



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS

**EL CONCEPTO DEL RIESGO DE VALOR Y SU
CUANTIFICACIÓN MEDIANTE LA ESTRUCTURA
ESTOCÁSTICA DE LA FORMACIÓN DE CAPITAL**

TESIS DE GRADO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MAGISTER
EN ESTADÍSTICA APLICADA

ANDRÉS ALEJANDRO GALVIS CORREA
andres.galvis@udla.edu.ec

DIRECTOR:
MAT. EDWIN GALINDO DE LA TORRE. MSC.
emgd70@hotmail.com

CODIRECTOR:
MAT. LUIS JAIME ANDRADE GONZÁLEZ. MSC.
jaime.andrade@epn.edu.ec

Marzo, 2015

DECLARACIÓN

Yo, Andrés Alejandro Galvis Correa, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias que se incluyen en este documento.

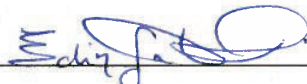
La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.



Andrés Alejandro Galvis Correa

CERTIFICACIÓN

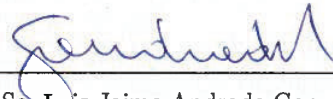
Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Andrés Alejandro Galvis Correa,
bajo mi supervisión.



M.Sc. Edwin Galindo De la Torre
DIRECTOR

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Andrés Alejandro Galvis Correa, bajo mi supervisión.



M.Sc. Luis Jaime Andrade González
CODIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

*Agradezco especialmente a
Juan Carlos Garcia y Carlos Valladares
por sus valiosos comentarios
y por el tiempo que me brindaron para la elaboración de la investigación.*

*A Edwin Galindo
por la oportunidad de escribir sobre un tema poco ortodoxo para el país.*

*A Gabriel Rivadeneira y Ana Aldas
que siempre estaban prestos a escuchar mis incoherencias
y a Cochrane, Fama, Hansen y Shiller
por su teoría de precios de activos.*

DEDICATORIA

*A la familia Galvis Correa:
Chito, Tino, Rigo, Pajaro, Gamina, Pollito, Niña y Luna...
Este trabajo es fruto de la paciencia y
la inspiración que me brindaron.*

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	III
Índice general	V
Índice de figuras	VIII
Índice de cuadros	XI
Resumen	XIII
Abstract	XV
1. Introducción	1
2. Marco teórico	3
2.1. Economía Financiera y la Teoría del Valor	3
2.1.1. Antecedentes y definición	3
2.1.2. La inversión y la financiación corporativa	5
2.1.3. El flujo de caja libre y la rentabilidad corporativa	9
2.1.4. Presupuesto de Capital	13
2.1.5. Consideraciones básicas en el Capital Budgeting	16
2.1.6. Teoría del precio de los activos-Asset pricing theory	16
2.1.7. Modelo de consumo - Consumption-based model	17
2.1.8. Supuestos y aplicabilidad de la BPA	22

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
2.2. Valoración de empresas	23
2.2.1. Aspectos generales	23
2.2.2. Ecuación de valor corporativo-BVE	24
2.2.3. Especialización de la ecuación de valor corporativo-BVE	26
2.2.4. Variantes de la BVE	31
2.2.5. Equivalencia del valor corporativo	34
2.2.6. La ecuación de valor corporativo general-BVEg	35
2.3. Esperanza condicional y estimación de parámetros	38
2.3.1. Esperanza condicional y procesos estocásticos	38
2.3.2. Estimación del Cash Flow CF	42
2.3.3. La función de utilidad y aversión al riesgo del administrador financiero	54
2.3.4. Estimación de la opción real O	66
2.4. Una medida coherente de riesgo corporativo	72
2.4.1. La distribución de probabilidad del valor corporativo	72
2.4.2. Una medida coherente del riesgo corporativo	75
2.4.3. Medidas de riesgo en la práctica	76
2.4.4. El Riesgo de valor- $RiskV$	77
3. Metodología	81
3.1. Problema	81
3.2. Estimación del componente permanente	82
3.2.1. Estimación del Free Cash Flow	82
3.2.2. Estimación del factor de descuento estocástico	83
3.3. Estimación del componente flexible	84
4. Resultados	88
5. Conclusiones y recomendaciones	92
Bibliografía	95
Anexos	99

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
A. Valor Esperado de la Razón de Variables Aleatorias	100
B. Función de utilidad para un decisor bajo riesgo	102
C. Registros del Free Cash Flow	104
D. Estimación Free Cash Flow	105
D.1. Representación gráfica	105
D.2. Análisis descriptivo	106
D.3. Análisis descriptivo de rezagos	110
D.4. Pruebas de raíz unitaria	114
D.4.1. Prueba de Dickey-Fuller Aumentada	114
D.4.2. Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin	114
D.5. Identificación del modelo	117
D.6. Estimación y validación del modelo	119
E. Resultados de la Simulación	131

Índice de figuras

2.1. Problema fundamental del presupuesto de capital	15
2.2. Árbol binomial del CF	44
3.1. Evolución del valor del proyecto	85
3.2. Valor del taller metalmecánico	86
3.3. Valor de la opción del taller metalmecánico	87
4.1. Pronostico del FCF al 2020	89
4.2. Distribución del valor corporativo del componente permanente	91
4.3. Distribución del valor corporativo general	91
D.1. Free Cash Flow 2001-2011	105
D.2. Histograma del Free Cash Flow	107
D.3. Diagrama de Caja del Free Cash Flow	108
D.4. Kernel Density del Free Cash Flow	108
D.5. Densidad Teórica del Free Cash Flow	109
D.6. Q-Q teórico del Free Cash Flow	109
D.7. Distribución empírica del Free Cash Flow	110
D.8. Dispersión de FCF_t vs FCF_{t-1}	110
D.9. Representación Rango-Media	111
D.10. Modelo Lineal Rango-Media	111
D.11. Representación Media-Tiempo	111
D.12. Contraste Ljung-Box para el Free Cash Flow	112
D.13. ACF para el Free Cash Flow	113

D.14.PACF para el Free Cash Flow	113
D.15.Prueba ADF tipo III para el Free Cash	115
D.16.Prueba ADF tipo II para el Free Cash	115
D.17.Prueba ADF tipo I para el Free Cash	116
D.18.Prueba KPSS para el Free Cash	117
D.19.Función de Autocorrelación Extendida	118
D.20.Comparativo de procesos	118
D.21.ARMA(1,0) sin constante	119
D.22.ARMA(1,0) con constante	120
D.23.ARMA(1,2) sin constante	120
D.24.ARMA(1,2) con constante	120
D.25.Residuos ARMA(1,0)	121
D.26.Residuos, ajuste y FCF mediante ARMA(1,0)	121
D.27.ACF y PACF de la estructura ARMA(1,0)	122
D.28.Intervalo de confianza para ϕ_1 en ARMA(1,0)	122
D.29.ACF y PACF de los residuos ARMA(1,0)	123
D.30.Prueba de Normalidad Jarque-Bera ARMA(1,2)	123
D.31.Prueba de Correlación Serial ARMA(1,0)	124
D.32.Intervalos de Predicción ARMA(1,0)	124
D.33.Predicción vs Realidad del FCF ARMA(1,0)	125
D.34.Pronostico de largo plazo ARMA(1,0)	125
D.35.Residuos ARMA(1,2)	126
D.36.Residuos, ajuste y FCF mediante ARMA(1,2)	126
D.37.ACF y PACF de la estructura ARMA(1,2)	127
D.38.Intervalo de confianza para ϕ_1 en ARMA(1,2)	127
D.39.ACF y PACF de los residuos ARMA(1,2)	128
D.40.Prueba de Normalidad Jarque-Bera ARMA(1,2)	128
D.41.Prueba de Correlación Serial ARMA(1,2)	129
D.42.Intervalos de Predicción ARMA(1,2)	129
D.43.Predicción vs Realidad del FCF ARMA(1,2)	130

D.44. Pronóstico de largo plazo	130
E.1. Información de la Simulación	131
E.2. Estadísticos de la Simulación	131
E.3. Muestra de posibles trayectorias del FCF	132

Índice de cuadros

2.1. Opciones financieras vs reales	69
C.1. Free Cash Flow 2001-2011	104
D.1. Estadísticos del Free Cash Flow	107

RESUMEN

Podemos definir a la *Economía Financiera* como una rama de la economía dedicada al estudio en forma macro de las inversiones llevadas a cabo en un mercado, donde el dinero es utilizado como mecanismo de intercambio y el precio como término de ese intercambio. Sin embargo, a diferencia de la economía tradicional, la economía financiera admite el intercambio de dinero, lo cual exige considerar aspectos tales como el tiempo, la incertidumbre, las opciones y la información.

La valoración de activos es uno de los pilares fundamentales de la economía financiera, permitiéndoles a los agentes del mercado elaborar estimaciones insesgadas del precio y estructurar carteras de valores que maximizan la rentabilidad esperada del inversor. Si consideramos una empresa como un valor bursátil y su único dueño como un agente de mercado entonces el gerente tomaría la forma de un asesor financiero, lo cual implica que su gestión estará condicionada a maximizar la rentabilidad de la compañía y por supuesto, su responsabilidad en la cartera valores que está constituida por todas las alternativas de inversión disponibles para ella.

Debido a la ausencia de mercado, se propone un modelo basado en consumo para estimar el valor corporativo cuando la empresa posee un componente permanente y un componente flexible debido a las oportunidades estratégicas de las que dispone, la base conceptual del modelo se enfoca en la aplicación de las series de tiempo estacionarias para la estimación del free cash flow y de los axiomas de Von Neumann-Morgenstern para la cuantificación del factor de descuento estocástico de ambos componentes. Por último, se define el Riesgo de Valor-RiskV como una medida de riesgo corporativo la cual mide la potencial destrucción de valor corporativo a consecuencia de la variabilidad de su estructura operacional y financiera, y de las posiciones estratégicas de la compañía en el futuro.

ABSTRACT

We can define the *financial economics* as a branch of economics devoted to the study of the investments made in a market where money is used as a means of exchange and price as end of that exchange. However, unlike traditional economics, financial economics supports the exchange of money, on function of time, uncertainty, options and information.

The asset pricing is one of the fundamental pillars of the financial economics, allowing market players develop unbiased estimates of the price and will structure portfolios that maximize expected return of the investor. If we consider a company as a security then the manager would take the form of a financial advisor, which means that he will be conditioned to maximize the business profitability subject to all investment alternatives available for the company.

A consumption-based model is proposed to estimate corporate value when the company has a fixed component and a soft component due to the strategic opportunities available. The conceptual basis of the model focuses on the application of stationary time series to estimate the free cash flow and of the Von Neumann-Morgenstern axioms for quantifying the stochastic discount factor of both components. Finally, the risk-RiskV value is defined as a measure of corporate risk which measures the potential destruction on corporate value as a result of the variability of its operational and financial structure, and strategic positions in the company future.

Capítulo 1

Introducción

Un gran número de investigadores, docentes y ejecutivos dedicados a la valoración de empresas y al estudio profundo de las fuentes de valor, han elaborado una densa bibliografía de teorías, artículos, opiniones y métodos que facilitan la valoración de proyectos y de empresas no financieras en determinados contextos políticos, económicos y sociales. La búsqueda de mejores modelos y métodos de valoración han ocasionado que el estado del arte se encuentre sumergido en un problema de superficialidad, discrecionalidad, subjetividad y arbitrariedad de la valoración. La incorporación de las Normas Internacionales de Información Financiera - NIIF y el cambio del paradigma de la ecuación patrimonial, han influido en la forma de estudiar la información financiera, dejando de lado el estudio de las transacciones estáticas para dar paso a un estudio de movimiento continuo y caótico.

Lo más notable en las investigaciones llevadas a cabo en la última década, es la marcada discrepancia entre los mismos profesionales. No existe un consenso en la definición de valor, ocasionando la formulación de hipótesis o supuestos, que luego tienen que encajar bruscamente en modelos inadecuados para el medio en donde se desempeña el proyecto y/o empresa, la transición de los métodos contables, pasando por el devaluado método de flujo de caja descontado, para aterrizar en el llamativo método de opciones reales. Han perjudicado notablemente la credibilidad y la precisión de las valoraciones de activos en los mercados financieros internacionales.

Suponer que la hipótesis de los mercados eficientes es válida aun luego de las crisis financieras, los agentes de mercado son racionales cuando existe la especulación y el arbitraje, cuando se cree que la inferencia estadística bajo la normalidad es la solución a todos nuestros problemas de estimación, es cuando los métodos y modelos de valoración de activos de capital continuarán siendo blanco de críticas por parte de la comunidad académica.

La aplicación de las opciones reales y el flujo de caja descontado, estimando sus componentes mediante el CFaR (Cash flow at risk), EGOaR (Efectivo generado por la operación en riesgo), EaR (Earnings at risk), OCFaR (Operational cash flow at risk), EBITDaR (Ebitda en riesgo), EPSaR (Earnings per share at risk), FEaR (Financial expenses at risk), CaR (Cost at risk) y Balance en riesgo -BSTaR y utilizando herramientas econométricas como la regresión múltiple y las series de tiempo AR, ARMA, dependen de supuestos muy fuertes de normalidad y peor aun cuando no se distingue el concepto de correlación y causalidad. Además, el proceso estocástico browniano geométrico usado para valorar mediante la ecuación diferencial estocástica BSM necesita de la hipótesis de mercados eficientes, la cual depende a su vez de la linealidad y de inversores racionales, lo cual no es válido en Ecuador.

La formulación de modelos de riesgo privados y no bancarios, darán un impulso al análisis financiero moderno y permitirán una mejor estimación de parámetros de la compañía, cambiando la política de alcance de objetivos hacia una política en función de la capacidad productiva, involucrando factores de riesgo internos, externos, de liquidez, rentabilidad, endeudamiento y por supuesto de flexibilidad. La formulación de un modelo de riesgo no necesariamente gaussiano, autoorganizado, bajo hipótesis de mercado semifuertes, utilizando la microeconomía como plataforma conceptual del estudio empresarial y evaluando los diferentes escenarios inciertos mediante simulación, permitirán que los métodos de valoración tengan convergencia y brinden la información pertinente y a tiempo continuo, para que los inversores tomen las decisiones de inversión y financiación óptimas que tengan como fin generar valor y riqueza a los propietarios.

Una óptima gestión corporativa depende de la gran visión de la gerencia para prever las adversidades respecto a liquidez, rentabilidad y endeudamiento, pero esta visión debe estar acompañada de fundamentos cuantitativos que midan la exposición de la riqueza de los dueños y la gestión llevada a cabo por la gerencia a cambios en las transacciones diarias de la compañía.

La modificación del concepto de valor como una función del valor operacional y el valor de flexibilidad de un proyecto de inversión y financiación en tiempo discreto o continuo, además de obtener una medida de riesgo mediante el estudio de la distribución de probabilidad del valor de la compañía con el correspondiente estudio de los componentes del mismo; permitirá identificar, cuantificar y controlar los factores de riesgos, que con la estimación de su dinámica y el análisis de sensibilidad dará como resultado los intervalos de confianza de valor justo para la valoración de empresas.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Economía Financiera y la Teoría del Valor

2.1.1. Antecedentes y definición

Podemos definir a la Economía Financiera¹ como una rama de la economía dedicada al estudio en forma macro de las inversiones llevadas a cabo en un mercado, donde el dinero es utilizado como mecanismo de intercambio y el precio como término de ese intercambio. Sin embargo, a diferencia de la economía tradicional, la economía financiera admite el intercambio de dinero, lo cual exige considerar aspectos tales como el tiempo, la incertidumbre, las opciones y la información. Cabe destacar, que el precio presenta una estrecha relación con el concepto de valor y cuyos determinantes descansan en los aspectos antes mencionados.

La Teoría del Valor tiene como fundamento construir las bases que permiten la asignación del valor a un bien y la distribución de los recursos escasos al mismo; pero el significado de este término no ha sido siempre el mismo, a lo largo de la historia se han presentado diferentes posturas las cuales desembocan en el enfoque marginalista de Marshall que predomina dentro de la microeconomía moderna. (Nicholson, 2007)

El Valor como concepto económico tiene una gran herencia histórica, la cual se remonta a los inicios del colectivismo hasta la actualidad con la economía informacional, la primera definición formal del valor se atribuye a las necesidades del hombre, es decir que un bien posee valor de uso cuando es capaz de satisfacer necesidades humanas. Por otra parte, se afirma que posee valor de cambio, cuando tiene la capacidad de ser intercambiado por otro. En esta última definición, el capitalismo y el socialismo han entrado en un eterno debate conceptual, los primeros sostienen que el valor de un bien

¹Sharpe W. *Financial Economics*. http://www.stanford.edu/~wfsharpe/mia/int/mia_int2.htm

está determinado por la cantidad de trabajo humano que contenga, tanto en términos concretos como abstractos y cuyo fin es la esperanza de lucro, por ello, el capitalismo desarrolla un ciclo que inicia al invertir capital en factores productivos y finaliza al vender en el mercado lo producido.

Por el contrario, el socialismo parte del sujeto económico y observa su comportamiento al enfrentar necesidades y el modo de satisfacerlos con recursos limitados, llevándolo a un problema de elección que sólo es analizado por medio de la utilidad marginal, puesto que se relaciona con la escasez para determinar el valor del bien.

Los clásicos y marxistas, afirman que el valor de un bien está determinado por su valor de uso, y por lo tanto su precio se debe mover entorno a él; por su parte, la escuela austriaca comparte la postura de los clásicos pero agrega la importancia del estudio de la utilidad marginal, caso contrario opinan los neoclásicos, que argumentan una subjetividad del valor debido a la estimación de los demandantes del bien y la formación de un mercado para fijación de precios, ya que estos no tienen en absoluto una convergencia con el valor.²

El anterior debate histórico sobre el valor y el precio logra sintetizarse en el modelo parcial de Marshall y en el modelo general de Walras, donde el precio observado representa un equilibrio entre los costos de producción que contraen las empresas y la disposición de los demandantes a pagar por estos costos. La economía financiera, por lo tanto, se ubica en un modelo particular Marshall-Walras y Debreu-Arrow donde los oferentes y demandantes intercambian activos o valores bursátiles y los determinantes del precio son el tiempo, la incertidumbre, las opciones y la información.

Por ello, la valoración de activos es uno de los pilares fundamentales de la economía financiera, permitiéndoles a los agentes del mercado elaborar estimaciones insesgadas del precio y estructurar carteras de valores que maximizan la rentabilidad esperada del inversor. Si consideramos una empresa como un valor bursátil y su único dueño como un agente de mercado entonces el gerente tomaría la forma de un asesor financiero, lo cual implica que su gestión estará condicionada a maximizar la rentabilidad de la compañía y por supuesto, su responsabilidad en la cartera valores que estará constituida por todas las alternativas de inversión disponibles para ella.

La elección de las alternativas de inversión dependen del estado de la naturaleza en el futuro incierto, por lo cual constituye otro pilar fundamental de la economía financiera el estudio de estos estados. Dos enfoques gobiernan este problema, por un lado tenemos el enfoque Media/Varianza propuesto por Markowitz y por el otro, el enfoque Estado/Preferencia desarrollado por Arrow.

²Fogarty, Martin. *A history of value theory* <http://www.tcd.ie/Economics/SER/sql/download.php?key=203>

Desde un punto de vista empresarial, el enfoque Media/Varianza era aplicado como criterio en la selección de proyectos en un intento por dotar de mejores herramientas a los gerentes (Hillier, 1963); sin embargo después de la crisis financiera de los Estados Unidos en el 2008, algunos investigadores evaluaron las metodologías en valoración de activos y determinaron que el problema va mas allá de lo propuesto por Markowitz. Los agentes no son constantes en su percepción del riesgo, son mas que eso, son dinámicos y caóticos en su determinación por estructurar alternativas de inversión óptimas.

El enfoque Estado/Preferencia permite suavizar los supuestos de Markowitz, considerar los estados y el tiempo discreto y poner como protagonista las preferencias del inversionista.

En conclusión, la economía financiera moderna debe diseñar estructuras conceptuales de valoración que sean estimadores insesgados del precio de los activos, considerando las preferencias del inversionista como el componente esencial y al tiempo, la incertidumbre, las opciones y la información, como determinantes de aquellas preferencias del inversor.

2.1.2. La inversión y la financiación corporativa

La empresa puede definirse, desde un punto de vista económico, como un conjunto de factores productivos coordinados, cuya función es producir y cuya finalidad viene determinada por el sistema de organización social y económica en que se halle inmersa. El objeto formal de la Economía de la Empresa es formular leyes de equilibrio, pero no en sentido general y abstracto, sino en tanto es susceptible tal equilibrio de aplicaciones concretas en el orden microeconómico de la empresa (Suárez, 2003).

Considerando que la empresa es una sucesión en el tiempo de proyectos de inversión y financiación, su longevidad esta condicionada cuando la rentabilidad de las inversiones realizadas supere el costo de capital utilizado para su financiación. Sin embargo, el alcance de aquel objetivo requiere direccionar todas las áreas de la compañía de tal manera que se identifiquen las metas y restricciones, la naturaleza e importancia de los beneficios, comprender los incentivos y los mercados, considerar el valor del dinero en el tiempo y por último, aplicar el análisis marginal. (Baye, 2006)

Decidir qué proyectos de inversión debe realizar, considerando la limitación de los recursos y el costo de utilizarlos están determinados por los conceptos del Capital Budgeting o Presupuesto de Capital, Estructura de Capital y Capital de Trabajo (Ross et al., 2010). Sin embargo, la literatura en finanzas corporativas resta importancia a la relación entre los anteriores conceptos y en algunos casos se consideran independientes, en el presente trabajo se afirma que el presupuesto de capital es el eje central en la

administración financiera puesto que permite evaluar la gestión gerencial y determinar el valor intrínseco de las compañías.

Se considera que las transacciones contables de una compañía en el periodo fiscal t satisfacen la siguiente ecuación patrimonial o equilibrio contable, esto es:

$$A_t = L_t + S_t \quad (2.1)$$

donde A_t , L_t y S_t se definen como los activos, el pasivo y patrimonio en el periodo t respectivamente.

Sin embargo, existe una secuencia de decisiones de inversión, financiación y dividendos detrás de las las transacciones contables realizadas en en periodo fiscal t , las cuales se agrupan y definen como el Estado de fuente y aplicación de fondos-EFAF o Equilibrio del movimiento de recursos en el periodo t , veamos:

$$(FCP_t - ACP_t) + (FLP_t - ALP_t) + (GIF_t - DIV_t) = 0 \quad (2.2)$$

donde FCP_t , FLP_t y GIF_t son la fuentes de corto plazo, largo plazo y generación interna de fondos; ACP_t , ALP_t y DIV_t son las aplicaciones de corto plazo, largo plazo y dividendos en el periodo t ; permitiendo evaluar la calidad de las decisiones gerenciales en función de los objetivos, estrategias y políticas de la empresa.

Definición 2.1.1 (Principio de Conformidad Financiera). *El Principio de conformidad financiera es una política financiera en donde las fuentes de corto plazo FCP_t deben financiar las aplicaciones de corto plazo ACP_t ; las fuentes de largo plazo FLP_t deben financiar las aplicaciones de largo plazo ALP_t y la generación interna de fondos GIF_t debe financiar primero que todo los dividendos DIV_t y lo restante debe aplicarse a corto y/o largo plazo dependiendo de la política de crecimiento de la empresa.*

$$\begin{aligned} \text{máx } Z_t &= (ACP_t - FCP_t) + (ALP_t - FLP_t) & (2.3) \\ \text{s.a.} & & \\ & ACP_t \geq FCP_t & \\ & ALP_t \geq FLP_t & \end{aligned}$$

Por lo tanto, una adecuada gestión de financiera de la empresa se resume en maximizar la diferencia entre la GIF y los DIV (García, 1999).

la Generación Interna de Fondos, GIF , es uno de los pilares de la administración financiera, son los recursos propios que fueron generados en la operación del negocio y dan la pauta para evaluar las posibilidades a largo plazo de la empresa tales como las posibilidades de crecimiento, de reparto de dividendos y recuperación económica, entre

otros. Formalmente,

$$GIF_t = U_t + Dep_t \quad (2.4)$$

donde, U_t , utilidad neta del periodo t y Dep_t , depreciación, amortización, provisiones, venta de propiedad planta y equipo (PPE), rubros no efectivos en el periodo t .

Sin embargo, a pesar de que el EFAF permite analizar al movimiento global de los recurso (monetarios y no monetarios), no puede ser objeto de estudio de la economía financiera; inclusive, no es suficiente con la GIF para establecer una medida monetaria o de rendimiento corporativo que se adapte al concepto del valor del dinero en el tiempo, lo que obliga a realizar ajustes a tal planteamiento para que la información financiera de las compañías sea presentada en función del efectivo. La siguiente definición y proposición fue planteada en (Greenwood, 2010).

Definición 2.1.2 (Free Cash Flow). *El Free Cash Flow o Flujo de Caja libre es la cantidad de fondos disponibles en efectivo para todos los inversionistas de una empresa después de pagar impuestos y cumplir con las necesidades de inversión.*

$$FCF_t = CF_t^{Sales} - CF_t^G - Ope x_t - Cap x_t - CF_t^{Taxes} \quad (2.5)$$

donde, CF_t^{Sales} , CF_t^G , $Ope x_t$, $Cap x_t$ y CF_t^{Taxes} es el movimiento de efectivo por las ventas, por costo de ventas, por el gasto de operación, por el movimiento de capital, y por el gasto en impuestos, respectivamente.

y cumple con esto:

Proposición 1. *Una empresa privada con fines de lucro e independiente de su estructura financiera posee un Flujo de Caja Libre tal que:*

$$FCF_t = (1 - \tau) \times EBIT_t + Dep_t - Cap x_t - \Delta NWC_t \quad (2.6)$$

donde: τ , tasa de impuestos; $EBIT_t$, utilidad antes de intereses e impuestos; Dep_t , depreciación, amortización, provisiones y movimientos no efectivos; $Cap x_t$, gastos de capital; por último, ΔNWC_t , variación de capital de trabajo neto operativo.

Demostración. Considerando la definición anterior del Flujo de Caja Libre, esto es:

$$FCF_t = CF_t^{Sales} - CF_t^G - Ope x_t - Cap x_t - CF_t^{Taxes}$$

Además, sabiendo que el efectivo generado por las ventas, CF_t , esta en función de las ventas, $Sales$, y las cuentas por cobrar, AR ,

$$CF_t^{Sales} = Sales_t - (AR_t - AR_{t-1})$$

el efectivo generado por el costo de ventas CF_t^G ,

$$CF_t^G = COGS_t + (Inv_t - Inv_{t-1}) - (AP_t - AP_{t-1})$$

y los impuestos CF_t^{Taxes} , por:

$$CF_t^{Taxes} = \tau \times (Sales_t - COGS_t - Ope_x_t - Dep_t)$$

entonces:

$$\begin{aligned} FCF_t &= CF_t^{Sales} - CF_t^G - Ope_x_t - Cap_x_t - CF_t^{Taxes} \\ &= Sales_t - (AR_t - AR_{t-1}) - COGS_t - (Inv_t - Inv_{t-1}) \\ &\quad + (AP_t - AP_{t-1}) - Ope_x_t - Cap_x_t - \tau \times (Sales_t - COGS_t - Ope_x_t - Dep_t) \\ &= (Sales_t - COGS_t - Ope_x_t - Dep_t) + Dep_t - \Delta AR_t - \Delta Inv_t + \Delta AP_t \\ &\quad - \tau \times (Sales_t - COGS_t - Ope_x_t - Dep_t) - Cap_x_t \\ &= (1 - \tau) \times (Sales_t - COGS_t - Ope_x_t - Dep_t) - Cap_x_t \\ &\quad + Dep_t - \Delta AR_t - \Delta Inv_t + \Delta AP_t \\ FCF_t &= (1 - \tau) \times EBIT_t + Dep_t - Cap_x_t - \Delta NWC_t \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.3 (Estado de Flujo de Efectivo-EFE). *Es el estado financiero que muestra el efectivo generado y utilizado en las actividades de operación EGO_t , inversión FI_t y financiación FF_t ; muestra entradas, salidas y cambio neto en el efectivo de las diferentes actividades de una empresa durante un período contable, de tal manera que se concilie el saldo de efectivo y equivalente de efectivo inicial y final de la compañía.*

$$\Delta EFE_t = FI_t + FF_t + EGO_t \quad (2.7)$$

Y cumple con esto:

Proposición 2. *Los cambios en el flujo de efectivo está en función del flujo de caja libre y los cambios en las fuentes de financiación corporativa, esto es:*

$$\Delta EFE_t = FCF_t + \Delta FF_t \quad (2.8)$$

Demostración. Partiendo del principio de conformidad financiera en (2.3) y se realiza la depuración de los movimiento de efectivo en las fuentes y en las aplicaciones de fondos,

se obtiene que:

$$\Delta EFE_t = U_t + Dep_t + \Delta AR_t + \Delta Inv_t - \Delta AP_t + \Delta PPE_t + \Delta FF_t$$

luego se agrupan términos,

$$\Delta EFE_t = (U_t + Dep_t) + (\Delta AR_t + \Delta Inv_t - \Delta AP_t) + \Delta PPE_t + \Delta FF_t$$

de tal manera que el EFE puede ser expresado en función del efectivo operacional, de inversión y de financiación; esto es:

$$\begin{aligned} \Delta EFE_t &= (U_t + Dep_t) + (\Delta AR_t + \Delta Inv_t - \Delta AP_t) + \Delta PPE_t + \Delta FF_t \\ &= (GIF_t + \Delta NWC_t) + \Delta PPE_t + \Delta FF_t \\ &= (EGO_t + \Delta PPE_t) + \Delta FF_t \\ \Delta EFE_t &= FCF_t + \Delta FF_t \end{aligned}$$

□

En definitiva, el flujo de caja libre FCF resume en una sola cifra monetaria las consecuencias de las decisiones tomadas por la gerencia entorno a la inversión y financiación en un periodo fiscal determinado, el papel que desempeña el estado de flujo de efectivo EFE y el estado de fuentes y aplicación de fondos $EFAF$ se enfoca en apoyar las conclusiones del FCF , permitiendo evaluar la calidad de tales decisiones desde una perspectiva de movimiento de recursos y del principio de conformidad financiera.

2.1.3. El flujo de caja libre y la rentabilidad corporativa

Considerando la proposición (2.1.2) del flujo de caja libre, se puede apreciar que no es sólo el resultado de la aplicación del principio de causación contable, es más que eso, es el rendimiento financiero que se obtiene como consecuencia de una serie de inversiones realizadas por los dueños, en un periodo de tiempo determinado. Es decir, el FCF es el dinero disponible para los dueños y sus acreedores financieros como retorno de sus inversiones.

Con la anterior premisa se puede aplicar todo el potencial de la economía financiera a la empresa, destacando su estrecha relación con los métodos de valoración tomados de la matemática financiera y aplicados en el mercado de capitales.

Sea el rendimiento financiero de una empresa FCF_t en el periodo t generado por un proyecto en el cual se invirtió I_{t-1} unidades monetarias $u.m$; entonces, si consideramos

el principio del valor del dinero en el tiempo se tiene una medida relativa del rendimiento financiero corporativo y que denominaremos como la rentabilidad intrínseca o corporativa.

