

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

REDUCCIÓN DE UN MODELO DE CONTROL ÓPTIMO DE
DINÁMICA POBLACIONAL MEDIANTE TÉCNICAS POD.

PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE MATEMÁTICO.

CRISTHIAN ALEXANDER NÚÑEZ RAMOS
cris.alexandernunezr@gmail.com

Director: Pedro Martín Merino Rosero. Ph.D.
pedro.merino@epn.edu.ec

Quito. Abril 2015

Declaración de autoría.

Yo, **Cristhian Alexander Núñez Ramos**, declaro que soy el único autor del proyecto de titulación, previo a la obtención del título de Matemático, denominado: “Reducción de un Modelo de Control Óptimo de Dinámica Poblacional mediante Técnicas POD.”, y autorizo a la Escuela Politécnica Nacional para que hagan el uso que estimen pertinente con el mismo.

Para que así conste, firmo la presente a los 18 días del mes de Marzo del 2015.

Cristhian Alexander Núñez Ramos

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue realizado y desarrollado por **Cristhian Alexander Núñez Ramos**, bajo mi supervisión.

Pedro Merino. Ph.D.
DIRECTOR

DEDICATORIA

A mi padres, Angelita y Nelson.

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que forman parte de mi vida y me ayudaron a crecer como persona y matemático:

A mis papás, por siempre estar a mi lado y darme su corazón.

A mi hermano, por todo el tiempo compartido y su ayuda en varios aspectos de mi vida.

A Pedro Merino, mi director de tesis, por brindarme su tiempo en la realización de este proyecto.

A mi primo Andrés, por ser un compañero de lucha en el día a día.

A todas esas lindas personas que son mis amigos, por haber compartido un poco de sus vidas conmigo.

Resumen

La Biología Matemática utiliza técnicas analíticas y numéricas para el modelamiento de procesos biológicos. Tiene grandes aplicaciones teóricas y prácticas. Además, ésta nos ayuda al entendimiento de mecanismos complejos en el campo de la Biología. El desarrollo de herramientas y teorías matemáticas vinculadas a sistemas biológicos se debe a que históricamente existían complicaciones en la investigación animal y humana. Por ejemplo, la limitada capacidad de realizar cálculos y simulaciones de experimentos biológicos.

La aplicación de la matemática a la biología toma esencialmente dos caminos: por un lado, el uso de técnicas conocidas como el modelamiento de sistemas biológicos mediante EDP's y por otro lado, el desarrollo de nuevos métodos como la teoría de control para manipular de manera eficiente dichos sistemas. La dinámica de poblaciones ha sido tradicionalmente el campo predominante de la biología matemática. El trabajo en esta área se remonta al siglo XIX con las ecuaciones Lotka-Volterra.

El control óptimo es una teoría matemática que estudia problemas de optimización en varios sistemas ligados a la Biología, Economía, Física, Química, entre otras ciencias. Estos sistemas evolucionan en el tiempo y pueden ser influenciados por fuerzas externas. La resolución del problema de control óptimo nos da la información de como se comportan las variables de control. Es decir, nos indica las decisiones que debemos seguir para poder llevar un sistema de un estado inicial a otro final, de manera óptima.

La resolución de un problema de control óptimo gobernada por una ecuación diferencial parabólica requiere grandes recursos computacionales; por lo cual, en muchos casos resulta prohibitiva en aplicaciones prácticas debido al tiempo necesario para obtener resultados en computadoras convencionales. La disponibilidad de un modelo reducido subsana este limitante pues éste resulta factible de ser resuelto numéricamente con recursos computacionales limitados. No obstante, no solo es necesario contar con un modelo alternativo sino también con criterios que nos permitan apreciar la calidad de la solución obtenida.

El presente proyecto de titulación fué desarrollado con el fin de establecer un modelo reducido de optimización sujeto a la ecuación de Fisher, la cual es una ecuación de reacción-difusión, que describe la evolución de una población en un territorio acotado. Primero se abordará analíticamente el problema de control óptimo y luego se utilizará técnicas POD: "Proper Orthogonal Decomposition" pues éstas permiten inferir un modelo natural de reducción. También se realizó un análisis del error a posteriori que permitirá diseñar un esquema automático.

La reducción del modelo será sujeta de estudio analítico y numérico. Se verificará que el esfuerzo de cálculo numérico para su resolución es menor que el modelo original, lo cual

es de gran beneficio para las aplicaciones prácticas.

Al final se mostrarán resultados obtenidos de las pruebas numéricas, los cuales garantizarán la eficiencia del modelo alternativo que se propone.

Palabras clave: Ecuación de Fisher. Proper Orthogonal Descomposition(POD). Error a Posteriori.

Abstract

Solving an optimal control problem governed by a parabolic partial differential equation requires many computational resources that in many cases could be prohibitive in practical applications, due to the time needed to get results in conventional computers. The availability of a reduced model overcomes this limitation since this problem can be solved using numerical methods with limited computational resources. However, not only is important to have an alternative model but also criteria that allow us to determine the quality of the obtained solution.

This project was developed in order to establish an optimization reduced model subject to the Fisher equation, which is of the type reaction-diffusion. It describes the population growth in a bounded area. First, we will approach analytically the optimal control problem. Then, we will use POD techniques, because these allow us to deduce a natural reduction model. We will also employ a posteriori error analysis for design a solution automatic scheme.

The reduction of the model will be studied and analyzed. We will verify that the numerical calculations are less than the original model, which is benefit for practical applications. Finally we will show some results about the numerical tests, which will assure the efficiency of the proposed alternative model.

Keywords: Fisher Equation. POD Techniques. Posteriori Error Analysis.

Índice general

Resumen	5
Lista de figuras.	9
Lista de tablas.	10
1. Control óptimo de la ecuación de Fisher.	13
1.1. Análisis cualitativo del modelo.	13
1.2. Análisis de la ecuación de Fisher.	14
1.3. Formulación del problema de control óptimo.	15
1.3.1. Formulación del funcional reducido.	16
1.4. Estudio de la existencia y unicidad del control óptimo.	17
1.5. Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad de primer orden.	22
1.5.1. Caracterización del control óptimo.	25
1.6. Condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden.	28
2. Resolución numérica del problema de control óptimo.	32
2.1. Método primal-dual de conjuntos activos.	32
2.2. Métodos de Galerkin y Euler implícito.	33
2.2.1. Aproximación numérica de la ecuación de estado.	35
2.2.2. Aproximación numérica de la ecuación adjunta.	37
2.2.3. Experimentos numéricos.	38
3. Error a posteriori para el control óptimo.	42
4. Reducción del modelo de control óptimo.	46
4.1. Método POD para la ecuación de Fisher.	46
4.2. Método POD discreto para la ecuación de Fisher.	48
4.2.1. Método de los snapshots. (Método de las capturas instantáneas)	49
4.3. Modelo reducido de control óptimo.	51
4.3.1. Base POD para el esquema reducido.	51
4.3.2. Ecuación de estado reducida.	53
4.3.3. Ecuación adjunta reducida.	55

5. Pruebas numéricas del modelo reducido.	58
5.1. Esquema numérico.	58
5.2. Experimentos numéricos del modelo reducido por POD.	60
5.3. Conclusiones y recomendaciones.	65
Anexos.	66
Bibliografía.	73

