ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTROL LÓGICO DIFUSO: MODELO DE CONTROL DE INVENTARIO APLICADO A UNA FÁBRICA DE PRODUCCIÓN

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

GABRIELA ALEXANDRA CLAVIJO MÉNDEZ

gabriela_clavijom@yahoo.com

MARCO PAÚL ENRÍQUEZ CRIOLLO

coda186@hotmail.com

DIRECTOR: Dr. LUIS HORNA
lhorna@server.epn.edu.ec

Quito,mayo 2008

DECLARACIÓN

Nosotros, GABRIELA ALEXANDRA CLAVIJO MÉNDEZ y MARCO PAÚL ENRÍQUEZ CRIOLLO, declaramos bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedemos nuestros derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

GABRIELA ALEXANDRA CLAVIJO MÉNDEZ   MARCO PAÚL ENRÍQUEZ CRIOLLO

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por GABRIELA ALEXANDRA CLAVIJO MÉNDEZ y MARCO PAÚL ENRÍQUEZ CRIOLLO, bajo mi supervisión.

Dr. LUIS HORNA
DIRECTOR DE PROYECTO

DEDICATORIA

A mi esposo Carlos Vladimir quien con su apoyo, cariño y comprensión siempre me apoyó a lo largo de mis estudios profesionales ayudándome a lograr esta meta tan importante en mi vida, y a mis hijos Karla Emilia y Antonio Ricardo, quienes se han convertido en mi fortaleza, para cumplir todos mis anhelos.

Gabriela Alexandra

AGRADECIMIENTO

A Dios por acompañarme en todos los momentos de mi vida, dándome fuerza para salir adelante y superar todos los obstáculos presentados en mi camino.

A mi padre Jorge Gabriel quien siempre tuvo una palabra de aliento para mi, a mi madre María Cristina quien siempre me ha dado su apoyo y a estado allí para ayudarme en los momentos más difíciles, convirtiéndose en uno de mis pilares fundamentales para culminar esta meta

A mi hermana Carina Raquel por su cariño y apoyo a lo largo de todos estos años de estudio.

A mis suegros Carlos Antonio y María Cleofé y a mi cuñada Diana quienes me han tendido la mano cuando lo he necesitado ayudándome así a concluir exitosamente mi carrera.

Gabriela Alexandra

DEDICATORIA

A mi madre el ejemplo en mi vida, que me a dado todo, y a mi familia que en todo tiempo a estado junto a mi.

Marco Paúl

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a las personas que siempre estuvieron a mi lado, a la familia que escogí Miguel y David mis amigos incondicionales.

Marco Paúl

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS Y NÚMEROS DIFUSOS

CAPÍTULO 2

LÓGICA DIFUSA Y CONTROL LÓGICO DIFUSO

CAPÍTULO 3

ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIO

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DEL MODELO CLÁSICO DE CONTROL DE INVENTARIO Y EL MODELO DE CONTROL LÓGICO

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

ANEXOS

RESUMEN

El control de inventarios en la industria es de suma importancia debido a los altos costos que representa tener grandes cantidades en bodega, al igual que es importante tener un suministro adecuado para satisfacer la demanda, es por esto que el modelo de control lógico difuso para el control de inventario de una empresa de producción desarrollado busca responder las dos preguntas importantes que son el cuándo y cuánto ordenar. El modelo ingresa dos variables de entrada y una variable de salida con sus respectivos niveles, estos niveles son expresados mediante números difusos triangulares y trapezoidales, se introducen además las reglas inferenciales Si... Y... Entonces. Para el pronóstico de la demanda se aplica el método Delphi, el cual se basa en buscar expertos conocedores del desenvolvimiento de la empresa; esto nos da como resultado las lecturas del modelo, las cuales son incluidas en las respectivas funciones de pertenencia; es decir, en las dos variables de entrada, con estas observaciones encontramos las reglas a ser evaluadas, luego realizamos la agregación del control de salida, para lo cual superponemos los trapezoides encontrados en el control de salida de cada regla. Para finalizar procedemos a la desdifusificación aplicando cualquiera de los métodos desarrollados en el presente trabajo.

Para efecto de comparación de resultados se desarrolló también un modelo de control de inventario clásico; la elaboración de histogramas ayuda en el

pronóstico de la demanda, luego de ser obtenida ésta se procede a aplicar el modelo de lote económico a los datos obtenidos de la empresa.

En el capítulo 1 se da una introducción a los conjuntos difusos, los números difusos, relaciones y orden de números difusos. Se desarrollan también todas las operaciones concernientes a los puntos anteriores con ejemplos prácticos y claros.

En el capítulo 2 se realiza una pequeña introducción de la lógica clásica, se dan los conceptos fundamentales de la lógica difusa y se desarrolla el modelo de control lógico difuso.

En el capítulo 3 se realiza una introducción a la administración de inventario, dentro de la cual encontramos los costos de operación, costos de asignación, entre otros; se desarrolla también el modelo de lote económico, mismo que será aplicado mas adelante.

En el capítulo 4 se aplica el modelo de control lógico difuso a los datos obtenidos de la fábrica de producción de rodachín, también se aplica el modelo de control de inventario clásico y por último se realiza la comparación de resultados.

En el capítulo 5 se encuentran las conclusiones y recomendaciones sugeridas.

PRESENTACIÓN

Cuando escuchamos hablar por primera vez de la “lógica difusa” o “matemática borrosa”, nos produce generalmente a pensar de inmediato que se trata de una teoría compleja, que se la podría tachar de poco clara o de confusa; no obstante, a pesar de esta sentencia preconcebida, ha sido ésta objeto de un amplísimo desarrollo teórico y se la ha aplicado en diferentes campos, como la ciencia, la tecnología , las ciencias administrativas, e, incluso , al análisis empírico de las ciencias sociales. Así pues hay un poderoso soporte matemático detrás de la misma.

En los problemas de planificación de la producción, las situaciones reales son, frecuentemente, imprecisas o inciertas, como es el caso del control de inventario. Debido a la falta de información, el estado futuro del sistema puede no ser completamente conocido. Este tipo de incertidumbre de carácter estocástico se ha abordado, tradicionalmente, mediante la teoría de la probabilidad y la estadística. A este tipo de imprecisión se la denomina como incertidumbre estocástica en contraste con la imprecisión presente en la descripción del significado semántico de los eventos, fenómenos o sentencias, que denotan borrosidad, la cual está presente en todas las áreas en las que los criterios humanos, la evaluación y las decisiones son importantes.

La planificación de la producción difusa permite la vaguedad o imprecisión que puede existir en las previsiones de la demanda del mercado y los parámetros asociados con la capacidad productiva, los costos del retraso de la demanda o la pérdida de ventas.

Como se verá en este trabajo, la lógica tradicional quedará incorporada como un caso particular de la lógica difusa, en este sentido diremos que la lógica difusa es una extensión de un sistema para incluir la incertidumbre y la vaguedad.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS Y NÚMEROS DIFUSOS

INTRODUCCIÓN

Los antecedentes filosóficos de la Lógica Difusa pueden encontrarse en los trabajos de Bertrand Russell, Jan Lukasiewicz y Max Black, que ante las paradojas de la lógica tradicional, introdujeron en la naturaleza del blanco y negro (verdadero y falso), las sombras de los grises inherentes al mundo real.

Posteriormente Zadeh (1965) introdujo el término *difuso* para denominar la vaguedad, que aparece cuando se utiliza el lenguaje humano, sea o no profesional, que define la falta de contornos bien definidos, de estas estructuras lógicas.

Estos principios son conceptuados en éste capítulo introductorio, nuestro interés se centra, no mas allá de la aritmética difusa elemental y algunas otras temas, que nos puedan permitir la realización de nuestra aplicación de interés que es el control de inventarios.

De esta forma, redefinimos las nociones básicas de conjuntos, operaciones conjuntitas, desde una perspectiva difusa; donde observamos que los hechos matemáticos encierran ciertas reformas, como el hecho que la intersección de un conjunto con su complemento es siempre el conjunto vacío, para los conjuntos difusos esto casi nunca sucede. Luego nos centramos en el estudio y análisis de los números, relaciones e intervalos difusos, este conocimiento cimienta la comprensión en la lógica difusa, muy útil para aplicaciones en la administración y negocios.

1.1 DEFINICIÓN DE CONJUNTO DIFUSO

Un conjunto difuso puede definirse completamente por su función de pertenencia:

$$\mu_A : U \mapsto [0,1]$$
$$x \mapsto \mu_A(x)$$

$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0,1]\}$, donde U es el conjunto universo.

Como se puede ver para un conjunto difuso, la pertenencia de un elemento al conjunto no es cuestión de todo o nada, sino que son posibles diferentes grados de pertenencia. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real [0,1]. Esto se lo ilustra de mejor manera con el siguiente ejemplo.

En el año 2007 en el distrito metropolitano de Quito, surgió una controversia por la concentración de arsénico en el agua potable que se consumía en el Valle de Tumbaco. El arsénico es un elemento químico, presente en la naturaleza, todas las combinaciones arsenicales son venenosas en grandes dosis e influyen sobre el cerebro, produciendo una dilatación de los capilares y a largo plazo podría producir cáncer. En dosis terapéuticas sirven para combatir algunas enfermedades de la piel, como la psoriasis. Así pues la Organización Mundial de la Salud estableció que la concentración máxima en el agua debería ser de 0,010 mg/l.

La afirmación de que "el agua está contaminada por arsénico" y por ende es tóxica para el consumo humano, va haciéndose menos verdadera al tener menos gramos de este elemento químico disuelto en el líquido, hasta que esta verdad desaparece por completo, así reconocemos que la realidad debe tener de hecho grados de verdad, o dicho de otra forma debe tener grados de pertenencia**,** de un elemento a un conjunto dado; en este caso un bosquejo aproximado del número difuso que expresaría esta situación tendría la siguiente forma:

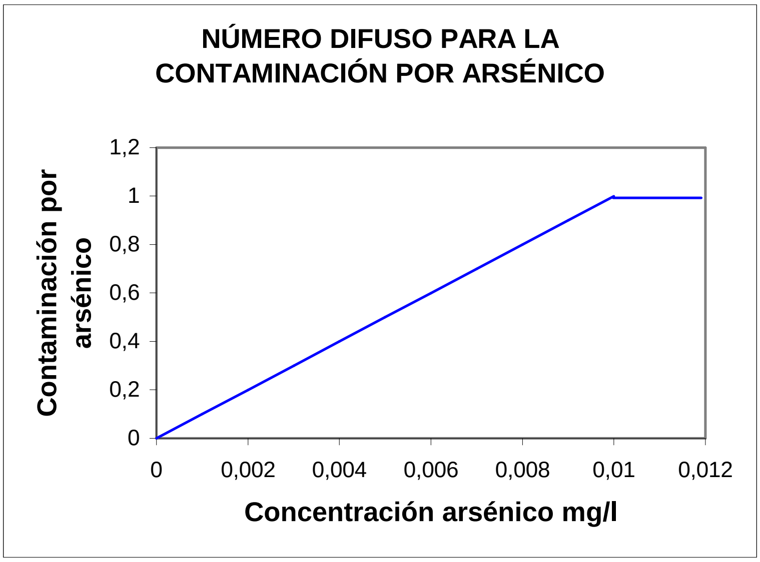


Figura 1.1 Número difuso para la contaminación por arsénico

El conjunto universo tiene función de pertenencia idéntica a 1, $\mu_U(x) = 1$; además el conjunto vacío tiene como función de pertenencia $\mu_\Phi(x) = 0$. El soporte del conjunto difuso A viene dado por el conjunto $S(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$ y la altura de A se define como $alt(A) = \sup_x \mu_A(x)$.

Un conjunto difuso es llamado normalizado cuando para al menos un $x \in A$, alcanza el grado máximo de la función de pertenencia, es decir 1; de otra manera es llamado no – normalizado. Supongamos que el conjunto no vacío A es no – normalizado; entonces $\mu_A(x) < 1$; éste puede ser normalizado dividiendo $\mu_A(x)$ por $\sup_X \mu_A(x)$.

La función de pertenencia, puede ser, también, una función continua (o mixta). Veamos un ejemplo de función de pertenencia discreta. Consideremos el conjunto $A = \{(5,0.2),(6,0.3),(7,0.5),(8,0.9),(9,1),(10,0.8),(11,0.5),(12,0.3),(13,0.1)\}$ cuyo gráfico sería:

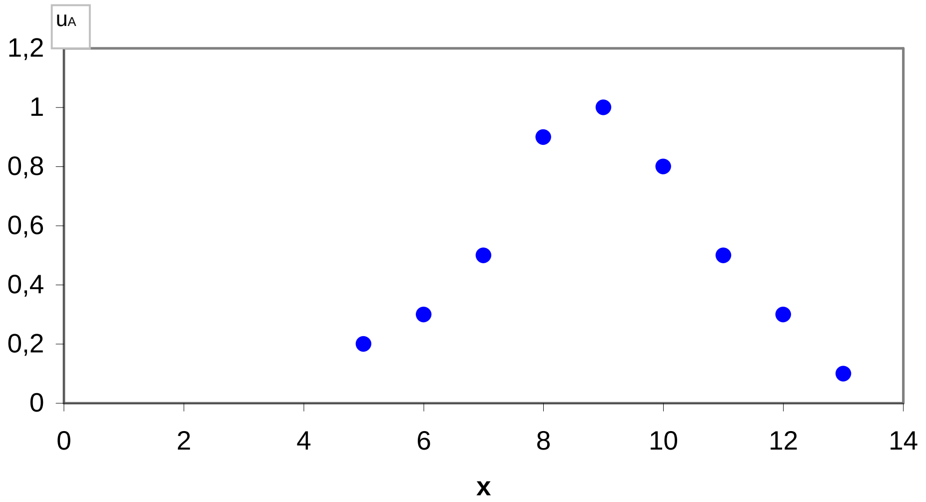


Figura 1.2 Conjunto difuso A

Ahora consideremos el conjunto difuso A = “números reales próximos a 10 ”. Tal conjunto podría quedar definido como sigue:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / \mu_A(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}\}$$

cuya representación gráfica es:

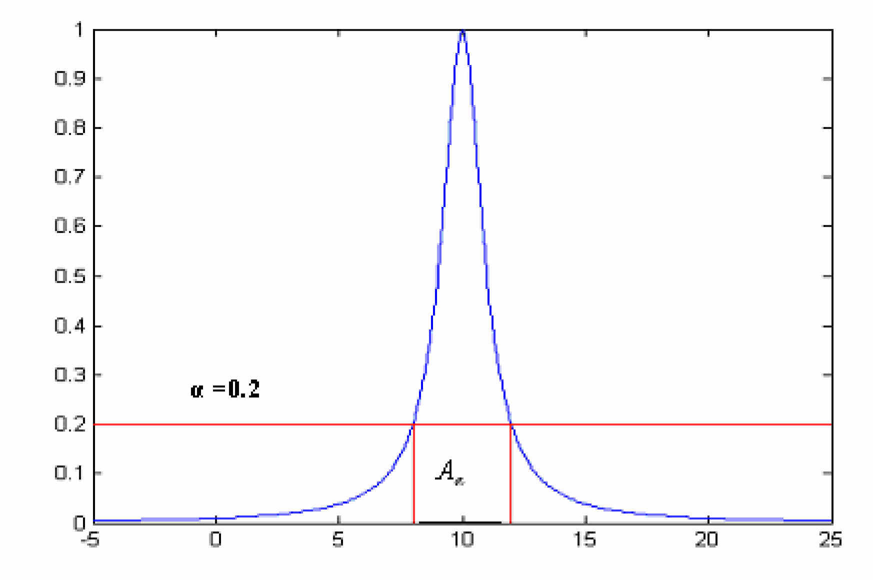


Figura 1.3 Conjunto difuso $A =$ ”números reales próximos a 10”

1.2 α - CORTE O CONJUNTO DE UMBRAL α

Un concepto muy útil es el conjunto de nivel (umbral) α, grado de presunción, o α – corte. Este concepto permite un enfoque muy interesante de la teoría de conjuntos difusos, ya que la familia formada por los α – cortes contiene toda la información sobre el conjunto difuso. Se llama α – corte del conjunto difuso A al conjunto clásico definido como sigue:

$$A_\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$$

Se trata, por tanto, del conjunto que contiene todos los valores de x con un valor de pertenencia o compatibilidad (presunción, certeza, son otras expresiones utilizadas) de al menos α. Si sólo se consideran los valores x tales que $\mu_A(x) > \alpha$, le llamaremos α – corte estricto o fuerte, y le denominaremos $A_\alpha^>$. El conjunto $A_{\alpha=1}$, se suele llamar el núcleo de A.

En la figura 1.3 que muestra el conjunto difuso A = “números reales próximos a 10 ”, muestra la forma que toma el α – corte, α = 0.2; en este caso el conjunto resultante es el representado por el subintervalo en línea gruesa, formado en torno al valor 10, que es el núcleo del conjunto difuso.

1.3 CONVEXIDAD DE CONJUNTOS DIFUSOS

El concepto de convexidad también juega un papel importante en la teoría de conjuntos difusos. Las condiciones de convexidad se definen en referencia a la función de pertenencia.

Se dice que un conjunto difuso A es convexo si:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},$$

para todo, $x_1, x_2 \in U$ y

para todo $\lambda \in [0,1]$

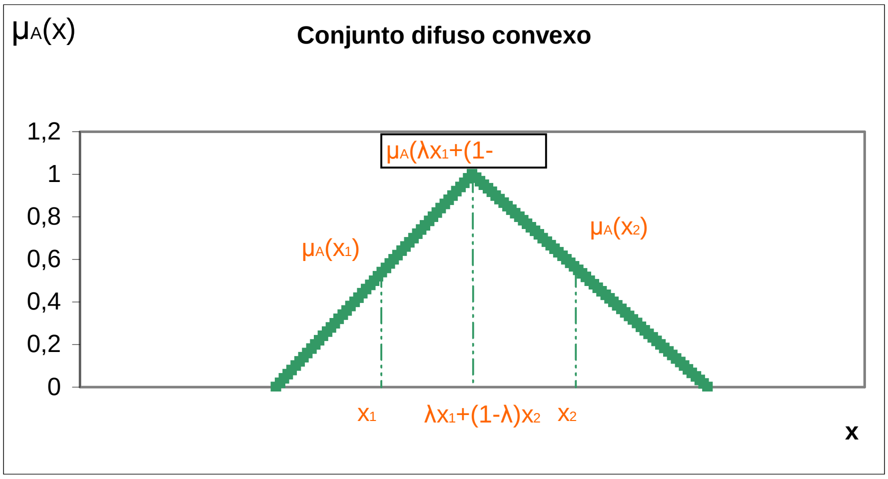


Figura 1.4 (a) Conjunto difuso convexo

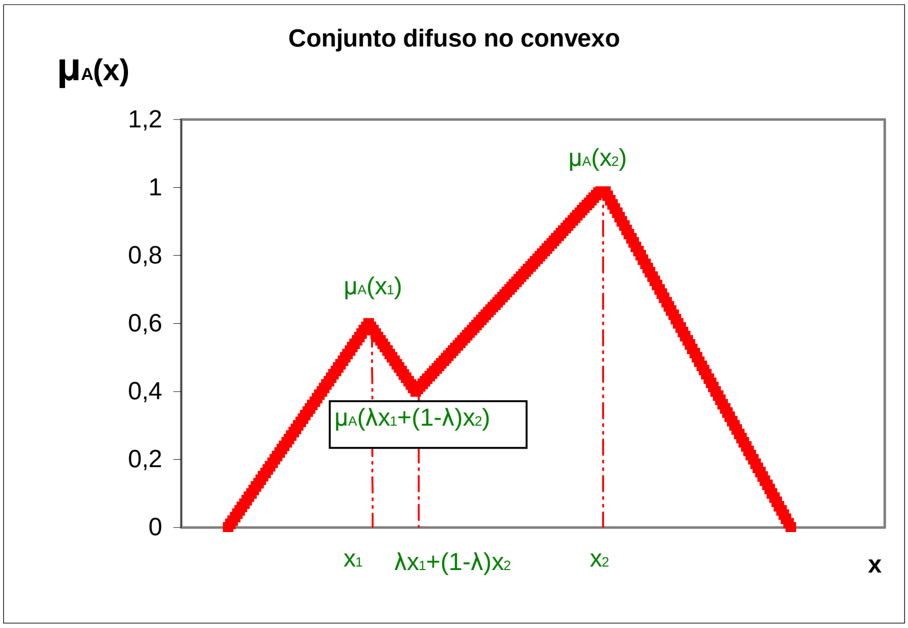


Figura 1.4 (b) Conjunto difuso no convexo

1.4 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO DIFUSO

El concepto de cardinalidad de un conjunto difuso no tiene nada que ver con el similar en el caso de los conjuntos comunes (número de elementos), sino que se refiere más bien a su tamaño.

Para un conjunto difuso, se define su cardinalidad como sigue:

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x) \quad \text{para el caso discreto}$$

Y para el caso continuo se tiene:

$$|A| = \int_U \mu_A(x)dx$$

Esta expresión como podemos ver tiene que ver mas bien con el tamaño de área, que con el número de elementos de conjunto, en sentido clásico. También, puede definirse el concepto de cardinalidad relativa (respecto a un conjunto de referencia dado o universo) en la forma que sigue:

$$\|A\| = \frac{|A|}{|U|}$$

Como es obvio, para comparar la cardinalidad de dos conjuntos difusos habrá que elegir el mismo universo como referencia.

1.5 OPERACIONES CONJUNTISTAS DIFUSAS BÁSICAS

La función de pertenencia es la componente fundamental de un conjunto difuso, de ahí que las operaciones con estos conjuntos se definen a través de esta función. Diremos que un conjunto A es un subconjunto difuso de B, es decir, $A \subseteq B$, si :

$$\text{Para todo } x \in U : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Y si existe, al menos, un punto $x \in U$ tal que $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$, entonces escribiremos que $A \subset B$.

Intersección (mín – intersección)

La intersección de dos conjuntos difusos, A y B, viene dada, punto a punto, por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = mín\{\mu_A(x),.\mu_B(x)\}$$

Unión (máx– unión):

La unión de dos conjuntos difusos, A y B, viene dada, punto a punto, por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = máx\{\mu_A(x),.\mu_B(x)\}$$

Complementación:

El complemento, A^C, de un conjunto difuso A, viene dado, punto a punto, por:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Ejemplo 1.1

Consideremos el conjunto universo $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y los conjuntos difusos A y B definidos con sus respectivas funciones de pertenencia

Tabla 1.1 (a) Funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A y B

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_A(x)$	0,2	0,7	1	0
$\mu_B(x)$	0,5	0,3	1	0,1

Tabla 1.1 (b) Operación intersección y unión de A y B

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_{A\cap B}(x)$	0,2	0,3	1	0
$\mu_{A\cup B}(x)$	0,5	0,7	1	0,1

Ejemplo 1.2

Consideremos los conjuntos difusos A = “números reales próximos a 10” y B = “números reales próximos a 15” y $U = R$, supongamos que, ahora, los definimos como sigue:

$$A = \{(x, \mu_A(x) / x \in U)\},$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & para \quad x < 5, \\ (x-5)/5, & para \quad 5 \le x \le 10, \\ (15-x)/5, & para \quad 10 \le x \le 15, \\ 0, & para \quad x > 15. \end{cases}$$

$$B = \{(x, \mu_B(x) / x \in U)\},$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & para \quad x < 10, \\ (x-10)/5, & para \quad 10 \le x \le 15, \\ (20-x)/5, & para \quad 15 \le x \le 20, \\ 0, & para \quad x > 20. \end{cases}$$

La intersección de estos dos conjuntos sería C = "números reales próximos a 10 y a 15" y se obtendría como sigue:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \min[(15-x)/5, (x-10)/5], & para \quad 10 \le x \le 15, \\ 0, & caso \quad contrario \end{cases}$$

La unión, que llamaremos D = "números reales próximos a 10 ó a 15", vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \max[(x-5)/5, (15-x)/5, (x-10)/5, (20-x)/5], & para \quad 5 \le x \le 20, \\ 0, & caso \quad contrario. \end{cases}$$

Podemos definir ambas operaciones gráficamente como sigue:

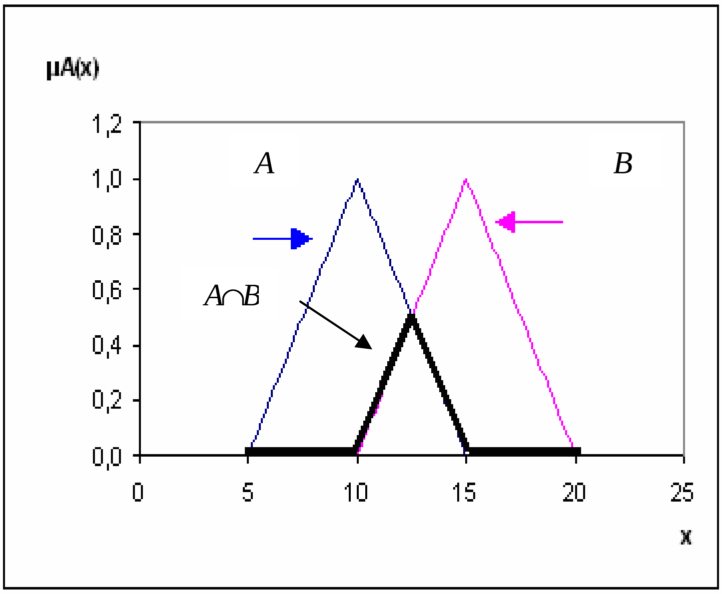


Figura 1.5 (a) Intersección de los conjuntos difusos A y B

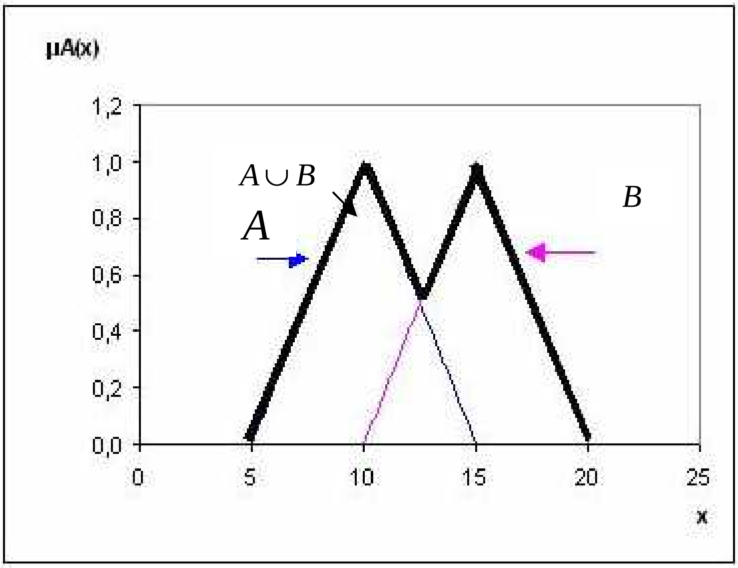


Figura 1.5 (b) Unión de los conjuntos difusos A y B

Como es sabido, estas operaciones constituyen un álgebra de Boole para el caso de conjuntos normales. Sin embargo, en el caso de los conjuntos difusos no es así, puesto que no se cumple la ley del tercero excluido, ya que:

$$A \cap A^C \neq \Phi \quad \text{y} \quad A \cup A^C \neq U$$

Por tanto, las operaciones que acabamos de ver sólo tienen las propiedades de un álgebra distributiva.

1.6 PRINCIPIO DE EXTENSIÓN

El principio de extensión es una de las principales herramientas en la teoría de conjuntos difusos, ya que hace posible la aplicación de principios matemáticos no difusos al tratamiento de cantidades difusas; la aplicación del álgebra clásica a números difusos lo hace esencialmente útil en los cálculos difusos.

Sea $y = f(x)$, donde $x \in X$ e $y \in Y$, si tenemos una aplicación lineal de X en Y, fácilmente la imagen de esta aplicación puede ser encontrada; en cambio si tenemos un conjunto difuso $A \in X$ donde la pregunta viene a ser ¿Cuál es la imagen difusa de A por medio de f?.

Si llamamos B a la imagen, es evidente que el soporte de B debería ser la imagen del soporte de A.

Si fuese una relación biunívoca no se tendría ningún problema, el hecho es que los valores de $y \in B$ es posible que provengan de mas de un x original, por esta razón Zadeh propuso el siguiente valor para la función de pertenencia de B.

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in X \,:\, f^{-1}(y) = x} \mu_A(x), & si \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & caso \quad contrario \end{cases}$$

Este resultado puede ser interpretado como la unión a través del supremo de todos los x que constituyen el conjunto difuso cuyo soporte está formado por un único punto, los cuales tienen a $f(x) = y$, con grado de pertenencia $\mu_A(x)$.

A continuación presentamos un ejemplo donde se podrá ilustrar en forma clara el principio de extensión. Trabajaremos con la función $y = x^2 + 3$, y el conjunto difuso S con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{3}, & -1 \leq x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & caso \quad contrario. \end{cases}$$

El procedimiento de obtención del conjunto imagen, para algunos valores concretos del conjunto difuso S, se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 1.2 Algunos valores del conjunto imagen del conjunto difuso S

x	$\mu_S(x)$	y	$\mu_B(y)$
-1	**0**	**4**	**0,67**
-0,75	**0,083**	**3,56**	**0,58**
-0,5	**0,17**	**3,25**	**0,5**
-0,25	**0,25**	**3,06**	**0,41**
0	**0,33**	**3**	**0,33**
0,25	**0,42**	**3,06**	**0,41**
0,5	**0,5**	**3,25**	**0,5**
0,75	**0,58**	**3,56**	**0,58**
1	**0,67**	**4**	**0,67**

En conclusión el conjunto imagen $B = f(A)$, podría definirse de la siguiente manera:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \dfrac{(y-3)^{1/2}}{3} + 1/3, & 3 \le y \le 7, \\ 3-(y-3)^{1/2}, & 7 < y \le 12, \\ 0, & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

1.6.1 DISTANCIA DIFUSA ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS

Sea U un espacio métrico, con una pseudo-métrica d:U x$U \rightarrow \mathbb{R}^+$. La distancia difusa, d, entre dos conjuntos difusos A y B, puede definirse de la siguiente manera:

$$\mu_{d(A,B)}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in U \times U \\ d(x_1, x_2) = y}} \textit{mín}\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$$

Ejemplo 1.3

Se considera $U = \mathbb{R}^1$ y la distancia $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ y nuestros conjuntos difusos vienen dados por:

$$\mu_A(x_1) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - 8}{2}, & \text{si,} \quad 8 \le x_1 \le 10, \\ \dfrac{14 - x_1}{4}, & \text{si,} \quad 10 \le x_1 \le 14, \\ 0, & \textit{caso contrario}. \end{cases}$$

$$\mu_B(x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_2 - 12}{3}, & \text{si,} \quad 12 \le x_1 \le 15, \\ \dfrac{19 - x_2}{4}, & \text{si,} \quad 15 \le x_1 \le 19, \\ 0, & \textit{caso contrario}. \end{cases}$$

La distancia máxima sería $|19-8|=11$, con valor cero para ambas funciones de pertenencia. Como no hay otra combinación posible de valores de A y B que de esta cifra, el supremo tomará, también, el valor cero. Continuando los dos puntos extremos hacia arriba, tendríamos distancias decrecientes con funciones de pertenencia crecientes, hasta tomar el valor uno en $|15-10|=5$. Descendiendo, ahora, en ambos conjuntos, la distancia sigue decreciendo hasta la intersección de ambos, con $d=0$, y también lo hace la función de pertenencia, hasta llegar al punto $x_1=x_2=12{,}86 \;\; (d)=0$, en que toma valor 0,285. A partir de este punto tendríamos distancias ya calculadas, pero con nivel de pertenencia siempre menor que las anteriores.