Proposición 3. *Si una empresa posee flujo de caja libre, FCF , y además posee costos hundidos o inversiones previas, I , entonces la relación entre ambos rubros es una rentabilidad corporativa, Rc , tal que:*

$$Rc_t = \frac{FCF_t}{I_{t-1}} \quad (2.9)$$

Demostración. Sea

$$Vf = Vp(1 + R_t)^t$$

Donde: FCF_t : es el free cash flow en el periodo t e I_{t-1} : es la inversión en el periodo $t - 1$.

Si $Vp = I_{t-1}$, $Vf = I_{t-1} + FCF_t$ y $R_t = Rc_t$, entonces:

$$\begin{aligned} I_{t-1} + FCF_t &= I_{t-1}(1 + Rc_t)^t \\ \frac{I_{t-1} + FCF_t}{I_{t-1}} &= (1 + Rc_t)^t \\ 1 + \frac{FCF_t}{I_{t-1}} &= (1 + Rc_t)^t \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{FCF_1}{I_0} &= 1 + Rc_1 \\ Rc_1 &= \frac{FCF_1}{I_0} \end{aligned}$$

□

Sin embargo, si se tiene una secuencia de flujos $FCF = (FCF_1, FCF_2 \dots)$ de un proyecto cuya inversión inicial fue de I_0 unidades monetarias, entonces la rentabilidad intrínseca está dada por la solución a la siguiente ecuación homogénea, conocida como la Tasa Interna de Retorno-IRR (Hazen, 2003):

$$0 = I_0 + FCF_1z + FCF_2z^2 + \dots + FCF_tz^t + \dots \quad (2.10)$$

cuya única solución diferente de cero se obtiene cuando $I_0 < 0$ y $FCF_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$; además, $z = (1 + Rc)^{-1} = (1 + IRR)^{-1}$.

De igual manera, Fisher popularizó en 1907 el concepto del capital ficticio³ formulado por Marx en el año de 1894, y lo denominó el *Valor Presente Neto-NPV* (Fisher, 1907)

$$NPV = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{(1+r)^i}, \quad r > -1 \quad (2.11)$$

donde: f , rendimiento; R , rentabilidad y i , el tiempo discreto.

Tales ideas, representadas por las expresiones (2.10) y (2.11) dotaron de herramientas a los economistas financieros de la época, los cuales lograron abordar los problemas alrededor de la valoración de activos. En 1938 John Burr Williams planteó el primer modelo de valoración de acciones utilizando el concepto del NPV a los dividendos esperados, refiriéndose a él como el valor intrínseco (Williams, 1938); luego, Harry Markowitz afirmó que el concepto de la teoría del portafolio que él formuló se debe a los trabajos de Williams (Markowitz, 1990) y por último, la fórmula de Gordon-Shapiro es una extensión del modelo del NPV propuesto igualmente por Williams (Godon and Shapiro, 1956). Sin embargo, transcurridos 60 años siguen vigentes tales planteamientos, a la fecha se realizan valoraciones de acciones, de bonos, de deudas, de opciones, de empresas y de proyectos; manteniendo los supuestos planteados por aquellos economistas financieros a mediados del siglo pasado.

Pero sin lugar a dudas, el mayor aporte a la economía financiera de la empresa lo realizó Joel Dean cuando aplicó el concepto del NPV y de la IRR a los proyectos que lleva a cabo las empresas, definiéndolo como el Presupuesto de capital. Pero antes de abordar este concepto, es indispensable generalizar los planteamientos del valor del dinero en el tiempo.

Todo el andamiaje teórico de la valoración de empresas esta construido a partir del concepto de capitalización compuesta, las expresiones (2.11) y (2.10) son un reflejo de ello al considerar el flujo de caja libre como rendimiento de la inversión realizada y que se obtiene al finalizar el periodo contable; es decir, no existe la posibilidad de generar un rendimiento financiero en fracciones de tal periodo; por lo tanto, si la empresa se constituye por una inversión P_0 y se espera que genere una rentabilidad r entonces el monto invertido sera equivalente a P_t al cabo de t periodos para $t \in \mathbb{N}$

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

Por otra parte, la amplitud del horizonte de inversión sugiere considerar múltiples tasas de rentabilidad para el proyecto, es decir, una sucesión de tasas efectivas $\{r_1, r_2, r_3 \dots, r_t\}$, las cuales pueden ser equivalentes financieramente a una tasa de rentabilidad \bar{r} que re-

³Marx, Carl. *Capital A Critique of Political Economy*, Volume III-The Process of Capitalist Production as a Whole. USSR. 1894. Fue el primero en acuñar el término.

presenta un promedio equivalente de tal sucesión,

$$\bar{r} = \left[\prod_{i=1}^t (1 + r_i) \right]^{\frac{1}{t}} - 1 \quad (2.12)$$

Así mismo, considerando la anterior sucesión de tasas se obtiene el promedio geométrico,

$$\bar{r}_g = \left[\prod_{i=1}^t r_i \right]^{\frac{1}{t}} \quad (2.13)$$

de gran importancia en el estudio de las tasas de interés.

Ahora bien, si la periodicidad de la presentación de la información financiera por parte de las compañías es anual, sería lógico suponer que en términos de esa periodicidad se encuentra el flujo de caja libre; además, existiría una tasa de rentabilidad que se capitaliza anualmente. Sin embargo, debido a la naturaleza de las transacciones contables llevadas a cabo por la compañía y al desarrollo de los software contables, es posible obtener flujos de caja libre con mayor frecuencia dentro de un año; esto es, que la información financiera puede ser presentada en periodos tan cortos como el objeto de negocio de la compañía lo demande.

En efecto, la periodicidad de los flujos de caja sugieren la existencia de tasas anuales con capitalizaciones inferiores a un año, lo cual nos lleva a establecer que toda tasa efectiva r es el resultado de la relación entre una tasa nominal R y su frecuencia de conversión m . Es así, como la capitalización compuesta continua es una consecuencia de tal relación cuando $m \rightarrow \infty$.

Sin demostración, se tiene que la capitalización compuesto continua esta dada por:

$$P_t = P_0 e^{Rt} \quad (2.14)$$

La expresión (2.14) posee propiedades con un amplio significado económico, tales como la tasa de cambio RP_t y el crecimiento instantáneo R que se presenta a continuación:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = RP_0 e^{Rt} = RP_t, \quad \frac{\partial P_t / \partial t}{P_t} = \frac{RP_t}{P_t} = R \quad (2.15)$$

De hecho, resulta evidente que cualquier capitalización compuesta puede ser expresada de forma continua, justificando así la aplicación del factor de rentabilidad logarítmica en la valoración de los activos de capital; es decir, a medida que aumenta la frecuencia de conversión de una tasa nominal se aproxima cada vez más a una capitalización continua

$$P_0 (1 + r)^t = P_0 b^t = P_0 e^{Rt} \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

Visto de esta forma, es razonable replantear las expresiones (2.10) y (2.11), de tal manera que se considere al flujo de caja libre y su tasa de descuento en función del tiempo continuo, por esto, los resultados que se presentan a continuación representan el valor presente neto continuo, NPV , y la tasa interna de retorno continua, IRR , respectivamente (Nicholson, 2007).

$$NPV = FCF_0 + \int_0^T FCF(t) \exp^{-Rt} dt, \quad \text{para } FCF_0 < 0 \quad (2.17)$$

$$0 = FCF_0 + \int_0^T FCF(t) \exp^{-Rt} dt, \quad \text{para } R = IRR \text{ y } FCF_0 < 0 \quad (2.18)$$

De forma análoga a los promedios discretos, el promedio equivalente de una sucesión de tasas continuas se define por:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^t R_i}{t} \quad (2.19)$$

De esta manera, se concluye que la dinámica determinística del flujo de caja libre puede representarse de manera exponencial, sin importar su frecuencia de conversión y su horizonte de tiempo; sin embargo, tal convergencia sólo podrá garantizarse cuando la frecuencia de conversión o capitalización presente una tendencia al infinito.

2.1.4. Presupuesto de Capital

En este punto, se centra la atención en la valoración de empresas, definiendo tal proceso como una función de valoraciones secuenciales de todos los proyectos que están disponibles para ella y cuyos directos responsables son los gerentes o administradores financieros.

En general, la toma de decisiones gerenciales gira alrededor de dos ejes fundamentales: la inversión y la financiación; de esta manera, evaluar la calidad de tales decisiones implica aplicar el criterio de NPV o IRR mencionados anteriormente, permitiendo definir una medida de riqueza y de rentabilidad para aquellos proyectos disponibles para la compañía. No obstante, ambas medidas obligan al gerente no sólo a realizar estimaciones del flujo de caja libre y del costo de capital, sino también de la incertidumbre asociada a tales estimaciones futuras.

Hasta ahora se ha presentado al flujo de caja libre como el rendimiento financiero corporativo y constituye una analogía al concepto de rendimiento financiero en el mercado de valores; no obstante, tal rendimiento es consecuencia de una determinada inversión realizada previamente, lo que implica que existe al menos una fuente de financiación que apoye tal inversión y espere a cambio una retribución representada por un

costo de oportunidad.

Para llevar a cabo los planes de inversión, la compañía dispone de los recursos que puede obtener de la emisión de deuda, de las acciones preferentes, de las acciones comunes y de las utilidades retenidas y a cada una de ellas le corresponderá un costo de oportunidad r_d , r_p , r_{re} y r_s , respectivamente; que al final configurará la tasa promedio ponderada de capital (WACC) de todas las fuentes de financiación de la compañía.

Definición 2.1.4 (Tasa promedio ponderada de Capital-WACC). ⁴ *Es un promedio ponderado entre un costo y una rentabilidad exigida, representa la tasa a la que se debe descontar el FCF para obtener el mismo valor de las acciones que proporciona el descuento de los flujos para el accionista.*

$$r_w = WACC = w_d r_d (1 - \tau) + w_p r_p + w_e (r_{re} + r_s) \quad w_d + w_p + w_e = 1 \quad (2.20)$$

donde, $\{w_d, w_p \text{ y } w_e\}$ son los pesos de las fuentes de financiación.

Un estudio más profundo del costo de capital y su determinación a partir de cada una de las fuentes de financiación se encuentra en (García, 1999); al respecto, admitimos la importancia del modelo *Capital asset pricing model-CAPM* propuesto por (Sharpe, 1964) y del *Arbitrage pricing theory-APT* propuesto por (Ross, 1976).

Por lo tanto, las expresiones (2.11) y (2.17) en un contexto corporativo quedan expresadas para el caso discreto como:

$$NPV = FCF_0 + \sum_{i=0}^t \frac{FCF_i}{(1 + r_w)^i} \quad (2.21)$$

y para el caso continuo como:

$$NPV = FCF_0 + \int_0^t FCF(t) \exp^{-R_w t} dt \quad (2.22)$$

donde, $r_w, R_w > -1$ y $FCF_0 < 0$. Además, $R_w = \ln(1 + r_w)$

Ahora bien, luego de haber demostrado la existencia de un rendimiento corporativo-FCF y de un costo de capital-WACC involucrado en los proyectos que la empresa espera emprender, se aplica el concepto del valor presente neto y de tasa interna de retorno para determinar el más adecuado para la empresa dentro de la gama de alternativas disponibles. Sin demostración alguna, ya que implica el uso de las funciones de utilidad, considerando que el administrador financiero da prioridad a las inversiones más rentables

⁴Fernandez propone una definición alternativa a la tradicional desde un contexto donde prevalece la naturaleza de la fuente de financiación.

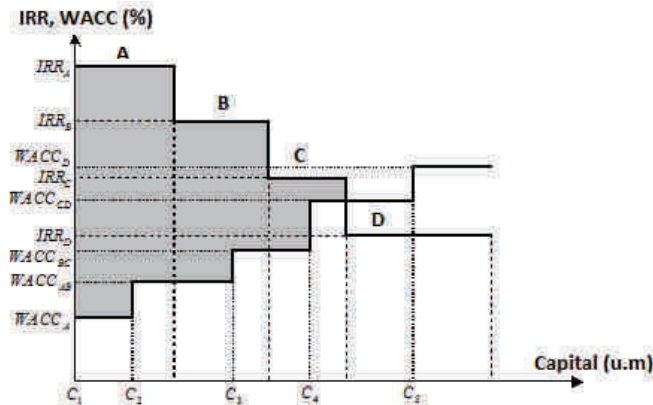


Figura 2.1: Problema fundamental del presupuesto de capital

y a las fuentes de financiación más baratas para la compañía, entonces se tiene una sucesión de proyectos independientes (no excluyentes) la empresa ira asignando recursos a tales proyectos hasta que el costo de adquirir aquellos recursos (WACC) iguale la rentabilidad de los mismos (IRR). A este problema se denomina el *Presupuesto de Capital o Capital Budgeting*⁵ y se resume en la figura 2.1. El area sombreada representa el beneficio que obtiene la empresa por llevar a cabo proyectos rentables y superiores al costo de capital, por lo que el administrador financiero continuará ejerciendo proyectos y de igual manera buscará recursos que cada vez serán más costosos, aumentando el costo de capital hasta donde no es viable seguir desarrollando proyectos y que se define como el punto de equilibrio del presupuesto de capital.

Sin lugar a dudas, el centro de atención de la formulación de *Joel Dean* es determinar los parámetros que permiten maximizar el beneficio de la compañía, es decir, la adecuada gestión de sus activos (inversiones) y de sus pasivos (recursos financieros) le llevará a retardar el punto de equilibrio, ya que de esta forma hará máximo su beneficio y por lo tanto la riqueza de sus accionistas.

Desde este punto de vista, el objetivo básico financiero que debe lograr el administrador financiero o Broker Corporativo debe estar encaminado en gestionar los portafolios de proyectos y las fuentes de financiación disponibles para la compañía, de tal manera que al identificar, cuantificar y controlar los riesgos sistemáticos y no sistemáticos permita maximizar los beneficios de la misma y así *crear valor*.

⁵Según M. Rubinstein en su libro *A History of the Theory of Investments: My Annotated Bibliography*. en la página 7, el concepto de *Capital Budgeting* se le atribuye a *Joel Dean*.

2.1.5. Consideraciones básicas en el Capital Budgeting

La presente investigación esta alineada a los planteamientos de (Wan, 2012) respecto al presupuesto óptimo de capital; no obstante, se limita a los siguientes aspectos:

- El presupuesto de capital sólo involucra proyectos que no son necesariamente mutuamente excluyentes.
- Todos los proyectos disponibles para la empresa tienen niveles de riesgo diferentes.
- Se dispone de los recursos para llevar a cabo el proceso de inversión (*soft capital rationing*).
- Los flujos generados por un proyecto liberan recursos para llevar a cabo otros proyectos (valor del dinero en el tiempo- *VDT*).
- El efecto de las decisiones estratégicas y de investigación y desarrollo se encuentran dentro del flujo de caja libre agregado de la compañía.
- El administrador selecciona los proyectos más rentables para la compañía.
- El NPV es el indicador por excelencia para evaluar los proyectos disponibles para la compañía debido al problema de escala y de temporalidad que presenta la IRR.
- No se considera el efecto de inflación

Por lo tanto, concluimos que el problema del presupuesto de capital debe enfocarse en el estudio del Valor Presente Neto *NPV* o del flujo de caja descontado *DCF*.

2.1.6. Teoría del precio de los activos-Asset pricing theory

Por el momento, se considera que el problema del presupuesto de capital consiste en maximizar el área sombreada de la figura 2.1, tomando como función objetivo el valor presente neto bajo condiciones de no incertidumbre; sin embargo, la misma naturaleza del problema y de sus variables de entrada permiten concluir que no hay nada más alejado de la realidad que suponer un futuro predecible.

La *Teoría del precio de los activos* busca precisamente comprender el valor o el precio de un activo a partir de sus rendimientos inciertos, del horizonte de inversión y del riesgo involucrado en el mismo, siendo esto último lo que determina su interés y su intercambio. Sin embargo, a principio del presente siglo el profesor *J. Cochrane* de la Universidad de Chicago estableció la ecuación fundamental de valoración y su principio organizador, bajo el argumento de que los precios de los activos son iguales al valor esperado de sus flujos futuros de caja descontados (Cochrane, 2001).

Definición 2.1.5 (Ecuación Fundamental de Valoración-BPA). *La BPA-Basic Pricing Equation se define como el valor esperado del producto entre el flujo de caja, x , y el factor de descuento estocástico, m , de cualquier activo:*

$$p_t = E_t(mx) \quad (2.23)$$

Su principio organizador es que todo se reduce a la especialización de la BPA.

Tales especializaciones o enfoques de la BPA permiten elaborar dos aproximaciones del valor de un activo, por un lado tenemos el precio o valor absoluto que se obtiene al estudiar la exposición del activo a fuentes de riesgo macroeconómicas y por el otro, tenemos el valor relativo que consiste en comparar el activo con otros e inferir su exposición al riesgo. Muchas de las valoraciones que actualmente se llevan a cabo tiene un enfoque mixto, logrando ampliarse en los diferentes campos de la economía financiera.

Su simplicidad y universalidad, permiten separar los supuestos económicos de la representación empírica que se pretende analizar, esto permitirá hacer uso de la geometría estado-preferencia o media-varianza. Por su parte, los métodos empíricos tales como las series de tiempo, los métodos generalizados de momentos y de máxima verosimilitud, entre otros, ajustarán los parámetros libres del modelo de tal manera que se minimice el error de estimación del valor del activo. No obstante, una condición necesaria de optimalidad para tal el modelo se le denomina la transversalidad.

Definición 2.1.6 (Condición de Transversalidad). *Es una condición para garantizar tanto la optimalidad del proceso como la solución cerrada de modelos de optimización que dependen de horizontes de tiempo al infinito; específicamente para el modelo basado en consumo se define como:*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t [m_{t,t+j} p_{t+j}] = 0 \quad (2.24)$$

2.1.7. Modelo de consumo - Consumption-based model

La BPA proviene de la condición de primer orden para un problema de consumo intertemporal de un individuo poseedor de riqueza limitada; por ello, la decisión de invertir en un determinado activo depende de su utilidad marginal y de los flujos generados por aquel activo; por lo tanto, el precio de un activo está determinado por el valor esperado de sus flujos de caja, d , descontados al factor de impaciencia de consumo intertemporal, β , y la tasa marginal de sustitución de consumo intertemporal dada por la relación de utilidades marginales de consumo, $u'(c_t)$. Esto es:

Proposición 4. *Modelo de precio basado en consumo intertemporal BPA. El precio del activo es igual al valor esperado del producto entre la tasa marginal de sustitución de consumo intertemporal y los dividendos generados por el activo en un horizonte de tiempo infinito.*

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} d_{t+j} \quad (2.25)$$

Siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t \left[\beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} p_{t+j} \right] = 0$$

Demostración. Sea

$$U(\{c_t\}) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})$$

la función de utilidad intertemporal de un inversionista y,

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t \xi \\ c_{t+j} &= e_{t+j} + d_{t+j} \xi \end{aligned}$$

las restricciones en su proceso de decisión de consumo intertemporal cuando: el agente posee un nivel de renta, e , un nivel de consumo, c , un volumen de inversión, $p\xi$, y un retorno esperado de la inversión, d . (Samuelson, 1937). Entonces:

$$\begin{aligned} U(\{c_t\}) &= E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}) \\ &= u(c_t) + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}) \end{aligned}$$

Ahora, derivando con respecto a ξ e igualando a cero

$$-p_t u'(c_t) + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) d_{t+j} = 0$$

Luego despejando a p_t , se obtiene:

$$\begin{aligned} p_t u'(c_t) &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) d_{t+j} \\ p_t &= \frac{1}{u'(c_t)} + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) d_{t+j} \\ p_t &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} d_{t+j} \end{aligned}$$

siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad, esto es:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t [m_{t,t+j} p_{t+j}] = 0$$

□

A través de (2.23) se puede expresar (2.25) como:

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j} \quad (2.26)$$

Proposición 5. *Equivalencia financiera de la Ecuación Fundamental de Valoración.*

$$p_t = E_t [m_{t,t+1} (p_{t+1} + d_{t+1})] \quad (2.27)$$

Demostración. Sea

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} d_{t+j}$$

Haciendo,

$$m_{t,t+j} = \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}$$

Se obtiene que:

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j}$$

Luego,

$$p_t = E_t \left[m_{t,t+1} d_{t+1} + \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j} \right]$$

Ahora, dividiendo y multiplicando por $m_{t,t+1}$, se obtiene que:

$$p_t = E_t \left[m_{t,t+1} d_{t+1} + \frac{m_{t,t+1}}{m_{t,t+1}} \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j} \right]$$

Por último, reorganizando términos y sacando factor común

$$\begin{aligned} p_t &= E_t \left[m_{t,t+1} d_{t+1} + m_{t,t+1} \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j-1} d_{t+j} \right] \\ p_t &= E_t [m_{t,t+1} d_{t+1} + m_{t,t+1} p_{t+1}] \end{aligned}$$

Se obtiene que:

$$p_t = E_t [m_{t,t+1} (p_{t+1} + d_{t+1})]$$

□

Proposición 6. *Tasa libre de riesgo.*

$$R_{t,t+1}^f = \frac{1}{E_t [m_{t,t+1}]} \quad (2.28)$$

Demostración. Sea

$$p_t = E_t [m_{t,t+1} x_{t,t+1}]$$

El precio de un activo para el periodo t , y

$$x_{t,t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$$

El flujo del activo compuesto por el precio y su dividendo en el periodo $t + 1$. Ahora, Dividiendo ambos miembros de la ecuación por p_t , se obtiene que:

$$1 = \frac{1}{p_t} E [m_{t,t+1} x_{t,t+1}]$$

Como p_t es conocido, entonces:

$$1 = E_t \left[m_{t,t+1} \frac{x_{t,t+1}}{p_t} \right]$$

Luego,

$$R_{t,t+1}^f = \frac{x_{t,t+1}}{p_t}$$

Entonces

$$1 = E [m_{t,t+1} R_{t,t+1}^f]$$

Ahora, considerando un activo libre de riesgo, se obtiene que:

$$1 = E[m_{t,t+1}] R_{t,t+1}^f$$

Y por lo tanto:

$$R_{t,t+1}^f = \frac{1}{E[m_{t,t+1}]}$$

□

Proposición 7. *El precio ajustado al riesgo representa el precio de un activo como función aditiva entre los flujos futuros de caja descontados a la tasa libre de riesgo $R_{t,t+j}^f$ y la covarianza entre la tasa marginal de sustitución de consumo intertemporal y los flujos futuros de caja. Esto es:*

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} E_t(d_{t+j}) + \sum_{j=1}^{\infty} cov_t(m_{t,t+j}, d_{t+j}) \quad (2.29)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned} p_t &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j} d_{t+j}] \end{aligned}$$

Dado que,

$$cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p_t &= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] E_t [d_{t+j}] + cov_t [m_{t,t+j}, d_{t+j}] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] E_t [d_{t+j}] + \sum_{j=1}^{\infty} cov_t [m_{t,t+j}, d_{t+j}] \end{aligned}$$

como, $R_{t,t+j}^f = E_t[m_{t,t+j}]^{-1}$, entonces:

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} E_t [d_{t+j}] + \sum_{j=1}^{\infty} cov_t [m_{t,t+j}, d_{t+j}]$$

□

Precio de los activos como un paseo aleatorio

Uno de los resultados más importantes alrededor de la BPA surge como consecuencia de establecer un criterio de aversión al riesgo para un determinado inversionista. Si se considera la existencia de un mercado en el cual el activo puede ser negociado y además los agentes que participan en aquel mercado son neutrales al riesgo, podemos concluir que la dinámica del precio del activo posee una estructura aleatoria; en particular, una martingala.

Proposición 8. *Si un agente es neutral al riesgo, no posee impaciencia y no percibe dividendos entonces el precio de un activo mediante el enfoque basado en consumo seguirá una caminata aleatoria siempre y cuando los choques aleatorios posean media cero y varianza constante.*

$$p_{t+1} = p_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2.30)$$

Demostración. Sea,

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} d_{t+j}$$

Si el agente es neutral al riesgo, $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$, y además no posee impaciencia ni percibe dividendos, $\beta = 1$ entonces:

$$p_t = E_t [p_{t+1}]$$

siempre y cuando $E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0$ y $Var(\varepsilon_{t+1}) = \sigma_t^2$. Esto es equivalente a,

$$p_{t+1} = p_t + \varepsilon_{t+1}$$

□

2.1.8. Supuestos y aplicabilidad de la BPA

En general, cuando nos referimos a (2.25) no estamos asumiendo ninguno de los siguientes supuestos:

- Mercados completos.
- La tasa de retorno y el flujo de caja siguen una ley normal o son independientes a través del tiempo.
- Los inversionistas poseen una función de utilidad cuadrática.
- Los inversionistas perciben renta propia.

- El mercado esta en equilibrio.

De hecho, ambas ecuaciones de valoración se aplican a cada inversor y activo en particular, sean bonos, acciones, proyectos, etc., independientemente de la presencia de otros inversores o activos, de una función de utilidad monótona y cóncava, o de la existencia de una ley de probabilidad para el retorno o el flujo de caja generado por aquel activo; en particular, el hecho de involucrar momentos condicionales no implica asumir que los retornos son independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*).

No obstante, la universalidad de tales ecuaciones ocasionan un pobre ajuste en la práctica, motivando la búsqueda de modelos alternativos a partir de las especializaciones que podamos realizar al factor de descuento m y al flujo de caja d . Es decir:

- Utilizar diferentes funciones de utilidad.
- Establecer modelos de equilibrio general.
- Utilizar modelos factoriales de precio.
- Aplicar modelos de precios por arbitraje.

2.2. Valoración de empresas

2.2.1. Aspectos generales

El concepto de valoración de empresas parte del problema del presupuesto de capital mencionado en la sección 2.1.4 y donde el administrador financiero se enfrenta a un portafolio de posibilidades reales de inversión sujeto a limitadas fuentes de financiación de recursos.

En general, la preocupación por la valoración de una firma gira alrededor de tres ejes fundamentales: valoración de proyectos, valoración con fines de fusión o enajenación y la medición de la gerencia de valor. Sin embargo, todos ellos comparten los mismos principios generales que se presentan a continuación ([Adserá and Viñolas, 2003](#)):

- El valor procede de las expectativas de generación futura de flujo de caja libre.
- La información disponible determina el marco del análisis coyuntural y perpetuo.
- El crecimiento no aporta necesariamente valor.
- La aplicación de métodos conceptualmente correctos conducen a un valor único.
- Valorar implica necesariamente predeterminar la estructura financiera utilizada.

2.2.2. Ecuación de valor corporativo-BVE

Gracias a los trabajos de (Cochrane, 2001) y (Sharpe, 2008), todo lo anterior es posible configurarlo para crear una medida de valoración empresarial en un entorno de riesgo.

Definición 2.2.1 (Ecuación de valor corporativo-BVE). *Se le denomina la ecuación de valor corporativo a la estimación del valor presente, V_t , de los flujos futuros de caja, CF , al factor de descuento estocástico, m , para un horizonte infinito de valoración.*

Proposición 9. *Si una empresa genera flujo de caja y que posee al menos una fuente de financiación la cual cumple con las condiciones de preferencias regulares y admite una función de utilidad entonces mediante el enfoque de basado en consumo su medida de valor estará determinada por la siguiente ecuación:*

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} \quad (2.31)$$

Para $m > 0$ y $CF \in \mathbb{R}$. siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad.

Demostración. Si se piensa que una empresa es un activo que no posee un mercado en el cual su precio logre ser determinado por el libre juego de oferta y demanda, además los pocos oferentes y demandantes del activo estructuran sus expectativas de consumo a partir de la generación de flujo de caja de la compañía, lo que implica que su poder de negociación se limita sólo al intercambio de tiempo, incertidumbre, opciones e información a través flujo de caja. Esto es:

$$\text{máx } U(\{c_t\}) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})$$

sujeto a las restricciones de consumo,

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - V_t \xi \\ c_{t+j} &= e_{t+j} + CF_{t+j} \xi \end{aligned}$$

Aplicando el proceso de optimización, esto es:

$$\frac{\partial U(\{c_t\})}{\partial \xi} = -V_t u'(c_t) + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) CF_{t+j}$$

e igualando a cero,

$$-V_t u'(c_t) + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) C F_{t+j} = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_t u'(c_t) &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) C F_{t+j} \\ V_t &= \frac{1}{u'(c_t)} E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(c_{t+j}) C F_{t+j} \\ V_t &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} C F_{t+j} \end{aligned}$$

Y por último, haciendo

$$m_{t,t+j} = \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}$$

se obtiene:

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} C F_{t+j}$$

□

Sin embargo, cuando el activo es negociado en un mercado eficiente, el gran número de competidores y su poder de negociación conducen sus estimaciones del valor intrínseco V_t a un precio de equilibrio p_t ; esto significa que ante información perfecta todos los agentes del mercado poseen la misma percepción del activo y su valoración difícilmente se diferenciará de su competidor, La siguiente proposición (sin demostración) nos indica que:

Proposición 10. *Sea $\tilde{V}_t(w)$ el valor particular de una realización w en el periodo t ,*

$$\tilde{V}_t(w) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j}(w) C F_{t+j}(w) \quad (2.32)$$

Si $w \in \Omega$, entonces $\tilde{V}_t(w)$ será una variable aleatoria en t y por lo tanto,

$$V_t = E_t [\tilde{V}_t] \rightarrow p_t \quad (2.33)$$

siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad.

Proposición 11. *Representación de la BVE de un periodo. El valor corporativo, V_t ,*

en el periodo t es igual al valor esperado del producto entre el factor de descuento estocástico, $m_{t,t+1}$, y el flujo generado por la suma entre el valor corporativo y el flujo de caja en el periodo $t + 1$. Esto es:

$$V_t = E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \quad (2.34)$$

Demostración. Sea,

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_t &= E_t \left[m_{t,t+1} CF_{t+1} + \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} \right] \\ V_t &= E_t \left[m_{t,t+1} CF_{t+1} + \frac{m_{t,t+1}}{m_{t,t+1}} \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} \right] \\ V_t &= E_t \left[m_{t,t+1} CF_{t+1} + m_{t,t+1} \sum_{j=2}^{\infty} m_{t,t+j-1} CF_{t+j} \right] \\ V_t &= E_t [m_{t,t+1} CF_{t+1} + m_{t,t+1} V_{t+1}] \\ V_t &= E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

□

2.2.3. Especialización de la ecuación de valor corporativo-BVE

Hasta ahora se ha demostrado la existencia de la Ecuación de Valor Corporativo (2.31), permitiendo formalizar el proceso de valoración de empresas o de proyectos de inversión bajo el enfoque basado en consumo; sin embargo, como cualquier modelo matemático, posee algunos supuestos o principios básicos que facilitan su adaptación práctica. Algunos de ellos son:

1. Dependiendo de la información disponible es posible establecer una esperanza condicional o incondicional para el valor de la compañía.
2. El factor de descuento estocástico m esta en función de los factores que afectan de forma sistemática y no sistemática el flujo de caja de la compañía, esto es,

$$m = g(f)$$

3. Para cualquier empresa o proyecto se cumple el principio de ausencia de arbitraje y la ley del precio único como una función lineal; Por lo tanto, existe un factor de descuento $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $p = E(mx)$ si y sólo si no existen oportunidades de arbitraje y la ley del precio único se mantiene.
4. La ausencia de arbitraje es consecuencia sólo de que las compañías y los proyectos de inversión no poseen un mercado de negociación.