Índice de figuras

2.1. Triangulación utilizada para la método de elementos finitos.	38
2.2. Condición de densidad inicial.	39
2.3. Densidad poblacional deseada (constante) en el tiempo 1 segundo.	40
2.4. Aproximación del control óptimo utilizando la estrategia Primal-dual de conjuntos activos.	40
2.5. Aproximación del estado óptimo mediante el método de elementos finitos. .	40
2.6. Aproximación del estado adjunto mediante el método de elementos finitos.	41
5.1. Elemento de la base POD asociado al primer valor propio de la matriz de correlación.	61
5.2. Elemento de la base POD asociado al segundo valor propio de la matriz de correlación.	61
5.3. Decaimiento de los valores propios asociados a la matriz de correlación del método POD.	62
5.4. Reducción en la aproximación del control óptimo mediante POD.	63
5.5. Aproximación del estado óptimo reducido mediante POD.	63
5.6. Aproximación del estado adjunto reducido mediante POD.	63
5.7. Polinomio de Lagrange de grado 1 asociado al método de elementos finitos-Galerkin.	72
5.8. Cono tempo-espacial.	72

Índice de cuadros

3.1. Error a posteriori entre el control óptimo \bar{u} y su aproximación numérica $\tilde{u}^{h,\delta t}$ calculada mediante el Algoritmo 1.	45
5.1. Valores propios iniciales asociados a la matriz de correlación del método POD.	62
5.2. Tiempos de ejecución del Algoritmo 4 para diferentes números de elementos de la base POD.	64
5.3. Error a posteriori entre el control óptimo \bar{u} y su aproximación numérica \tilde{u}^l calculada mediante el Algoritmo 4.	64

Introducción

A lo largo de la historia, el ser humano ha causado desbalance en el medio ambiente por no saber explotar racionalmente los recursos naturales; de aquí la importancia de las teorías matemáticas como el control óptimo, para entender los fenómenos ecológicos de la dinámica poblacional de las especies. Mediante la modelización matemática podemos simular el control de ciertos procesos relacionados a este fenómeno: el crecimiento poblacional, sobrepoblación o extinción. En particular, es de interés por la complejidad de su naturaleza, el control óptimo asociado a una ecuación diferencial parcial (EDP) que describe dichos procesos que se dan en el medio ambiente.

La teoría de control interrelaciona el análisis matemático clásico de las ecuaciones diferenciales parciales, la optimización, el análisis numérico inmerso y su aplicabilidad en la comprensión de eventos de la naturaleza.

En aplicaciones reales, las EDP's que modelan los procesos físicos usualmente son no lineales, como por ejemplo lo que sucede en la ecuación del calor c.f. [13], en la cual la constante de difusión térmica realmente depende de la solución; en otros casos combinan diferentes operadores como en la ecuación de Fisher c.f. [17]. En el caso de la ecuación de Fisher, la no linealidad espacial es de tipo logístico y representa la dificultad que tiene una especie en reproducirse indefinidamente en un entorno cuando va consumiendo los recursos que la sustentan.

En este proyecto utilizaremos técnicas POD con el objetivo de reducir el cálculo de la aproximación del control óptimo para un problema de dinámica poblacional. La aproximación numérica del control óptimo se la calculará mediante la resolución de sistemas matriciales asociados a éste. El método POD nos permite disminuir el costo en la resolución de dichos sistemas lineales asociados a la variable espacial.

Capítulo 1

Control óptimo de la ecuación de Fisher.

1.1. Análisis cualitativo del modelo.

El modelo logístico de Fisher c.f.[17], el cual analizamos, describe el crecimiento de la población dado por una ecuación de reacción-difusión¹ que además considera un control de crecimiento poblacional u , que dependiendo de la naturaleza de la población puede ser interpretado de varias maneras: tasa de mortalidad, muerte provocada de la especie, la acción de recolección de los individuos de la población e incluso la incorporación artificial de nuevos miembros.

Este modelo toma en cuenta una cantidad inicial de individuos y_0 distribuida en un territorio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Otra de sus características es que limita el problema considerando un espacio acotado Ω , sobre el cual se dispersa la especie y un tiempo final T . El tiempo final representa el instante de tiempo hasta el que queremos conocer la densidad poblacional sobre los distintos puntos en el espacio Ω . También se considera que en la frontera de la región de dispersión las condiciones no se prestan para que exista especies vivas. Esta última característica es dada por las condiciones de Dirichlet homogéneas c.f.[13].

La ecuación diferencial parabólica de dinámica poblacional con condiciones de Dirichlet homogéneas, viene dada de la siguiente manera:

Modelo de Fisher:

$$y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right], \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.3)$$

donde las variables que intervienen en el sistema se interpretan como sigue:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es el espacio acotado sobre el cual la población varía: $x \in \Omega$ es la variable espacial.

¹**Difusión:** Fenómeno por el cual un grupo de partículas se mueve como grupo de acuerdo a la trayectoria irregular de cada una de ellas.

- $\partial\Omega$ es la frontera de Ω .
- $[0, T]$ es el intervalo de tiempo considerado, $T > 0$ y $t \in [0, T]$ es la variable temporal.
- $Q = (0, T) \times \Omega$ es el dominio del modelo. $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ es la frontera del mismo.
- $y = y(t, x)$ representa la densidad de la especie durante el tiempo t en el punto x .
- r es una constante positiva que se interpreta como la tasa natural de crecimiento de la especie.
- κ es un escalar mayor que cero que representa la capacidad límite de sostenibilidad de individuos en el espacio.
- γ es una constante positiva que simboliza la velocidad de dispersión de la especie sobre el espacio.
- u es el control que se interpreta como recolección o tasa de mortalidad inducida.
- Δ denota el operador diferencial elíptico laplaciano c.f.[7], el cual representa la difusión de la especie.
- y_t denota la derivada de y con respecto a t , el cual se entiende como la tasa de cambio en la densidad de la especie respecto al tiempo.

1.2. Análisis de la ecuación de Fisher.

En esta sección analizamos si la ecuación de Fisher tiene solución en algún espacio funcional adecuado y además se menciona algunos resultados de regularidad de la solución, los cuales son importantes en el análisis posterior del problema de control óptimo.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio tipo Lipschitz c.f.[7]; por comodidad en la escritura, usamos la siguiente notación para referirnos a los siguientes conjuntos c.f.[13]:

$$V := L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \text{ y } V^* := L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)).$$

$$W(0, T) = \{y \in V \mid y_t \in V^*\}.$$

El espacio $W(0, T)$ es un espacio de Banach c.f.[7] equipado de la siguiente norma:

$$\|y\|_{W(0, T)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|y'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Para analizar los espacios funcionales $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ y $W(0, T)$ a mayor profundidad se puede observar la cita bibliográfica c.f. [13]. Además U_{ad} denota al siguiente conjunto:

$$U_{ad} := \{u \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\}.$$

Al conjunto convexo $U_{ad} \subset L^\infty(Q)$ lo denominamos conjunto de controles admisibles c.f.[7].

A continuación introducimos lo que entendemos como solución débil de (1.1)-(1.3) a lo largo de este trabajo.

Definición 1. Una función $y \in W(0, T)$ se dice que es solución débil del problema (1.1)-(1.3) si satisface:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} v \, dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla y \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u y v \, dx - r \int_{\Omega} y \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right] v \, dx = 0, \quad (1.5)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ en casi todo $t \in (0, T)$.

La existencia y unicidad de la solución débil asociada a la EDP de Fisher son bien conocidas y vienen garantizadas en el siguiente teorema, en el cual, varios autores usan propiedades de convergencia débil o el teorema del punto fijo de Banach para su demostración. Para fines de consulta se puede revisar el trabajo desarrollado por S. Jijón c.f.[17] o Gunzburguer c.f.[14].

Teorema 1. Dados $u \in L^\infty(Q)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, existe una única función $y \in W(0, T)$ solución débil de (1.1)-(1.3), la cual verifica:

$$0 \leq y \leq \kappa, \quad (1.6)$$

donde $\kappa > 0$, es la constante de capacidad de sostenibilidad de la población.