La solución viene dada por el conjunto difuso cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{d(A,B)}(y)=\begin{cases} 0{,}285+0{,}715\dfrac{y}{5}, & 0\le y\le 5,\\[2ex] \dfrac{11-y}{6}, & 5<y\le 11,\\[2ex] 0, & caso \quad contrario. \end{cases}$$

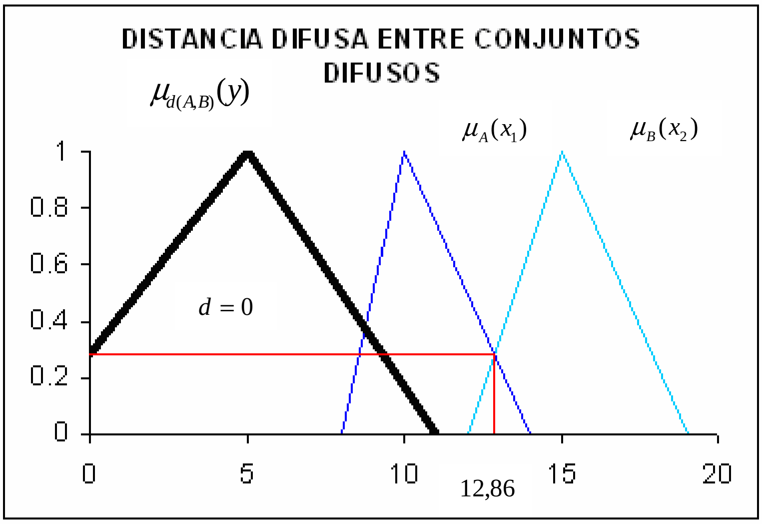


Figura 1.6 Distancia difusa entre conjuntos difusos.

1.7 NÚMEROS DIFUSOS

Un número difuso se define en $\mathbb{R}$ como un conjunto convexo normalizado. Para una mejor manipulación, suelen definirse los número difusos tipo $L - R$ (left – right) como sigue:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((M-x)/l) & si \quad x \le M, \quad l > 0 \\ R((x-M)/r) & si \quad x \ge M, \quad r > 0 \end{cases}$$

donde L y R son funciones crecientes y decrecientes en $\mathbb{R}^+$, con $L(0) = R(0) = 1$. M es llamado el valor central del número difuso. L y R son, respectivamente, las funciones de la forma a izquierda y a derecha , mientras que l y r son, respectivamente, la extensión , amplitud o dispersión a izquierda y a derecha.

Un intervalo difuso de tipo $L - R$ es una generalización del concepto de número difuso que acabamos de ver:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((M_1 - x)/l), & si, \quad x \le M_1, \quad l > 0 \\ 1, & si, \quad x \in [M_1, M_2], \\ R((x - M_2)/r), & si, \quad x \ge M_2 \quad r > 0. \end{cases}$$

En la figura 1.7 tenemos una interpretación gráfica de los conceptos de número difuso del tipo $L - R$. Para:

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ con } l = 2,\ r = 4 \text{ y } M = 5,$$

y de intervalo difuso, para:

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ con } l = 1,\ r = 3 \text{ y } M_1 = 10 \text{ y } M_2 = 15.$$

Los respectivos conjuntos quedan definidos de la siguiente manera:

- Número difuso: $$\mu(x) = \begin{cases} L((5-x)/2) = \dfrac{1}{1+((5-x)/2)^2} & para \quad x \le 5 \\ R((x-5)/4) = \dfrac{1}{1+((x-5)/4)^2} & para \quad x \ge 5 \end{cases}$$
- Intervalo difuso:

$$\mu(x)=\begin{cases} L(10-x)=\dfrac{1}{1+(10-x)^2} & para \quad x\leq 10 \\ 1 & para \quad 10\leq x\leq 15 \\ R((x-15)/3)=\dfrac{1}{1+((x-15)/3)^2} & para \quad x\geq 15 \end{cases}$$

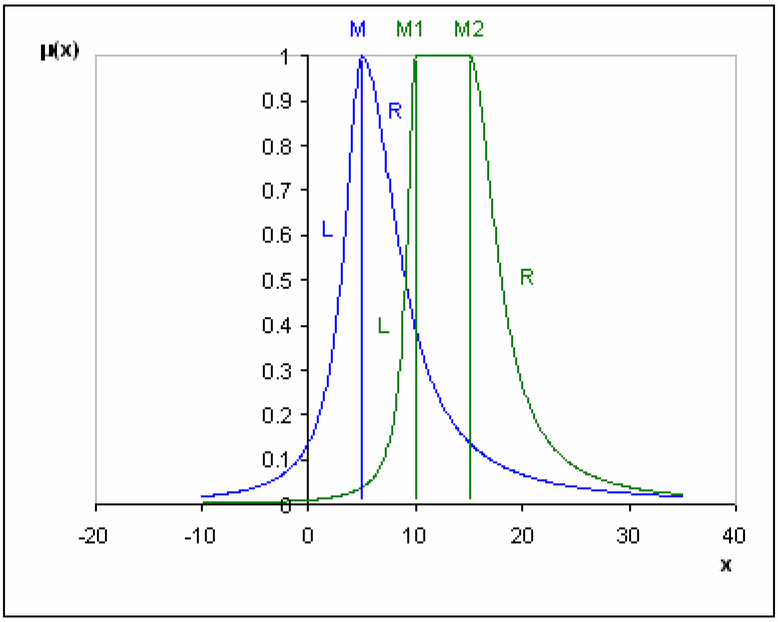


Figura 1.7 Interpretación gráfica de los conceptos de número difuso $L - R$.

1.7.1 INTERVALOS DE CONFIANZA DIFUSOS

Un número ordinario, $a\in \mathbb{R}$, puede interpretarse utilizando el concepto de función de pertenencia como sigue:

$$\mu_a(x)=\begin{cases} 1, & para \quad x=a, \\ 0, & para \quad x\neq a. \end{cases}$$

De forma parecida, un intervalo de confianza en $\mathbb{R}$ podemos expresarlo por medio de la función de pertenencia en la forma:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<a_1, \\ 1, & a_1\leq x\leq a_3, \\ 0, & x>a_3. \end{cases}$$

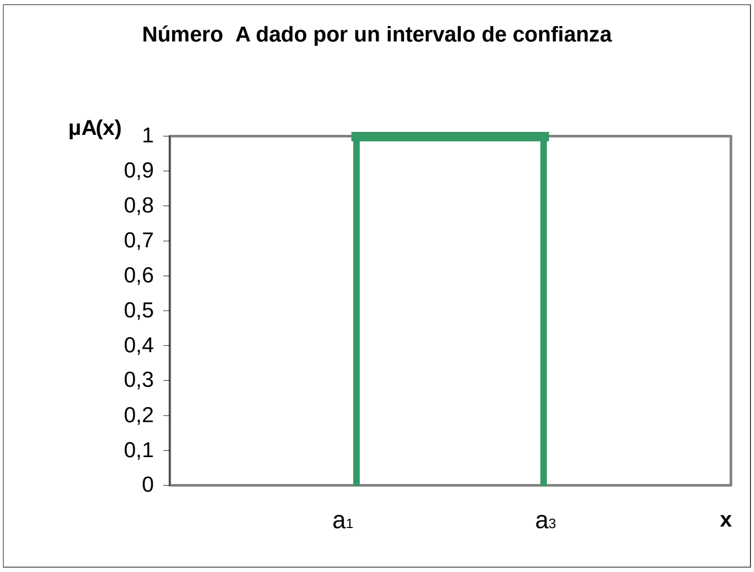


Figura 1.8 Número A dado por un intervalo de confianza.

Así tenemos que $A=[a_1, a_3]$ quiere decir que el número en cuestión no puede ser menor que a_1 ni mayor que a_3.

Consideremos , ahora un número difuso como un subconjunto difuso normal y convexo en $\mathbb{R}$. La condición de normalidad implica que:

$$\exists x \in \mathbb{R}: \mu_A(x) = 1$$

mientras que la convexidad puede, también, expresarse con la condición de que los α – cortes $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)})$$

están anidados. Es decir:

y si representamos el α – corte por $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$, la condición de convexidad implica, como puede observarse en la siguiente figura ,que:

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow [A_\alpha \subset A_{\alpha'}]$$

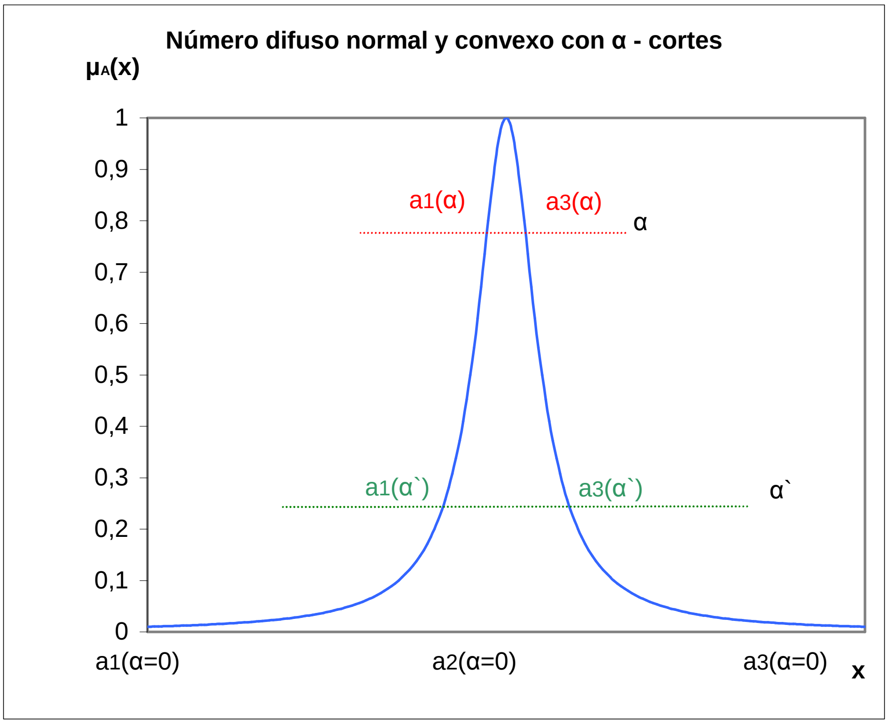


Figura 1.9 Número difuso normal y convexo con α – cortes.

Las operaciones aritméticas con números difusos puede establecerse en función de la aritmética de intervalos de confianza. Supongamos que tenemos dos intervalos de confianza cualesquiera, tales como:

$$A = [a_1, a_3] \text{ y } B = [b_1, b_3], \text{ con } a_1,\ a_3, b_1,\ b_3, \in \mathbb{R}$$

Vamos a realizar algunas operaciones con este tipo de intervalos, ilustrándolas con ejemplos.

1.7.2 OPERACIONES ENTRE NÚMEROS DIFUSOS DEFINIDOS COMO INTERVALOS.

A continuación presentamos las operaciones más importantes entre los números difusos definidos con intervalos. Como veremos, en general, cuando aplicamos una función a un conjunto de intervalos, el límite inferior (superior) del intervalo resultante será el valor mínimo (máximo) calculado aplicando esa función a todas las posibles combinaciones de valores pertenecientes a los intervalos considerados.

Suma: $[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3]$

Resta: $[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1]$

Multiplicación:

$[a_1, a_3](\cdot)[b_1, b_3] = [\min(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_3, a_3 \cdot b_1, a_3 \cdot b_3); \max(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_3, a_3 \cdot b_1, a_3 \cdot b_3)]$

Si el conjunto difuso está definido sobre $\mathbb{R}^+$, sería $[a_1, a_3](\cdot)[b_1, b_3] = [a_1 b_1, a_3 b_3]$

Inverso:

$[a_1, a_3]^{-1} = [\min(1/a_1, 1/a_3); \max(1/a_1, 1/a_3)]$, excepto para $a_1 \leq 0 \leq a_3$

Si el conjunto difuso está definido sobre $\mathbb{R}^+$, sería $[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_3; 1/a_1]$

División:

$[a_1, a_3](:)[b_1, b_3] = [\min(a_1/b_1, a_1/b_3, a_3/b_1, a_3/b_3); \max(a_1/b_1, a_1/b_3, a_3/b_1, a_3/b_3)]$**,**

excepto para $a_1 \leq 0 \leq a_3$.

Si el conjunto difuso está definido sobre $\mathbb{R}^+$, sería $[a_1, a_3](:)[b_1, b_3] = [a_1/b_3, a_3/b_1]$

Mínimo: $\min([a_1, a_3]; [b_1, b_3]) = [\min(a_1, b_1); \min(a_3, b_3)]$

Máximo: $\max([a_1, a_3]; [b_1, b_3]) = [\max(a_1, b_1); \max(a_3, b_3)]$

Multiplicación por un número real

Un número real puede interpretarse como $a = [a, a]$, $a \in \mathbb{R}$, por tanto,

$$a[b_1, b_3] = [\min(a \cdot b_1, a \cdot b_3); \max(a \cdot b_1, a \cdot b_3)]$$

Todos estos resultados pueden aplicarse a números difusos, expresándolos en función de cada uno de sus α – cortes. Por ejemplo en el caso de la suma:

$$[a_1^{\alpha}, a_3^{\alpha}](+)[b_1^{\alpha}, b_3^{\alpha}] = [a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}, a_3^{\alpha} + a_3^{\alpha}] \quad \forall \quad \alpha \in [0,1],$$
$$a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$$

1.7.3 NÚMEROS DIFUSOS TRIANGULARES

Los números difusos triangulares son, por su relativamente cómoda manipulación los más usados en la práctica, si bien diversos autores han cuestionado la utilización de los mismos como panacea general. Como es evidente, son la versión más simple del concepto general de número difuso L – R, anteriormente visto. Las funciones L y R, son lineales. Un número difuso triangular (NDT) tiene, como su nombre indica la forma triangular recogida en la siguiente figura y puede ser definido mediante la terna (a_1, a_2, a_3).

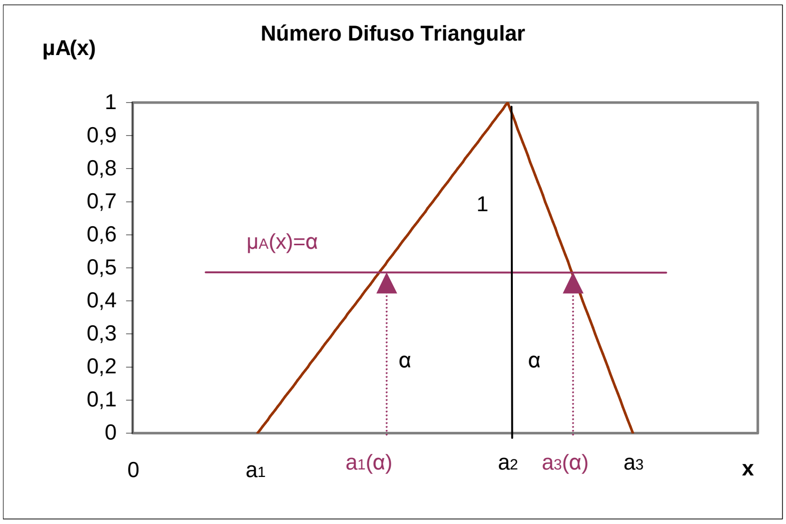


Figura 1.10 Número difuso triangular

La función de pertenencia para este número triangular viene dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0, & caso \quad contrario. \end{cases}$$

Ejemplo 1.4

El número difuso triangular (-4,-1,1), tiene como función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ \dfrac{x+4}{3}, & -4 \leq x \leq -1, \\ \dfrac{1-x}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

su representación gráfica es:

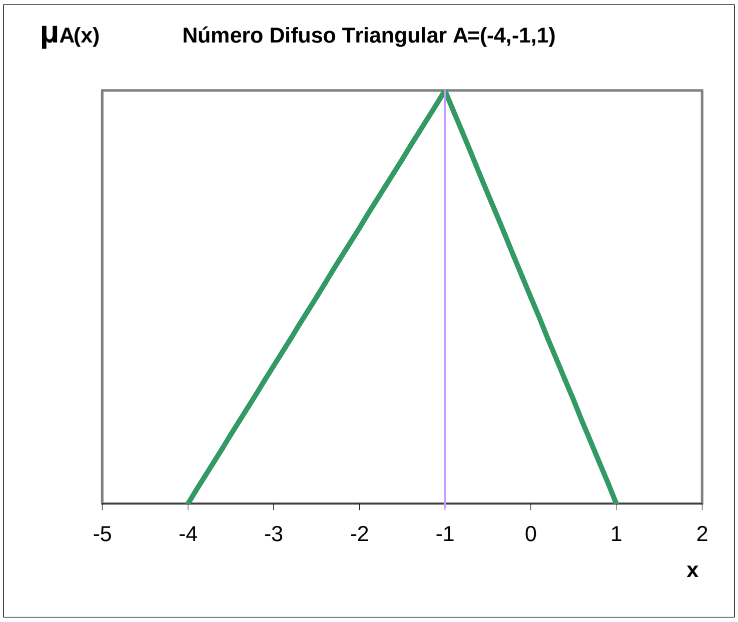


Figura 1.11 Número difuso triangular A=(-4,-1,1)

1.7.4 NÚMEROS DIFUSOS TRAPEZOIDALES

Son la versión más sencilla del concepto de intervalo difuso $L - R$, que ya hemos visto. En este caso, las funciones L y R, son, también lineales y no se obtiene un punto cuando α=1, sino una línea horizontal sobre un intervalo, (a_2, a_3), tal como muestra la figura:

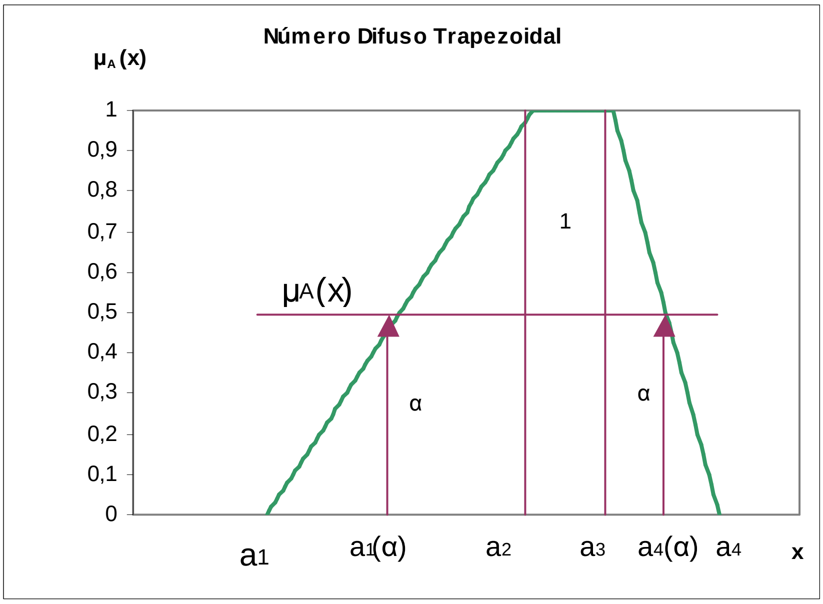


Figura 1.12 Número difuso trapezoidal

La función de pertenencia de un número difuso trapezoidal viene dada por la expresión:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \le x \le a_2, \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \le x \le a_4, \\ 0, & x > a_4. \end{cases}$$

Podemos ver que un número difuso triangular puede interpretarse como un número difuso trapezoidal con $a_2 = a_3$.

1.7.5 NÚMEROS DIFUSOS POLIGONALES

Las nociones dadas anteriormente se pueden generalizar, siempre y cuando sean de utilidad práctica y no complique su manipulación.

Ejemplo 1.5

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_{M1}, a_{M2}, a_6), \quad a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_{M1} \le a_{M2} \le a_6$$

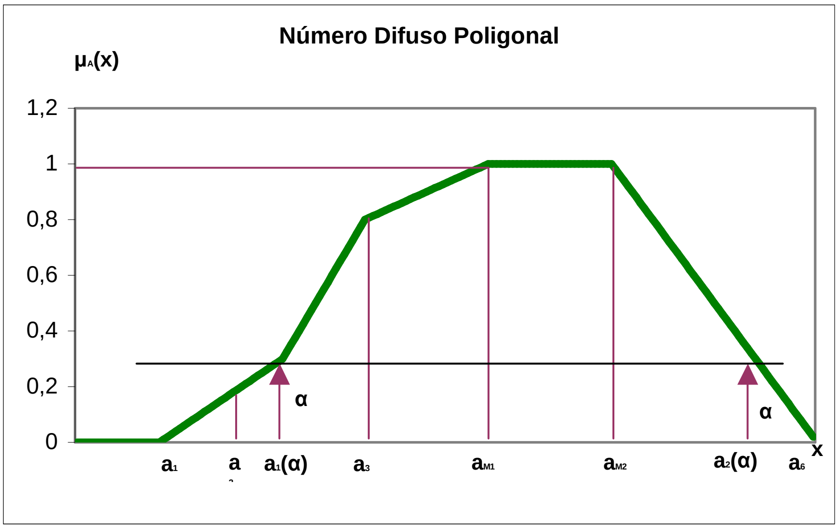


Figura 1.13 Número difuso Poligonal

1.7.6 OPERACIONES CON NÚMEROS DIFUSOS TRIANGULARES

Conviene señalar, que si bien la suma, la resta, el complemento y el producto por un escalar de números difusos triangulares, da como resultado otro número difuso triangular; operaciones como la multiplicación, inverso, división, máximo y mínimo, entre otras, no arrojan necesariamente como resultado un número difuso triangular.
Definiremos un número difuso triangular como la terna ya conocida, veamos entonces seguidamente las principales operaciones:

Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ dos números difusos triangulares.

- **Suma:** $A(+)B = (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$$A = (-3,2,4) \text{ y } B = (-1,0,5)$$
$$A(+)B = (-4,2,9)$$

- **Diferencia:** $A(-)B = (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$

$$A = (-3,2,4) \text{ y } B = (-1,0,5)$$
$$A(-)B = (-8,2,5)$$

- **Complemento:** $A^{-} = (-a_3, -a_2, -a_1)$

$$A = (-3,2,4)$$
$$A^{-} = (-4,-2,3)$$

- Producto de un escalar por un número difuso triangular

$k \cdot A = (mín(ka_1, ka_2), ka_M, máx(ka_1, ka_2))$, para todo $k \in \mathbb{R}/\{0\}$

1.7.7 OPERACIONES CON NÚMEROS DIFUSOS TRAPEZOIDALES

De la misma forma como en los números difusos triangulares, en los números difusos trapezoidales tenemos que la suma, la resta, el complemento y el producto por un escalar, da como resultado otro número difuso trapezoidal; operaciones como la multiplicación, inverso, división, máximo y mínimo, entre otras, no arrojan necesariamente como resultado un número difuso triangular.

Sean $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dos números difusos trapezoidales.

Las operaciones básicas se definen como sigue:

- **Suma:**

$$A(+)B = (a_1, a_2, a_3, a_4)(+)(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

$$A = (-5,-2,4,8) \text{ y } B = (-2,-1,0,5)$$

$$A(+)B = (-7,-3,4,13)$$

- **Diferencia:**

$$A(-)B = (a_1, a_2, a_3, a_4)(-)(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$$

$$A = (-5,-2,4,8) \text{ y } B = (-2,-1,0,5)$$

$$A(-)B = (-10,-2,5,10)$$

- **Complemento:** $A^{-} = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$

$$A = (-5,-2,4,8)$$
$$A^{-} = (-8,-4,2,5)$$

- **Producto de un escalar por un número difuso trapezoidal**

$k \cdot A = (mín(ka_1, ka_4), mín(ka_2, ka_3), máx(ka_2, ka_3), máx(ka_1, ka_4))$**,** para todo $k \in \mathbb{R} / \{0\}$

1.8 ORDEN PARCIAL DE LOS NÚMEROS DIFUSOS

El orden total conocido en los números reales $\mathbb{R}$ con la relación $"\leq"$ o $"\geq"$ no se puede extender a los números difusos, por lo que es necesario exponer una teoría diferente basada completamente en el concepto de los α-cortes, de donde se tiene lo siguiente.

1.8.1 MÁXIMO DE DOS NÚMEROS DIFUSOS

Después de tener claro el concepto de los intervalos de confianza se puede definir el máximo de dos números difusos mediante sus α – cortes de la siguiente manera:

Sean A y B dos números difusos continuos en $\mathbb{R}$, con $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$, sus respectivos intervalos de confianza.

$máx(A,B) = A(\vee)B$ que al representarlo con sus $\alpha - cortes$ tenemos:

$$máx(A_\alpha, B_\alpha) =$$
$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)](\vee)[b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \quad = \quad [máx\{a_1(\alpha), b_2(\alpha)\}, máx\{a_2(\alpha), b_2(\alpha)\}]$$

Ejemplo 1.6

Dados los números triangulares A= (1, 5, 6) y B=(2, 3, 7) con sus respectivos $\alpha - cortes$ $A_\alpha = [4\alpha + 1, -\alpha + 6]$ y $B_\alpha = [\alpha + 2, -4\alpha + 7]$, procedemos a calcular el máximo.

$$máx(A_\alpha, B_\alpha) = \ [máx\{4\alpha + 1, \alpha + 2\},\ máx\{-\alpha + 6, -4\alpha + 7\}]$$

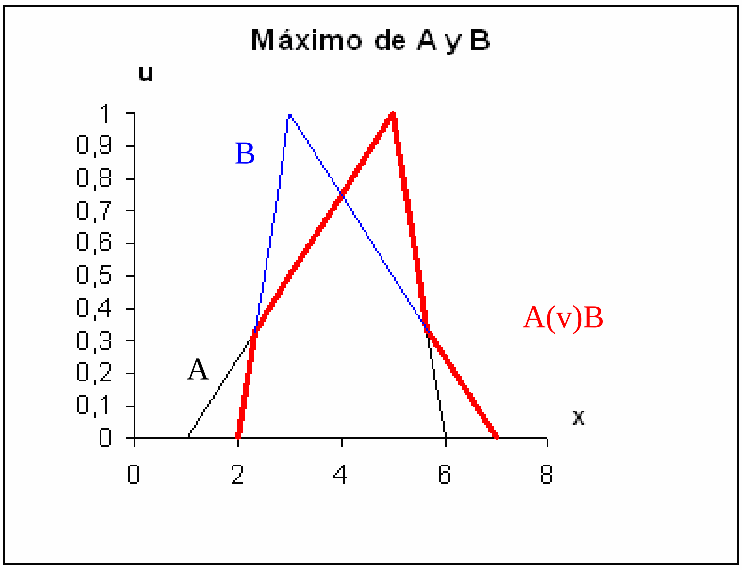


Figura 1.14 Máximo de A y B

Como podemos ver en el gráfico A(v)B no es un número difuso triangular, sino poligonal.

1.8.2 MÍNIMO DE DOS NÚMEROS DIFUSOS

De manera similar al máximo de dos números difusos tomando en cuenta sus α – cortes tenemos que el mínimo de dos números difusos se encuentra definido de la siguiente manera:

Sean A y B dos números difusos continuos en $\mathbb{R}$, con $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$, sus respectivos intervalos de confianza.

$mín(A,B) = A(\wedge)B$ que al representarlo con sus $\alpha - cortes$ tenemos:

$mín(A_\alpha, B_\alpha) =$
$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)](\wedge)[b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [mín\{a_1(\alpha), b_1(\alpha)\}, mín\{a_2(\alpha), b_2(\alpha)\}]$

Ejemplo 1.7

Dados los números triangulares A= (1, 5, 6) y B=(2, 3, 7) con sus respectivos $\alpha - cortes$ $A_\alpha = [4\alpha + 1, -\alpha + 6]$ y $B_\alpha = [\alpha + 2, -4\alpha + 7]$, procedemos a calcular el mínimo.

$$mín(A_\alpha, B_\alpha) = [mín\{4\alpha + 1, \alpha + 2\}, mín\{-\alpha + 6, -4\alpha + 7\}]$$

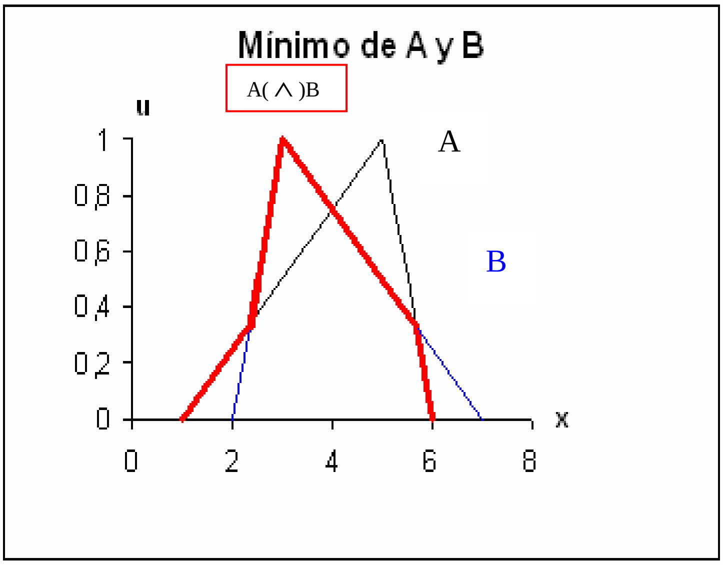


Figura 1.15 Mínimo de A y B

Al igual que en el caso del máximo de dos números difusos triangulares podemos ver que el mínimo de estos tampoco es un número difuso triangular sino poligonal.