Proposición 12. *Si*

$$V_t = E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})]$$

entonces m es un factor de la representación beta de un factor

$$E_t [R_{t,t+1}] = \gamma + \beta_{m_{t,t+1}} \lambda_{m_{t,t+1}} \quad (2.35)$$

Demostración. Sea, V_t el valor corporativo, tal que:

$$V_t = E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})]$$

Ahora, dividiendo ambos lados por V_t

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{V_t} E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ 1 &= E_t \left[m_{t,t+1} \left(1 + \frac{CF_{t+1}}{V_t} \right) \right] \\ 1 &= E_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}] \\ 1 &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [R_{t,t+1}] + cov_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}] \end{aligned}$$

Luego, despejando $E_t [R_{t,t+1}]$

$$\begin{aligned} 1 - cov_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}] &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [R_{t,t+1}] \\ E_t [R_{t,t+1}] &= \frac{1}{E_t [m_{t,t+1}]} - \frac{cov_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}]}{E_t [m_{t,t+1}]} \\ E_t [R_{t,t+1}] &= \frac{1}{E_t [m_{t,t+1}]} - \frac{cov_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}]}{var_t [m_{t,t+1}]} \frac{var_t [m_{t,t+1}]}{E_t [m_{t,t+1}]} \end{aligned}$$

Ahora, dado que:

$$\beta = \frac{cov_t [m_{t,t+1} R_{t,t+1}]}{var_t [m_{t,t+1}]}$$

y $R_{t,t+1}^f = \gamma$, entonces:

$$E_t [R_{t,t+1}] = \gamma - \beta_{m_{t,t+1}} \frac{\text{var}_t [m_{t,t+1}]}{E_t [m_{t,t+1}]}$$

Y haciendo $\lambda = -\frac{\text{var}_t [m_{t,t+1}]}{E_t [m_{t,t+1}]}$, se obtiene:

$$E_t [R_{t,t+1}] = \gamma + \beta_{m_{t,t+1}} \lambda_{m_{t,t+1}}$$

□

Algunas conclusiones de la representación beta son:

- La representación beta de un factor se le denomina *beta pricing model*
- $\lambda_{m_{t,t+1}}$ se interpreta como el *precio del riesgo* o *premio al riesgo*, Esto es

$$\lambda_{m_{t,t+1}} = \gamma \text{var}_t [m_{t,t+1}]$$

- Dependiendo de la estructura de m se puede aplicar una aproximación de Taylor para expresar la representación beta en términos de variables más concretas, es decir:

$$m_{t,t+1} \approx a + b' f_{t+1}$$

que representa a m como una función lineal.

Factores de descuento en la práctica

En los últimos 50 años se ha dado un desarrollo acelerado de los métodos que permiten cuantificar el precio de los activos, creando así una corriente conocida como la teoría del precio de los activos (Asset pricing theory), cuyos resultados se han centralizado en el mercado de valores y en el mercado de derivados financieros.

Sin embargo, la ecuación de valor corporativo-BVE que se propone en la presente investigación y que permite teorizar la valoración de empresas, es el fruto de los desarrollos de *Cochrane, Sharpe, Fisher, Williams, Dean, Ross y Markowitz*; por su parte, los trabajos de *Kulatilaka y Pindyck*, permiten ampliar el concepto de la BVE haciendo que ésta sea una bisagra entre la BVE expandida y el riesgo de valor-RiskV. Por tal motivo, se mencionan los factores de descuento estocástico que a razón de las investigaciones de (*Cochrane, 2001*) son equivalentes y por ende relevantes en la investigación.

- Consumption-Based Model-CBM:

Define al factor de descuento estocástico m como el producto entre la impaciencia temporal y la tasa de utilidad marginal intertemporal,

$$m_{t,t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = TMS \quad (2.36)$$

Su ventaja consiste en utilizar la totalidad de la información y preferencias de los individuos a partir de las funciones de utilidad y de aversión al riesgo sin utilizar un portafolio replicante o la teoría por arbitraje. También, se le conoce como la tasa marginal de sustitución intertemporal-TMS

- Capital Asset Pricing Model-CAPM:

Define el factor de descuento como una combinación lineal entre dos parámetros libres (a, b) y un factor que mide el retorno esperado de un portafolio de mercado R^W ,

$$m_{t,t+1} = a + bR_{t,t+1}^W$$

Es común encontrarlo como una representación del retorno-beta esperado,

$$E_t [R_{t,t+1}^i] = \gamma + \beta_{i,R_{t,t+1}^W} [E_t [R_{t,t+1}^W] - \gamma] \quad (2.37)$$

y por lo general, el factor zero-beta es el retorno libre de riesgo, $\gamma = R^f$. Su facilidad de cálculo ha permitido que sea el factor de descuento estocástico más empleado para valorar cualquier tipo de activo, inclusive, es el pilar de la valoración de empresas y de proyectos de inversión debido a que se encuentra fundamentado en el enfoque media-varianza propuesto por Markowitz. Sin embargo, para el año 2008, *Sharpe* replanteó el CAPM a partir del enfoque estado-preferencia.

- Intertemporal Capital Asset Pricing Model-ICAPM:

De la misma manera que el CAPM, el factor de descuento es una combinación lineal entre los parámetros libres del modelo y un factor que además de representar el retorno esperado, representa las variables de estado. El modelo parte de que $c_t = g(z_t)$, por lo tanto,

$$m_{t,t+1} = \beta \frac{u'(g(z_{t+1}))}{u'(g(z_t))}$$

como la función de valor depende de las variables de estado $V(W_{t+1}, z_{t+1})$ tenemos que,

$$m_{t,t+1} = \beta \frac{V(W_{t+1}, z_{t+1})}{V(W_t, z_t)}$$

donde, W es la riqueza del inversionista. Por lo tanto, la representación retorno-

beta esperada será:

$$E [R_{t,t+1}^i] - R_t^f \approx rra_t cov_t \left(R_t^i, \frac{\Delta W_{t+1}}{W_t} \right) + \lambda_{zt} cov_t (R_{t,t+1}^i, \Delta z_{t+1}) \quad (2.38)$$

y con ello el coeficiente de aversión relativa al riesgo,

$$rra_t \equiv - \frac{W V_{WW} (W_t, z_t)}{V_W (W_t, z_t)}$$

- Arbitrage Pricing Theory-APT:

Es considerado el caso general para el retorno-beta esperado debido a que es una combinación lineal entre N parámetros libres y N factores de retorno los cuales se van eliminando a medida que no van aportando riesgo al retorno esperado. Si el retorno de un activo es generado por un factor lineal,

$$R^i = E [R^i] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \bar{f}_j + \varepsilon^i, \quad E [\varepsilon^i] = E [\varepsilon^i \bar{f}_j] = 0 \quad (2.39)$$

entonces, existe un factor m lineal en el factor,

$$m_{t+1} = a + b' f_{t+1}$$

A veces dentro de la comunidad científica se afirma que el CAPM es un caso particular del APT; sin embargo, debido a los supuestos implícitos en el CAPM induce a un tipo de precio absoluto, contrario al APT que induce a un precio relativo.

- No lineal Pricing Model

A veces el factor de descuento estocástico m puede ser una función cualquiera no necesariamente lineal, tal que:

$$m_{t+1} = g(f_{t+1})$$

por lo que su esperanza y varianza no siempre existen; sin embargo, mediante la aplicación del polinomio de aproximación de Taylor será posible linealizar m de tal manera que la esperanza y varianza existan para determinadas condiciones de la variable aleatoria f .

Si se considera que $m = \frac{1}{f}$ y se aplica el valor esperado, se tiene que:

$$E [m] \neq \frac{1}{E [f]}$$

Sin embargo, aplicando el polinomio de aproximación de Taylor tenemos una linealización de m , tal que:

$$E[m] \approx \frac{1}{E[f]} + \frac{1}{E[f]^2} \frac{\text{var}[f]}{E[f]}, \quad \text{para } f > 0 \quad (2.40)$$

El desarrollo de la aproximación (2.40) se encuentra con detalle en el anexo A.

En general, como afirma *Cochrane*, la base de cualquier modelo de valoración de activos tiene como fundamento el modelo de consumo, representado en (2.36).

2.2.4. Variantes de la BVE

A partir de la expresión (2.31), podemos observar la flexibilidad para incorporar características especiales tanto para el factor de descuento estocástico, m , como para al flujo de caja, CF .

Proposición 13. *Si tanto $m_{t,t+j}$ como CF_{t+j} son valores conocidos para $j \geq 0$, entonces:*

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} \quad (2.41)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] + \text{cov}_t [m_{t,t+1}, (V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

Dado que $m_{t,t+j}$ y CF_{t+j} son conocidos para $j \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1}) \end{aligned}$$

Finalmente por (2.34),

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j}$$

□

Proposición 14. *Si CF_{t+j} son valores conocidos para todo $j \geq 0$, entonces:*

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} CF_{t+j} \quad (2.42)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] + cov_t [m_{t,t+1}, (V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

Dado que CF_{t+j} es conocido para todo $j \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= E_t [m_{t,t+1}] (V_{t+1} + CF_{t+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] CF_{t+j} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} CF_{t+j}$$

□

Proposición 15. Si $m_{t,t+j}$ es un valor conocido para todo $j \geq 0$, entonces:

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} E_t [CF_{t+j}] \quad (2.43)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] + cov_t [m_{t,t+1}, (V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

Dado que m_{t+j} es conocido para todo $j \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= m_{t,t+1} E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} E_t [CF_{t+j}]$$

□

Proposición 16. Si tanto $m_{t,t+j}$ como CF_{t+j} son variables aleatorias independientes,

entonces:

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} E_t [CF_{t+j}] \quad (2.44)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1} (V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] + cov_t [m_{t,t+1}, (V_{t+1} + CF_{t+1})] \end{aligned}$$

Dado que m_{t+j} y CF_{t+j} son variables aleatorias independientes, entonces:

$$\begin{aligned} V_t &= E_t [m_{t,t+1}] E_t [(V_{t+1} + CF_{t+1})] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] E_t [CF_{t+j}] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^f} E_t [CF_{t+j}]$$

□

Proposición 17. *Si tanto $m_{t,t+j}$ como CF_{t+j} son variables aleatorias que no son independientes, entonces:*

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} [E_t [m_{t,t+j}] + \beta_{CF_{t+j}} \lambda_{CF_{t+j}}] E_t [CF_{t+j}] \quad (2.45)$$

Demostración. Sea,

$$\begin{aligned}
V_t &= E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j} CF_{t+j}] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] E_t [CF_{t+j}] + cov_t [m_{t,t+j}, CF_{t+j}] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E_t [m_{t,t+j}] E_t [CF_{t+j}] + cov_t [m_{t,t+j}, CF_{t+j}] \frac{E_t [CF_{t+j}]}{E_t [CF_{t+j}]} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_t [m_{t,t+j}] + \frac{cov_t [m_{t,t+j}, CF_{t+j}]}{E_t [CF_{t+j}]} \right] E_t [CF_{t+j}] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_t [m_{t,t+j}] + \frac{cov_t [m_{t,t+j}, CF_{t+j}]}{E_t [CF_{t+j}]} \frac{Var_t [CF_{t+j}]}{Var_t [CF_{t+j}]} \right] E_t [CF_{t+j}]
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_t [m_{t,t+j}] + \beta_{CF_{t+j}} \lambda_{CF_{t+j}} \right] E_t [CF_{t+j}]$$

□

La siguiente variante de la Ecuación de Valor Corporativo (sin demostración) coincide con el resultado (2.31).

Proposición 18. *Si tanto $m_{t,t+j}$ como CF_{t+j} son variables aleatorias bajo ausencia de arbitraje y de un mercado de negociación de activos, entonces:*

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} CF_{t+j} \quad (2.46)$$

2.2.5. Equivalencia del valor corporativo

En la sección 2.1.3 y 2.1.4, se demostró que el flujo de caja libre, FCF , y el costo de capital, $WACC$, definen el rendimiento y la rentabilidad corporativa; además, se afirmó que aquellas cifras agrupan los resultados de indole monetario de los proyectos de inversión y financiación llevados a cabo por la gerencia.

Los trabajos de (Ruback, 1995), (Fernández, 2008a), (Mitra, 2010) y (Adserá and Viñolas, 2003) han demostrado la equivalencia entre diferentes planteamientos de la

BVE, permitiendo con ello configurar una medida de valor corporativo que se ajusta a la información disponible para el analista. Su resultado más importante se le denomina la equivalencia en la valoración.

Proposición 19. *Si,*

$$V_t = f(CF, m) = f(FCF, R^{wacc}) \quad (2.47)$$

Entonces,

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^{wacc}} E_t [FCF_{t+j}] \quad (2.48)$$

Es decir, la ecuación de valor corporativo puede expresarse como el valor esperado de los flujos de caja libre descontados al costo promedio ponderado de capital.

En general, la ecuación de valor corporativo parte del enfoque basado en consumo proporcionando flexibilidad en el uso de un factor de descuento estocástico que puede expresarse linealmente y adoptar formas alrededor de una media-varianza o estado-preferencia. De igual manera, el flujo de caja adquiere propiedades dinámicas bajo el enfoque, accediendo a características especiales que le permiten moverse en un espacio y tiempo determinado.

Por su parte, las medidas de flujo de caja libre y costo de capital corporativo se adaptan satisfactoriamente al enfoque basado en consumo, debido al vínculo que la valoración de empresas posee con el mercado de valores, permitiendo así definir una medida de valor en la cual los demás métodos de valoración convergen cuando conceptualmente son correctos.

Sin embargo, a pesar de la ausencia de un mercado organizado que deja inoperable algunos principios, el modelo basado en consumo facilita la construcción de un factor de descuento estocástico de acuerdo al perfil de riesgo y a la función de utilidad de cada inversionista.

Y finalmente, lo más importante, la independencia entre el factor y el flujo de caja no son evidentes como nos presenta la literatura financiera, la relación que presentan no es de correlación constante a través del tiempo, más bien es una correlación dinámica; es decir, el aporte del factor de descuento al flujo de caja libre es un proceso estocástico.

2.2.6. La ecuación de valor corporativo general-BVEg

A pesar del potencial de la ecuación de valor corporativo-BVE, esta adolece de no poseer flexibilidad en la decisiones estratégicas de la compañía; es decir, no mide el

valor potencial que tendría determinadas decisiones tomadas por la gerencia entorno a las oportunidades de negocio disponibles a futuro.

Sin embargo, con los trabajos de *Black-Scholes-Merton* en la década de los 70's, se abrió un vínculo notablemente explotado por (Myers, 1976), (Trigeorgis and Manson, 1987), (Pindyck, 1988) y (Kulatilaka, 1985), el cual denominan el valor de la flexibilidad en los proyectos. En principio, su planteamiento consistió en establecer el valor de la flexibilidad a partir de la aplicación de las opciones financieras a los activos subyacentes que no generan dividendos, particularmente asocian la flexibilidad con las opciones europeas permitiendo así adaptar rápidamente el modelo de BSM. El primero en acuñar el término de Opción Real-ROA para tal proceso de valoración fue Myers en 1976.

Por otra parte, una primera aproximación operativa de las opciones reales de tipo americano se atribuye a (Schwartz and Moon, 2000) que a inicio del presente siglo planteó la valoración de la flexibilidad de empresas de Internet mediante la adaptación de las ecuaciones diferenciales estocásticas a las variables macroinductoras de valor corporativo, extendiendo el concepto de opción real hacia un esquema más estratégico.

Si bien es cierto que no existe un consenso en la estimación de algunos parámetros y en los supuestos idóneos para realizar el proceso de valoración de opciones reales, el fundamento de las ecuaciones diferenciales estocásticas⁶, los árboles binomiales⁷ y la simulación⁸ siguen totalmente vigentes, sirviendo como instrumentos para llevar a cabo el proceso de valoración de dichos activos.

Definición 2.2.2 (Opción Real). *Es una opción financiera bajo un contexto estratégico con valor, O_t , en función de su costo de inversión, X , del valor actual de sus flujos futuros de caja, V_T , y del factor de descuento estocástico tanto de la opción, m_T , como del proyecto, $m_{t,t+T}$; de tal manera que:*

$$\text{máx } O_t = E_t [m_{t,t+T} (V_T - X)^+] \quad (2.49)$$

sujeto a:

$$m_{t,t+T} > 0, \quad V_T = E_t [m_T C F_T], \quad 1 = E_t (m_T R^f)$$

donde la primera restricción implica ausencia de arbitraje, mientras las dos restantes establecen la dinámica del valor actual de los flujos y la tasa libre de riesgo respectivamente (Cochrane, 2001).

En consecuencia, el valor global de una compañía esta en función del valor propor-

⁶Método de Black-Scholes-Merton para opciones europeas, Método de valoración de opciones de vida infinita de McDonald-Siegel-Samuelson.

⁷Método de Cox-Ross-Rubinstein para cualquier opción.

⁸Método de Schwartz para opciones americanas.

cionado por la operación normal y el valor de las oportunidades estratégicas disponibles para el negocio y que son responsabilidad del equipo gerencial.

Definición 2.2.3 (Ecuación de valor corporativo general-BVEg). *Se define el valor corporativo general V_t^g como un proceso aditivo entre el valor permanente, V_t , y el valor flexible otorgado por la oportunidad estratégica u opción real del negocio, O_t . Esto es:*

$$V_t^g = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} C F_{t+j} + m_{t,t+T} (V_T - X)^+ \quad (2.50)$$

Los supuestos detrás de la ecuación son:

- Dependiendo de la información disponible la BVEg se aplicará tanto en un espacio de tiempo discreto como continuo.
- El componente de opción real posee las características propias de una opción financiera *call* de tipo americano con dividendos, sin embargo la ausencia de un portafolio replicable dificulta el proceso de valoración de tales opciones mediante las herramientas tradicionales como BSM y los árboles binomiales; por otra parte, la estimación de la volatilidad es cosa de locura temporal!
- El valor de la opción real \tilde{O}_t es independiente del valor corporativo \tilde{V}_t . Esto implica que la nueva oportunidad de negocio tendrá una estructura de capital diferente y por lo tanto un costo de capital independiente del que posee la compañía; además, los flujos de caja tanto de la opción como de la compañía difieren desde un punto de vista de inferencia estadística debido a la información disponible para realizar la estimación de los parámetros del modelo.
- La ausencia de opciones reales o el no ejercicio de la opción real implican un valor cero en el término, por lo tanto la compañía vale por su posición estratégica actual.
- Dependiendo de la instrumentación financiera en el mercado es posible reemplazar la opción real por cualquier instrumento derivado (Vainilla, Exóticas y Futuros).

La siguiente proposición (sin demostración) es un resultado de (Cochrane, 2001), (Myers, 1976), (Dufresne, 1990), (Hillier, 1963) y (Kruschwitz and Loffler, 2006).

Proposición 20. *Sea $\tilde{V}_t(w)$ y $\tilde{O}_t(w)$ una estimación particular de la trayectoria w en el periodo t ,*

$$\tilde{V}_t^g(w) = \tilde{V}_t(w) + \tilde{O}_t(w)$$

Si $w \in \Omega$, entonces $\tilde{V}_t(w)$ y $\tilde{O}_t(w)$ serán variables aleatorias en t y por lo tanto,

$$V_t^g = E_t \left[\tilde{V}_t + \tilde{O}_t \right] \quad (2.51)$$

y,

$$V_t^g = E_t \left[\tilde{V}_t^g \right] \rightarrow p_t$$

siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad.

2.3. Esperanza condicional y estimación de parámetros

En general, se considera la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ y una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible respecto a \mathfrak{F} y a una colección de subconjuntos $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} llamados Borelianos. Es así, que para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$; por lo tanto, se define $\mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$ que representa la probabilidad de que ocurra el evento $X(w) \in A$.

Puesto que X es una variable aleatoria, se pueden definir unas características $f_X(x)$ y $F_X(x)$ llamadas la densidad de X y la función de distribución de X respectivamente. Cuya relación queda determinada por $dF_X(x) = f_X(x) dx$, permitiendo calcular los momentos de la variable X , esto es:

$$E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n dF(x), \quad Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 dF(x)$$

2.3.1. Esperanza condicional y procesos estocásticos

Partiendo de la definición general de esperanza condicional presentada en (Rincón, 2004). Se consideran dos variables aleatorias discretas X y Y con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

y cuya esperanza condicional de X dado que $(Y = y_j)$ es:

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j)$$

Se puede definir una función del espacio muestral Ω para $w \in \Omega$ tal que:

$$\begin{aligned} E(X|Y) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow E(X|Y)(w) \end{aligned}$$

que representa una variable aleatoria a través de los m posibles valores de Y y que podemos escribir en términos de funciones indicadoras, esto es:

$$E(X|Y)(w) = \sum_{j=1}^m E(X|Y = y_j) 1_{Y=y_j}(w)$$

Dado que $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ es la mínima σ -álgebra generada por la partición de los posibles valores de la variable aleatoria Y , entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{F}$ y como $E(X|Y)$ es constante para cada elemento de tal partición, es por tanto \mathcal{F} -medible ($E(X|\mathcal{F})$). Es por ello que para cualquier evento $F \in \mathcal{F}$ se cumple,

$$\int_F E(X|Y)(w) d\mathbb{P}(w) = \int_F X(w) d\mathbb{P}(w)$$

Teorema 21. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria con esperanza finita. Sea \mathcal{F} una sub σ -álgebra de \mathfrak{F} . Entonces existe una variable aleatoria denotada por $E(X|\mathcal{F})$ tal que:*

1. $E(X|\mathcal{F})$ es \mathcal{F} -medible.
2. $E(X|\mathcal{F}) < \infty$
3. Para cada $F \in \mathcal{F}$

$$\int_F E(X|\mathcal{F})(w) d\mathbb{P}(w) = \int_F X(w) d\mathbb{P}(w)$$

Además, la variable $E(X|\mathcal{F})$ es única, pues si existe otra variable aleatoria Z con las mismas tres propiedades entonces $Z = E(X|\mathcal{F})$, c.s

Ahora, recordando las principales propiedades de la esperanza condicional que son:

- $E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$
- $E(1_A|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{P}(A)$
- $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$
- Si X es \mathcal{F} -medible entonces,

$$E(X|\mathcal{F}) = X$$

- $E(aX + Y|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + E(Y|\mathcal{F})$
- Si $X > 0$ entonces $E(X|\mathcal{F}) > 0$

- Si h es una función convexa tal que la variable aleatoria $h(X)$ es integrable entonces casi seguramente,

$$h[E(X|\mathcal{F})] \leq E(h(X)|\mathcal{F})$$

- Si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ entonces $E(X|\mathcal{F}_1)$ es \mathcal{F}_2 -medible y por lo tanto,

$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$$

- Si Y es una variable aleatoria \mathcal{F} -medible y acotada

$$E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F}) \quad c.s.$$

- Si X y \mathcal{F} son independientes

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X) \quad c.s.$$

Un modelo que pretende representar los fenómenos que se desarrollan en el tiempo se le llama proceso estocástico y su fundamento consiste en representar el grado de dependencia o independencia de las variables aleatorias que conforman el proceso con el fin de realizar pronósticos condicionados a la historia del mismo. Formalmente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \geq 0\}$ sobre un espacio Ω o de estados e indexadas por un parámetro $t \geq 0$, que pertenece al espacio parametral y que por lo general es el tiempo, esto implica que para un t fijo se define una variable aleatoria tal que,

$$\begin{aligned} X_t &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto X_t(w) \end{aligned}$$

Y para algún $w \in \Omega$ se define una función tal que:

$$\begin{aligned} X(w) &: T \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_t(w) \end{aligned}$$

la cual se denomina realización, trayectoria o trayectoria muestral del proceso estocástico X .

De igual manera, para cada $t \geq 0$ la σ -álgebra

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$$

representa la historia del proceso hasta el tiempo t y en ella están contenidos todos los posibles eventos o sucesos generados por el proceso en el intervalo $[0, t]$. Es decir, la mínima σ -álgebra respecto a la cual el proceso estocástico es función aleatoria es aquella generada por $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ y se denota por \mathcal{F} .

Con base en lo anterior, se pueden introducir características no aleatorias tales como la distribución, la esperanza y la varianza, entre otras; permitiendo así, describir su estructura de dependencia. De hecho, un proceso estocástico puede ser interpretado como una colección de vectores de dimensión finita a los cuales se asocia una función de distribución marginal de dimensión finita-*fidis* definida por:

$$F_{\mathbf{X}} = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_t \leq x_t)$$

para todas las posibles elecciones de tiempos $1, 2, 3, \dots, t \in T$. Y cuya familia de *fidis* determinan la función de distribución de los procesos estocásticos.

De forma análoga al caso univariante, la esperanza $\mu_{\mathbf{X}}$ y la covarianza $\Sigma_{\mathbf{X}}$ de un proceso estocástico $\mathbf{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ se definen como:

$$\mu_{\mathbf{X}} = (E(X_1), \dots, E(X_t)), \quad \Sigma_{\mathbf{X}} = \text{cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, t.$$

respectivamente. Por su parte, la varianza es un elemento de la matriz de covarianzas cuando $i = j$.

Ahora, si se atribuyen ciertas condiciones a las *fidis* podemos obtener un tipo de proceso estocástico de estructura dependiente y que denominamos proceso estrictamente estacionario.

Definición 2.3.1 (Proceso estocástico estrictamente estacionario). *Un proceso $\mathbf{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ es estrictamente estacionario si las fidis son invariantes respecto a los cambios en t , esto es:*

$$(X_1, X_2, \dots, X_t) \stackrel{d}{=} (X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{t+h}) \quad (2.52)$$

para cualquier elección de índices $1, 2, \dots, t, 1+h, 2+h, \dots, t+h \in T$. Es decir, ambos vectores aleatorios poseen idéntica función de distribución.

Sin embargo, dado que en la práctica no es posible comprobar la condición de estrictamente estacionario, recurrimos a la condición de estacionariedad débil o de segundo orden.

Definición 2.3.2 (Proceso estocástico débilmente estacionario). *Un proceso $\mathbf{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ es débilmente estacionario o de segundo orden si posee las siguientes propiedades:*

- $\mu_{\mathbf{X}} = \mu$
- $\sigma_{\mathbf{X}}^2 = \sigma^2$
- $\text{cov}(X_{s+h}, X_{t+h}) = \text{cov}(X_s, X_t)$

Por otra parte, no sólo interesa la estacionariedad del proceso, también la de su incremento.

Definición 2.3.3 (Incrementos estacionarios de un proceso estocástico). *Sea $\mathbf{X} = \{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Decimos que \mathbf{X} posee incrementos estacionarios si:*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h} \quad \forall t, s, t+h, s+h \in T \quad (2.53)$$

Además, \mathbf{X} tiene incrementos independientes si para todo $t_i \in T$ con $t_1 < \dots < t_n$ y $n \geq 1$,

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

Por último, presentamos una propiedad importante de los procesos estacionarios formulada en (Peña, 2010).

Teorema 22 (Combinación de procesos estocásticos). *Sea $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})$ un vector de k procesos estacionarios con vector de medias constante \mathbf{u} y matriz de covarianza $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}_t}$; además, $\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ es un vector de constantes arbitrarias, entonces existe una combinación lineal Y_t tal que,*

$$Y_t = \mathbf{c}'\mathbf{X}_t = c_1X_{1t} + c_2X_{2t} + \dots + c_kX_{kt}$$

con $E(Y_t) = \mathbf{c}'\mathbf{u}$, $\text{var}(Y_t) = \mathbf{c}'\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}_t}\mathbf{c}$ y $\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \mathbf{c}'\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}_t}(k)\mathbf{c}$ que hacen al proceso Y_t estacionario.

2.3.2. Estimación del Cash Flow CF

A razón de la ecuación de valor corporativo general-BVEg (2.50) y de la condición de transversalidad (2.24), el Cash Flow de una firma es un proceso estocástico que considera lo que se conoce hasta hoy, t , y lo que se conocerá en el futuro, k ; Esto es:

$$\{CF_t : s < t < k\}$$

Y,

$$\{cf_t : s < t\}$$

Representa la serie temporal del proceso estocástico.

Definición 2.3.4 (Esperanza Condicional del Cash Flow). *La esperanza condicional de la variable aleatoria CF_{t+1} dada la información en el periodo t , se define como:*

$$E[CF_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E_t[CF_{t+1}]$$

Algunas propiedades son:

- (Esperanza Clásica) En $t = 0$ la esperanza condicional y la esperanza clásica coinciden

$$E[CF_{t+1}|\mathcal{F}_0] = E[CF_{t+1}]$$

- (Linealidad) Para cualquier número real a, b se cumple:

$$E[aCF_{t+1} + bCF_{t+2}|\mathcal{F}_t] = aE_t[CF_{t+1}] + bE_t[CF_{t+2}]$$

- (Cantidad Cierta) Para cualquier número real a , conocido, se tiene que:

$$E[a|\mathcal{F}_t] = a$$

- (Esperanza Iterada) Para $t \leq t + 1$

$$E[E[CF|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] = E_t[CF]$$

- (Esperanza de Cantidades Ciertas) Si una cantidad CF es realizada en el tiempo t , entonces para cualquier CF , se tiene que:

$$E[CF_t CF_{t+1}|\mathcal{F}_t] = CF_t E_t[CF_{t+1}]$$

El Cash Flow como proceso estocástico de tipo binomial fue planteado por (Kruschwitz and Löffler, 2006) y su representación se encuentra en la figura 2.2. Por lo tanto, si u ocurre con probabilidad p y d con probabilidad $q = 1 - p$, entonces:

$$E_t[CF_{t+k}] = (up + dq)^k CF_t \quad (2.54)$$

Las consecuencias prácticas del anterior permiten una flexibilidad entre la modelización probabilística objetiva y subjetiva, adaptándose fácilmente a la información disponible

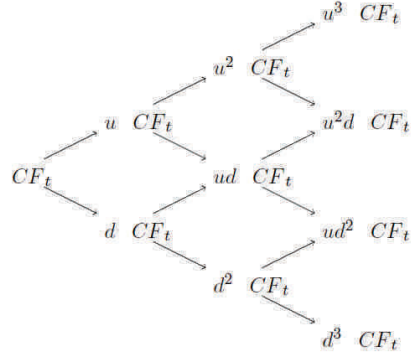


Figura 2.2: Árbol binomial del CF

y al criterio de cada administrador financiero.

Proposición 23. Si $p = q$ y $u = 1 + g > d = 1 - g > 0$ para todo $0 < g < 1$, Entonces:

$$E_t [CF_{t+k}] = CF_t$$

Es una martingala para todo $k > 0$.

Demostración. Sea,

$$E_t [CF_{t+k}] = (up + dq)^k CF_t$$

haciendo $p = q = 0,5$,

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}d = 1$$

Entonces,

$$E_t [CF_{t+k}] = CF_t$$

□

Proposición 24. Si $p < q$ y $u = 1 + g > d = 1 - g > 0$ para todo $0 < g < 1$, y CF_t cumple con la condición de transversalidad, Entonces:

$$CF_{t+1} = \phi CF_t + \varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.55)$$

Es un proceso autoregresivo de primer orden $AR(1)$.

