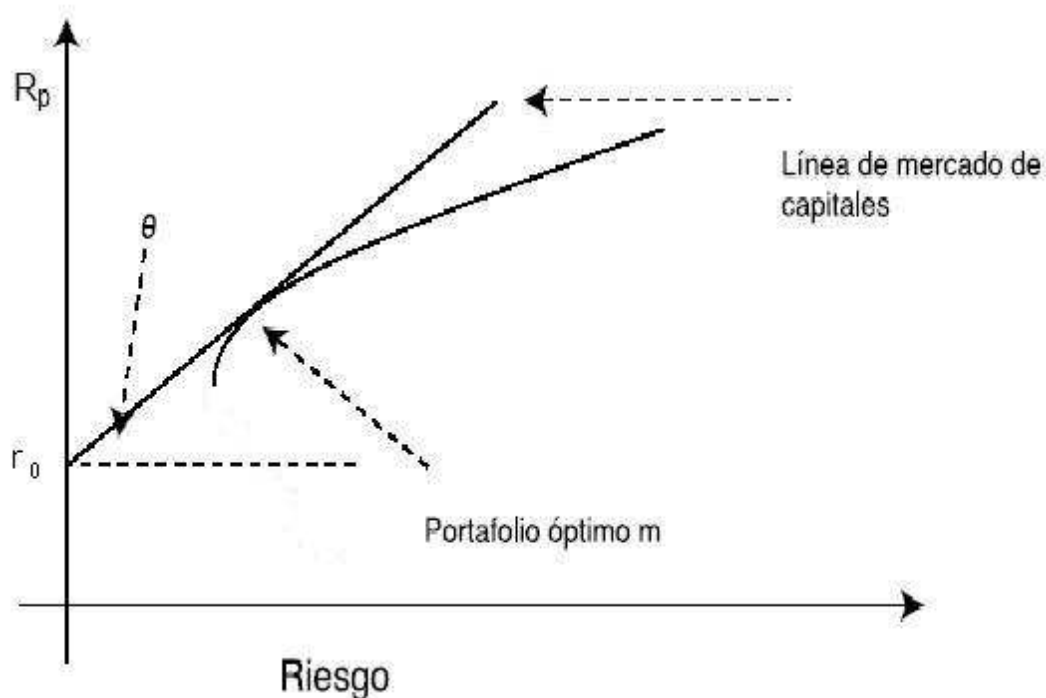
Sujeto a las mismas restricciones de los modelos previamente planteados. Donde R_p es el rendimiento del portafolio óptimo, r_0 es la tasa libre de riesgo, y σ_p es la desviación estándar del portafolio óptimo.

Evidentemente, para este cálculo se debe contar con una tasa libre de riesgo r_0 , o sea, la tasa de interés que posea el menor riesgo de inversión en el mercado (normalmente definida en nuestro medio por las inversiones en títulos emitidos por el Estado, y en mercados más amplios definida por la más alta tasa de una cuenta tipo "money market", que son inversiones similares a pólizas a plazo fijo, pero que pueden liquidarse bajo ciertas circunstancias antes de la fecha de vencimiento de la póliza).

Es necesario además, determinar la pendiente de la recta. Gráficamente se puede expresar como aquella recta que pasa por r_0 (punto asociado a una tasa libre de riesgo en el plano rendimiento-riesgo) y tiene la máxima pendiente sin salirse de la frontera eficiente determinada anteriormente.

La figura 2.3.1 ilustra lo arriba expuesto.

Figura 2.1: Recta de Mercado de Capitales



El modelo planteado consiste entonces en hallar el portafolio óptimo m que se encuentra sobre la frontera eficiente, para lo cual se tienen dos etapas:

Primera Etapa:

Notemos por $\mu \in \mathbb{R}^n$ al vector de los retornos esperados de las acciones, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su matriz de varianzas-covarianzas.

Sea $Q(R_p) := \{R_p \in \mathbb{R} : 0 < R \leq 1\}$

Se discretiza el intervalo $Q(R)$, y para cada valor posible de R se resuelve el siguiente programa cuadrático:

$$E_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } x^T \Sigma x \\ \text{s.a.} \\ \mu^t x \geq R \\ \sum_{j=0}^n x_j = 1 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right.$$

Notemos por $\Sigma(R)$ al conjunto de las desviaciones estándares calculadas para cada uno de los retornos $R \in Q(R)$.

Notemos además por P al conjunto de portafolios que se encuentran en la frontera eficiente, es decir, que tienen asociado un $R_p \in Q(R)$ y un $\sigma_p \in \Sigma(R)$.

Segunda Etapa:

Se plantea un modelo de maximización no lineal sobre los portafolios eficientes hallados en la primera etapa.

$$E_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } \tan(\theta) = \frac{R - r_0}{\sigma_p} \\ \text{s.a.} \\ p \in P \end{array} \right.$$

2.3.2. Modelo de optimización por escenarios

Una observación importante a los modelos media-varianza es que las preferencias del inversor se consideran sólo de forma implícita al suponer una función de utilidad creciente con el rendimiento y decreciente con el riesgo. Por eso la aversión al riesgo se considera mediante vías subjetivas, como puede ser el establecimiento de términos de penalización lineales. Sin embargo, un hecho constatado en la conducta individual de muchos inversores es que a mayor riqueza o presupuesto disminuye la aversión absoluta al riesgo.

Otra observación es que los modelos parten de un capital conocido destinado a la inversión al no considerar el problema subyacente de la distribución de la riqueza del inversor. Sin embargo, existen situaciones reales en las que se trata de calcular el capital a invertir, coste, o dotación inicial de la cartera junto a la composición de la misma, de forma que se optimicen las expectativas globales del inversor.

Establecemos como datos conocidos del problema C_{min} y C_{max} que son el capital mínimo y máximo, respectivamente, que el inversor está dispuesto a destinar a la cartera. Evidentemente, $0 \leq C_{min} \leq C \leq C_{max}$, siendo C el capital a invertir.

Siguiendo la nomenclatura utilizada, definamos x_i como la cantidad que será invertida en el activo i , y suponemos que $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, es decir, que el mercado no permite ventas en descubierto. Además, mediante alguno de los métodos mencionados en capítulos anteriores, calculamos las rentabilidades esperadas de cada título, r_i , así como la función de riesgo total considerada, $L = L(x_1, \dots, x_n)$.

Supongamos que el capital que se está dispuesto a invertir en la cartera es función de la rentabilidad total esperada ρ , es decir, $C = C(\rho)$. Esta función, cuyo rango es $[C_{min}, C_{max}]$, se supone estrictamente creciente y acotada puesto que a mayor rentabilidad total esperada, el inversor está dispuesto a disminuir en mayor proporción su utilidad de consumo presente a cambio de aumentar la utilidad de riqueza que obtendría si no la hubiese disminuido. Pero mayor rentabilidad esperada supone también asumir mayor riesgo total. Realizando un barrido sobre $C(\rho)$ obtenemos un conjunto de escenarios posibles $\Omega = \{1, \dots, S\}$, cada uno definido por un conjunto de parámetros de la forma $\{\rho^s, C^s = C(\rho^s)\}$, y con una probabilidad asociada de ocurrencia $p^s, s \in \Omega$. Previo al planteamiento del modelo, tomemos en cuenta las siguientes consideraciones:

- $\sum_{s=1}^S p^s = 1,$
- $\rho^s < \rho^{s+1},$
- $C^s < C^{s+1},$
- $C^1 = C_{min},$ y
- $C^S = C_{max}.$

La composición de las carteras que minimizan el riesgo total en cada uno de los S escenarios puede ser calculada resolviendo el siguiente modelo determinístico:

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } L = L(x_1^s, \dots, x_n^s) \\ \text{s.a.} \\ \sum_{i=1}^n \rho_i x_i^s \geq \rho^s C^s, \quad s = 1, \dots, S \quad (P_{1-1}) \\ \sum_{i=1}^n x_i^s = C^s, \quad s = 1, \dots, S \quad (P_{1-2}) \\ x_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, S \end{array} \right.$$

Con ello obtenemos un capital a invertir C^s y una cartera diferente para cada uno de los escenarios. Deseamos ahora incorporar toda esta información en un nuevo modelo que permita decidir el capital que se invertirá realmente y la composición de la cartera real. No obstante, considerar todas las restricciones de todos los escenarios nos llevaría, con toda seguridad, a un modelo infactible, lo que nos conduce al concepto de modelo robusto y solución robusta.

Un modelo es *robusto* si sus soluciones son factible para casi todas las realizaciones de Ω . Una solución se denomina *robusta* si permanece cerca de la solución óptima de cada uno de los escenarios.

Puesto que es improbable que una solución pueda cumplir simultáneamente los criterios de robustez para la factibilidad y para la optimalidad, se trata de construir un modelo coordinado que combine ambos conceptos de manera adecuada, es decir, un modelo robusto que controle suficientemente el riesgo que el inversor asume al realizar la inversión. El modelo coordinado propuesto por Canós y Ventura ([36]) es el siguiente:

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{mín } \varepsilon \\
 \text{s.a.} \\
 p^s \varepsilon^s(x) \leq \varepsilon, s = 1, \dots, S \quad (P_{2-1}) \\
 C_{min}(1 - \frac{C_{min} - C^s}{C_{min}} y^s) \leq C(x), s = 1, \dots, S - 1 \quad (P_{2-2}) \\
 C_{max}(1 - \frac{C_{max} - C^{s+1}}{C_{max}} y^s) \geq C(x), s = 1, \dots, S - 1 \quad (P_{2-3}) \\
 L(x) \leq L(x^{s+1})y^s + L(x^s)(1 - y^s), s = 1, \dots, S - 1 \quad (P_{2-4}) \\
 1 \leq \sum_{s=1}^{S-1} y^s \leq 2 \quad (P_{2-5}) \\
 y^s + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq s-1, i \neq s+1}}^S y^i \leq 1, s = 1, \dots, S - 1 \quad (P_{2-6}) \\
 \varepsilon, x \geq 0 \\
 y^s \in \{0, 1\}
 \end{array} \right.$$

en el que las variables de decisión $x = (x_1, \dots, x_n)$ son la composición del portafolio, y las variables ε y y^s , $s \in \Omega$ se definen en base a los siguientes conceptos:

- Llamaremos *error coordinado* de x respecto al escenario s a la diferencia

$$\varepsilon^s(x) = \rho^s C^s - \sum_{i=1}^n \rho_i x_i. \quad (2.9)$$

El signo del error coordinado nos indica si con la solución x obtenemos una cartera coordinada con mayor o menor rentabilidad que la cartera s .

- Llamaremos *riesgo coordinado* asociado a x a $L(x) = L(x_1, \dots, x_n)$, siendo la función de riesgo total L la misma utilizada en el programa P_1 .
- Llamaremos *capital total coordinado* asociado a x a

$$C(x) = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.10)$$

- Definimos las variables binarias $y^s \in \{1, \dots, S - 1\}$, que toman el valor 1 si $C(x) \in [C^s, C^{s+1}]$ y 0 caso contrario. Adicionalmente definimos $y^0 = 0$, $y^S = 0$.

El modelo minimiza el máximo error coordinado no negativo ε . Para que fuese robusto, según se definió antes, deberíamos minimizar el máximo error coordinado, independientemente del signo. Sin embargo, desde el punto de vista económico, los errores coordinados no positivos son incluso deseables por el inversor,

con lo cual no tiene sentido minimizarlos. Las restricciones (P_{2-2}) , (P_{2-3}) y (P_{2-4}) son transformaciones de una restricción condicional: si $C(x) \in [C^s, C^{s+1}]$ entonces $L(x) \leq L(x^{s+1})$, destinada a controlar el riesgo coordinado total.

Debido a la restricción (P_{2-5}) , por lo menos una variable binaria debe valer uno, pero puede ocurrir que el capital coordinado sea igual a uno de los capitales establecidos en la partición. En tal caso, habrán dos variables binarias que valdrán uno, cumpliéndose que son adyacentes. Como se especifica en las restricciones (P_{2-6}) . Además, estas mismas restricciones acotan el capital coordinado entre C_{min} y C_{max} y no permiten que el riesgo total coordinado supere el del último escenario S , que es el mayor riesgo que el inversor está dispuesto a asumir.

Por último, resuelto el modelo, los valores de las variables x y $C(x)$ nos dice la composición de la cartera real y el capital que se va a invertir en ella.

El modelo resultante, que es válido en un abanico más amplio de funciones de utilidad con la propiedad de aversión absoluta al riesgo decreciente (funciones DARA), puede ser de programación lineal binaria mixta (ver [24]) o de programación no lineal binaria mixta (ver [5]), dependiendo de la función de riesgo total.

Dada la parcial estructura por bloques de las restricciones y las asociaciones entre las variables binarias, cuando el problema coordinado es de programación lineal binaria mixta o programación convexa binaria mixta resulta más eficiente, por ejemplo, un algoritmo especializado de ramificación y acotación, pero si se usa una función de riesgo total sin las adecuadas características de convexidad se entra en el campo de la optimización global, donde hasta hoy las únicas herramientas de solución disponibles son metaheurísticas adecuadas a la estructura del problema.

En este capítulo se han analizado dos de los modelos no lineales más representativos tomados de la literatura especializada. Sin embargo, cabe al menos mencionar otros modelos de carácter no lineal que utilizan distintos enfoques:

- Modelo de selección de portafolio utilizando funciones borrosas de riesgo lateral: los rendimientos de los activos son considerados números borrosos y se utilizan intervalos de medias para el cálculo del rendimiento y del riesgo de la inversión. ([13]).
- Modelo de optimización de portafolios utilizando utilidad diferencial estocástica: se desarrolla una aproximación al gradiente de utilidad (o martingala) para calcular el portafolio óptimo y la política de compra y venta de activos que maximizan la utilidad diferencial estocástica ([29]).

- Modelo de selección de cartera utilizando control de horizonte recedente:
Se propone una metodología para aproximar la solución óptima a problemas de programación dinámica asociados a optimización de portafolios. La metodología se basa en técnicas de control de horizonte en retroceso y programación estocástica. ([20]).

Capítulo 3

Modelos Probabilísticos

3.1. Modelo con restricciones de dominación estocástica

La idea fundamental de la dominación estocástica consiste en comparar entre sí las variables aleatorias que representan los retornos utilizando funciones de rendimiento construidas a partir de sus funciones de distribución de probabilidad.

Para una variable aleatoria real V , su primera función de rendimiento se define como la función de distribución acumulativa continua por derecha de V :

$$F(V; \eta) = P(V \leq \eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Definición 12. Se dice que una variable aleatoria V que representa un retorno domina estocásticamente en primer orden a otra variable aleatoria S que representa un retorno, y notamos $V \succeq_{FSD} S$, si:

$$F(V; \eta) \leq F(S; \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

La segunda función de rendimiento F_2 está dada por áreas bajo la curva de la función de distribución F ,

$$F_2(V; \eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F(V; \xi) d\xi, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

y define la relación débil de la dominación estocástica de segundo orden (SSD).

Definición 13. Se dice que una variable aleatoria V que representa un retorno domina estocásticamente en segundo orden a otra variable aleatoria S que representa un retorno, y notamos $V \succeq_{SSD} S$, si:

$$F_2(V; \eta) \leq F_2(S; \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Las relaciones de dominación estricta correspondientes, \succ_{FSD} y \succ_{SSD} se definen en la forma usual: $V \succ S$ si y solo si $V \succeq S$ y $S \not\preceq V$ (Ver [26], [9], [10]).

Cambiando el orden de integración podemos expresar la función $F_2(V; \cdot)$ como el déficit esperado: para cada valor de η se tiene:

$$F_2(V; \eta) = E[(\eta - V)_+], \quad (3.3)$$

donde $(\eta - V)_+ = \max(\eta - V, 0)$. La función $F_2(V; \cdot)$ es continua, convexa, no-negativa y no decreciente. Además está bien definida para toda variable aleatoria V con esperanza finita.

En el contexto de la optimización de portafolios, debemos considerar las relaciones de dominación estocástica entre variables aleatorias que representan retornos de la forma

$$R(x) = R_1x_1 + R_2x_2 + \dots + R_nx_n. \quad (3.4)$$

Así, podemos decir que un portafolio x *domina estocásticamente en primer orden* a un portafolio y ($R(x) \succ_{FSD} R(y)$), si:

$$F(R(x); \eta) \leq F(R(y); \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

con desigualdad estricta para algún η .

Similarmente, decimos que x *domina estocásticamente en segundo orden* a un portafolio y ($R(x) \succ_{SSD} R(y)$), si:

$$F_2(R(x); \eta) \leq F_2(R(y); \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

con desigualdad estricta para algún η . Cabe recordar que las variables aleatorias que representan a los retornos individuales R_i tienen esperanza finita, por lo cual la función $F_2(R(x); \cdot)$ está bien definida.

Las relaciones de dominación estocástica son de crucial importancia en teoría de la decisión.

Aplicando la desigualdad de Jensen se puede ver que $R(x) \succeq_{FSD} R(y)$ si y solamente si

$$E[u(R(x))] \geq E[u(R(y))] \quad (3.5)$$

para cualquier función $u(\cdot)$ que sea no decreciente, y cuyas esperanzas sean finitas. Más aún, $R(x) \succeq_{FSD} R(y)$ si y solamente si (3.5) se cumple para toda función $u(\cdot)$ que sea no decreciente y cóncava con esperanzas finitas ([17]).

Un portafolio x se llama *SSD-eficiente* (o *FSD-eficiente*) en un conjunto de portafolios X si no existe $y \in X$ tal que $R(y) \succ_{SSD} R(x)$ (o $R(y) \succ_{FSD} R(x)$).

Centraremos nuestra atención en la relación SSD, debido a su consistencia con las preferencias aversas al riesgo, es decir; Si $R(x) \succ_{SSD} R(y)$, entonces el portafolio x es preferible al portafolio y bajo cualquier decisión aversa al riesgo.

3.1.1. El problema del portafolio con dominación restringida

Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.

El punto de partida del modelo consiste en asumir la existencia de una variable aleatoria referencial Y que representa a un retorno con esperanza finita. Este puede tener la forma $Y = R(\bar{z})$, para algún portafolio referencial \bar{z} . Se plantea luego la búsqueda de un nuevo portafolio x que sea preferible sobre Y en el sentido de la dominación estocástica de segundo orden. Con tal objetivo, introducimos el siguiente problema de optimización:

$$P_1 \begin{cases} \text{máx } f(x) \\ \text{s.a.} \\ R(x) \succeq_{SSD} Y \quad (P_{1-1}) \\ x \in X \end{cases}$$

Donde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional continuo cóncavo. En particular, podemos utilizar

$$f(x) := E[R(x)]$$

sin perder generalidad, debido a la presencia de la restricción de dominación $(P_{1-1}) (R(x) \succeq_{SSD} Y)$ del problema planteado.

Proposición 2. *Asumamos que Y tienen una distribución discreta con escenarios posibles $y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$. Entonces la relación de dominación (*) es equivalente a*

$$E[(y_i - R(x))_+] \leq E[(y_i - Y)_+], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

Demostración:

Si la relación (P_{1-1}) es verdadera, entonces la representación equivalente (3.3) implica (3.6). Es entonces suficiente probar que (3.6) implica que

$$F_2(R(x); \eta) \leq F_2(Y; \eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Se pueden ordenar los valores de los escenarios posibles de Y de tal forma que tengamos $y_1 < y_2 < \dots < y_m$. La función de distribución $F(Y; \cdot)$ es constante por tramos con saltos en $y_i, \quad i = 1, \dots, m$. Entonces, la función $F_2(Y; \cdot)$ es lineal por tramos y tiene puntos de quiebre en $y_i, \quad i = 1, \dots, m$. Consideremos tres casos, dependiendo del valor de η .

Caso 1: Si $\eta \leq y_1$ tenemos:

$$0 \leq F_2(R(x); \eta) \leq F_2(R(x); y_1) \leq F_2(Y; y_1) = 0$$

Con lo cual se cumple la relación con igualdad.

Caso 2: Si $\eta \in [y_i, y_{i+1}]$ para algun i .

Se sabe que para cada variable aleatoria $R(x)$ que representa a un retorno, la función $F_2(R(x); \cdot)$ es convexa, entonces la relación 3.6 para i e $i + 1$ implica que para todo $\eta \in [y_i, y_{i+1}]$ se tiene

$$\begin{aligned} F_2(R(x); \eta) &\leq \lambda F_2(R(x); y_i) + (1 - \lambda) F_2(R(x); y_{i+1}) \\ &\leq \lambda F_2(Y; y_i) + (1 - \lambda) F_2(Y; y_{i+1}) = F_2(Y; \eta) \end{aligned}$$

donde

$$\lambda = \frac{y_{i+1} - \eta}{y_{i+1} - y_i}.$$

La última igualdad se sigue de la linealidad de $F_2(Y; \cdot)$ en el intervalo $[y_i, y_{i+1}]$.

Caso 3: Si $\eta > y_m$ la función $F_2(Y; \eta)$ es lineal con pendiente igual a 1, por consiguiente

$$\begin{aligned} F_2(Y; \eta) &= F_2(Y; y_m) + \eta - y_m \\ &\geq F_2(R(x); y_m) + \int_{y_m}^{\eta} F(R(x); \alpha) d\alpha = F_2(R(x); \eta), \end{aligned}$$

Como se requería.