En consecuencia podemos decir que: $A \leq B \Leftrightarrow A(\wedge)B = A$ o $A(\vee)B = B$; por lo que decimos que A y B son no comparables si no se cumplen las relaciones $A \leq B$ o $B \leq A$.

1.8.3 DISTANCIA ENTRE DOS NÚMEROS DIFUSOS

Consideraremos tres intervalos de confianza en $I\!R$.

$A = [a_1, a_2]$ $\quad$ $B = [b_1, b_2]$ $\quad$ $C = [c_1, c_2]$

Una función numérica, d(x,y) $\in$ $I\!R$ con (x,y) $\in$ ExE, es una distancia si y solo si , $\forall$ x,y,z $\in$ E se cumple que:

$$1.\ d(x,y) \geq 0$$
$$2.\ (x = y) \Rightarrow d(x,y) = 0$$
$$3.\ d(x,y) = d(y,x)$$
$$4.\ d(x,z) \leq d(x,y) \oplus d(y,z)$$

Ahora definamos el concepto de distancia a la izquierda d_i y distancia a la derecha d_d como sigue:

$$d_i(A,B) \ = \ | \ a_1 - b_1 \ | \qquad\qquad d_d(A,B) \ = \ | \ a_2 - b_2 \ |$$

Comprobemos que la distancia a la izquierda cumple las condiciones anteriores.

$$1.\ d_i(A,B) \geq 0, \qquad ya\ \ que\ \ |a_1 - b_1| \geq 0$$
$$2.\ d_i(A = B) \Rightarrow (d_i(A,B) = 0), \qquad ya\ \ que\ \ (a_1 = b_1) \Rightarrow |a_1 - b_1| = 0$$
$$3.\ d_i(A,B) = d_i(B,A), \qquad ya\ \ que\ \ |a_1 - b_1| = |b_1 - a_1|$$
$$4.\ d_i(A,C) \leq d_i(A,B) \oplus d_i(B,C), \qquad ya\ \ que\ \ |a_1 - c_1| \leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1|$$

De igual manera veremos que la distancia a la derecha también cumple las condiciones anteriores.

$$1.\ d_d(A,B) \geq 0, \qquad ya\ \ que\ \ |a_2 - b_2| \geq 0$$
$$2.\ d_d(A = B) \Rightarrow (d_d(A,B) = 0), \qquad ya\ \ que\ \ (a_2 = b_2) \Rightarrow |a_2 - b_2| = 0$$
$$3.\ d_d(A,B) = d_d(B,A), \qquad ya\ \ que\ \ |a_2 - b_2| = |b_2 - a_2|$$
$$4.\ d_d(A,C) \leq d_d(A,B) \oplus d_d(B,C), \qquad ya\ \ que\ \ |a_2 - c_2| \leq |a_2 - b_2| + |b_2 - c_2|$$

La distancia entre A y B, $d(A,B)$ es definida por Kaufman y Gupta como sigue:

$$d(A,B) \ = \ d_i(A,B) + d_d(A,B)$$

Si se supone que los tres intervalos considerados son subconjuntos del intervalo $[\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}$, puede definirse una distancia normalizada de la siguiente manera:

$$\delta(A,B) = d(A,B)/2(\beta_2 - \beta_1), \qquad con \quad 0 \le \delta(A,B) \le 1$$

ya que si $a_1=b_1$ y $a_2=b_2$, su valor será cero y si $a_1-b_1=a_2-b_2=\beta_2 - \beta_1$, que es el valor máximo que puede tomar el numerador, entonces su valor da 1.

Para sus $\alpha - cortes$ podemos escribir que,

$$\delta(A_\alpha, B_\alpha) = \frac{d(A_\alpha, B_\alpha)}{2(\beta_2 - \beta_1)}$$

donde β_1 *y* β_2 vienen dados de forma conveniente para que contengan a $A_{\alpha=0}$ y $B_{\alpha=0}$.

Si integramos desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = 1$, obtenemos una distancia mediante la suma de distancias que satisfacen la condición de estar comprendida entre 0 y 1 y que será:

$$\delta(A,B) = \int_{\alpha=0}^{1} \delta(A_\alpha, B_\alpha)d\alpha = 1/2(\beta_2 - \beta_1) \int_{\alpha=0}^{1} d(A_\alpha, B_\alpha)d\alpha$$
$$= 1/2(\beta_2 - \beta_1) \int_{\alpha=0}^{1} \left(\left|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\right| + \left|a_2(\alpha) - b_2(\alpha)\right|\right)d\alpha$$

Esta expresión da la distancia entre dos números difusos y es llamada *índice de desemejanza (disimilitud)* entre A y B.

Ejemplo 1.8

Vamos a calcular la distancia entre el número difuso A y el número difuso B cuyas funciones de pertenencia están dadas de la siguiente manera:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{6}, & si \quad 3 \le x \le 9, \\ \dfrac{13-x}{4}, & si \quad 9 \le x \le 13, \\ 0, & caso \quad contario. \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{3}, & si \quad 4 \le x \le 7, \\ \dfrac{16-x}{9}, & si \quad 7 \le x \le 16, \\ 0, & caso \quad contario. \end{cases}$$

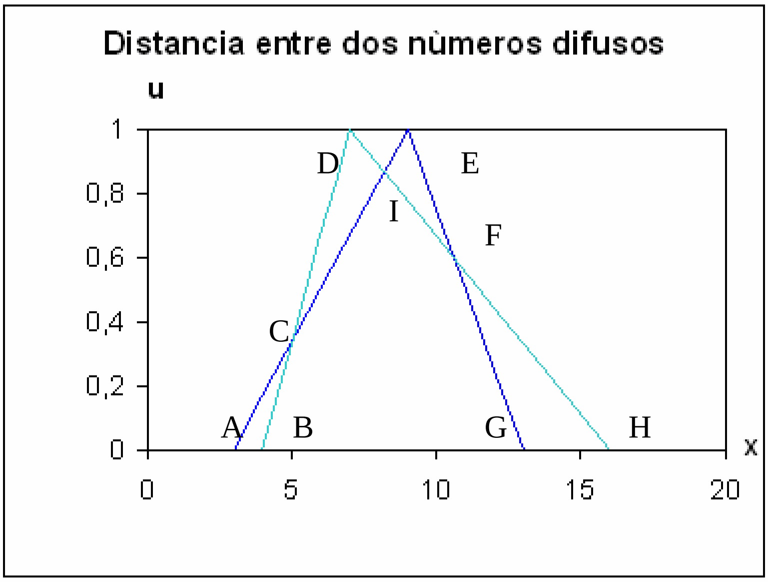


Figura 1.16 Distancia entre dos números difusos

Como vemos en el gráfico, la integración para $\alpha \in [0,1]$ precisa del conocimiento previo de los puntos de intersección de las funciones izquierda (I) y derecha (D) de ambos números difusos. Los $\alpha - cortes$ de A=(3, 9, 13) y de B=(4, 7, 16) son:

$$A_\alpha = [6\alpha + 3, 13 - 4\alpha]$$

$$B_\alpha = [3\alpha + 4, 16 - 9\alpha]$$

y las intersecciones, por tanto, serán:

I: $6\alpha + 3 = 3\alpha + 4$, cuya solución es $\alpha = 1/3$ y x=5

D: $13 - 4\alpha = 16 - 9\alpha$, cuya solución es $\alpha = 3/5$ y x=10,6

Tenemos entonces que:

$$a_1(\alpha) - b_1(\alpha) = 6\alpha + 3 - 3\alpha - 4$$

$$a_2(\alpha) - b_2(\alpha) = 13 - 4\alpha - 16 + 9\alpha$$

Y la integración que se debe realizar es:

$$\int_{0}^{1/3}(-3\alpha+1)d\alpha+\int_{1/3}^{1}(-1+3\alpha)d\alpha+\int_{0}^{3/5}(-5\alpha+3)d\alpha+\int_{3/5}^{1}(-3+5\alpha)d\alpha-\int_{13/15}^{1}(15\alpha-13)d\alpha=1{,}9$$

$$d(A,B)=1{,}9$$

Cuando se trabaja con números difusos triangulares es generalmente más cómodo obtener la distancia sumando las áreas de los triángulos siguientes:

ABC+CDI+IEF+FGH – DIE.=$\frac{1\times(1/3)}{2}+\frac{2\times(2/3)}{2}+\frac{2\times(3/5)}{2}+\frac{3\times(2/5)}{2}-\frac{2\times(2/15)}{2}=$1,9

1.8.4 CRITERIOS DE ORDENAMIENTO LINEAL DE LOS NÚMEROS DIFUSOS

Se proponen los siguientes criterios de ordenamiento para números difusos, si al aplicar cualquiera de estos criterios no se consigue un orden único se debe aplicar los criterios subsiguientes.

Primer Criterio: DISTANCIA AL MÁXIMO O AL MÌNIMO

Dados n números borrosos $A_1, A_2,..., A_n$ en $\mathbb{R}$ debemos realizar los siguientes pasos:

1. Se obtiene el máximo de todos los números borrosos, A_{Max}.
2. Se calcula la distancia $d(A_i, A_{Max})$ para i=1,...,n.
3. El número A_{i_0} tal que la distancia $d(A_{i_0}, A_{Max})$ sea la más pequeña, será el mayor número difuso.
4. Se elimina este número y se procede a calcular las distancias $d(A_j, A_{Max})$, j=1,...,n-1.
5. Se continúa con el proceso hasta ordenar todos.
6. Si se toma el mínimo A_{Min} se calcula la distancia $d(A_i, A_{Min})$ para i=1,...,n.

7. El número A_{i_0} tal que la distancia $d(A_{i_0}, A_{Min})$ sea la más grande, será el mayor número difuso.
8. Se elimina este número y se procede a calcular las distancias $d(A_j, A_{Min})$, j=1,...,n-1.
9. Se continúa con el proceso hasta ordenar todos.
10. Si se obtiene dos números difusos con distancias iguales, se escoge otro criterio.

Segundo Criterio: DISTANCIA A UN UMBRAL

1. Se usa un umbral superior o inferior para los números borrosos que se quieren ordenar, definiendo a los respectivos umbrales de la siguiente manera:

Umbral superior $U_s = màx(a_3, b_3, c_3, \ldots)$, donde los x_3 son los extremos superiores

Umbral inferior $U_i = \min(a_1, b_1, c_1, \ldots)$, donde los x_1 son los extremos inferiores

2. Aplicando el criterio del máximo o del mínimo, según corresponda al umbral propuesto, se calcula la distancia de cada número borroso y se obtiene el orden deseado.

Tercer Criterio: EL DESPLAZAMIENTO

Sea $k \in \mathbb{R}$ y A un número difuso. El desplazamiento del lado izquierdo de A respecto a k, $R_i(A, k)$, se define como el área comprendida entre k y el lado izquierdo del número difuso A. De forma similar, se define el desplazamiento del lado derecho, $R_d(A, k)$. Finalmente, el desplazamiento de A con respecto a k se define como la medida de ambos:

$$R(A, k)=1/2[R_i(A, k)+R_d(A, k)]$$

La figura 1.16 muestra los desplazamientos respecto a los lados izquierdos y derecho, respecto a k=0 (si es necesario conviene hacer una traslación del origen a una posición tal que las áreas, a efectos de los cálculos, sean siempre positivas).

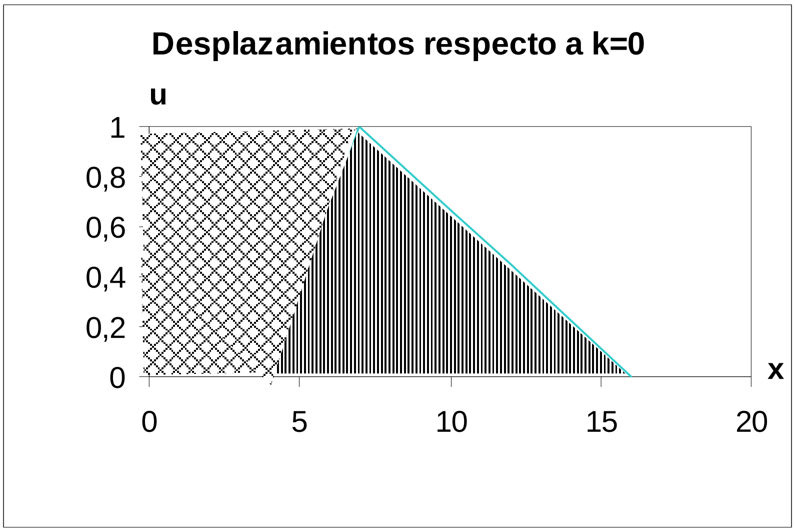


Figura 1.16 Desplazamiento respecto a $k=0$

El desplazamiento respecto al lado izquierdo sería el área del trapecio delimitada por el eje de ordenadas, el eje de abscisas, $m_A(x)=1$ y el lado izquierdo del triangulo.

De lo que tenemos:

$$\mathrm{R_i}(\mathrm{A}, k=0) = \left[\frac{a_1+a_2}{2}\right].1 = \frac{a_1+a_2}{2}$$

El desplazamiento respecto al lado derecho sería la suma de esta área más la encerrada por el triangulo; es decir:

$$\mathrm{R_d}(\mathrm{A}, k=0) = \left[\frac{a_2+a_3}{2}\right].1 = \frac{a_3+a_2}{2}$$

Luego el resultado del desplazamiento de A será un número ordinario, representante del número difuso, dado por la expresión:

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{a_1+2a_2+a_3}{4} \quad \text{siendo} \quad \mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

Cuarto Criterio: LA MODA

Dentro de cada clase se buscará la moda o valor central del número difuso. Si no tiene una moda única, se toma la media de los valores modales. Es posible que las modas generen subclases de equivalencia que hagan, todavía, necesario otro criterio.

Quinto Criterio: LA DIVERGENCIA

Dentro de cada subclase tomaremos la diferencia, $(a_3 - a_1)$, como criterio para la ordenación final de los números difusos.

EJEMPLO 1.9

Vamos a ordenar los siguientes números difusos de acuerdo a los tres últimos criterios.

$A = \{-4,7,9\}$ $B = \{-2,4,8\}$ $C = \{-5,9,12\}$ $D = \{1,7,14\}$ $E = \{3,5,6\}$
$F = \{4,7,10\}$

Aplicando el criterio del desplazamiento tenemos las siguientes clases:

$\hat{A} = \frac{-4+14+9}{4} = 4.75$ $\hat{B} = \frac{-2+8+8}{4} = 3.5$

$\hat{C} = \frac{-5+18+12}{4} = 6.25$

$\hat{D} = \frac{1+14+14}{4} = 7.25$ $\hat{E} = \frac{3+10+6}{4} = 4.75$ $\hat{F} = \frac{4+14+10}{4} = 7$

Clase 1: (B), cuyo representante es 3.5

Clase 2: (A, E), cuyo representante es 4.75

Clase 3: (C), cuyo representante es 6.25

Clase 4: (F), cuyo representante es 7

Clase 5: (D), cuyo representante es 7.25

Prácticamente tenemos ya ordenados los números difusos excepto por la clase 2, por lo que debemos aplicar el criterio de la moda a esta clase.

Moda de la clase 2: $A:7$ $E:5$

Entonces la ordenación lineal quedaría de la siguiente manera:

$$B < E < A < C < F < D$$

1.9 RELACIONES DIFUSAS

Consideremos dos conjuntos universos U_1 y U_2, dos subconjuntos A y B, y por último el producto cartesiano.

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$$

Una relación difusa en $A \times B$, denotada por $\Re$, se define por el conjunto de tríos ordenados.

$$\Re = \{((x, y), \mu_{\Re}(x, y)) / (x, y) \in A \times B, \mu_{\Re}(x, y) \in [0,1]\}$$

Esta relación presenta las siguientes propiedades:

- $\mu_{\Re}$ es la función de pertenencia definida en dos variables.
- $\mu_{\Re}$ puede ser continua o discreta en el dominio $A \times B$, la primera claramente describe una superficie.
- $\mu_{\Re}(x, y)$ representa el grado de pertenencia de (x, y) en $\Re$.
- Una relación difusa $\Re$ está caracterizada por su función de pertenencia

$$\mu_{\Re} : \begin{array}{c} A \times B \rightarrow [0,1] \\ (x, y) \rightarrow \mu_{\Re}(x, y) \end{array}$$

Presentamos algunos ejemplos de relaciones lingüísticas que pueden ser descritas por relaciones difusas.

x es mucho más grande que y.

x es cercana a y.

x e y son casi iguales.

x es de mas alto riesgo que y.

Una relación difusa puede ser descrita, entre otras, de la forma:

Conjuntista,

Grafo ó

Matricial

Forma conjuntista

Con esta forma trabajamos especificando en ternas los $(x, y) \in A \times B$ y los valores de $\mu_{\Re}(x, y)$.

Ejemplo:

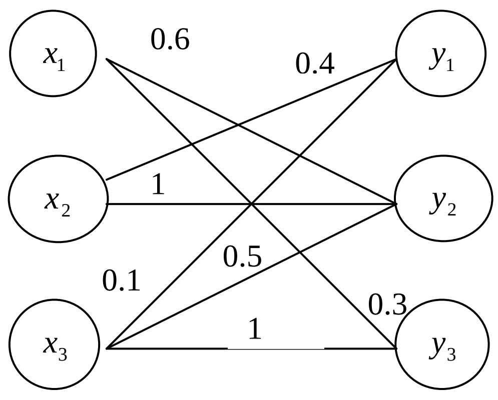
$$A = \{x_1, x_2, x_3\} \quad \text{y} \quad B = \{y_1, y_2, y_3\}$$

Si $x_1 = y_1 = 1,\ x_2 = y_2 = 2,$ y $x_3 = y_3 = 3$ tenemos la relación $\Re$ definida de la siguiente manera:

$$\Re = \{((1,1),1), ((1,2),0.6), ((1,3),0.3), ((2,1),0.4), ((2,2),1), ((2,3),0.2), ((3,1),0.1), ((3,2),0.5), ((3,3),1)\}$$

Forma de Grafo.

Una relación difusa $\Re$ también se puede representar mediante un grafo dirigido con un conjunto de vértices $A \cup B$ en cuyos arcos (x_i, y_i) se asignan los valores $\mu_{\Re}(x_i, y_i)$ de la función de pertenencia.



Forma matricial

Una relación difusa $\Re$ también puede ser representada por la siguiente matriz:

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0.6	0.3
x_2	0.4	1	0.2
x_3	0.1	0.5	1

donde $\mu_{\Re}(x_i, y_i) = r_{ij}$.

1.9.1 OPERACIONES BÁSICAS CON RELACIONES DIFUSAS

Dadas $\Re_1$ y $\Re_2$ dos relaciones difusas en $A \times B$.

$$\Re_1 = \{((x,y), \mu_{\Re_1}(x,y) / (x,y) \in A \times B)\}$$

$$\Re_2 = \{((x,y), \mu_{\Re_1}(x,y) / (x,y) \in A \times B)\}$$

Las operaciones entre relaciones difusas son similares a las operaciones que encontramos en los conjuntos difusos, ya que trabajamos con las funciones de pertenencia $\mu_{\Re_1}$ y $\mu_{\Re_2}$.

Igualdad. Se dice que las relaciones $\Re_1$ y $\Re_2$, son iguales, $\Re_1 = \Re_2$, sí y solo sí para todo $(x,y) \in A \times B$.

$$\mu_{\Re_1}(x,y) = \mu_{\Re_2}(x,y)$$

Inclusión. Se dice que $\Re_1$ está contenida en $\Re_2$ o $\Re_1$ es subconjunto de $\Re_2$, $\Re_1 \subseteq \Re_2$, si para cada par $(x,y) \in A \times B$.

$$\mu_{\Re_1}(x,y) \leq \mu_{\Re_2}(x,y)$$

Si $\Re_1 \subseteq \Re_2$ y además si para algún par $(x,y) \in A \times B$, $\mu_{\Re_1}(x,y) < \mu_{\Re_2}(x,y)$, entonces tenemos la inclusión propia $\Re_1 \subset \Re_2$.

Unión. La unión de $\Re_1$ y $\Re_2$, $\Re_1 \cup \Re_2$, se define por,

$$\mu_{\Re_1 \cup \Re_2}(x,y) = máx\{\mu_{\Re_1}(x,y), \mu_{\Re_2}(x,y)\}, \qquad (x,y) \in A \times B$$

Intersección. La intersección de $\Re_1$ y $\Re_2$, $\Re_1 \cap \Re_2$, se define por,

$$\mu_{\Re_1 \cap \Re_2}(x,y) = mín\{\mu_{\Re_1}(x,y), \mu_{\Re_2}(x,y)\}, \qquad (x,y) \in A \times B$$

Ejemplo 1.10

A continuación presentamos un ejemplo para ilustrar la unión y la intersección de relaciones difusas.

Consideramos las relaciones $\Re_1$ y $\Re_2$ dadas por las siguientes tablas

$\Re_1 \cong$

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	0.3	0.4	0.1
x_2	0.7	0.9	0.8
x_3	0.3	0.6	1

$\Re_2 \cong$

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0.2	0.5
x_2	0.8	0.6	0.2
x_3	0.7	0.5	0.3

Para cada par ordenado $(x_i, x_j),\ i, j = 1,2,3 \quad tenemos$

$\Re_1 \cup \Re_2 \cong$

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0.4	0.5
x_2	0.8	0.9	0.8
x_3	0.7	0.6	1

$\Re_1 \cap \Re_2 \cong$

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	0.3	0.2	0.1
x_2	0.7	0.6	0.2
x_3	0.3	0.5	0.3

Complemento. El complemento de $\Re$, $\overline{\Re}$, se define por,

$$\mu_{\overline{\Re}}(x, y) = 1 - \mu_{\Re}(x, y)\,, \qquad (x, y) \in A \times B$$

Producto directo. Tomemos dos conjuntos difusos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) \mid x \in A \subset U_1, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\}$$

$$\mathcal{B} = \{(x, \mu_{\mathcal{B}}(x)) \mid x \in A \subset U_1, \mu_{\mathcal{B}}(x) \in [0,1]\}$$

- *Máximo producto directo*, $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B} = \{(x, y), \mu_{\mathcal{A}\dot{\times}\mathcal{B}}(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}$$

$$\text{donde } \mu_{\mathcal{A}\dot{\times}\mathcal{B}}(x, y) = máx(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y))$$

- *Mínimo producto directo*, $\mathcal{A} \underset{\cdot}{\times} \mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \underset{\cdot}{\times} \mathcal{B} = \{(x, y), \mu_{\mathcal{A}\underset{\cdot}{\times}\mathcal{B}}(x, y) \mid (x, y) \in A \times B$$

$$\text{donde } \mu_{\mathcal{A}\underset{\cdot}{x}\mathcal{B}}(x, y) = mín(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y))$$

Es importante recordar que $\mu_{\mathcal{A}\underset{\cdot}{\times}\mathcal{B}}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{A}\dot{\times}\mathcal{B}}(x, y)$, para todo $(x, y) \in A \times B$

Ejemplo 1.11

Dados los conjuntos difusos

$$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 1)\},$$
$$B = \{(y_1, 0.6), (y_2, 0.9), (y_3, 0.4)\}$$

El máximo producto directo está dado por:

$\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B} \triangleq$

y / **x**	y_1	y_2	y_3
x_1	0.6	0.9	0.4
x_2	0.6	0.9	0.5
x_3	1	1	1

Y el mínimo producto directo es:

$\mathcal{A} \underset{\cdot}{\times} \mathcal{B} \triangleq$

y / **x**	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.2	0.2
x_2	0.5	0.5	0.4
x_3	0.6	0.9	0.4

CAPÍTULO 2

LÓGICA DIFUSA

Y

CONTROL LÓGICO DIFUSO

INTRODUCCIÓN

El estudio de la lógica difusa empieza con la lógica multi-valuada, por esta razón en este capítulo se empieza dando algunos conceptos de la lógica clásica, como veremos mas adelante la lógica difusa cumple muchas de las operaciones que encontramos en la lógica clásica lo cual hace que sea fácil de entender y de aplicar, dentro de la lógica difusa tenemos las variables lingüísticas, las cuales junto a los modificadores lingüísticos son de gran importancia dentro del control lógico difuso.

El estudio del promedio difuso para predicciones es la antesala para el estudio del método Delphi para predicciones el cual se convierte en parte importante de este capítulo ya que será utilizado en la predicción de la demanda para la empresa en estudio.

Dentro del control lógico difuso tenemos el modelado de las variables de control, el cual se encarga de definir cuales serán las variables de entrada y las variables de salida con sus respectivos niveles, aquí se establecen los respectivos dominios dentro de los cuales trabajarán las variables base. La forma como se trabaja con las reglas inferenciales Si...Y...Entonces y todo el tratamiento que reciben estas para ser introducidas dentro del modelo se explica de manera clara. Las reglas de evaluación son explicadas teórica y gráficamente, veremos además que estas reglas son importantes al momento de la agregación. En la agregación nos encargamos de trabajar con las reglas obtenidas anteriormente para obtener el control de salida. Por último se estudian tres métodos de desdifusificación con sus respectivos gráficos.

2.1CONCEPTOS BÁSICOS DE LÓGICA CLÁSICA

2.1.1 PROPOSICIÓN

Una proposición, es una declaratoria lógica que puede ser verdadera y tomar el valor de 1 o puede ser falsa y tomar el valor de 0.

El conjunto T={0,1} es el conjunto de valor de verdad para la proposición; es decir una proposición puede ser considerada como una cantidad que asume uno de los dos valores de verdad: verdadero o falso.

Ejemplo 2.1

- El calentamiento global produce cambios perjudiciales para el planeta (proposición verdadera).
- ¿Es la inflación un indicador de pobreza? (no es una proposición).

Para representar las proposiciones usamos las letras p,q,r,...,z.

Existen proposiciones simples como la que encontramos en el primer ejemplo y proposiciones compuestas formadas con dos o mas proposiciones simples que se unen por dos o más conectivos lógicos.

2.1.2 CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos están dados por definiciones y expresados por ecuaciones en las cuales p y q representan los valores de verdad de la proposición p y q.

Negación

La negación o rechazo de p, se denota por $\overline{p}$ (se lee no p) es verdad cuando p es falsa y viceversa,

$$\overline{p} = 1 - p$$

Conjunción

La conjunción de p y q, se denota por $p \wedge q$ (se lee p y q) es verdadera cuando p y q son verdaderas,

$$p \wedge q = \min(p, q).$$

Disyunción

La disyunción de p y q, se denota por $p \vee q$ (se lee p o q) y es verdadera cuando p o q es verdadera o ambas p y q son verdaderas.

$$p \vee q = \max(p, q)$$

Implicación (Proposición condicional).

La proposición p implica q, se denota por $p \rightarrow q$ (se lee si p entonces q) es verdadera excepto cuando p es verdadera y q es falsa, p y q son llamados antecedente y consecuente, respectivamente,

$$p \rightarrow q = \min(1, 1 + q - p)$$

2.1.3 TABLAS DE VERDAD

Una herramienta útil para trabajar con los valores de verdad de las proposiciones compuestas son las tablas de verdad. A continuación presentamos una tabla con valores de verdad en el conjunto $T_2 = \{0,1\}$ de la negación, conjunción, disyunción e implicación.

Tabla 2.1 Tabla de verdad

p	q	$\overline{p}$ $1-p$	$p \wedge q$ $\min(p,q)$	$p \vee q$ $\max(p,q)$	$p \rightarrow q$ $\min(1, 1+q-p)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

La correspondencia que existe entre los conectivos lógicos y, o, no, la implicación y las operaciones de conjuntos como son la unión, intersección, complemento e inclusión son llamados isomorfismos, esto hace que todo teorema o resultado en la teoría de conjuntos tenga una contraparte en la lógica bi-valuada y viceversa.

2.1.4 TAUTOLOGÍA

Una tautología se define como una proposición formada por la combinación de otras proposiciones y cuya verdad es independiente de la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman.

La importancia de las tautologías reside en que nos permitirán expresar la función característica de la relación de implicación $p \to q$ en términos de las funciones características de p, q.

Luego de haber incursionado en la lógica clásica de dos valores podemos analizar ahora la lógica a tres valores que básicamente está constituida por el conjunto $T_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, donde 1 continúa siendo asignado como un valor verdadero y 0 como un valor falso, el valor de ½ se toma como el valor neutral o indeterminado; podemos usar los mismos conectivos lógicos usados para la lógica a dos valores y construir las tablas de verdad.

Si para cualquier número natural dado $n \geq 3$, los valores de verdad son representados por números racionales en el intervalo $[0,1]$, que es subdividido en partes iguales, entonces este conjunto de verdad sería:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\}$$

y a esto le llamamos la lógica n-valuada o multi-valuada, en la cual podemos continuar usando las fórmulas para los conectivos lógicos anteriormente expuestos, ya que p y q son sustituidos por sus respectivos valores de verdad en T_n.

Si los valores de verdad son representados por todos los números reales en el intervalo $[0,1]$, es decir el conjunto de verdad es $T_\infty = [0,1]$, la lógica multi-valuada es llamada lógica a infinitos valores, por lo que encontramos una correspondencia o isomorfismo entre la teoría de conjuntos difusos y la lógica a infinitos valores.

2.2 LÓGICA DIFUSA

Cuando escuchamos hablar por primera vez de “Lógica Difusa” o “Matemática Borrosa”, nos induce generalmente a pensar de inmediato que se trata de una teoría compleja, que se la podría tachar de poco clara o de confusa; no obstante a pesar de esta sentencia preconcebida, ha sido ésta objeto de un amplísimo desarrollo teórico y aplicada a diferentes campos, como en la ciencia, la tecnología e, incluso , al análisis empírico de las ciencias sociales. Así pues hay un poderoso soporte matemático detrás de la misma.