Demostración. Si, $p < q$ y $u = 1 + g > d = 1 - g > 0$ para todo $0 < g < 1$, entonces:

$$0 < (up + dq) < 1$$

haciendo,

$$(up + dq) = \phi$$

Tenemos que:

$$E_t [CF_{t+k}] = \phi^k CF_t$$

Para $k = 1$,

$$E_t [CF_{t+1}] = \phi CF_t$$

Ahora, considerando que CF_t es un proceso estocástico y que posee la condición de transversalidad en (2.24), para $CF_t = p_t$, donde la media y la varianza del proceso CF_t son constantes para todo periodo t (Kruschwitz and Loffler, 2006). Entonces,

$$CF_{t+1} = \phi CF_t + \varepsilon_{t+1}$$

□

De manera compacta, el proceso autoregresivo de primer orden de (2.55) se expresa como:

$$(1 - \phi L) CF_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$$

Proposición 25. *Si el proceso estocástico CF_t se ajusta a un modelo $AR(1)$, entonces:*

$$CF_{t+1} = \phi^{t+1} CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

Demostración. Sea,

$$CF_{t+1} = \phi CF_t + \varepsilon_{t+1}$$

Para $t = 0$,

$$CF_1 = \phi CF_0 + \varepsilon_1$$

Para $t = 1$,

$$\begin{aligned} CF_2 &= \phi CF_1 + \varepsilon_2 \\ &= \phi (\phi CF_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \\ &= \phi^2 CF_0 + \phi \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Para $t = 2$

$$\begin{aligned} CF_3 &= \phi CF_2 + \varepsilon_3 \\ &= \phi (\phi^2 CF_0 + \phi \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 \\ &= \phi^3 CF_0 + \phi^2 \varepsilon_1 + \phi \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Para t

$$CF_{t+1} = \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

□

Proposición 26. *Si el proceso estocástico CF_t se ajusta a un modelo $AR(1)$, entonces la media y la varianza condicionada del proceso están determinadas por:*

$$E_t [CF_{t+1}] = \phi^{t+1}CF_t, \quad y \quad var_t [CF_{t+1}] = var [\varepsilon_{t+1}]$$

respectivamente.

Demostración. Sea,

$$CF_{t+1} = \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

Aplicando el operador E_t

$$\begin{aligned} E_t [CF_{t+1}] &= E_t \left[\phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i} \right] \\ &= E_t [\phi^{t+1}CF_t] + E_t \left[\sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i} \right] \\ &= \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t E_t [\phi^i \varepsilon_{t+1-i}] \\ &= \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i E_t [\varepsilon_{t+1-i}] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E_t [CF_{t+1}] = \phi^{t+1}CF_t$$

De manera análoga se procede para obtener la varianza. □

Proposición 27. *Si el proceso estocástico CF_t se ajusta a un modelo $AR(1)$, entonces la media y la varianza, no condicionada del proceso están determinadas por:*

$$E [CF_{t+1}] = \frac{\phi_0}{1 - \phi}, \quad \phi_0 \in \mathbb{R}, \quad y \quad var [CF_{t+1}] = \frac{var [\varepsilon_{t+1}]}{1 - \phi^2}$$

respectivamente.

Demostración. Sea,

$$CF_{t+1} = \phi_0 + \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

Aplicando el operador E

$$\begin{aligned} E[CF_{t+1}] &= E \left[\phi_0 + \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i} \right] \\ &= E[\phi_0] + E[\phi^{t+1}CF_t] + E \left[\sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i} \right] \\ &= \phi_0 + \phi^{t+1}E[CF_t] \\ E[CF_{t+1}] - \phi^{t+1}E[CF_t] &= \phi_0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E[CF_{t+1}] = \frac{\phi_0}{1-\phi}, \quad \phi_0 \in \mathbb{R}$$

Ahora, se demuestra que:

$$CF_{t+1} = \phi CF_t + \varepsilon_{t+1}$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} (CF_{t+1})^2 &= (\phi CF_t + \varepsilon_{t+1})^2 \\ &= (\phi CF_t)^2 + 2\phi CF_t \varepsilon_{t+1} + (\varepsilon_{t+1})^2 \end{aligned}$$

Aplicando el operador E

$$\begin{aligned} E[(CF_{t+1})^2] &= E[(\phi CF_t)^2 + 2\phi CF_t \varepsilon_{t+1} + (\varepsilon_{t+1})^2] \\ &= E[(\phi CF_t)^2] + 2\phi E[CF_t \varepsilon_{t+1}] + E[(\varepsilon_{t+1})^2] \\ &= E[(\phi CF_t)^2] + E[(\varepsilon_{t+1})^2] \\ &= \phi^2 E[CF_t^2] + \text{var}[\varepsilon_{t+1}] \\ E[(CF_{t+1})^2] - \phi^2 E[CF_t^2] &= \text{var}[\varepsilon_{t+1}] \\ \text{var}[CF_{t+1}] - \phi^2 \text{var}[CF_t] &= \text{var}[\varepsilon_{t+1}] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{var}[CF_{t+1}] = \frac{\text{var}[\varepsilon_{t+1}]}{1-\phi^2}$$

□

Proposición 28. *Si el proceso estocástico CF_t se ajusta a un modelo $AR(1)$, entonces el proceso estocástico es débilmente estacionario cuando:*

$$|\phi| < 1$$

Demostración. Sea,

$$CF_{t+1} = \phi^{t+1}CF_t + \sum_{i=0}^t \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

Aplicando el operador E_t , se obtiene:

$$E_t[CF_{t+1}] = \phi^{t+1}CF_t$$

Por lo tanto, el proceso será estacionario en media cuando $|\phi| < 1$ puesto que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t[CF_{t+j}] = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi^{t+j}CF_t = 0$$

Por otra parte, aplicando el operador var , se obtiene:

$$var[CF_{t+1}] = var[\varepsilon_{t+1}] \sum_{i=0}^t \phi^{2i}$$

Dado que,

$$\sum_{i=0}^t \phi^{2i} = \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}$$

Entonces, el proceso será estacionario en varianza cuando $|\phi| < 1$ puesto que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} var[CF_{t+j}] = \lim_{j \rightarrow \infty} var[\varepsilon_{t+j}] \frac{1 - \phi^{2j}}{1 - \phi^2} = \frac{var[\varepsilon_{t+1}]}{1 - \phi^2}$$

□

Proposición 29 (Condición de Estacionariedad). *Si el proceso estocástico CF_t se ajusta a un modelo $AR(1)$ y es débilmente estacionario, entonces:*

$$CF_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

y se dice que el proceso CF_t sigue un proceso de media móvil de orden infinito, $MA(\infty)$.

Demostración. Sea,

$$CF_{t+j} = \phi^{t+j}CF_t + \sum_{i=0}^j \phi^i \varepsilon_{t+j-i}$$

Aplicando $\lim_{j \rightarrow \infty}$, tenemos que:

$$CF_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t+1-i}$$

□

Por otra parte, para un proceso estocástico, CF_t , débilmente estacionario, la función de autocovarianza y autocorrelación está determinada por:

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}, \quad \text{y} \quad \rho_k = \phi^k, \quad k > 1,$$

respectivamente,

Sin embargo, a diferencia de la propuesta de Kruschwitz (Kruschwitz and Loffler, 2006), la dinámica del flujo de caja CF_t podría ser modelada a partir de un proceso autoregresivo de media móvil $ARMA(p, q)$, siendo los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$ casos particulares del mismo. Tal argumento, se justifica con las propiedades de estacionariedad que posee el proceso de medias móviles-MA y por el teorema de Wold.

Teorema 30 (Descomposición de Wold). *Todo proceso estocástico débilmente estacionario, CF_t , de media finita, μ , que no contenga componentes deterministas, puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas, ε_t , (Wold, 1938). Esto es:*

$$CF_{t+1} = c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+1-i}, \quad \psi_0 = 1, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2) \quad (2.56)$$

Corolario 31. *Si un proceso estocástico, CF_t , puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas, ε_t , entonces la media y la varianza no condicionada del proceso son:*

$$E[CF_{t+1}] = \phi_0$$

y,

$$\text{var}[CF_{t+1}] = \text{var}[\varepsilon_{t+1}] \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

respectivamente.

Por su parte, las funciones de autocovarianza y autocorrelación están dada por:

$$\gamma_k = \text{var}[\varepsilon_{t+1}] \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}, \quad k > 1$$

y,

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}, \quad k > 1,$$

respectivamente,

Proposición 32 (Inversa de Wold). *Si un proceso estocástico, CF_t , puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas, ε_t , entonces:*

$$\Pi(L)CF_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$$

Representa la invertibilidad del proceso. Además,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 < \infty, \quad y \quad \Pi(L)\Psi(L) = 1$$

Proposición 33. *Si el proceso estocástico, CF_t , es débilmente estacionario y admite la descomposición de Wold, entonces puede ser expresado como un proceso $ARMA(p, q)$, tal que:*

$$\Phi(L)CF_{t+1} = \Theta(L)\varepsilon_{t+1} \quad (2.57)$$

Proposición 34. *Si el proceso estocástico, CF_t , es débilmente estacionario y sigue un proceso $ARMA(p, q)$, entonces:*

$$CF_{t+1} = \Psi(L)\varepsilon_{t+1} \quad (2.58)$$

y cumple con la identidad,

$$\Phi(L)\Psi(L) \equiv \Theta(L)$$

Proposición 35. *Si el proceso estocástico, CF_t , es débilmente estacionario, es invertible y sigue un proceso $ARMA(p, q)$, entonces:*

$$\varepsilon_{t+1} = \Pi(L)CF_{t+1} \quad (2.59)$$

y cumple con la identidad,

$$\Pi(L)\Theta(L) \equiv \Phi(L)$$

Proposición 36. *Si un proceso estocástico, CF_t , sigue un proceso débilmente estacionario $ARMA(p, q)$, entonces su media y su varianza no condicionadas son:*

$$E[\Phi(L)CF_{t+1}] = E[\Theta(L)\varepsilon_{t+1}] = 0$$

y,

$$\text{var}[CF_{t+1}] = \text{var}[\varepsilon_{t+1}] + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_p - \theta_1 E[\varepsilon_t CF_{t+1}] - \dots - \theta_q E[\varepsilon_{t+1-q} CF_{t+1}]$$

Respectivamente.

Por su parte, la función de autocovarianza y autocorrelación está dada por:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k > q$$

y,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 1$$

respectivamente,

En general, $\Pi(L)$, $\Psi(L)$, $\Phi(L)$ y $\Theta(L)$, representan los polinomios característicos.

Definición 2.3.5 (Predictor de un proceso estocástico). Sea $CF_t = \{cf_1, cf_2, \dots, cf_t\}$ la realización de un proceso estocástico, se define

$$\widehat{CF}_t(k) = \alpha_1 cf_t + \alpha_2 cf_{t-1} + \dots + \alpha_t cf_1 \quad (2.60)$$

Como el predictor lineal de CF_t .

Definición 2.3.6 (Error de predicción de un predictor). Sea CF_t la realización de un proceso estocástico y $\widehat{CF}_t(k)$ el predictor lineal de tal proceso, entonces:

$$e_t(k) = CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k) \quad (2.61)$$

Es el error de predicción del predictor $\widehat{CF}_t(k)$. Además, la función de pérdida relacionada a tal error está determinada por:

$$l(e_t(k)) = [e_t(k)]^2$$

Teorema 37 (Predictor óptimo). Si,

$$e_t(k) = CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k)$$

es el error de predicción de un predictor $CF_t(k)$, y

$$l(e_t(k)) = [e_t(k)]^2$$

la función de pérdida cuadrática; entonces el predictor óptimo que minimiza el error

cuadrático medio de predicción,

$$\text{mín } E_t \left[\left(CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \right]$$

esta dado por:

$$\widehat{CF}_t(k) = \mu_{t+k|t} = E_t [CF_{t+k}] \quad (2.62)$$

y se denomina el predictor óptimo.

Demostración. Se parte del argumento de minimizar el error cuadrático medio de predicción, tal que:

$$\text{mín } E_t \left[\left(CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \right]$$

Si,

$$\mu_{t+k|t} = E_t [CF_{t+k}]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_t [e_t^2(k)] &= E_t \left[\left(CF_{t+k} - \mu_{t+k|t} + \mu_{t+k|t} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \right] \\ &= E_t \left[\left(CF_{t+k} - \mu_{t+k|t} \right)^2 + \left(\mu_{t+k|t} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \right] \\ &= E_t \left(CF_{t+k} - \mu_{t+k|t} \right)^2 + E_t \left(\mu_{t+k|t} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \\ &= \text{var}_t [CF_{t+k}] + E_t \left(\mu_{t+k|t} - \widehat{CF}_t(k) \right)^2 \end{aligned}$$

Y, dado que la varianza no depende del predictor, entonces:

$$\mu_{t+k|t} - \widehat{CF}_t(k) = 0$$

cuando,

$$\widehat{CF}_t(k) = \mu_{t+k|t} = E_t [CF_{t+k}]$$

□

En general, la esperanza condicional a los datos observados es el predictor óptimo para cualquier secuencia de la serie de tiempo CF_t .

Proposición 38. *Si un proceso estocástico débilmente estacionario, CF_t , puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas, ε_t , entonces la*

varianza de los errores de predicción esta determinada por:

$$\text{var}_t [e_t(k)] = \text{var}_t [\varepsilon_t] \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i^2 \quad (2.63)$$

Demostración. Sea,

$$CF_{t+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+k-i}$$

la representación de Wold, y

$$\widehat{CF}_t(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{k+i} \varepsilon_{t-i}$$

la predicción óptima. Considerando que:

$$e_t(k) = CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k)$$

Entonces,

$$e_t(k) = \varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \dots + \psi_{k-1} \varepsilon_{t+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{var}_t [e_t(k)] &= \text{var} [\varepsilon_t] (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{k-1}^2) \\ &= \text{var} [\varepsilon_t] \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i^2 \end{aligned}$$

□

Proposición 39. Si $\widehat{CF}_t(k)$ es un estimador insesgado normal con media, CF_{t+k} , y varianza, $\text{var}_t [\varepsilon_t] \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i^2$, entonces:

$$\mathbb{P} \left(|CF_{t+k} - \widehat{CF}_t(k)| < Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\text{var} [\varepsilon_t] \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

representa el intervalo de confianza al $(1 - \alpha)$ % de CF_{t+k}

El proceso de estimación de las ponderaciones $\widehat{\psi}_i$ parte de la identidad,

$$\left(1 - \widehat{\phi}_1 L - \dots - \widehat{\phi}_p L^p\right) \left(1 - \widehat{\psi}_1 L - \widehat{\psi}_2 L^2 - \dots\right) = \left(1 - \widehat{\theta}_1 L - \dots - \widehat{\theta}_q L^q\right)$$

al igual los coeficientes de los operadores en ambos lados de la identidad, se obtiene la

solución recursiva,

$$\widehat{\psi}_k = \begin{cases} \widehat{\theta}_j + \widehat{\phi}_1 \widehat{\psi}_{j-1} + \widehat{\phi}_2 \widehat{\psi}_{j-2} + \dots + \widehat{\phi}_p \widehat{\psi}_{j-p}, & \text{para } j = 1, 2, \dots, q \\ \widehat{\phi}_1 \widehat{\psi}_{j-1} + \widehat{\phi}_2 \widehat{\psi}_{j-2} + \dots + \widehat{\phi}_p \widehat{\psi}_{j-p}, & \text{para } j > q \end{cases}$$

Con $\widehat{\psi}_0 = -1$ y $\widehat{\psi}_{j-i} = 0$ si $j < i$.

Ahora bien, un resultado importante es que todo proceso *ARMA* puede ser representado por una función aditiva de procesos autoregresivos *AR*, (Peña, 2010) y (Granger and Morris, 1976), esto es:

$$AR(p_1) + AR(p_2) + \dots + AR(p_k) = ARMA\left(\sum_{i=1}^k p_i, \max(p_1, p_2, \dots, p_k)\right) \quad (2.64)$$

de gran importancia en la modelización financiera cuando existen variables que no son directamente observables pero que son un resultado de una combinación lineal de otras que sí poseen tal propiedad.

De esta manera, si $FCF_t \sim ARMA(p, q)$ entonces tal proceso puede representarse como una suma de procesos autoregresivos, es evidente que aquella suma puede ser la expresión (2.5) que define el free cash flow,

$$FCF_t = CF_t^{Sales} - CF_t^G - Ope x_t - Cap x_t - CF_t^{Taxes}$$

lo que sugiere que cada componente sea un proceso autoregresivo independiente tal que $p = p_1 + p_2 + \dots + p_5$ y $q = \max(p_1, p_2, \dots, p_5)$.

2.3.3. La función de utilidad y aversión al riesgo del administrador financiero

Definición 2.3.7 (Lotería o Perspectiva Aleatoria). *Dada una alternativa $a_j \in A$ y x_i la consecuencia económica de dicha decisión en el estado θ_i , entonces:*

$$\ell = \left(\begin{array}{cccccc} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & \cdots & p_i & \cdots & p_n & \cdots \end{array} \right), \quad p_i = \mathbb{P}(\theta_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

se le denomina lotería o perspectiva aleatoria asociada a la alternativa, $a_j \in A$.

Definición 2.3.8 (Mixtura u Operación Lineal). *Una Mixtura es el proceso que asocia a todo par de perspectivas aleatorias $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ con sus respectivas probabilidades de*

obtención p , esto es:

$$\begin{pmatrix} p & (1-p) \\ \ell & \ell' \end{pmatrix} \equiv p\ell + (1-p)\ell', \quad 0 \leq p \leq 1$$

Definición 2.3.9 (Espacio de Mixturas). *Un espacio de mixturas es un conjunto \mathfrak{L} de perspectivas aleatorias sobre el que se define una operación de mixtura y cumple con los siguientes axiomas:*

A1 *Racionalidad del decisor, si*

$$\forall \ell, \ell' \in \mathfrak{L}, \text{ y } \forall p \in [0, 1] \quad \text{entonces} \quad p\ell + (1-p)\ell' \in \mathfrak{L}$$

A2 *Irrelevancia en los elementos de la lotería,*

$$p\ell + (1-p)\ell' = (1-p)\ell' + p\ell$$

A3 *Indiferencia respecto a los resultados, si*

$$\ell'' = p\ell + (1-p)\ell'$$

y considerando la mixtura

$$q\ell'' + (1-q)\ell'$$

entonces,

$$q\ell'' + (1-q)\ell' = pq\ell + (1-pq)\ell'$$

Definición 2.3.10 (Espacio de Utilidad). *Un espacio de utilidad es un conjunto \mathfrak{L} que cumple con los siguientes axiomas:*

A1 *\mathfrak{L} es un espacio de mixturas.*

A2 *Preorden sobre \mathfrak{L} o preferencia estricta, \succsim , entre loterías.*

A3 *Sustitución,*

$$\forall \ell, \ell', \ell'' \in \mathfrak{L} \quad \text{y} \quad \forall p \in (0, 1)$$

se cumple que,

$$\ell \succsim \ell' \Leftrightarrow p\ell + (1-p)\ell'' \succsim p\ell' + (1-p)\ell''$$

A4 *Continuidad, si*

$$\ell, \ell', \ell'' \in \mathfrak{L}, \text{ con } \ell \succsim \ell' \succsim \ell''$$

existe un

$$\lambda \in [0, 1]$$

tal que,

$$\lambda \ell + (1 - \lambda) \ell'' = \ell'$$

Lema 40. Dado un espacio de mixtura, \mathfrak{L} , con $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathfrak{L}$ y $\ell_1 \succ \ell_2$, entonces:

$$\lambda \ell_1 + (1 - \lambda) \ell_3 \succ \lambda \ell_2 + (1 - \lambda) \ell_3, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Lema 41. Dadas dos loterías con los mismos premios, es preferible la que atribuye mayor probabilidad al premio más deseable. Es decir, si \mathfrak{L} es un espacio de utilidad con $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}$ y $\ell_1 \succ \ell_2$ cualesquiera que sean λ y μ , tales que:

$$0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1$$

entonces,

$$\mu \ell_1 + (1 - \mu) \ell_2 \succ \lambda \ell_1 + (1 - \lambda) \ell_2$$

Lema 42. Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}$ con $\ell_1 \succ \ell_2$ y,

$$\lambda \ell_1 + (1 - \lambda) \ell_2 \succsim \mu \ell_1 + (1 - \mu) \ell_2$$

entonces,

$$\lambda \geq \mu$$

Lema 43. Si $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathfrak{L}$ con $\ell_1 \succ \ell_3$ y $\ell_1 \succsim \ell_2 \succsim \ell_3$, entonces,

$$\ell_2 \sim \lambda_0 \ell_1 + (1 - \lambda_0) \ell_3$$

Teorema 44 (Von Neumann-Morgenstern). Sea un conjunto \mathfrak{L} definido en él una relación de preferencia-indiferencia y en la cual se verifican los axiomas anteriores; por lo tanto, existe en tal conjunto una función de utilidad, lineal, única y que queda determinada fijando su valor para dos loterías de \mathfrak{L} .

$$\begin{aligned} u &: \mathfrak{L} \rightarrow [0, 1] \\ \ell &\rightarrow u(\ell) = \lambda \end{aligned}$$

Definición 2.3.11 (Axiomática de Luce-Raiffa). Parte de una relación entre las diferentes alternativas de decisión y sus respectivas probabilidades de ser elegidas, Esto es:

A1 De preferencia puro. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ el conjunto de resultados,

entonces:

$$x_1 \succsim x_2 \succsim x_3 \succsim \dots \succsim x_i \succsim \dots \succsim x_n$$

A2 De reducción de loterías compuestas. Sea una sucesión de loterías $\ell^1, \dots, \ell^j, \dots, \ell^m$ tal que,

$$\ell^j = \begin{pmatrix} p_1^j & \dots & p_i^j & \dots & p_n^j \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad p_i^j \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n p_i^j = 1$$

y una mixtura,

$$\ell = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_j & \dots & q_m \\ \ell^1 & \dots & \ell^j & \dots & \ell^m \end{pmatrix}, \quad q_j \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1$$

Ahora, considerando una lotería cualquiera,

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\ell \sim \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

siempre que,

$$p_i = \sum_{j=1}^m q_j p_i^j$$

A3 De continuidad. Sea

$$\ell_d \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & z \end{pmatrix}$$

una lotería degenerada, y una lotería cualquiera,

$$\xi \sim \begin{pmatrix} \pi & 1 - \pi \\ x & y \end{pmatrix}, \quad \pi \in [0, 1], \quad x \succ y$$

entonces η es un equivalente cierto, de manera que:

$$\ell_d \sim \xi$$

A4 De sustitución. Si

$$\ell \sim \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad p_i \in [0, 1] \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

y

$$x_1 \succsim x_2 \succsim x_3 \succsim \dots \succsim x_i \succsim \dots \succsim x_n$$

entonces se puede reemplazar un premio por su lotería equivalente,

$$x_i \sim \begin{pmatrix} \mu_i & 1 - \mu_i \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1$$

A5 De ordenación, el conjunto \mathfrak{L} de loterías posee estructura de preorden completo.

A6 De monotonía. Sean

$$\ell = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

y,

$$\ell' = \begin{pmatrix} p' & 1 - p' \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p' \leq 1$$

dos loterías con $x_1 \succ x_n$, $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq p' \leq 1$, entonces:

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow p > p'$$

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow p = p'$$

$$\ell \prec \ell' \Leftrightarrow p < p'.$$

Definición 2.3.12 (Función de Utilidad-Luce Raïffa). *La función de utilidad que se obtiene de la axiomática de Luce-Raïffa se define como la probabilidad asignada al mejor resultado en su lotería equivalente, esto es:*

$$\begin{aligned} u &: X \rightarrow [0, 1] \\ x_i &\rightarrow u(x_i) = \mu_i \end{aligned}$$

la cuál es única (salvo transformaciones lineales) y permite definir distintas actitudes del decisor frente al riesgo: aversión, preferencia y neutralidad (López, 1998).

Definición 2.3.13 (Principio del óptimo). *Sea una lotería $\ell \in \mathfrak{L}$ tal que:*

$$\ell \sim \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

para $p_i \in [0, 1]$ y $x_1 \succsim x_2 \succsim x_3 \succsim \dots \succsim x_i \succsim \dots \succsim x_n; x_i \approx x_n$; entonces,

$$\ell \sim \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_i u_i & \sum_{i=1}^n p_i (1 - u_i) \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1$$

si,

$$x_i \sim \begin{pmatrix} u_i & 1 - u_i \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se le llama Utilidad Esperada, $E[u(\ell)]$, a:

$$E[u(\ell)] = \sum_{i=1}^n p_i u_i$$

y cuya decisión consistirá en maximizar tal utilidad esperada.

Establecidos los anteriores supuestos, se garantiza la existencia de una función de utilidad para un decisor cuyo comportamiento está determinado por los axiomas de Von Neumann-Morgenstern o Luce-Raïffa, mediante un procedimiento iterativo de carácter subjetivo se puede establecer una función de utilidad individual, la cuál se detalla en el anexo (B). Esto permite la estimación de los componentes de aversión al riesgo e impaciencia al consumo intertemporal que caracteriza las preferencias de un determinado decisor (Arango and Ramírez, 2007).

Respecto al comportamiento que puede adoptar un decisor ante el riesgo, se presentan dos casos concretos, por un lado la participación de un decisor en una lotería en función de su sistema de preferencias, y por el otro, la determinación de las probabilidades en una lotería con premios dados.

Sea,

$$\ell = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

una lotería, ℓ , con premios x y y , respectivamente accesibles con probabilidades p_1 y p_2 ; además, $x \succ y$.

De acuerdo con el concepto de equivalente cierto,

$$\ell_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & z \end{pmatrix}$$

siendo z un resultado arbitrario y ℓ_d una lotería degenerada. Entonces:

$$\ell_d \sim \ell$$

con lo que,

$$u(\ell_a) = u(\ell) \rightarrow u(\eta) = p_1 u(x) + p_2 u(y)$$

y a su vez,

$$u(y) < u(\eta) < u(x), \quad x \succ \eta \succ y$$

Ahora, ¿qué debe suceder con las probabilidades si tanto los premios como la función de utilidad es conocida por el decisor?. Dado que,

$$\ell = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 = 1 \text{ y } x \succ y$$

y,

$$\ell' = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ x+r & y+r \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 = 1 \text{ y } x \succ y$$

es la posición final de un decisor con riqueza inicial, r , entonces en condición de indiferencia se cumplirá que:

$$\begin{aligned} u(r) &= p_1 u(x+r) + p_2 u(y+r) \\ &= p_1 u(x+r) + (1-p_1) u(y+r) \\ &= [u(x+r) - u(y+r)] p_1 + u(y+r) \end{aligned}$$

luego

$$p_1 = \frac{u(r) - u(y+r)}{u(x+r) - u(y+r)}$$

y

$$p_2 = \frac{u(x+r) - u(r)}{u(x+r) - u(y+r)}$$

Aversión al riesgo

Sea $\ell = px_i + (1-p)x_j, p \in [0, 1]$; una lotería cualquiera y μ una consecuencia esperada de ℓ . Se afirma que un inversionista tiene aversión al riesgo si,

$$\begin{aligned} \mu &\succ \ell \\ u(\mu) &> u(\ell) \\ u(px_i + (1-p)x_j) &> pu(x_i) + (1-p)u(x_j) \end{aligned}$$

lo cual es evidente,

$$u[E(X)] > E[u(X)]$$

y por lo tanto, considerando la desigualdad de Jensen, un inversionista será averso al riesgo si y sólo si posee una función de utilidad cóncava respecto al dominio de premios.

En consecuencia, es útil tener una medida de la intensidad de la aversión al riesgo la cual sea invariante a transformaciones afines de la función de utilidad, este es el caso de la medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt que se define como:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad u'(x) \neq 0 \quad (2.65)$$

Y también, una medida de tolerancia al riesgo, tal que:

$$T(x) = \frac{1}{r(x)} \quad (2.66)$$

Se considera nuevamente que $\ell = px_i + (1-p)x_j$; es una lotería cualquiera y η su equivalente cierto, entonces:

$$u(\eta) = u(\ell) = pu(x_i) + (1-p)(x_j)$$

dado que el inversionista es adverso al riesgo,

$$u(\mu) > u(\ell)$$

se tiene que,

$$u(\mu) > u(\eta) \quad \text{entonces} \quad \mu > \eta$$

considerando que $\mu, \eta \in \mathcal{D}_u$, entonces:

$$\pi = \mu - \eta \quad (2.67)$$

y tal diferencia se denomina prima por el riesgo-*risk premium* o *risk compensation* (LeRoy and Werner, 2010). Con esto, se puede plantear el teorema de Pratt.

Teorema 45 (Teorema de Pratt). *Sea u_i y u_j dos funciones de utilidad, π_i y π_j la respectiva prima por riesgo; por ultimo, r_i y r_j la medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt; entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $r_i(x) \geq r_j(x)$
2. $\pi_i \geq \pi_j$
3. $u_i = f \circ u_j$ para f cóncava y estrictamente monótona; es decir, u_i es una transformación cóncava de u_j .

Corolario 46. *Para una función de utilidad estrictamente creciente y diferenciable se cumple que:*

- π es creciente si y sólo si $r(x)$ es creciente.
- π es constante si y sólo si $r(x)$ es constante.
- π es decreciente si y sólo si $r(x)$ es decreciente.

Aunque no se profundiza en este aspecto, Arrow-Pratt también propusieron una medida de aversión al riesgo relativa a un consumo o riqueza inicial, esto es:

$$rr(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = xr(x), \quad u'(x) \neq 0 \quad (2.68)$$

la cual llamaron la medida de aversión relativa al riesgo. No es difícil demostrar, que la tolerancia y la prima por riesgo relativa son extensiones del caso absoluto.

Funciones de utilidad con tolerancia lineal al riesgo

Suponiendo que la función de utilidad de un individuo es de tipo intertemporal,

$$U(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(x_i)$$

donde, $u(x_i)$ es un miembro de la familia de funciones de utilidad cuya medida absoluta de aversión al riesgo $r(x)$ es positiva para todo x_i , esto es:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \left(\frac{x}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\beta} \right)^{-1} > 0 \quad (2.69)$$

sujeto a las restricciones,

$$\gamma \neq 1, \quad \beta > 0, \quad \frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta > 0, \quad \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \eta = 1$$

Por lo tanto, todos los miembros de la familia de funciones hiperbólicas de aversión absoluta al riesgo (HARA) se pueden expresar como funciones de utilidad de tipo,

$$u(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma} \quad (2.70)$$

La bondad de la expresión se encuentra en la posibilidad de ajustar sus parámetros libres, de tal manera que se logre una transición entre funciones con aversión absoluta o aversión relativa al riesgo creciente, no decreciente o constante (Merton, 1990).

Sea,

$$T(x) = \frac{x}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\beta} \quad (2.71)$$

haciendo, $\beta_0 = \frac{\eta}{\beta}$ y $\beta_1 = \frac{1}{1-\gamma}$, se obtiene:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

que representa la tolerancia lineal al riesgo (LRT) de un inversionista; a continuación, se presenta la proposición formulada por (Hens and Rieger, 2010).