Demostración. El operador de Nemytskii $\wp : H_0^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ definido como $z(\cdot) \mapsto \wp(z(\cdot)) := rz(\cdot) \left[1 - \frac{z(\cdot)}{\kappa} \right]$ c.f.[7] es localmente Lipschitz c.f. [17](Página 13, Lema 2). Por resultados conocidos [13](Página 500, Teorema 2) y [17](Páginas 18-19, Teorema 2) existe una única $y \in W(0, T)$ solución débil de (1.1)-(1.3) que satisface la condición de acotación (1.6). \square

En el desarrollo posterior de este capítulo es importante tener en cuenta resultados de regularidad respecto a la solución de la ecuación de Fisher. En general, los resultados de regularidad sujetos a ecuaciones diferenciales parciales se obtienen realizando hipótesis adicionales de los parámetros iniciales o condiciones de frontera.

Observación 1.

- Como $W(0, T) \hookrightarrow C(0, T, L^2(\Omega))$ c.f.[13], la solución débil de (1.1)-(1.3) pertenece a $C(0, T, L^2(\Omega))$.
- Si $y_0 \in L^p(\Omega)$ con p adecuado, la solución débil de (1.1)-(1.3) pertenece a $W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ c.f.[7](Página 267).
- Si $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, luego la solución débil de (1.1)-(1.3) pertenece a $C((0, T] \times \bar{\Omega}) \cap L^\infty(Q)$ c.f.[7](Página 268) más no necesariamente a $C(\bar{Q})$.

1.3. Formulación del problema de control óptimo.

En esta sección introducimos el problema de control óptimo asociado a la ecuación diferencial parcial descrita en la sección anterior. Analizamos el problema de control óptimo con funcional objetivo de tipo “Tracking” c.f.[7], el cual es cuadrático y dicha estructura ayuda a probar la existencia del mínimo. El objetivo es acercarnos a una densidad poblacional deseada, distribuida en Ω , que la representamos por y_Ω y que es elemento de $L^2(\Omega)$, a un tiempo final T . Para cumplir este propósito minimizamos dos cosas a la vez:

el cuadrado de la distancia en norma $L^2(\Omega)$ que existe del estado asociado con y_Ω junto con la norma en $L^2(Q)$ del costo u que conlleva realizar esta actividad. La importancia del modelo tiene que ver en que muchos algoritmos eficientes pueden ser utilizados para tratar numéricamente este caso, aunque para nuestro problema de optimización existe una mayor complejidad pues la ecuación diferencial asociada es semilineal c.f.[7], convirtiéndolo en un problema de control óptimo no convexo.

A lo largo de este trabajo de investigación se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado tipo Lipchitz c.f.[7], $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ y que $y_0 \in C(\bar{\Omega})$.

El problema de control óptimo semilineal a estudiar es el siguiente :

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(u,y)} J(u, y) := \frac{1}{2} \|y(T, \cdot) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \\ \\ \text{suje to a:} \\ \\ y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa}\right], \quad \text{en } Q, \\ y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \\ \\ u \in U_{ad}, \end{array} \right.$$

donde $\lambda > 0$ y J se minimiza sobre $U_{ad} \times W(0, T)$, con $U_{ad} = \{u \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\}$.

1.3.1. Formulación del funcional reducido.

Para el tratamiento sobre la existencia de valores óptimos para el modelo estudiado, desarrollado en la siguiente sección, es pertinente reescribir el problema de control óptimo como un problema de optimización solamente en términos de u .

Definimos el operador control-estado S c.f.[7], el cual asocia un elemento $u \in U_{ad} \subset L^\infty(Q)$ con un elemento $y \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ que es solución del sistema (1.1)-(1.3). Además, afirmamos que el operador S está bien definido; es decir, es una función de u gracias al **Teorema 1**.

El operador control- estado para el problema de control óptimo viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S : L^\infty(Q) &\longrightarrow W(0, T) \cap L^\infty(Q) & (1.7) \\ u &\mapsto S(u) := y. \end{aligned}$$

Notemos que S es no lineal debido a la no linealidad presente en la ecuación de estado. Además observemos que si reemplazamos $y = S(u)$ en el funcional de costo de **(P)** formulado en la sección anterior y lo notamos como f , nos queda el siguiente problema con funcional reducido:

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S(u)(T, \cdot) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \quad (1.8)$$

donde f se minimiza sobre el conjunto $U_{ad} = \{u \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\}$.

Notemos que la naturaleza no lineal del operador control-estado S en la expresión (1.8) implica que f no es necesariamente convexa a pesar de que J lo es.

A continuación, introducimos lo que entendemos como solución del problema **(P)** a lo largo de este trabajo:

Definición 2. Una función $\bar{u} \in U_{ad}$ se dice control óptimo del problema **(P)** si:

$$J(\bar{u}, S(\bar{u})) \leq J(u, S(u)), \quad (1.9)$$

para todo $u \in U_{ad}$.

1.4. Estudio de la existencia y unicidad del control óptimo.

A lo largo de la presente sección, discutimos dos cuestiones importantes de los problemas de control óptimo sujetos a ecuaciones diferenciales parciales que son: la existencia de un control óptimo y su caracterización por medio de las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

Observación 2.

- A pesar de que J es un funcional convexo, al ser la EDP asociada semilineal implica que perdamos la convexidad general del funcional reducido f respecto a u dado en (1.8). Es decir, el operador control-estado no es lineal respecto a u .

A continuación verificamos que el operador control-estado S , definido en (1.7), cumple con la propiedad de Lipschitz c.f.[8].

Teorema 2. Existe una constante $M > 0$ tal que para todo $u_1, u_2 \in L^\infty(Q)$ se verifica:

$$\|S(u_1) - S(u_2)\|_{W(0,T)} \leq M \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(Q)}. \quad (1.10)$$

Demostración. Sean u_1, u_2 elementos de $L^\infty(Q)$ y $y_1 = S(u_1), y_2 = S(u_2)$ sus respectivos estados asociados, los cuales cumplen:

$$y_{1t} - \gamma \Delta y_1 + u_1(t, x) y_1 = r y_1 \left[1 - \frac{y_1}{\kappa} \right], \quad \text{en } Q, \quad (1.11)$$

$$y_1(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.12)$$

$$y_1(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.13)$$

y

$$y_{2t} - \gamma \Delta y_2 + u_2(t, x) y_2 = r y_2 \left[1 - \frac{y_2}{\kappa} \right], \quad \text{en } Q, \quad (1.14)$$

$$y_2(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.15)$$

$$y_2(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega. \quad (1.16)$$

Restando las ecuaciones (1.14)-(1.16) de (1.11)-(1.13) respectivamente, se tiene que:

$$(y_1 - y_2)_t - \gamma \Delta (y_1 - y_2) - r (y_1 - y_2) + \frac{r}{\kappa} (y_1 - y_2) (y_1 + y_2) + u_1 y_1 - u_2 y_2 = 0, \quad \text{en } Q, \quad (1.17)$$

$$(y_1 - y_2)(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.18)$$

$$(y_1 - y_2)(0, x) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.19)$$

reescribimos la expresión (1.17) de una manera equivalente de la siguiente forma:

$$(y_1 - y_2)_t - \gamma \Delta (y_1 - y_2) - r (y_1 - y_2) + \frac{r}{\kappa} (y_1 - y_2) (y_1 + y_2) + y_2 (u_1 - u_2) + u_1 (y_1 - y_2) = 0. \quad (1.20)$$

Si llamamos $z = y_1 - y_2$, tenemos que:

$$z_t - \gamma \Delta z - r z + \frac{r}{\kappa} z (y_1 + y_2) + y_2 (u_1 - u_2) + u_1 z = 0, \quad (1.21)$$

donde obtenemos que z satisface la siguiente ecuación lineal:

$$z_t - \gamma \Delta z + \left[u_1 - r + \frac{r}{\kappa} (y_1 + y_2) \right] z = y_2 (u_2 - u_1), \quad \text{en } Q, \quad (1.22)$$

$$z(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.23)$$

$$z(0, x) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.24)$$

Nótese que por resultados de regularidad mencionados en la **Observación 1**, y_1 y y_2 son elementos de $L^\infty(Q)$. Consecuentemente $\left[u_1 - r + \frac{r}{\kappa} (y_1 + y_2) \right]$ pertenece a $L^\infty(Q)$ y además $y_2 (u_2 - u_1)$ también es un elemento de $L^\infty(Q)$.