Asumamos ahora que los retornos tienen distribuciones discretas con escenarios posibles r_{jt} , $t = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, n$, cada uno con una probabilidad asociada p_t . Entonces la formulación de la relación de dominación estocástica (*) respecto a 3.6 se simplifica más aún. Si introducimos variables s_{it} que representan el déficit de $R(x)$ por debajo de y_i en el escenario t , $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3. *Asumamos que R_j , $j = 1, \dots, n$ tienen una distribución conjunta discreta, y que Y tiene también una distribución discreta. Entonces el problema P_1 es equivalente al problema:*

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } f(x) \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^n x_j r_{jt} + s_{it} \geq y_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (P_{2-1}) \\ \sum_{t=1}^T p_t s_{it} \leq F_2(Y; y_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (P_{2-2}) \\ s_{it} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (P_{2-3}) \\ x \in X \end{array} \right.$$

Demostración: Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto factible para P_1 , entonces tomando

$$s_{it} = \text{máx}(0, y_i - \sum_{j=1}^n x_j r_{jt}), \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T$$

La dupla (x, s) es una solución factible para P_2 .

Por otro lado, para cualquier dupla (x, s) factible para P_2 , las desigualdades P_{2-1} y P_{2-3} implican que

$$s_{it} \geq \text{máx}(0, y_i - \sum_{j=1}^n x_j r_{jt}), \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T$$

Tomando las esperanzas a ambos lados y utilizando P_{2-2} se tiene:

$$F_2(R(x); y_i) \leq F_2(Y; y_i), \quad i = 1, \dots, m$$

Entonces, la proposición 2 implica que x es una solución factible para P_1 .

3.1.2. Optimalidad y Dualidad

En lo que resta del capítulo asumiremos que las distribuciones de probabilidad de los retornos R_j y de Y son discretos con un número finito de escenarios posibles. También asumiremos que los escenarios de Y están ordenados: $y_1 < y_2 < \dots < y_m$. Las probabilidades de realización de los mismos están denotadas por π_i , $i = 1, \dots, m$.

Definimos el conjunto \mathcal{U} de funciones $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- $u(\cdot)$ es cóncava y no decreciente;
- $u(\cdot)$ es lineal por tramos con puntos de quiebre $y_i, i = 1, \dots, m$;
- $u(t) = 0, \quad \forall t \geq y_m$.

Es evidente que \mathcal{U} es un cono convexo.

Definición 14. Se define el Lagrangiano de P_1 , $L : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, como sigue:

$$L(x, u) = f(x) + E[u(R(x))] - E[u(Y)] \quad (3.7)$$

La función anterior está bien definida ya que para todo $u \in \mathcal{U}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $E[u(R(x))]$ y es finita.

Teorema 5. Si \hat{x} es una solución óptima para P_1 , entonces existe una función $\hat{u} \in \mathcal{U}$ tal que:

$$L(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{x \in X} L(x, \hat{u}) \quad (3.8)$$

y

$$E[\hat{u}(R(\hat{x}))] = E[\hat{u}(Y)] \quad (3.9)$$

Recíprocamente, si para alguna función $\hat{u} \in \mathcal{U}$ una solución óptima \hat{x} de (3.8) satisface (P_1 -1) y (3.9), entonces \hat{x} es una solución óptima para P_1 .

Demostración:

De acuerdo a la proposición 3, el problema P_1 es equivalente al problema P_2 . Asociemos los multiplicadores de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}^m$ con las restricciones P_2 -2 y formulemos el Lagrangiano $\Lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\Lambda(x, s, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i (F_2(Y; y_i) - \sum_{t=1}^T p_t s_{it}) \quad (3.10)$$

Definamos además el conjunto

$$Z = (x, s) \in X \times \mathbb{R}_+^m : \sum_{j=1}^n x_j r_{jt} + s_{it} \geq y_i, \quad i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T \quad (3.11)$$

Como Z es un poliedro, las restricciones P_2 -2 son lineales, y la función objetivo es cóncava, si el punto (\hat{x}, \hat{s}) es una solución óptima para el problema P_2 , entonces

se cumplen las consiguientes condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker. Existe un vector de multiplicadores $\hat{u} \geq 0$ tal que:

$$\Lambda(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) = \max_{(x,s) \in Z} \Lambda(x, s, \hat{u}) \quad (3.12)$$

y

$$\hat{\mu}_i(F_2(Y; y_i) - \sum_{t=1}^T p_t \hat{s}_{it}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

Podemos transformar el Lagrangiano Λ como sigue:

$$\begin{aligned} \Lambda(x, s, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i F_2(Y; y_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T \mu_i p_t s_{it} \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i F_2(Y; y_i) - \sum_{t=1}^T p_t \sum_{i=1}^m \mu_i s_{it} \end{aligned}$$

Para cualquier x fijo el máximo valor de $\Lambda(x, s, \mu)$ tal que $(x, s) \in Z$ se alcanza cuando:

$$s_{it} = \max(0, y_i - \sum_{j=1}^n x_j r_{jt}) = \max(0, y_i - [R(x)]_t), \quad i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T, \quad (3.14)$$

donde $[R(x)]_t$ es el retorno del portafolio en el t-ésimo escenario . Definamos las funciones $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ por:

$$u_i(\eta) = \max(0, y_i - \eta),$$

y por

$$u_\mu(\eta) = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i(\eta).$$

Obsérvese que $u_\mu \in \mathcal{U}$. Podemos reescribir el resultado de la maximización del Lagrangiano Λ con respecto a s de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_s \Lambda(x, s, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i F_2(Y; y_i) + \sum_{t=1}^T p_t \sum_{i=1}^m \mu_i u_i([R(x)]_t) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i F_2(Y; y_i) + \sum_{t=1}^T p_t u_\mu([R(x)]_t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Más aún, se puede obtener una expresión similar para la suma que involucra a Y :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i F_2(Y; y_i) &= \sum_{i=1}^m \mu_i \sum_{k=1}^m \pi_k \max(0, y_i - y_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \pi_k \sum_{i=1}^m \mu_i \max(0, y_i - y_k) \\ &= - \sum_{k=1}^m \pi_k u_\mu(y_k) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.15) se obtiene:

$$\max_s \Lambda(x, s, \mu) = f(x) + E[u_\mu(R(x))] - E[u_\mu(Y)] = L(x, u_\mu) \quad (3.16)$$

Haciendo $\hat{u} = u_{\hat{\mu}}$ se concluye que las condiciones (3.12) implican (3.8), como se requería. Además, añadiendo las condiciones complementarias (3.13), y utilizando la misma transformación de arriba se obtiene (3.9).

Para probar el recíproco, observemos que para cada $\hat{u} \in \mathcal{U}$ se puede definir

$$\hat{\mu}_i = \hat{u}'_-(y_i) - \hat{u}'_+(y_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.17)$$

siendo \hat{u}'_- y \hat{u}'_+ las derivadas por izquierda y por derecha de \hat{u} , respectivamente:

$$\hat{u}'_-(\eta) = \lim_{t \uparrow \eta} \frac{\hat{u}(\eta) - \hat{u}(t)}{\eta - t} \quad (3.18)$$

$$\hat{u}'_+(\eta) = \lim_{t \downarrow \eta} \frac{\hat{u}(t) - \hat{u}(\eta)}{t - \eta} \quad (3.19)$$

Como \hat{u} es cóncava, entonces $\hat{\mu} \geq 0$. Utilizando las funciones elementales $u_i(\eta) = \min(0, y_i - \eta)$, se puede representar \hat{u} como sigue:

$$\hat{u}(\eta) = \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i u_i(\eta) \quad (3.20)$$

Consecuentemente, la relación 3.16 se cumple para $\hat{\mu}$ y \hat{u} . Entonces, si \hat{x} maximiza 3.8, entonces la dupla (\hat{x}, \hat{s}) , con

$$\hat{s}_{it} = \max(0, y_i - \sum_{j=1}^n \hat{x}_j r_{jt}), \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.21)$$

maximiza $\Lambda(x, s, \hat{\mu})$, para $(x, s) \in Z$. El resultado se sigue entonces de las condiciones de suficiencia estándares del problema P_2 (ver [25]).

Se pueden también establecer relaciones de dualidad para el problema propuesto. Con el Lagrangiano 3.7 se puede asociar la función dual

$$D(u) = \max_{x \in X} L(x, u) \quad (3.22)$$

Sobre $D(u)$ se puede hacer operaciones de maximización o minimización, ya que el conjunto X es un compacto y $L(., u)$ es continua.

El problema dual tiene la forma

$$\min_{u \in \mathcal{U}} D(u) \quad (3.23)$$

El conjunto \mathcal{U} es un cono convexo cerrado y $D(.)$ es un funcional convexo, entonces 3.23 es un problema de optimización convexo.

Teorema 6. *Asumamos que P_1 tiene una solución óptima. Entonces el problema (3.23) tiene una solución óptima y los valores óptimos de ambos problemas coinciden. Más aún, el conjunto de soluciones óptimas de (3.23) es el conjunto de funciones $\hat{u} \in \mathcal{U}$ que satisfacen (3.8) y (3.9) para una solución óptima \hat{x} de P_1 .*

Demostración: El teorema es una consecuencia del teorema 5 y las relaciones de dualidad generales en programación no lineal convexa (ver [1]). Nótese que todas las restricciones del problema son lineales o poliedros, y consecuentemente no necesitamos ningunas condiciones de calificación de restricciones aquí.

3.1.3. Un caso particular de función objetivo

Consideremos ahora un caso especial del problema P_1 , con

$$f(x) = E[R(x)].$$

Recordemos que las variables aleatorias R_j , $j = 1, \dots, n$, representan a los retornos de las acciones y tienen distribuciones discretas con escenarios posibles r_{jt} , $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, con probabilidades asociadas p_t .

Con el objeto de facilitar la resolución numérica del problema P_1 , es conveniente considerarlo en la forma de variable separadora:

$$P_3 \begin{cases} \max E[R(x)] & (P_{3-1}) \\ \text{s.a.} \\ R(x) \geq V, & \text{c.s.,} & (P_{3-2}) \\ V \succeq_{SSD} Y & (P_{3-3}) \\ x \in X & (p_{3-4}) \end{cases}$$

En el problema de arriba, V es una variable aleatoria con escenarios posibles v_t , cada uno asociado a una probabilidad de ocurrencia p_t , $t = 1, \dots, T$, y la condición (P_{3-2}) se entiende como “casi seguramente”. En el caso de un número finito de escenarios, esta condición simplemente se transforma en:

$$\sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \geq v_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.24)$$

Debemos considerar dos grupos de multiplicadores de Lagrange: una función de utilidad $u \in \mathcal{U}$, y un vector $\theta \in \mathbb{R}^T$, $\theta \geq 0$. La función de utilidad $u(\cdot)$ corresponderá a la restricción de dominación (P_{3-3}) , tal como en la sección anterior. Los multiplicadores θ_t , $t = 1, \dots, T$ corresponden a las desigualdades 3.24. El Lagrangiano toma la forma

$$L(x, V, u, \theta) = \sum_{t=1}^T p_t \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j + \sum_{t=1}^T p_t \theta_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt}x_j - v_t \right) + \sum_{t=1}^T p_t u(v_t) - \sum_{k=1}^m \pi_k u(y_k). \quad (3.25)$$

Las condiciones de optimalidad se pueden formular como sigue:

Teorema 7. Si (\hat{x}, \hat{V}) es una solución óptima para P_3 , entonces existe $\hat{u} \in \mathcal{U}$ y un vector nonegativo $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^T$, tal que

$$L(\hat{x}, \hat{V}, \hat{u}, \hat{\theta}) = \max_{(x, V) \in X \times \mathbb{R}^t} L(x, V, \hat{u}, \hat{\theta}), \quad (3.26)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t \hat{u}(\hat{v}_t) - \sum_{k=1}^m \pi_k \hat{u}(y_k) = 0, \quad (3.27)$$

$$\hat{\theta}_t (\hat{v}_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} \hat{x}_j) = 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.28)$$

Recíprocamente, si para alguna función $\hat{u} \in \mathcal{U}$ y algún vector nonegativo $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^T$, una solución óptima (\hat{x}, \hat{V}) de (3.26) satisface $(P_{3-2}) - (P_{3-3})$ y (3.27) - (3.28), entonces (\hat{x}, \hat{V}) es una solución óptima para P_3 .

Demostración:

Por la proposición 2, la restricción de dominación P_{3-3} es equivalente a un número finito de desigualdades de la forma:

$$E[(y_i - R(x))_+] \leq E[(y_i - Y)_+], \quad i = 1, \dots, m.$$

Así, el problema P_3 toma la forma:

$$P_4 \begin{cases} \text{máx } E[R(x)] \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \geq v_t, \quad t = 1, \dots, T \\ E[(y_i - R(x))_+] \leq E[(y_i - Y)_+], \quad i = 1, \dots, m. \\ x \in X \end{cases}$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange μ_i , $i = 1, \dots, m$, asociados a las restricciones de dominación, el Lagrangiano estándar toma la forma:

$$\begin{aligned} \Lambda(x, V, \mu, \theta) = & \sum_{t=1}^T p_t \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j + \sum_{t=1}^T p_t \theta_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt}x_j - v_t \right) \\ & - \sum_{i=1}^m \mu_i \sum_{t=1}^T p_t \left[y_i - \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \right] \\ & + \sum_{i=1}^m \mu_i \sum_{k=1}^m \pi_k [y_i - y_k]_+. \end{aligned}$$

Reagrupando las dos últimas sumas, tal como se hizo en la demostración del Teorema 5, se obtiene la siguiente relación clave para el desarrollo de la demostración.

Para cada $\mu \geq 0$, haciendo

$$u_\mu(\eta) = - \sum_{i=1}^m \mu_i \text{máx}(0, y_i - \eta),$$

se tiene

$$\Lambda(x, V, \mu, \theta) = L(x, V, u_\mu, \theta).$$

Y el resto de la demostración es similar a la del Teorema 5

La función dual asociada al problema con variable separadore tiene la forma:

$$D(u, \theta) = \sup_{x \in X, V \in \mathbb{R}^T} L(x, V, u, \theta).$$

y el problema dual asociado es, evidentemente:

$$\min_{u \in \mathcal{U}, \theta \geq 0} D(u, \theta). \quad (3.29)$$

El correspondiente teorema de dualidad es una inmediata consecuencia del Teorema 7 y las relaciones de dualidad estándar en programación convexa. Nótese también que todas las restricciones del problema P_3 son lineales o poliedros, y consecuentemente no necesitamos, como en el modelo anterior, condiciones de calificación de restricciones adicionales.

Teorema 8. *Asumamos que P_3 tiene una solución óptima. Entonces el problema dual (3.29) tiene una solución óptima y los valores óptimos de ambos problemas coinciden. Más aún, el conjunto de soluciones óptimas de (3.29) es el conjunto de funciones $\hat{u} \in \mathcal{U}$ y vectores $\hat{\theta} \geq 0$ que satisfacen (3.26) - (3.28) para una solución óptima (\hat{x}, \hat{V}) de P_3 .*

Analicemos más en detalle la estructura de la función dual:

$$\begin{aligned}
 D(u, \theta) &= \sup_{x \in X, V \in \mathbb{R}^T} \left\{ \sum_{t=1}^T p_t \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{t=1}^T p_t \theta_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - v_t \right) + \sum_{t=1}^T p_t u(v_t) \right\} - \sum_{k=1}^m \pi_k u(y_k) \\
 &= \max_{x \in X} \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T p_t (1 + \theta_t) r_{jt} x_j + \sup_V \sum_{t=1}^T p_t [u(v_t) - \theta_t v_t] - \sum_{k=1}^m \pi_k u(y_k) \\
 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{t=1}^T p_t (1 + \theta_t) r_{jt} + \sum_{t=1}^T p_t \sup_{v_t} \sum_{t=1}^T [u(v_t) - \theta_t v_t] - \sum_{k=1}^m \pi_k u(y_k)
 \end{aligned}$$

En la última ecuación se ha utilizado el hecho de que X es un simplex, y consecuentemente el máximo de una forma lineal se encuentra en uno de sus vértices. Se sigue entonces, que la función dual puede ser expresada como la suma

$$D(u, \theta) = D_0(\theta) + \sum_{t=1}^T p_t D_t(u, \theta_t) + D_{T+1}(u), \quad (3.30)$$

con

$$D_0(\theta) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{t=1}^T p_t (1 + \theta_t) r_{jt}, \quad (3.31)$$

$$D_t(u, \theta_t) = \sup_{v_t} [u(v_t) - \theta_t v_t], \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.32)$$

y

$$D_{T+1}(u) = - \sum_{k=1}^m \pi_k u(y_k). \quad (3.33)$$

Si el conjunto X es un poliedro, el cálculo de D_0 involucra un programa lineal con n variables.

Para determinar el dominio de la función dual, obsérvese que si $u'_-(y_1) < \theta_t$, entonces

$$\lim_{v_t \rightarrow \infty} [u(v_t) - \theta_t v_t] = +\infty$$

y así el supremo en (3.32) es igual a $+\infty$. Por otro lado, si $u'_-(y_1) \geq \theta_t$, entonces la función $u(v_t) - \theta_t v_t$ tiene un salto no negativo para $v_t \leq y_1$ y un salto no positivo $-\theta_t$ para $v_t \geq y_m$. Esta función es lineal por tramos y alcanza su máximo en uno de los puntos de quiebre. Entonces:

$$\text{dom}\{D_t\} = \{(u, \theta_t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+ : u'_-(y_1) \geq \theta_t\}.$$

En cualquier punto del dominio,

$$D_t(u, \theta_t) = \max_{1 \leq k \leq m} [u(y_k) - \theta_t y_k]. \quad (3.34)$$

El dominio de D_0 es el espacio \mathbb{R}^T .

3.2. Modelo basado en búsqueda TABÚ

[2] proponen una metodología para optimizar portafolios en tres pasos:

1. Selección de los instrumentos financieros que tendrán la opción de hacer parte del portafolio.
2. Desarrollo de modelos de pronóstico de precios y generación de series sintéticas.
3. Optimización del portafolio.

La figura 3.1 ilustra de una manera más adecuada la metodología mencionada:

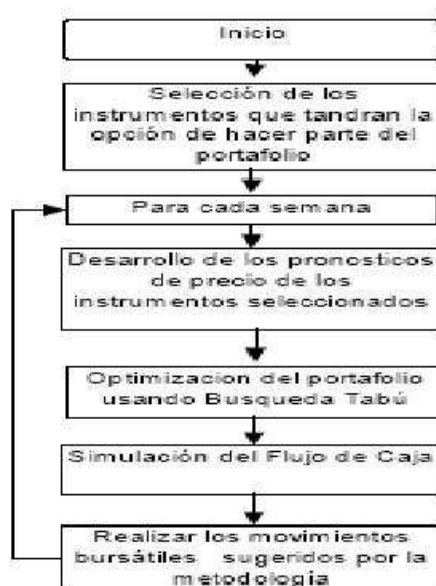


Figura 3.1: Diagrama de la metodología

3.2.1. Búsqueda TABÚ

Los orígenes de la Búsqueda Tabú (TS) pueden situarse en diversos trabajos publicados hace alrededor de 20 años. Oficialmente, el nombre y la metodología fueron introducidos posteriormente por Fred Glover ([6]). Numerosas aplicaciones han aparecido en la literatura, así como artículos y libros para difundir el conocimiento teórico del procedimiento ([7]). TS es una técnica para resolver problemas combinatorios de gran dificultad que está basada en principios generales de Inteligencia Artificial (IA). En esencia es un metaheurístico que puede ser utilizado

para guiar cualquier procedimiento de búsqueda local en la búsqueda agresiva del óptimo del problema. Por agresiva se entiende la estrategia de evitar que la búsqueda quede atrapada en un óptimo local.

A tal efecto, TS toma de la IA el concepto de memoria y lo implementa mediante estructuras simples con el objetivo de dirigir la búsqueda teniendo en cuenta la historia de ésta. TS comienza de la misma forma que cualquier procedimiento de búsqueda local, procediendo iterativamente de una solución x a otra y en el entorno de la primera: $N(x)$. Sin embargo, en lugar de considerar toda la vecindad de una solución, TS define el entorno reducido $N^*(x)$ como aquellas soluciones disponibles del entorno de x . Así, se considera que a partir de x , sólo las soluciones del entorno reducido son alcanzables. Existen muchas maneras de definir la vecindad de una solución. La más sencilla consiste en etiquetar como tabú las soluciones previamente visitadas en un pasado cercano. Esta forma se conoce como memoria a corto plazo (short term memory) y está basada en guardar en una lista tabú las soluciones visitadas recientemente. Cada vez que un movimiento es realizado, se introduce en una cola (la primera en entrar es la primera en salir, estrategia FIFO) de tamaño L de tal forma que los elementos de dicha lista están penalizados durante un cierto tiempo. Un movimiento, por tanto, no será aceptado siempre y cuando permanezca en la lista tabú. Esta lista constituye la estructura de memoria del algoritmo.

El objetivo principal de etiquetar las soluciones visitadas como tabú es el de evitar que la búsqueda entre en ciclos. Es importante considerar que los métodos basados en búsqueda local requieren de la exploración de un gran número de soluciones en poco tiempo, por ello es crítico el reducir al mínimo el esfuerzo computacional de las operaciones que se realizan a menudo. En ese sentido, la memoria a corto plazo de TS está basada en atributos en lugar de ser explícita; esto es, en lugar de almacenar las soluciones completas se almacenan únicamente algunas características de éstas.