Proposición 47. *Una función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de tipo HARA si y sólo si es una transformación afín de una de las siguientes funciones:*

$$u(x) = \ln(x + \beta_0), \quad u(x) = -\beta_0 e^{-\frac{x}{\beta_0}}, \quad u(x) = \frac{(\beta_0 + \beta_1 x)^{\frac{\beta_1-1}{\beta_1}}}{\beta_1 - 1}$$

donde, β_0 y β_1 son parámetros libres, y las medidas de aversión absoluta al riesgo constante (CARA) y aversión relativa al riesgo constante (CRRA) son casos particulares de (HARA).

Aunque los trabajos de (Merton, 1990), (Gollier, 2001), (LeRoy and Werner, 2010) y (Hens and Rieger, 2010) sugieren un conjunto de funciones de utilidad de tipo (HARA), el presente trabajo continua la línea del modelo basado en consumo que sugiere la implementación de la función isoelástica o power utility.

Funcion de utilidad isoelástica o power utility

Considerando la tolerancia absoluta al riesgo de tipo lineal planteada en (LeRoy and Werner, 2010), tal que:

$$T(x) = \eta + \frac{x}{\gamma}$$

dado que $T(x) = r(x)^{-1}$,

$$r(x) = \left(\eta + \frac{x}{\gamma} \right)^{-1} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

multiplicando por x ,

$$rr(x) = x \left(\eta + \frac{x}{\gamma} \right)^{-1} = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

se obtiene la medida de aversión relativa al riesgo.

Luego, haciendo $\eta = 0$ se tiene:

$$rr(x) = \gamma$$

que corresponde a la situación donde la medida de aversión relativa al riesgo es constante e independiente del consumo (CRRA).

Dado que,

$$-x \frac{u''(x)}{u'(x)} = \gamma$$

se puede plantear una ecuación diferencial de primer orden, tal que:

$$\frac{du'(x)}{u'(x)} = -\frac{\gamma dx}{x}$$

luego, integrando y aplicando la exponencial se tiene que:

$$u'(x) = e^{-\gamma \ln x} e^c$$

definida como la utilidad marginal.

Si se procesa $u'(1) = 1$, implica que la utilidad marginal del consumo queda determinada por:

$$u'(x) = x^{-\gamma} \tag{2.72}$$

y por lo tanto,

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \ln x & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \tag{2.73}$$

representa la familia de funciones de utilidad de consumo basadas en (CRRA), conocidas como funciones de utilidad isoelásticas, que son estrictamente crecientes y cóncavas.

Factor de descuento estocástico con función isoelástica

De la ecuación de valor corporativo general en (2.31), del factor del descuento estocástico en (2.36) y de la utilidad marginal de consumo en (2.72), se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 48. *El valor corporativo de una empresa es igual a la suma a perpetuidad del producto entre los flujos de caja y la tasa marginal de consumo intertemporal isoelástica. Esto es:*

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \left(\frac{c_{t+j}}{c_t} \right)^{-\gamma} CF_{t+j} \tag{2.74}$$

Demostración. Sea,

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j}$$

Dado que,

$$m_{t,t+j} = \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}$$

Y la utilidad marginal de consumo está dada por:

$$u'(c) = c^{-\gamma}$$

Entonces

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \left(\frac{c_{t+j}}{c_t} \right)^{-\gamma} CF_{t+j}$$

□

El factor de descuento permite capturar el deseo por más consumo y su impaciencia intertemporal, más que un objetivo intermedio de media-varianza como se logra con el *CAPM*; las características de monotonía y concavidad de la función, reflejan un deseo por más consumo y un decrecimiento marginal de su utilidad por un consumo adicional. De igual forma, agrupa en una sola cifra la aversión al riesgo y la impaciencia intertemporal de un inversionista, expuesto a una economía con ausencia de un mercado de valores desarrollado; a diferencia del *CAPM* que posee una posición inmejorable cuando se desea realizar el proceso de valoración en un mercado eficiente.

De esta manera, realizando sustituciones sucesivas al factor de descuento estocástico,

$$m_{t,t+j} = \beta^j \left(\frac{c_{t+j}}{c_t} \right)^{-\gamma}$$

para $j > 0$ y aplicando el principio de equivalencia financiera, se obtiene:

$$m_{t,t+j} = \frac{1}{R_{t,t+j}^c}, \quad R_{t,t+j}^c = (1 + r_{t,t+j}^c)$$

y con ello,

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^c} CF_{t+j}. \quad (2.75)$$

Finalmente, por la convergencia de valor en (2.47), se puede expresar la ecuación de valor corporativo en función del flujo de caja libre, *FCF*, y el costo promedio de

capital, $R_{t,t+j}^{wacc}$, esto es:

$$V_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R_{t,t+j}^{wacc}} FCF_{t+j}, \quad R_{t,t+j}^{wacc} = (1 + r_{t,t+j}^w). \quad (2.76)$$

En cuyo caso, la representación simplificada del *wacc* está dada por,

$$r_{t,t+j}^w = w_d r_{t,t+j}^d (1 - \tau_{t,t+j}) + w_e r_{t,t+j}^e, \quad \text{con } r_{t,t+j}^e = r_{t,t+j}^c.$$

2.3.4. Estimación de la opción real O

La expresión (2.50) amplifica el concepto de valoración mediante la cuantificación de un componente permanente y un componente flexible, este último dado por el segundo término. Aquel valor de flexibilidad representa un agregado de valor corporativo, y se le denominará opción real siempre y cuando se verifique la condición de un entorno incierto y la flexibilidad de los directivos respecto a una inversión (Titman and Martin, 2009). Además, se debe agregar que la incertidumbre debe impulsar el valor del proyecto, los directivos deben ser racionales y las estrategias deben ser creíbles y ejecutables (Mun, 2002).

Existe una amplia variedad de opciones reales que satisfacen tales condiciones, sin embargo la familia de opciones estratégicas call permiten adaptar los supuestos en ausencia de un portafolio replicante y debido a un mercado de valores o de derivados ineficiente. En efecto, las opciones estratégicas brindan la posibilidad de expandir en escala como en alcance una inversión, de tal forma que una sucesión de inversiones le permitan pasar de ser una compañía sin valor a una que vale por sus oportunidades estratégicas.

De (2.49) se tiene que el flujo de caja de la opción estratégica call en T esta determinada por:

$$(V_T - X)^+ = \begin{cases} V_T - X & \text{si y sólo si } V_T > X \\ 0 & \text{si y sólo si } V_T \leq X \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$\max(V_t - X e^{-r(T-t)}, 0) \leq O_t \leq V_T, \quad c.s$$

el cuál representa los límites superiores e inferiores del valor de la opción estratégica de tipo call.

De hecho, la misma naturaleza de las opciones reales, cuyo activo subyacente es un activo sin mercado, dificulta su valoración mediante los argumentos de duplicidad y no arbitraje que rigen a las opciones financieras; no obstante, el principio financiero es el

mismo y como tal es posible generar argumentos de equivalencia financiera y equivalente cierto que permitan aproximar el valor del contrato. Las consecuencias de ello, una tasa neutral al riesgo mayor que la tasa libre de riesgo ($r > r_f$) (Fernández, 2008b).

Enfoque probabilístico

Puesto que en la determinación del precio de la opción real estratégica no se puede hacer uso de la teoría de juegos y la duplicación de carteras, se procede mediante el enfoque probabilístico (Stampfli and Goodman, 2001).

Teniendo un proyecto cuyo valor actual de los flujos futuros de caja es de V_t , se espera que en $(t + 1)$ el valor actual de sus flujos sea de $V_{1,t+1}$ para el caso optimista y $V_{2,t+1}$ para el caso pesimista; además, si las condiciones no cambian, el monto necesario para llevar a cabo el proyecto es de X dólares y la opción esta en «At the money» ($V_t = X$).

Entonces, sea ℓ y ℓ' dos combinaciones, tales que:

$$\ell = pV_{1,t+1} + (1 - p)V_{2,t+1}, \quad \text{y} \quad \ell' = (1)V_t e^{r(t+1)} + (0)(\cdot)$$

donde, ℓ es la combinación lineal entre los estados posibles del valor actual del proyecto con sus respectivas probabilidades de ocurrencia en el periodo $(t + 1)$; en cambio, ℓ' representa el equivalente cierto de una inversión que lo hace indiferente entre participar del proyecto o recibir con seguridad un valor $V_t e^{r(t+1)}$ o $X e^{r(t+1)}$ en $(t + 1)$.

Ahora, si se considera que un directivo es neutral al riesgo se puede igualar las mixturas, $\ell = \ell'$, tal que:

$$\begin{aligned} V_t e^{r(t+1)} &= pV_{1,t+1} + (1 - p)V_{2,t+1} \\ V_t e^{r(t+1)} &= pV_{1,t+1} + V_{2,t+1} - pV_{2,t+1} \\ V_t e^{r(t+1)} &= p(V_{1,t+1} - V_{2,t+1}) + V_{2,t+1} \end{aligned}$$

Luego, despejando a p

$$p = \frac{V_t e^{r(t+1)} - V_{2,t+1}}{V_{1,t+1} - V_{2,t+1}} \quad (2.77)$$

se obtiene la probabilidad que se produzca el valor actual del proyecto $V_{1,t+1}$ equivalente al rendimiento que se obtendría de una inversión más segura.

El siguiente resultado se obtiene de (Stampfli and Goodman, 2001), (Titman and Martin, 2009), (Mun, 2002) y (Fernández, 2008b):

El valor esperado de la opción estratégica de tipo call en el periodo t , queda determinada por:

$$O_t = e^{-r(t+1)} [p(V_{1,t+1} - X)^+ + (1-p)(V_{2,t+1} - X)^+] \quad (2.78)$$

Más adelante, se observará que este enfoque permite aplicar la valoración para T periodos.

Consideraciones y supuestos del enfoque probabilístico

La existencia de contratos cuyo subyacentes no son negociables en un mercado de valores invalida gran parte de los supuestos que rigen a contratos de opciones financieras, sin embargo, por el principio de equivalencia financiera se pueden adaptar otros, aunque no tan consistentes, esto es:

- Los subyacentes no poseen un mercado de negociación, por lo cual no se tiene en ningún momento un precio referencial y observable. Esto nos obliga a suponer que el contrato de opción real se pacta en «At the money».
- Lo anterior, invalida el principio de duplicación de carteras y por ende no podemos estructurar mecanismos libres de arbitraje sin considerar una tasa mayor que la tasa libre de riesgo.
- Al aplicar el principio del equivalente cierto se está afirmando que el directivo es neutral al riesgo y por ende la equivalencia de ambas mixturas; sin embargo, al ser la tasa de equivalencia mayor que la tasa libre de riesgo implica que las preferencias del directivo ya no son necesariamente neutrales, obligando el ajuste de la tasa mediante su perfil de riesgo: averso, neutral y agresivo; entre más averso al riesgo más es su expectativa de rendimiento.
- La dinámica del factor $e^{r(T-t)}$ esta garantizada por el factor de descuento estocástico $m_{t,t+T}$ y por el modelo basado en consumo, permitiendo la total adaptación de las preferencias del directivo mediante los perfiles de riesgo (Cochrane, 2001),

$$m_{t,t+T} = e^{r(T-t)} = \frac{\Lambda_T}{\Lambda_t}$$

- Por último, la opción estratégica no genera flujos de caja antes de su vencimiento. Es algo lógico suponer que los directivos no reciban rendimientos de un proyecto que todavía no esta en marcha.

Métodos de valuación de opciones reales estratégicas

Dentro de la literatura se encuentra una gran variedad de métodos y aproximaciones para calcular el valor de una opción financiera; no obstante, las opciones reales no corren con la misma suerte. A pesar de ello, es posible encontrar soluciones aproximadas mediante algoritmos multinomiales, simulación y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Sin embargo, antes de abordar el tema, se afirma que el vínculo conceptual entre ambas opciones se resumen en la siguiente tabla:

Opcion Financiera	Variable	Opcion Real
Precio de ejercicio	X	Costo del activo o Inversión
Precio del subyacente	V	Valor actual de los CF
Tiempo al vencimiento	T	tiempo de disponibilidad de la opción
Varianza del subyacente	σ^2	Riesgo del activo
Tasa libre de riesgo	r	Tasa esperada del directivo

Cuadro 2.1: Opciones financieras vs reales

De acuerdo a un orden cronológico, la valoración de opciones financieras se presentó como solución cerrada de valoración en los trabajos de Black-Scholes y Merton en la década de los 70's, permitiendo a los economista de la época abordar no sólo problemas del mercado de riesgo sino también de indole empresarial como las opciones reales. A finales del siglo, muchos trabajos fueron publicados alrededor del tema, no obstante, su mayor desarrollo se presentó al inicio del presente siglo cuando se da origen a una serie de cuestionamientos respecto a la adaptabilidad de los modelos en tiempo continuo.

Uno de los resultados más destacados, en (Cochrane and Saá-Requejo, 2000), es el planteamiento de las ecuaciones de valoración de una opción real call mediante un argumento de replica parcial que lo denomina «Good-Deal»y que se presenta a continuación:

Si $x_T^c = \max(V_T - X, 0)$ es el flujo de caja en T y,

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dz \quad y \quad \frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_{V_z} dz + \sigma_{V_w} dw$$

representan la dinámica del precio del activo de referencia y del proyecto, respectivamente, dz y dw son correlaciones con el factor de descuento. Entonces,

$$O^c = V_0 e^{rT} \Phi\left(d + \frac{1}{2}\sigma_V \sqrt{T}\right) - X e^{-rT} \Phi\left(d - \frac{1}{2}\sigma_V \sqrt{T}\right)$$

determina el valor de la opción real call de tipo europea, donde:

$$\sigma_V^2 \equiv E \frac{dV^2}{V^2} = \sigma_{V_z}^2 + \sigma_{V_w}^2, \quad d \equiv \frac{\ln\left(\frac{V_0}{X}\right) + (\eta + r)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$\eta \equiv \left[h_V - h_S \left(\rho - a \sqrt{\frac{A^2}{h_S^2} - 1} \sqrt{1 - \rho^2} \right) \right] \sigma_V, a = \pm 1, \quad h_S \equiv \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}, \quad h_V \equiv \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}$$

Además,

$$\rho \equiv \text{corr} \left(\frac{dV}{V}, \frac{dS}{S} \right) = \frac{\sigma_{V_z}}{\sigma_V}$$

Es notable su similitud con la ecuación Black Scholes Merton-BSM. No obstante, no se profundizará en la evaluación de opciones reales mediante las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas-SDE, se deja abierto este tema para futuras investigaciones.

Unos años después de la publicación del modelo BSM, exactamente en 1979, Cox-Ross-Rubinstein propusieron un modelo basado en un proceso binomial y el cual denominaron modelo binomial de valoración de opciones o simplemente modelo CRR (Cox et al., 1979). De hecho, adelantándose a la deducción del modelo para opciones reales, el enfoque probabilístico es parte de aquel argumento. En adelante, se enfocará en la adaptación del modelo CRR al caso de contratos estratégicos.

Debido al reciente interés de los centros académicos hacia las opciones reales, la búsqueda de un referente o de artículos técnicos del mismo es un poco tedioso, no tanto por lo escaso, sino por la errónea adaptación del concepto; sin embargo, el esquema y el proceso de análisis e interpretación de las opciones reales se encuentran bastante amplios en los trabajos de (Mun, 2002) y (Brach, 2003), los cuales se toman como referentes para la presente investigación.

Por ahora, se omitirá la construcción de los árboles binomiales, aunque se puede realizar una analogía con la figura (2.2), a cambio de formalizar la dinámica o evolución del proyecto y de la opción real a través del tiempo.

Con base en el cuadro (2.1) y en la propuesta de Brach, se tiene que el valor del subyacente esta definido de manera compacta por:

$$V_t = \frac{1}{R_{t,t+1}^{wacc}} V_{t+1}, \quad R_{t,t+1}^{wacc} = (1 + r_{t,t+1}^w)$$

donde, $r_{t,t+1}^w$ es el WACC. Ahora, si se considera que V_t puede aumentar en un factor u o disminuir en un factor d , tal como representa la figura (2.2) para el FCF , entonces

V_{t+1} es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, tal que:

$$V_{t+1} = \begin{cases} uV_t & \text{con } \mathbb{P}(u) = p \\ dV_t & \text{con } \mathbb{P}(d) = 1 - p = q \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$V_t = \frac{1}{R_{t,t+1}^{wacc}} (puV_t + qdV_t) = \frac{1}{R_{t,t+1}^{wacc}} E(V_{t+1})$$

y su equivalente en función de la tendencia,

$$V_t = \frac{1}{R_{t,t+1}^{wacc}} (pu + qd) V_t$$

Ahora bien, como $R_{t,t+1}^{wacc} = (1 + r_{t,t+1}^w)$ se puede despejar $r_{t,t+1}^w$ de tal forma que:

$$r_{t,t+1}^w = E\left(\frac{V_{t+1}}{V_t} - 1\right) = E\left(\frac{V_{t+1} - V_t}{V_t}\right)$$

Luego, haciendo que $r_{t,t+1}^w \rightarrow \mu\Delta t$, es decir que la periodicidad de la tasa sea bastante pequeña, se tiene:

$$\mu\Delta t = E\left(\frac{\Delta V_{t+1}}{V_t}\right)$$

Esto es, $\mu\Delta t$ es el rendimiento relativo promedio. En cambio, la volatilidad quedará determinada por:

$$\sigma^2\Delta t = E\left[\left(\frac{V_{t+1}}{V_t} - 1 - \mu\Delta t\right)^2\right]$$

Finalmente, haciendo uso del algoritmo Hull-White para obtener u y d a partir de los datos disponibles para los directivos, esto es:

$$\begin{aligned} u &= 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ d &= 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde la estimación de $\mu\Delta t$ y $\sigma^2\Delta t$ son respectivamente,

$$\mu\Delta t = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} - 1\right) \quad (2.80)$$

$$\sigma^2\Delta t = \frac{1}{t-2} \left[\sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} - 1\right)^2 - (t-1)(\mu\Delta t)^2 \right] \quad (2.81)$$

En el modelo HW, tanto u como d son simétricas con respecto a la tendencia, μ .

Por otra parte, existe otra condición diferente al algoritmo HWE y que parte del

mismo razonamiento previo. (Cox et al., 1979) proponen una condición tal que:

$$u = \frac{1}{d}$$

cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Por lo tanto, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

En conclusión, por (2.77), (2.78) y (2.79) se puede generalizar el proceso para árboles de k periodos y valuación de opciones reales call tanto de tipo americanas como europeas.

2.4. Una medida coherente de riesgo corporativo

En (2.50) se estableció el valor corporativo general como el resultado de una suma entre un componente permanente y un componente flexible de la misma compañía, ambos términos son el resultado del modelo basado en consumo coincidiendo con los trabajos de *Fisher* y *Dean* respecto al valor presente neto y al presupuesto de capital como un portafolio de proyectos, respectivamente; pero, y esto es lo más importante, mientras el componente permanente está condicionado a la historia de la compañía, el componente flexible esta en función de la volatilidad condicionada a la curva de aprendizaje.

En efecto, los directivos constantemente toman decisiones respecto a la aprobación o no de un presupuesto para determinada area productiva, lo cual implica que en un sólo periodo fiscal existan multiples opciones reales las cuales se van ejerciendo o venciendo a medida que los responsables de cada area reciben nueva información; por ello, los encargados de evaluar los proyectos estratégicos adquieren habilidades intelectuales que le permiten mejorar la apreciación subjetiva del entorno.

Es así, que la ecuación de valor corporativo general toma su esperanza condicionada al periodo t , esto es:

$$V_t^g = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} C F_{t+j} + m_{t,t+T} (V_T - X)^+$$

2.4.1. La distribución de probabilidad del valor corporativo

De la proposición (10) y de la ecuación de valor corporativo general (2.50) se tiene que el valor corporativo general también es una variable aleatoria, tal que:

$$\tilde{V}_t^g \sim \mathcal{L}(\theta) \tag{2.82}$$

Esto es, la variable aleatoria \tilde{V}_t^g sigue una ley de probabilidad \mathcal{L} de parámetro θ .

Proposición 49. *Sea una opción real call europea con factor de crecimiento $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Si $\sigma < \infty$ entonces:*

$$E \left[m_{t,T} \left(\tilde{V}_T - X \right) \right] < \infty$$

y por lo tanto,

$$\max \left(\tilde{V}_t - X e^{-r(T-t)}, 0 \right) \leq E \left[m_{t,T} \left(\tilde{V}_T - X \right) \right] \leq \tilde{V}_t, \quad c.s$$

Debido a que el factor de descuento m no es libre de riesgo, la varianza del valor de la opción estará no sólo en función de la volatilidad del activo real, σ^2 , sino también de la rentabilidad esperada, r .

Con respecto al componente permanente, verificar la convergencia en media implica verificar la condición de transversalidad en (2.24), esto es:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t [m_{t,t+j} C F_{t+j}] = 0$$

Para ello, se debe hacer uso del Criterio de la Raíz (Root Test) o Criterio de Cauchy (Cairns, 1995) y (Dufresne, 1990), el cual está formado por los siguientes teoremas con sus respectivos lemas y corolarios:

Teorema 50 (Prueba de la Raíz - Root Test). *Si*

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |m_{t,t+j} C F_{t+j}|^{\frac{1}{j}} < 1, \quad c.s \quad (2.83)$$

entonces,

$$\tilde{V}_t = \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} C F_{t+j} \quad (2.84)$$

converge casi seguramente a un límite finito cuando $j \rightarrow \infty$.

De igual forma, se puede expresar (2.83) tal que,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left[\ln(m_{t,t+j}) + \ln \left| \widetilde{C F}_{t+j} \right| \right] < 0, \quad c.s$$

Definición 2.4.1 (Proceso Ergódico). *Sea un proceso estocástico \tilde{V}_t con media, V_t , y varianza, $\text{var} [\tilde{V}_t]$; se dice que es ergódico si:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{V}_t = V_t; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\tilde{V}_t - V_t]$$

y,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n I_{a,b} [\tilde{V}_t] = F(b) - F(a)$$

Ahora, haciendo uso de (2.16) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 51. *Sea*

$$m_{t,t+j} = \exp \left(- \sum_{i=t+1}^{t+j} R_i \right)$$

Si el proceso de R_i es ergódico, tal que:

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j R_i \rightarrow E[R], \quad c.s$$

y,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \ln |CF_{t+j}| = G \in \mathbb{R}$$

entonces, \tilde{V}_t converge casi seguramente a algún límite finito cuando $j \rightarrow \infty$ y $G < R$

Es decir, el flujo de caja debe crecer menos que el factor de descuento estocástico.

Lema 52. *Sea a_{t+j} una secuencia determinista que converge a cero cuando $j \rightarrow \infty$, tal que:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{j} \ln |CF_{t+j}| \geq G + a_{t+j} \right) < \infty$$

Entonces,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \ln |CF_{t+j}| \leq G \quad c.s$$

Este lema proporciona una condición de que los flujos de caja no tienen que ser necesariamente independientes y su distribución se caracteriza por tener colas pesadas.

Teorema 53. *Si se considera que $E[CF_j] = V_j$ y,*

$$G_0 = \inf \{ G : \limsup_{j \rightarrow \infty} e^{Gj} V_j < \infty \}$$

Entonces,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \ln |CF_{t+j}| \leq G_0 \quad c.s$$

En conclusión,

Teorema 54. Si $E[m_{t,t+j}(V_T - X)] < \infty$ y si tanto el factor de descuento $m_{t,t+j}$ como CF_{t+j} son procesos ergódicos con $G_0 < R$, entonces:

$$\tilde{V}_t^g \xrightarrow{C.S.} V_t^g$$

Es decir, \tilde{V}_t^g converge en media a V_t^g .

Un caso particular de \tilde{V}_t^g ocurre cuando la tasa de descuento, sea el CAPM, APT, ICAPM o inclusive la tasa libre de riesgo, son constantes a lo largo del tiempo de valuación.

Corolario 55. Del teorema (54). Si el proceso $R_i = c^{-i}$ entonces

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j R_i = E[R] \rightarrow 0$$

y por lo tanto, la convergencia de \tilde{V}_t^g sigue siendo válida.

Otro caso que actualmente acapara la atención es cuando se supone que R_i sigue un proceso de distribución Gamma (Weitzman, 2010); sin embargo, no se ha verificado las condiciones antes mencionadas y por ende no se sugiere por el momento su aplicación.

2.4.2. Una medida coherente del riesgo corporativo

Hasta ahora, se ha concluido que el valor de una compañía es una función de un componente permanente que está representado por todos los proyectos que ya fueron llevados a cabo por la compañía y por un componente estratégico que proporciona la opción de llevar a cabo o no un determinado proyecto en el futuro. De igual manera, se han plasmado las condiciones necesarias para la convergencia del valor corporativo a una variable aleatoria.

Sea,

$$\tilde{V}_{i,t}^g = \tilde{V}_{m,t} + \tilde{O}_{n,t},$$

la representación del valor corporativo agregado para m proyectos permanentes y n flexibles, y

$$Y_{i,j} = \tilde{V}_{i,t}^g - \tilde{V}_{j,t}^g$$

el cambio en el valor corporativo para dos portafolios cualesquiera de proyectos; entonces si \mathcal{A} es una familia de valores agregados, se puede definir una medida de riesgo sobre \tilde{V}_t^g .

El supuesto lógico del argumento parte de la idea de que el valor corporativo es una variable aleatoria de tipo transversal la cuál no es observable para periodos mayores a t ; es decir, la intención no radica en el estudio de la variabilidad entre periodos, sino en la variabilidad de la posición actual del portafolio de proyectos condicionado al componente permanente y al componente flexible.

Definición 2.4.2 (Medida de riesgo). *Un medida de riesgo es una función tal que,*

$$\begin{aligned} \rho & : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{V}_t^g & \rightarrow \rho(\tilde{V}_t^g) \end{aligned}$$

definida con base en una medida de probabilidad, \mathbb{P} , y con \mathcal{A} como una familia de todos los posibles valores de \tilde{V}_t^g .

Definición 2.4.3 (Medida coherente de riesgo). *Con base en la propuesta de (Artzner et al., 1999) y (Venegas, 2008), una medida ρ será una medida coherente de riesgo si cumple con las siguientes propiedades:*

- *Monotonía.*

$$\rho(\tilde{V}_{j,t}^g) \geq \rho(\tilde{V}_{i,t}^g), \quad \text{si } \tilde{V}_{j,t}^g \leq \tilde{V}_{i,t}^g$$

- *Subaditividad.*

$$\rho(\tilde{V}_{j,t}^g + \tilde{V}_{i,t}^g) \leq \rho(\tilde{V}_{j,t}^g) + \rho(\tilde{V}_{i,t}^g)$$

- *Homogeneidad positiva.*

$$\rho(\alpha \tilde{V}_{j,t}^g) = \alpha \rho(\tilde{V}_{j,t}^g), \quad \alpha > 0$$

- *Invarianza bajo traslaciones.*

$$\rho(\tilde{V}_{j,t}^g + \alpha) = \rho(\tilde{V}_{j,t}^g) - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2.4.3. Medidas de riesgo en la práctica

Sea \tilde{V}_t^g una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Algunas medidas de riesgo con respecto a la variable \tilde{V}_t^g pueden ser:

- Varianza y volatilidad.

$$\rho(\tilde{V}_t^g) = Var[\tilde{V}_t^g] = E\left[\left(\tilde{V}_t^g - E[\tilde{V}_t^g]\right)^2\right], \quad \sigma[\tilde{V}_t^g] = \sqrt{Var[\tilde{V}_t^g]}$$

- Valor en riesgo-VaR. Se define el valor en riesgo (VaR), al nivel $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ como:

$$\rho(\tilde{V}_t^g) = VaR_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = \inf \left\{ \tilde{v}_t^g \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\tilde{V}_t^g \leq \tilde{v}_t^g) \geq \alpha \right\}$$

- Valor en riesgo condicionado-CVaR.

$$\rho(\tilde{V}_t^g) = CVaR_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = E \left[\tilde{V}_t^g \mid \tilde{V}_t^g < VaR_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} \right]$$

En (Venegas, 2008) se demuestra que sólo el valor en riesgo condicionado cumple con las propiedades de una medida coherente de riesgo.

Conociendo esto, ¿cuál sería la interpretación de cada medida en un portafolio como el planteado?.

Sea \tilde{V}_t^g una variable aleatoria que representa el valor de la compañía en el tiempo t . Si se calcula su volatilidad $\sigma[\tilde{V}_t^g]$ se obtiene una medida de la dispersion esperada del valor, respecto a los cambios del componente permanente y la opción real a través del tiempo. Es evidente que el análisis bajo esta métrica, se concentra alrededor de un valor esperado lo cual no proporciona información relevante sobre el problema de valoración.

Si por el contrario, se calcula el VaR , se obtiene una medida del potencial de generación de valor corporativo con probabilidad $(1 - \alpha)$. Es decir, con un nivel de confianza del $(1 - \alpha) 100\%$ se espera que el valor de la compañía sea mayor a VaR u.m., o también, a un nivel de α se espera que la pérdida o destrucción de valor no supere el VaR en u.m.

Al ajustar el VaR mediante $CVaR$, se obtiene una medida de destrucción de valor esperado condicionado a la situación donde se exceda el VaR . En otras palabras, es el valor corporativo esperado en el $\alpha\%$ de los peores casos. Esta medida es un poco más pesimista.

Sin embargo, a pesar de su adaptabilidad con el problema de valoración, estas poseen características propias para la medición del riesgo de mercado y como tal, dependen de la realización de los precios.

2.4.4. El Riesgo de valor-*RiskV*

La medida de riesgo que se propone en la presente investigación pretende ir más allá de lo establecido respecto a la valoración de empresas, permitiendo en una economía con ausencia de un mercado de valores y de derivados ajustar el perfil de riesgo y las preferencias de consumo de los inversionistas, accionistas y administradores financieros,

los cuales demandan información de tales procesos de valoración con fines de enajenación, inversión, calificación de riesgos y gerencia del valor, entre otros; bajo un entorno de riesgo e incertidumbre.

Definición 2.4.4 (Riesgo de valor- $RiskV$). *Es una medida de riesgo basada en consumo en ausencia de un mercado de capitales desarrollado, cuantificando la potencial destrucción de valor corporativo a un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ 100 %, como consecuencia de la variabilidad de su estructura operacional y financiera, y de las posiciones estratégicas de la compañía en el futuro.*

$$\rho(\tilde{V}_t^g) = RiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = \inf \left\{ \tilde{v}_t^g \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\tilde{V}_t^g \leq \tilde{v}_t^g) \geq \alpha \right\} \quad (2.85)$$

También puede expresarse como,

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_t^g \leq RiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g}) = \alpha \quad (2.86)$$

Que cumple con las propiedades de una medida coherente de riesgo (Artzner et al., 1999).