La ecuación (1.22)-(1.24) es lineal respecto a z . Por resultados conocidos de acotación para EDP's lineales c.f.[13], se verifica lo siguiente:

$$\|z\|_{W(0,T)} \leq c_2 \|y_2 (u_2 - u_1)\|_{L^2(Q)}, \quad (1.25)$$

con $c_2 > 0$. Además se satisface que $\|u_2 - u_1\|_{L^2(Q)} \leq M_1 \|u_2 - u_1\|_{L^\infty(Q)}$ junto con $\|y_2\|_{L^\infty(Q)} \leq M_2$, para M_1 y M_2 constantes positivas.

Teniendo en cuenta que $z = y_1 - y_2 = S(u_1) - S(u_2)$ y las acotaciones anteriores, se infiere de (1.25) que:

$$\|S(u_1) - S(u_2)\|_{W(0,T)} = \|z\|_{W(0,T)} \leq M_3 \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(Q)}, \quad (1.26)$$

con $M_3 > 0$.

Finalmente, (1.26) implica que el operador control-estado S satisface la condición de Lipschitz. \square

Observación 3.

- El operador control-estado S satisface la condición de Lipschitz y por tanto es un operador continuo de $L^\infty(Q)$ en $W(0, T)$.

El siguiente teorema nos garantiza que el problema de optimización que estamos tratando tiene solución en U_{ad} .

Teorema 3. Si $y_0 \in C(\bar{\Omega})$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, entonces existe $\bar{u} \in U_{ad}$ tal que minimiza la función f dada en (1.8) y por tanto \bar{u} es un control óptimo para (P) .

Demostración. Como la función objetivo f está acotada inferiormente por cero, existe el ínfimo:

$$j := \inf_{u \in U_{ad}} f(u). \quad (1.27)$$

Por la definición de ínfimo, aseguramos que existe una sucesión minimizante $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U_{ad}$ tal que:

$$j = \lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k, S(u_k)). \quad (1.28)$$

Como U_{ad} es un conjunto convexo, cerrado y acotado de $L^\infty(Q)$ luego es compacto en la topología débil* de $L^\infty(Q)$ c.f.[8]. Por tanto, existe una subsucesión de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, que sin riesgo de confusión la notamos de la misma manera y $\bar{u} \in U_{ad}$ tales que u_k converge a \bar{u} en la topología débil* de $L^\infty(Q)$.

Como el operador control-estado S es continuo, se verifica que $S(u_k) \rightarrow S(\bar{u}) = \bar{y}$ en $W(0, T)$. Por el Teorema de Mazur c.f.[7], existe una combinación convexa de elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a la cual llamamos $v_k = \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i u_i$, con $\sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n_k$, tales que $v_k \rightarrow \bar{u}$ en $L^2(Q)$.

Demostremos que (\bar{u}, \bar{y}) minimiza J , para lo cual observamos que:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) = J(\bar{u}, \bar{y}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2} \|u_k\|_{L^2(Q)}^2, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i u_i \right\|_{L^2(Q)}^2, \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2} \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i \|u_i\|_{L^2(Q)}^2, \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i \left(\frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_i\|_{L^2(Q)}^2 \right), \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_k\|_{L^2(Q)}^2 \right) \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i, \end{aligned} \quad (1.29)$$

notemos que la desigualdad (1.29) se verifica, ya que para todo $i = k, \dots, n_k$ se satisface que:

$$\left(\frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_i\|_{L^2(Q)}^2 \right) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_k\|_{L^2(Q)}^2 \right),$$

además, como $\sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|S(u_k) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_k\|_{L^2(Q)}^2 \right) \sum_{i=k}^{n_k} \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k, S(u_k)), \\ &= j. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Finalmente de (1.29) y (1.30), concluimos que $\bar{u} \in U_{ad}$ minimiza el funcional f . \square

Por la importancia de la diferenciabilidad del operador control-estado en el análisis matemático posterior, mostramos a continuación el siguiente resultado:

Teorema 4. *El operador control-estado $S : L^\infty(Q) \rightarrow W(0, T)$ definido en (1.7) es Fréchet-diferenciable.*

Demostración. Sea $\bar{u} \in U_{ad}$ y $\bar{y} = S(\bar{u}) \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ denota su estado asociado. Para $h \in L^\infty(Q)$, consideramos L el operador solución de la siguiente ecuación diferencial: $\varphi = Lh$, donde φ satisface:

$$\varphi_t - \gamma \Delta \varphi + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} \bar{y} \right] \varphi = -h\bar{y}, \quad \text{en } Q, \quad (1.31)$$

$$\varphi(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.32)$$

$$\varphi(0, x) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.33)$$

Nótese que L está bien definido pues, $[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} \bar{y}]$ y $(-h\bar{y})$ son elementos de $L^\infty(Q)$, por lo tanto, existe una única función $\varphi \in W(0, T)$, la cual es solución del sistema (1.31)-(1.33). Además, el operador L es lineal y continuo.

Si llamamos $w = \bar{u} + h \in L^\infty(Q)$, $y_1 = S(w)$ y $y_2 = S(\bar{u})$, luego y_1 y y_2 verifican las siguientes ecuaciones:

$$y_{1t} - \gamma \Delta y_1 + w(t, x)y_1 = ry_1 \left[1 - \frac{y_1}{\kappa} \right] \quad \text{en } Q, \quad (1.34)$$

$$y_1(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.35)$$

$$y_1(0, x) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.36)$$

y

$$y_{2t} - \gamma \Delta y_2 + \bar{u}(t, x)y_2 = ry_2 \left[1 - \frac{y_2}{\kappa} \right] \quad \text{en } Q, \quad (1.37)$$

$$y_2(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.38)$$

$$y_2(0, x) = y_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.39)$$

respectivamente. Restando las ecuaciones (1.37)-(1.39) de (1.34)-(1.36), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & (y_1 - y_2)_t - \gamma \Delta (y_1 - y_2) - r(y_1 - y_2) \\ & + \frac{r}{\kappa} (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (\bar{u} + h)y_1 - \bar{u}y_2 = 0 \quad \text{en } Q, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$(y_1 - y_2)(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.41)$$

$$(y_1 - y_2)(0, x) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.42)$$

Si llamamos $z = y_1 - y_2$ y reemplazamos en la ecuación (1.40), tenemos:

$$z_t - \gamma \Delta z + \bar{u}z + hy_1 = rz - \frac{r}{\kappa} (y_1 + y_2)z. \quad (1.43)$$