La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos; además es la ciencia de los principios formales del razonamiento aproximado, considerando el razonamiento preciso (lógica clásica) como caso límite. Así pues las características mas atractivas de la lógica difusa son su flexibilidad, su tolerancia con la imprecisión, su capacidad para modelar problemas no lineales, y su base en el lenguaje natural.

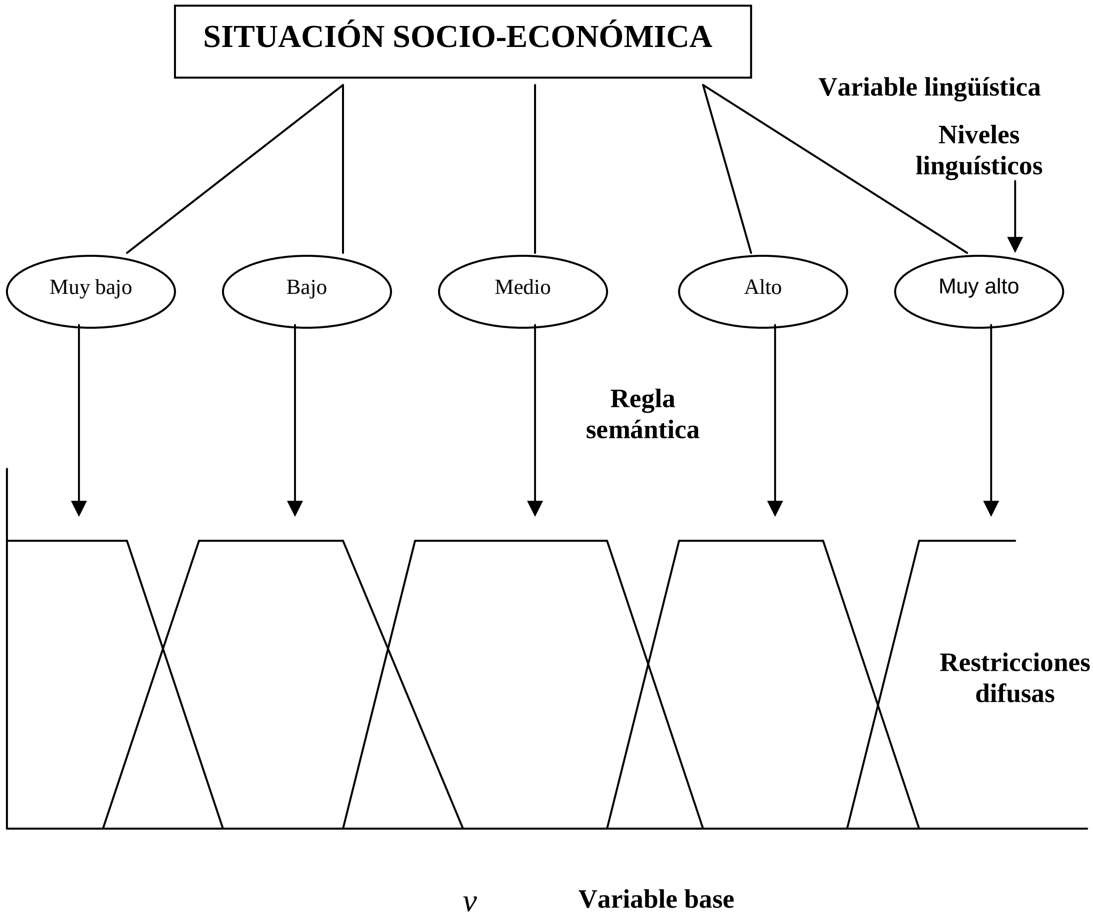
2.2.1 VARIABLE LINGÜÍSTICA

Se denomina **variable lingüística** a aquella que puede tomar por valor términos del lenguaje natural, como joven, viejo, mucho, poco, positivo, negativo, etc, a los cuales también se los llama niveles o etiquetas de la variable lingüística. Se debe aclarar que a una variable lingüística se le pueden asignar también valores numéricos.

En términos formales una variable lingüística se define como un conjunto de cinco elementos (x , U, $A(x)$, G, M), donde:

- x es el nombre de la variable lingüística.
- **U** es el dominio en el que opera o dominio subyacente.
- $A(x)$ es el conjunto de términos o niveles que puede tomar x .
- **G** es una gramática para generar las etiquetas de $A(x)$: “alto”, “bajo”, “normal”, etc.
- **M** es una regla semántica que asocia cada elemento de $A(x)$ con un conjunto difuso en U de entre todos los posibles.

Ejemplo 2.2



2.2.1.1 *Características de la variable lingüística.*

- Ayudan a comprimir información, ya que una etiqueta incluye muchos valores posibles, a esto de comprimir información Zadeh lo llamó granulación.
- Es un medio de trasladar conceptos o descripciones lingüísticas a descripciones numéricas que pueden ser tratadas automáticamente.
- Por capturar medidas de incertidumbre se ajustan más a la realidad que las variables nítidas.

Variables lingüísticas pueden ser la temperatura, edad, situación socio-económica, demanda, nivel de stock, etc.

2.2.2 MODIFICADORES LINGÜÍSTICOS.

Los modificadores lingüísticos son operadores inyectivos que se aplican a conjuntos difusos.

$$m:[0,1]\rightarrow[0,1]$$

Sea $x\in U$ y A un conjunto difuso con función de pertenencia $\mu_A(x)$. Denotamos al conjunto modificado por $m(A)$, cuya función de pertenencia es $\mu_{mA}(x)$. Algunos ejemplos de modificadores son: “muy”, “más o menos”. A continuación presentamos sus definiciones usando sus funciones de pertenencia y también su respectivo gráfico.

$$\mu_{muy\ A}(x)=[\mu_A(x)]^2$$

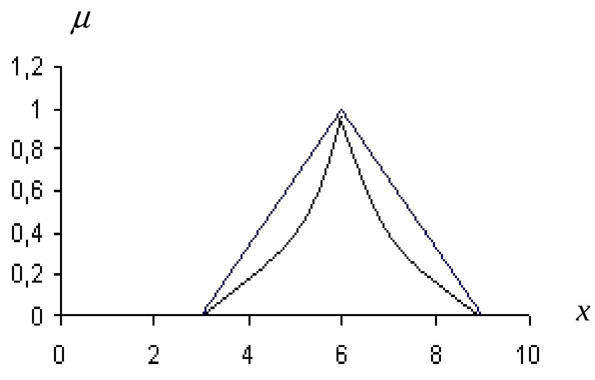


Figura 2.1 Modificador muy

$$\mu_{más\ o\ menos\ A}(x)=[\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}}$$

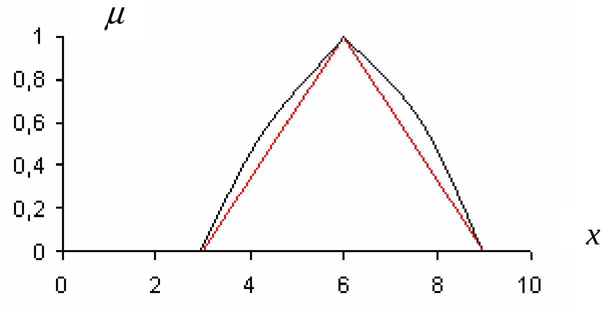


Figura 2.2 Modificador más o menos

Características de los modificadores.

- Si $m(A) < A$, el modificador m se denomina modificador fuerte.
- Si $m(A) > A$, el modificador m se denomina modificador débil.
- $m_\alpha(A) = A^\alpha$, $a \in R^+$, $a \in [0,1]$,

  Si $\alpha < 1$, el modificador es débil.

  Si $\alpha > 1$, el modificador es fuerte.

Propiedades de los modificadores

1. $m(0) = 0$, $m(1) = 1$.
2. m es una función continua
3. si m es fuerte, m^{-1} es débil.
4. Dado otro modificador n, cualquier composición de m con n y viceversa es un modificador.

Observaciones

- Con el uso de modificadores lingüísticos se debe evitar la ambigüedad.
- Los modificadores lingüísticos y los conectivos permiten obtener un amplio conjunto de términos compuestos que amplían la potencia descriptiva de la variable lingüística.

2.2.3 REGLAS DE COMPOSICIÓN PARA PROPOSICIONES DIFUSAS

La verdad de una proposición p en lógica difusa es expresada por un conjunto difuso, y por consiguiente por su función de pertenencia.

Tenemos los conjuntos difusos $A = \{(x, \mu_A(x)\}$ y $B = \{(y, \mu_B(y)\}$, algunos proposiciones importantes son:

a) x es A — proposición en forma canónica.

b) x es mA — proposición modificada.

c) Si x es A entonces y es B — proposición condicional.

2.2.3.1 ***Operación composición***: Consta de dos proposiciones p y q unidos por conectivos lógicos. Las proposiciones son definidas por:

$$p \equiv x \; es \; A \qquad\qquad q \equiv y \; es \; B \tag{1}$$

donde A y B son conjuntos difusos.

Las funciones de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$ representan los valores de verdad de las proposiciones correspondientes a la ecuación (1). Recíprocamente los valores de verdad de (1) son expresados por la función de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$. Si x_0 y y_0 son valores especificados en los universos U_1 y U_2, respectivamente, entonces los valores de verdad $\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)$ de las proposiciones x_0 es A, y_0 es B se muestran en las figuras 2.3(a) y 2.3(b), donde se asume que las funciones de pertenencia son continuas.

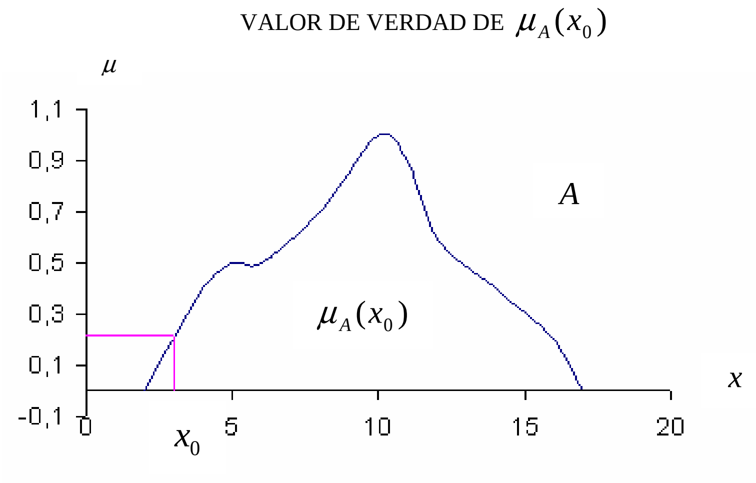


Figura 2.3 (a) Valor de verdad de $\mu_A(x_0)$

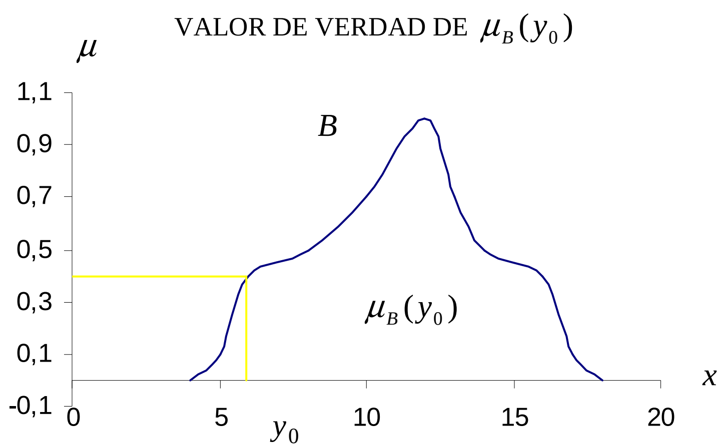


Figura 2.3 (b) Valor de verdad de $\mu_B(y_0)$

Composición conjunción $p \wedge q$.

El valor de verdad (vv) de $p \wedge q$ es definido por:

$$vv(p \wedge q) = \mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (x, y) \in A \times B$$

Composición disyunción $p \vee q$

El valor de verdad de $p \vee q$ es definido por:

$$vv(p \vee q) = \mu_{A \times B}(x, y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (x, y) \in A \times B$$

Composición implicación $p \to q$

El valor de verdad de $p \to q$ es definido por:

$$vv(p \to q) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)), \quad (x, y) \in A \times B.$$

2.2.4 VINCULACIONES SEMÁNTICAS.

Las vinculaciones semánticas se conoce como la inclusión de conjuntos difusos en las proposiciones. Consideremos las siguientes proposiciones.

$$p \equiv x \text{ } es \text{ } A \qquad\qquad q \equiv y \text{ } es \text{ } B$$

Ambas definidas en el mismo universo U. Se dice que la proposición p tiene una vinculación semántica con la proposición q, denotada por ,

$p \to q$ si y solo si $\mu_A(x) \le \mu_B(y), \qquad x \in U$

2.3 PROMEDIO DIFUSO PARA PREDICCIONES

Los pronósticos son la base de cualquier actividad de producción. La habilidad de predecir y estimar eventos futuros que requieren del estudio de datos imprecisos en un ambiente cambiante es fundamental y la lógica difusa es una buena alternativa como método de pronóstico.

El análisis de situaciones complejas necesitan los esfuerzos y opiniones de muchos expertos. Las opiniones de los expertos nunca son idénticas, además son más o menos cercanas; estas **opiniones** son combinadas y agregadas en orden para producir una conclusión.

La metodología del promedio difuso se usa en los modelos de producción como: Delphi difuso, dirección de proyectos, predicción de la demanda.

2.3.1 PROMEDIO DIFUSO

Consideramos n números triangulares $A_j = (a_1^j, a_M^j, a_2^j), \quad j = 1, ..., n.$ Usando la adición de números triangulares y la división por un número real obtenemos el promedio triangular (media) A_{pro}

$$\begin{aligned} A_{pro} &= \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \\ &= \frac{\left(a_1^1, a_M^1, a_2^1\right) + \cdots + \left(a_1^n, a_M^n, a_2^n\right)}{n} \\ &= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_1^{(j)}, \sum_{j=1}^{n} a_M^{(j)}, \sum_{j=1}^{n} a_2^{(j)}\right)}{n} \end{aligned}$$

dando el número triangular

$$A_{pro} = \left(m_1, m_M, m_2\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_1^j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_M^j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_2^j\right)$$

2.3.2 METODO DELPHI DIFUSO PARA PREDICCIÓN

El método Delphi difuso es una generalización del método clásico de predicciones en un amplio rango, en las ciencias administrativas es conocido como Método Delphi.

Fue desarrollado en los años sesenta por la Corporación Rand en Santa Mónica, California, el nombre viene del antiguo oráculo griego Delphi quien fue famoso por sus predicciones del futuro.

La esencia del método Delphi puede ser descrita como sigue:

i. A expertos con alto grado de conocimiento se les pide dar su opinión con respecto a un asunto o evento específico, de la ciencia, tecnología o negocios, en forma separada e independientemente; ellos pueden ser consultados para dar un pronóstico del estado general del mercado, economía, avances tecnológicos, etc

ii. Estadísticamente se analizan los datos, que tienen un carácter subjetivo, para encontrar su promedio; estos resultados son comunicados a los expertos inmediatamente.
iii. Los expertos revisan los resultados y dan nuevas estimaciones que vuelven a ser analizadas estadísticamente y estos nuevos resultados son enviados a los expertos para nuevas estimaciones.
iv. Este proceso podría ser repetido una y otra vez hasta que la salida converja a una solución razonable desde el punto de vista de un administrador o un gerente. Usualmente dos o tres repeticiones son suficientes.

Sin embargo los problemas de predicción que se desarrollan en un amplio rango envuelven imprecisiones en la información con datos incompletos, además las decisiones tomadas por los expertos están sujetas a la apreciación personal de cada uno, por lo que están sujetas a cambio; en consecuencia es mejor presentar los datos como números difusos, mas convenientemente como números difusos triangulares, ya que de esta forma se tiene tres valores importantes que son: el mas pequeño, el mas grande y el mas probable.

El método Delphi Difuso fue introducido por Kaufman y Gupta (1988), y consta de los siguientes pasos.

1. Los expertos E_i, $i = 1, \ldots, n$, son preguntados para proveer los posibles datos de la realización de cierto evento en ciencia, tecnología o negocios, nombrando: al dato más cercano $a_1^{(i)}$, al dato mas probable $a_M^{(i)}$, y al dato mas lejano a_2^i. Los datos dados por los expertos E_i son presentados en forma de números triangulares.
2. Calculamos el promedio de todos los A_i y obtenemos $A_{pro} = (m_1, m_M, m_2)$.

Entonces para cada experto E_i calculamos la desviación estándar entre A_{pro} y A_i, definido por:

$$A_{pro} - A_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_1^i - a_1^i \;, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_M^i - a_M^i \,, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_2^i - a_2^i \right)$$

Esta desviación estándar es enviada a los expertos E_i para que realicen una reexaminación de los datos.

3. Cada experto E_i presenta un nuevo número triangular

$$B_i = \left(b_1^{(i)}, b_M^{(i)}, b_2^{(i)}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

el proceso se vuelve a repetir desde el paso 2, el promedio B_{pro} vuelve a ser calculado con la fórmula dada anteriormente, lo que se deben sustituir son los valores de a_1^i, a_M^i, a_2^i por b_1^i, b_M^i, b_2^i, se generan los nuevos números triangulares y se calcula el promedio C_{pro}. El proceso debería ser repetido una y otra vez, hasta que los administrativos estén de acuerdo con el resultado.

2.4 CONTROL LÓGICO DIFUSO

El Control Lógico Difuso (CLD) trata el control de problemas que se encuentran en un ambiente de incertidumbre e imprecisión; esto es muy importante cuando la precisión requerida no es alta y el objeto de control tiene las variables disponibles para su medición o estimación.

El objetivo del control en ingeniería es la acción; en los negocios, las finanzas y la administración se puede extender el significado del control y se da una interpretación más amplia de la acción la cual también podría ser un consejo, sugerencia, instrucción, conclusión, evaluación o predicción.

El CLD es efectivo cuando busca una buena solución; esto no se puede usar para encontrar la solución óptima (mejor), valga la aclaración de que en el mundo real es difícil determinar qué es lo mejor.
El proceso del CLD lo podemos resumir en el siguiente diagrama.

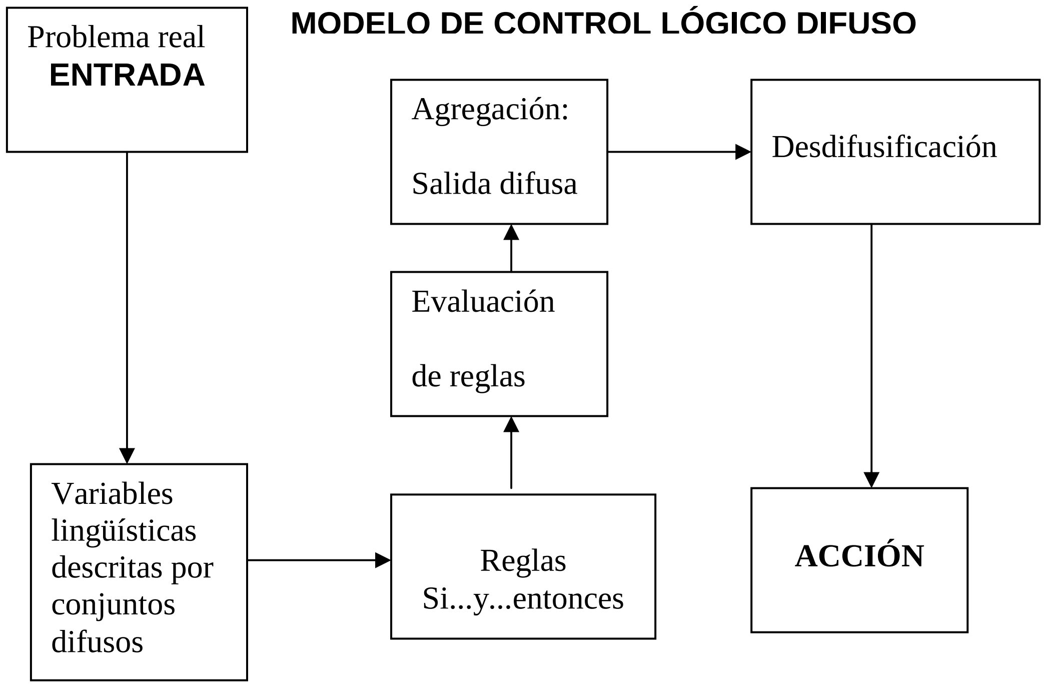


Figura 2.4 Diagrama de bloques del proceso de control de la lógica difusa

2.4.1 MODELADO DE LAS VARIABLES DE CONTROL

Un modelo de control lógico difuso puede tener una o más entradas y salidas, el número de entradas no necesariamente debe ser igual al número de salidas; como dijimos anteriormente estas entradas y salidas son variables lingüísticas que son modeladas por conjuntos que contienen un cierto número de niveles y a su vez estos términos son conjuntos difusos.

Las variables de entrada como las de salida se representan de la siguiente manera:

A = $\{A_1,...,A_i,\ A_{i+1},...,A_n\}$, donde A es nuestra variable lingüística y los $A_1,...,A_i$, $A_{i+1},...,A_n$, representan los niveles de la variable.

Los niveles A_i son conjuntos difusos definidos como $A_i = \{(x, \mu_{A_i}(x)) / x \in A_i \subset U\}$.

Para designar los conjuntos con los que se trabajará se requiere:

(i) Determinar el conjunto universo U, que representará a cada variable lingüística que se utilice.

(ii) Seleccionar la forma de las funciones de pertenencia de los niveles que tiene la variable.

(iii) Se usan más frecuentemente las funciones de tipo triangular, trapezoidal o acampanadas (o parte de estas) .

(iv) Especificar el número de niveles que tendrán las variables lingüísticas. Usualmente estos números están entre 2 y 7.

(v) Especificar los intervalos soporte (dominios) para los niveles.

2.4.2 REGLAS INFERENCIALES SI... Y ...ENTONCES

Las reglas inferenciales SI...Y...ENTONCES se llaman también reglas de control o reglas de producción, estas reglas modelan el problema que se quiere resolver.

Estas reglas se designan para producir una conclusión o consecuencia; es así como tenemos diferentes reglas que se transforman en las salidas posibles.

El número de reglas que se obtiene es el resultado de multiplicar el número de niveles que tiene cada entrada.

Las reglas con la posible salida difusa etiquetada con C_{ij} son presentadas simbólicamente en una matriz rectangular nxm (n filas y m columnas), llamada tabla de decisión donde C_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,m$ son renombrados como elementos del conjunto $\{C_1,...,C_l\}$, y $l < mn$.

Tabla 2.2 Tabla de decisión.

	B_1	. . .	B_j	B_{j+1}	. . .	B_m
A_1	C_{11}	. . .	C_{1j}	$C_{1,j+1}$	. . .	$C_{1,m}$
. . .	. . .		. . .	. . .		. . .
A_i	C_{i1}	. . .	C_{ij}	$C_{i,j+1}$	. . .	$C_{i,m}$

A_{i+1}	$C_{i+1,1}$	. . .	$C_{i+1,j}$	$C_{i+1,j+1}$	. . .	$C_{i+1,m}$
. . .	. . .		. . .	. . .		. . .
A_n	C_{n1}	. . .	C_{nj}	$C_{n,j+1}$	. . .	$C_{n,m}$

Si tenemos dos variables lingüísticas de entrada y una salida, el significado de las reglas Si...Y...Entonces es:

$$\text{Si } x \text{ es } A_i \text{ y } y \text{ es } B_j \text{ entonces } z \text{ es } C_k \qquad (2)$$

Usando los conceptos de la lógica difusa podemos escribir

$$p_i \equiv x \quad es \quad A_i \qquad q_j \equiv y \quad es \quad B_j, \qquad r_k \equiv z \quad es \quad C_k \qquad (3)$$

por lo que (2) quedaría

$$\text{Si } p_i \text{ y } q_j \text{ entonces } r_k \qquad (4)$$

El ***y*** de las ecuaciones anteriores se llama precondición y se define como la conjunción de la composición, además es una relación difusa en $A \times B \subseteq U_1 \times U_2$ con función de pertenencia.

$$p_i \wedge q_j = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y)), \qquad (x, y) \in A \times B \subset U_1 \times U_2 \qquad (5)$$

Las reglas de inferencia Si....Y...Entonces expresan la verdad de la precondición. Existen muchos caminos para definir estas reglas. Mamdani (1975) define la regla de inferencia como una regla de conjunción-base expresada por la operación $\wedge(\min)$.

2.4.3 REGLAS DE EVALUACIÒN

Si las entradas del modelo de CLD son $x = x_0$ y $y = y_0$, entonces debemos encontrar el valor correspondiente a la salida z. Los números reales x_0 y y_0 son llamados lecturas; que pueden ser obtenidos por medida, observación, estimación, etc. Para ingresar al modelo de CLD, x_0 y y_0 tienen que ser traducidos a niveles apropiados de las variables lingüísticas correspondientes.

Una lectura debe ser emparejada a la función de pertenencia apropiada representando los niveles de la variable lingüística. El emparejamiento es necesario debido a los requerimientos de los niveles; a esto se le llama la codificación de las entradas.

Se ilustra en la figura 2.5(a) donde a la lectura $x_0 \in U_1$ le corresponden dos valores constantes $\mu_{A_{i-1}}(x_0)$ y $\mu_{A_i}(x_0)$, llamados entradas de lectura difusa. Pueden ser interpretados como los valores de verdad de x_0 relacionados con A_{i-1} y A_i respectivamente. De la misma manera podemos obtener las entradas de lectura difusa correspondiente a la lectura $y_0 \in U_2$ figura 2.5(b).

En las siguientes figuras se presentan de manera general los términos de los conjuntos difusos A y B.

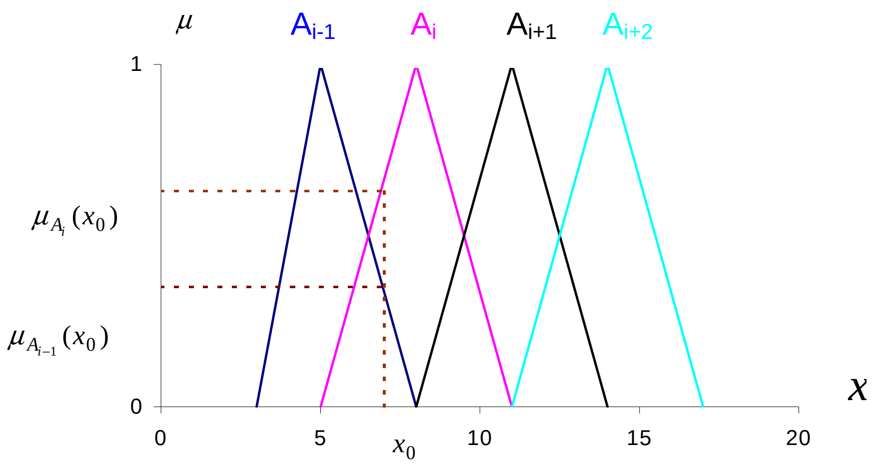


Figura 2.5 (a) Lectura de la entrada difusa correspondiente a la lectura x_0

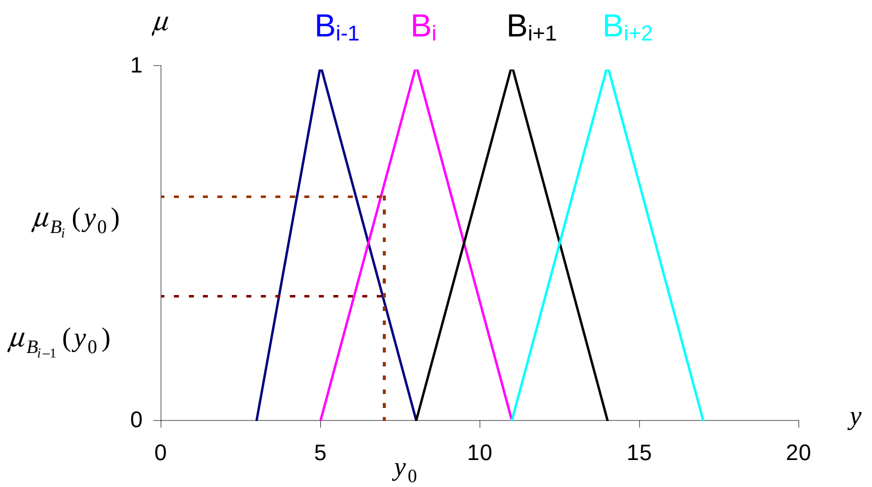


Figura 2.5 (b) Lectura de la entrada difusa correspondiente a la lectura y_0

La línea que atraviesa x_0 paralela al eje μ interseca solo los términos A_{i-1} y A_i de A, reduciendo así los términos difusos a los valores nítidos denotados por $\mu_{A_{i-1}}(x_0)$ y $\mu_{A_i}(x_0)$. La línea $x = x_0$ no interseca el resto de los términos, por lo que decimos que la intersección es un conjunto vacío con función de pertenencia 0. El mismo análisis lo realizamos para $y = y_0$ y obtenemos resultados similares.

Con $x = x_0$ y $y = y_0$ y sustituyendo los términos por sus funciones de pertenencia tenemos la **Tabla de decisión** inducida.

Tabla 2.3 Tabla de decisión inducida

	0	. . .	$\mu_{B_j}(x_0)$	$\mu_{B_{j+1}}(x_0)$	. . .	0
0	0	. . .	0	0	. . .	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mu_{A_i}(x_0)$	0	. . .	$\mu_{C_{ij}}(z)$	$\mu_{C_{i,j+1}}(z)$	. . .	0
$\mu_{A_{i+1}}(x_0)$	0	. . .	$\mu_{C_{i+1,j}}(z)$	$\mu_{C_{i+1,j+1}}(z)$	. . .	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	. . .	0	0	. . .	0

Como vemos en la tabla solo cuatro celdas contienen términos diferentes de cero, a estas celdas se las llama celdas activas.

2.4.4 AGREGACIÓN (RESOLUCIÓN DE CONFLICTOS)

La aplicación de una regla de control es también llamado ensayo. La agregación o conflicto de resolución es la metodología que se usa para decidir qué acción de control debería ser tomada como resultado de la aplicación de varias reglas.
La tabla muestra que solo cuatro reglas tienen que ser aplicadas ya que el resto no producen ningún resultado.
Para ilustrar el proceso de conflicto de resolución usaremos estas cuatro reglas numeradas de uno a cuatro.