- Monotonía. Sean $\tilde{V}_{i,t}^g = X$ y $\tilde{V}_{j,t}^g = Y$ dos variables aleatorias con dominancia estocástica de primer orden tal que $Y \geq X$, entonces:

$$\mathbb{P}(Y \leq z) \leq \mathbb{P}(X \leq z)$$

Si z es tal que $\alpha \leq \mathbb{P}(Y \leq z)$, entonces:

$$\alpha \leq \mathbb{P}(Y \leq z) \leq \mathbb{P}(X \leq z)$$

Consecuentemente,

$$\{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Aplicando el ínfimo a la relación conjuntista, se tiene que:

$$\inf \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \alpha\} \subseteq \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Y por lo tanto, si

$$RiskV_{1-\alpha}^Y \geq RiskV_{1-\alpha}^X \quad \text{entonces} \quad \rho(X) \geq \rho(Y)$$

- Homogeneidad. Sean $c > 0$ y $Y = cX$, entonces:

$$\begin{aligned}
RiskV_{1-\alpha}^Y &= \inf \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \alpha\} \\
&= \inf \{cx \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(cX \leq y) \geq \alpha\} \\
&= \inf \left\{ cx \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\left(X \leq \frac{cx}{c}\right) \geq \alpha \right\} \\
&= \inf \{cx \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} \\
&= c \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} \\
&= cRiskV_{1-\alpha}^X
\end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\rho(cX) = c\rho(X)$$

- Invarianza. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y = X + c$, entonces:

$$\begin{aligned}
RiskV_{1-\alpha}^Y &= \inf \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \alpha\} \\
&= \inf \{x + c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X + c \leq y) \geq \alpha\} \\
&= \inf \{x + c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq y - c) \geq \alpha\} \\
&= \inf \{x + c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x + c - c) \geq \alpha\} \\
&= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} - c \\
&= RiskV_{1-\alpha}^X - c
\end{aligned}$$

Y, por lo tanto,

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c$$

Una última propiedad, Sub-aditividad, plantea que la fusión de ellos no agrega más riesgo, esto es:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Sin embargo, debido a la naturaleza de las opciones reales no se puede afirmar que siempre la medida cumplirá con tal propiedad, esto se debe a que las opciones reales están en función de un criterio subjetivo de selección por parte de los directivos de la compañía entonces el añadir opciones no siempre permitirá reducir el riesgo.

Por tal motivo, se procede a formular la medida condicionada del riesgo de valor *CVaR* de forma análoga al valor en riesgo condicional *CVaR*.

Definición 2.4.5 (Riesgo de valor condicional-*CRiskV*). *Es una medida coherente de riesgo complementaria al RiskV sin el problema de sub-aditividad.*

$$\rho\left(\tilde{V}_t^g\right) = CRiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = E\left[\tilde{V}_t^g \mid \tilde{V}_t^g < RiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g}\right] \quad (2.87)$$

o de forma equivalente,

$$CRiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha RiskV_{1-\beta}^{\tilde{V}_t^g} d\beta$$

Su bondad se encuentra en la cuantificación de la severidad de una pérdida de valor corporativo y en la obtención de parámetros para la comparación entre diferentes estrategias empresariales; además, sirve como indicador corporativo de riesgo para la comparación entre empresas de un mismo sector e indicador de la exposición del riesgo corporativo global de una economía.

A diferencia del $RiskV_{1-\beta}^{\tilde{V}_t^g}$, el riesgo de valor corporativo condicionado si posee las características propias de una medida coherente de riesgo, la demostración de ello puede encontrarse en (Venegas, 2008), aunque los fundamentos para tales demostraciones se encuentran en la sección de esperanza condicional del presente trabajo.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Problema

Debido a que la empresa patrocinadora de la presente investigación facilita su información financiera, nos vamos a referir a ella con el nombre de compañía EMD.

La compañía EMD ubicada en Quito cuya actividad consiste en la importación, fabricación y comercialización de dispositivos mecánicos para la industria en general, esta interesada en valorar sus operaciones y el impacto de una oportunidad de negocio que le implica realizar una inversión en un taller metalmecánico con el cual espera aumentar su participación en el mercado mediante el desarrollo de nuevos productos que hasta ahora no podrían fabricarse en el Ecuador.

La información financiera proporcionada por la compañía, en unidades monetarias ($u.m$), corresponde a los registros mensuales comprendidos entre el 31 de Enero del 2001 al 31 de Diciembre del 2011; De igual forma, se conoce que la compañía posee una oportunidad estratégica valorada en una inversión de 400 $u.m$ con opción de llevarla a cabo durante los siguientes 3 meses, al final de estos, los directivos retirarán la disponibilidad de este aumento de capital en caso de no ejercer la opción.

Por otra parte, debido a la coyuntura del país, el acceso a los mecanismos de financiación para la compañía son muy limitados, a tal punto que depende de sus propietarios las futuras inyecciones de capital que permitan financiar las potenciales oportunidades de negocio disponibles para la empresa. Esto implica que:

$$R_{t,t+j}^c = R_{t,t+j}^{wacc} \quad \text{y} \quad CF_{t+j} = FCF_{t+j}$$

Por lo tanto, los directivos de la compañía están interesados en responder a las siguientes preguntas: ¿Cuál es el valor corporativo esperado si no existen oportunidades

estratégicas?, ¿Cual es el valor corporativo esperado si la empresa posee una posición estratégica?, ¿Qué tan severa es nuestra perdida de valor? y ¿Existe algún mecanismo para mitigar la perdida de valor corporativo?.

3.2. Estimación del componente permanente

La estimación del componente permanente consiste en dos etapas: estimación del free cash flow y estimación del factor de descuento estocástico.

3.2.1. Estimación del Free Cash Flow

Mediante los registros del Free Cash Flow en el anexo C y luego del análisis estructural realizado en el anexo D, se obtiene la dinámica del Free Cash Flow de la empresa EMD la cuál puede ser determinada por un proceso $ARMA(1, 0)$ o $ARMA(1, 2)$ a partir de la estimación de maxima verosimilitud condicional; ahora, considerando que ambos modelos poseen la propiedad de estacionariedad y aplicando la dinámica propuesta por (Kruschwitz and Loffler, 2006), se puede decir que mediante el principio de parsimonia la estructura $ARMA$ más conveniente es el de orden $(1, 0)$. Tal que:

$$FCF_{t+1} = 0,6047FCF_t + \varepsilon_{t+1} \quad (3.1)$$

De forma compacta,

$$(1 - 0,6047L) FCF_{t+1} = \varepsilon_{t+1} \quad (3.2)$$

Por su parte,

$$E_t [FCF_{t+1}] = 0,6047^{t+1} FCF_t, \quad var_t [FCF_{t+1}] = 30,31290^2$$

representan a la media y la varianza condicionada, respectivamente.

Y,

$$E [FCF_t] = 0 \quad var [FCF_t] = \frac{30,31290^2}{1 - 0,6047^2} = 1448,55$$

representan la esperanza y la varianza no condicionada.

Dado que $\phi = 0,6047$ es posible representar el proceso mediante un $MA(\infty)$ o mediante la descomposición de Wold, tal que:

$$FCF_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} 0,6047^i \varepsilon_{t+1-i} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+1-i}$$

Donde, $\psi_i = 0,6047^i$.

A su vez, se obtiene la función de autocovarianzas y autocorrelación,

$$\begin{aligned}\gamma_k &= 0,6047\gamma_{k-1}, \quad k > 1 \\ \rho_k &= 0,6047^k, \quad k > 1\end{aligned}$$

3.2.2. Estimación del factor de descuento estocástico

El procedimiento para estimar el parámetro de aversión al riesgo γ y el factor subjetivo de descuento β , parten de los trabajos de (Lucas, 1978) y (Arango and Ramírez, 2007).

Consideremos un inversionista que posee la opción de invertir una proporción de su riqueza w_t en un activo riesgoso θ_t y en un activo libre de riesgo θ_t^f , tal que:

$$\theta_t + \theta_t^f = 1.$$

Entonces, el problema del inversionista es maximizar la función de utilidad intertemporal sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal dado el nivel de riqueza inicial w_t , esto es:

$$U(\{c_t\}) = E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}) \right]$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}w_{t+1} &= (w_t - c_t) (\theta_t^f R^f + \theta_t R_t) \\ \theta_t + \theta_t^f &= 1.\end{aligned}$$

Donde, c representa el consumo, w la riqueza o ingresos del inversionista, R^f el retorno libre de riesgo y R el retorno del activo riesgo.

Si consideramos que la función de utilidad es de tipo *CRRA* y asumimos que w_t , c_t y R_t^f son conocidos, entonces la condición de primer orden para el máximo se reduce a la expresión (3.3),

$$\ln R_t^f = -\ln \beta + (1 - \gamma) \ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right) \quad (3.3)$$

Ahora, despejamos $\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)$ tal que:

$$\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right) = \frac{1}{(1 - \gamma)} \ln \beta + \frac{1}{(1 - \gamma)} \ln R_t^f$$

Haciendo $\alpha_0 = \frac{1}{(1-\gamma)} \ln \beta$ y $\alpha_1 = \frac{1}{(1-\gamma)}$ podemos representar (3.3) de tal manera que:

$$\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln R_t^f + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

donde, ε_t es una perturbación estocástica y los parámetros γ y β quedan determinados respectivamente por:

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{y} \quad \beta = \exp \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)$$

Debido a la poca información que hay en Ecuador con respecto al consumo y a las tasas libre de riesgo, recurrimos al trabajo de (Arango and Ramírez, 2007) que con base a la información de consumo en Colombia estima mediante MCO la ecuación (3.4). Esto es:

$$\ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right) = 0,0182 - 0,1334 \ln R_t^f \quad (3.5)$$

Es evidente, que aumentos en la tasa de interés ocasionan una reducción de la tasa de crecimiento del consumo, además se deduce que $\gamma = 8,5$ y $\beta = 0,87$, lo cual nos lleva a concluir que el inversionista colombiano es impaciente y amante al riesgo. Debido a la proximidad geográfica y las características económicas del país, suponemos que el inversionista ecuatoriano posee actitudes similares.

El anterior resultado, sugiere la existencia de un perfil de riesgo único para cualquier individuo ante una elección racional entre una activo riesgoso y otro libre de riesgo, no obstante, en la práctica esto no es del todo cierto, ya que las expectativas del administrador financiero, dueño e inversionista externo no tienen porque ser iguales.

3.3. Estimación del componente flexible

Consideremos un proyecto cuya inversión inicial hoy se estima en X u.m y cuyo valor actual de sus flujos futuros de caja libre se estima en V u.m; además, el administrador no esta obligado a llevar a cabo el proyecto de forma inmediata por lo cual dispone de 3 meses para tomar la decisión definitivamente. Entonces, su problema de decisión consiste en aceptar o rechazar el proyecto si las condiciones son las adecuadas para el mismo.

El valor de tal opción estratégica depende del momento en el cual se pretenda ejercer la opción; en efecto, si el proyecto se pretende llevar a cabo sólo al final de los tres meses

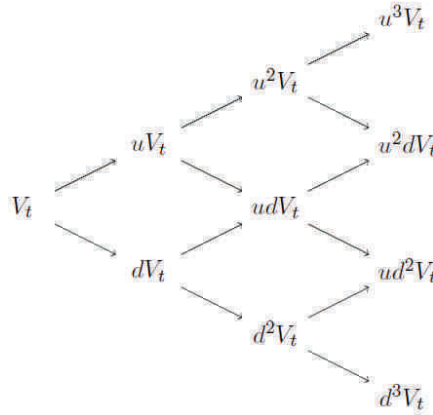


Figura 3.1: Evolución del valor del proyecto

entonces estamos ante una opción de tipo europea que puede ser valorada por:

$$\tilde{O}_t^c = e^{-r(T-t)} \left[\sum_{j=0}^{T-t} C_{T-t}^j p^j (1-p)^{(T-t)-j} \left(u^j d^{(T-t)-j} V_t - X \right)^+ \right] \quad (3.6)$$

Donde, r es la tasa esperada del directivo, $T-t$ tiempo de disponibilidad de la opción, u es el factor de crecimiento de V_t , d es el factor de decrecimiento de V_t y p es la probabilidad ajustada al riesgo del directivo.

No obstante, si el ejercicio de la opción se puede llevar a cabo en cualquier momento antes de los 3 meses entonces estamos ante una opción de tipo americano, la cual deberá ser valorada periodo tras periodo mediante la expresión (2.78).

Por lo tanto, el proceso de estimación de la opción real parte de estructurar la dinámica del valor del proyecto o evolución del activo subyacente V_t , (ver figura 3.1), mediante,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{y} \quad d = u^{-1}$$

O en su defecto, dependiendo de la información disponible, por medio del algoritmo Hull-White representado en (2.79).

Un procedimiento para estimar la volatilidad del proyecto, σ_{V_t} , consiste en determinar la rentabilidad relativa o logarítmica del Free Cash Flow del proyecto y luego calcular su desviación estándar (Mun, 2002), esto es:

$$\text{Volatilidad} = \sigma_{V_t} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$

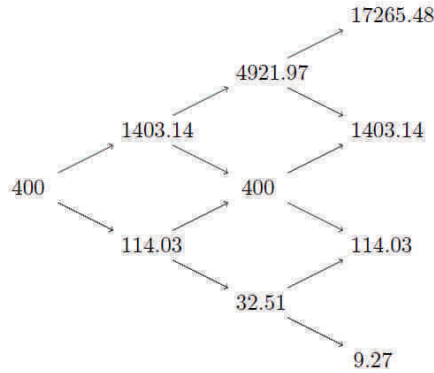


Figura 3.2: Valor del taller metalmecánico

donde,

$$r_i = \ln \left(\frac{FCF_i}{FCF_{i-1}} \right) \quad \text{y} \quad \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$$

Sin embargo, debido al problema de estimación de tales flujos futuros de caja, se procede a utilizar los flujos históricos de la compañía suponiendo que la perturbación de la misma, en principio, debe replicarse en el futuro. Con base en ello y con la información del anexo C obtenemos que:

$$\text{Volatilidad} = \sigma_{V_i} = 1,255 \equiv 125,5\%$$

Así que,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{1,255\sqrt{1}} = 3,5078 \quad \text{y} \quad d = 0,2851$$

En la figura 3.2 se presenta el valor actual de los flujos futuros de caja libre del taller metalmecánico en los 3 meses.

Sea,

$$p = \frac{V_t e^{r(t+1)} - V_{2,t+1}}{V_{1,t+1} - V_{2,t+1}}$$

Dado que,

$$V_{1,t+1} = uV_t \quad \text{y} \quad V_{2,t+1} = dV_t$$

Entonces,

$$p = \frac{e^{r(t+1)} - d}{u - d}$$

Ahora, si consideramos que las tasas de interés en Ecuador para depósitos a plazo

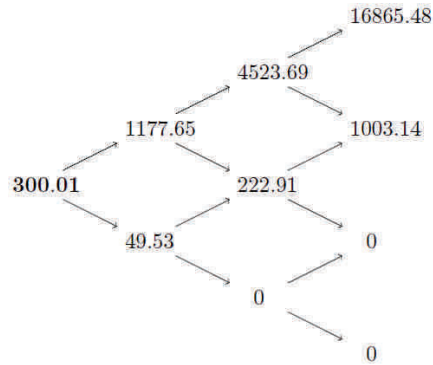


Figura 3.3: Valor de la opción del taller metalmecánico

superiores a 361 días se ubica en 5,31 % anual¹, entonces:

$$p = \frac{e^{0,0043} - 0,2851}{3,5078 - 0,2851} = 0,2232 \quad \text{y} \quad q = 0,7768$$

Por último, suponiendo que el proyecto se puede llevar a cabo en cualquier momento previo a los tres meses, la valoración de la opción se debe realizar de forma americana, ver figura 3.3; con lo que concluimos que la opción estratégica de la compañía se encuentra valorada en 300,01 u.m. No obstante, al aumentar los pasos del árbol y con la ayuda del software DerivaGem², el valor de la opción real converge a 283,30 u.m. Aun así, aceptaremos como válido el primer resultado debido al problema intertemporal que tenemos con la información financiera, esto es:

$$\tilde{O}_t^c = 300,01 u.m \quad (3.7)$$

¹<http://www.bce.fin.ec/docs.php?path=documentos/Estadisticas/SectorMonFin/TasasInteres/Indice.htm>

²DerivaGem 2.01. Creado por A-J Financial Systems, Inc., 2010. Bajo licencia libre

Capítulo 4

Resultados

La ecuación de valor corporativo general surgió como resultado de la aplicación de la ecuación fundamental de valoración y el enfoque basado en consumo, esto es:

$$V_t^g = E_t \sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} CF_{t+j} + m_{t,t+T} (V_T - X)^+$$

Permitiendo generalizar el proceso de valoración involucrando tanto el componente permanente como el componente flexible. Como consecuencia, se obtuvieron varios resultados que permiten una adaptación del modelo a condiciones específicas del mercado donde se encuentra la compañía, tales como: la ausencia de arbitraje, la dinámica del mercado de valores, las condiciones aleatorias de la empresa y el riesgo financiero involucrado en su valoración.

La estimación del valor corporativo general y del riesgo de valor recurren a diferentes métodos según las condiciones del mercado y la disponibilidad de la información de la compañía. Sin embargo, cualquier método o estrategia que se utilice debe satisfacer la condición de transversalidad. En este caso, se recurre a la estimación y posteriormente a la predicción de los flujos de caja libre mediante series temporales estacionarias autoregresivas. Por otra parte, la estimación del componente flexible y del factor de descuento estocástico se realizaron mediante el enfoque probabilístico para opciones reales y la función de utilidad isoelástica, respectivamente.

Partiendo del modelo obtenido para el Free Cash Flow, esto es:

$$FCF_{t+1} = 0,6047FCF_t + \varepsilon_{t+1}$$

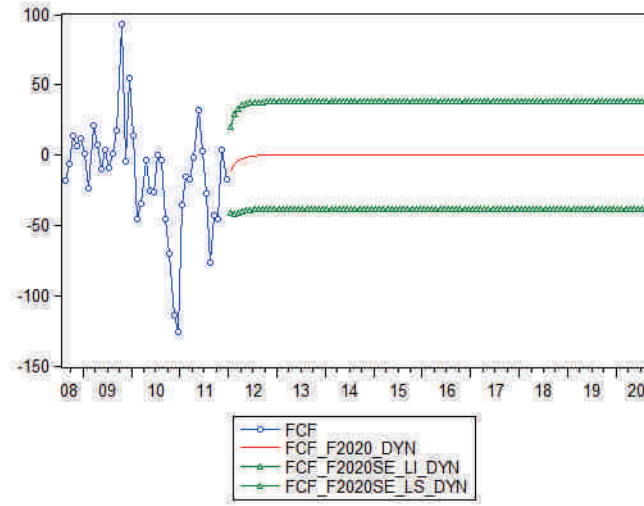


Figura 4.1: Pronostico del FCF al 2020

se tiene que la ecuación de predicción está definida por:

$$FCF_{t+k} = 0,6047FCF_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k}$$

Por lo tanto, aplicando la esperanza condicional a ambos miembros y realizando sustituciones sucesivas,

$$E_t [FCF_{t+k}] = 0,6047E_t [FCF_{t+k-1}]$$

$$E_t [FCF_{t+k}] = 0,6047^k FCF_t$$

Se obtiene:

$$\widehat{FCF}_t(k) = 0,6047^k FCF_t$$

Para todo $k > 1$. La figura D.34 se presenta el pronostico del FCF hasta el año 2020.

De hecho, si los errores se suponen normales, entonces:

$$\widehat{FCF}_t(k) \sim \mathcal{N} \left(FCF_{t+k}; 30,3129^2 \sum_{i=0}^{k-1} 0,6047^{2i} \right)$$

Por otra parte, el factor de descuento queda determinado por:

$$R_{t,t+j}^{wacc} = R_{t,t+j}^c$$

debido a que la empresa no posee actualmente ningún tipo de apalancamiento.

Luego,

$$\frac{1}{R_{t,t+j}^c} = \beta^j \left(\frac{c_{t+j}}{c_t} \right)^{-\gamma}$$

Ahora, reemplazando $\gamma = 8,5$ y $\beta = 0,87$, se obtiene que:

$$\frac{1}{R_{t,t+j}^c} = 0,87^j \left(\frac{c_{t+j}}{c_t} \right)^{-8,5}$$

Además, considerando que $j = 1$,

$$\frac{1}{R_{t,t+1}^c} = 0,87 \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-8,5}$$

se obtiene un factor de descuento estocástico,

$$0,80 < m_{t,t+1} < 0,87$$

Finalmente, y considerando la independencia entre el factor de descuento estocástico y el free cash flow, tenemos a un nivel de confianza del 95 % que el riesgo de valor es de $-123,43$ u.m cuando sólo se evalúa el componente permanente. Esto es:

$$RiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = -123,43 \Leftrightarrow \mathbb{P} \left(\tilde{V}_t^g \leq -123,43 \right) = 0,05 \quad (4.1)$$

Es decir, se espera con un nivel de confianza del 95 % que la potencial destrucción de valor corporativo no exceda las 123.43 u.m debido a la variabilidad de su estructura operacional y financiera actual; lo cual implica que si la compañía no continua explotando oportunidades de negocio no generará valor a largo plazo y por lo tanto destruirá la riqueza de sus propietarios. Ver figura 4.2.

Sin embargo, al considerar la oportunidad estratégica del taller metalmecánico el valor cerrado de la opción se ubica en 300,01 u.m y con ello, un nuevo riesgo de valor, tal que:

$$RiskV_{1-\alpha}^{\tilde{V}_t^g} = 177,92 \Leftrightarrow \mathbb{P} \left(\tilde{V}_t^g \leq 177,92 \right) = 0,05 \quad (4.2)$$

En este caso, la oportunidad estratégica es suficiente para cubrir el riesgo por pérdida de valor de la compañía; sin embargo, la compañía debe indagar por más oportunidades que le permitan mantener el valor a largo plazo. Es decir, el negocio vale por las oportunidades estratégicas que posea a través del tiempo (ver figura 4.3).

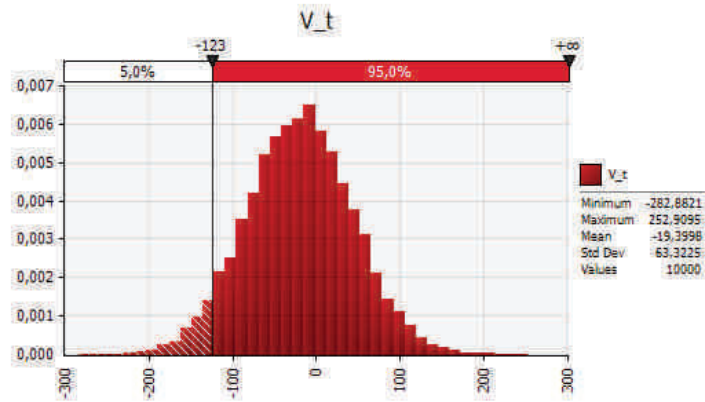


Figura 4.2: Distribución del valor corporativo del componente permanente

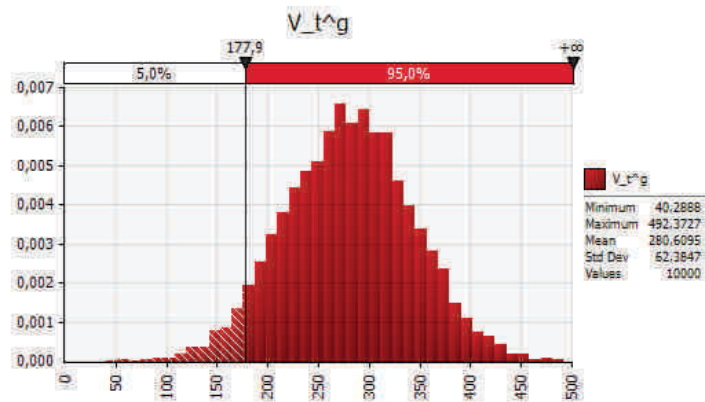


Figura 4.3: Distribución del valor corporativo general

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Para abordar el problema de la cuantificación del riesgo de valor, partimos de la exploración de las diferentes teorías, métodos y aplicaciones realizadas a la valoración de activos de capital, los cuales nos permitieron construir las bases para describir el comportamiento de los componentes y factores que determinan el valor de las compañías bajo riesgo e incertidumbre.

En general,

- El concepto de valor de uso y de cambio permite configurar las preferencias individuales del administrador financiero, propietario y futuro inversionista. En efecto, el valor que le otorga el propietario a su negocio depende del nivel de satisfacción de necesidades que logre con el mismo, valor de uso; en cambio, el futuro inversionista puede ver en la compañía una oportunidad de apalancar oportunidades de negocio a partir de una postura especulativa, valor de cambio. De esta manera, el proceso de valoración dependerá de los demandantes de tal información y del problema de agencia.
- El Flujo de Caja Libre o Free Cash Flow representa el rendimiento monetario a consecuencia de las decisiones de inversión y financiación corporativa. Es decir, las decisiones tomadas por la gerencia tienen algún efecto en términos monetarios en las ventas, costo, gasto, inversión e impuestos, permitiendo enfocar el análisis financiero desde un punto de vista financiero más que hacia un enfoque contable. Sin pérdida de generalidad, continúan siendo válidos los indicadores tradicionales para la medición de valor, tales como el EBIT y el EBITDA, entre otros.
- El tipo de preferencias de los demandantes de información corporativa se adaptan al modelo basado en consumo, dado que es sensible tanto a bienes que satisfacen necesidades como aquellos que pretenden ser adquiridos con fines de especulación.

De hecho, el modelo de consumo no supone mercados completos, una distribución de probabilidad y una función de utilidad determinada, lo que permitió adaptar tales preferencias a las condiciones del país. Como resultado de ello, se obtiene la ecuación de valor corporativo-BVE y la ecuación de valor corporativo general-BVEg.

- Aunque la BVE goza de flexibilidad y adaptabilidad a las condiciones de los agentes de mercado, requiere de abundante información que la hace dependiente de la empresa en proceso de valoración y del INEC; no obstante, bajo ciertas circunstancias, se podrá modificar el factor de descuento estocástico en función del CAPM, ICAPM y APT. Además, puede adaptarse a la naturaleza de la información que como resultado tenemos las variantes de la BVE.
- Valor Corporativo general-BVEg es el caso general de la BVE cuando se incluyen las oportunidades estratégicas de la empresa, las cuales le otorgan a la misma un plus de valor corporativo al poseer oportunidades de negocio a futuro.
- El flujo de caja libre debe poseer una estructura ARMA para cumplir con la condición de transversalidad. En efecto, cuando el flujo de caja libre es estacionario se garantiza una convergencia en media; sin embargo, cuando este no es estacionario y sigue un proceso ARIMA debemos hacer uso de criterio de la raíz o de Cauchy para verificar tal convergencia.
- La descomposición del flujo de caja libre permite profundizar en el problema de la toma de decisiones debido al estudio que podemos llevar a cabo mediante modelos multivariantes o vectoriales de series de tiempo. De hecho, el estudio de las relaciones entre los componentes nos permitirá obtener evidencia de procesos cointegrados y su estabilidad o equilibrio de largo plazo; de igual manera, logramos ampliar el espectro de investigación para analizar el problema del presupuesto de capital desde los inductores de valor corporativo.
- El factor de descuento estocástico se adapta a las preferencias y al perfil del riesgo de cualquier individuo. En efecto, mediante de los axiomas de Neumann-Morgenstern y Luce-Raiffa se obtiene una estructura válida para estimar tanto el factor de descuento del componente permanente como el flexible; no obstante, el mejor resultado se obtienen en la estimación de los parámetros neutrales al riesgo para la valoración de la opción real.
- El riesgo de valor-RiskV no es una medida coherente de riesgo, no obstante, mide la potencial destrucción de valor corporativo a consecuencia de la variabilidad de su estructura operacional y financiera, y de las posiciones estratégicas de la compañía

en el futuro; se basa en el modelo de consumo intertemporal para una economía con ausencia de un mercado de capitales desarrollado, permitiendo ajustar el perfil de riesgo y las preferencias de consumo de los inversionistas, accionistas y administradores financieros, los cuales demandan información con fines de enajenación, inversión, calificación de riesgos y gerencia del valor, entre otros; bajo un entorno de riesgo e incertidumbre.

Bibliografía

- Adserá, X. and Viñolas, P. (2003). *Principios de valoración de empresas*. Ediciones Deusto.
- Arango, M. and Ramírez, A. (2007). Aversión al riesgo y tasa subjetiva de descuento: caso colombiano, 1970-2003. *Revista de Ingenierías-Universidad de Medellín*, 6(10):93–99.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228.
- Baye, M. R. (2006). *Managerial economics and business strategy*. Mc, 5ta edition.
- Brach, M. A. (2003). *Real options in practice*. Wiley finance series. John Wiley & Sons, Ltd.
- Cairns, A. J. (1995). The present value of a series of cashflow: convergence in a random environment. *Astin Bulletin*, 25(2):81–94.
- Cochrane, J. H. (2001). *Asset pricing*. Princeton University Press.
- Cochrane, J. H. and Saá-Requejo, J. (2000). Beyond arbitrage: good-deal asset price bounds in incomplete markets. *Journal of Political Economy*, 108(1):79–119.
- Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263.
- Dufresne, D. (1990). The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:39–79.
- Fernández, P. (2008a). Valoración de empresas por descuento de flujos: diez métodos y siete teorías. Documento de investigación DI-766, IESE Business School, Universidad de Navarra.
- Fernández, P. (2008b). Valoración de opciones reales: dificultades, problemas y errores. Documento de investigación DI-760, IESE Business School, Universidad de Navarra.

- Fisher, I. (1907). *The rate of interest: its nature, determination and relation to economic phenomena*. The Macmillan Company.
- García, O. L. (1999). *Administración financiera, fundamentos y aplicaciones*. Prensa Moderna Editores.
- Godon, M. and Shapiro, E. (1956). Capital equipment analysis: the required rate of profit. *Management Science*, 3(1):102–110.
- Gollier, C. (2001). *The economics of risk and time*. The MIT Press.
- Granger, C. and Morris, M. (1976). Time series modeling and interpretation. *Journal of The Royal Statistical Society*, 38:246–257.
- Greenwood, R. (2010). Calculating free cash flows. *Harvard business school*.
- Hazen, G. B. (2003). A new perspective on multiple internal rates of returns. *The engineering economist*, 48(1):31–51.
- Hens, T. and Rieger, M. O. (2010). *Financial economics: a concise introduction to classical and behavioral finance*. Springer-Verlag.
- Hillier, F. S. (1963). The derivation of probabilistic information for the evaluation of risky investment. *Management Science*, 9(3):443–457.
- Kruschwitz, L. and Löffler, A. (2006). *Discounted cash flow: A theory of the valuation of firms*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Kulatilaka, N. (1985). The value of flexibility. Technical report, School of Management, Boston University.
- LeRoy, S. F. and Werner, J. (2010). *Principles of financial economics*. Cambridge University Press, 9th edition.
- López, M. (1998). *Análisis y adopción de decisiones*. Ediciones Pirámide.
- Lucas, R. E. (1978). Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46(6):1429–1445.
- Markowitz, H. (1990). Foundations of portfolio theory. *Nobel lecture*, page 180.
- Merton, R. C. (1990). *Continuous time finance*. Blackwell Publishing.
- Mitra, S. K. (2010). Note on cash flow valuation methods: comparison of wacc, fte, ccf, and apv approaches. Technical report, Richard Ivey School of Business.