Escribiendo de una manera equivalente la expresión (1.43), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_t - \gamma \Delta z + \left[\bar{u} - r + \frac{r}{\kappa} (y_1 + y_2) \right] z + hy_1 &= 0, \\ z_t - \gamma \Delta z + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] z &= \frac{r}{\kappa} y_2 z - \frac{r}{\kappa} y_1 z - hy_1, \\ z_t - \gamma \Delta z + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] z &= \frac{r}{\kappa} (y_2 - y_1)z - hy_1, \\ z_t - \gamma \Delta z + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] z &= -\frac{r}{\kappa} z^2 - hy_1, \end{aligned} \quad (1.44)$$

de donde z verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$z_t - \gamma \Delta z + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] z = -\frac{r}{\kappa} z^2 - h y_1 \quad \text{en } Q, \quad (1.45)$$

$$z(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.46)$$

$$z(0, x) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.47)$$

Restando las ecuaciones (1.31)-(1.33) de (1.45)-(1.47) respectivamente, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (z - \varphi)_t - \gamma \Delta (z - \varphi) + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] (z - \varphi) &= -\frac{r}{\kappa} z^2 - h y_1 + h y_2, \\ &= -\frac{r}{\kappa} z^2 - h z, \end{aligned}$$

si llamamos $\psi = z - \varphi$, luego ψ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\psi_t - \gamma \Delta \psi + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right] \psi = -\frac{r}{\kappa} z^2 - h z, \quad \text{en } Q, \quad (1.48)$$

$$\psi(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.49)$$

$$\psi(0, x) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.50)$$

Sabemos que $\left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} y_2 \right]$ y $-\frac{r}{\kappa} z^2 - h z$ son elementos de $L^\infty(Q)$. Por lo tanto, la ecuación (1.48)-(1.50) tiene única solución débil en $W(0, T)$ y por resultados conocidos de acotación para ecuaciones lineales c.f.[13], existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\|\psi\|_{W(0, T)} \leq M \left\| -\frac{r}{\kappa} z^2 - h z \right\|_{L^2(Q)}, \quad (1.51)$$

recordemos que:

$$\begin{aligned} \psi &= z - \varphi, \\ &= y_1 - y_2 - \varphi, \\ &= S(\bar{u} + h) - S(\bar{u}) - Lh, \end{aligned} \quad (1.52)$$

de donde, reemplazando (1.52) en (1.51), tenemos que:

$$\begin{aligned} \|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u}) - Lh\|_{W(0, T)} &\leq M \left\| -\frac{r}{\kappa} z^2 - h z \right\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq M \left(\frac{r}{\kappa} \|z^2\|_{L^2(Q)} + \|h z\|_{L^2(Q)} \right), \\ &\leq M \left(\frac{r}{\kappa} \|z\|_{L^2(Q)}^2 + \|h z\|_{L^2(Q)} \right), \\ &\leq M \left(\frac{r}{\kappa} \|z\|_{L^2(Q)}^2 + \|h\|_{L^\infty(Q)} \|z\|_{L^2(Q)} \right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Por otro lado, se verifica lo siguiente:

$$\|z\|_{L^2(Q)} = \|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u})\|_{L^2(Q)} \leq M_1 \|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u})\|_{W(0, T)}, \quad (1.54)$$

para una cierta constante $M_1 > 0$. Además al ser el operador S Lipschitz-continuo, existe una constante $M_2 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u})\|_{W(0, T)} &\leq M_2 \|\bar{u} + h - \bar{u}\|_{L^\infty(Q)}, \\ &= M_2 \|h\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

De (1.53), (1.54) y (1.55), se sigue que:

$$\begin{aligned} \|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u}) - Lh\|_{W(0,T)} &\leq M_3 \|h\|_{L^\infty(Q)}^2, \\ \frac{\|S(\bar{u} + h) - S(\bar{u}) - Lh\|_{W(0,T)}}{\|h\|_{L^\infty(Q)}} &\leq M_3 \frac{\|h\|_{L^\infty(Q)}^2}{\|h\|_{L^\infty(Q)}}, \\ &= M_3 \|h\|_{L^\infty(Q)}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

para una cierta constante $M_3 > 0$, de donde si $\|h\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0$ entonces $S(\bar{u} + h) - S(\bar{u}) \rightarrow Lh$ en $W(0, T)$.

Se concluye que el operador S es Fréchet-diferenciable de $L^\infty(Q)$ en $W(0, T)$ y que su derivada está caracterizada como el operador solución de la ecuación (1.31)-(1.33). \square

1.5. Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad de primer orden.

En esta sección hacemos uso de la primera derivada del funcional de costo (1.8) para derivar las condiciones que las soluciones óptimas tienen que satisfacer. Estas condiciones necesarias y suficientes de primer orden permiten sacar conclusiones que tienen que ver con la forma y caracterización del control óptimo. Las cuales son necesarias para el tratamiento numérico posterior del problema.

Método Formal de Lagrange.

Siguiendo metodológicamente el análisis del control óptimo, derivamos el sistema de optimalidad utilizando el método formal de Lagrange c.f.[7]. El método formal de Lagrange nos facilita el cálculo de la ecuación adjunta y la desigualdad variacional. La idea es que el cálculo del sistema de optimalidad será determinado de manera intuitiva y luego se justifica matemáticamente la existencia de los multiplicadores de Lagrange.

A continuación introducimos el Lagrangeano de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p) &:= J(u, y) - \int_Q [y_t - \gamma \Delta y + uy - g(y)] p \, dx dt \\ &\quad - \int_\Sigma y(t, x) p_2 \, ds dt - \int_\Omega [y(0, x) - y_0(x)] p_3 \, dx, \end{aligned} \quad (1.57)$$

con $g(y) = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa}\right]$ y $J(u, y) = \frac{1}{2} \int_\Omega [y(T, \cdot) - y_\Omega]^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q u^2 \, dx dt$.

En los dos últimos términos de la expresión (1.57), en los que aparecen p_2 y p_3 , se tratan de multiplicadores de Lagrange en donde están definidos los productos escalares. Estos están asociados a las condiciones inicial y de frontera en la ecuación adjunta. Veremos más adelante que podemos deshacernos de estos multiplicadores tomando en cuenta ciertos aspectos de la EDP.

La *ecuación adjunta* se la obtiene de la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0, \quad (1.58)$$

que a continuación la calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) &= \frac{\partial}{\partial y} J(\bar{u}, \bar{y}) - \frac{\partial}{\partial y} \int_Q \bar{y}_t \bar{p} \, dxdt + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \int_Q \Delta \bar{y} \bar{p} \, dxdt + \frac{\partial}{\partial y} \int_Q g(\bar{y}) \bar{p} \, dxdt \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_Q \bar{u} \bar{y} \bar{p} \, dxdt - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Sigma} \bar{y}(t, x) p_3 \, dsdt \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Omega} [\bar{y}(0, x) - y_0(x)] p_2 \, dx.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Notemos que el producto escalar y todos los operadores diferenciales son lineales c.f.[13]. La expresión (1.59) la calculamos término a término. Para escribirlos de manera explícita, los evaluamos en una dirección $l \in L^2(Q)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} J(\bar{u}, \bar{y}) l &= \int_{\Omega} [\bar{y}(T, x) - y_{\Omega}(x)] l(T, x) \, dx, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_Q \bar{y}_t \bar{p} \, dxdt \right) l &= \int_Q l_t \bar{p} \, dxdt, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(- \int_{\Omega} \Delta \bar{y} \bar{p} \, dx \right) l &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{\Omega} \nabla \bar{y} \nabla \bar{p} \, dx \right) l = \int_{\Omega} \nabla l \nabla \bar{p} \, dx, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_Q \bar{u} \bar{y} \bar{p} \, dxdt \right) l &= \int_Q \bar{u} \bar{p} l \, dxdt, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{\Sigma} \bar{y} \bar{p} \, dsdt \right) l &= \int_{\Sigma} \bar{p} l \, dsdt, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{\Omega} (\bar{y}(0, x) - y_0) \bar{p} \, dx \right) l &= \int_{\Omega} l(0, x) \bar{p}(0, x) \, dx,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

para el siguiente término notemos el uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_Q g(\bar{y}) \bar{p} \, dxdt \right) l = \int_Q g'(\bar{y}) l \bar{p} \, dxdt.$$