La memoria mediante atributos produce un efecto más sutil y beneficioso en la búsqueda, ya que un atributo o grupo de atributos identifica a un conjunto de soluciones. Así, un atributo que fue etiquetado como tabú por pertenecer a una solución visitada hace n iteraciones, puede impedir en la iteración actual, el alcanzar una solución por contenerlo, aunque ésta sea muy diferente de la que provocó el que el atributo fuese etiquetado. Esto provoca, a largo plazo, el que se identifiquen y mantengan aquellos atributos que inducen una cierta estructura beneficiosa en las soluciones visitadas. Un algoritmo TS está basado en la interacción entre la memoria a corto y la memoria de largo plazo. Ambos tipos de memoria llevan asociadas sus propias estrategias y atributos, y actúan en ámbitos diferentes. Co-

mo ya se ha mencionado la memoria a corto plazo suele almacenar atributos de soluciones recientemente visitadas, y su objetivo es explorar a fondo una región dada del espacio de soluciones. La memoria a largo plazo almacena las frecuencias u ocurrencias de atributos en las soluciones visitadas tratando de identificar o diferenciar regiones. La memoria a largo plazo tiene dos estrategias asociadas: intensificar y diversificar la búsqueda. Una forma clásica de diversificación consiste en reiniciar periódicamente la búsqueda desde puntos elegidos aleatoriamente. Los elementos básicos de la Búsqueda Tabú son los siguientes:

- Selección de una solución inicial x_0 . Un factor muy importante a tener en cuenta es la posible influencia que tenga comenzar la búsqueda tabú con una solución inicial más o menos buena. Esta solución dependerá del algoritmo específico que la genera. Con una solución inicial buena, de bajo coste, generada de forma algorítmica, se puede pensar que es posible evolucionar, a corto plazo, hacia soluciones mejores, aunque podría suponer un gran perjuicio computacional si realmente evoluciona la búsqueda hacia regiones de soluciones más desfavorables. Es, por tanto, necesario evaluar la conveniencia de considerar un método algorítmico o no. En cualquier caso, siempre será posible generar una solución de forma aleatoria.
- Elección de la vecindad $V(x_a)$. Para evolucionar hacia otras soluciones, el algoritmo de búsqueda tabú selecciona éstas en un entorno de x_a . Hay que definir, por tanto, el concepto de solución cercana de x_a para proceder a seleccionar una nueva solución dentro de dicho entorno.
- Elección del tamaño de la lista tabú (L). Varios autores toman el valor 7 como “número mágico” sin explicación lógica. Más recientemente, se toman valores dependientes del tamaño del problema. En cualquier caso, constituye un parámetro importante cuya influencia habría que analizar y del cual dependerá la evolución del algoritmo en gran medida.
- Elección de los atributos para almacenar en la lista tabú. Almacenar la descripción completa de las últimas soluciones exploradas y comprobar si cada movimiento se encuentra en la lista puede ocupar mucho tiempo. Como alternativa se puede almacenar un atributo representativo del movimiento. Los atributos que se consideren, así como la forma de almacenarlos dependerán, en cierta medida, del problema a resolver.
- Criterio de finalización. Se puede establecer un número máximo de iteraciones, o un número máximo de pasos sin mejorar el coste.

Ya que la TS trabaja sobre cadenas de binarios, estos deben ser convertidos en números enteros que representen las cantidades de acciones que se mantienen en el portafolio; para ellos Para este caso particular, se ha encontrado que la representación de los enteros usando el código Gray, puede resultar beneficiosa en términos de convergencia del algoritmo y calidad de la solución. El Código Gray es un tipo de código binario, en el que la secuencia ordenada cambia sólo en un bit entre un número y sus adyacentes (predecesor y antecesor), a diferencia del código binario tradicional en donde pasar de un entero al siguiente, por ejemplo entre el 1 y el 2, implica el cambio de más de un bit.

Parámetros de la Búsqueda Tabú

A continuación se describen los parámetros que utiliza la búsqueda tabú:

- Selección de la solución inicial: Se elige como solución inicial un vector de ceros, lo que representa una estrategia donde el inversionista no actúa en el mercado y su capital inicial será igual a su capital final.
- Elección del entorno: el entorno será las soluciones que se pueden generar al modificar un bit de la solución actual, si es que este bit no esta etiquetado como tabú.
- Elección del tamaño de la lista tabú para la memoria en corto plazo: El tamaño de la lista tabú esta determinado por del número de bits que representa cada política dividido entre dos.
- Elección del tamaño de la lista tabú para la memoria de largo plazo (L): se estableció la lista tabú para la memoria en el largo plazo como una variable que define el usuario. Para efectos de las pruebas que se le aplican al modelo se trabaja con una lista de 500 soluciones.
- Elección de los atributos para almacenar en la lista tabú de corto plazo: se etiquetaran dentro de la lista tabú los últimos bits modificados.
- Elección de los atributos para almacenar en la lista tabú de largo plazo: se almacena la totalidad de las L soluciones en código Gray.
- Ciclos: recorrido por la totalidad de los bits que contiene la solución.
- Numero de ciclos: máximo de número de ciclos consecutivos sin encontrar una mejor solución que la actual.

- Criterio de finalización: la búsqueda finaliza cuando al desarrollarse un número determinado de intentos de búsqueda del óptimo, en el primer intento la solución con que se inicia es la solución inicial definida en el ítem anterior, para los siguientes intentos si inicia con una solución elegida al azar entre la soluciones pertenecientes a la lista tabú de largo plazo. Cada intento termina cuando al realizar un número determinado de ciclos consecutivos no se haya encontrado una mejor solución.

Adicional a estos elementos claves para la búsqueda tabú se definen los parámetros necesarios para desarrollar el modelo y que son propios a cada situación, son ellos:

- Número de instrumentos financieros que tienen la opción de hacer parte del portafolio: este parámetro depende de la decisión del inversionista dentro del primer punto de la metodología.
- Número de días: horizonte de inversión como número de días para los que se busca las mejores políticas de compra y venta.
Número de bits: Cantidad de binarios necesarios para representar cada política.
- Número de series: número de series sintéticas consideradas.
- Pronósticos: matriz que posee la totalidad de los pronósticos, es decir, contiene el número de series dado.
- Capital inicial: Monto de dinero del que se dispone para invertir.
- Portafolio inicial: se refiere al volumen de acciones con que cuenta el inversionista al comenzar el período de inversión.
- Porcentaje de Comisión: es la fracción de dinero adicional que se le debe pagar al comisionista de bolsa al efectuar cada transacción.
- Volumen máximo de acciones: es la cantidad máxima de acciones de cada empresa que puede ser incorporada al portafolio. Es un recurso limitado de capital, dado que se supone que el inversionista aporta un capital inicial al comenzar el horizonte de inversión como único desembolso y no se consideran retiros de capital durante el período de inversión incluyendo las ganancias obtenidas, es decir, se supone reinversión de las utilidades.

Las restricciones que se le imponen a la solución son:

- Recurso limitado, dado que se supone que el inversionista aporta un capital inicial al comenzar el horizonte de inversión, no se consideran aportes o retiros de capital durante este período, las ganancias son reinvertidas, luego como primera restricción se tiene el capital de inversión.
- Un número de acciones de cada empresa que pueden ingresar al portafolio (volumen máximo de acciones), esta restricción se impone con fin de tener un portafolio diversificado que en teoría disminuye el riesgo. En el modelo cada inversionista establecerá el volumen máximo de acciones que desea tener en su portafolio, este volumen deberá ser menor a la cantidad promedio de acciones de cada empresa que se transa diariamente en la bolsa, y será proporcional al grado de diversificación que el inversionista desea para su portafolio.
- El porcentaje de comisión que se debe pagar al comisionista de bolsa, esta comisión puede variar dependiendo de la firma comisionista con la que se trabaje, la relación entre el inversionista y el comisionista, el volumen y la frecuencia con que transa en la bolsa, entre otros aspectos que hacen que esta comisión varíe de un inversionista a otro. Por esta razón el modelo permite trabajar con el porcentaje de comisión que el inversionista solicite.

Una vez obtenida una estrategia tentativa de compra y venta de acciones para el horizonte de tiempo que es analizado se puede dar el caso que el modelo sugiera comprar un número de acciones superior a la capacidad de compra, debido a que se considera que el inversionista aporta un capital inicial sin hacer más desembolsos, para este caso se debe hacer un ajuste a las políticas propuestas por el modelo. Para considerar esta dificultad, el modelo obtiene la capacidad de compra del inversionista en el momento que debe hacer la compra, si esta capacidad es suficiente el modelo autoriza la compra, si no hay suficiente capacidad el modelo asigna los recursos disponibles, autorizando la compra de las acciones de la primera empresa del vector de políticas si hay recursos disponibles; si no hay recursos calcula la cantidad de acciones que esta en condiciones de comprar el inversionista, si se poseen los recursos para comprar la totalidad de las acciones de la primera empresa, se calcula si hay capacidad para la segunda y el procedimiento se repite hasta agotar los recursos disponibles. El proceso es presentado algorítmicamente en la figura 3.2. Esta forma de distribuir el capital disponible para la compra de activos financieros puede ser intervenida por el inversionista, de acuerdo con su expectativa de la evolución del mercado. Se insiste en cada apartado de la metodología la importancia que tiene el conocimiento de inversionista

dentro del proceso de toma de decisiones, los autores no pretenden en ningún caso subvalorar la capacidad que tienen los inversionistas de tomar decisiones de acuerdo a su experiencia y conocimiento del mercado, se plantea como trabajo futuro incorporar dentro de la metodología el Juicio del Experto como información que soporte las soluciones.

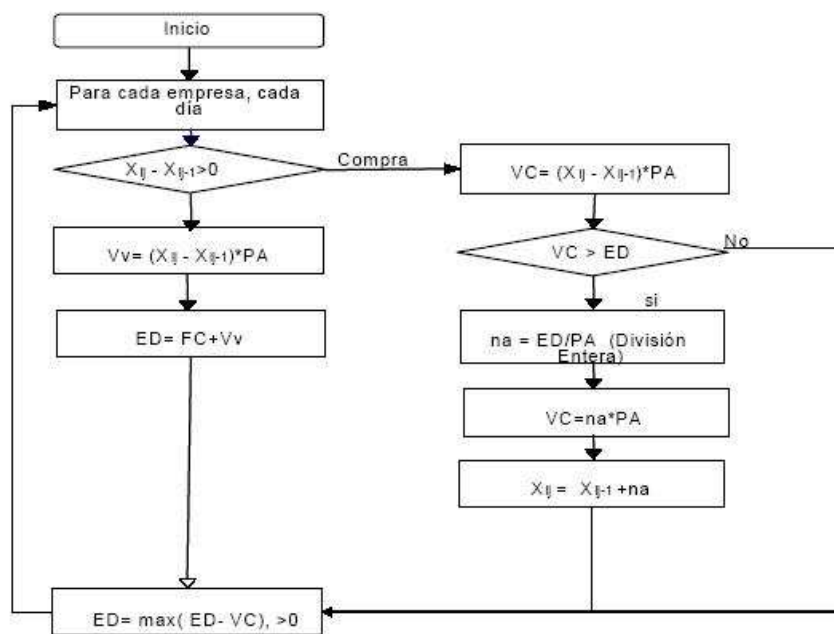


Figura 3.2: Simulación del flujo de caja para determinar la capacidad real de compra del inversionista.

En la figura 3.2 X_{ijr} representa la cantidad de acciones de la empresa i en el instante j , Vv es el valor de venta, VC es el valor de compra, ED es el efectivo disponible, PA es el precio real de la acción y na es el número de acciones que se pueden comprar.

3.2.2. Selección de instrumentos financieros

La selección de los instrumentos financieros es parte fundamental de la metodología propuesta, sin embargo, no se pretende proponer un modelo que tome esta decisión por el inversionista, ya que este tipo de decisión es propio a su naturaleza y depende de la aversión al riesgo de éste, sus preferencias sobre los mercados, el tipo de inversión que prefiere, entre otros aspectos que diferencian a un inversionista de otro, así como su forma de ver el mercado y tomar decisiones de acuerdo a esta visión.

Cada inversionista tomara su decisión de acuerdo a su conocimiento y experiencia en el mercado, depende además de la técnica aplicada por éste si es que recurre a alguna, es donde interviene el juicio del experto; aspecto que se debería tener en cuenta para ser incorporado dentro de esta metodología.

Si se pretende invertir en el corto plazo una característica que debe procurar el inversionista en el activo financiero que desea considerar es que tenga una alta bursatilidad para facilitar el cumplimiento de las políticas planteadas.

3.2.3. Construcción de pronósticos y series sintéticas

El proceso de conformación del portafolio de inversiones esta basado en las expectativas que tiene el inversionista sobre la evolución de los precios de las alternativas de inversión que atraen su interés. Es por esto, que la construcción de pronósticos de precios de acciones es un tema fundamental dentro del problema de selección de portafolios.

Una de las alternativas que se están estudiando actualmente en el pronóstico de precios de acciones, es el uso de sistemas expertos, tales como las Redes Neuronales Artificiales. En general, cualquier método de pronóstico estimará el valor futuro de las acciones, sin embargo, esta información es puntual y realmente solo refleja la tendencia de hacia donde evolucionará este; ella no refleja el conjunto de posibles evoluciones que puede sufrir el valor de una acción a partir de su último valor conocido y no incluye el efecto de otros factores exógenos a la evolución pasada de la acción. Es por ello, que no es suficiente contar con un único valor pronosticado para cada instante del futuro, ya que es necesario realizar un análisis del riesgo al que se ve sometido el inversionista respecto a los precios futuros pronosticados de las acciones. Ya que el modelo propuesto es de simulación, es necesario entregarle las proyecciones del precio de las acciones en el horizonte de planificación. Estas proyecciones corresponden a posibles evoluciones del precio de cada acción en el futuro. Esto implica que no debe entregarse al modelo la tendencia central del precio, tal como lo hacen los modelos econométricos, sino una muestra representativa de las posibles evoluciones, las cuales pueden obtenerse como series sintéticas a partir del modelo generador de la serie de precios de la acción. Esto es, cuando se ajusta un modelo matemático a una serie de tiempo, X_t , que representa la evolución histórica del precio de la acción X , independientemente que sea un modelo econométrico o de Redes Neuronales Artificiales, existe una porción de la varianza de la serie que solo puede ser explicada como un ruido blanco o error, que representa otros factores endógenos o exógenos que afectan la serie y el cual se representa dentro del modelo como

un número aleatorio normal con media cero y desviación estándar , es decir:

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}) + N(0, \sigma) \quad (3.35)$$

donde X_{t-i} , $i = 1, \dots, n$, es el valor histórico de la serie hace i períodos. Cada serie sintética se genera punto por punto, generando para cada valor de X un número aleatorio normalmente distribuido con media cero y desviación estándar σ , a partir del último dato conocido de la serie. Aunque se considera que todas las series son equiprobables, este supuesto puede ser modificado, confiriéndole más peso a algunas series que cumplan una característica determinada. Es el caso del inversionista que posee información privilegiada sobre el comportamiento futuro de un activo financiero, éste podrá darle más peso a las series que son consecuentes con esta información, sin embargo, esto no ha sido considerado dentro del modelo en cuestión.

3.2.4. Optimización del portafolio

Con las series sintéticas que se generan se obtiene una muestra representativa de posibles evoluciones del precio de las acciones o del instrumento financiero que se haya considerado. Se pretende encontrar una solución rentable para la mayoría de las posibles evoluciones del mercado, suponiendo que cada una de estas es equiprobable. Se espera que cualquiera que sea el comportamiento real del precio, el modelo propuesto ya haya considerado una conducta similar, esto es, la solución deberá ser robusta ante cualquier evolución normal del mercado. Una solución robusta se entiende como una solución cuyo resultado es favorable en la mayoría de los posibles estados de la naturaleza, para el caso en particular la solución deberá ser rentable en la mayoría de las posibles evoluciones del mercado. En términos matemáticos, se debe obtener la cantidad de acciones que debe contener el portafolio en cada período de tiempo, esta cantidad corresponde a variables enteras ya que no es posible fraccionar acciones en el mercado real, este tipo de problema donde se pretenden cantidades enteras es notorio por su dificultad. Para el caso en particular se utiliza la técnica de Búsqueda Tabú ([6]), como instrumento para obtener las políticas de compra y venta de acciones del portafolio en el corto plazo, dada la necesidad de contar con un método eficiente de optimización que genere dentro de la infinidad de posibles políticas de compra y venta la solución más robusta, que implique menor riesgo y maximice la utilidad esperada. La solución óptima buscada es el vector que contiene el número de acciones de cada empresa que se debe tener en cada uno de los días del horizonte de inversión, tal que optimice la medida de riesgo tomada sobre el flujo de caja

que se obtiene al usar dicha solución y obtener un flujo de caja para cada una de las series sintéticas consideradas. Para evaluar el rendimiento de las soluciones generadas por la Búsqueda Tabú se considera cada una de las series sintéticas generadas y se simula el flujo de caja obteniendo el VPN (valor presente neto) de la solución para cada una de las series sintéticas y se procede a evaluar la medida de riesgo que se quiere optimizar. Para el caso analizado, se busca maximizar el VPN promedio evaluado sobre el desempeño de todas las series sintéticas, se genera un promedio ya que se considera que cada una de las series son equiprobables; es decir; cada una de la series sintéticas se establece como un posible estado del mercado a futuro, lo que en teoría de toma de decisiones se considera como posible estado de la naturaleza. Se supone que cada una de la series es equiprobable por que se considera que el inversionista no tiene ningún conocimiento sobre la evolución futura del mercado, por lo tanto no podrá darle mas peso a unas series, es decir, no puede establecer que una serie sintética tiene mayor probabilidad de acercarse a la serie real futura de precios. En la realidad el inversionista puede tener algún conocimiento sobre la evolución de los precios de las acciones en el futuro por que tiene por ejemplo acceso a información privilegiada, en este caso el inversionista podrá darle mas peso a las series que sean consecuentes con esta información, por ejemplo, el inversionista tiene conocimiento que el precio de la acción de una determinada empresa caerá, el inversionista le dará mas peso a las series que presenten una tendencia a la baja, en tal caso se buscaría maximizar en VPN promedio ponderado. La solución que se genera con el modelo es el vector de los X_{ij} que optimiza la medida de riesgo considerada, donde x_{ij} es la cantidad de acciones de la empresa j en el día i . Por ejemplo, si se consideran 2 empresas (A, B) y 2 días hacia adelante para establecer la conformación del portafolio, la respuesta que entrega el modelo será a_1, b_1, a_2, b_2 donde a_1 es el número de acciones que se debe tener en el portafolio en el día 1 de la empresa A, b_1 es el número de acciones que se debe tener en el portafolio en el día 1 de la empresa B, a_2 es el número acciones que se debe tener en el portafolio en el día 2 de la empresa A, y así sucesivamente.

Capítulo 4

Implementación de los modelos

En este capítulo se describen varios algoritmos de selección de portafolios que fueron implementados en base a algunos de los modelos discutidos en los capítulos anteriores.

Se implementaron algoritmos para el modelo original de Markowitz, los modelos lineales de Konno, Cai y Teo, y el modelo con restricciones de dominación estocástica discretizado. Además, se propone como contribución de esta tesis un nuevo algoritmo de solución basado en la modificación del modelo de Konno ya descrita en un capítulo anterior.

Todos los algoritmos fueron programados en Matlab v7.0. El código de implementación de cada algoritmo se entrega en medio magnético y se detalla en el anexo de la tesis.

4.1. Modelo de Markowitz

- $zeros(x,y)$ devuelve una matriz de x filas y y columnas con todos sus elementos iguales a cero, en caso de escribirse $zeros(x)$ se asocia a un vector de x elementos iguales a cero.
- las operaciones $+$, $-$, $*$ o $/$ sirven para operaciones entre vectores de igual dimensión, y se aplican elemento a elemento.
- $ones(x,y)$ devuelve una matriz de x filas y y columnas con todos sus elementos iguales a uno, en caso de escribirse $unos(x)$ se asocia a un vector de x elementos iguales a uno.
- $var(R)$ devuelve devuleve la matriz de varianzas covarianzas de R .
- El algoritmo requiere la solución de un programa cuadrático, para lo cual en nuestra implementación recurrimos al solver QUADPROG incluido en Matlab, el mismo que resuelve el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} \min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\ \text{s.a.} \\ Ax \leq b \\ A_{eq} x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

ENTRADA: D : matriz de datos, cada columna contiene las cotizaciones históricas de las acciones de una empresa o activo en orden cronológico, R_{min} : rendimiento mínimo esperado por el inversor, h : horizonte de evaluación del rendimiento, C : capital a ser invertido y F_{max} : fracción máxima del capital a invertirse en un solo activo.

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS: R : matriz de retornos de los activos, S : matriz de varianzas covarianzas de los retornos y U : vector de promedios de los retornos y Pr : vector de promedios de los retornos

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, m$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $U = \text{promedio}(R)$, $S = \text{var}(R)$, $A = [-U]$, $LB = F_{max} \text{unos}(N)$, $b = [-R_{min}]$, $A_{eq} = \text{unos}(N)$, $beq = 1$, $UB = F_{max}[\text{unos}(N)]$, $LB = [\text{ceros}(N)]$

Resolver Q:

$$(Q) \begin{cases} \min_x z^T S z \\ \text{s.a.} \\ Az \leq b \\ A_{eq} z = b_{eq} \\ LB \leq z \leq UB \end{cases}$$

$$x = Cz$$

Algoritmo 4.1: Markowitz

La función $X = QUADPROG(H, f, A, b, Aeq, beq, LB, UB, X0)$ resuelve (P) , por defecto, utilizando el algoritmo de larga-escala, basado en el método de Newton interior-reflectivo. $X0$ es un punto de partida para las iteraciones.