- Mun, J. (2002). *Real options analysis: tools and techniques for valuing strategic investment and decisions*. Wiley finance series. John Wiley & Sons, Ltd.
- Myers, S. C. (1976). Determinants of corporate borrowings. Technical report, Massachusetts Institute of Technology.
- Nicholson, W. (2007). *Teoría Microeconómica, principios básicos y aplicaciones*. Cengage Learning, 9 ed edition.
- Peña, D. (2010). *Análisis de series temporales*. Alianza Editorial.
- Pindyck, R. S. (1988). Irreversible investment, capacity choice and the value of the firm. *American Economic Review*, 78.
- Rincón, L. (2004). ¿qué es la esperanza condicional? *Miscelánea Matemática*, 39:17–30.
- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of economic theory*, 13(3):341–360.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W., and Jordan, B. D. (2010). *Fundamentos de finanzas corporativas*. McGraw Hill.
- Ruback, R. S. (1995). An introduction to cash flow valuation methods. Technical report, Harvard Business School.
- Samuelson, P. A. (1937). A note on measurement of utility. *The Review of Economic Studies*, 4(2):155–161.
- Schwartz, E. S. and Moon, M. (2000). Rational pricing of internet companies. *Financial Analysts Journal*, 56:62–76.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442.
- Sharpe, W. F. (2008). *Inversores y mercados*. Ediciones Deusto.
- Stampfli, J. and Goodman, V. (2001). *The mathematics of finance: modeling and hedging*. Brooks-Cole Publishing Company.
- Suárez, A. S. S. (2003). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Ediciones Pirámide.
- Titman, S. and Martin, J. D. (2009). *Valoración. El arte y la ciencia de las decisiones de inversión corporativa*. Pe.

- Trigeorgis, L. and Manson, S. (1987). Valuing managerial flexibility. *Midland Corporate Finance Journal*, 5.
- Venegas, F. (2008). *Riesgo financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning, 2 edition.
- Wan, S. P. (2012). Corporate finance. Technical report, Center for business and economics, Elmhurst College.
- Weitzman, M. L. (2010). Risk-adjusted gamma discounting. *Journal of Environmental Economics and Management*, 60(1):1–13.
- Williams, J. B. (1938). *The theory of investment value*. Harvard University Press.
- Wold, H. O. (1938). *A study in the analysis of stationary time series*. Almqvist & Wiksell.

ANEXOS

Anexo A

Valor Esperado de la Razón de Variables Aleatorias

Consideremos una función $f(X, Y)$ de dos variables aleatorias X y Y que para un punto en particular (μ_X, μ_Y) equivalente a

$$E(X) = \mu_X \quad \text{y} \quad E(Y) = \mu_Y$$

queremos aproximar el valor de $f(\mu_X, \mu_Y)$ mediante el polinomio de expansión de Taylor, esto es:

$$\begin{aligned} f(X, Y) \approx & f(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X) f_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y) f_Y(\mu_X, \mu_Y) + \\ & + \frac{1}{2} \left[(X - \mu_X)^2 f_{XX}(\mu_X, \mu_Y) + 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f_{XY}(\mu_X, \mu_Y) + \right. \\ & \left. + (Y - \mu_Y)^2 f_{YY}(\mu_X, \mu_Y) \right] \end{aligned}$$

Considerando que $f(X, Y) = \frac{Y}{X}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} \approx & \frac{\mu_Y}{\mu_X} + (X - \mu_X) \frac{\mu_Y}{\mu_X} + (Y - \mu_Y) \frac{1}{\mu_X} + \\ & + \frac{1}{2} \left[(X - \mu_X)^2 \frac{2\mu_Y}{\mu_X^3} - 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \frac{1}{\mu_X^2} \right] \end{aligned}$$

Luego, aplicando $E\left(\frac{Y}{X}\right)$,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y}{X}\right] \approx & E\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X}\right] + E\left[(X - \mu_X) \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right] + E\left[(Y - \mu_Y) \frac{1}{\mu_X}\right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[E\left[(X - \mu_X)^2 \frac{2\mu_Y}{\mu_X^3}\right] - 2 \left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \frac{1}{\mu_X^2} \right] \right] \end{aligned}$$

ANEXO A. VALOR ESPERADO DE LA RAZÓN DE VARIABLES ALEATORIAS 101

dado que, $E[(X - \mu_X)] = 0$, $E[(X - \mu_X)^2] = \sigma_X^2$ y $E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sigma_{XY}^2$ entonces,

$$E\left[\frac{Y}{X}\right] \approx \frac{\mu_Y}{\mu_X} + \sigma_X^2 \frac{\mu_Y}{\mu_X^3} - \frac{\sigma_{XY}^2}{\mu_X^2}$$

Y de forma equivalente,

$$E\left[\frac{Y}{X}\right] \approx \frac{\mu_Y}{\mu_X} + \frac{1}{\mu_X^2} \left(\sigma_X^2 \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \rho \sigma_X \sigma_Y \right) \quad (\text{A.1})$$

Sin embargo, cuando $Y = 1$ tenemos que el valor esperado $E\left(\frac{1}{X}\right)$ se define como:

$$E\left[\frac{1}{X}\right] \approx \frac{1}{\mu_X} \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right)$$

o,

$$E\left[\frac{1}{X}\right] \approx \frac{1}{E[X]} (1 + Cv^2)$$

Anexo B

Función de utilidad para un decisor bajo riesgo

Sea,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

los resultados de una actividad, y

$$x_1 \succsim x_2 \succsim \dots \succsim x_n$$

la estructura de preferencia de un decisor.

Luego, se asigna un índice de utilidad $u(x_i) = u_i$ a cada resultado conforme al principio de que:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= 1 \\ u(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, se puede elaborar una lotería, tal que:

$$\ell \sim \begin{pmatrix} u_i & 1 - u_i \\ x_1 & x_n \end{pmatrix}, \quad u_i \in [0, 1]$$

Nuevamente se parte de un conjunto de resultados, tal que:

$$X_2 = (x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$$

Luego, interrogando al decisor sobre qué valor de u , en la lotería anterior, es indiferente respecto a recibir con certeza X_2 o participar en la lotería ℓ . El valor que él asigne a u

será el índice de utilidad para el premio x_2 , Esto es:

$$u(x_2) = u_2$$

de tal manera que:

$$u_2 < u_1 = 1$$

Finalmente, se calculan los índices de utilidad correspondientes a los resultados x_3, x_4, \dots, x_{n-1} interrogando sucesivamente al sujeto. Así se obtienen todos los u_i , verificandose que:

$$x_1 \succsim x_2 \succsim \dots \succsim x_i \succsim x_{i+1} \succsim \dots \succsim x_n$$

con

$$1 = u_1 > u_2 > \dots > u_i > u_{i+1} > \dots > u_n = 0$$

Anexo C

Registros del Free Cash Flow

Cuadro C.1: Free Cash Flow 2001-2011

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Agu	Sep	Oct	Nov	Dec
2001	31.99	61.72	45.35	22.09	2.52	34.69	-4.67	-13.76	-26.58	24.92	-38.07	36.16
2002	0.29	-17.61	-55.44	-75.38	-56.68	-39.5	-60.98	-53.58	-18.54	30.82	45.42	48.28
2003	21.38	-18.81	-51.39	-10.77	-28.76	-4.87	7.08	-9.74	-12.05	3.51	12.22	23.23
2004	70.83	81.46	54.21	23.60	18.98	6.34	41.95	36.24	43.93	41.15	-10.46	5.83
2005	-1.34	-26.11	-56.23	-61.19	-37.68	2.38	-9.07	37.83	1.63	-28.31	25.81	-13.60
2006	54.69	-15.53	6.24	0.96	-41.98	10.81	16.26	12.22	2.02	-12.36	6.41	45.89
2007	22.46	-54.94	-84.25	-78.36	-30.16	27.30	32.01	64.01	69.82	20.95	26.21	-0.06
2008	-46.36	10.52	-16.81	-46.28	-15.58	-20.99	-13.86	-17.92	-5.90	13.80	6.09	11.62
2009	1.14	-23.18	21.50	7.51	-10.15	3.67	-9.03	1.02	17.05	93.34	-4.89	54.96
2010	13.42	-45.57	-34.68	-3.14	-25.61	-26.20	0.18	-3.62	-45.75	-70.21	-114.12	-126.24
2011	-35.91	-15.66	-17.60	-1.58	32.17	3.02	-27.59	-76.56	-42.73	-45.18	3.67	-17.48

Anexo D

Estimación Free Cash Flow

El proceso de estimación del free cash flow con su correspondiente representación gráfica se llevó a cabo mediante la aplicación de los siguientes programas estadísticos: Eviews, R, Minitab y Statgraphics.

D.1. Representación gráfica

Con base en la información del anexo C que corresponde a los registros del Free Cash Flow entre Enero del 2011 y Diciembre del 2011 se obtiene el gráfico de la serie,

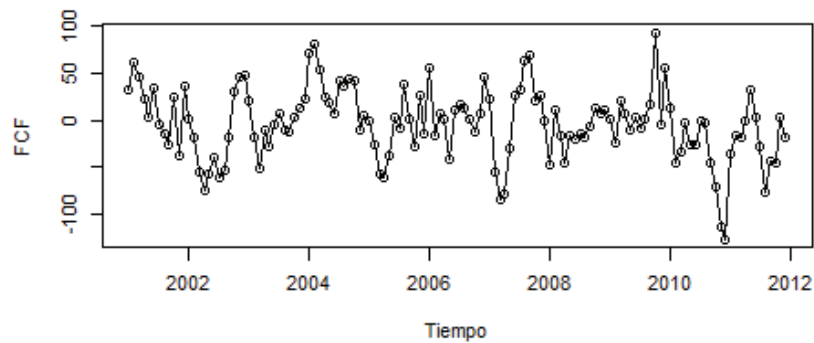


Figura D.1: Free Cash Flow 2001-2011

D.2. Análisis descriptivo

Se enfoca en tres medidas descriptivas para el free cash flow, las cuales se encuentran en la figura D.1 y D.2; además, de un estudio gráfico proporcionado por las figuras D.3, D.4, D.5, D.6 y D.7.

- Asimetría: Mide el grado de asimetría de la distribución de sus datos entorno a la media. Es adimensional, Esto es:

$$S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{T-1}{T}}} \right)^3$$

Donde, s = Desviación estándar. Si,

$S > 0$ asimétrica a la derecha

$S = 0$ simétrica

$S < 0$ asimétrica a la izquierda

- Curtosis: Mide el grado de concentración de los valores que toma los datos entorno a la media, Esto es:

$$K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{T-1}{T}}} \right)^4$$

Donde, s = Desviación estándar. Si,

$K > 0$ Leptocúrtica

$K = 0$ Mesocúrtica

$K < 0$ Platicúrtica

- Estadístico de Jarque-Bera: Permite contrastar la hipótesis nula de normalidad contra la hipótesis alternativa de no normalidad de los datos, Esto es:

$$JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

Donde, S = Asimetría y K = Curtosis Si,

$$p\text{-value} < \alpha \rightarrow \text{Rechazo } H_0$$

Lo que implica rechazar la hipótesis de normalidad en los datos.

Mediante los estadísticos y gráficos se logra apreciar que a un nivel 0,05, existe evidencia estadística para suponer que los registros históricos del flujo de caja libre siguen una

Media	-3.851942
Mediana	-0.697481
Maximo	93.33561
Minimo	-126.2393
Std. Dev.	37.93483
Simetría	-0.287390
Curtosis	3.530223
Jarque-Bera	3.363297
P-value	0.186067
Observations	132

Cuadro D.1: Estadísticos del Free Cash Flow

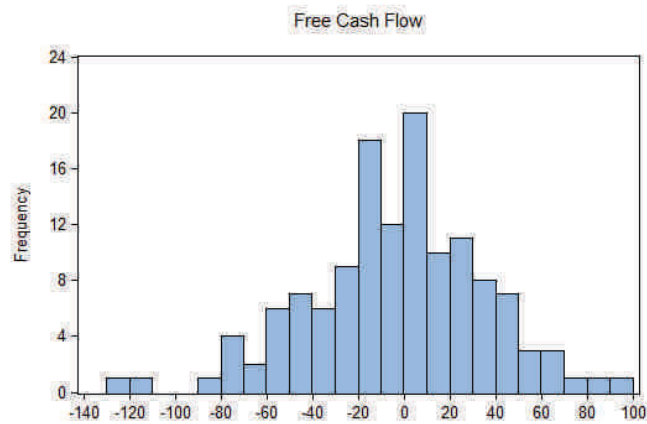


Figura D.2: Histograma del Free Cash Flow

distribución normal. Tanto el histograma como el gráfico Q-Q, apoyados en la simetría y la curtosis, justifican tal supuesto de normalidad.

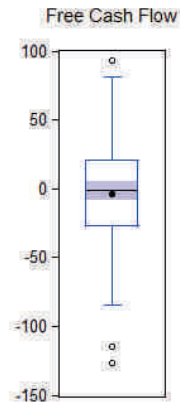


Figura D.3: Diagrama de Caja del Free Cash Flow

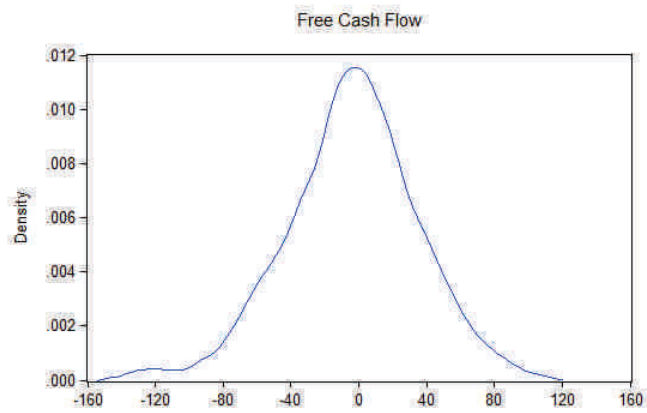


Figura D.4: Kernel Density del Free Cash Flow

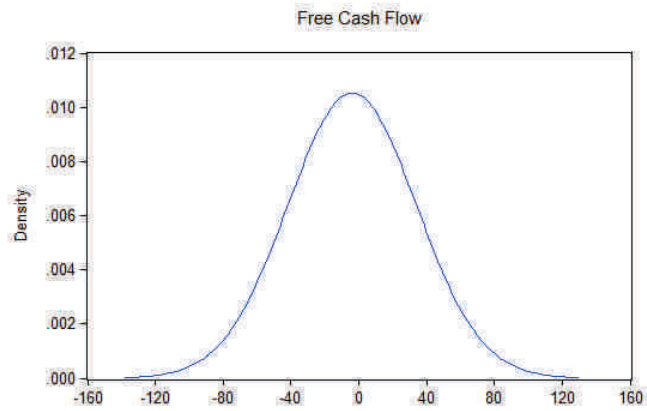


Figura D.5: Densidad Teórica del Free Cash Flow

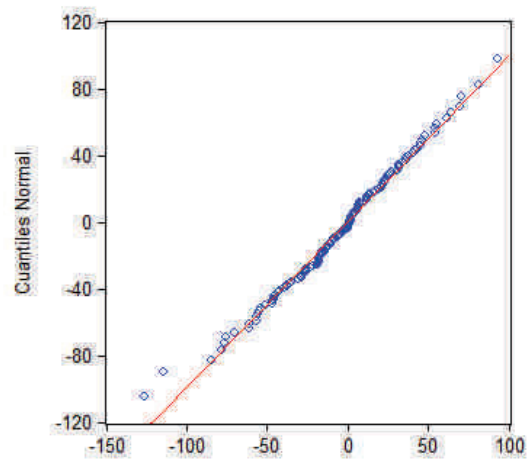


Figura D.6: Q-Q teórico del Free Cash Flow

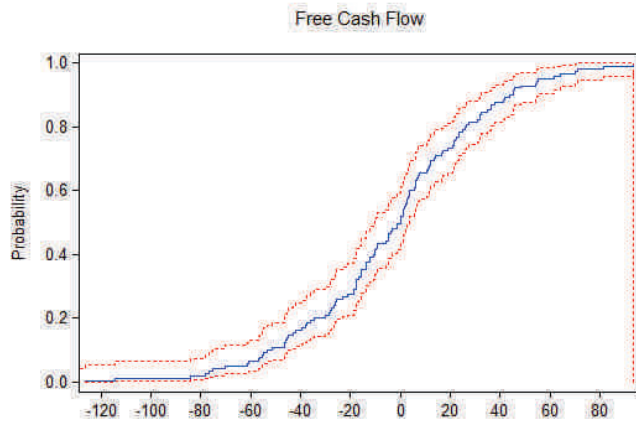
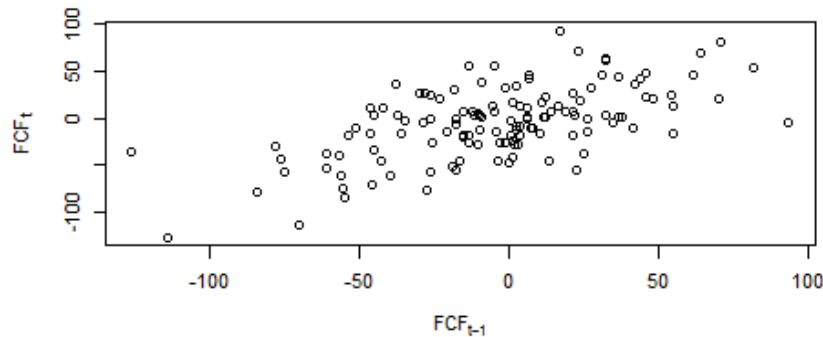


Figura D.7: Distribución empírica del Free Cash Flow

D.3. Análisis descriptivo de rezagos

Mediante la figura D.8 se puede observar como se relaciona el proceso con su rezago de primer orden,

Figura D.8: Dispersión de FCF_t vs FCF_{t-1}

De igual forma, se obtiene una representación rango-media y media-tiempo mediante la figura D.9 y D.11, respectivamente. Tales gráficos, sugieren una estacionaridad en varianza a consecuencia de la no significancia del logaritmo de la media en el modelo lineal de rango-media.

El estadístico Ljung-Box permite contrastar la hipótesis nula de la no dependencia entre los m primeros residuos estimados contra la hipótesis alternativa de una depen-

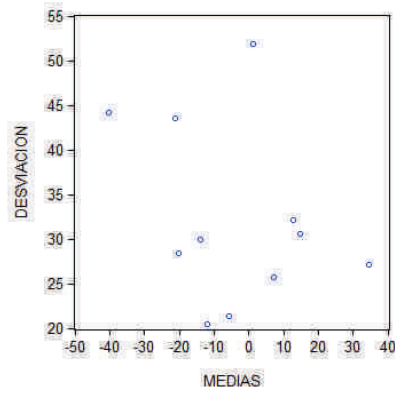


Figura D.9: Representación Rango-Media

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7.772059	0.354791	21.90602	0.0002
LOG(MEDIAS)	-0.373252	0.144478	-2.583453	0.0815
R-squared	0.689898	Mean dependent var	6.953767	
Adjusted R-squared	0.586530	S.D. dependent var	0.555854	
S.E. of regression	0.357423	Akaike info criterion	1.069380	
Sum squared resid	0.383253	Schwarz criterion	0.913156	
Log likelihood	-0.673451	Hannan-Quinn criter.	0.650088	
F-statistic	6.674230	Durbin-Watson stat	3.695267	
Prob(F-statistic)	0.081535			

Figura D.10: Modelo Lineal Rango-Media

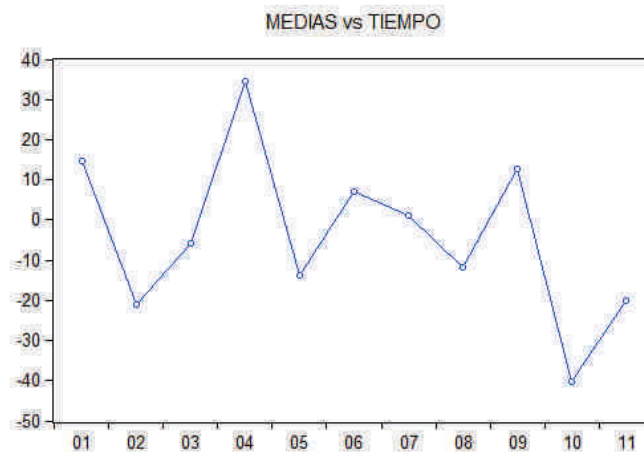


Figura D.11: Representación Media-Tiempo

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.599	0.599	48.490	0.000
2	0.360	0.001	66.097	0.000
3	0.108	-0.169	67.690	0.000
4	-0.071	-0.115	68.392	0.000
5	-0.103	0.051	69.860	0.000
6	-0.064	0.060	70.442	0.000
7	-0.034	-0.027	70.610	0.000
8	0.010	0.006	70.625	0.000
9	0.064	0.067	71.223	0.000
10	0.085	0.029	72.277	0.000
11	0.011	-0.122	72.296	0.000
12	-0.040	-0.036	72.536	0.000
13	-0.070	0.028	73.267	0.000
14	-0.152	-0.118	76.710	0.000
15	-0.113	0.028	78.641	0.000
16	-0.059	0.043	79.174	0.000
17	-0.057	-0.067	79.669	0.000
18	-0.052	-0.068	80.085	0.000
19	-0.054	-0.017	80.539	0.000
20	-0.077	-0.018	81.478	0.000
21	-0.085	-0.028	82.632	0.000
22	0.008	0.122	82.642	0.000
23	0.027	-0.011	82.764	0.000
24	0.000	-0.087	82.764	0.000
25	0.062	0.097	83.391	0.000
26	-0.008	-0.096	83.401	0.000
27	-0.047	-0.038	83.774	0.000
28	-0.086	-0.059	85.025	0.000
29	-0.150	-0.083	88.895	0.000
30	-0.134	0.042	92.016	0.000
31	-0.078	0.014	93.072	0.000
32	-0.001	-0.001	93.072	0.000
33	0.098	0.096	94.774	0.000
34	0.135	0.021	98.077	0.000
35	0.196	0.068	105.05	0.000
36	0.138	-0.007	108.56	0.000

Figura D.12: Contraste Ljung-Box para el Free Cash Flow

dencia en ellos, es decir, si estos residuos presentan correlación no nula, Esto es:

$$Q\text{-stat} = T(T+2) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \right)$$

Donde, $\hat{\rho}$ = autocorrelación parcial y k^2 = número de parámetros. Por lo tanto,

$$p\text{-value} < \alpha \rightarrow \text{Rechazo } H_0$$

En figura D.12 se encuentra el contraste de Ljung-Box para la no dependencia entre retardos con sus correspondiente ACF y PACF. Los resultados de la prueba suponen que a un nivel del 0.05, no hay suficiente evidencia estadística para afirmar la no dependencia entre los m primeros residuos estimados; por el contrario, es muy probable que exista entre los m primeros residuos una dependencia. Lo anterior, también esta apoyado en la representación gráfica de la Autocorrelación y Autocorrelación Parcial lo cual muestran la dependencia entre los primeros retardos.

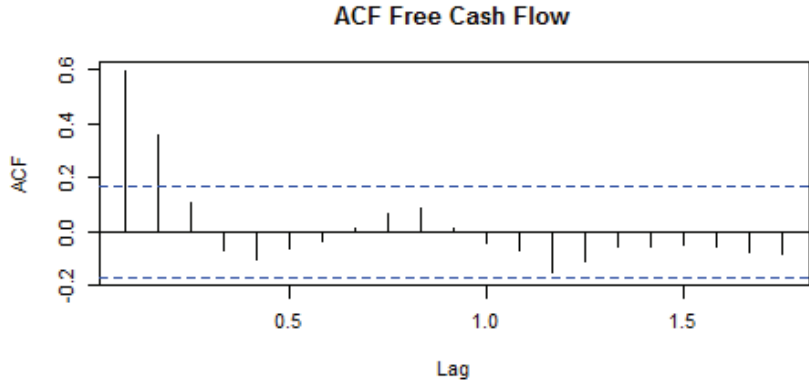


Figura D.13: ACF para el Free Cash Flow

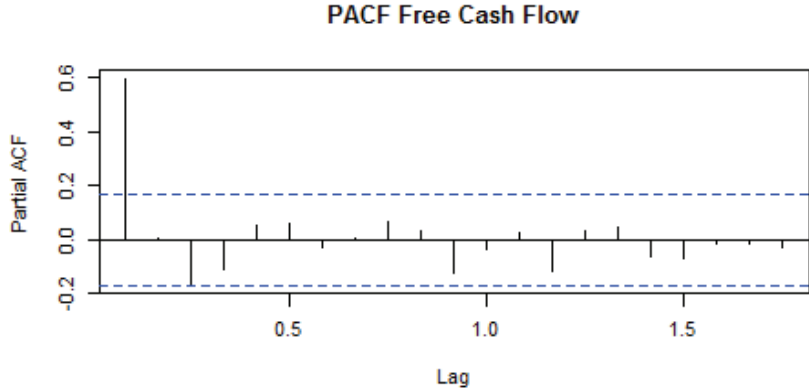


Figura D.14: PACF para el Free Cash Flow

D.4. Pruebas de raíz unitaria

D.4.1. Prueba de Dickey-Fuller Aumentada

Se basa en la siguiente regresión auxiliar

$$\Delta FCF_t = \delta + \beta t + \alpha FCF_{t-1} + \sum_i \gamma \Delta FCF_{t-i} + \varepsilon_t$$

En donde α representa el parámetro de raíz unitaria, de tal manera que mientras la hipótesis nula establece la existencia de raíz unitaria, ($\alpha = 0$), la alternativa se inclina por la idea de la no existencia de la misma, ($\alpha < 0$).

El estadístico de prueba consiste en la siguiente relación

$$ADF = \frac{\hat{\alpha}}{SE(\hat{\alpha})}$$

la cuál debe ser siempre negativa.

Las figuras D.15, D.16 y D.17 representan la prueba ADF para diferentes especificaciones de la regresión auxiliar, con esto se determina que el proceso es estacionario en nivel.

Es decir, a los niveles de 0,01, 0,05 y 0,10, no existe evidencia estadística para afirmar que el proceso presente raíz unitaria, esto implica que la serie del flujo de caja libre probablemente sea estacionaria en media. No obstante, las pruebas tipo I, II y III demuestran que: si es estacionaria, entonces probablemente lo sea alrededor de una constante.

D.4.2. Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin

Se basa en el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} FCF_t &= \beta' \mathbf{D}_t + \mu_t + u_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

donde \mathbf{D}_t contiene el componente determinístico (constante y tendencia) y $u_t \sim I(0)$ es una caminata aleatoria.

De tal manera, que la hipótesis nula consiste en verificar la estacionariedad del FCF_t , ($\sigma_\varepsilon^2 = 0$), lo que implica que μ_t es una constante.

Null Hypothesis: FCF has a unit root Exogenous: Constant, Linear Trend Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic				
Test critical values:				
	1% level		-4.029595	
	5% level		-3.444487	
	10% level		-3.147063	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(FCF) Method: Least Squares Date: 03/11/14 Time: 21:52 Sample (adjusted): 2001M02 2011M12 Included observations: 131 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
FCF(-1)	-0.414584	0.071496	-5.798683	0.0000
C	2.942124	5.387395	0.546113	0.5859
@TREND("2001M01")	-0.073842	0.071687	-1.030065	0.3049
R-squared	0.208103	Mean dependent var	-0.377598	
Adjusted R-squared	0.195729	S.D. dependent var	33.92286	
S.E. of regression	30.42241	Akaike info criterion	9.690870	
Sum squared resid	118466.9	Schwarz criterion	9.756715	
Log likelihood	-631.7520	Hannan-Quinn criter.	9.717626	
F-statistic	16.81856	Durbin-Watson stat	1.994948	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura D.15: Prueba ADF tipo III para el Free Cash

Null Hypothesis: FCF has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic				
Test critical values:				
	1% level		-3.480818	
	5% level		-2.883579	
	10% level		-2.578601	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(FCF) Method: Least Squares Date: 03/11/14 Time: 21:54 Sample (adjusted): 2001M02 2011M12 Included observations: 131 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
FCF(-1)	-0.400115	0.070119	-5.706197	0.0000
C	-1.877207	2.671604	-0.702652	0.4835
R-squared	0.201538	Mean dependent var	-0.377598	
Adjusted R-squared	0.195349	S.D. dependent var	33.92286	
S.E. of regression	30.42960	Akaike info criterion	9.683858	
Sum squared resid	119448.9	Schwarz criterion	9.727754	
Log likelihood	-632.2927	Hannan-Quinn criter.	9.701695	
F-statistic	32.56069	Durbin-Watson stat	2.007586	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura D.16: Prueba ADF tipo II para el Free Cash

Null Hypothesis: FCF has a unit root				
Exogenous: None				
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-5.675614	0.0000
Test critical values:	1% level		-2.582734	
	5% level		-1.943285	
	10% level		-1.615099	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(FCF)				
Method: Least Squares				
Date: 03/11/14 Time: 21:55				
Sample (adjusted): 2001M02 2011M12				
Included observations: 131 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
FCF(-1)	-0.395268	0.069643	-5.675614	0.0000
R-squared	0.198482	Mean dependent var	-0.377598	
Adjusted R-squared	0.198482	S.D. dependent var	33.92286	
S.E. of regression	30.37029	Akaike info criterion	9.672411	
Sum squared resid	119906.1	Schwarz criterion	9.694359	
Log likelihood	-632.5429	Hannan-Quinn criter.	9.681330	
Durbin-Watson stat	2.009714			

Figura D.17: Prueba ADF tipo I para el Free Cash

El estadístico de prueba consiste en la siguiente relación

$$KPSS = \frac{\left(T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{S}_t^2\right)}{\hat{\lambda}^2}$$

donde,

$$\hat{S}_t = \sum_{j=1}^t \hat{u}_j$$

\hat{u}_t es el residual de la regresión y $\hat{\lambda}^2$ es un estimador consistente de la varianza de u_t usando \hat{u}_t .

La figura D.18 muestra la prueba KPSS para la especificación de la regresión auxiliar con tendencia y constante, con esto se determina que el proceso es estacionario en nivel, llegando a la misma conclusión de la prueba ADF, mencionada anteriormente.

Es indispensable mencionar que el estadístico KPSS converge a una función de movimiento Browniano estándar que depende de la forma del componente determinístico y por ende la lectura de los valores críticos, y por supuesto del valor p , es contrario a cualquier prueba de hipótesis tradicional. Esto es, a los niveles de 0.01, 0.05 y 0.10, existe evidencia estadística para afirmar que el proceso del flujo de caja libre no presenta raíz unitaria; con esto, se concluye que el proceso es estacionario en media y alrededor de una constante.