Regla 1: Si x es $A_i^{(0)}$ y y es $B_j^{(0)}$ entonces z es C_{ij},

Regla 2: Si x es $A_i^{(0)}$ y y es $B_{j+1}^{(0)}$ entonces z es $C_{i,j+1}$,

Regla 3: Si x es $A_{i+1}^{(0)}$ y y es $B_j^{(0)}$ entonces z es $C_{i+1,j}$,

Regla 4: Si x es $A_{i+1}^{(0)}$ y y es $B_{j+1}^{(0)}$ entonces z es $C_{i+1,j+1}$,

La precondición ***y*** que es parte de cada regla, llamada aquí fuerza de la regla o nivel de aplicación es denotada por:

$$\alpha_{ij} = \mu_{A_i}(x_0) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_j}(y_0))$$

$$\alpha_{i,j+1} = \mu_{A_i}(x_0) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_{j+1}}(y_0))$$

$$\alpha_{i+1,j} = \mu_{A_{i+1}}(x_0) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \min(\mu_{A_{i+1}}(x_0), \mu_{B_j}(y_0))$$

$$\alpha_{i+1,j} = \mu_{A_{i+1}}(x_0) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \min(\mu_{A_{i+1}}(x_0), \mu_{B_{j+1}}(y_0))$$

Con esto podemos construir una nueva tabla llamada tabla de reglas fuertes.

Tabla 2.4. Tabla de reglas fuertes

	0	. . .	$\mu_{B_j}(x_0)$	$\mu_{B_{j+1}}(x_0)$	. . .	0
0	0	. . .	0	0	. . .	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mu_{A_i}(x_0)$	0	. . .	α_{ij}	$\alpha_{i,j+1}$	. . .	0
$\mu_{A_{i+1}}(x_0)$	0	. . .	$\alpha_{i+1,j}$	$\alpha_{i+1,j+1}$	. . .	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	. . .	0	0	. . .	0

Esta nueva tabla es similar a la tabla anterior, con la diferencia que las celdas activas en esta tabla son ocupadas por los miembros expresando la fuerza de las reglas. Se usa los elementos de las cuatro celdas activas en ambas tablas para introducir la noción de **control de salida**.

El control de salida (CS) de cada regla se define por una operación de conjunción aplicado en su fortaleza y conclusión de la siguiente manera:

CS de la regla 1: $\alpha_{ij} \wedge \mu_{c_{ij}}(z) = \min(\alpha_{ij}, \mu_{c_{ij}}(z))$.

CS de la regla 2: $\alpha_{i,j+1} \wedge \mu_{c_{i,j+1}}(z) = \min(\alpha_{i,j+1}, \mu_{c_{i,j+1}}(z))$.

CS de la regla 3: $\alpha_{i+1,j} \wedge \mu_{c_{i+1,j}}(z) = \min(\alpha_{i+1,j}, \mu_{c_{i+1,j}}(z))$.

CS de la regla 4: $\alpha_{i+1,j+1} \wedge \mu_{c_{i+1,j+1}}(z) = \min(\alpha_{i+1,j+1}, \mu_{c_{i+1,j+1}}(z))$.

Las salidas de las cuatro reglas ahora deben ser combinadas o agregadas en orden para producir un control de salida con función de pertenencia $\mu_{agg}(z)$ Para la agregación es natural usar el operador $\vee$ (o) expresado por máx:

$$\mu_{agg}(z) = \left(\alpha_{ij} \wedge \mu_{c_{ij}}(z)\right) \vee \left(\alpha_{i,j+1} \wedge \mu_{c_{i,j+1}}(z)\right) \vee \left(\alpha_{i+1,j} \wedge \mu_{c_{i+1,j}}(z)\right) \vee \left(\alpha_{i+1,j+1} \wedge \mu_{c_{i+1,j+1}}(z)\right)$$

$$= máx\left\{\left(\alpha_{ij} \wedge \mu_{c_{ij}}(z)\right), \left(\alpha_{i,j+1} \wedge \mu_{c_{i,j+1}}(z)\right), \left(\alpha_{i+1,j} \wedge \mu_{c_{i+1,j}}(z)\right), \left(\alpha_{i+1,j+1} \wedge \mu_{c_{i+1,j+1}}(z)\right)\right\}$$

Suponemos que tenemos el número real α y el conjunto difuso C con función de pertenencia $\mu_c(z)$, definimos entonces:

$$\mu_{\alpha \wedge \mu_c}(z) = \alpha \wedge \mu_c(z) = \min(\mu_\alpha(z) = \alpha, \mu_c(z)) \qquad (6)$$

donde $\mu_\alpha(z) = \alpha$ es una línea recta paralela al eje z; geométricamente esta es una truncación de la forma de $\mu_c(z)$.

La función de pertenencia (6) es mostrada en la figura 2.6 y 2.7 para las dos formas de $\mu_c(z)$ mas frecuentemente usadas.

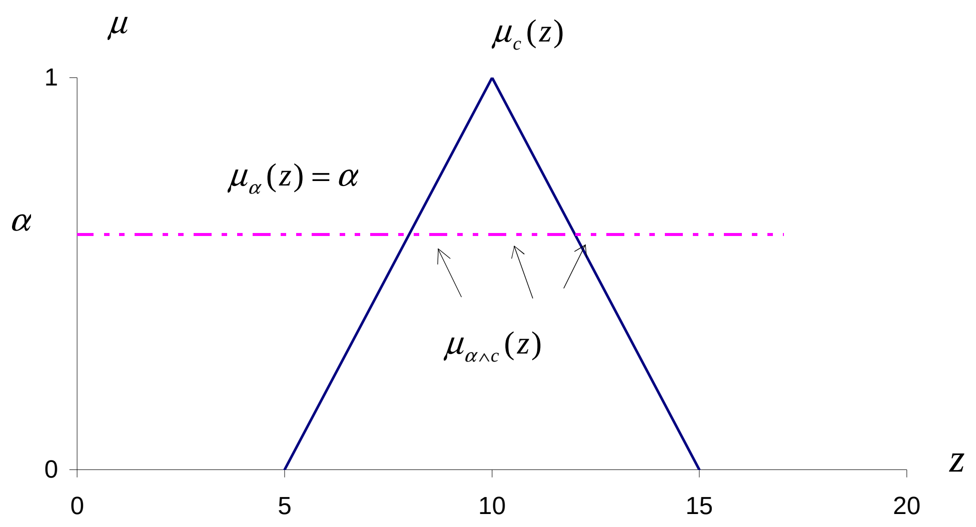


Figura 2.6 Número triangular cortado

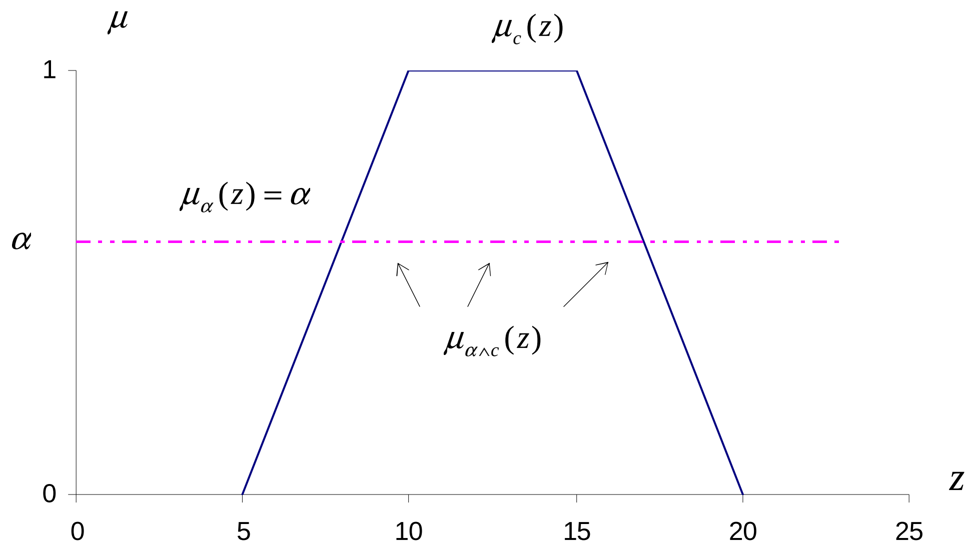


Figura 2.7 Número trapezoidal cortado

La función de pertenencia agregada $\mu_{agg}(z)$ representa un conjunto difuso normalizado, por lo que es necesario desdifusificar esta función de pertenencia.

2.4.3 DESDIFUSIFICACIÒN (ELIMINACIÓN DE LA BORROSIDAD)

Desdifusificación o descifrado de salidas es una operación que produce un control de acción no difuso, es decir, nos arroja un solo valor $\hat{z}$, que en forma adecuada representa a la función de pertenencia $\mu_{agg}(z)$ de un control de acción difuso agregado.

Existen muchos métodos de desdifusificación que toman en consideración la forma de los números difusos cortados, la longitud de los intervalos soporte, la altura de los triángulos y trapezoides cortados, la cercanía a los números triangulares centrales, y también la complejidad de los cálculos computacionales.

A continuación describiremos tres métodos de desdifusificación.

2.4.3.1 Método de centro de área (CAM)

Supongamos que la función de pertenencia de las reglas de control agregadas es

$\mu_{agg}(z)$, donde $z \in [z_0, z_q]$ mostrada en la figura 2.8.

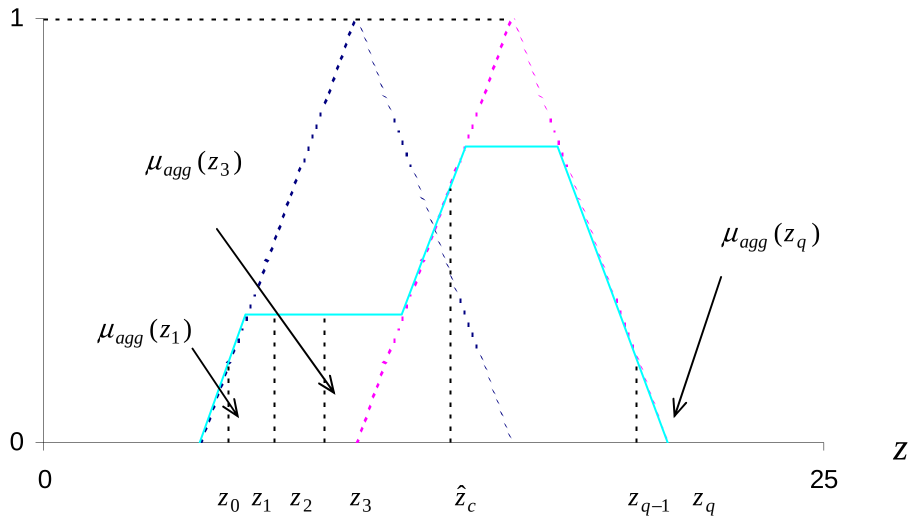


Figura 2.8 Desdifusificación por el método de centro de área (CAM)

Subdividimos el intervalo $[z_0, z_q]$ q subintervalos iguales con los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$.

El valor nítido $\hat{z}_c$ de acuerdo a este método es el promedio ponderado de los números z_k.

$$\hat{z}_c = \frac{\sum_{k=1}^{q-1} z_k \mu_{ag}(z_k)}{\sum_{k=1}^{q-1} \mu_{ag}(z_k)}$$

La interpretación geométrica de $\hat{z}_c$ es que es la primera coordenada (abscisa) del centro $(\hat{z}_c, \mu_c)$ del área bajo la curva $\mu_{agg}(z)$ limitada por el eje z. La interpretación física es que si esta área es cortada de un pedazo de metal o madera, el centro del área será el centro de gravedad; por esta razón **CAM** se llama también método del centro de gravedad.

Este método de desdifusificación es el mas popular, es bastante natural desde el punto de vista del sentido común, sin embargo los requerimientos computacionales a veces son complejos.

2.4.3.2 Método de media máxima

Se considera la misma función de pertenencia $\mu_{agg}(z)$ como en el método de centro de área, la función tiene dos segmentos base. La proyección del segmento P_1P_2 con la altura máxima en el eje z es el intervalo $[\varsigma_1, \varsigma_2]$. Descuidando la contribución del número triangular cortado con el segmento base Q_1Q_2, se define $\hat{z}_m$ como el punto medio del intervalo $[\varsigma_1, \varsigma_2]$, es decir:

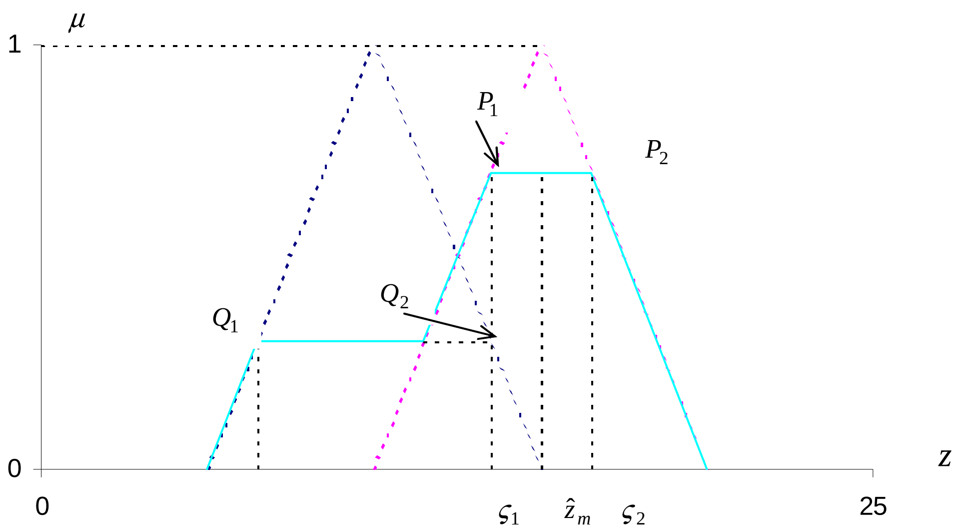


Figura 2.9 Desdifusificación por el método de media máxima

2.4.3.3 Método de desdifusificación alto

Este método es la generalización del método de medida máxima. Este método usa todos los segmentos base obtenidos como resultado de la aplicación de las reglas. Además los segmentos P_1P_2 con la altura p existe otro segmento Q_1Q_2 con altura q. El punto medio del intervalo $[\eta_1, \eta_2]$, la proyección de Q_1Q_2 en z, es $\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$ por lo que este método produce $\hat{z}_h$:

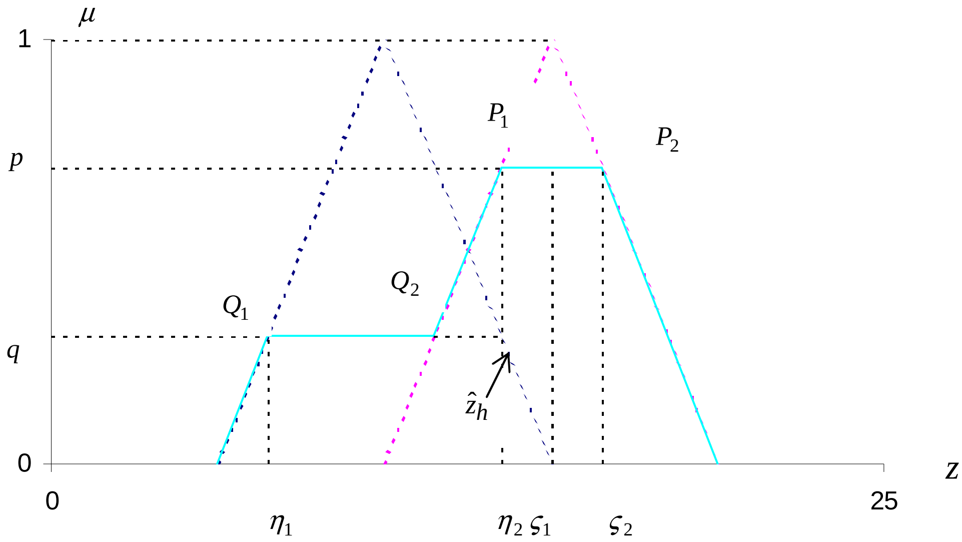


Figura 2.10 Desdifusificación por el método alto

$$\hat{z}_h = \frac{p\frac{\varsigma_1+\varsigma_2}{2}+q\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}{p+q} = \omega_1\frac{\varsigma_1+\varsigma_2}{2}+\omega_2\frac{\eta_1+\eta_2}{2},$$

es decir $\hat{z}_h$ es el promedio ponderado de los puntos medios de $[\varsigma_1, \varsigma_2]$ y $[\eta_1, \eta_2]$ con ponderaciones $w_1 = \frac{p}{p+q}$, $w_2 = \frac{q}{p+q}$, donde p y q son las alturas de los segmentos base.

CAPÍTULO 3

ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIO

INTRODUCCIÓN

Dentro del campo general de la dirección de operaciones, se ha dedicado enorme cantidad de esfuerzos tanto en la investigación como el desarrollo tecnológico del sistema del flujo físico, su diseño y control.

El problema de la gestión de inventario, representa un porcentaje importante del capital de trabajo de una empresa, por este motivo el presente capítulo se centra fundamentalmente, en orientar en los términos y conceptos relacionados con la administración de inventarios, necesarios para la aplicación de una metodología en la toma de decisiones, como es el cuando y cuanto abastecerse.

Con estas consideraciones, en una primera parte se presenta los tipos y los costos de inventarios que se muestran en una fabrica de producción, dando una clara idea de la importancia de este estudio, luego se resume los principales métodos de pronóstico con los cuales se intenta proyectar la demanda en el futuro.

Inmediatamente se presenta la fórmula del lote económico o fórmula de Wilson, como solución analítica del cálculo del tamaño del lote considerando costes de lanzamiento y costes de mantenimiento, de una manera clara y sencilla, con lo que además se precisa las condiciones en las cuales se puede implantar dicho modelo; finalmente se consideró los métodos de recuento de stock como una pieza fundamental para el administrador; todo esto permite presentar la manera clásica del manejo de un inventario.

3.1 INVENTARIO

Los inventarios son bienes tangibles que se tienen para la venta del negocio o para ser consumidos en la producción de bienes o servicios para su posterior comercialización. Los inventarios comprenden, además de las materias primas, producto en proceso y productos terminados, los materiales, repuestos y accesorios para ser consumidos en la producción de bienes fabricados para la venta o en la prestación de servicios.

Por lo tanto, el objetivo es aumentar la rentabilidad de la organización por medio de una correcta utilización del inventario, prediciendo el impacto de las políticas corporativas en los niveles de stock, y minimizando el costo total de las actividades logísticas asegurando el buen nivel de servicio entregado al cliente.

Decisiones:

•¿ Cuánto almacenar?

•¿ Cuándo abastecerse?

Los principales objetivos de nuestro estudio son: la planeación agregada, las reglas heurísticas y matemáticas de preparación de programas, el establecimiento de secuencia en las operaciones, la planeación y calendarización de redes, entre otros.

3.2 PRONÓSTICOS PARA EL CONTROL DE LOS INVENTARIOS Y DE LA PRODUCCIÓN

El ***pronóstico*** es un proceso de estimación de un acontecimiento venidero proyectando hacia el futuro datos del pasado. Estos datos, se combinan sistemáticamente en forma predeterminada para hacer una estimación del futuro.

La ***predicción*** es un proceso de estimación de un suceso futuro basándose en consideraciones subjetivas diferentes a los simples datos provenientes del pasado; estas consideraciones subjetivas no necesariamente deben combinarse de una manera predeterminada. Es decir, cuando no existen datos del pasado, se requiere una predicción, de lo contrario, se necesita un pronóstico.

Los pronósticos son la base de la planificación corporativa a largo plazo. El personal de producción y de operación utiliza pronósticos para tomar decisiones periódicas con respecto a la selección de procesos, a la planificación de la capacidad, a la planificación de la producción, a la programación de actividades y al inventario. Tengamos presente que un pronóstico perfecto suele ser imposible. Es fundamental revisar y actualizar continuamente los pronósticos con base en los datos más recientes, lo que se logra con un sistema flexible de planificación de la producción.

3.2.1 LA DEMANDA

El propósito de la administración de la demanda es coordinar y controlar todas las fuentes de demanda para que el sistema productivo pueda usarse de manera eficiente y para que el producto se entregue a tiempo. Existen dos tipos básicos de demanda: la demanda dependiente, que depende de la demanda de otros productos o servicios, y la demanda independiente, que no está condicionada a la demanda de otros productos o servicios.

3.2.2 TIPOS DE PRONÓSTICO

Los pronósticos se pueden clasificar en cuatro tipos básicos:

- Cualitativos
- Análisis de series de tiempo o cuantitativos
- Relaciones causales
- Simulación

Las técnicas **cualitativas** son de carácter subjetivo y se basan en estimaciones y opiniones.

El **análisis de series de tiempo** se basa en la idea de que se pueden usar los datos relacionados con la demanda del pasado para realizar pronósticos.

Los **pronósticos causales** suponen que la demanda está relacionada con uno o más factores subyacentes del ambiente.

Los **modelos de simulación** permiten al pronosticador recorrer una gama de suposiciones sobre la condición del pronóstico.

3.2.3 MODELOS COMUNES PARA PRONÓSTICOS CUANTITATIVOS

Media Móvil Simple	Se promedia un periodo que contiene varios puntos de datos, dividiendo la suma de los valores de los puntos entre el número de puntos. Así, cada punto tiene la misma influencia.
Media Móvil Ponderado	Ciertos puntos se ponderan más o menos que otros, según se considere conveniente de acuerdo con la experiencia.
Suavizamiento Exponencial	Los puntos de datos más recientes tienen mayor peso; este peso se reduce exponencialmente cuanto más antiguos son los datos.
Análisis de Regresiones	Ajusta una línea recta a datos pasados, por lo general relacionando el valor del dato con el tiempo. El método de ajuste más común es el de mínimos cuadrados.
Técnica Box Jenkins	Al parecer es la más precisa de las técnicas estadísticas disponibles.

3.2.4 HORIZONTE DE TIEMPO PARA LOS MODELOS DE PRONÓSTICOS

TÉCNICA	HORIZONTE DE TIEMPO	COMPLEJIDAD	PRECISIÓN DEL MODELO	REQUISITOS DE DATOS
Pronósticos Cualitativos	Largo	Alta	Variable	Alto
Series de Tiempo	Corto	Muy Baja	Alta	Alto
Medias móviles	Corto	Baja	Media	Bajo
Suavizamiento Exponencial	Corto	Muy Alta	Adecuada	Muy Bajo
Regresión Lineal	Alto	Baja	Media alta	Alto
Causal	Largo	Bastante Alta	Alto	Alto
Análisis de Regresión	Alto	Alta	Alta	Alto

3.3 ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIO

3.3.1 OBJETIVOS:

Encontrar un nivel adecuado de inventario en una empresa. Los principales beneficios que se pueden constatar son:

- **Servicio e Ingresos**
  El servicio se ve mejorado substancialmente, al tener mejor disponibilidad del producto, mejorando la imagen como empresa, implicando además que la rentabilidad aumente.
- **Costos**
  Los costos de transporte, almacenaje y de proceso del producto disminuirían.
- **Capital de trabajo**
  Mantendríamos menores niveles de inventario
- **Capital fijo**
  Tendríamos menor cantidad de activos fijos, como bodegas, etc.

3.3.2 TIPOS DE INVENTARIO

- Inventario en materia prima.
- Inventario en productos en proceso.
- Inventario en productos terminados.

3.3.3 TIPOS DE INVENTARIO EN TÉRMINOS DE SU LIQUIDEZ

- La materia prima puede ser fácil de convertir en efectivo.
- La producción en proceso puede ser ilíquida y tener solo un poco valor de recuperación.
- La liquidez de los productos terminados depende de su naturaleza.

3.3.4 COSTOS DE INVENTARIO

Los principales costos que se presenta al mantener un inventario son los siguiente:

- Costos asociados a los flujos
- Costos asociados a los stocks
- Costos asociados a los procesos

A su vez los costos por su naturaleza, se clasifican en los dos siguientes grandes grupos.

- Costos de Operación.
- Costos Asociados a la Inversión

Los costos de operación van asociados a la operación normal en la consecución del fin o producto.

3.3.4.1 Asociados a la inversión

Los asociados a la inversión son aquellos relacionados con depreciaciones y amortizaciones. Dentro del ámbito de los flujos habrá que tener en cuenta los Costos de los flujos de aprovisionamiento (transportes), aunque algunas veces serán por cuenta del proveedor y en otros casos estarán incluidos en el propio precio de la mercancía adquirida. Será necesario tener en cuenta tanto los costos de operación como los asociados a la inversión.

Costos asociados a los stocks, en este ámbito deberán incluirse todos los relacionados con Inventarios. Estos serían entre otros costos de almacenamiento, deterioros, pérdidas y degradación de mercancías almacenadas, entre ellos también tenemos los de rupturas de stock, en este caso cuentan con una componente fundamental los costos financieros de las existencias, todo esto ya serán explicados mas adelante. Cuando se quiere conocer, en su conjunto los costos de inventarios habrá que tener en cuenta todos los conceptos indicados. Por el contrario, cuando se precise calcular los costos, a los efectos de toma de decisiones (por ejemplo, para decidir tamaño óptimo del pedido) solamente habrá que tener en cuenta los costos evitables (que podrán variar en cada caso considerado), ya que los costos no evitables, por propia definición permanecerán afuera sea cual fuera la decisión tomada.

Por último, dentro del ámbito de los procesos existen numerosos e importantes conceptos que deben imputarse a los costos de las existencias : costos de compras, de lanzamiento de pedidos y de gestión de la actividad. Un caso paradigmático es el siguiente. En general, los costos de transporte se incorporan al precio de compras (¿por qué no incorporar también los costos de almacenamiento, o de la gestión de los pedidos?), como consecuencia de que en la mayoría de los casos se trata de transportes por cuenta del proveedor incluidos de manera más o menos tácita o explícita en el precio de adquisición. Pero incluso cuando el transporte está gestionado directamente por el comprador se mantiene esta práctica, aunque muchas veces el precio del transporte no es directamente proporcional al volumen de mercancías adquiridas, sino que depende del volumen transportado en cada pedido. En estas circunstancias el costo del transporte se convierte también en parte del costo de lanzamiento del pedido.

3.3.4.2 Costos de almacenamiento

Los costos de almacenamiento, de mantenimiento o de posesión del stock.

Costos Directos

Costos fijos	Costos variables
• Personal • Vigilancia y seguridad • Cargas fiscales • Mantenimiento del almacén • Reparaciones del almacén • Alquileres • Amortización del almacén • Amortización de estanterías y otros equipos de almacenaje • Gastos financieros de inmovilización	• Energía • Agua • Mantenimiento de estanterías • Materiales de reposición • Reparaciones (relacionadas con almacenaje) • Deterioros, perdidas y degradación de mercancías. • Gastos financieros de stock.

3.3.4.3 Costos de ruptura de stock

Los Costos de ruptura o de rotura de stocks incluyen el conjunto de costos por la falta de existencias, estos costos no serán absorbidos por la producción en proceso, sino que irán a parar directamente al estado de resultados.
Los criterios para valorar estos costos de ruptura son:

- Disminución del ingreso por ventas: La no integridad contable por falta de referencias en un pedido realizado, supone una reducción de los ingresos por ventas.

- Incremento de los gastos del servicio: Aquí se incluyen las penalizaciones establecidas por retrasos de abastecimiento, paros en el proceso de producción, los falsos fletes etc.

3.3.5 PRINCIPALES MOTIVOS PARA MANTENER UN INVENTARIO:

Motivos a favor	Motivos en contra
• Mejorar el nivel de servicio al cliente • Reducir costos • Absorber fluctuaciones de la demanda • Eliminar el pago de horas extras en la producción y en el transporte en lo posible	• Costos de administración • Deterioro de la calidad del producto • Inversión de capital de trabajo

3.4 MODELOS CLÁSICOS DE GESTION DE INVENTARIOS

Los modelos en que se basa la planificación de aprovisionamiento se agrupan en dos categorías principales, según la demanda sean dependientes o independientes.

A . **Modelos para reaprovisionamiento no programado**, en los que la demanda es de tipo independiente, generada como consecuencia de las decisiones de muchos actores ajenos a la cadena logística (clientes o consumidores), el modelo más común es el Lote Económico de

Compras. A su vez los modelos no programados se clasifican en otras dos categorías:

- **Modelos de reaprovisionamiento continuo**, en los que se lanza una orden de pedido cuando los inventarios decrecen hasta una cierta magnitud o "punto de pedido". La cantidad a pedir es el "lote económico de compra".

- **Modelos de reaprovisionamiento periódico**, en los que se lanza una orden de pedido cada cierto tiempo previamente establecido. La cantidad a pedir será la que restablece un cierto nivel máximo de existencias ó nivel objetivo.

B. **Modelos para reaprovisionamiento programado**, en los que la demanda es de tipo dependiente, generada por un programa de producción o ventas. Responden a peticiones de reaprovisionamiento basadas en técnicas de optimización o simulación.

3.4.1 NIVEL DE SERVICIO Y STOCK DE SEGURIDAD

La demanda independiente o no programada de un producto suele ser de tipo probabilista. Las demandas independientes deterministas mas bien son en la práctica un recurso para simplificar la formulación de los modelos. Esta circunstancia aleatoria en la generación de la demanda puede causar rupturas de los stocks, con sus costos asociados y sus mermas indudables de la calidad del servicio.

Es necesario, en consecuencia, disponer de un inventario adicional en nuestros almacenes sobre lo estrictamente necesario que haya establecido nuestro modelo de reaprovisionamiento. Dicho stock de seguridad, dependerá de las desviaciones que vaya a presentar el consumo durante el período que media entre el lanzamiento de un pedido y la recepción de la mercancía, es decir durante el plazo de entrega o Período Crítico. En consecuencia, la determinación de los stocks de seguridad estará ligada a la percepción que tengamos de esas desviaciones y al grado de fiabilidad, o "nivel de servicio" que estemos dispuestos a ofrecer a nuestros clientes. Si tenemos la percepción estadística de las desviaciones bajo la forma de la desviación estándar de la demanda, el stock de seguridad será el número de desviaciones estándar de reserva que nos interese mantener. A su vez, ese número de desviaciones estándar de reserva nos definirá el nivel de servicio que estamos ofreciendo; en la práctica**,** la secuencia debe ser la contraria.