El término de lado derecho de (1.60) lo integramos por partes, respecto a t , de la siguiente manera:

$$\int_Q l_t \bar{p} \, dxdt = \int_{\Omega} [\bar{p}(T, x) l(T, x) - \bar{p}(0, x) l(0, x)] \, dx - \int_Q \bar{p}_t l \, dxdt.$$

Por lo tanto, la expresión (1.58) nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) l &= \int_{\Omega} [\bar{y}(T, x) - y_{\Omega}(x)] l(T, x) \, dx - \int_{\Omega} [\bar{p}(T, x) l(T, x) - \bar{p}(0, x) l(0, x)] \, dx \\
&\quad + \int_Q \bar{p}_t l \, dxdt + \gamma \int_Q \Delta p l \, dxdt - \int_Q \bar{u} \bar{p} l \, dxdt + \int_Q g'(\bar{y}) l \bar{p} \, dxdt \\
&\quad - \int_{\Sigma} \bar{p} l \, dsdt - \int_{\Omega} l(0, x) \bar{p}(0, x) \, dx, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde, por la linealidad de la integral observamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) l &= \int_{\Omega} [\bar{y}(T, x) - y_{\Omega}(x) - \bar{p}(T, x)] l(T, x) dx \\
&\quad - \int_Q [-\bar{p}_t - \gamma \Delta \bar{p} + \bar{u} \bar{p} - g'(\bar{y}) \bar{p}] l dx dt \\
&\quad - \int_{\Sigma} \bar{p} l ds dt, \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.61}$$

con $g'(\bar{y}) = r - \frac{2r\bar{y}}{\kappa}$.

Finalmente de (1.61) inferimos que la **ecuación adjunta**, dada por la expresión (1.58), nos queda de la siguiente manera:

$$-\bar{p}_t - \gamma \Delta \bar{p} + \left[\bar{u} - r + \frac{2r\bar{y}}{\kappa} \right] \bar{p} = 0 \quad \text{en } Q, \tag{1.62}$$

$$\bar{p}(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \tag{1.63}$$

$$\bar{p}(T, x) = \bar{y}(T, x) - y_{\Omega}(x) \quad \text{en } \Omega. \tag{1.64}$$

con \bar{u} control óptimo y \bar{y} su respectivo estado asociado.

La ecuación (1.62)-(1.64) es lineal respecto a \bar{p} y además puesto que \bar{y} es elemento de $L^{\infty}(Q)$ entonces $[\bar{y}(T, \cdot) - y_{\Omega}(\cdot)]$ pertenece a $L^{\infty}(\Omega)$. Además, el término $[\bar{u} - r + \frac{2r\bar{y}}{\kappa}]$ es un coeficiente en $L^{\infty}(Q)$ para \bar{p} . Por lo tanto, existe única solución $\bar{p} \in W(0, T)$ de (1.62)-(1.64) c.f.[7].

Observación 4.

- La existencia de la solución \bar{p} en $W(0, T)$ para la ecuación adjunta (1.62)-(1.64) justifica la existencia de los multiplicadores de Lagrange introducidos en (1.57).

El Lagrangeano también nos permite derivar la siguiente condición, conocida como *la desigualdad variacional*, que viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})(u - \bar{u}) \geq 0, \tag{1.65}$$

para todo $u \in U_{ad}$. De la ecuación (1.57), por la linealidad de la derivada obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) &= \frac{\partial}{\partial u} J(\bar{u}, \bar{y}) - \frac{\partial}{\partial u} \int_Q \bar{y}_t \bar{p} dx dt + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \int_Q \Delta \bar{y} \bar{p} dx dt + \frac{\partial}{\partial u} \int_Q g(\bar{y}) \bar{p} dx dt \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial u} \int_Q \bar{u} \bar{y} \bar{p} dx dt - \frac{\partial}{\partial u} \int_{\Sigma} \bar{y}(t, x) p_3 ds dt \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial u} \int_{\Omega} [\bar{y}(x, 0) - y_0(x)] p_2 dx,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

con $J(u, y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [y(T, \cdot) - y_{\Omega}]^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q u^2 dxdt$. Los términos de (1.66) que no dependen de u , se anulan. Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = \frac{\partial}{\partial u} J(\bar{u}, \bar{y}) - \frac{\partial}{\partial u} \int_Q \bar{u} \bar{y} \bar{p} dxdt. \quad (1.67)$$

Calculamos cada término de la expresión (1.67). Para $l = u - \bar{u}$ elemento de $L^2(Q)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} J(\bar{u}, \bar{y}) l &= \lambda \int_Q \bar{u} l dxdt, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_Q \bar{u} \bar{y} \bar{p} dxdt \right) l &= \int_Q \bar{y} \bar{p} l dxdt, \end{aligned}$$

de donde, la desigualdad variacional (1.65) para nuestro problema toma la siguiente forma:

$$\int_Q (\lambda \bar{u} - \bar{y} \bar{p}) (u - \bar{u}) dxdt \geq 0, \quad (1.68)$$

para todo $u \in U_{ad}$.

El estudio realizado a lo largo de ésta sección nos permite presentar el siguiente **sistema de optimalidad** para nuestro problema de control óptimo:

Si $\bar{u} \in U_{ad}$ es un control óptimo para el problema **(P)** y $\bar{y} = S(\bar{u}) \in W(0, T) \cap L^{\infty}(Q)$ denota su correspondiente estado asociado, tal que satisface:

$$\begin{aligned} \bar{y}_t - \gamma \Delta \bar{y} + \bar{u}(t, x) \bar{y} &= r \bar{y} \left[1 - \frac{\bar{y}}{\kappa} \right], & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \\ \bar{y}(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ \bar{y}(0, x) &= y_0(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

entonces, existe una solución $\bar{p} \in W(0, T)$ de la ecuación adjunta:

$$\begin{aligned} -\bar{p}_t - \gamma \Delta \bar{p} + \left[\bar{u} - r + \frac{2r\bar{y}}{\kappa} \right] \bar{p} &= 0, & \text{en } Q, \\ \bar{p}(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ \bar{p}(T, x) &= \bar{y}(T, x) - y_{\Omega}(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

tal que \bar{u} verifica la siguiente desigualdad variacional:

$$\int_Q (\lambda \bar{u} - \bar{y} \bar{p}) (u - \bar{u}) dxdt \geq 0, \quad (1.69)$$

para todo $u \in U_{ad}$.

1.5.1. Caracterización del control óptimo.

Ahora, realizamos un análisis más detallado de la desigualdad variacional (1.69) caracterizando el control óptimo componente a componente.

Empezemos nuestra investigación reescribiendo la desigualdad (1.69) de la siguiente manera:

$$\int_Q \bar{u}(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}) \, dxdt \leq \int_Q v(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}) \, dxdt,$$

para todo v en U_{ad} , de donde observamos que:

$$\int_Q \bar{u}(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}) \, dxdt = \min_{v \in U_{ad}} \int_Q v(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}) \, dxdt.$$

Es intuitivo pensar que la desigualdad variacional puede ser formulada componente a componente. El siguiente teorema nos da tal caracterización.