4.2. Modelo original de Konno

Este modelo requiere la solución de un programa lineal, para tal efecto utilizamos en la implementación el solver LINPROG incluido en Matlab, que resuelve el siguiente problema:

$$(P_2) \begin{cases} \min_x f^T x \\ \text{s.a.} \\ Ax \leq b \\ Aeqx = beq \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

La función $X = LINPROG(f, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$ resuelve (P_2) con el algoritmo de larga-escala utilizando un solver lineal de punto interior, o con el algoritmo del simplex.

ENTRADA: (Igual para todos los algoritmos)

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS: (Igual para todos los algoritmos)

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, m$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $Pr = \text{promedio}(R)$, $U = \text{M-filas}(Pr)$, $S = R - U$, $f = \frac{1}{M}[\text{ceros}(N) \quad \text{unos}(M)]$

$$A = \begin{bmatrix} -Pr & \text{ceros}(M) \\ S & -I_M \\ -S & -I_M \end{bmatrix}$$

$b = [-CR_{\min} \quad \text{ceros}(M) \quad \text{ceros}(M)]$, $A_{eq} = [\text{unos}(N) \quad \text{ceros}(M)]$, $b_{eq} = C$, $LB = [\text{ceros}(N) \quad -\infty \text{unos}(M)]$, $UB = [CF_{\max} \text{unos}(N) \quad \infty \text{unos}(M)]$

Resolver P:

$$(P) \begin{cases} \min_z f^T z \\ \text{s.a.} \\ Az \leq b \\ A_{eq}z = b_{eq} \\ LB \leq z \leq UB \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$ **hacer**

$$x(i) = z(i)$$

fin para

Algoritmo 4.2: Konno

4.3. Modelo de Cai

ENTRADA: (Igual para todos los algoritmos)

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS: (Igual para todos los algoritmos)

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, m$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $Pr = \text{promedio}(R)$, $U = \text{M-filas}(Pr)$, $S = R - U$, $f = [\text{ceros}(N) \quad 1]$

$$A = \begin{bmatrix} -Pr & 0 \\ \text{diagonal} \left(\frac{1}{M} \text{unos}(M) \right) & -\text{unos}(N) \\ -\text{diagonal} \left(\frac{1}{M} \text{unos}(M) \right) & -\text{unos}(N) \end{bmatrix}$$

$$b = [-CR_{min} \quad \text{ceros}(N) \quad \text{ceros}(N)]$$

$$Aeq = [\text{unos}(N) \quad 0], beq = C, LB = [\text{ceros}(N) \quad -\infty], UB = [CF_{max} \text{unos}(N) \quad \infty]$$

Resolver P

para $i = 1, \dots, n$ **hacer**

$$x(i) = z(i)$$

fin para

Algoritmo 4.3: Cai

$\text{diagonal}(x)$ devuelve el producto de la matriz identidad de la misma dimensión que x y el vector x .

4.4. Modelo de Teo

ENTRADA: (Igual para todos los algoritmos)

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS: (Igual para todos los algoritmos)

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, n$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $Pr = \text{promedio}(R)$, $U = \text{M-filas}(Pr)$, $R_{prom} = \text{promedio}(Pr)$

para $j = 1, \dots, M$ **hacer**

$$S((n(j - 1) + 1 : nj), \cdot) = \text{diagonal}(r(j, \cdot) - R_{prom} \text{unos}(N))$$

$$L((n(j - 1) + 1 : nj), j) = 1$$

fin para

$$f = \frac{1}{M} [\text{ceros}(N) \quad \text{unos}(M)]$$

$$A = \begin{bmatrix} -Pr & \text{ceros}(M) \\ S & -L \\ -S & -L \end{bmatrix}$$

$b = [-CR_{min} \quad \text{ceros}(MN) \quad \text{ceros}(MN)]$, $Aeq = [\text{unos}(N) \quad \text{ceros}(M)]$, $beq = C$,
 $LB = [\text{ceros}(N) \quad -\infty \text{unos}(M)]$, $UB = [CF_{max} \text{unos}(N) \quad \infty \text{unos}(M)]$

Resolver P

para $i = 1, \dots, n$ **hacer**

$$x(i) = z(i)$$

fin para

Algoritmo 4.4: Teo

4.5. Modelo con restricciones de dominación estocástica discretizado

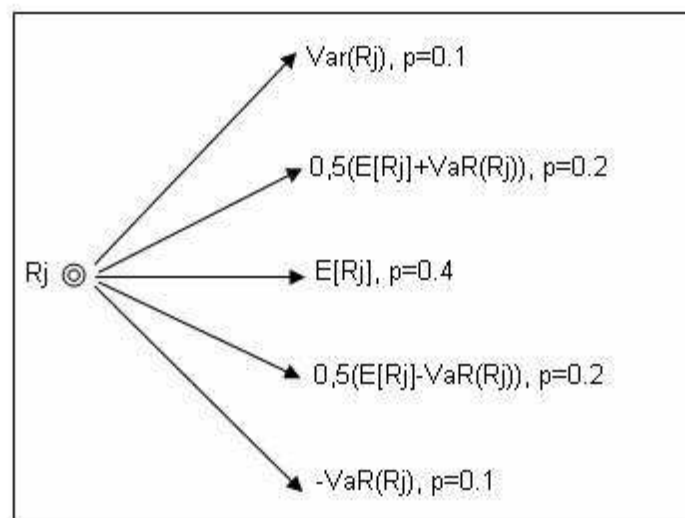
En este modelo se asume que los retornos R_j tienen una distribución discreta con cinco escenarios posibles entre $VaR(R_j)$ y $-VaR(R_j)$. Donde

$$VaR(R_j) = E[R_j] + 1,645\sigma(R_j) \quad (4.1)$$

es el valor en riesgo de los retornos de la j -ésima acción. 1.645 es el estadístico de la distribución normal para $\alpha = 0,95$

La Figura 4.5 ilustra los escenarios con sus probabilidades.

Figura 4.1: Distribución de los retornos



Además, como se mencionó en el capítulo respectivo, este modelo requiere de la inclusión de un retorno inicial Y distribuido discretamente en seis escenarios, distribución ilustrada en la Figura 4.5.

ENTRADA: (Igual para todos los algoritmos)

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS: (Igual para todos los algoritmos)

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, n$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $Pr = \text{promedio}(R)$, $R_{prom} = \text{promedio}(Pr)$, $DE = \text{desviación-estándar}(R)$

para $j = 1, \dots, N$ **hacer**

$$S(1, j) = Pr(j) - 1,645DE(j); S(2, j) = Pr(j) - 0,8225DE(j); S(3, j) = Pr(j)$$

$$S(4, j) = Pr(j) + 0,8225DE(j); S(5, j) = Pr(j) + 1,645DE(j)$$

fin para

para $j = 1, \dots, 5$ **hacer**

$$T(6j - 5 : 6j, \cdot) = \text{6-filas}(S(j, \cdot))$$

fin para

$y = [0,05 \ 0,1 \ 0,15 \ 0,20 \ 0,25 \ 0,3]$, $v = [0,1 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,2 \ 0,1]$, $F_y = [0,1 \ 0,3 \ 0,5 \ 0,7 \ 0,9 \ 1]$, $y_{prob} = [0,1 \ 0,4 \ 0,9 \ 1,6 \ 2,5 \ 3,5]$, $f = [-Pr \ \text{ceros}(30)]$,

$$A = \begin{bmatrix} -T & I_{30} \\ \text{ceros}(6, N) & v(1)I_6 \ v(2)I_6 \ v(3)I_6 \ v(4)I_6 \ v(5)I_6 \end{bmatrix}$$

$b = [-y \ -y \ -y \ -y \ -y \ y_{prob}]$, $Aeq = [\text{unos}(N) \ \text{ceros}(30)]$, $beq = 1$,

$LB = [\text{ceros}(N + 30)]$, $UB = [F_{max} \text{unos}(N) \ \infty \text{unos}(30)]$

Resolver P:

para $i = 1, \dots, n$ **hacer**

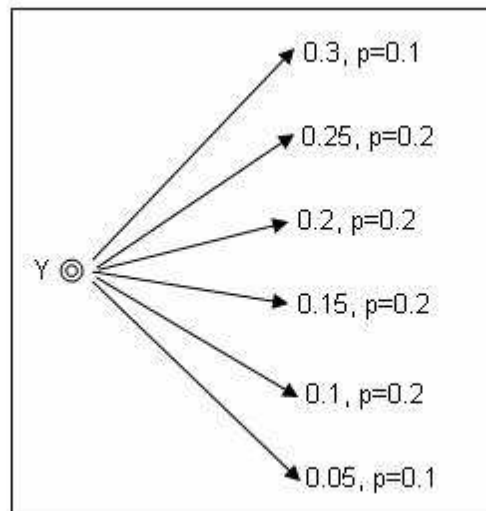
$$q(i) = z(i)$$

fin para

$$x = Cq$$

Algoritmo 4.5: Estocástico

Figura 4.2: Distribución del retorno inicial



4.6. Modelo modificado de Konno

El parámetro $\lambda = 0,65$ se escogió por medio de exploración exhaustiva con el criterio de maximizar el rendimiento promedio del portafolio, aplicando el modelo en línea a los datos de los últimos trimestres de los años 2006 y 2007, para cada una de las instancias de datos disponibles. Se simularon valores entre 0.05 y 1, incrementando en 0.05 el valor de λ en cada paso.

ENTRADA: (Igual para todos los algoritmos)

SALIDA: x : vector de distribución del portafolio.

PARÁMETROS INTERNOS:(Igual para todos los algoritmos)

$(m, n) = \text{dimensión}(D)$

para $i = 1, \dots, (m - h + 1)$ **hacer**

para $j = 1, \dots, m$ **hacer**

$$R(i, j) = \log \frac{D(i+h-1, j)}{D(i, j)}$$

fin para

fin para

$(M, N) = \text{dimensión}(R)$, $Pr = \text{promedio}(R)$, $U = \text{M-filas}(Pr)$, $S = R - U$, $f = [-\text{unos}(N) \quad 0,65 \frac{1}{M} \text{unos}(M)] \quad \text{unos}(M)$

$$A = \begin{bmatrix} S & -I_M \\ -S & -I_M \end{bmatrix}$$

$b = [\text{ceros}(M) \quad \text{ceros}(M)]$, $Aeq = [\text{unos}(N) \quad \text{ceros}(M)]$, $beq = C$, $LB = [\text{ceros}(N) \quad -\infty \text{unos}(M)]$, $UB = [CF_{max} \text{unos}(N) \quad \infty \text{unos}(M)]$

Resolver P:

para $i = 1, \dots, n$ **hacer**

$$x(i) = z(i)$$

fin para

Algoritmo 4.6: Konno modificado

Capítulo 5

Resultados Fundamentales

El objetivo inicial de la investigación fue aplicar los modelos implementados al caso ecuatoriano, específicamente a la Bolsa de Valores de Quito (BVQ). Aunque se realizaron los contactos necesarios para estos fines y hubo toda la apertura por parte del personal de la BVQ, lastimosamente la información provista no era completa y existían muchos datos perdidos. Por esta razón, se ha decidió trabajar con empresas que cotizan en la Bolsa de Nueva York (NYSE) y en Nasdaq, de las cuáles se dispone, en forma permanente vía Internet, toda la información requerida en cuanto a precios diarios de acciones.

El **NASDAQ** es una bolsa de valores electrónica y automatizada cuya oficina principal está en Nueva York. El NASDAQ Stock Market fue fundado en la década de los setenta; es la bolsa de comercio electrónica más grande de los EE.UU. Con aproximadamente 3.300 compañías, intercambia en promedio más acciones por día que cualquier otro mercado estadounidense. Se caracteriza por comprender las empresas de alta tecnología en electrónica, informática, telecomunicaciones, biotecnología, etc. Sus índices más representativos son el Nasdaq 100 y el Nasdaq Composite.

El Índice bursátil **Dow Jones** es un servicio de información financiera que muestra un conjunto de diferentes índices bursátiles de los mercados de Estados Unidos, calculados por la empresa Dow Jones & Company. Por su importancia, a veces se emplea el término “índice Dow Jones”, sin especificar, para referirse al más conocido de ellos: el índice industrial (DJIA).

Entre los varios índices bursátiles del Dow Jones se encuentran cuatro principales:

- El Promedio Industrial Dow Jones también conocido como *Dow Jones Industrial Average (DJIA)*, como ya se señaló es el más importante de todos y refleja el comportamiento de los precios de las acciones de las 30 compañías industriales más importantes y reconocidas de Estados Unidos.
- El Promedio de Utilidades Dow Jones conocido como *Dow Jones Utility Average (DJUA)*, donde se reflejan los títulos valores de las 15 mayores corporaciones de mercados como el gas o la energía eléctrica.
- El Promedio de Transportes Dow Jones conocido como *Dow Jones Transportation Average (DJTA)*, que incluye las 20 mayores empresas de transporte y distribución.

- El Promedio Compuesto Dow Jones conocido como *Dow Jones Composite Average (DJCA)*, es el índice que mide el desempeño de las acciones de 65 compañías miembros de cualquiera de estos tres índices principales anteriores.

Las empresas que componen el Promedio Compuesto Dow Jones pueden variar dependiendo de ciertos criterios, pero la mayoría de ellas son de gran capitalización. 56 de sus 65 componentes se transan en la bolsa de valores de Nueva York (NYSE) y otras 9 son operadas en el NASDAQ.

Para las pruebas computacionales se han seleccionado las cotizaciones diarias entre enero de 2005 y diciembre de 2007 de tres conjuntos de empresas: las 30 que componen el DJIA, 15 de las más grandes del sector tecnológico que cotizan en NASDAQ, y 12 de las empresas más importantes del sector financiero que también cotizan en NASDAQ.

El objetivo del experimento fue comparar el desempeño de los distintos modelos implementados, y determinar bajo que circunstancias es recomendable la aplicación de uno u otro modelo.

Las 30 empresas del DJIA sirven para probar cómo se comportan los modelos sobre un conjunto de empresas totalmente variado en cuanto al sector al que obedecen, ya que en este grupo están las 30 más grandes de entre todos los sectores económicos en Estados Unidos.

Los otros dos conjuntos de empresas serán utilizados para evaluar el comportamiento de los modelos implementados sobre empresas del mismo sector y que, de una u otra manera, tienen un mayor grado de afinidad en sus actividades económicas.

5.1. Empresas del promedio Dow Jones industrial (DJIA)

A continuación se detallan las 30 empresas que forman parte de este índice:

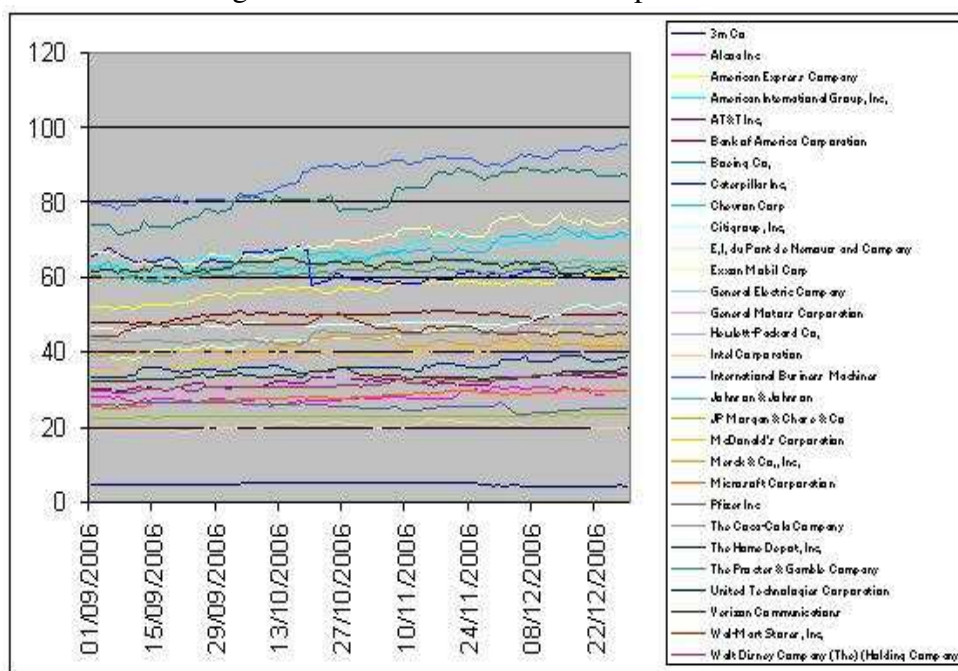
- 3m Co.
- Alcoa, Inc.
- American Express Company.
- American International Group, Inc.
- AT&T, Inc.
- Bank of America Corporation.

- Boeing Co.
- Caterpillar, Inc.
- Chevron Corp.
- Citigroup, Inc.
- E,I, du Pont de Nemours and Company.
- Exxon Mobil Corp.
- General Electric Company.
- General Motors Corporation.
- Hewlett-Packard Co.
- Intel Corporation.
- International Business Machines.
- Johnson & Johnson.
- JP Morgan & Chase Co.
- McDonald's Corporation.
- Merck & Co, Inc.
- Microsoft Corporation.
- Pfizer, Inc.
- The Coca-Cola Company.
- The Home Depot, Inc.
- The Procter & Gamble Company.
- United Technologies Corporation.
- Verizon Communications.
- Wal-Mart Stores, Inc.
- Walt Disney Company (The) (Holding Company).

5.1.1. Instancia 2006

La primera instancia para este conjunto de acciones está compuesta por sus cotizaciones diarias entre el 03 de enero de 2005 y el 29 de diciembre de 2006, período en el cuál existió una relativa estabilidad en los precios e incluso la tendencia hacia el alza, como se puede evidenciar en la Figura 5.1.1.

Figura 5.1: Cotizaciones DJIA Sep-Dic 2006



En base a la información anterior, el experimento consistió en aplicar los seis algoritmos descritos en el capítulo anterior para resolver el problema en-línea de la gestión de un portafolio en el período del 2 de octubre al 29 de diciembre del 2006. El primer día, cada algoritmo debía constituir un portafolio inicial y en los días posteriores podía realizar reestructuraciones al mismo como respuesta a las variaciones diarias en las cotizaciones, tomando en cuenta los costos reales de las transacciones de compra y venta como un porcentaje del monto transaccionado. El esquema de optimización en-línea empleado fue de tipo REPLAN: cada día el algoritmo calcula un nuevo portafolio óptimo y compara su valor con el del portafolio actual. Si la diferencia es mayor que los costos ligados a una reestructuración (es decir, a convertir el portafolio actual en el nuevo), se realizan las transacciones respectivas; caso contrario, el portafolio se mantiene sin cambios. Este experimento se repite para cada una de las instancias que se describirán más adelante.

El horizonte utilizado para el cálculo de los retornos fue de 30 días, suponiendo un capital de USD 100.000, y además imponiendo la restricción de que en ningún

activo se invierta más del 30 % del capital total. Estas condiciones son válidas para todas las instancias que se estudian a continuación.

Con estas consideraciones, la Tabla 5.1 muestra los resultados obtenidos con cada uno de los modelos, medidos en función del valor del portafolio en cada fecha del período antes mencionado. Las columnas de la tabla están ordenadas de izquierda a derecha de acuerdo al modelo que obtuvo el mayor rendimiento promedio en el período de análisis.

El significado de las etiquetas, que se mantendrá a lo largo de todo el capítulo, es el siguiente:

- MKTZ: Modelo de Markowitz.
- KNN: Modelo original de Konno.
- KNN M: Modelo propuesto como modificación al modelo original de Konno.
- ESTCO: Modelo con restricciones de dominación estocástica.
- CAI: Modelo de Cai.
- TEO: Modelo de Teo.