Fijar el "nivel de servicio" que estamos dispuestos a ofrecer a nuestros clientes, expresado como porcentaje de servicios sin rupturas de stocks (por ejemplo, podemos fijar que en el 97,72 % de los suministros no existan rupturas de stocks).

Determinar, sobre la base de las leyes estadísticas, el número de desviaciones estándar de reserva que debemos mantener, o "factor de servicio", para garantizar ese nivel de servicio (en el ejemplo, anterior, y para una distribución normal, se requieren 2 desviaciones estándar para asegurar ese nivel de servicio).

Tabla 3.1 Niveles de servicio y factores de servicio

Nivel de Servicio (%)	Factor de Servicio
50,00	0,00
55,00	0,13
60,00	0,25
65,00	0,39
70,00	0,52
75,00	0,67
80,00	0,84
85,00	1,04
90,00	1,28
97,72	2,00
98,00	2,05
99,00	2,33
99,99	3,72

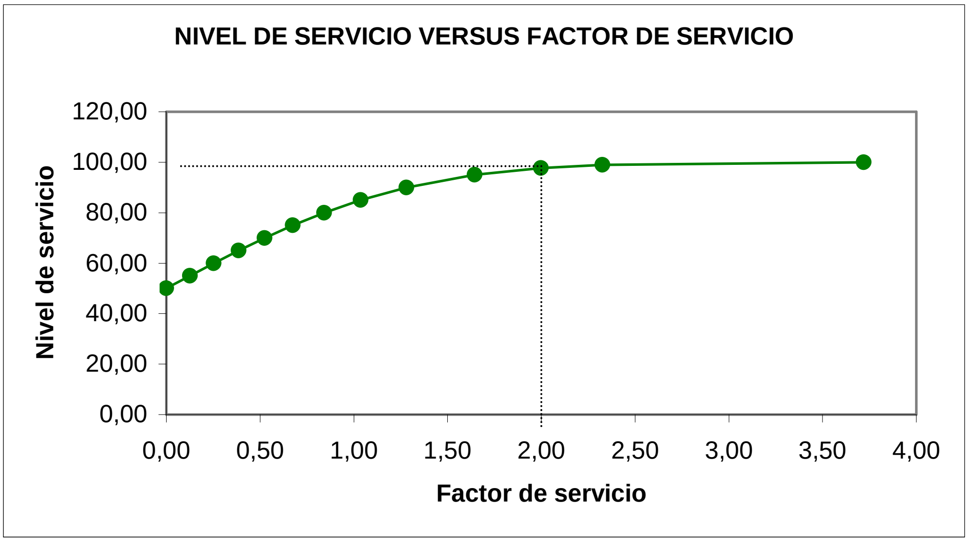


Figura 3.1 Nivel de servicio versus factor de servicio

3.4.2 CÁLCULO DEL ÍNDICE AD VALOREM

Existe un método aproximado de valorar los costos de almacenamiento, conocido como la tasa anual "Ad valorem". Este método aproximado, que se utiliza bastante para la planificación de Sistemas Logísticos, consiste en admitir que los costos de almacenamiento se pueden aproximar por una tasa anual aplicada al valor de las mercancías almacenadas.

Esta hipótesis que es evidente en el caso de los costos financieros de los stocks se generaliza en este método a los demás costos que intervienen en el almacenamiento (Inversiones, personal, energía, deterioros, pérdidas..). Asumiéndose que cuanto más cara es una mercancía mas caro es el costo de almacenamiento.

Así también para el cálculo de esta tasa tomamos en cuenta que debemos ser capaces de obtener un rendimiento por nuestro dinero alternativo del X % anual, comparando con la tasa de interés bancario.

Pues bien, el método de la tasa ad-valorem se extienden a los demás costos que se componen el almacenamiento de mercaderías, admitiendo que además del X% anual que corresponde al costo de stock.

También es muy importante destacar que estos costos que mencionamos "extras" en el almacenamiento, siempre están en relación directa con el tipo de mercadería que se trate.

Una estructura razonable para la composición de la tasa es la siguiente:

Costo financiero de los stocks	8% al 20%
Almacenamiento físico	5% al 15%
Deterioro o robo	2% al 5%

3.4.3 MODELO DEL LOTE ECONÓMICO

La fórmula del lote económico o fórmula de Wilson, fue obtenida por F.W. Harris en 1915, como solución analítica del problema de cálculo del tamaño del lote considerando costes de lanzamiento y costes de mantenimiento. La simplicidad y elegancia de esta fórmula estimuló el tratamiento matemático de otros problemas de organización de la producción.

Supuestos:

- Demanda conocida y constante en el tiempo
- No existen faltantes
- Los costos de producción y transporte son constantes
- El lote de compra es recibido una sola vez
- Línea de producción para un solo producto
- No existen los descuentos por volumen
- Costo de mantener stock lineal, basado en el nivel promedio de stock
- No existen limitaciones de espacio ni de financiamiento (capital de trabajo)
- Lo que no se vende en este período, se vende en el siguiente

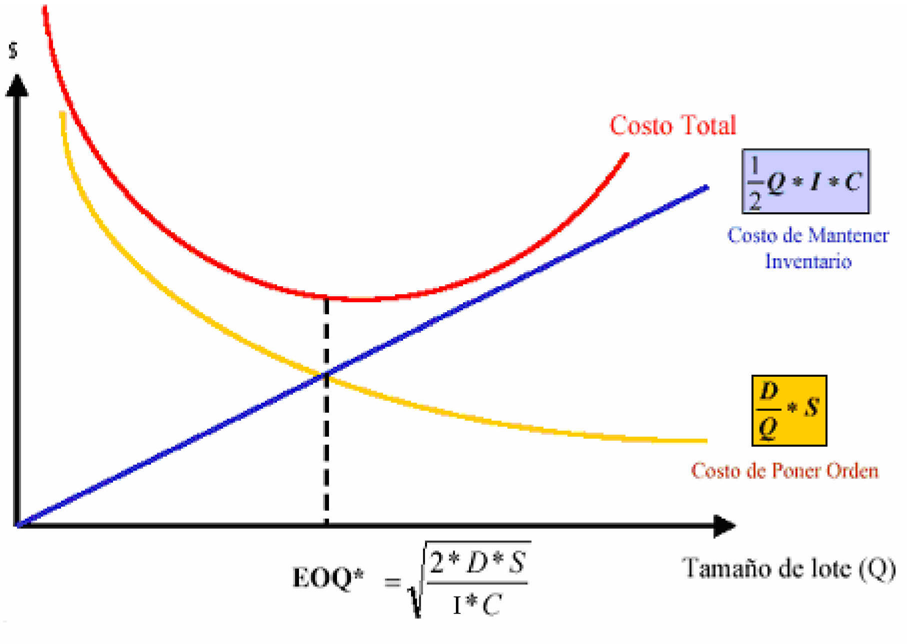


Figura 3.2 Modelo Lote Económico

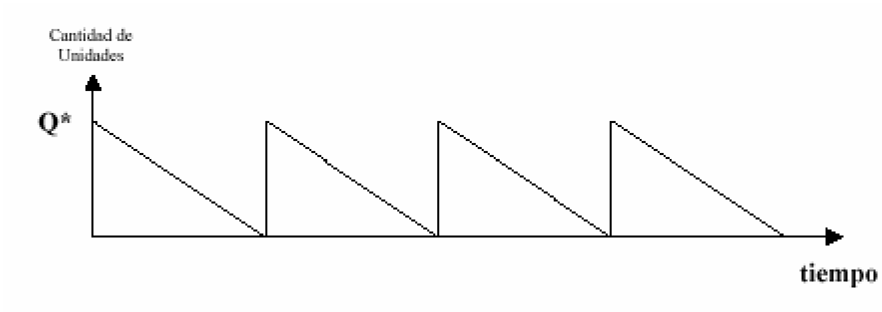


Figura 3.3 Simulación Modelo Lote Económico

Costos de mantenimiento total del inventario en un tiempo t

$CMT = \frac{D}{Q} * S + \frac{1}{2} Q * I * C$ donde :

D: Demanda del período [unidades / t]
S: Costo de poner una orden [$ / orden]
C: Costo unitario de la compra [$ / unidad]
I: Costo de mantener stock [%/ t]

Minimización del Costos Total de Mantener Inventario

$$\frac{\partial CMT}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{D}{Q} * S + \frac{1}{2} Q * I * C\right) = 0$$

$$-\frac{D}{Q^2} * S + \frac{1}{2} * I * C = 0$$

$$\frac{D}{Q^2} * S = \frac{1}{2} * I * C$$

$$Q^2 = \frac{2 * D * S}{I * C}$$

Lote

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2*D*S}{I*C}}}$$

Número de ordenes de compra es la parte entera de la expresión:

$$\boxed{N^* = \frac{D}{Q^*}}$$

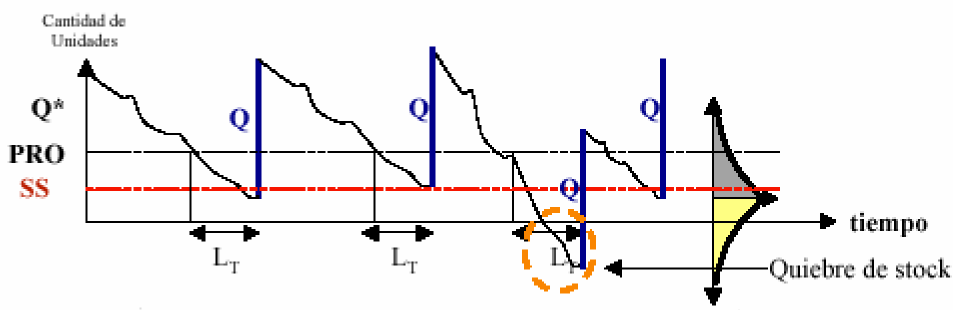


Figura 3.4 Modelo Lote Económico Probabilizado

D: Demanda del período (unidades / t)

σ_D : Desviación estándar de la demanda

PRO: Punto de reorden

SS: Stock de seguridad

L_T : Tiempo de espera del proveedor (t)

D_L : Demanda durante tiempo de espera

σ_{DL} : Desviación estándar de la demanda durante tiempo de espera

$$E[D_L] = E[D] * L_T$$

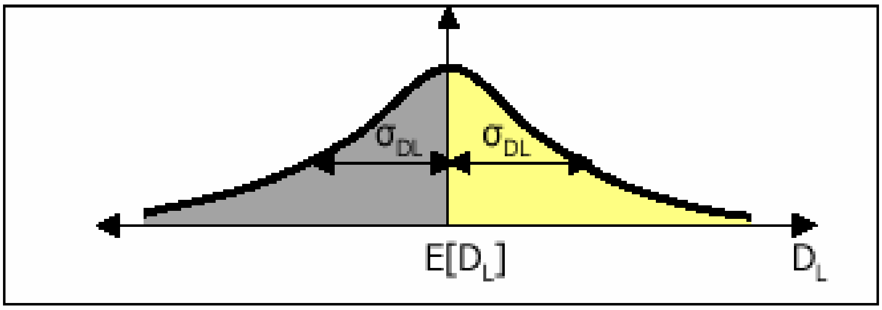


Figura 3.5 Distribución Normal de la Demanda

Al igualar PRO (Punto de reorden) igual a la demanda esperada $E[D_L]$ durante el tiempo de espera, existe un 0,5 de probabilidad de quiebre de stock en el ciclo de aprovisionamiento.

Entonces el nivel apropiado de PRO debe ser el siguiente:

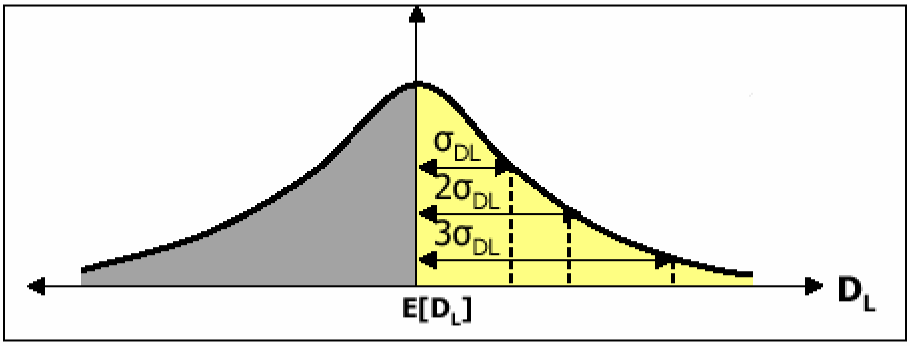


Figura 3.6 Variación Tiempo de espera del Proveedor

$$P(D_L \leq E[D_L] + \sigma_{D_L}) = 0{,}84$$
$$P(D_L \leq E[D_L] + 2 * \sigma_{D_L}) = 0{,}977$$
$$P(D_L \leq E[D_L] + 3 * \sigma_{D_L}) = 0{,}998$$

$$\boxed{P(D_L \leq E[D_L] + Z_{X\%} * \sigma_{D_L}) = x}$$

Por tanto, igualando PRO igual a $E[D_L] + Z_{X\%} * \sigma_{D_L}$ se tiene una confiabilidad del $x\%$ que no se producirá un quiebre de stock durante el tiempo de espera.

$$PRO = E[D_L] + Z_X * \sigma_{D_L}$$
$$E[D_L] = E[D] * L_T$$

El cálculo de σ_{D_L} lo vamos a ver con un ejemplo:

Supóngase que la Demanda (D) es mensual, y tiempo de espera (L_T) es 3 meses:

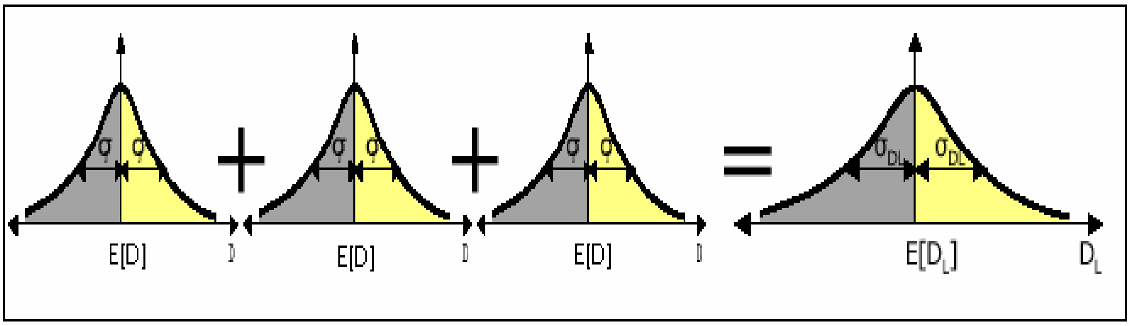


Figura 3.6 Tiempo de espera del Proveedor

$$E[D_L] = 3 * E[D]_T$$
$$\sigma_{DL}^2 = 3 * \sigma_D^2$$
$$\sigma_{DL} = \sqrt{3} * \sigma_D$$

En general, tenemos que para toda suma de variables aleatorias se cumple que:

$$D^T = \sum_{i=1}^{k} D_i$$
$$\sigma_D^T = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_{D_i}^2 + 2\sum_{i \neq j} \text{cov}(D_i, D_j)}$$

donde $\sum_{i \neq j} \text{cov}(D_i, D_j) = 0$ si las variables son independientes

Por tanto tenemos que:

$$PRO = E[D] * L_T + z_X * \sqrt{L_T} * \sigma_D$$

donde $z_{X\%} * \sqrt{L_T} * \sigma_D$ es el stock de seguridad con nivel de servicio del ciclo de pedido de X

3.4.4 RECUENTO DE STOCKS

El recuento de stocks, es una actividad fundamental dentro del control de los inventarios. Si el administrador de los inventarios cuenta con información en tiempo real y también fiable de los movimientos de las mercancías (entradas y salidas), es relativamente sencillo, contar con datos también en tiempo real de las existencias, ya que:

Existencias (t) = existencias (t-1) + entradas – salidas

Este recuento analítico o virtual de los stocks se basa en que el conocimiento de los movimientos en tiempo real de las mercancías es factible ya que en general se soportan en operaciones contables que generan documentos o facturas de entradas y salidas fácilmente procesables. Sin embargo, en el caso de los materiales en curso y, en general, de los inventarios internos, no es tan fácil disponer de este tipo de información sobre los movimientos, por lo que el recuento analítico de los stocks pueden presentar algunas dificultades.

Además de esta última circunstancia, existen errores de contabilización, pérdidas de materiales, desperfectos y otras circunstancias que desvirtúan el seguimiento analítico de las existencias y que obligan a efectuar recuentos físicos (no virtuales), de las mercancías para obtener datos utilizables directamente en la gestión o para actualizar periódicamente el valor; existencias (t-1) que se utilizan para el seguimiento analítico de las existencias en tiempo real.

El recuento físico de stocks que se utiliza habitualmente en la empresa es el recuento cíclico, que consiste en contar los distintos productos existentes en almacenes de forma periódica (cada día, semana, mes, etc.). La asignación del periodo de recuento a cada producto depende de la importancia que tenga la misma para el administrador de los inventarios en función del lugar que ocupe en alguna de las clasificaciones de materiales expuestas anteriormente.

Los artículos clasificados como "A" pueden ser objeto de recuento diario o semanal, mientras que los artículos de la categoría "B" pueden recontarse quincenal o mensualmente, y los del tipo "C" cada bimestre, trimestre, semestre o incluso una sola vez al año.

3.4.5 REAPROVISIONAMIENTO CON DEMANDA PROGRAMADA

El reaprovisionamiento bajo condiciones de demanda dependiente, se caracteriza por la existencia de un programa de necesidades de reposición, generalmente a corto plazo.

El pedido se lanzará siguiendo criterios similares a los del reaprovisionamiento continuo: en el momento en que los inventarios de la referencia considerada se reduzcan hasta ser iguales a la suma de demanda durante el plazo de reposición, mas el stock de seguridad. El stock de seguridad no surge en este caso obligado por ser la demanda probabilista, ya que ahora está programada, sino por la existencia de posibles retrasos y otros riesgos en el desarrollo del proceso. El plazo de reposición se referirá al plazo de entrega de las mercancías por parte de los proveedores. Si estamos en un punto de cadena logística alejado de los proveedores (por ejemplo en un almacén de fábrica que debe suministrar a los minoristas), el plazo de reposición para determinar nuestro "punto de pedido" será cero.

La cantidad del pedido es una cuestión de análisis más complejo. Deberá ser igual a la suma de las necesidades de reposición de un cierto número de periodos del programa (una, dos, tres, cuatro.... semanas en el ejemplo anterior), número que habrá que determinar con algún criterio de optimización. Si estamos al principio de la cadena logística, habrá que tener en cuenta la problemática de los proveedores; si estamos al final la problemática de los clientes, y si estamos en un punto intermedio, la problemática de los eslabones previos (por ejemplo, producción) y posteriores (por ejemplo, mayoristas o minoristas).

La forma de abordar este problema de forma matemáticamente rigurosa es por medio de las técnicas de investigación operativa, concretamente con los procedimientos de programación dinámica.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DEL MODELO DE CONTROL LÓGICO DIFUSO Y MODELO DE LOTE ECONÓMICO

INTRODUCCIÓN

En la primera etapa de este capítulo se presenta un breve resumen de los productos que maneja la empresa y del estado actual del inventario de la empresa, a continuación se procede a la aplicación del modelo de control lógico difuso.

Se definen dos variables de entrada que son la demanda y la cantidad de producto en stock y una variable de salida que es la acción del inventario. La demanda al igual que la cantidad de producto en stock posee tres niveles y la acción del inventario posee siete niveles, para cada variable se define su dominio de trabajo y su función de pertenencia acompañada de su respectivo gráfico.

Luego se elaboran las reglas inferenciales con las cuales va adjunta la tabla de decisión. Para la predicción de la demanda se procede a la aplicación del método Delphi con lo cual obtenemos las entradas para así poder trabajar con las reglas de evaluación. Procedemos a la agregación de las reglas en el control de salida con lo cual obtenemos la respectiva función de pertenencia. Seguido a esto procedemos a eliminar la borrosidad y obtenemos el punto de orden.

A continuación se aplica el modelo de lote económico, para lo cual en primera instancia se realiza la identificación de la demanda mediante gráficos realizados en el programa Eviews. Se procede además al cálculo de los costos de inventario necesarios para la aplicación del modelo y mediante una simulación del manejo de inventario se obtienen los valores que requiere el modelo de lote económico para ser aplicado.

Con los datos obtenidos se realiza una simulación y se presenta el gráfico de manejo de inventario. Al final se hace una comparación de resultados de los dos modelos.

4.1 DESCRIPCIÓN DE LA FÁBRICA DE PRODUCCIÓN TECN.IN.

La fábrica en estudio se encarga de la producción de rodachín, mas comúnmente conocido como rulimán, este producto es usado en ventanas, puertas de baño, mesas, etc.

Conocer el proceso de producción de esta fábrica nos ayudará a comprender, más adelante, el control de inventario que tiene la misma actualmente.

4.1.1 Características del proceso de producción.

- La materia prima se encuentra almacenada en una bodega, en el momento de dar una orden de producción sale la cantidad designada para la elaboración del producto de rodachín que necesite la empresa.
- El plástico sale a la inyectadora donde es trabajado por la maquinista.
- El tubo PVC o la varilla metálica va a los tornos revólver, dependiendo del tipo de producto que se haya ordenado hacer.
- Los pines que unen las partes del rodachín se fabrican en un troquelador.
- Luego se cuentan todas las piezas obtenidas.
- Se entrega al área de armaje estas piezas, es aquí donde se realiza el primer control de calidad ya que si la pieza no está con las medidas adecuadas no se la usa y se la regresa. Las piezas que son devueltas no todas se desechan, si la medida es muy grande pueden hacer que la pieza encaje a la medida que necesitan. Solo cuando la medida es muy pequeña se desecha ya que allí no hay nada que hacer.
- El rodachín armado pasa a la bodega donde se realiza otro control de calidad en el cual además de ver si existen fallas se coloca una gota de aceite a cada rodachín. En caso de encontrar alguna falla se lo regresa al área de armaje y si se ha podido hacer algo para arreglarlo regresa a la bodega de lo contrario se los desechan. Aquí se enfundan las piezas en paquetes de cien y se les pone el sello de garantía de la empresa.

Los productos que fabrica la empresa son:

Rodachín plástico acanalado con guía

Rodachín plástico acanalado sin guía

Rodachín metálico acanalado con guía

Rodachín metálico acanalado sin guía

Rodachin para puerta de baño

Rulimán para mueble metálico

De estos productos el rodachín que representa mayor cantidad de ventas es el rodachín plástico acanalado sin guía y, como se puede deducir, la producción es destinada a este rodachín principalmente. En términos de porcentaje este rodachín representa el 90% de la producción y el 10% restante queda repartido entre los otros cinco tipos de rodachín, por esta razón nuestro estudio se centra en el rodachín de mayor producción.

La situación actual del control de inventario en la fábrica se encuentra de la siguiente manera:

1. Tienen un control de inventario empírico, basado en la experiencia de años anteriores y en el concepto de mantener un inventario con el cual no se produzca una desatención al cliente.

2. Tienen inventario en materia prima, en producto en proceso y en producto terminado.

3. El inventario en materia prima representa un costo para la empresa ya que para fabricar este producto se necesitan materiales como el plástico que es difícil de obtener, en el resto de materia prima las órdenes de compra se satisfacen inmediatamente; es decir no tienen que esperar grandes periodos para ser abastecidos.

4. El inventario de producto en proceso es el que se origina con las piezas que están listas para armar el producto, este inventario es mínimo ya que el producto es armado continuamente y, de acuerdo a la investigación realizada, no existen periodos grandes de espera.

5. El inventario en producto terminado es bastante grande ya que no tienen quiebre de stock, lo cual es bueno para ya que no quedan mal con el cliente, pero como se ha visto anteriormente tener demasiado producto almacenado tarde o temprano va a representar en pérdidas para la empresa.

4.2 APLICACIÓN DEL MODELO DE CONTROL LÓGICO DIFUSO Como se vió en el capítulo 3, tener grandes cantidades de inventario en cualquiera de los tres niveles lleva a incurrir en gastos excesivos de almacenaje; por esta razón es necesario la aplicación de modelos que ayuden a optimizar los recursos de las empresas. Una buena opción para controlar esto es la lógica difusa ya que con la ayuda de las variables lingüísticas y las funciones de pertenencia es posible desarrollar la técnica del Control lógico difuso, el cual aplicado al control de inventario nos dará una buena estimación de la cantidad de inventario que se debe tener, como lo vimos anteriormente no vamos a encontrar el valor óptimo sino el más probable.

En el estudio del control de inventario juega un papel muy importante la demanda, razón por la cual vamos a tomarla como una de nuestras variables lingüísticas de entrada; además la cantidad de piezas que tenemos en stock es otra variable lingüística de entrada ya que en base a ésta podremos saber si se debe aumentar o disminuir la cantidad de inventario.
Como resultado de ingresar estas dos variables lingüísticas en nuestro modelo vamos a tener la variable lingüística de salida acción del inventario, que corresponde a tomar la decisión de qué hacer con el inventario.

Variables lingüísticas de entrada
Demanda ≡ { Decrece (D), Se mantiene (SM), Incrementa (I)},
Cantidad de partes en stock≡ { Baja (B), Adecuada (A), Elevada (E)}.

Variable lingüística de salida
Acción del inventario≡ { Disminución Grande (DG), Disminución Moderada (DM), Disminución Pequeña (DP), No hacer nada (O), Reabastecimiento Pequeño (RP), Reabastecimiento Moderado (RM), Reabastecimiento Grande (RG) }.

De acuerdo con el modelo de (CLD) se debe definir el dominio en el que trabajará cada variable, es así como tenemos:

Dominio de trabajo para la variable lingüística demanda
En la descripción de la fábrica se vió que el rodachín de mayor demanda es el rodachín plástico acanalado sin guía, razón por lo cual nuestro estudio se centra exclusivamente en este producto; para definir el dominio de trabajo de la

variable demanda usaremos los datos obtenidos de las ventas realizadas durante el período que va del año 2003 al 2006.

Tabla 4.1 Datos del rodachín plástico sin guía

RODACHIN PLÁSTICO SIN GUÍA				
OBSERVACIÓN				
AÑO	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Enero	85.600	82.400	88.800	98.000
Febrero	90.200	54.200	69.200	90.900
Marzo	54.100	72.600	71.200	92.700
Abril	54.000	55.800	70.100	71.300
Mayo	46.900	65.200	68.000	89.500
Junio	37.500	59.600	56.100	85.100
Julio	55.600	84.800	79.200	99.200
Agosto	68.500	101.600	82.000	102.300
Septiembre	55.300	63.600	47.500	85.800
Octubre	55.700	67.000	54.700	55.500
Noviembre	40.000	69.900	96.400	129.000
Diciembre	52.200	65.100	101.000	107.100

$$U_D = \left\{ x \times 10^3 \middle| 0 \leq x \leq 129 \right\}$$

En el capítulo 2 vimos que es conveniente trabajar con números difusos triangulares y trapezoidales por facilidad de cálculos, razón por la cual elegimos una mezcla de los dos tipos. Al elaborar la función de pertenencia de esta variable optamos por dividir el conjunto universo U_D en cuartiles para poder obtener una adecuada distribución, es así como tenemos:

- Cuartil uno (Q_1), que nos indica que el 25% de los datos son menores o iguales a este valor $Q_1 = 55650$.
- Cuartil dos (Q_2), o mediana, el cual nos indica que el 50% de los datos son menores o iguales a este valor $Q_2 = 70000$.
- Cuartil tres (Q_3), el cual nos indica que el 75% de los datos son menores o iguales a este valor $Q_3 = 89850$.
- Para poder dividir nuestro intervalo tomaremos como límite el último dato que es 129000.

El cálculo de los valores anteriores puede ser encontrado en el Anexo 1.

Definidos entonces, los valores y los números difusos a ser utilizados podemos presentar a continuación el gráfico de la función de pertenencia de la variable de entrada DEMANDA.

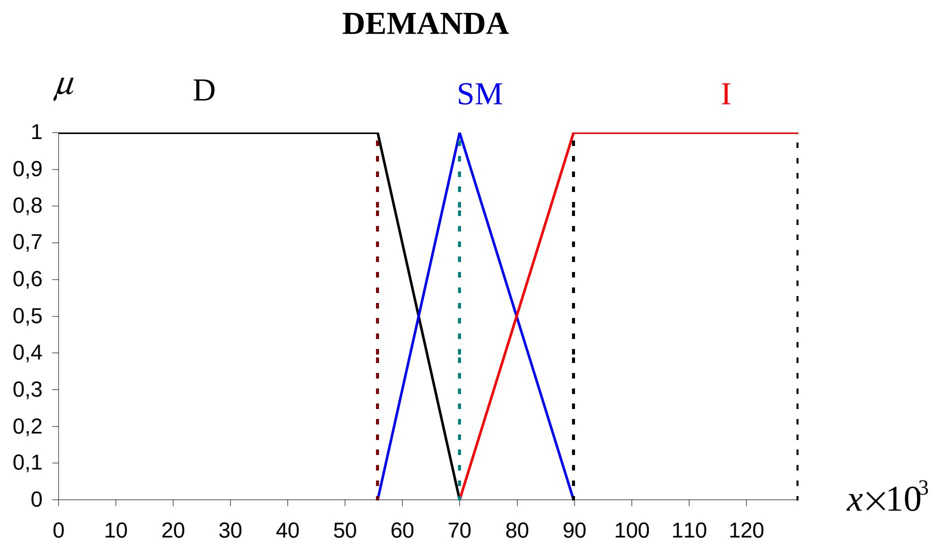


Figura 4.1 Niveles de la entrada demanda

FUNCIÓN DE PERTENENCIA DE LA VARIABLE LINGÜÍSTICA DEMANDA

$$\mu_{D_d}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 55{,}65 \\ \dfrac{70 - x}{14{,}35}, & 55{,}65 \le x \le 70. \end{cases}$$

$$\mu_{D_{SM}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 55{,}65}{14{,}35}, & 55{,}65 \le x \le 70 \\ \dfrac{89{,}85 - x}{19{,}85}, & 70 \le x \le 89{,}85 \end{cases}$$

$$\mu_{D_I}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 70}{19{,}85}, & 70 \le x \le 89{,}85, \\ 1, & 89{,}85 \le x \le 129. \end{cases}$$

Dominio de trabajo de la variable de entrada cantidad de producto en stock.