Teorema 5. *Una condición necesaria y suficiente para que la desigualdad variacional (1.69) se satisfaga es que para casi todo $(t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega$ se verifique que:*

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) < \lambda\bar{u}(t, x), \\ \in [0, 1] & \text{si } \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) = \lambda\bar{u}(t, x), \\ 1 & \text{si } \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) > \lambda\bar{u}(t, x), \end{cases} \quad (1.70)$$

Además, una condición equivalente a (1.70) es dada por la siguiente desigualdad variacional componente a componente en \mathbb{R} :

$$(\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x)) (v - \bar{u}(t, x)) \geq 0, \quad (1.71)$$

para todo $v \in [0, 1]$, en casi todo $(t, x) \in Q$.

Demostración. Primero demostremos que (1.69) implica (1.70). Para lo cual, sea $\bar{u} \in U_{ad}$ tal que verifique la desigualdad variacional:

$$\int_Q (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}) (u - \bar{u}) \, dxdt \geq 0, \quad (1.72)$$

para todo $u \in U_{ad}$.

Supongamos que (1.70) no se verifica. Si consideramos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A}_0(\bar{u}) = \{(t, x) \in Q \mid \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) < \lambda\bar{u}(t, x)\}, \quad (1.73)$$

$$\mathcal{A}_1(\bar{u}) = \{(t, x) \in Q \mid \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) > \lambda\bar{u}(t, x)\}, \quad (1.74)$$

puesto que (1.70) no se cumple, entonces existen dos posibles casos:

- *Primer caso:*
Existe un conjunto $\mathcal{E}_0(\bar{u}) \subset \mathcal{A}_0(\bar{u})$, el cual tiene medida positiva, tal que $\bar{u}(t, x) > 0$, para $(t, x) \in \mathcal{E}_0(\bar{u})$.
- *Segundo caso:*
Existe un conjunto $\mathcal{E}_1(\bar{u}) \subset \mathcal{A}_1(\bar{u})$, con medida positiva, tal que $\bar{u}(t, x) < 1$, para $(t, x) \in \mathcal{E}_1(\bar{u})$.

Si se verifica el primer caso, definimos la siguiente función $v \in U_{ad}$ tal que:

$$v(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{para } (t, x) \in \mathcal{E}_0(\bar{u}), \\ \bar{u}(t, x) & \text{para } (t, x) \in Q \setminus \mathcal{E}_0(\bar{u}), \end{cases}$$

de donde observamos que:

$$\int_Q (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(v - \bar{u}) \, dxdt = \int_{\mathcal{E}_0(\bar{u})} (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(-\bar{u}) \, dxdt, \quad (1.75)$$

notemos que el término $(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})$ del lado derecho de (1.75), es positivo en $\mathcal{E}_0(\bar{u})$, mientras que $(-\bar{u})$ es negativo. Por lo tanto, por la monotonía de la integral, se verifica lo siguiente:

$$\int_Q (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(v - \bar{u}) \, dxdt = \int_{\mathcal{E}_0(\bar{u})} (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(-\bar{u}) \, dxdt < 0,$$

y contradice la condición (1.72).

Para el segundo caso, definimos $w \in U_{ad}$ tal que:

$$w(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{para } (t, x) \in \mathcal{E}_1(\bar{u}), \\ \bar{u}(t, x) & \text{para } (t, x) \in Q \setminus \mathcal{E}_1(\bar{u}), \end{cases}$$

de donde, se verifica que:

$$\int_Q (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(w - \bar{u}) \, dxdt = \int_{\mathcal{E}_1(\bar{u})} (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(1 - \bar{u}) \, dxdt, \quad (1.76)$$

notemos que el término $(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})$ del lado derecho de (1.76) es negativo en $\mathcal{E}_1(\bar{u})$, mientras que $(1 - \bar{u})$ es positivo. Por lo tanto, por la monotonía de la integral, se verifica lo siguiente:

$$\int_Q (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(w - \bar{u}) \, dxdt = \int_{\mathcal{E}_1(\bar{u})} (\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p})(1 - \bar{u}) \, dxdt < 0,$$

lo cual es una contradicción con la condición (1.72).

Ahora demostremos que (1.70) implica (1.71). Para este propósito, notemos que para casi todo $(t, x) \in \mathcal{A}_0(\bar{u})$, se cumple que $\bar{u}(t, x) = 0$ y por lo tanto:

$$v - \bar{u}(t, x) \geq 0,$$

para todo $v \in [0, 1]$. Además, de la definición de $\mathcal{A}_0(\bar{u})$ en (1.73), observamos que $(\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x)) > 0$, de donde:

$$(\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x))(v - \bar{u}(t, x)) \geq 0,$$

para casi todo $(t, x) \in \mathcal{A}_0(\bar{u})$.

Por otro lado, para casi todo $(t, x) \in \mathcal{A}_1(\bar{u})$ se satisface que $\bar{u}(t, x) = 1$ y por lo tanto:

$$v - \bar{u}(t, x) \leq 0,$$

para todo $v \in [0, 1]$. Además, de la definición de $\mathcal{A}_1(\bar{u})$ en (1.74), observamos que $(\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x)) < 0$ y por lo tanto:

$$(\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x))(v - \bar{u}(t, x)) \geq 0,$$

para casi todo $(t, x) \in \mathcal{A}_1(\bar{u})$.

Finalmente demostremos que (1.71) implica (1.69). Para lo cual, sea $u \in U_{ad}$ y además se verifique la desigualdad variacional componente a componente en \mathbb{R} :

$$(\lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x)) (v - \bar{u}(t, x)) \geq 0, \quad (1.77)$$

para todo $v \in [0, 1]$ en casi todo $(t, x) \in Q$.

Como $u(t, x) \in [0, 1]$ para casi todo $(t, x) \in Q$, tomamos $v = u(t, x)$ en (1.77); de donde inferimos que:

$$(\lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x)) (u(t, x) - \bar{u}(t, x)) \geq 0, \quad (1.78)$$

para casi todo $(t, x) \in Q$. Por la monotonía de la integral, de (1.78) concluimos que:

$$\int_Q (\lambda \bar{u} - \bar{y} \bar{p}) (u - \bar{u}) \, dx dt \geq 0.$$

□

Finalmente, todo nuestro análisis sobre el problema de control óptimo, hecho a lo largo de las secciones anteriores, nos permite sustentar formalmente la escritura del siguiente teorema:

Teorema 6. *Dado un control óptimo $\bar{u} \in U_{ad}$ para el problema **(P)** y su correspondiente estado $\bar{y} = S(\bar{u}) \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$, tal que \bar{y} satisface:*

$$\begin{aligned} \bar{y}_t - \gamma \Delta \bar{y} + \bar{u}(t, x) \bar{y} &= r \bar{y} \left[1 - \frac{\bar{y}}{\kappa} \right], & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \\ \bar{y}(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial \Omega, \\ \bar{y}(0, x) &= y_0(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

entonces, existe una solución $\bar{p} \in W(0, T)$ de la ecuación adjunta:

$$\begin{aligned} -\bar{p}_t - \gamma \Delta \bar{p} + \left[\bar{u} - r + \frac{2r\bar{y}}{\kappa} \right] \bar{p} &= 0, & \text{en } Q, \\ \bar{p}(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ \bar{p}(T, x) &= \bar{y}(T, x) - y_\Omega(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

tal que, \bar{u} verifica la siguiente caracterización:

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) < \lambda \bar{u}(t, x), \\ \in [0, 1] & \text{si } \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) = \lambda \bar{u}(t, x), \\ 1 & \text{si } \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) > \lambda \bar{u}(t, x), \end{cases}$$

en casi todo $(t, x) \in Q$.