Cuadro 5.1: Valor neto del portafolio formado por las 30 empresas del Dow Jones industrial en el último trimestre del año 2006

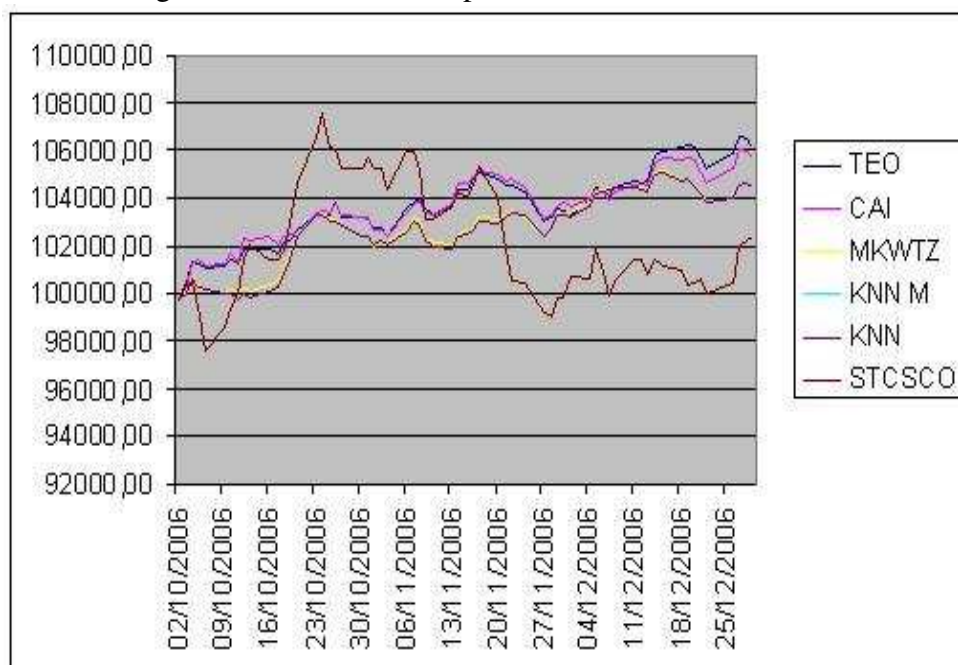
	TEO	CAI	MKTZ	KNN M	KNN	ESTCO
29/12/2006	106129,80	105653,37	104477,52	104444,48	104444,48	102456,43
28/12/2006	106438,03	105938,77	104574,57	104568,92	104568,92	102167,19
27/12/2006	106584,28	106051,44	104495,00	104511,70	104511,70	101965,56
26/12/2006	105851,43	105194,82	104030,16	104025,73	104025,73	100380,74
22/12/2006	105278,96	104585,00	103785,53	103773,14	103773,14	99958,31
21/12/2006	105743,11	105053,74	104227,79	104187,49	104187,48	100591,55
20/12/2006	106161,25	105604,12	104478,36	104473,51	104473,51	100486,49
19/12/2006	106265,38	105672,87	104807,73	104805,88	104805,88	100342,53
18/12/2006	106155,59	105545,50	104692,34	104698,79	104698,79	101005,57
15/12/2006	105976,13	105624,62	105104,63	105061,56	105061,56	101177,69
14/12/2006	105771,18	105438,91	105032,00	104947,37	104947,37	101397,46
13/12/2006	104760,59	104511,43	104359,99	104312,21	104312,21	100777,96
12/12/2006	104601,82	104449,78	104418,09	104388,06	104388,06	101417,84

11/12/2006	104705,39	104561,23	104449,34	104471,58	104471,58	101358,85
08/12/2006	104416,17	104248,19	104441,29	104466,64	104466,64	100559,35
07/12/2006	104082,53	103898,75	104430,70	104393,54	104393,54	99901,29
06/12/2006	104306,80	104224,84	104402,46	104294,32	104294,32	100873,03
05/12/2006	104417,89	104375,18	104328,77	104160,88	104160,88	101807,08
04/12/2006	103953,38	104012,09	103807,28	103643,87	103643,87	100613,88
01/12/2006	103346,96	103615,62	103373,17	103197,60	103197,60	100684,50
30/11/2006	103477,71	103771,30	103350,75	103295,48	103295,48	99833,27
29/11/2006	103529,42	103615,88	103406,53	103338,04	103338,04	99806,06
28/11/2006	103143,68	103237,55	102761,63	102708,01	102708,01	99006,25
27/11/2006	103025,24	103070,51	102413,32	102401,19	102401,19	99175,03
24/11/2006	104198,91	104432,90	103198,85	103216,11	103216,11	100504,20
22/11/2006	104555,66	104816,42	103457,25	103429,81	103429,81	100522,71
21/11/2006	104523,44	104754,93	103291,17	103156,70	103156,70	101930,90
20/11/2006	104802,97	104950,66	103112,68	102913,95	102913,95	104029,62
17/11/2006	105016,91	105127,62	103211,35	103025,29	103025,29	105363,94
16/11/2006	104791,81	104908,46	102734,81	102633,59	102633,59	104504,21
15/11/2006	104403,79	104620,49	102617,12	102487,99	102487,99	103995,57
14/11/2006	104350,80	104568,84	102501,95	102365,02	102365,02	104252,07
13/11/2006	103607,83	103719,17	102050,18	101915,21	101915,21	103628,45
10/11/2006	103361,16	103335,92	102154,27	102008,29	102008,29	103083,05
09/11/2006	103513,00	103377,49	102254,90	102164,12	102164,12	103087,36
08/11/2006	104014,00	103933,40	103042,70	102895,12	102895,12	105089,83
07/11/2006	103837,07	103732,62	103191,87	103061,91	103061,91	105956,33
06/11/2006	103523,38	103377,94	102639,41	102576,19	102576,19	105936,31
03/11/2006	102444,07	102363,05	102088,45	102041,43	102041,43	104400,54
02/11/2006	102762,38	102679,17	102172,60	102176,86	102176,86	105258,49
01/11/2006	102743,65	102647,41	102009,18	102016,33	102016,33	105205,56
31/10/2006	103120,44	103153,21	102371,27	102363,87	102363,87	105754,28
30/10/2006	103160,97	103194,30	102321,33	102346,56	102346,56	105288,42
27/10/2006	103189,68	103236,54	102845,86	102866,98	102866,98	105285,02
26/10/2006	103831,92	103733,44	103104,33	103046,41	103046,41	105990,13
25/10/2006	103361,09	103370,47	103106,05	103032,27	103032,27	106097,27
24/10/2006	103354,72	103459,37	103411,29	103224,69	103224,69	107498,88
23/10/2006	103290,88	103412,59	103335,50	103213,97	103213,97	106536,90
20/10/2006	102626,33	102442,09	102454,81	102381,24	102381,24	104635,30

19/10/2006	102199,64	102474,83	101606,29	101374,88	101374,88	102934,26
18/10/2006	102088,34	102325,15	101046,29	100750,21	100750,21	101727,92
17/10/2006	101641,37	102047,57	100513,16	100248,24	100248,24	101462,49
16/10/2006	101828,77	102375,69	100292,93	100116,01	100116,01	101389,47
13/10/2006	101870,07	102209,37	100079,18	99803,71	99803,71	102072,83
12/10/2006	101895,41	102252,07	100222,89	99927,02	99927,02	101435,06
11/10/2006	101258,67	101292,68	99937,05	99755,01	99755,01	99926,37
10/10/2006	101417,72	101638,37	100140,55	100053,64	100053,64	99385,27
09/10/2006	101157,47	101261,81	100012,81	100004,76	100004,76	98502,61
06/10/2006	101039,55	101156,28	100201,02	100207,98	100207,98	97617,26
05/10/2006	101230,38	101462,03	100297,81	100285,44	100285,44	99430,97
04/10/2006	101262,83	101191,13	100731,30	100612,10	100612,09	100456,38
03/10/2006	100375,83	100220,19	100103,06	100027,20	100027,20	100338,22
02/10/2006	99794,53	99822,68	99750,48	99736,62	99736,62	99757,29
PROM	103643,97	103603,71	102750,21	102667,19	102667,19	102190,72

La figura 5.1.1 muestra la evolución gráfica de la tabla anterior.

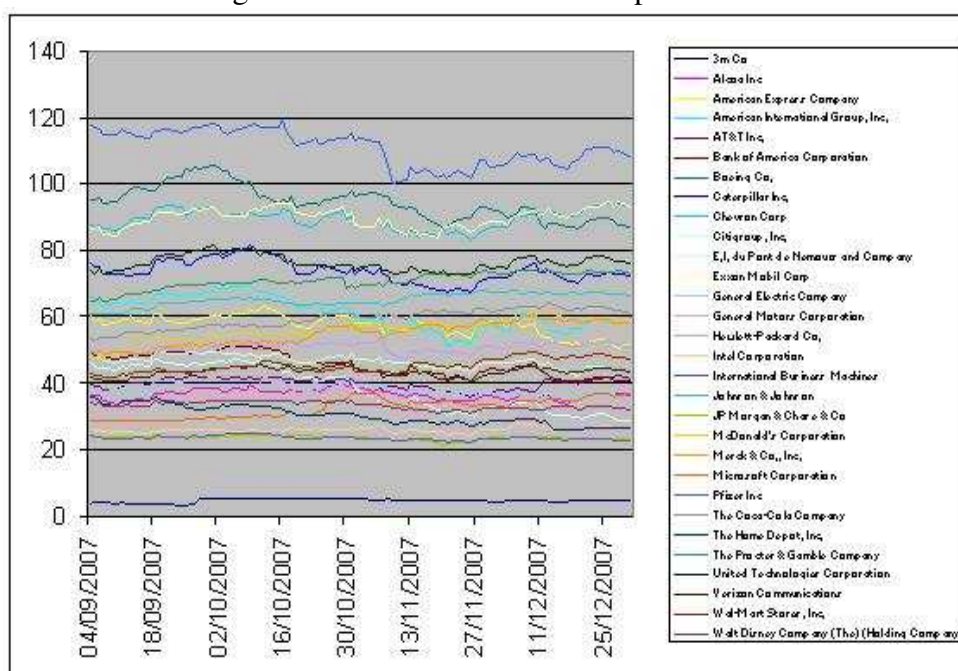
Figura 5.2: Valor neto del portafolio DJIA, Oct-Dic 2006



5.1.2. Instancia 2007

Una segunda instancia del conjunto de empresas del DJIA que resulta interesante analizar es el último trimestre del año 2007, período en el cual, al existir una marcada recesión en la economía norteamericana, las cotizaciones de la mayor parte de acciones tienen una tendencia a la baja o, en el mejor de los casos, a mantenerse. La Figura 5.1.2 muestra dichas tendencias.

Figura 5.3: Cotizaciones DJIA Sep-Dic 2007



La Tabla 5.2 muestra los resultados obtenidos con todos los modelos en esta instancia.

Cuadro 5.2: Valor neto del portafolio formado por las 30 empresas del Dow Jones industrial en el último trimestre del año 2007

	KNN M	TEO	MKTZ	ESTCO	CAI	KNN
31/12/2007	99755,06	97318,51	96450,26	99120,32	94916,29	95507,01
28/12/2007	100515,51	98115,11	97224,03	100108,28	95622,00	96280,34
27/12/2007	100494,76	98061,69	97380,10	99516,29	95602,76	96406,92
26/12/2007	101131,26	99324,65	98114,67	101056,85	97015,81	97119,39
24/12/2007	100955,08	99262,67	97794,41	100269,07	96936,18	96642,08
21/12/2007	100585,20	98600,44	97464,71	99729,73	96172,35	96286,78
20/12/2007	99737,26	97171,03	96332,19	97817,72	94603,39	95096,26

19/12/2007	99677,12	96887,88	96067,62	96829,15	94177,16	94891,60
18/12/2007	100481,67	97485,57	96938,73	96689,15	94553,73	95851,41
17/12/2007	100244,54	96885,30	96855,34	95943,87	93850,24	95715,50
14/12/2007	101061,90	98222,23	98107,63	98346,13	95354,56	96892,63
13/12/2007	101673,73	99249,45	98693,88	100173,86	96697,40	97503,50
12/12/2007	101997,22	99105,03	98763,98	99639,17	96738,40	97668,86
11/12/2007	102390,08	98888,42	98937,28	98406,80	96488,41	97639,49
10/12/2007	103324,16	100390,83	100096,02	101267,96	98680,99	98508,86
07/12/2007	103062,81	100154,58	100006,26	99960,04	98067,44	98477,79
06/12/2007	103110,41	100088,56	99886,17	100424,49	98114,58	98470,11
05/12/2007	102377,55	99008,07	99107,77	98074,75	96759,30	97621,41
04/12/2007	101367,66	97397,10	98193,25	95832,82	95107,75	96559,47
03/12/2007	101615,73	97794,54	98670,69	96099,07	95580,27	97230,52
30/11/2007	102146,03	98279,74	99098,65	95846,79	96164,44	97829,49
29/11/2007	101362,07	97914,38	98521,95	95590,19	95826,21	97030,47
28/11/2007	100651,34	97605,30	97936,02	94942,74	95583,51	96389,98
27/11/2007	98018,73	94902,74	95396,04	91876,29	92750,66	93742,89
26/11/2007	96464,17	93336,67	93789,46	90272,02	91294,66	92149,21
23/11/2007	97352,39	94940,16	94626,96	92794,76	93313,81	93215,98
21/11/2007	95876,16	93536,76	93257,85	91494,49	91787,50	91777,54
20/11/2007	96073,88	94863,11	93347,30	93546,16	93374,29	91927,40
19/11/2007	97473,85	95127,72	94742,81	91666,80	93160,97	93341,70
16/11/2007	99148,97	96911,76	96550,62	93062,99	95302,33	95486,81
15/11/2007	98428,21	96170,55	96109,31	92498,41	94768,91	95009,75
14/11/2007	99043,09	96923,78	96775,49	93904,06	95792,82	95835,80
13/11/2007	98782,70	97397,62	96802,29	94782,44	96339,52	96019,83
12/11/2007	96663,85	95144,25	95311,49	92448,01	93777,46	94288,33
09/11/2007	96403,52	95368,88	95575,89	93498,50	94195,07	94553,43
08/11/2007	97439,08	96522,11	96670,57	96196,88	95764,00	95458,52
07/11/2007	96968,04	96702,56	96071,71	96979,74	96036,27	94856,49
06/11/2007	98591,38	99180,67	97872,92	99519,15	98720,36	96914,20
05/11/2007	98129,96	98539,68	97391,99	97206,60	97898,81	96467,31
02/11/2007	98501,16	99014,33	97906,42	97576,04	98520,55	97041,29
01/11/2007	98346,34	99224,20	97913,36	96901,70	98507,09	97095,81
31/10/2007	100180,14	101428,23	99790,44	99079,53	101082,69	99172,30
30/10/2007	99835,01	100497,85	99218,14	97343,10	100031,62	98610,10

29/10/2007	100867,33	101040,94	99977,93	98696,95	100638,05	99395,46
26/10/2007	100615,65	100539,55	99673,83	98233,30	100095,97	99130,96
25/10/2007	99861,56	99657,41	99135,61	97827,45	98959,69	98477,81
24/10/2007	99782,73	99506,17	98750,16	98026,52	98964,23	98390,36
23/10/2007	99932,52	99767,34	98867,68	97968,44	99061,01	98724,48
22/10/2007	100445,30	98948,30	98784,40	97205,86	98282,68	98526,98
19/10/2007	100153,95	98550,63	98509,00	97260,38	97965,05	98288,76
18/10/2007	101046,51	100240,82	99649,41	100988,52	100274,23	99372,83
17/10/2007	101070,47	100466,95	99559,31	100611,93	100354,29	99431,85
16/10/2007	100854,80	100262,46	99256,88	99477,66	100253,66	99219,71
15/10/2007	101418,41	100568,95	99612,99	99863,54	100876,54	99656,42
12/10/2007	102238,22	101171,15	100309,94	99735,85	101682,28	100400,99
11/10/2007	102196,95	100886,05	100079,71	99048,36	101158,05	100216,68
10/10/2007	101612,12	101356,96	100329,43	100624,92	101468,18	100418,85
09/10/2007	101493,23	101788,29	100692,15	101254,40	102026,11	100790,03
08/10/2007	101339,37	101127,36	100478,31	100004,44	101197,45	100599,29
05/10/2007	101547,02	101331,25	100825,02	99804,23	101445,92	100938,78
04/10/2007	101352,91	100809,01	100830,34	99027,43	100692,41	100879,87
03/10/2007	101199,15	100577,29	100646,80	99177,23	100542,28	100680,63
02/10/2007	101108,55	100992,10	100845,63	100683,13	101101,44	100864,63
01/10/2007	100787,12	101202,75	100673,35	101433,18	101194,64	100569,36
PROM	100130,67	98589,63	98113,29	97520,10	97332,29	97274,36

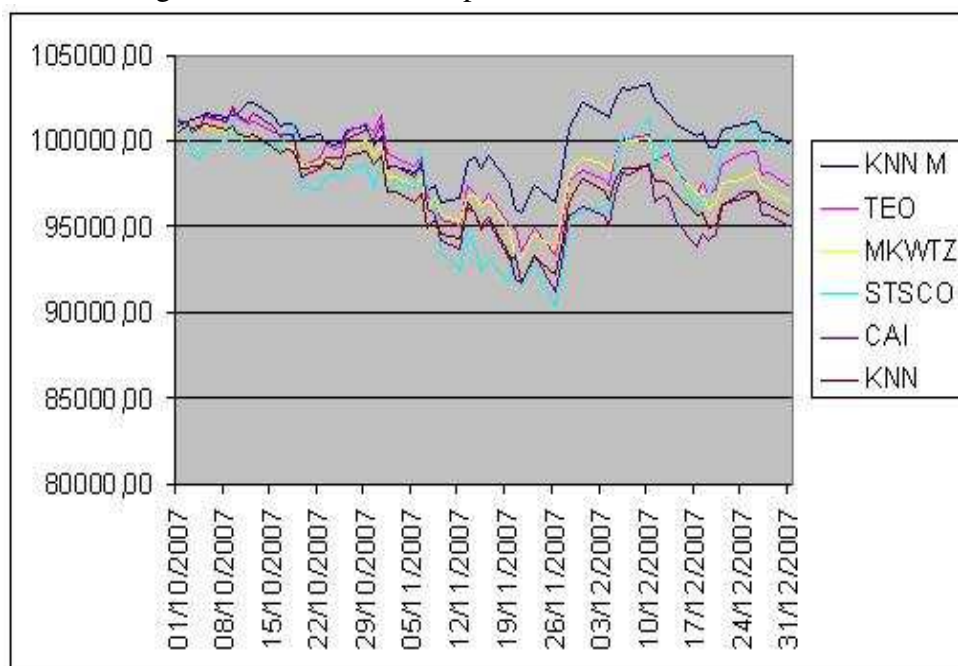
La evolución de valor neto del portafolio descrito en la Tabla 5.2 se refleja en la Figura 5.1.2.

5.2. Empresas del sector tecnológico en NASDAQ

Como se citó previamente, es importante analizar el comportamiento de los modelos cuando son aplicados a un conjunto de empresas que comparten cierta homogeneidad, por esta razón se seleccionaron catorce de las más grandes empresas del sector tecnológico que cotizan en NASDAQ:

- CISCO SYSTEMS
- HEWLETT PACKARD CO
- IBM

Figura 5.4: Valor neto del portafolio DJIA, Oct-Dic 2007



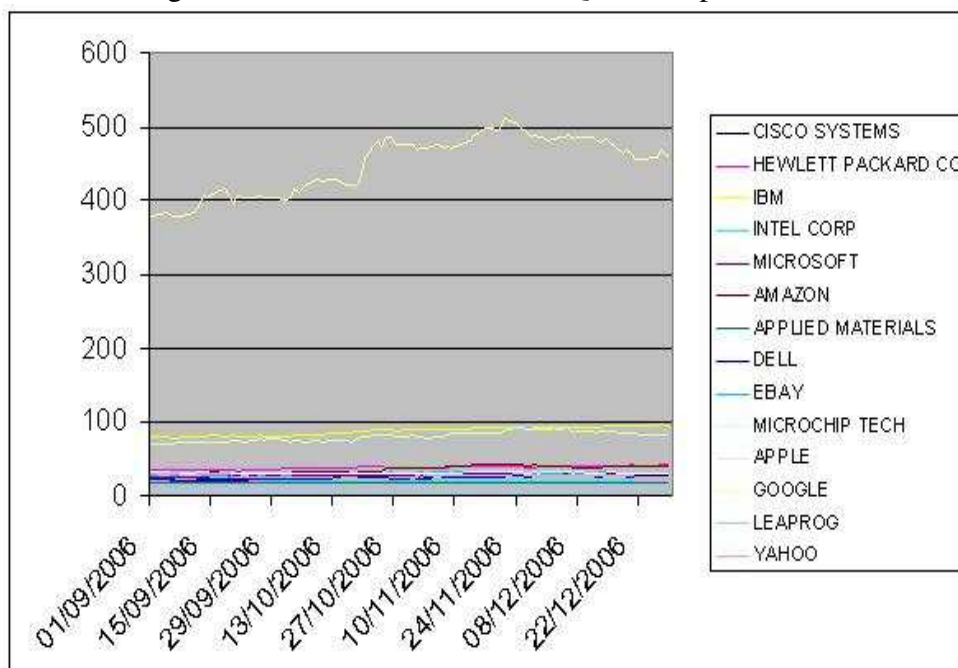
- INTEL CORP
- MICROSOFT
- AMAZON
- APPLIED MATERIALS
- DELL
- EBAY
- MICROCHIP TECH
- APPLE
- GOOGLE
- LEAPROG
- YAHOO

5.2.1. Instancia 2006

La Figura 5.2.1 muestra las tendencias de las cotizaciones de las acciones de estas catorce empresas que, como en el caso anterior, tienen una marcada

tendencia a la alza.

Figura 5.5: Cotizaciones NASDAQ-TEC Sep-Dic 2006



La Tabla 5.3 muestra los resultados de los valores netos del portafolio en el último trimestre del 2006, una vez aplicados los seis modelos en línea.