Null Hypothesis: FCF is stationary Exogenous: Constant, Linear Trend Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				
Asymptotic critical values*:				0.076638
1% level				0.216000
5% level				0.146000
10% level				0.119000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				1371.665
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				3251.080
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: FCF				
Method: Least Squares				
Date: 03/11/14 Time: 23:18				
Sample: 2001M01 2011M12				
Included observations: 132				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.067304	6.459804	1.403650	0.1628
@TREND("2001M01")	-0.197240	0.085247	-2.313739	0.0223
R-squared	0.039551	Mean dependent var	-3.851942	
Adjusted R-squared	0.032163	S.D. dependent var	37.93483	
S.E. of regression	37.31980	Akaike info criterion	10.09196	
Sum squared resid	181059.7	Schwarz criterion	10.13564	
Log likelihood	-664.0694	Hannan-Quinn criter.	10.10971	
F-statistic	5.353389	Durbin-Watson stat	0.826264	
Prob(F-statistic)	0.022251			

Figura D.18: Prueba KPSS para el Free Cash

D.5. Identificación del modelo

La identificación del modelo ARMA puede ser una tarea difícil; sin embargo, haciendo uso de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial podemos identificar los posibles modelos mediante las siguientes reglas:

1. Decidir cuál es el orden máximo de las partes AR y MA a partir de los rasgos obvios de la AC y PAC : Coeficientes claramente significativos, pautas de decrecimiento geométricas o sinusoidales.
2. Evitar la identificación inicial de modelos mixtos $ARMA$ y comenzar con modelos AR o MA , preferiblemente de orden bajo.
3. Verificar la existencia de retardos estacionales.

Finalmente, haciendo uso de la Función de Autocorrelación Extendida de *Tsay* y del criterio gráfico de las funciones de autocorrelación, obtenemos que los posibles modelos son de tipo $ARMA(1,0)$ o $ARMA(1,2)$. Ver figura D.19 y D.20.

		MA													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
AR	0	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	1	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	2	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	4	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	5	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	6	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
	7	o	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Figura D.19: Función de Autocorrelación Extendida

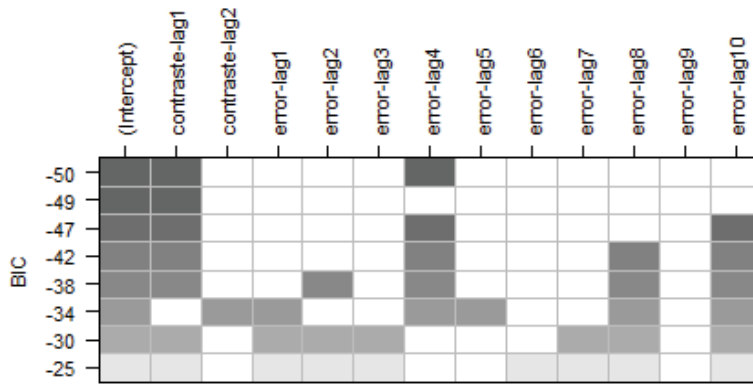


Figura D.20: Comparativo de procesos

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.604732	0.069643	8.683275	0.0000
R-squared	0.359549	Mean dependent var	-4.125545	
Adjusted R-squared	0.359549	S.D. dependent var	37.94949	
S.E. of regression	30.37029	Akaike info criterion	9.672411	
Sum squared resid	119906.1	Schwarz criterion	9.694359	
Log likelihood	-632.5429	Hannan-Quinn criter.	9.681330	
Durbin-Watson stat	2.009714			
Inverted AR Roots	.60			

Figura D.21: ARMA(1,0) sin constante

D.6. Estimación y validación del modelo

Una vez identificados los posibles procesos estocásticos generadores de la serie temporal, se trata de estimar los parámetros de dichos modelos:

$$W_t = \varphi_0 + \varphi_1 W_{t-1} + \varphi_2 W_{t-2} + \dots + \varphi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Es decir,

$$\beta' = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) \text{ y } \sigma_\varepsilon^2$$

Utilizando el método de estimación por Máxima Verosimilitud Condicional y realizando el proceso en Eviews, se obtienen los siguientes modelos:

$$FCF_t = 0,6047FCF_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$FCF_t = -4,6917 + 0,5999FCF_{t-1} + \varepsilon_t$$

los cuales son de tipo $ARMA(1,0)$, y

$$FCF_t = 0,5462FCF_{t-1} + \varepsilon_t + 0,1968\varepsilon_{t-2}$$

$$FCF_t = -4,3764 + 0,5430FCF_{t-1} + \varepsilon_t + 0,1944\varepsilon_{t-2}$$

que son de tipo $ARMA(1,2)$,

No obstante, el modelo $ARMA(1,0)$ es el que presenta mayor consistencia y se verifica en la figuras D.21, D.22, D.23 y D.24

Por último, se realiza la correspondiente validación a través de las figuras D.25, D.26, D.27, D.28, D.29, D.30, D.31, D.32, D.33 y D.34, para el caso del modelo $ARMA(1,0)$. Por su parte, el modelo $ARMA(1,2)$, se realiza la correspondiente validación a través de las figuras D.35, D.36, D.37, D.38, D.39, D.40, D.41, D.42, D.43 y D.44

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.691670	6.646766	-0.705858	0.4815
AR(1)	0.599885	0.070119	8.555199	0.0000
R-squared	0.361991	Mean dependent var		-4.125545
Adjusted R-squared	0.357045	S.D. dependent var		37.94949
S.E. of regression	30.42960	Akaike info criterion		9.683858
Sum squared resid	119448.9	Schwarz criterion		9.727754
Log likelihood	-632.2927	Hannan-Quinn criter.		9.701695
F-statistic	73.19142	Durbin-Watson stat		2.007586
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.60			

Figura D.22: ARMA(1,0) con constante

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.546237	0.082884	6.590348	0.0000
MA(2)	0.196828	0.097417	2.020474	0.0454
R-squared	0.371969	Mean dependent var		-4.125545
Adjusted R-squared	0.367100	S.D. dependent var		37.94949
S.E. of regression	30.19071	Akaike info criterion		9.668095
Sum squared resid	117580.8	Schwarz criterion		9.711991
Log likelihood	-631.2602	Hannan-Quinn criter.		9.685932
Durbin-Watson stat	1.901245			
Inverted AR Roots	.55			

Figura D.23: ARMA(1,2) sin constante

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.376373	6.896203	-0.634608	0.5268
AR(1)	0.543005	0.083312	6.517768	0.0000
MA(2)	0.194400	0.097821	1.987309	0.0490
R-squared	0.373923	Mean dependent var		-4.125545
Adjusted R-squared	0.364140	S.D. dependent var		37.94949
S.E. of regression	30.26123	Akaike info criterion		9.680246
Sum squared resid	117215.0	Schwarz criterion		9.746090
Log likelihood	-631.0561	Hannan-Quinn criter.		9.707002
F-statistic	38.22383	Durbin-Watson stat		1.901180
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.54			

Figura D.24: ARMA(1,2) con constante

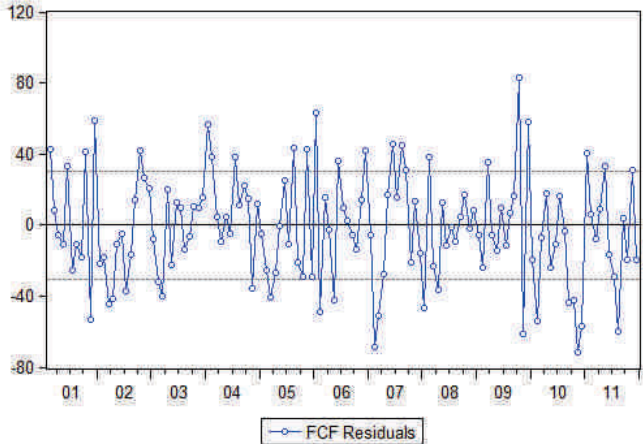


Figura D.25: Residuos ARMA(1,0)

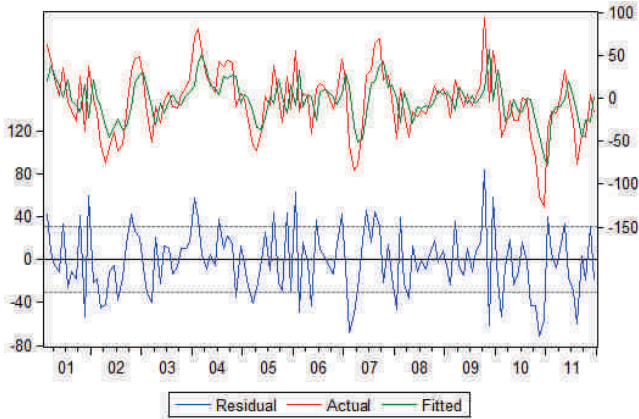


Figura D.26: Residuos, ajuste y FCF mediante ARMA(1,0)

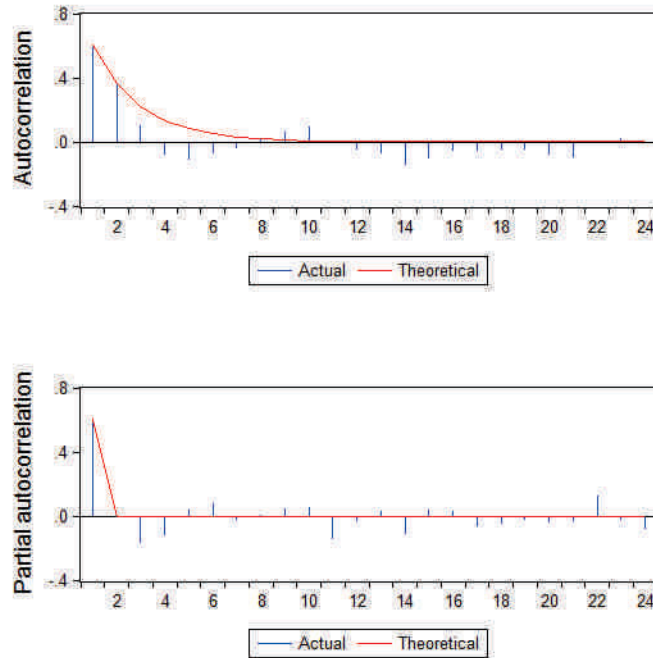


Figura D.27: ACF y PACF de la estructura ARMA(1,0)

Variable	Coefficient	90% CI		95% CI		99% CI	
		Low	High	Low	High	Low	High
AR(1)	0.604732	0.489356	0.720107	0.466951	0.742513	0.422672	0.786792

Figura D.28: Intervalo de confianza para ϕ_1 en ARMA(1,0)

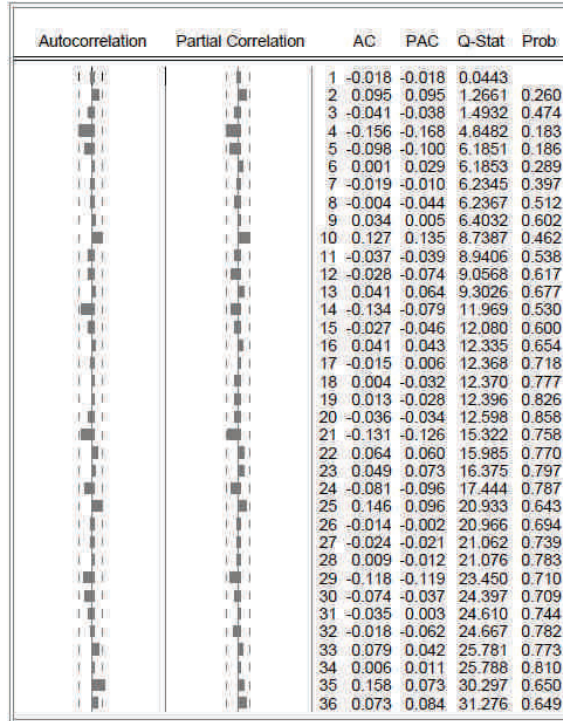


Figura D.29: ACF y PACF de los residuos ARMA(1,0)

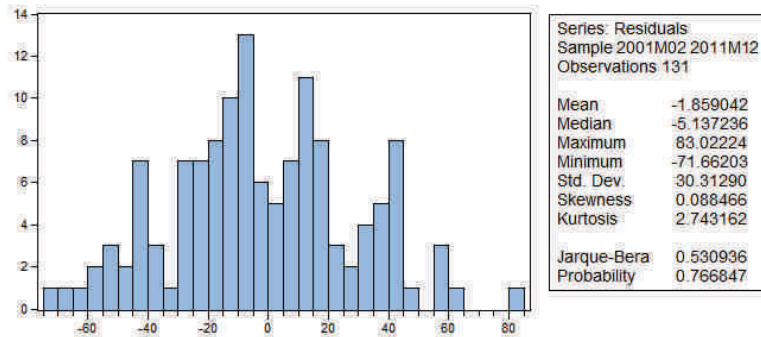


Figura D.30: Prueba de Normalidad Jarque-Bera ARMA(1,2)

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	1.306444	Prob. F(2,128)	0.2744	
Obs*R-squared	2.134060	Prob. Chi-Square(2)	0.3440	
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID				
Method: Least Squares				
Date: 04/11/14 Time: 07:43				
Sample: 2001M02 2011M12				
Included observations: 131				
Presample missing value lagged residuals set to zero.				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.210514	0.185953	-1.132081	0.2597
RESID(-1)	0.198621	0.206547	0.961625	0.3381
RESID(-2)	0.228828	0.143465	1.595008	0.1132
R-squared	0.016291	Mean dependent var	-1.859042	
Adjusted R-squared	0.000920	S.D. dependent var	30.31290	
S.E. of regression	30.29895	Akaike info criterion	9.682738	
Sum squared resid	117507.4	Schwarz criterion	9.748582	
Log likelihood	-631.2193	Hannan-Quinn criter.	9.709493	
Durbin-Watson stat	2.004498			

Figura D.31: Prueba de Correlación Serial ARMA(1,0)

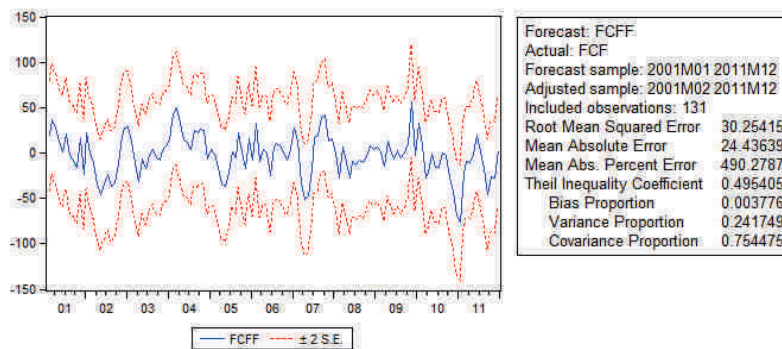


Figura D.32: Intervalos de Predicción ARMA(1,0)

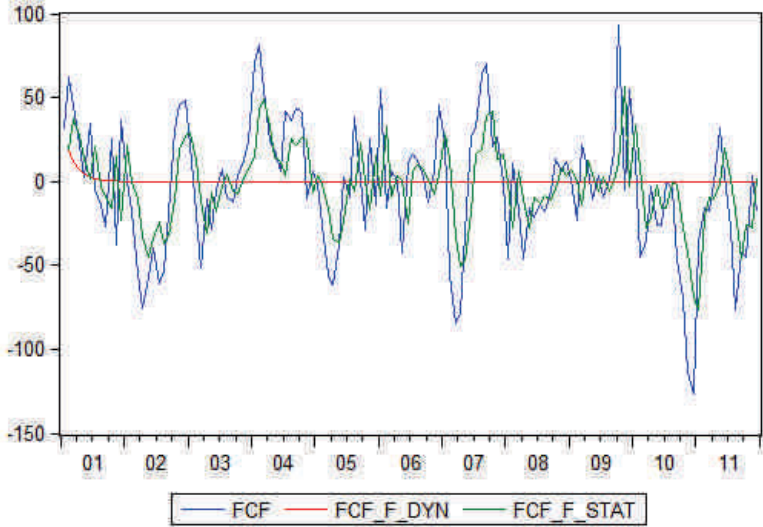


Figura D.33: Predicción vs Realidad del FCF ARMA(1,0)

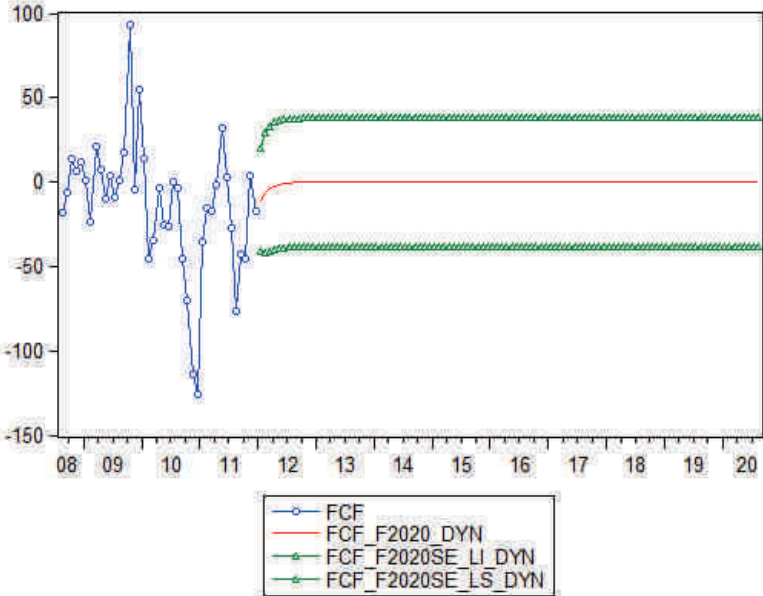


Figura D.34: Pronostico de largo plazo ARMA(1,0)

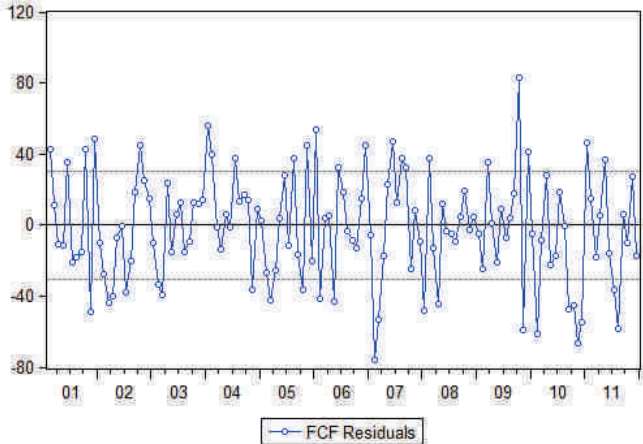


Figura D.35: Residuos ARMA(1,2)

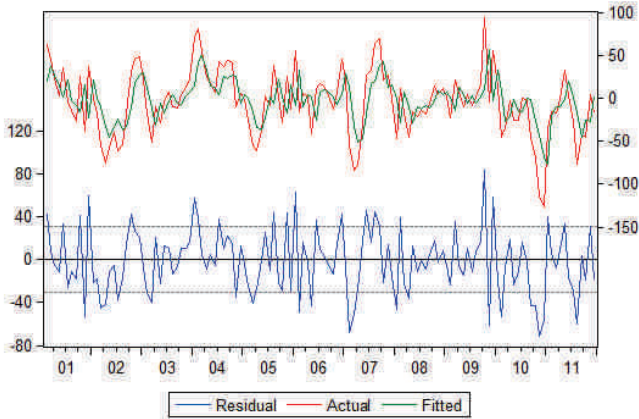


Figura D.36: Residuos, ajuste y FCF mediante ARMA(1,2)

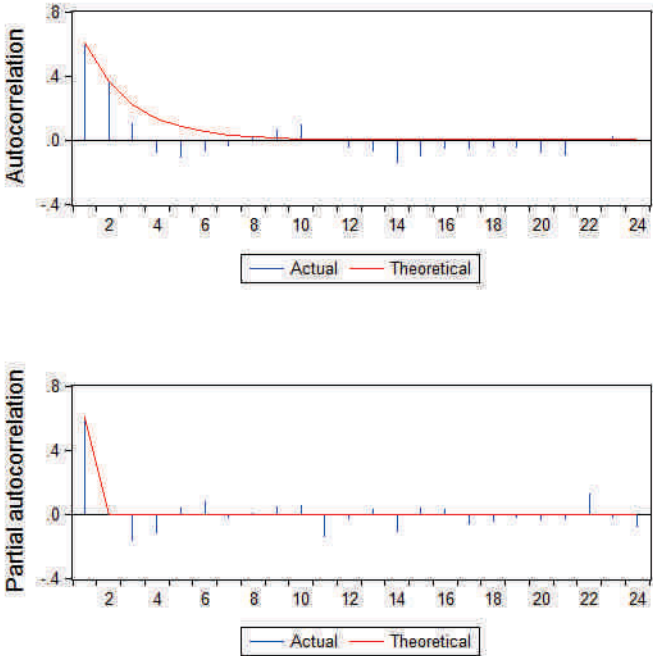


Figura D.37: ACF y PACF de la estructura ARMA(1,2)

Variable	Coefficient	90% CI		95% CI		99% CI	
		Low	High	Low	High	Low	High
AR(1)	0.546237	0.408918	0.683555	0.382248	0.710225	0.329537	0.762936
MA(2)	0.196828	0.035433	0.358223	0.004087	0.389569	-0.057866	0.451521

Figura D.38: Intervalo de confianza para ϕ_1 en ARMA(1,2)

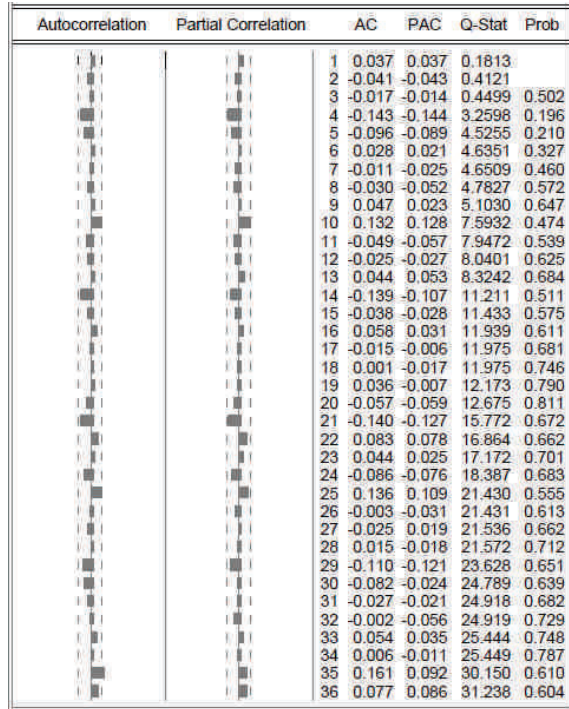


Figura D.39: ACF y PACF de los residuos ARMA(1,2)

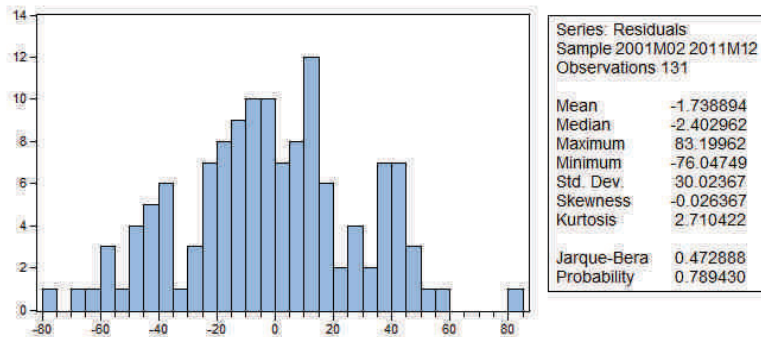


Figura D.40: Prueba de Normalidad Jarque-Bera ARMA(1,2)

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test

F-statistic	2.280062	Prob. F(2,127)	0.1064
Obs*R-squared	4.113247	Prob. Chi-Square(2)	0.1279

Test Equation:
 Dependent Variable: RESID
 Method: Least Squares

Sample: 2001M02 2011M12
 Included observations: 131
 Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.033463	0.253256	0.132132	0.8951
MA(2)	0.872443	0.448366	1.945828	0.0539
RESID(-1)	0.009449	0.262194	0.036040	0.9713
RESID(-2)	-0.930424	0.522071	-1.782180	0.0771

R-squared	0.031399	Mean dependent var	-1.738894
Adjusted R-squared	0.008518	S.D. dependent var	30.02367
S.E. of regression	29.89552	Akaike info criterion	9.663353
Sum squared resid	113505.2	Schwarz criterion	9.751145
Log likelihood	-628.9496	Hannan-Quinn criter.	9.699027
Durbin-Watson stat	2.015273		

Figura D.41: Prueba de Correlación Serial ARMA(1,2)

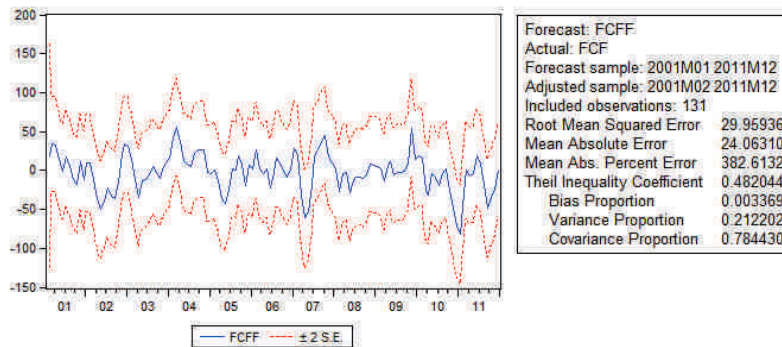


Figura D.42: Intervalos de Predicción ARMA(1,2)

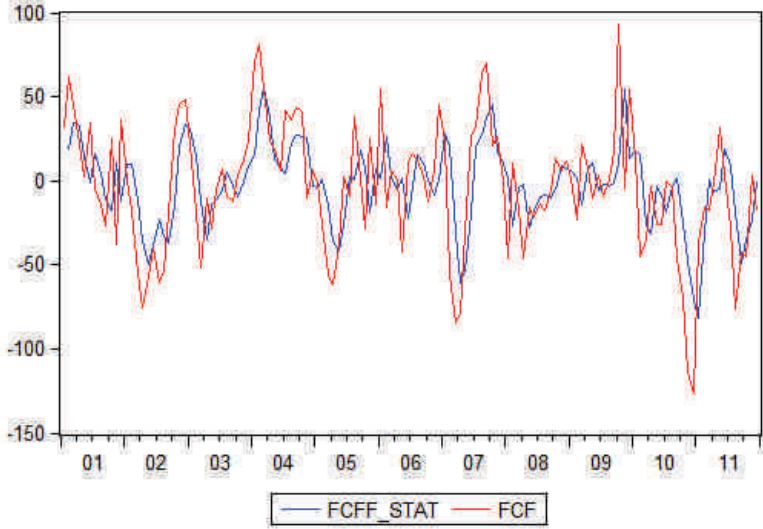


Figura D.43: Predicción vs Realidad del FCF ARMA(1,2)

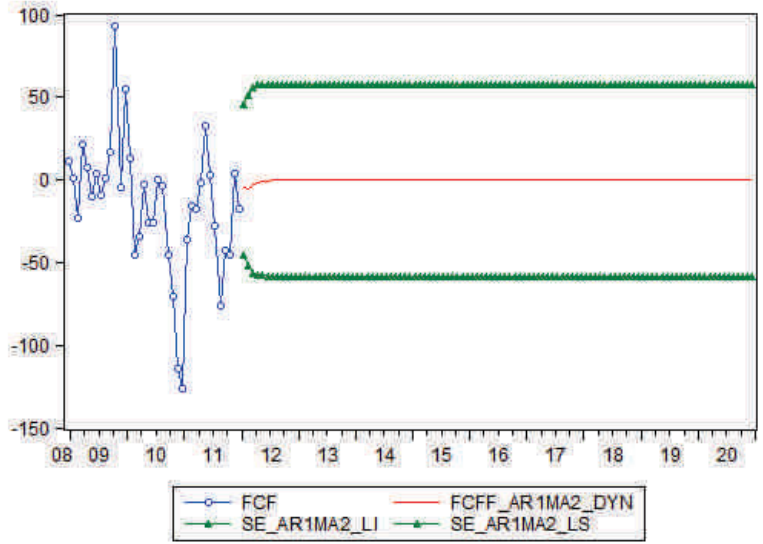


Figura D.44: Pronostico de largo plazo

Anexo E

Resultados de la Simulación

A continuación, se presentan de manera general los resultados de la simulación del componente permanente bajo un proceso $ARMA(1, 0)$,

Simulation Summary Information	
Workbook Name	Simulación V_t.xlsx
Number of Simulations	1
Number of Iterations	10000
Number of Inputs	216
Number of Outputs	2
Sampling Type	Latin Hypercube
Simulation Start Time	11/5/14 1:54:33
Simulation Duration	00:01:43
Random # Generator	Mersenne Twister
Random Seed	-1

Figura E.1: Información de la Simulación

Summary Statistics for V_t			
	Statistics	Percentile	
Minimum	-272.144119	5%	-122.94059
Maximum	228.0403926	10%	-100.1596407
Mean	-19.40352702	15%	-85.15449555
Std Dev	63.28258593	20%	-72.31975285
Variance	4004.685682	25%	-61.53583722
Skewness	0.01821863	30%	-52.18371108
Kurtosis	3.000261671	35%	-43.64747886
Median	-20.15175768	40%	-35.72898908
Mode	-41.29564549	45%	-27.81341539
Left X	-122.94059	50%	-20.15175768
Left P	5%	55%	-12.24050081
Right X	85.61567949	60%	-4.189201337
Right P	95%	65%	4.310222337
Diff X	208.5562695	70%	13.58076648
Diff P	90%	75%	23.25212491
#Errors	0	80%	33.82266548
Filter Min	Off	85%	46.15563773
Filter Max	Off	90%	61.99819793
#Filtered	0	95%	85.61567949

Figura E.2: Estadísticos de la Simulación

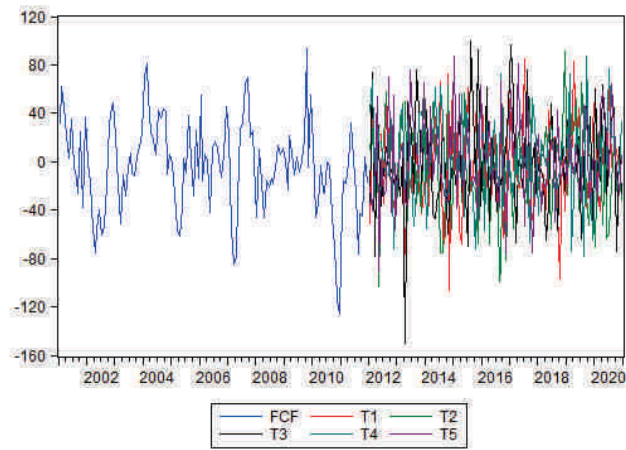


Figura E.3: Muestra de posibles trayectorias del FCF



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA APLICADA

ORDEN DE EMPASTADO

De acuerdo a lo estipulado en el artículo 83 del Reglamento del Sistema de Estudios de las Carreras de Formación Profesional y de Postgrados, aprobado por el Consejo Politécnico en sesión del 16 de agosto del 2011 y una vez verificado el cumplimiento del formato de presentación establecido, se autoriza la impresión y encuadernación final de la Tesis de Grado presentado por el señor **ANDRÉS ALEJANDRO GALVIS CORREA**.

Fecha de autorización: Quito, D.M., 11 de marzo de 2015



Dr. Marco Calahorrano
DECANO
FACULTAD DE CIENCIAS