Para determinar el dominio de trabajo de esta variable se realizó una investigación en el inventario actual que maneja la empresa y los datos obtenidos reflejan que se manejan con tres valores en su inventario, el primer valor es tener una base de diez mil rodachines, lo cual a ellos les representa tener un stock suficiente, cuando esta base baja a la cantidad de ochenta mil rodachines, se debe producir para recuperar la base pero en esta cantidad la producción no es prioridad, si el nivel de stock bajó cincuenta mil piezas entonces trabajan horas extras para recuperar su stock, por lo cual el dominio de trabajo para esta variable se encuentra representado por el siguiente conjunto universo.

$$U_{CPS} = \{y \times 10^3 | 0 \leq y \leq 100\}$$

Los valores de los niveles de inventario que actualmente manejan son importantes para la construcción de la función de pertenencia correspondiente a la variable de entrada CANTIDAD DE PRODUCTO EN STOCK.

CANTIDAD DE PRODUCTO EN STOCK

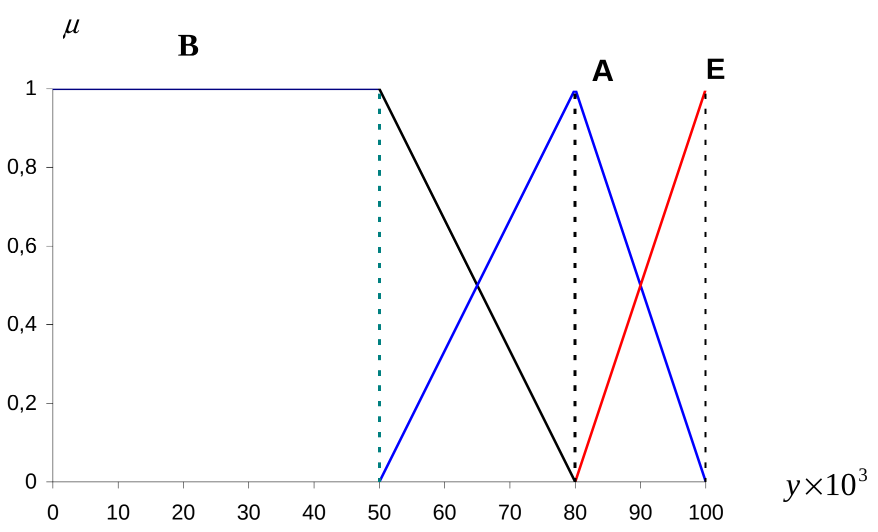


Figura 4.2 Niveles de la entrada cantidad de producto en stock

FUNCIÓN DE PERTENENCIA DE LA VARIABLE LINGÜÍSTICA CANTIDAD DE PRODUCTO EN STOCK.

$$\mu_{CPS_B}(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 50,\\ \dfrac{80-y}{30}, & 50\le y\le 80.\end{cases}$$

$$\mu_{CPS_A}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-50}{30}, & 50\le y\le 80,\\ \dfrac{100-y}{20}, & 80\le y\le 100.\end{cases}$$

$$\mu_{CPS_E}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-80}{20}, & 80\le y\le 100.\end{cases}$$

Dominio de trabajo de la variable de salida acción de inventario.

Para determinar el dominio de trabajo de esta variable se tomó en cuenta que el inventario puede ser disminuido o reabastecido y los valores que se toman están dentro de una escala de porcentaje.

$$U_{CPS}=\{z \mid -50\le z\le 50\}$$

ACCIÓN DE INVENTARIO

DG DM DP O μ RP RM RG

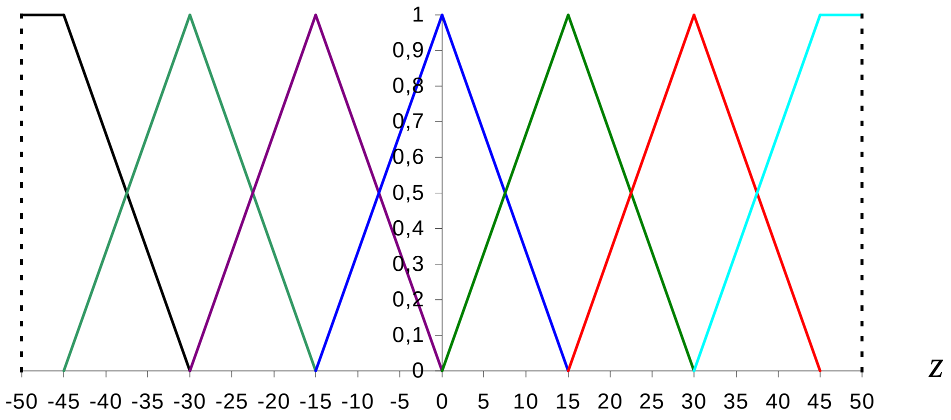


Figura 4.3 Niveles de la salida Acción de inventario

FUNCIÓN DE PERTENENCIA DE LA VARIABLE LINGÜÍSTICA ACCIÓN DE INVENTARIO

$$\mu_{AI_{DG}}(z)=\begin{cases} 1, & -50\le z\le -45, \\ \dfrac{-(30+z)}{15}, & -45\le z\le -30. \end{cases}$$

$$\mu_{AI_{DM}}(z)=\begin{cases} \dfrac{z+45}{15}, & -45\le z\le -30, \\ \dfrac{-(15+z)}{15}, & -30\le z\le -15. \end{cases}$$

$$\mu_{AI_{DP}}(z)=\begin{cases} \dfrac{z+30}{15}, & -30\le z\le -15, \\ \dfrac{-z}{15}, & -15\le z\le 0. \end{cases}$$

$$\mu_{AI_{O}}(z)=\begin{cases} \dfrac{z+15}{15}, & -15\le z\le 0, \\ \dfrac{15-z}{15}, & 0\le z\le 15. \end{cases}$$

$$\mu_{AI_{RP}}(z)=\begin{cases} \dfrac{z}{15}, & 0\le z\le 15, \\ \dfrac{30-z}{15}, & 15\le z\le 30. \end{cases}$$

$$\mu_{AI_{RM}}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-15}{15}, & 15\leq z\leq 30,\\ \dfrac{45-z}{15}, & 30\leq z\leq 45.\end{cases}$$

$$\mu_{AI_{RG}}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-30}{15}, & 30\leq z\leq 45,\\ 1, & 45\leq z\leq 50.\end{cases}$$

De acuerdo con la metodología del (CLD), debemos obtener las reglas inferenciales, por lo que nuestro modelo va a tener nueve reglas inferenciales; a continuación presentamos una lista de estas reglas.

Regla 1. Si la demanda disminuye, y la cantidad de producto en stock es baja, entonces la acción del inventario es no hacer nada.

Regla 2. Si la demanda disminuye, y la cantidad de producto en stock es adecuada, entonces la acción del inventario es realizar una disminución pequeña.

Regla 3. Si la demanda disminuye, y la cantidad de producto en stock es elevada, entonces la acción de inventario es realizar una disminución grande.

Regla 4. Si la demanda se mantiene, y la cantidad de producto en stock es baja, entonces la acción de inventario es realizar un reabastecimiento moderado.

Regla 5. Si la demanda se mantiene, y la cantidad de producto en stock es adecuada, entonces la acción de inventario es no hacer nada.

Regla 6. Si la demanda se mantiene, y la cantidad de producto en stock es elevada, entonces la acción de inventario es realizar una disminución moderada.

Regla 7. Si la demanda se incrementa, y la cantidad de producto en stock es baja, entonces la acción de inventario es realizar un reabastecimiento grande.

Regla 8. Si la demanda se incrementa, y la cantidad de producto en stock es adecuada, entonces la acción de inventario es realizar un reabastecimiento pequeño.

Regla 9. Si la demanda se incrementa, y la cantidad de producto en stock es elevada, entonces la acción de inventario es no hacer nada.

Tabla 4.2 Tabla de decisión

		CANTIDAD DE PRODUCTO EN STOCK		
		Baja (B)	**Adecuada (A)**	**Elevada (E)**
DEMANDA	**Disminuye (D)**	O	DP	DG
	Se mantiene (SM)	RM	O	DM
	Incrementa (I)	RG	RP	O

Siguiendo la técnica del (CLD), vamos a encontrar las lecturas de las dos variables de entrada, para lo cual se ha decidido aplicar la técnica del método Delphi explicada en el capìtulo 2 .

4.2.1 APLICACIÓN DEL MÉTODO DELPHI

Para el análisis se dispone lamentablemente solo de tres expertos quienes están relacionados con el manejo tanto del área de producción como del área de venta de esta fábrica.

El experto 1 (E_1) nos da el dato más cercano $a_1^1 = 68000$, el dato más probable $a_M^1 = 89000$ y el dato más lejano $a_2^1 = 121000$

El experto 2 (E_2) nos da el dato más cercano $a_1^2 = 70000$, el dato más probable $a_M^2 = 87000$ y el dato más lejano $a_2^{21} = 117000$

El experto 3 (E_3) nos da el dato más cercano $a_1^3 = 69000$, el dato más probable $a_M^3 = 85000$ y el dato más lejano $a_2^3 = 122000$

El dato dado por cada experto lo presentamos en forma de números triangulares.

$$A_1 = (68000, 89000, 121000)$$
$$A_2 = (70000, 87000, 117000)$$
$$A_3 = (69000, 85000, 122000)$$

Calcularemos el promedio difuso, la desviación estándar y la distancia difusa entre el promedio y los tres números difusos triangulares obtenidos.

Tenemos entonces que el promedio difuso es:

$$
\begin{aligned}
A_{pro} &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i \right) = \\
&= \left(\frac{1}{3}(68+70+69), \frac{1}{3}(89+87+85), \frac{1}{3}(121+117+122) \right) = \\
&= (69,\ 87,\ 120)
\end{aligned}
$$

La desviación estándar es:

$$
A_{pro} - A_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_1^j - a_1^i \ , \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_M^j - a_M^i \ , \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_2^j - a_2^i \right)
$$

$$
\begin{aligned}
A_{pro} - A_1 &= (-52,-2,52) \\
A_{pro} - A_2 &= (-48,0,50) \\
A_{pro} - A_3 &= (-53,2,51)
\end{aligned}
$$

Con estos resultados podemos ver que el experto 2 tiene una buena desviación estándar.

Para el cálculo de la distancia que existe entre el promedio y el número triangular entregado por cada experto necesitamos expresar los números triangulares anteriores en función de sus α-cortes que son:

$$A_{1(\alpha)} = [21\alpha + 68,121 - 32\alpha]$$

$$A_{2(\alpha)} = [17\alpha + 70,117 - 30\alpha]$$

$$A_{3(\alpha)} = [16\alpha + 69,122 - 37\alpha]$$

El promedio expresado mediante sus α-cortes es:

$$A_{pro(\alpha)} = [18\alpha + 69,120 - 33\alpha]$$

A continuación presentamos los gráficos correspondientes a las observaciones de cada experto y al promedio.

μ

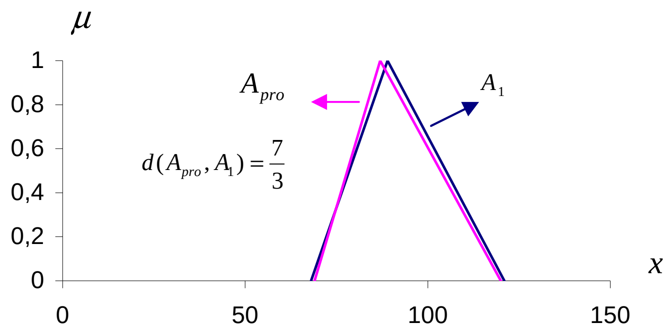


Figura 4.4 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_1 para la primera entrada

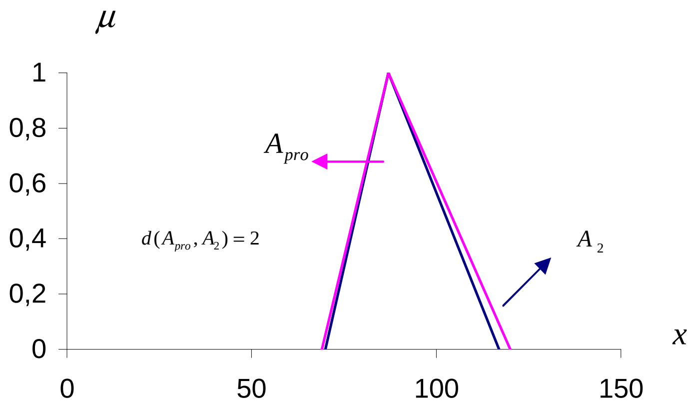


Figura 4.5 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_2 para la primera entrada

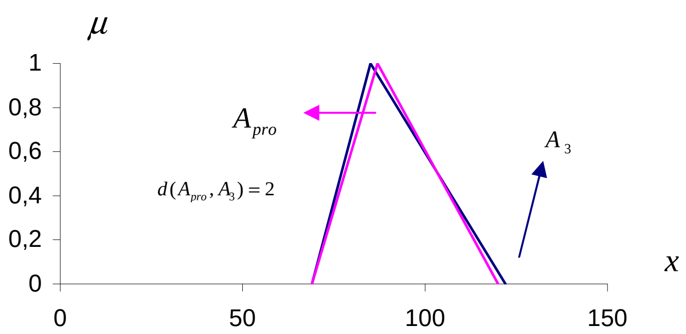


Figura 4.6 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_3 para la primera entrada

Como se puede ver en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 el experto 2 y el experto 3 tienen igual distancia al promedio, pero el experto 1 tiene una mayor distancia al promedio, estos resultados se envía a los expertos y ellos sugieren nuevos números triangulares.

$$B_1 = (68000, 88000, 121000)$$
$$B_2 = (70000, 87000, 120000)$$
$$B_3 = (69000, 86000, 121000)$$

$$B_{pro} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}(68 + 70 + 69), \frac{1}{3}(92 + 94 + 94), \frac{1}{3}(121 + 120 + 121) \right) =$$

$$= (69,\ 87,\ 120{,}67)$$

$$B_{pro}^{a} = (69{,}87{,}121)$$

Podemos ver que los dos promedios se encuentran cercanos, con estos resultados nosotros ya podemos tener una lectura de la demanda que sería $x_0 = 87$.

De igual forma se preguntó a los expertos con respecto a la variable cantidad de producto en stock y se obtuvieron los siguientes números difusos.

$$A_1 = (57000{,}84000{,}100000)$$
$$A_2 = (55000{,}83000{,}97000)$$
$$A_3 = (56000{,}85000{,}99000)$$

Calculamos nuevamente para estos datos el promedio difuso, la desviación estándar y la distancia difusa entre los tres números difusos triangulares obtenidos.

Tenemos entonces que el promedio difuso es:

$$A_{pro} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}(57 + 55 + 56), \frac{1}{3}(84 + 83 + 85), \frac{1}{3}(100 + 97 + 99) \right) =$$

$$= (56,\ 84{,}98.66)$$

$$A_{pro}^{a} = (56{,}84{,}99)$$

Desviación estándar

$$A_{pro} - A_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_1^j - a_1^i \ , \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_M^j - a_M^i , \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_2^j - a_2^i \right)$$

$$A_{pro} - A_1 = (-44{,}0{,}44)$$
$$A_{pro} - A_2 = (-43{,}1{,}44)$$
$$A_{pro} - A_3 = (-43{,}-1{,}43)$$

Con estos resultados podemos ver que el experto 1 tiene desde el punto de vista estadístico una buena desviación estándar, el experto 2 y el experto 3 no se encuentran muy alejados del promedio por lo que para poder tomar una decisión objetiva procedemos a calcular las distancias.

Los números difusos expresados mediante sus $\alpha - cortes$:

$$A_{1(\alpha)} = [27\alpha + 57{,}100 - 16\alpha]$$

$$A_{2(\alpha)} = [28\alpha + 55{,}97 - 14\alpha]$$

$$A_{3(\alpha)} = [29\alpha + 56{,}99 - 14\alpha]$$

El promedio expresado mediante sus $\alpha - cortes$:

$$A_{pro(\alpha)} = [28\alpha + 56{,}99 - 15\alpha]$$

A continuación presentamos los gráficos correspondientes a las observaciones de cada experto y al promedio.

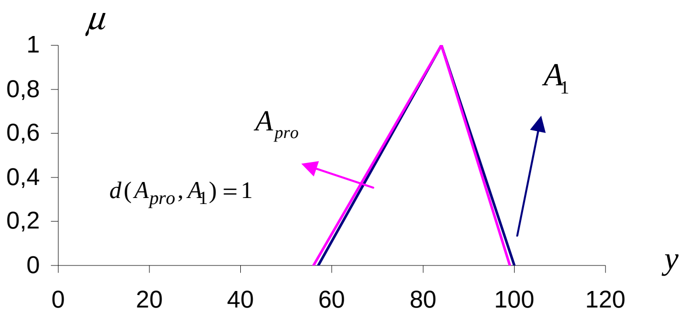


Figura 4.7 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_1 para la segunda entrada

μ

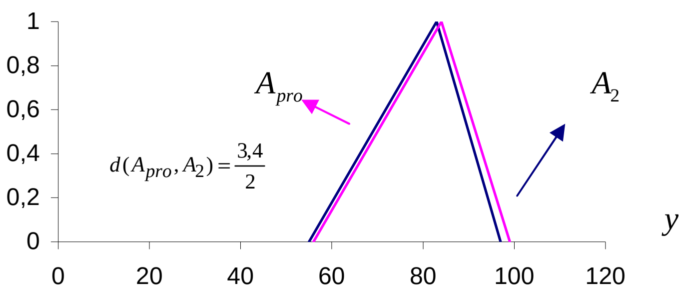


Figura 4.8 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_2 para la segunda entrada

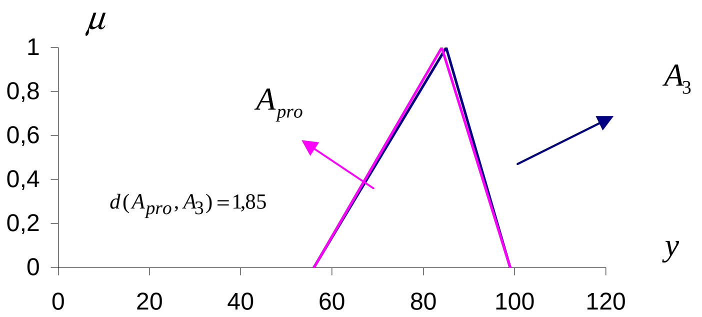


Figura 4.9 Distancia entre el promedio A_{pro} y el experto A_3 para la segunda entrada

Con el cálculo de las distancias vemos que el experto 1 se encuentra más cercano al promedio, estos resultados se envía a los expertos y ellos dan un nuevo número triangular.

$$B_1 = (57000{,}84000{,}100000)$$
$$B_2 = (55000{,}83000{,}98000)$$
$$B_3 = (56000{,}85000{,}99000)$$

y obtenemos un nuevo promedio difuso.

$$B_{pro} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}(57+55+56), \frac{1}{3}(84+83+85), \frac{1}{3}(100+98+99)\right) =$$
$$B_{pro} = (56,\ 84,\ 99)$$

Los promedios obtenidos son:

$$A^{a}_{pro} = (56,84,99)$$

$$B_{pro} = (56,84,99)$$

Después de la aplicación del método Delphi a las dos entradas tenemos las siguientes lecturas $x_0 = 87$ $y_0 = 84$. Estas lecturas son ubicadas en las funciones de pertenencia a las que corresponden y tenemos:

DEMANDA

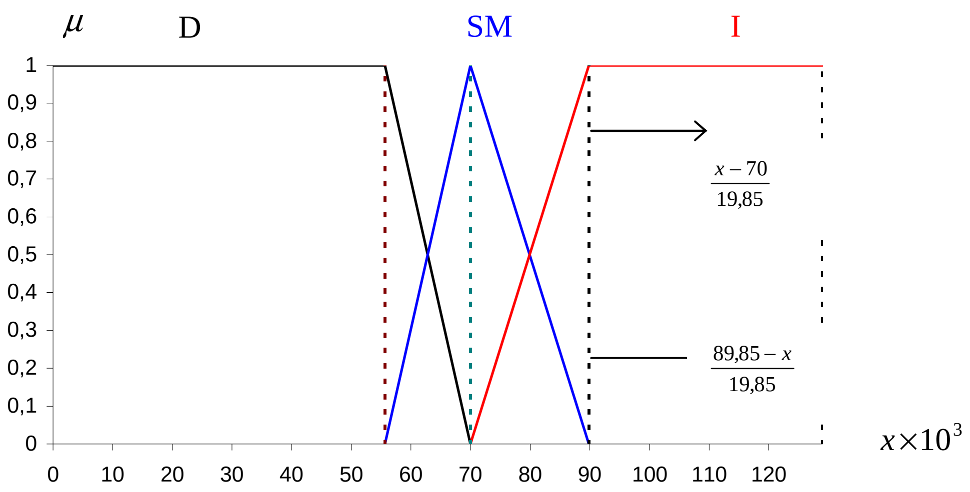


Figura 4.10 Entrada $x_0 = 87$ de la variable demanda

CANTIDAD DE PRODUCTO EN STOCK

μ **B** **A** **E**

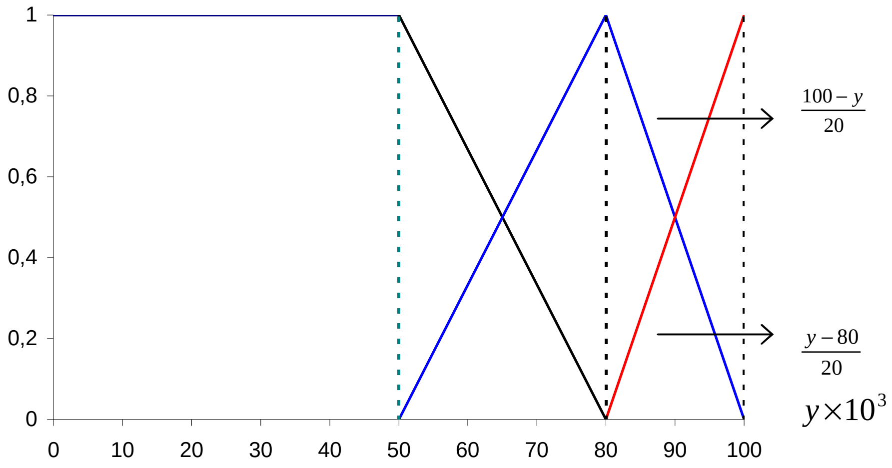


Figura 4.11 Entrada $y_0 = 84$ de la variable cantidad de producto en stock

Sustituyendo las lecturas en sus respectivas funciones de pertenencia tenemos:

$$\mu_{D_{SM}}(87) = \frac{89{,}85 - 87}{19{,}85} = 0{,}14$$

$$\mu_{D_I}(87) = \frac{87 - 70}{19{,}85} = 0{,}86$$

$$\mu_{CPS_E}(84) = \frac{84 - 80}{20} = 0{,}2$$

$$\mu_{CPS_A}(84) = \frac{100 - 84}{20} = 0{,}8$$

Tabla 4.3 Tabla de decisión inducida

	$\mu_{CPS_A}(84) = 0{,}8$	$\mu_{CPS_E}(84) = 0{,}2$
$\mu_{D_{SM}}(87) = 0{,}14$	$\mu_{AI_O}(z)$	$\mu_{AI_{DM}}(z)$
$\mu_{D_I}(87) = 0{,}86$	$\mu_{AI_{DP}}(z)$	$\mu_{AI_O}(z)$

Con estas cuatro reglas tenemos:

$\alpha_{11} = \mu_{D_{SM}}(87) \wedge \mu_{CPS_A}(84) = mín(0.14, 0.8) = 0.14$

$\alpha_{12} = \mu_{D_{SM}}(87) \wedge \mu_{CPS_E}(84) = mín(0.14, 0.2) = 0.14$

$\alpha_{21} = \mu_{D_I}(87) \wedge \mu_{CPS_A}(84) = mín(0.86, 0.8) = 0.8$

$\alpha_{22} = \mu_{D_I}(87) \wedge \mu_{CPS_E}(84) = mín(0.86, 0.2) = 0.2$

con lo cual elaboramos la siguiente tabla:

Tabla 4.4 Tabla de reglas fuertes

	$\mu_{CPS_A}(84) = 0,8$	$\mu_{CPS_E}(84) = 0,2$
$\mu_{D_{SM}}(87) = 0,14$	0.14	0.14
$\mu_{D_I}(87) = 0,86$	0.8	0.2

Ahora para el control de salida (CS) usaremos los resultados anteriores.

CS de la regla 1: $\alpha_{11} \wedge \mu_{AI_=}(z) = mín(0.14, \mu_{AI_O}(z))$

CS de la regla 2: $\alpha_{12} \wedge \mu_{AI_{DM}}(z) = mín(0.14, \mu_{AI_{DM}}(z))$

CS de la regla 3: $\alpha_{21} \wedge \mu_{AI_{DP}}(z) = mín(0.8, \mu_{AI_{DP}}(z))$

CS de la regla 4: $\alpha_{22} \wedge \mu_{AI_O}(z) = mín(0.2, \mu_{AI_O}(z))$

La agregación del control de salida nos indica que debemos superponer los trapezoides obtenidos del control de salida de cada regla anterior en el mismo sistema de coordenadas (z, μ).

En nuestro caso tenemos que las salida de la regla 1 está contenida en la salida de la regla 4, por lo que para la agregación vamos a considerar solo las reglas 2, regla 3, y regla 4.

$$\mu_{agg}(z) = máx\{\min(0.14, \mu_{AI_{DM}}(z)), \min(0.8, \mu_{AI_{DP}}(z)), \min(0.2, \mu_{AI_O}(z))\}$$

Gráficamente tenemos la siguiente función de pertenencia.

O

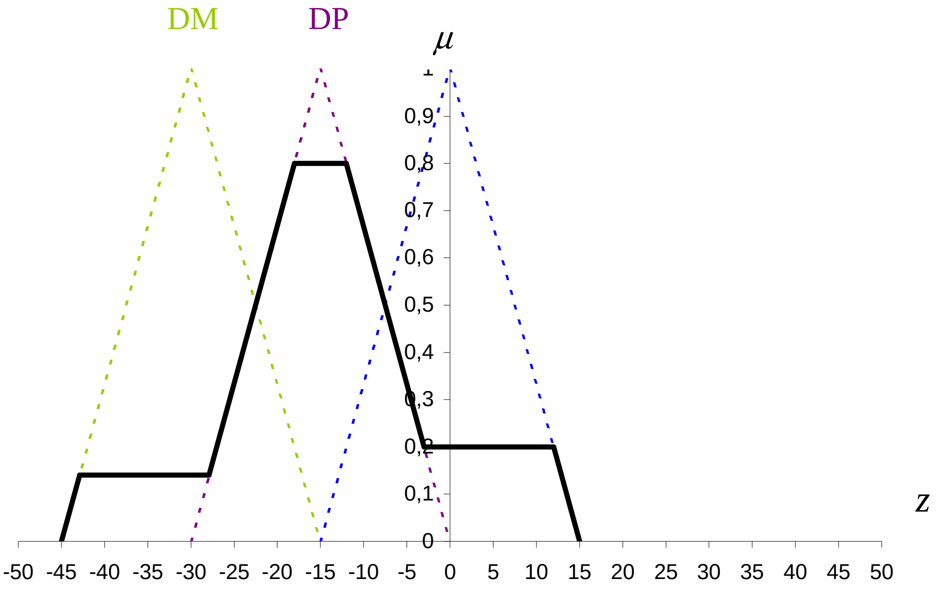


Figura 4.12 Salida agregada para la acción de inventario

Función de pertenencia

$$\mu_{agg}(z)=\begin{cases}\dfrac{z+45}{15}, & -45\le z\le -42{,}9,\\ 0{,}14, & -42{,}9\le z< -27{,}9,\\ \dfrac{z+30}{15}, & -27{,}9\le z\le -18,\\ 0{,}8, & -18\le z\le -12,\\ \dfrac{-z}{15}, & -12\le z\le -3,\\ 0{,}2, & -3\le z\le 12,\\ \dfrac{15-z}{15}, & 12\le z\le 15.\end{cases}$$

Ahora encontraremos los valores de la función de pertenencia de la agregación para los siguientes z_k

z_k	**-40**	**-35**	**-30**	**-25**	**-20**	**-15**	**-10**	**-5**	**0**	**5**	**10**
$\mu_{agg}(z_k)$	0,14	0,14	0	0,33	0,67	0,8	0,67	0,33	0,2	0,2	0,2

Con estos datos vamos a aplicar el Método de centro de área para eliminar la borrosidad.

$$\hat{z}_c = \frac{\sum_{k=1}^{q-1} z_k \mu_{agg}(z_k)}{\sum_{k=1}^{q-1} \mu_{agg}(z_k)}$$

$$\hat{z}_c = \frac{-40(0,14) - 35(0,14) - 30(0) - 25(0,33) - 20(0,67) - 15(0,8) - 10(0,67) - 5(0,33) + 0(0,2) + 5(0,2) + 10(0,2)}{(0,2)^3 + 0,33 + 0,67 + 0,8 + 0,67 + 0,33 + 0 + 0,14 + 0,14}$$

$$\hat{z}_c = -13,45 \quad \approx \quad -13$$

Método de media máxima

$$\hat{z}_m = \frac{\varsigma_1 + \varsigma_2}{2} = \frac{-18-12}{2} = -15$$

Método alto de eliminación de borrosidad

$$\hat{z}_h = \frac{p\frac{\varsigma_1 + \varsigma_2}{2} + q\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + r\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}}{p+q+r} =$$

$$= \frac{0,14\frac{-42,9-17,1}{2} + 0,8\frac{-18-12}{2} + 0,2\frac{-12+12}{2}}{0,14+0,8+0,2} =$$

$$\hat{z}_k = -14,21 \quad \approx \quad -14$$

Aplicados estos métodos hemos eliminado la borrosidad y obtuvimos tres resultados que están cercanos, vamos a trabajar con el valor obtenido del método alto de eliminación de borrosidad por ser el más completo; dicho esto debemos interpretar $\hat{z}_k = -14$ dentro de la variable acción de inventario teniendo en cuenta que ésta es expresada en porcentaje, como $\hat{z}$ es negativa entonces se debe realizar una disminución en el inventario. Tenemos que la cantidad de partes en stock al tiempo t_0 será denotada como $(CPS)_{actual}$ y usaremos el factor de ajuste $FA = 1 + \frac{\hat{z}}{100}$, para poder encontrar la cantidad de partes en stock $(CPS)_{nueva}$ con la siguiente fórmula:

$$(CPS)_{nueva} = (CPS)_{actual} \times FA$$

$$(CPS)_{nueva} = 84 \times \left(1 + \frac{-14}{100}\right)$$

$$(CPS)_{nueva} = 72{,}24$$

Con nuestro modelo hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Se debe realizar un pedido cuando se ha llegado a tener 72240 piezas en inventario.
- La cantidad de piezas que se van a producir debe ir aumentando gradualmente hasta volver a tener la base de 100000 piezas.
- El colchón de seguridad de la empresa ha sido fijado para nuestro modelo con 50000 piezas en stock.