Cuadro 5.3: Valor neto del portafolio formado por 14 de las más grandes empresas del sector tecnológico que cotizaron en NASDAQ durante el último trimestre del año 2006

	MKTZ	KNN M	ESTCO	KNN	CAI	TEO
29/12/2006	113453,53	113748,58	114853,21	113075,21	112867,96	109328,68
28/12/2006	113665,78	113975,70	115053,16	113284,95	112949,37	109593,83
27/12/2006	114084,24	114322,82	115182,53	113688,32	113157,87	109926,92
26/12/2006	112765,71	113435,36	114085,90	112447,66	112309,42	109222,57
22/12/2006	112082,64	113435,88	113328,08	111740,60	111616,02	108552,89
21/12/2006	112841,27	113571,85	114176,10	112550,75	112472,78	109272,76
20/12/2006	113607,38	115035,56	114749,43	113293,48	113372,56	110339,21
19/12/2006	113141,83	114280,94	114303,90	112759,38	113061,10	110272,29
18/12/2006	112543,29	113901,21	113779,51	112212,41	112670,18	110348,07
15/12/2006	113165,23	114307,99	113713,42	112789,40	113062,39	111077,23
14/12/2006	112994,15	113857,20	113396,16	112585,85	112690,26	110842,90

13/12/2006	112382,33	113367,18	112784,54	111952,80	112126,78	109977,38
12/12/2006	112395,36	112463,52	112473,84	111976,60	111785,49	109802,44
11/12/2006	112446,96	112586,24	112524,98	112013,34	112134,80	110117,98
08/12/2006	112206,02	112056,72	112065,47	111795,32	111643,25	109999,40
07/12/2006	112296,58	112181,09	112047,37	111859,49	111405,39	109686,80
06/12/2006	112832,41	112205,62	112506,47	112374,13	112210,56	110513,98
05/12/2006	112816,92	112145,50	112439,00	112405,13	112237,32	110909,07
04/12/2006	112506,85	111656,27	112393,77	112105,66	112300,87	110521,85
01/12/2006	110948,60	110338,78	110642,90	110557,77	110918,93	109320,22
30/11/2006	111409,78	111243,03	111207,80	110991,74	111529,24	110213,36
29/11/2006	111255,12	111179,50	111281,84	110824,28	111680,84	110260,93
28/11/2006	111032,19	110855,42	110715,97	110597,84	111239,15	109953,77
27/11/2006	109879,91	110673,39	109199,80	109452,01	109464,45	109517,76
24/11/2006	112669,76	112707,95	111801,68	112184,02	112259,51	111969,50
22/11/2006	112972,72	112324,60	112112,12	112471,74	112439,08	111936,34
21/11/2006	112985,29	111556,56	112053,90	112466,66	112185,00	110864,02
20/11/2006	112667,13	111688,55	112231,44	112252,52	112191,18	110930,16
17/11/2006	112855,84	111794,56	112092,83	112398,96	111940,71	110891,96
16/11/2006	113079,11	111908,52	112519,90	112643,60	112395,23	110967,69
15/11/2006	112303,76	111273,41	111415,74	111898,08	111377,71	111135,39
14/11/2006	112978,48	111865,09	112213,73	112594,58	112015,07	110903,99
13/11/2006	111763,64	109877,45	111532,91	111363,48	111152,34	109319,46
10/11/2006	111073,87	109334,23	111292,78	110658,05	110634,09	108180,01
09/11/2006	110731,11	108868,70	111153,83	110273,84	110192,71	107701,10
08/11/2006	109577,81	108689,39	108729,05	109167,99	107912,74	107675,84
07/11/2006	109102,07	107413,53	108219,23	108695,87	107189,52	107342,58
06/11/2006	108999,79	106844,11	107964,08	108537,13	106804,46	106787,91
03/11/2006	107230,92	104768,41	106017,85	106743,64	104719,36	105374,74
02/11/2006	107631,90	109707,79	106754,54	107130,02	105647,81	105939,19
01/11/2006	107732,97	109725,96	106839,61	107281,71	105731,53	105969,28
31/10/2006	108578,94	110813,10	107163,69	108129,09	106378,38	106974,00
30/10/2006	108296,77	109913,75	106682,97	107841,70	105945,08	106254,54
27/10/2006	107382,63	108707,71	105782,28	106895,01	105084,43	105473,28
26/10/2006	109207,12	109115,32	107187,93	108758,96	106774,90	107057,88
25/10/2006	108704,31	108553,44	107394,49	108062,19	106393,45	105729,83
24/10/2006	108364,20	108560,38	107535,66	107787,41	106235,26	104924,74

23/10/2006	109222,06	108860,13	108055,98	108658,87	106925,65	105641,85
20/10/2006	107897,60	107931,52	107464,08	107461,56	106212,60	104553,03
19/10/2006	106457,80	107497,03	106868,08	106243,26	105364,87	103564,07
18/10/2006	105757,49	106911,12	106541,25	105582,05	104658,30	103685,93
17/10/2006	105445,33	106090,27	105947,29	105355,46	104975,79	103843,67
16/10/2006	105403,75	106273,66	105770,44	105348,04	105169,90	104607,90
13/10/2006	105329,09	105898,61	105526,78	105211,35	105070,39	104349,48
12/10/2006	104175,43	105171,52	104548,80	103982,15	104294,10	103409,51
11/10/2006	103481,67	103631,30	103632,32	103274,57	103225,22	102082,91
10/10/2006	103292,55	103993,73	103649,37	103037,47	103234,58	102267,53
09/10/2006	103599,06	103908,12	103622,39	103394,22	103443,41	102493,02
06/10/2006	102665,34	101997,34	102868,69	102533,48	102668,81	101747,28
05/10/2006	102283,75	101694,17	102668,19	102223,84	102552,99	101824,15
04/10/2006	102521,23	101372,71	102919,74	102401,08	102676,64	101621,46
03/10/2006	100670,73	99770,94	101044,20	100605,18	100735,56	99649,26
02/10/2006	100593,71	100296,22	100760,61	100559,31	100371,46	99558,95
PROM	109594,30	109589,46	109483,90	109229,24	108826,77	107536,12

La Figura 5.2.1 muestra la evolución del valor neto del portafolio descrito en la Tabla 5.3.

5.2.2. Instancia 2007

Como se evidencia en la Figura 5.2.2, son muy pocas las empresas cuyas cotizaciones tienen una marcada tendencia a la alza, o por lo menos a mantenerse. El factor común en la gran mayoría de estas empresas es una evidente tendencia a la baja en las cotizaciones de sus acciones.

Los resultados obtenidos con los modelos en línea para el último trimestre de 2007 se encuentran en la Tabla 5.4.

Cuadro 5.4: Valor neto del portafolio formado por 14 de las más grandes empresas del sector tecnológico que cotizaron en NASDAQ durante el último trimestre del año 2007

	ESTCO	TEO	CAI	KNN	KNN M	MKTZ
28/12/2007	108842,36	98399,07	98082,67	93823,13	93823,13	90755,12
27/12/2007	108623,07	98404,04	98103,47	94009,66	94009,66	91011,96

26/12/2007	109087,82	100153,02	99914,16	95895,01	95895,01	92949,00
24/12/2007	108328,61	99956,44	99717,13	95883,64	95883,64	93253,34
21/12/2007	107221,30	99301,08	99027,09	95349,29	95349,29	92779,27
20/12/2007	105119,09	97896,79	97420,39	94539,05	94539,05	92068,20
19/12/2007	103645,81	96087,87	95637,20	92846,10	92846,10	90288,45
18/12/2007	102373,66	95552,84	95001,08	92365,62	92365,62	89750,40
17/12/2007	101585,90	94912,26	94263,56	92053,42	92053,42	89486,62
14/12/2007	104699,72	97027,46	96696,15	94309,54	94309,54	91593,95
13/12/2007	107231,33	98567,43	98395,71	95671,04	95671,04	93091,61
12/12/2007	106873,30	98354,98	98309,46	95820,55	95820,55	93043,43
11/12/2007	105804,11	96923,44	96874,24	94215,35	94215,35	90990,89
10/12/2007	108582,84	98870,98	98725,01	96368,03	96368,03	92632,47
07/12/2007	108907,71	98453,90	98424,31	95952,99	95952,99	92155,22
06/12/2007	108543,75	98738,99	98342,53	96970,24	96970,24	93158,42
05/12/2007	106544,83	97282,14	97090,88	96017,99	96017,99	92052,23
04/12/2007	104831,17	95264,78	95282,54	94482,19	94482,19	90465,18
03/12/2007	103395,37	95463,07	95478,07	95078,97	95078,97	91438,79
30/11/2007	103580,03	96357,02	96235,21	96113,41	96113,41	92137,58
29/11/2007	103965,63	97718,50	97165,17	96189,55	96189,55	92349,46
28/11/2007	103495,65	97181,12	96651,79	95425,97	95425,97	91519,87
27/11/2007	99379,36	93871,66	93086,54	92644,00	92644,00	88987,87
26/11/2007	96361,22	92006,45	91163,78	91344,86	91344,86	87865,45
23/11/2007	97291,26	94476,37	93680,23	94253,20	94253,20	91061,60
21/11/2007	95414,49	93043,39	92204,79	92572,33	92572,33	89344,33
20/11/2007	96908,37	94695,32	93763,92	94413,03	94413,03	91563,84
19/11/2007	95036,00	94336,45	93266,81	94579,93	94579,93	92238,18
16/11/2007	95911,85	95934,00	94961,85	95914,36	95914,36	93545,10
15/11/2007	95154,97	94622,36	93803,86	94211,84	94211,84	92078,59
14/11/2007	96085,62	95580,42	94973,53	95301,38	95301,38	93069,73
13/11/2007	97796,31	96844,30	96083,83	95006,81	95006,81	93065,36
12/11/2007	92436,35	93747,69	93159,30	93628,69	93628,69	91689,61
09/11/2007	94966,30	95314,10	94778,15	96028,09	96028,09	93631,70
08/11/2007	99955,63	97953,58	97545,92	97464,28	97464,28	95145,75
07/11/2007	104535,36	101948,71	101568,14	101683,23	101683,23	99796,33
06/11/2007	106280,24	104358,02	103950,36	104621,49	104621,49	102843,98
05/11/2007	103685,09	103233,52	102732,24	103675,78	103675,78	101714,23

02/11/2007	104458,40	103521,23	103343,06	103046,43	103046,43	100969,57
01/11/2007	104543,50	102705,37	102466,25	102780,22	102780,22	100589,57
31/10/2007	106109,23	104390,87	104326,01	104233,29	104233,29	102361,97
30/10/2007	104450,73	103031,95	103023,57	103573,40	103573,40	101359,96
29/10/2007	104816,83	102812,51	103122,09	104084,91	104084,91	101696,64
26/10/2007	104255,12	102214,94	102141,27	102248,95	102248,95	99794,00
25/10/2007	103210,35	100267,82	100218,83	101971,51	101971,51	99518,42
24/10/2007	104040,27	100856,18	100843,77	102942,18	102942,18	100245,14
23/10/2007	108968,66	101596,30	102137,76	102418,32	102418,32	99468,05
22/10/2007	103728,93	99808,89	99742,12	100933,32	100933,32	98219,07
19/10/2007	102050,45	99229,63	99369,01	100303,14	100303,14	97541,49
18/10/2007	103590,85	101899,00	102252,23	101957,54	101957,54	99553,68
17/10/2007	103507,48	102124,02	102165,05	101168,53	101168,53	98956,99
16/10/2007	101507,89	100526,43	100746,33	100547,70	100547,70	98458,59
15/10/2007	101564,79	100818,25	101126,92	101263,47	101263,47	99416,96
12/10/2007	101962,63	101558,69	101821,93	101523,86	101523,86	99650,93
11/10/2007	99924,76	100410,77	100619,15	100494,99	100494,99	98681,42
10/10/2007	103071,78	101717,85	102087,28	101409,47	101409,47	99830,56
09/10/2007	103397,98	101453,57	102008,51	101117,36	101117,36	99303,27
08/10/2007	103317,03	102144,12	102609,18	103030,66	103030,66	102157,92
05/10/2007	101105,16	101277,72	101859,61	101997,59	101997,59	101398,88
04/10/2007	99761,18	100383,58	100890,42	100797,11	100797,11	100250,19
03/10/2007	100456,23	100741,06	101357,61	101134,27	101134,27	100720,87
02/10/2007	101341,21	101767,74	102267,13	102547,58	102547,58	102081,96
01/10/2007	101323,54	101716,23	101958,99	102056,45	102056,45	101678,53
PROM	102776,93	98854,10	98667,70	98036,61	98036,61	95563,77

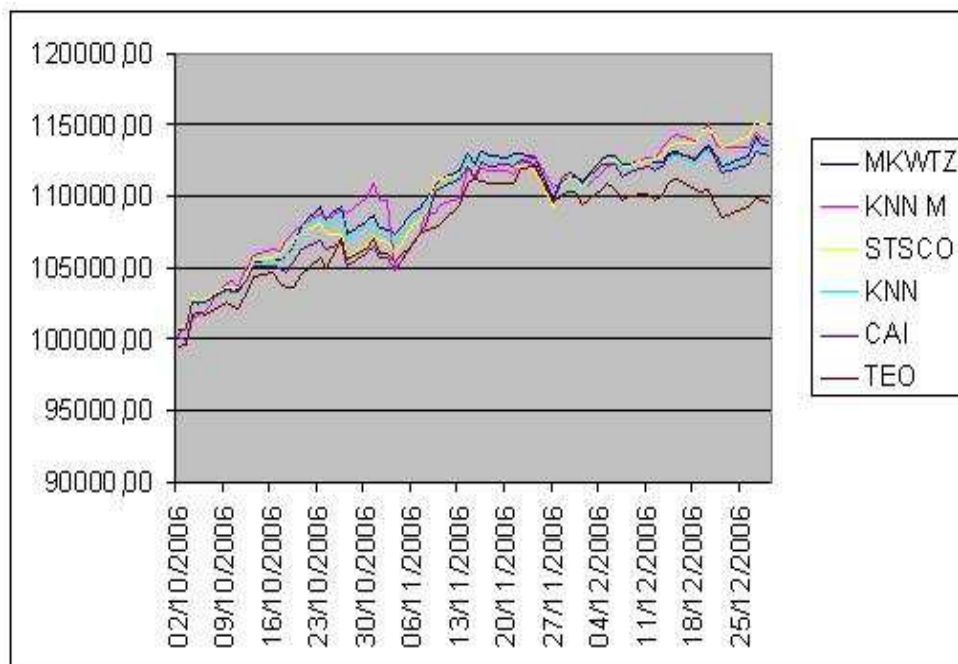
Los resultados del valor neto del portafolio, almacenados en la Tabla 5.4 están representados en la Figura 5.2.2.

5.3. Empresas del sector financiero en NASDAQ

Las doce empresas del sector financiero en NASDAQ seleccionadas para las pruebas son:

- ALFACORP.

Figura 5.6: Valor neto del portafolio NASDAQ-TEC, Oct-Dic 2006

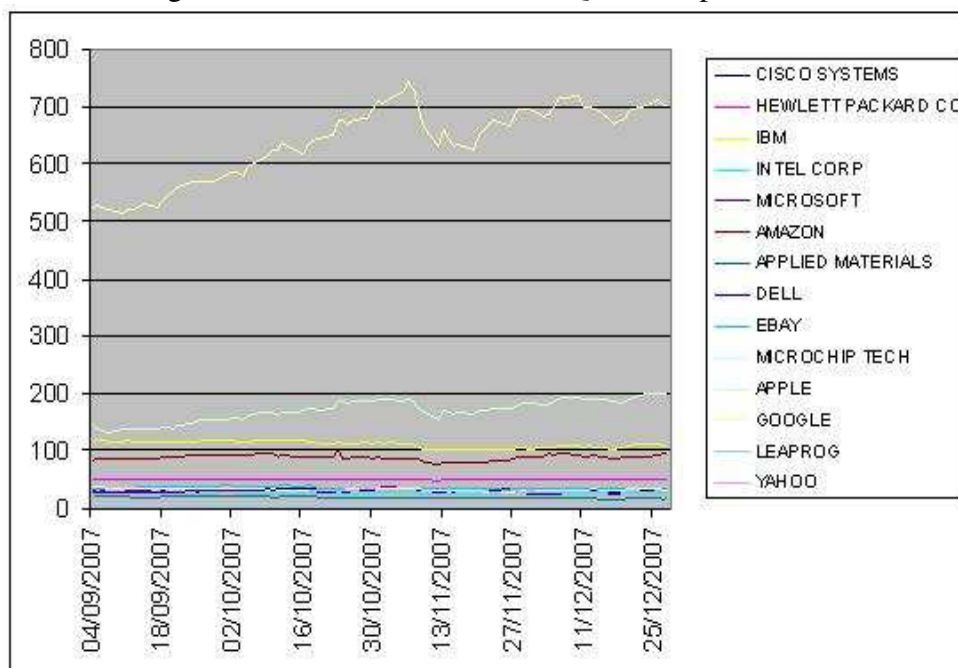


- ALTERA CORP.
- AMERICAN CAPITAL STRATEGIES.
- AMERICAN NATIONAL INSURANCE CORP.
- ARCH CAPITAL GROUP.
- ASSOCIATED BANK CORP.
- BANKFIRST.
- BANKUNITED CORP.
- BROOKLINE BANCORP.
- ADVANTA CORP.
- BANK MUTUAL CORPORATION.
- BANK OF AMERICA CORPORATION.

5.3.1. Instancia 2006

Las tendencias son las mismas que en el caso de la empresas del Dow Jones y las empresas del sector tecnológico en Nasdaq a finales del 2006 y 2007,

Figura 5.7: Cotizaciones NASDAQ-TEC Sep-Dic 2007



respectivamente. La Figura 5.3.1 ilustra lo expuesto.

La Tabla 5.5 muestra los resultados de obtenidos para esta instancia, repitiendo el experimento señalado previamente.

Cuadro 5.5: Valor neto del portafolio formado por 12 de las más grandes empresas del sector financiero que cotizaron en NASDAQ durante el último trimestre del año 2006

	ESTCO	TEO	CAI	KNN M	KNN	MKTZ
29/12/2006	110046,37	106673,44	107050,91	104661,08	104661,08	104702,91
28/12/2006	110757,41	107799,70	108066,28	105294,13	105294,13	105251,56
27/12/2006	110961,62	108375,15	108462,84	105676,28	105676,28	105635,61
26/12/2006	109644,78	107390,74	107493,87	104471,14	104471,14	104465,42
22/12/2006	108902,01	106337,15	106490,14	104019,44	104019,44	103978,26
21/12/2006	108056,01	106154,74	106265,24	103605,26	103605,26	103664,64
20/12/2006	108253,15	105991,68	106060,16	103760,93	103760,93	103829,52
19/12/2006	108253,18	106044,66	105992,65	103592,12	103592,11	103687,84
18/12/2006	108346,98	106027,75	106176,27	103932,09	103932,09	103972,74
15/12/2006	108385,45	106888,31	106943,00	104140,38	104140,38	104137,51
14/12/2006	107941,65	106396,32	106471,26	103618,51	103618,51	103619,41

13/12/2006	107695,04	105892,06	105909,14	103327,69	103327,68	103321,56
12/12/2006	107135,69	105861,80	105968,42	103461,51	103461,51	103438,19
11/12/2006	107401,26	105769,73	105913,47	103460,18	103460,18	103370,85
08/12/2006	107564,61	105585,94	105614,65	103149,03	103149,03	102921,01
07/12/2006	108285,63	106078,04	106114,47	103500,22	103500,22	103253,44
06/12/2006	108721,92	106607,66	106786,77	104028,37	104028,37	103790,95
05/12/2006	108716,98	106862,61	106873,24	104002,68	104002,68	103805,23
04/12/2006	108596,66	106689,47	106580,77	103766,89	103766,89	103519,27
01/12/2006	107740,59	105957,22	105734,04	103082,73	103082,73	102906,43
30/11/2006	108554,93	106420,40	106311,14	103222,69	103222,69	102983,06
29/11/2006	108068,49	106675,45	106494,36	103395,18	103395,18	103239,79
28/11/2006	106704,76	106264,31	105795,31	102492,68	102492,68	102415,18
27/11/2006	105798,83	106273,69	105718,14	102175,66	102175,66	102125,42
24/11/2006	108344,72	107073,76	106832,72	103917,12	103917,12	103785,40
22/11/2006	108383,55	107204,22	106948,83	103754,43	103754,42	103630,71
21/11/2006	108550,90	107398,13	107176,69	103979,64	103979,64	103770,76
20/11/2006	108257,05	107670,46	107431,83	104045,26	104045,26	103866,96
17/11/2006	108175,81	107725,34	107461,15	104032,96	104032,96	103861,87
16/11/2006	108344,11	107953,82	107742,18	103954,38	103954,38	103797,27
15/11/2006	107860,96	107661,48	107448,36	104048,24	104048,24	103847,95
14/11/2006	107145,81	106772,71	106516,54	103475,04	103475,04	103331,45
13/11/2006	105232,02	105091,40	104743,67	102506,43	102506,43	102518,64
10/11/2006	105213,82	105037,92	104549,80	102488,42	102488,42	102437,45
09/11/2006	103977,91	104114,54	103496,64	101791,44	101791,44	101763,85
08/11/2006	105158,73	104865,61	104376,23	102408,43	102408,43	102326,77
07/11/2006	104224,91	103870,47	103629,27	101982,04	101982,04	101907,47
06/11/2006	104118,58	103445,11	103133,89	101644,52	101644,52	101538,31
03/11/2006	102393,11	102043,48	101592,71	100655,54	100655,54	100561,58
02/11/2006	102004,16	101265,76	101020,17	100217,16	100217,16	100202,45
01/11/2006	103445,18	101283,67	101180,58	101140,97	101140,97	101078,08
31/10/2006	104719,14	102585,36	102714,56	101949,72	101949,72	101850,72
30/10/2006	105151,85	102853,83	102736,94	102170,77	102170,77	101931,18
27/10/2006	104448,87	102112,41	102206,44	101642,55	101642,55	101488,72
26/10/2006	105112,68	102955,95	103011,17	102221,66	102221,66	102023,23
25/10/2006	103964,31	102119,75	102268,58	101474,34	101474,34	101365,50
24/10/2006	103599,78	101808,76	101676,88	102026,77	102026,77	101832,20

23/10/2006	102979,02	102074,18	101559,92	101599,01	101599,01	101415,66
20/10/2006	103166,76	101723,96	101306,53	101731,55	101731,55	101520,42
19/10/2006	102868,74	102619,45	102280,93	102665,47	102665,47	102485,94
18/10/2006	103468,55	102996,19	102664,36	103000,17	103000,17	102899,08
17/10/2006	104151,09	103060,33	102892,56	103099,29	103099,29	102850,21
16/10/2006	104899,57	103612,54	103467,28	103329,25	103329,25	103053,77
13/10/2006	104559,58	103491,40	103406,58	103479,65	103479,65	103272,99
12/10/2006	103589,25	102919,69	102921,34	102941,43	102941,43	102794,30
11/10/2006	102580,60	101897,00	101892,64	101914,80	101914,80	101804,15
10/10/2006	103282,81	102371,65	102343,85	102349,27	102349,27	102253,06
09/10/2006	103233,15	102200,24	102285,36	101861,00	101861,00	101800,02
06/10/2006	102353,61	101537,77	101450,89	101280,53	101280,53	101253,99
05/10/2006	102348,22	101971,97	101773,87	101377,52	101377,52	101336,94
04/10/2006	101483,21	101337,65	101238,55	101021,36	101021,36	101013,10
03/10/2006	100477,11	100220,53	99911,03	100153,26	100153,26	100151,50
02/10/2006	99689,75	99379,74	99338,99	99902,08	99902,08	99911,77
PROM	105928,46	104656,29	104538,37	102842,39	102842,39	102739,23

La Figura 5.3.1 ilustra la Tabla 5.5.

5.3.2. Instancia 2007

En la Figura 5.3.2, referente a las empresas del sector financiero de NASDAQ, se evidencia una vez más la marcada tendencia a la baja que existe en las cotizaciones de las empresas norteamericanas a finales del año 2007, con pequeñas excepciones.

Los resultados obtenidos con los seis modelos implementados para esta instancia se encuentran en la Tabla 5.6.

Cuadro 5.6: Valor neto del portafolio formado por 12 de las más grandes empresas del sector financiero que cotizaron en NASDAQ durante el último trimestre del año 2007

	KNN M	TEO	KNN	MKTZ	ESTCO	CAI
28/12/2007	91193,02	90060,25	91600,67	90567,81	86796,51	83861,46
27/12/2007	91814,37	91001,58	92371,66	91399,04	87268,33	84532,81
26/12/2007	93818,30	93816,34	94664,31	93730,36	89297,26	86817,11

24/12/2007	93855,94	93513,45	94571,17	93640,39	88835,96	86500,83
21/12/2007	93489,28	92836,20	94064,32	92974,91	88559,30	86038,31
20/12/2007	91624,83	90890,88	92384,76	91219,85	86903,74	84305,06
19/12/2007	91019,18	90467,25	91337,24	90178,28	85876,17	83479,98
18/12/2007	91247,89	90162,05	91358,51	90082,87	86439,44	83811,61
17/12/2007	91037,28	88625,73	90749,38	89403,40	86929,98	83667,08
14/12/2007	91191,41	89484,74	90640,65	89472,14	85694,61	83439,12
13/12/2007	92794,81	91552,47	92242,42	91227,14	86916,43	84808,88
12/12/2007	92655,43	90923,09	91615,20	90517,62	86544,52	84551,61
11/12/2007	93754,91	91913,32	91700,24	90654,97	86332,39	84553,28
10/12/2007	97234,74	95519,02	95073,07	94138,61	90019,55	88332,53
07/12/2007	95467,79	94220,24	93973,59	93000,57	88803,86	86996,36
06/12/2007	96318,91	94546,88	94877,94	93983,95	89737,21	87651,17
05/12/2007	94727,62	93204,42	93189,64	92154,06	88515,25	86184,76
04/12/2007	93189,46	92093,39	92145,23	91210,21	87581,83	85145,16
03/12/2007	93828,60	92495,67	92241,62	91266,57	86879,46	84992,97
30/11/2007	94071,93	93241,59	91993,57	91008,40	86356,15	84898,36
29/11/2007	92434,19	92354,72	90921,39	89990,20	85619,74	83931,70
28/11/2007	93136,00	93181,54	91849,41	91006,81	86112,96	84481,89
27/11/2007	89744,27	89796,04	88613,02	87553,99	83568,19	81742,32
26/11/2007	88162,59	88032,21	87676,65	86587,36	82257,08	80381,21
23/11/2007	90755,52	91690,05	89942,38	88930,06	84733,02	83430,83
21/11/2007	88946,16	89386,02	88188,80	87049,23	83053,06	81306,54
20/11/2007	89527,54	89775,97	88190,98	86972,33	83521,68	81878,07
19/11/2007	90302,99	89749,45	88912,73	87688,36	84432,71	82623,40
16/11/2007	92321,57	91812,04	90629,91	89449,42	85961,79	84573,88
15/11/2007	92434,21	91993,52	90803,50	89677,89	86508,52	85005,34
14/11/2007	94094,22	93909,87	91703,17	90665,97	86995,91	85889,67
13/11/2007	95869,14	94777,20	93618,47	92531,55	89327,31	87789,64
12/11/2007	93080,85	91707,96	91866,68	90619,34	88022,82	85647,41
09/11/2007	93014,41	91057,67	91869,13	90576,66	87950,16	85381,56
08/11/2007	92191,78	90410,48	91488,18	90280,70	87613,86	84857,05
07/11/2007	91161,45	89293,82	90198,15	88816,46	86549,69	84159,29
06/11/2007	93754,96	93002,10	91940,30	90894,06	87971,34	86403,76
05/11/2007	92787,62	90446,76	91728,18	90694,64	87190,28	85300,34
02/11/2007	90430,33	89514,30	89156,03	88909,62	89377,73	86026,63

01/11/2007	91603,00	90494,26	90363,79	90193,28	90563,85	87108,38
31/10/2007	95176,87	95202,43	93305,80	93181,06	92870,51	90184,11
30/10/2007	94141,18	94474,14	92206,41	92112,68	91144,97	88901,57
29/10/2007	93968,87	94454,92	91955,15	91859,74	90826,85	88489,90
26/10/2007	94539,86	94293,73	92435,78	92240,91	90668,75	88777,09
25/10/2007	93259,44	92147,09	91771,68	91565,43	90383,58	88256,99
24/10/2007	94768,91	93065,86	93517,84	93139,17	93129,63	90899,61
23/10/2007	97805,29	95373,94	97739,03	97194,55	98588,94	96511,11
22/10/2007	97318,14	94950,46	96985,71	96375,40	98503,30	96243,55
19/10/2007	96438,88	94411,27	96248,86	95643,39	97661,11	95523,39
18/10/2007	98920,70	97694,07	98820,22	98362,17	99928,43	98160,76
17/10/2007	99717,97	98502,49	99447,17	99017,98	100271,90	98560,97
16/10/2007	100232,79	98544,73	100045,83	99636,92	100893,93	99138,89
15/10/2007	101968,56	100462,26	101583,31	101307,93	101577,72	100259,85
12/10/2007	102432,59	101842,71	101915,91	101723,90	101910,75	101113,22
11/10/2007	102049,50	101778,93	101369,24	101388,34	100943,35	100532,08
10/10/2007	102248,35	102671,25	101956,15	102086,67	101484,57	101445,74
09/10/2007	102776,33	103155,25	102437,63	102595,72	102010,12	102038,73
08/10/2007	102488,49	103345,02	102195,37	102365,06	101885,69	102100,45
05/10/2007	102906,13	103399,48	102498,90	102648,45	101833,88	102175,38
04/10/2007	102007,06	102757,13	101314,09	101497,24	100641,03	101064,66
03/10/2007	101598,64	101999,54	101084,45	101220,31	100552,82	101040,52
02/10/2007	102344,70	102687,71	102538,89	102639,38	102099,76	102213,70
01/10/2007	101401,78	101552,56	101820,89	101880,70	101606,93	101521,71
PROM	94930,15	94154,31	94089,69	93374,64	91095,84	89327,64

La evolución del portafolio al cuál refiere la Tabla 5.6 se refleja en la figura 5.3.2.

Figura 5.8: Valor neto del portafolio NASDAQ-TEC, Oct-Dic 2007

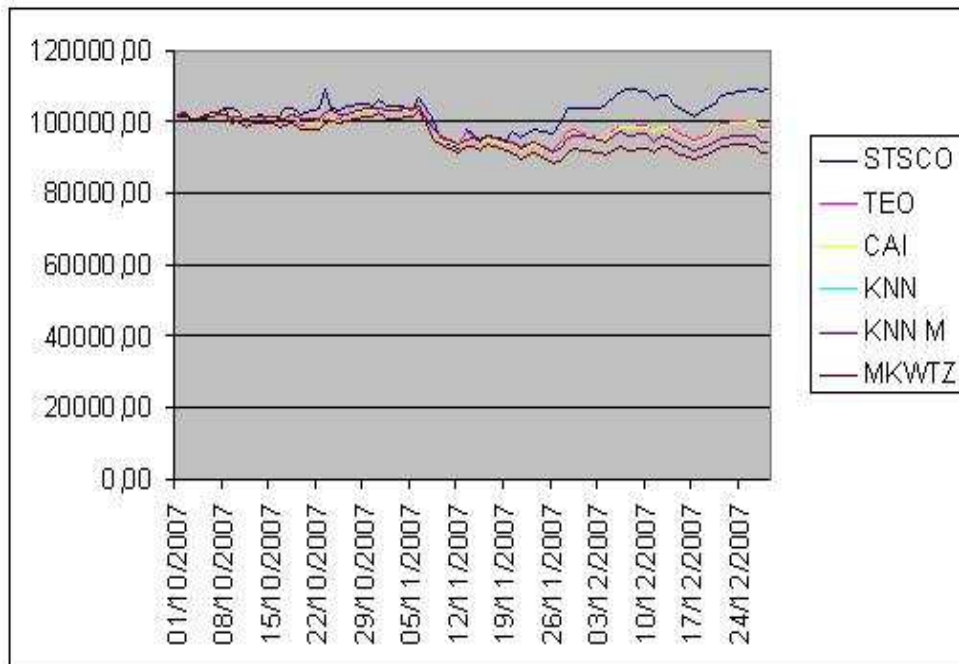


Figura 5.9: Cotizaciones NASDAQ-FIN Sep-Dic 2006

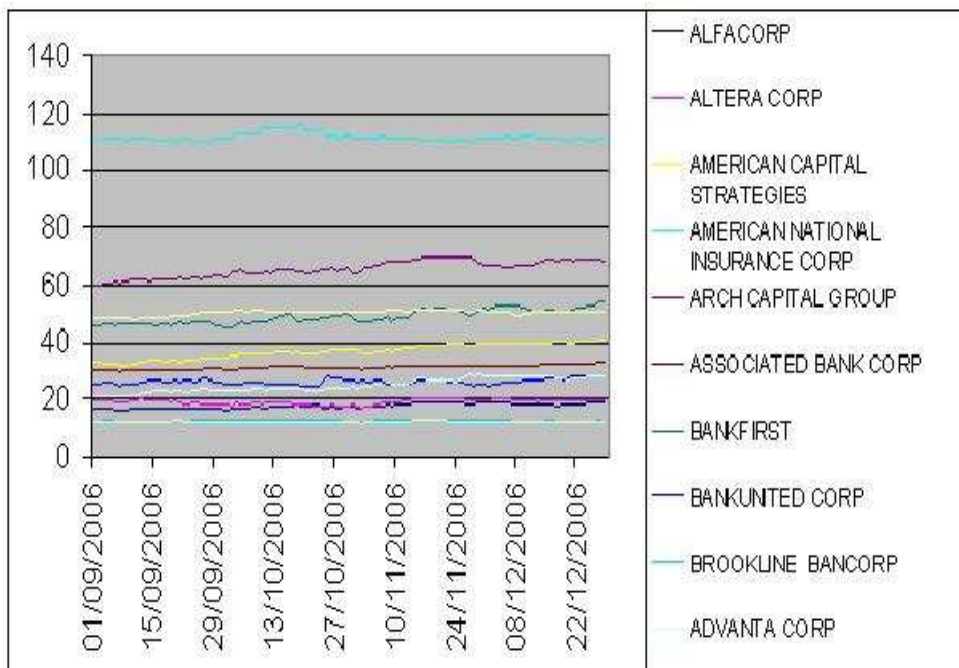


Figura 5.10: Valor neto del portafolio NASDAQ-FIN, Oct-Dic 2006

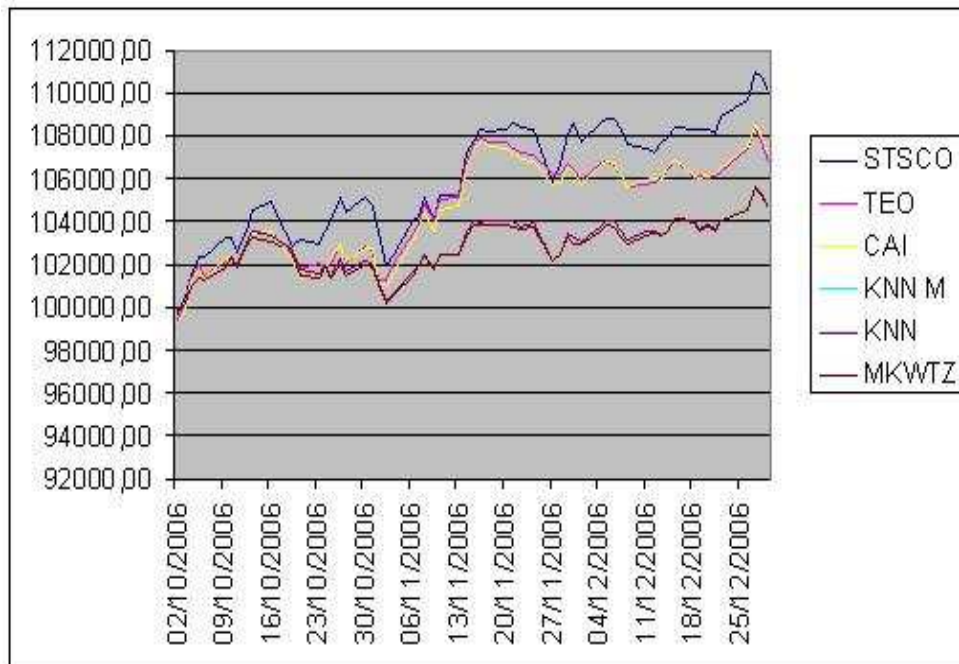
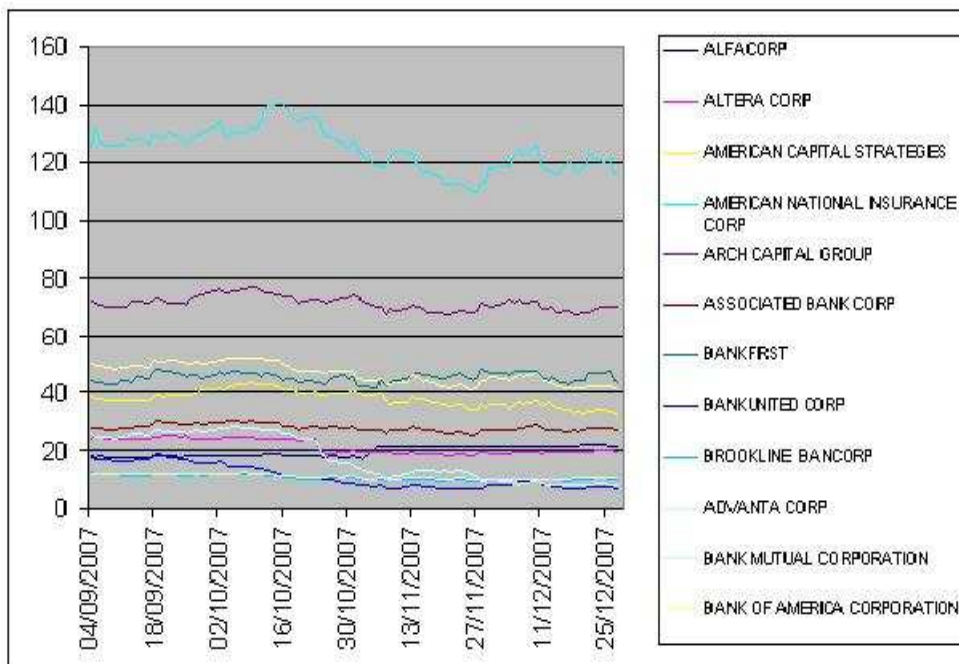


Figura 5.11: Cotizaciones NASDAQ-FIN Sep-Dic 2007



Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Resumen

6.1.1. Selección de modelos a estudiar

En primera instancia se llevó a cabo una investigación exhaustiva de los modelos existentes en la literatura especializada para seleccionar portafolios óptimos de un conjunto de acciones.

Una vez recopilada toda la información, se seleccionaron aquellos modelos que se consideraron de mayor importancia, bien sea por su valor histórico debido a los avances que representaron dentro de este campo de estudio, o porque son los más utilizados hoy en día.

Finalmente, en esta fase, se propuso un modelo alternativo que surgió como una modificación a uno de los modelos lineales que revolucionó la optimización de portafolios hace aproximadamente una década, el modelo de Konno y Yamazaki.

6.1.2. Implementación

Ya seleccionados los modelos que serían objeto de nuestro estudio, se consideraron aspectos concernientes a la implementación de cada uno de ellos. De entre varias alternativas, se decidió emplear el entorno de programación Matlab. Usando los solvers descritos ya en el capítulo respectivo, seis modelos fueron implementados: Markowitz, Konno, Cai, Teo, Estocástico y el modelo modificado de Konno.

Una vez implementados, se realizaron numerosas pruebas para comprobar la estabilidad de los algoritmos, depurar errores, y verificar la consistencia en los resultados que se obtuvieron.

6.1.3. Selección de instancias

Se inició posteriormente la fase de recopilación de la información que permitiría estructurar las instancias con las que se realizarían las pruebas computacionales. Como se mencionó anteriormente, el objetivo inicial de la investigación era aplicar este estudio comparativo a empresas que forman parte de la Bolsa de Valores de Quito. Sin embargo, las condiciones no fueron las ideales para cumplir con

este objetivo, razón por la cual se decidió trabajar con empresas que cotizan en la Bolsa de Nueva York (NYSE) y que forman parte del índice promedio Dow Jones industrial (DJIA), y con empresas del sector tecnológico y financieras que cotizan sus acciones en NASDAQ.

6.1.4. Pruebas computacionales

Se decidió dividir las tres instancias iniciales, las cotizaciones entre enero de 2005 y diciembre de 2007 de las acciones del DJIA, del sector financiero de NASDAQ y del sector tecnológico de NASDAQ, en seis instancias de acuerdo con el siguiente criterio: al analizar los gráficos de las cotizaciones de las acciones de la gran mayoría de las empresas seleccionadas, se observó que en el último trimestre del año 2007 la tendencia generalizada era a la baja, debido entre otros factores, a la inestabilidad y la recesión que atraviesa la economía norteamericana, mercado al cuál pertenecen las bolsas de valores escogidas. Se pudo además observar que en el último trimestre del año 2006, la tendencia generalizada de las cotizaciones era la inversa, se podía ver un claro crecimiento en ellas. En consecuencia, se decidió trabajar los dos años por separado. Las seis instancias obtenidas fueron:

1. Cotizaciones de las empresas del DJIA entre enero de 2005 y diciembre de 2006.
2. Cotizaciones de doce de las más grandes empresas del sector financiero que negocian sus valores en NASDAQ entre enero de 2005 y diciembre de 2006.
3. Cotizaciones de catorces de las más grandes empresas del sector tecnológico que negocian sus valores en NASDAQ entre enero de 2005 y diciembre de 2006.
4. Cotizaciones de las empresas del DJIA entre enero de 2006 y diciembre de 2007.
5. Cotizaciones de doce de las más grandes empresas del sector financiero que negocian sus valores en NASDAQ entre enero de 2006 y diciembre de 2007.
6. Cotizaciones de catorce de las más grandes empresas del sector tecnológico que negocian sus valores en NASDAQ entre enero de 2006 y diciembre de 2007.

Las pruebas consistieron en formar portafolios de inversión a finales del mes de septiembre del segundo año (2006 o 2007, según sea el caso) con cada uno de los modelos implementados. Posteriormente, se aplicó una estrategia en-línea para reestructurar la cartera de inversiones diariamente durante el último trimestre del período de análisis correspondiente en base a los cambios en los precios de las acciones y tomando en cuenta los costos que dicha reestructuración diaria del portafolio generarían.

Para evaluar la calidad de las soluciones obtenidas con cada modelo, se calculó el promedio del valor neto del portafolio durante todo el trimestre.