4.3 APLICACIÓN DEL MODELO DE TAMAÑO DE LOTE ECONÓMICO BÁSICO PARA LA FABRICA TECN.IN.

4.3.1 DESCRIPCIÓN E IDENTIFICACIÓN DE LA DEMANDA

A continuación se va a identificar el comportamiento de la demanda en la empresa, los datos de las ventas de la empresa se encuentran en la tabla 4.1. Estos datos son los únicos registros disponibles en la empresa, los administrativos de ésta, indican tener un inventario de seguridad muy grande, es decir no reportaron ruptura de stock, por esta razón, estos datos suponemos iguales a la demanda, al no tener otra información más adecuada.

A continuación presentamos el gráfico de dispersión de los datos resumida en la tabla 4.5:

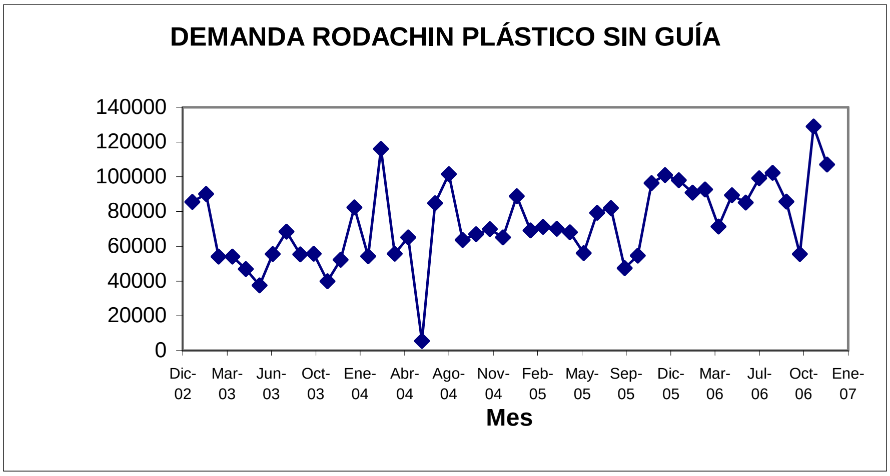


Figura 4.13 Demanda a través del tiempo

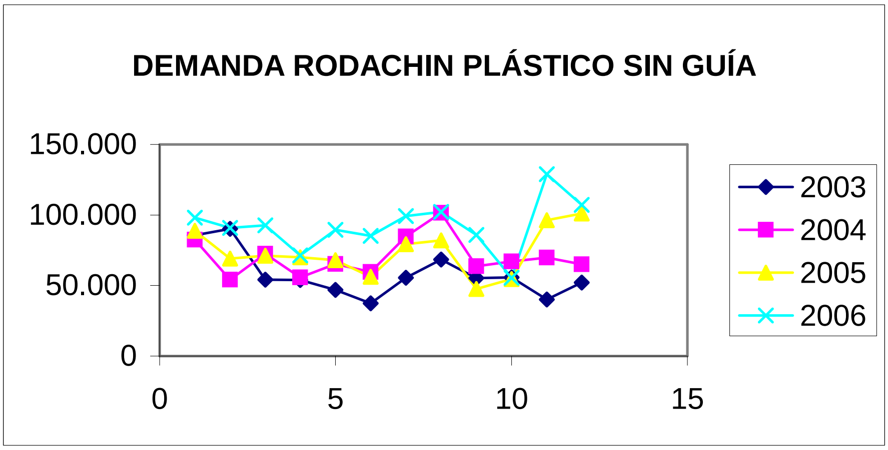
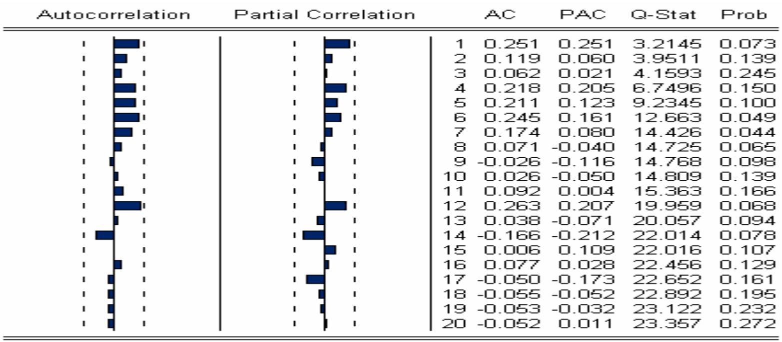


Figura 4.14 Demanda por Año

En la figura 4.13 se pueden visualizar los datos de la demanda a través de los cuatro años disponibles y además se realizó un gráfico adicional mostrado en la figura 4.14 que describe la misma variable, pero en esta ocasión los cuatro años superpuestos, con el fin de encontrar alguna tendencia o estacionalidad en la demanda.

El siguiente paso es hallar la función de auto correlación y de correlación parcial, utilizamos el programa Eviews, que mostró los siguientes resultados presentados en la figura 4.15:



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.251	0.251	3.2145	0.073
2	0.119	0.060	3.9511	0.139
3	0.062	0.021	4.1593	0.245
4	0.218	0.205	6.7496	0.150
5	0.211	0.123	9.2345	0.100
6	0.245	0.161	12.663	0.049
7	0.174	0.080	14.426	0.044
8	0.071	-0.040	14.725	0.065
9	-0.026	-0.116	14.768	0.098
10	0.026	-0.050	14.809	0.139
11	0.092	0.004	15.363	0.166
12	0.263	0.207	19.959	0.068
13	0.038	-0.071	20.057	0.094
14	-0.166	-0.212	22.014	0.078
15	0.006	0.109	22.016	0.107
16	0.077	0.028	22.456	0.129
17	-0.050	-0.173	22.652	0.161
18	-0.055	-0.052	22.892	0.195
19	-0.053	-0.032	23.122	0.232
20	-0.052	0.011	23.357	0.272

Figura 4.15 Función de Auto Correlación y de Correlación Parcial

Al ver estos resultados concluimos que la variable no podría ser explicada por si misma, es decir no podría ajustarse con una serie ARIMA – SARIMA.

En consecuencia trataremos de ajustar un modelo lineal, por el método de los mínimos cuadrados, obteniendo los siguientes resultados presentados en la tabla 4.5:

Tabla 4.5 Resultados de Ajuste Lineal

Method: Least Squares
Sample: 2003:01 2006:12
Included observations: 48

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	53250.80	5936.825	8.969575	0.0000
SER02	817.5695	210.9337	3.875955	0.0003

R-squared	0.246186	Mean dependent var	73281.25
Adjusted R-squared	0.229799	S.D. dependent var	23068.58
S.E. of regression	20245.24	Akaike info criterion	22.71000
Sum squared resid	1.89E+10	Schwarz criterion	22.78797
Log likelihood	-543.0400	F-statistic	15.02302
Durbin-Watson stat	1.918587	Prob(F-statistic)	0.000335

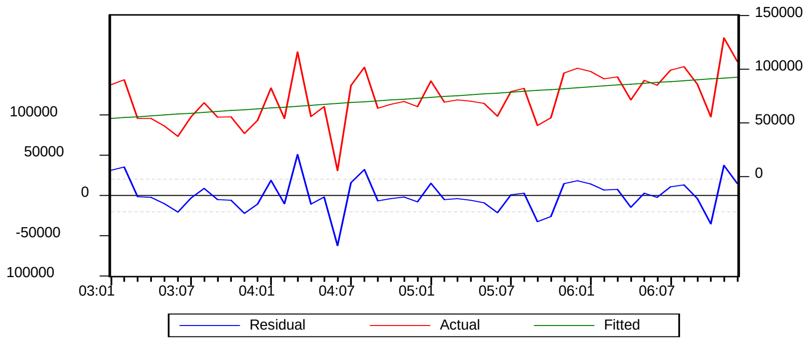


Figura 4.16 Ajuste lineal para la Demanda

$$\boxed{\text{DEMANDA} = 53250.80 + 817.5695 * \text{TIEMPO}}$$

El gráfico de este modelo conjuntamente con sus residuos se muestra en la figura 4.16 .

Como podemos observar, en la tabla 4.5 tenemos que R = 0.229799, esto nos indica que el 22% de la variable estaría explicada por el modelo, esto nos conlleva a descartar el modelo.

El análisis anterior nos muestra que en este caso la demanda indica una acumulación desordenada de pedidos de los clientes y por lo general será muy difícil y costoso modelar el proceso o procesos aleatorios que generan tal demanda. Es debido a esto que en la práctica las distribuciones de demanda se aproximan mediante una distribución normal.

4.3.2 OPTIMIZACIÓN DEL MANEJO DE INVENTARIO DE LA EMPRESA

Vamos a considerar los datos del año del 2006 y a simular el manejo de inventario que comúnmente realiza la empresa, los administrativos de la empresa nos entregaron la información y los costos fueron calculados por nosotros, como se puede ver en el anexo; ya que no poseían un sistema de costeo, que nos ayude a deducir el costo anual de mantener el inventario.

La tabla 4.7 describe en números como se procedía en el manejo de la producción, en lo posible se trataba de que ésta sea de un máximo de 210000 unidades cada mes, cuando no se producía esto, inmediatamente se realizaba una orden de producción para alcanzarlo.

PRODUCCIÓN = 210000 – DEMANDA

COSTO DE MANTENER INVENTARIO = INVENTARIO * COSTO DE MANTENER INVENTARIO UNITARIO

Se utilizaron los costos hallados en el Anexo 2 y 3; resumidos en la tabla 4.7 :

Tabla 4.6 Costos de Inventario

Costo Unitario del Mantenimiento Inventario	0,012224054
Costo Orden Mensual	16,1588056
Costo de Venta	0,16

Tabla 4.7 Simulación del Manejo de Inventario de la Empresa

SIMULACIÓN DEL MANEJO DE INVENTARIO DE LA EMPRESA							
Mes	Producción	Demanda	Inventario	Inventario Promedio Producción	Costos De Producción	Costo de Orden	Costo de Mantener Inventario
	210.000,00						
1	89.500,00	89.500,00	120.500,00	44.750,00	699,64	16,16	1.883,95
2	90.200,00	90.200,00	119.800,00	45.100,00	705,11	16,16	1.873,00
3	90.900,00	90.900,00	119.100,00	45.450,00	710,58	16,16	1.862,06
4	92.700,00	92.700,00	117.300,00	46.350,00	724,66	16,16	1.833,92
5	96.400,00	96.400,00	113.600,00	48.200,00	753,58	16,16	1.776,07
6	98.000,00	98.000,00	112.000,00	49.000,00	766,09	16,16	1.751,06
7	99.200,00	99.200,00	110.800,00	49.600,00	775,47	16,16	1.732,29
8	101.000,00	101.000,00	109.000,00	50.500,00	789,54	16,16	1.704,15
9	101.600,00	101.600,00	108.400,00	50.800,00	794,23	16,16	1.694,77
10	102.300,00	102.300,00	107.700,00	51.150,00	799,70	16,16	1.683,83
11	107.100,00	107.100,00	102.900,00	53.550,00	837,22	16,16	1.608,78
12	129.000,00	129.000,00	81.000,00	64.500,00	1.008,42	16,16	1.266,39
	1.197.900,00	1.197.900,00	1.322.100,00	598.950,00	9.364,24	193,91	20.670,27
		99.825,00				TOTAL	20.864,17

Al ver la magnitud de los costos de los pedidos y los costos de la tenencia, nos indica que se podría llevar un mejor trabajo en el manejo del inventario. Además el costo de mantenimiento aumenta conforme aumentan los pedidos que se realizan. Al estar convencidos de obtener un costo total menor, determinamos la cantidad de los pedidos por medio de la fórmula de tamaño de lote económico:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * D * S}{I * C}} = \sqrt{\frac{2 * 1197900 \quad * 60,60}{0,01563442 \quad 1 * 0,16}} = 124402,473$$

Entonces el número de pedidos por año sería :

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \frac{1.197.900, \quad 00}{124402 \quad .4738} = 9,629 \text{ pedidos por año}$$

$$t = \frac{12}{9,6} = 1,25 \quad \text{meses entre pedidos}$$

Como la demanda no permanece constante en el futuro y es muy caótica como se vio en la descripción de la demanda 4.3.1; vamos a aproximar ésta a una distribución normal, teniendo el análisis descriptivo de la variable en la figura 4.17

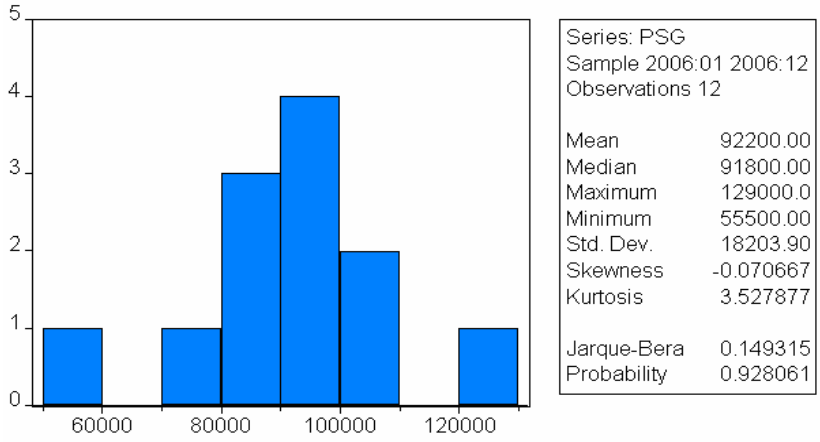


Figura 4.17 Análisis Descriptivo para la Demanda

A continuación vamos a hallar el punto de orden con la siguiente fórmula expuesta en el capítulo 3, para demanda probabilística.

$$PRO = E[D] * L_T + z_{X\%} * \sqrt{L_T} * \sigma_D$$

D : **DEMANDA DEL PERÍODO(UNIDADES / T)**	σ_D : **DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA DEMANDA**	L_T : **TIEMPO DE ESPERA DEL PROVEEDOR(T)**
Datos supuestos igual a las ventas, ya que se reporta no haber tenido rupturas de stock	Se la calcula con datos de la demanda	En este caso al ser una empresa de producción y no comercialización, el tiempo de espera del proveedor se igualo al tiempo de producción de la empresa, o tiempo de respuesta de un pedido tomada igual a medio mes.

$$PRO = 92200 * \frac{1}{2} + 1.7 * \sqrt{\frac{1}{2}} * 18203.90 = 67982.57$$

$$SS = 21882.57$$

En consecuencia, nuestra caja de reglas está completa y puede resumirse así:

1. En pedir 124403 cuando se llega al punto de volver a hacer pedidos.
2. La cantidad en que se vuelven a hacer pedidos será aproximadamente $9{,}6$ veces al año.
3. El punto en que se vuelven a hacer pedidos:

$PRO = 67983$ unidades

y las existencias de reserva $SS = 21883$ unidades

4.3.3 TABLA DE SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE INVENTARIO LOTE ECONÓMICO

Se generaron 12 valores aleatorios para la demanda de la empresa, considerando la media y la varianza, se obtuvieron los siguientes datos.

1	**ENERO**	86735
2	**Febrero**	68941
3	**Marzo**	96646
4	**Abril**	115437
5	**Mayo**	114015
6	**Junio**	123750
7	**Julio**	52450
8	**Agosto**	87937
9	**Septiembre**	112134
10	**Octubre**	61428
11	**Noviembre**	79636
12	**Diciembre**	53426

Ahora simularemos el manejo de inventario, considerando las observaciones simuladas para la demanda, los resultados se presentan en la tabla 4.8

Tabla 4.8 Simulación de Pedidos Mensuales Generados Aleatoriamente

Mes	E. D.		Salidas	Artículos Pedidos	Artículos Recibidos
0	124403				
0,65	67983			124403	
1	37668		86735		
1,15	24658	149061			124403
2	93130		68941		
2,38	67983			124403	
2,88	35225	159628			124403
3	120887		96646		
3,46	67983				
3,96	10064	134467			124403
4	129853		115437		
4,45	67983			124403	
4,95	21539	145942			124403
5	140241		114015		
5,54	67983			124403	
6	16491		123750		
6,04	737	125140			124403
7	88444		52450		
7,23	67983			124403	
7,73	24250	148653			124403
8	124910		87937		
8,51	67983			124403	
9	12776		112134		
9,01	11655	136058			124403
10	75751		61428		
10,1	67983			12440	
10,6	27969	152372			124403
11	120518		79636		
11,98	67983			124403	
12	67092				
12,48	41447	165850			124403

E.D.:	Existencias Disponibles
	Articulos Recibido
	Articulos Pedidos

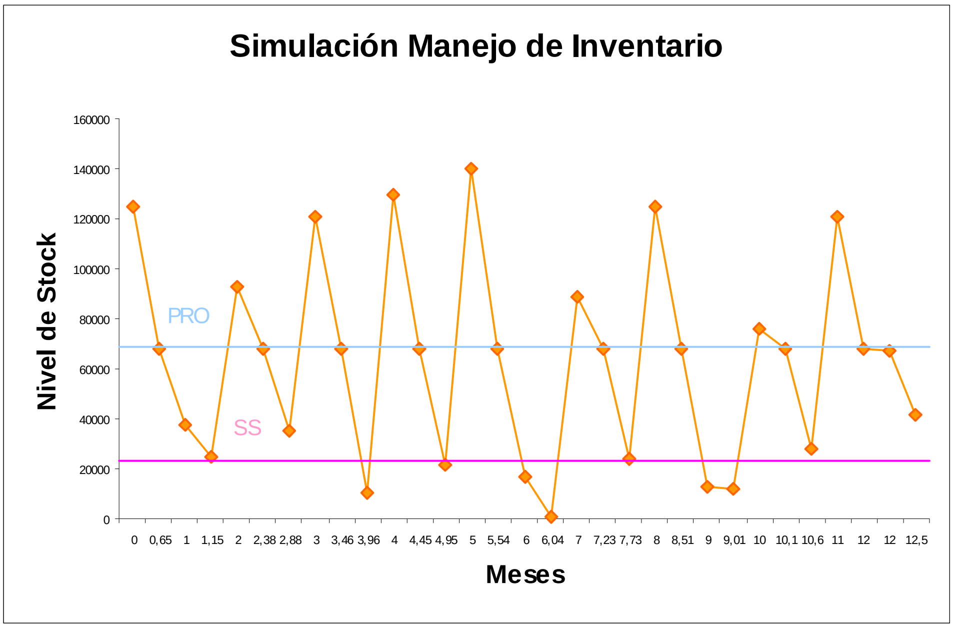


Figura 4.18 Resultado de la simulación con ciclos de pedidos mensuales

4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En los dos modelos anteriormente aplicados se concluye que existe una sobrepoblación de piezas en stock, es así que la decisión de bajar el nivel de inventario es imperante, los resultados y los requisitos de datos están resumidos de la siguiente manera.

MODELO DE CONTROL LÓGICO DIFUSO

Requisito de Datos

- Datos de las ventas realizadas en el pasado para poder realizar la predicción de la demanda y encontrar el dominio de trabajo.
- Investigación profunda de la forma en que se maneja el nivel actual de inventario de la empresa.
- Opinión de expertos conocedores del tema de control de inventario y ademàs conocedores del manejo actual que existe en la empresa.

Nivel de Conocimiento

- Conjuntos y números difusos.
- Lógica difusa
- Control lógico difuso.
- Control de inventario.
- Método Delphi difuso

Resultados

1. El modelo nos sugiere que el inventario se debe reducir en un 14% es decir que cuando el inventario sea de alrededor de 72240 piezas se debe enviar la orden de producción.
2. La cantidad que se debe producir está sujeta a las actuales condiciones que presenta la empresa, ya que ella produce actualmente 40000 rodachines por semana.
3. El colchón de seguridad que tenemos con este modelo es de 50000 piezas en stock.

MODELO LOTE ECONOMICO PROBABILIZADO

Requisito de Datos

- Registros de la demanda que ayudan a calcular los valores estadísticos relacionados con las variables del modelo
- Sistema de costeo complejo y detallado para costos de mantenimiento de inventario

Nivel de Conocimiento

- Modelos pronóstico
- Estadística básica
- Contabilidad básica y de costos

Resultados

Pedir 124403 unidades cuando se llega a un nivel de inventario de 67983, además de mantener 21883 unidades de existencias de reserva.

Al comparar los resultados nos podemos dar cuenta que el punto de orden para los dos modelos es muy similar, indicándonos que el análisis por estos dos métodos nos lleva a las mismas conclusiones pero por diferentes caminos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Y

RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

- El modelo del lote económico nos garantiza tener un nivel de servicio del 95 %, es decir hay un 5 % de probabilidad de que haya una ruptura de stock, y que no sea posible surtir a los clientes adecuadamente. Para el modelo lógico difuso por este lado es más flexible y podrá a fin de cuentas mostrar un nivel de servicio superior al momento de responder a un pedido.

- Para el modelo del lote económico es necesario tener disponibles registros históricos de la demanda y además un buen sistema de costeo, al no disponer de estos datos se dificulta la aplicación de este modelo o cuando existe total incertidumbre al lanzar un nuevo producto. Este inconveniente no se presenta para el modelo lógico difuso que al utilizar el método delphi puede hallar valores estimados basados en opiniones o en base a aproximaciones.

- El modelo de control lógico difuso se ajusta muy bien a las necesidades de la empresa ya que trabaja con los supuestos actuales de la empresa; es decir, no supone cosas que no ocurre en la misma, lo cual es ventajoso ya que con los modelos clásicos primero se deben cumplir los supuestos para que el modelo sea aplicado.

- Este modelo puede ser actualizado constantemente ya que las variables tanto de entrada como de salida pueden ser cambiadas en su dominio de trabajo para obtener resultados acordes con la realidad de la empresa, a demás la facilidad de poder incluir variables hace que este modelo pueda ser ampliado en su estudio, sin tener que cambiar en si el contexto del modelo.

- La facilidad de cálculos en este modelo hace que éste pueda ser implementado en la empresa con un costo menor al de implementar otros modelos que requieren un sistema de costeo para poder ser elaborados.

- ❖ En lo referente a costos, una desventaja del modelo lógico difuso, es que el experto en esta investigación, podría presentar costos excesivos para implementarlo, que no encuentren justificación al comparar con los costos de mantener el inventario, si bien es cierto el modelo de lote económico requiere de más datos y de un sistema de costeo, estos casi siempre suelen estar disponibles en una empresa, además el nivel de conocimiento es más bajo representando así un menor esfuerzo en implementarlo.

- ❖ Los dos modelos deben ser innovados de acuerdo a la variación de la demanda, todo dependerá de la respuesta del mercado, en este sentido cada cierto tiempo hay que reajustar los modelos dependiendo a la magnitud de esta variación.

5.2 RECOMENDACIONES

- ❖ Para complementar el estudio se debe calcular el beneficio económico que representaría la aplicación de los dos diferentes modelos expuestos en este trabajo, de tal forma que se justifique cuantitativamente la implementación de estos y escoger uno de ellos.

- ❖ Con la finalidad de complementar el análisis anterior, se debe tomar en cuenta el resto de productos inmersos en la producción de la fábrica, aunque la demanda de estos no es muy considerable, podría ser un límite al tratar de optimizar el nivel de inventario.

- ❖ Para facilitar a las personas encargadas de llevar el control de estos inventarios, es necesario realizar una hoja de cálculos o un programa de fácil uso en el cual se puedan registrar las variantes de la demanda a través del tiempo, de esta manera asegurar que este control de inventario sea a largo plazo.

- Para la implantación del modelo lógico difuso se recomienda tener la opinión de mayor cantidad de expertos, para así poder tener un análisis más eficiente del pronóstico de la demanda.

- Se recomienda implementar un sistema de costeo que ayude a controlar de mejor manera los ingresos y egresos que se producen en la empresa, sin mencionar que esto ayudaría en gran parte a la implementación de un control de inventario ya sea este con el modelo clásico o con el modelo de control lógico difuso.

- Se recomienda incluir un mayor número de variables en el modelo de control lógico difuso que ayuden a los administrativos a tener una idea más clara del control de inventario.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Timothy J. Ross, "Fuzzy Logic with Engineering Application", Published by john Wiley & Sons. Ltd, June 2005.

2. Georje Bojadziev y Marìa Bojadziev, "Fuzzy Logic for Business, Finance and Management", Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1997.

3. Hillier Frediricks, "Métodos Cuantitativos para Administración", editorial LIMUSA, México, 1995.

4. Hans G. Daellenbach, Jhon A. George y Donald C. McNickle, Introducción a las Técnicas de Investigación de Operaciones, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. Mèxico, 1986.

5. Antonio Morillas Raya, "Introducción al Análisis de Datos Difusos", Apuntes, Universidad de California en Berkeley, 1993.

6. Maria Agusta Gandara, Proyecto previo a la obtención del título de Ing. Matemática, Julio 2005.

7. Warren Alvaro, Roberto Cavaría "Introducción al Control Mediante la Lógica Difusa", Documento publicado en el Internet, Universidad de Costa Rica, 2003.

8. Josefa Mula Bru, Raúl Poler Escoto, José Pedro García Sabater, "Aplicación de la Teoría de los Conjuntos Difusos en la Planificación de la Producción ", Documento publicado en el Internet, VIII Congreso de Ingeniería de Organización Leganés, 9 y 10 de septiembre de 2004.

ANEXOS

ANEXO 1

CÁLCULO DE LOS CUARTILES

Los cuartiles son los percentiles 25,50,75, los que son denotados por $Q_1, Q_2, Q_{3.}$ El percentil p es el valor tal que el p% de los datos le son menores o iguales y el (100-p)% le son mayores o iguales; por ejemplo la mediana es igual al percentil 50. Al igual que para estimar la mediana existen muchas formas de estimar un percentil; la manera que adoptaremos es la siguiente:

Primero, ordenamos los datos en forma ascendente y luego calculamos el valor $r = \frac{p(n+1)}{100}$, entonces:

- Si el valor r es entero, tomaremos como el percentil p a la observación que se encuentra en el puesto r.
- Si el valor r no es entero, buscamos el entero k tal que, $k < r < (k+1)$, y tomamos como el percentil p al promedio de las observaciones que se encuentran en los puestos k y $k+1$.

Ahora podemos ver claramente la definición de cada uno de los cuartiles.

- ❖ El primer cuartil, Q_1, es el valor tal que el 25% de los datos de la muestra le son menores o iguales, y el 75% restante, le son mayores o iguales; es conocido como es cuartil inferior.
- ❖ El segundo cuartil Q_2, es la mediana.
- ❖ El tercer cuartil, Q_3, es el valor tal que el 75% de los datos de la muestra le son menores o iguales, y el 25% restante, le son mayores o iguales, se lo conoce también como el cuartil superior.

Con esta pequeña introducción procedemos al cálculo de los cuartiles que necesitamos para establecer entre qué valores se encontrará la función de pertenencia de la variable demanda.

A continuación presentamos el cuadro en el cual se encuentran ordenados los datos de las ventas de la fábrica en forma ascendente.

Datos de ventas ordenados en forma ascendente

37500	55700	70100	90200
40000	55800	71200	90900
46900	56000	71300	92700
47500	56100	79200	96400
52200	63600	82000	98000
54000	65100	82400	99200
54100	65200	84800	101000
54200	67000	85100	101600
54700	68000	85600	102300
55300	68500	85800	107100
55500	69200	88800	116100
55600	69900	89500	122900

Para el cálculo del primer cuartil $p = 25$ y $n = 48$ por lo que $r = \frac{25(48+1)}{100} = 12{,}25$ como r no es entero buscamos el entero k tal que, $k < r < (k+1)$, entonces $k = 12$ y $k+1 = 13$, las observaciones que se encuentran en estos puestos son 55600 y 55700 respectivamente entonces el percentil p corresponde al promedio de éstas que es 55650 por lo que $Q_1 = 55650$.

Sabemos que el segundo cuartil es la mediana entonces tenemos $r = \frac{50(48+1)}{100} = 24{,}5$ nuevamente r no es entero entonces usando la fórmula escrita anteriormente tenemos que $k = 24$ y $k+1 = 25$, el promedio de las observaciones que se encuentran ubicadas en estos puestos es 70000 por lo que $Q_2 = 70000$.

Ahora con $p = 75$, $r = \frac{75(48+1)}{100} = 36,75$ r no es entero entonces $k = 36$ y $k + 1 = 37$, el promedio de las observaciones que se encuentran ubicadas en estos puestos es 89850 y el $Q_3 = 89850$.

ANEXO 2

COSTOS DE ALMACENAJE

COSTOS FIJOS	Asignación	Costo anual en dólares
Personal -Bodeguera	100%	2342,52
Vigilancia y Seguridad	30%	702,756
Mantenimiento del Almacén	30%	702,756
Gastos financieros de inmovilización	Presupuesto Anual 37255,51	2980,4408
COSTOS VARIABLES		
Energía		9600,00
Agua		2400,00
TOTAL ANUAL		**18728,4728**
COSTO UNITARIO DE MANTENER INVENTARIO		**0,012224054**

ANEXO 3

COSTO DE PONER UNA ORDEN

Se encontró en la empresa que hay una persona, el gerente de operaciones, que se encarga al final de la semana en resumir las ventas y en registrarlas, este reporte le toma más o menos dos horas, recurre a este reporte para calcular la orden de producción diaria. Por lo que se estimó el costo de orden, en dólares, de la siguiente manera:

Sueldo Anual	5817,17
Sueldo Mensual	484,764167
Sueldo x día	16,1588056
Sueldo x hora	2,0198507
Costo Orden Mensual	16,1588056