Es evidente que el principal interés de un inversionista al momento de estructurar su cartera de inversiones es lograr la mayor rentabilidad (rendimiento) con el menor riesgo posible, objetivos aparentemente contrapuestos. Este es el motivo por el cual las conclusiones y recomendaciones de esta investigación van orientadas en ese sentido, análisis de rendimiento y riesgo del portafolio estructurado en cada instancia con cada uno de los modelos.

La Tabla 6.1 resume los resultados principales obtenidos en cada instancia con cada uno de los modelos implementados:

- En cada instancia, los modelos están ordenados descendientemente de izquierda a derecha de acuerdo al rendimiento promedio obtenido con cada uno de ellos.
- PROM es el valor neto promedio en el período de análisis en línea.
- D.E. es la desviación estándar de los valores netos del período.
- MAX es el valor neto máximo obtenido.
- MIN es el valor neto mínimo.
- RANG es la diferencia entre el valor neto máximo y mínimo en el período.
- CAI, TEO, MKWTZ, KNN, KNN M y STSCO se leen como en el capítulo de resultados.

Cuadro 6.1: Resumen de estadísticos principales

DOWJONES 2006						
	TEO	CAI	MKWTZ	KNN M	KNN	STSCO
PROM	103644,0	103603,7	102750,2	102667,2	102667,2	102190,7
D.E.	1614,4	1446,0	1538,4	1571,4	1571,4	2372,3

MAX	106584,3	106051,4	105104,6	105061,6	105061,6	107498,9
MIN	99794,5	99822,7	99750,5	99736,6	99736,6	97617,3
RANG	6789,8	6228,8	5354,1	5324,9	5324,9	9881,6
DOWJONES 2007						
	KNN M	TEO	MKWTZ	STSCO	CAI	KNN
PROM	100130,7	98589,6	98113,3	97520,1	97332,3	97274,4
D.E.	1833,5	2099,8	1944,3	2865,8	2819,4	2351,4
MAX	103324,2	101788,3	100845,6	101433,2	102026,1	100938,8
MIN	95876,2	93336,7	93257,9	90272,0	91294,7	91777,5
RANG	7448,0	8451,6	7587,8	11161,2	10731,5	9161,2
NASDAQ-TEC 2006						
	MKWTZ	KNN M	STSCO	KNN	CAI	TEO
PROM	109594,3	109589,5	109483,9	109229,2	108826,8	107536,1
D.E.	3740,7	3834,8	3887,7	3649,7	3832,5	3344,9
MAX	114084,2	115035,6	115182,5	113688,3	113372,6	111969,5
MIN	100593,7	99770,9	100760,6	100559,3	100371,5	99559,0
RANG	13490,5	15264,6	14421,9	13129,0	13001,1	12410,5
NASDAQ-TEC 2007						
	STSCO	TEO	CAI	KNN	KNN M	MKWTZ
PROM	102776,9	98854,1	98667,7	98036,6	98036,6	95563,8
D.E.	4107,2	3116,4	3429,5	3922,5	3922,5	4502,9
MAX	109087,8	104390,9	104326,0	104621,5	104621,5	102844,0
MIN	92436,3	92006,4	91163,8	91344,9	91344,9	87865,4
RANG	16651,5	12384,4	13162,2	13276,6	13276,6	14978,5
NASDAQ-FIN 2006						
	STSCO	TEO	CAI	KNN M	KNN	MKWTZ
PROM	105928,5	104656,3	104538,4	102842,4	102842,4	102739,2
D.E.	2710,4	2338,6	2384,3	1241,6	1241,6	1236,3
MAX	110961,6	108375,2	108462,8	105676,3	105676,3	105635,6
MIN	99689,7	99379,7	99339,0	99902,1	99902,1	99911,8
RANG	11271,9	8995,4	9123,9	5774,2	5774,2	5723,8
NASDAQ-FIN 2007						
	KNN M	TEO	KNN	MKWTZ	STSCO	CAI
PROM	94930,2	94154,3	94089,7	93374,6	91095,8	89327,6
D.E.	4132,8	4398,4	4379,9	4762,5	6284,5	6898,3
MAX	102906,1	103399,5	102538,9	102648,4	102099,8	102213,7

MIN	88162,6	88032,2	87676,7	86587,4	82257,1	80381,2
RANG	14743,5	15367,3	14862,2	16061,1	19842,7	21832,5

La Tabla 6.2 muestra los modelos que mejor se ajustan a cada instancia, dentro de cada uno de los siguientes parámetros:

- PROM: Valor neto promedio más alto del portafolio.
- D.E.: Menor desviación estándar de los valores netos del portafolio.
- MAX: Máximo rendimiento sobre la inversión en el período.
- MIN(+): Valor más alto de entre los mínimos obtenidos con cada uno de los modelos.
- RANG: Menor rango de los valores netos obtenidos con cada uno de los modelos, obtenido como la diferencia entre el máximo y el mínimo respectivos.
- MIN(-): Valor más bajo de entre los mínimos obtenidos con cada uno de los modelos.

Los cinco primeros estadísticos analizados reflejan características de bondad en el comportamiento de los modelos, a diferencia de el último, que refleja características no deseables para un inversionista.

La codificación de las instancias es la siguiente:

- DJ06: Empresas del Dow Jones industrial durante el último trimestre de 2006.
- DJ07: Empresas del Dow Jones industrial durante el último trimestre de 2007.
- NT06: Empresas del sector tecnológico en NASDAQ durante el último trimestre de 2006.
- NT07: Empresas del sector tecnológico en NASDAQ durante el último trimestre de 2007.
- NF06: Empresas del sector financiero en NASDAQ durante el último trimestre de 2006.
- NF07: Empresas del sector financiero en NASDAQ durante el último trimestre de 2007.

Cuadro 6.2: Modelos con mejor comportamiento en cada instancia

	DJ06	DJ07	NT06	NT07	NF06	NF07
PROM	TEO	KNN M	MKWTZ	STSCO	STSCO	KNN M
D.E.	CAI	KNN M	TEO	TEO	MKWTZ	KNN M
MAX	STSCO	KNN M	STSCO	STSCO	STSCO	TEO
MIN(+)	CAI	KNN M	STSCO	STSCO	MKWTZ	KNN M
RANG	KNN M	KNN M	TEO	TEO	MKWTZ	KNN M
<i>MIN(-)</i>	<i>STSCO</i>	<i>STSCO</i>	<i>TEO</i>	<i>MKWTZ</i>	<i>CAI</i>	<i>CAI</i>

6.2. Conclusiones

- En las instancias que pertenecen al último trimestre del año 2006, cuyo denominador común es la tendencia creciente en los precios de las acciones, se tienen resultados bastante heterogéneos y muy poco concluyentes respecto a la superioridad de las soluciones obtenidas con uno u otro modelo. Esto contrasta con las instancias que pertenecen al último trimestre del año 2007, en las cuales la tendencia de los precios es decreciente, y en todos los casos el modelo de Konno modificado produce soluciones claramente superiores a las soluciones obtenidas con los demás modelos.
- El análisis de las empresas que forman parte del índice Dow Jones refleja que, bajo tendencias crecientes de los precios de las acciones de dichas empresas (último trimestre del año 2006), el modelo que produce el mejor rendimiento es el modelo de Teo, siendo ésta la única instancia en la cual dicho modelo tiene el mejor comportamiento en cuanto al rendimiento. Respecto a los otros parámetros, no existe un patrón de comportamiento uniforme que permita emitir juicios de valor consistentes.
- En la segunda instancia de las empresas del Dow Jones industrial, cuando las tendencias de las cotizaciones de las acciones participantes en este índice están a la baja, el modelo con el que se obtuvieron los mejores resultados fue el modelo de Konno modificado (KNN M), propuesto por el autor de esta investigación. Este modelo no solamente tiene el mejor rendimiento promedio, sino que tiene las menores medidas de dispersión; desviación estándar y rango. Además, con este modelo se obtuvieron los valores máximos de los rendimientos promedio y también los valores más altos de entre los míni-

mos obtenidos con todos los modelos. Este es el único modelo que obtiene, al menos para una instancia de prueba, los mejores resultados respecto a todos los indicadores analizados.

- Otra instancia donde el modelo de Konno modificado obtiene resultados particularmente buenos es la que considera las empresas del sector financiero en NASDAQ en el último trimestre del año 2007. Con excepción de MAX, donde el modelo ocupa el segundo lugar detrás del modelo de Teo, KNN M consigue nuevamente los mejores valores para cada indicador.
- El modelo que utiliza restricciones de dominación estocástica (STSCO) arroja los mejores rendimientos promedio del portafolio en dos instancias; NASDAQ-TEC 2007 Y NASDAQ-FIN 2006. Sin embargo, en ninguna de las dos instancias mencionadas se obtienen buenos resultados para los estadísticos de dispersión D.E. y RANG. Por el contrario, estos valores están entre los más altos, en comparación con los valores obtenidos con los otros modelos. Este hecho nos permite concluir que si bien se obtienen rendimientos bastante altos en determinados puntos del período, también en algunos puntos se obtienen rendimientos bastante bajos.
- Esta investigación permite reafirmar el hecho que ya muchos investigadores habían notado en los últimos años, y es que si bien el modelo original cuadrático de Markowitz revolucionó el mundo de las finanzas hace ya casi medio siglo, y sentó las bases teóricas para el desarrollo de la optimización de portafolios, en la actualidad ha perdido terreno en cuanto a su aplicabilidad. En casi ninguna de las instancias probadas, el modelo obtuvo resultados comparativamente buenos.
- El único modelo para el cuál el tiempo de cómputo representa un aspecto a considerar es el modelo de Teo, En una corrida en línea (aproximadamente 63 iteraciones) se demoró 693 minutos, debido a que el número de restricciones crece de acuerdo al producto del número de activos participantes por el número de filas de la matriz de datos (número de días considerados en los datos históricos). En todos los demás modelos, el tiempo de cómputo para cada instancia es inferior está entre uno y dos minutos.

6.3. Recomendaciones

- Resultaría bastante interesante comparar los resultados de los modelos propuestos en esta investigación con los portafolios estructurados sobre la base de información “perfecta”, es decir, suponiendo que se conocen de antemano las cotizaciones reales de las acciones. Esto permitiría establecer un nuevo parámetro de medición de calidad de los modelos.
- Existen muchos otros modelos en la literatura especializada con los que se podría realizar un estudio comparativo similar al de este trabajo con el objeto de determinar conclusiones más generales respecto a la calidad de las soluciones de los modelos en diversas circunstancias y diversos mercados de valores.
- Poder ampliar esta investigación al mercado de valores ecuatoriano sería de suma importancia, hecho que por las razones expuestas anteriormente no se pudo dar en este trabajo, pero que no impide que se lo pueda realizar en el futuro con información mejor estructurada en nuestras bolsas de valores.
- Sería de mucha importancia también ampliar las instancias de prueba a otras con circunstancias distintas de mercado, o a un mayor número de instancias similares a las tratadas en esta investigación, con el objeto de obtener resultados mucho más concluyentes.
- Es también recomendable realizar un análisis de datos multivariante para determinar si existen modelos cuyo comportamiento sea particularmente bueno o malo bajo la presencia de ciertos factores como: coyuntura (tendencia a la alza o a la baja), afinidad o diversidad de sectores económicos a los que pertenecen las empresas, correlación histórica entre precios de las acciones, etc.

Apéndice A

Código fuente de los modelos implementados en Matlab

A.1. Modelo de Markowitz

Código 1.

```
(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)./q(i,:));
end
Matriz de retornos
r;
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
Matriz de medias
U=kron(U1,ones(M,1));
Matriz de varianzas_covarianzas
S=2*(1/(n-1))*(r-U)'*(r-U);
f=zeros(1,n);
I=eye(n);
A=[-U1];
k=vmax*(ones(n,1));
b=[-renmin];
Aeq=ones(1,n);
beq=1;
XO=(1/n)*ones(1,n);
Solver cuadrático
X=quadprog(S,f,A,b,Aeq,beq,zeros(1,n),vmax*ones(1,n),XO);
T=Cap*X
```

A.2. Modelo original de Konno

Código 2.

```

(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
Matriz de retornos
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)./q(i,:));
end
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
Matriz de medias
U=kron(U1,ones(M,1));
S=r-U;
f=(1/M)*[zeros(1,n) ones(1,M)];
I=eye(M);
A=[-U1 zeros(1,M); S -I; -S -I];
b=[-Cap*renmin zeros(1,M) zeros(1,M)];
Aeq=[ones(1,n) zeros(1,M)];
beq=Cap;
infty=inf;
LB=[zeros(1,n) -infty*ones(1,M)];
UB=[Cap*vmax*ones(1,n) infty*ones(1,M)];
Solver lineal
z=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
x=ones(n,1);
for i=1:n
x(i)=z(i);
end
x

```

A.3. Modelo de Cai

Código 3.

```

(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
Matriz de retornos
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)./q(i,:));
end
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
Matriz de medias
U=kron(U1,ones(M,1));
S=r-U;
f=[zeros(1,n) 1];
A=[-U1 0; diag((1/M)*S'*ones(M,1)) -ones(n,1); -diag((1/M)*S'*ones(M,1)) -ones(n,1)];
b=[-Cap*renmin zeros(1,n) zeros(1,n)];
Aeq=[ones(1,n) 0];
beq=Cap;
infty=inf;
LB=[zeros(1,n) -infty];
UB=[Cap*vmax*ones(1,n) infty];
Solver
z=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
x=ones(n,1);
for i=1:n
x(i)=z(i);
end
y=x

```

A.4. Modelo de Teo

Código 4.

```

(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
Matriz de retornos
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)./q(i,:));
end
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
rprom=mean(U1);
rprommatriz=rprom*ones(M,n);
Matriz de medias
U=kron(U1,ones(M,1));
S=zeros((n*M),n);
I=zeros((n*M),M);
for j=1:M
S((n*(j-1)+1):n*j,:)=diag(r(j,:)-rprom*ones(1,n));
I((n*(j-1)+1):n*j,j)=1;
end
f=(1/M)*[zeros(1,n) ones(1,M)];
A=[-U1 zeros(1,M); S -I; -S -I];
b=[-Cap*renmin zeros(1,(M*n)) zeros(1,(M*n))];
Aeq=[ones(1,n) zeros(1,M)];
beq=Cap;
infty=inf;
LB=[zeros(1,n) -infty*ones(1,M)];
UB=[Cap*vmax*ones(1,n) infty*ones(1,M)];
Solver:
z=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
x=ones(n,1);
for i=1:n
x(i)=z(i);

```

```
end
w=x
```

A.5. Modelo con restricciones de dominación estocástica

Código 5.

```
(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
Matriz de retornos
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)/q(i,:));
end
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
DE=std(r);
R=zeros(5,n);
R(1,:)=U1-1.645*DE;
R(2,:)=U1-0.8225*DE;
R(3,:)=U1;
R(4,:)=U1+0.8225*DE;
R(5,:)=U1+1.645*DE;
Matriz de medias
U=zeros(30,n);
for j=1:5
U((6*(j-1)+1):6*j,:)=kron(R(j,:),ones(6,1));
end
y=[0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3];
pr=[0.1 0.2 0.4 0.2 0.1];
Fy=[0.1 0.3 0.5 0.7 0.9 1];
A=[-U -eye(30); zeros(6,n) pr(1)*eye(6) pr(2)*eye(6) pr(3)*eye(6) pr(4)*eye(6)
pr(5)*eye(6)];
Aeq=[ones(1,n) zeros(1,30)];
```

```

f=[-U1 zeros(1,30)];
beq=1;
yprob=[0.1 0.4 0.9 1.6 2.5 3.5];
b=[-y -y -y -y -y yprob];
infty=inf;
LB=zeros(1,n+30);
UB=[vmax*ones(1,n) infty*ones(1,30)];
Solver:
o=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
l=ones(n,1);
for i=1:n
l(i)=o(i);
end
X=Cap*l

```

A.6. Modelo modificado de Konno

Código 6.

```

(m,n)=size(D);
for i=1:m
q(i,:)=D(m+1-i,:);
end
r=zeros(m-h+1,n);
Matriz de retornos
for i=1:(m-h+1)
r(i,:)=log(q(i+h-1,:)./q(i,:));
end
(M,N)=size(r);
Vector de medias
U1=mean(r);
Matriz de medias
U=kron(U1,ones(M,1));
S=r-U;
f=[-ones(1,n) 0.65*(1/M)*ones(1,M)];
I=eye(M);
A=[S -I; -S -I];

```

```
b=[zeros(1,M) zeros(1,M)];  
Aeq=[ones(1,n) zeros(1,M)];  
beq=Cap;  
infty=inf;  
LB=[zeros(1,n) -infty*ones(1,M)];  
UB=[Cap*vmax*ones(1,n) infty*ones(1,M)];  
Solver lineal  
z=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);  
res=ones(n,1);  
for i=1:n  
  res(i)=z(i);  
end  
res
```


- [1] J.F. Bonnans and A. Saphiro. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] J. Restrepo y J. Velásquez C. Martínez. Selección de portafolios usando simulación y optimización bajo incertidumbre. Technical report, 2003.
- [3] X.Q. Cai, K.L. Teo, X.Q. Yang, and X.Y. Zhou. Portfolio optimization under a minimax rule. *Management Science*, 46:957–972, 2000.
- [4] Darinka Dentcheva and Andrzej Ruszczyński. Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. Technical report, 2003.
- [5] Ch. A. Floudas. *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and applications*. Oxford University Press, 1995.
- [6] F. Glover. Tabu search part i. *ORSA Journal on Computing*, 1(3):190–206, 1989.
- [7] F. Glover. *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.
- [8] J. Gondzio and A. Grothey. Solving nonlinear portfolio optimization problems with the primal-dual interior point method. Technical report, The University of Edinburgh, United Kingdom, 2004. Disponible en línea: <http://www.maths.ed.ac.uk/preprints>.
- [9] J. Hadar and W. Russell. Rules for ordering uncertain prospects. *American Economic Review*, (59):25–34, 1969.
- [10] G. Hanoch and H. Levy. The efficiency analysis of choices involving risk. *Review of Economic Studies*, (36):335–346, 1969.
- [11] S. Iglesias. La determinación de carteras óptimas: una revisión del modelo de markowitz. *Ponencias- AEDEM*, pages 1163–1173, 1998.
- [12] R.J. Vanderbei J. M. Mulvey and S.A. Zenios. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43(2):264–281, 1995.
- [13] José V. Segura y Enriqueta Vercher Jose D. Bermúdez. Selección de carteras utilizando funciones borrosas de riesgo lateral. Technical report, Universidad de Valencia y Universidad Miguel Hernández de Elche, 2006.
- [14] A.J. King. Modeling risk measures for portfolio optimization. *Operations Research*, (8):179–188, 1995.

- [15] H. Konno. Portfolio optimization using l1 risk function. *IHSS*, 88(9), 1988.
- [16] H. Konno and H. Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to tokyo stock market. *Management Science*, 37:519–531, 1991.
- [17] H. Levy. Stochastic dominance and expected utility: survey and analisis. *Management Science*, 38:555–593, 1992.
- [18] Harry Markowitz. Portfolio selection. *Finance*, 7:77–91, 1952.
- [19] Harry Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. John Wiley & Sons, London, 1959.
- [20] Peter J. Meindl. *Portfolio optimization and dynamic hedging with receding horizon control, stochastic programming, and Monte Carlo simulation*. Ph.D. thesis, Stanford University, 2006.
- [21] R.O. Michaud. The markowitz optimization enigma: Is “optimized” optimal? *Analyst Journal*, (45):31–42, 1989.
- [22] Paul Newbold. *Estadística para los negocios y la economía*. Prentice-Hall, New York, fourth edition, 1997.
- [23] O. Ogryczak and A. Ruszczyński. From stochastic dominance mean-risk model: semi deviation as risk measure. *Operational Research*, 116:33–50, 1999.
- [24] R.G. Parker and R.L. Rardin. *Discrete Optimization*. Academic Press, 1988.
- [25] R.T. Rockafellar. Convex analysis. Technical report, Princeton University, Princeton, NJ, 1970.
- [26] M. Rothschild and J. E. Stiglitz. Increasing risk: I. a definition. *Economic Theory*, (2):225–243, 1969.
- [27] A. Roy. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20:431–449, 1952.
- [28] A. Saphiro. Hitchhiker’s guide to the techniques of adaptive nonlinear models. Technical report, 1999. Disponible en línea:
<http://www.elsevier.nl/locate/econbase>.
- [29] Mark Schroder and Costis Skiadas. Optimal consumption and portfolio selection with stochastic differential utility. Technical report, Michigan State University and Northwestern University, 1999.

- [30] W.F. Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, IX(2):277–293, 1963.
- [31] W.F. Sharpe. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, XIX(3):425–442, 1964.
- [32] W.F. Sharpe. Mutual fund performance. *Journal of Business*, (39):119–138, 1966.
- [33] W.F. Sharpe, G.L. Alexander, and J.V. Baily. *Investments*. Prentice-Hall, London, sixth edition, 1999.
- [34] A. Cuevas y G. Buenaventura. Una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión. *Estudios Gerenciales Abril-Junio*, (095):13–36, 2005.
- [35] A. Mendizábal y U. Tamayo. Gestión de carteras de renta variable: Importancia de los índices bursátiles. Technical report, AEDEM, 2000.
- [36] Canós y Ventura. El problema de selección de cartera. Technical report, 2006.