1.6. Condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden.

Estudiamos ahora las condiciones de optimalidad de segundo orden para el problema de control óptimo, las cuales implican que un punto estacionario es un mínimo local. La

importancia de este análisis recalca en que nuestro modelo cuadrático está sujeto a una ecuación no lineal, con lo cual se pierde la convexidad general y es necesario sustentar analíticamente la búsqueda del mínimo localmente.

A continuación presentamos el siguiente resultado, el cual es necesario para nuestro análisis posterior:

Teorema 7. *El operador control-estado S definido en (1.7) es un operador dos veces Fréchet continuamente diferenciable de $L^\infty(Q)$ en $W(0, T)$.*

Demostración. Recordemos como viene dada la ecuación de Fisher:

$$\begin{aligned} y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y &= ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right], & \text{en } Q, \\ y(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) &= y_0(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

si la reescribimos de una manera equivalente:

$$y_t - \Delta y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right] - uy, \quad \text{en } Q, \quad (1.79)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.80)$$

$$y(0, x) = y_0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.81)$$

La parte izquierda de (1.79)-(1.81) es lineal respecto a y . Además puede ser descompuesta en dos operadores lineales de la siguiente manera:

$$S_Q : L^\infty(Q) \rightarrow W(0, T), \quad (1.82)$$

$$S_0 : C(\bar{\Omega}) \rightarrow W(0, T), \quad (1.83)$$

donde S_Q y S_0 son los operadores solución asociados a las siguientes ecuaciones:

$$y_t - \Delta y = v, \quad \text{en } Q,$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma,$$

$$y(0, x) = 0, \quad \text{en } \Omega,$$

y

$$y_t - \Delta y = 0, \quad \text{en } Q,$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma,$$

$$y(0, x) = w, \quad \text{en } \Omega,$$

respectivamente. Así, se verifica que:

$$y = S(u) = S_Q \left(ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right] - uy \right) + S_0(y_0),$$

Los operadores dados en (1.82) y (1.83), son aplicaciones con rango en $W(0, T)$ y la solución de la ecuación semilineal (1.79)-(1.81) puede ser expresado en la forma:

$$0 = y - S_Q \left(ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right] - uy \right) + S_0(y_0). \quad (1.84)$$

Si definimos $\mathcal{G}(u, y) = y - S_Q \left(ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right] - uy \right) + S_0(y_0)$, podemos argumentar que \mathcal{G} es un operador dos veces Fréchet diferenciable de $L^\infty(Q) \times W(0, T)$ en $W(0, T)$ pues S_Q y S_0 son operadores lineales continuos y el operador de Nemytskii asociado a $z(\cdot) \mapsto \wp(z(\cdot)) := rz(\cdot) \left[1 - \frac{z(\cdot)}{\kappa} \right]$ es dos veces Fréchet diferenciable de $W(0, T)$ en $L^\infty(Q)$ c.f.[7].

Adicionalmente, observamos que se cumple lo siguiente c.f.[7]:

i) $\mathcal{G}(\bar{u}, \bar{y}) = 0$,

ii) $\mathcal{G}'(\bar{u}, \bar{y})y = 0$ es una biyección,

de donde, por el teorema de la función implícita c.f.[13], la ecuación $\mathcal{G}(u, y) = 0$ posee única solución $(u, y) \in L^\infty(Q) \times W(0, T)$ en una vecindad abierta de algún punto escogido (\bar{u}, \bar{y}) . Además $y = S(u)$ es una solución de (1.79)-(1.81) y S es dos veces Fréchet diferenciable de $L^\infty(Q)$ en $W(0, T)$. \square

Consideremos el problema de control **(P)**; si \bar{u} es el control óptimo que satisface la desigualdad variacional (1.68) y \bar{p} denota el correspondiente estado adjunto, una manera conveniente de deducir las condiciones suficientes de segundo orden es hacer uso de la función Lagrangeana. Recordemos como fue definido Lagrangeano en la subsección 2.2.1:

$$\mathcal{L}(y, u, p) := J(u, y) - \int_Q y_t p - \nabla y \nabla p + uyp - g(y)p \, dx dt \quad (1.85)$$

con $g(y) = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right]$ y $J(u, y) = \frac{1}{2} \int_\Omega [y(T, \cdot) - y_\Omega]^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q u^2 \, dx dt$.

Si (\hat{u}, \hat{y}) denota una dirección arbitraria, la cual nos ayudará a expresar explícitamente la segunda derivada de Lagrangeano, calculando la segunda derivada de Lagrangeano obtenemos la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})(\hat{u}, \hat{y})^2 = J''(\bar{u}, \bar{y})(\hat{u}, \hat{y})^2 + \int_Q \left[\left(\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \right) \hat{y}^2 - 2\hat{u}\hat{y} \right] \bar{p} \, dx dt, \quad (1.86)$$

donde J'' , viene dado como:

$$J''(\bar{u}, \bar{y})(\hat{u}, \hat{y})^2 = \int_\Omega \hat{y}^2(T, x) \, dx + \lambda \int_Q \hat{u}^2 \, dx \, dt, \quad (1.87)$$

combinando las expresiones (1.86) y (1.87), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})(\hat{u}, \hat{y})^2 &= \int_\Omega \hat{y}^2(x, T) \, dx + \lambda \int_Q \hat{u}^2 \, dx \, dt - \frac{2r}{\kappa} \int_Q \hat{y}^2 \bar{p} \, dx \, dt \\ &\quad - 2 \int_Q \hat{u}\hat{y}\bar{p} \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Como es usual, introducimos el cono crítico de direcciones, en el cual se impondrá la condición de positividad de $\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})$. El cono crítico es el conjunto de los controles

donde la coercividad del \mathcal{L}'' c.f. [7] se mantiene junto con la solución y del siguiente problema lineal:

$$y_t - \gamma \Delta y + \left[u - r + \frac{2r\bar{y}}{\kappa} \right] y = 0, \quad \text{en } Q, \quad (1.89)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.90)$$

$$y(T, x) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.91)$$

Definición 3. *El cono crítico $C_\tau(\bar{u})$ es el conjunto de todos los $v \in L^2(Q)$ que verifican:*

$$v(t, x) = \begin{cases} = 0, & \text{si } (t, x) \in A_\tau(\bar{u}), \\ \geq 0, & \text{si } \bar{u}(t, x) = 0 \text{ y } (t, x) \notin A_\tau(\bar{u}), \\ \leq 0, & \text{si } \bar{u}(t, x) = 1 \text{ y } (t, x) \notin A_\tau(\bar{u}), \end{cases} \quad (1.92)$$

con $A_\tau(\bar{u}) = \{(t, x) \in Q : |\lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x)| > \tau\}$ para $\tau > 0$.

Observemos que dependiendo del signo de $\lambda \bar{u} - \bar{y}p$ en $A_\tau(\bar{u})$, cualquiera de las dos opciones $\bar{u} = 0$ o $\bar{u} = 1$ se verifican. Además en (1.92) podemos poner $v = 0$ en los puntos donde el gradiente del funcional de costo $\lambda \bar{u} - \bar{y}p$, en valor absoluto, es al menos τ .

Las condiciones suficientes de segundo orden se formulan de la siguiente manera:

Existen constantes $\delta > 0$ y $\tau > 0$ tales que:

$$\mathcal{L}''(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p})(v, y)^2 \geq \delta \|v\|_{L^2(Q)}^2, \quad (1.93)$$

para todo $v \in C_\tau(\bar{u})$ y $y \in W(0, T)$ satisfaciendo (1.89)-(1.91) y $\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})$ viene dado por (1.88).

A continuación enunciamos el siguiente teorema de condición de crecimiento cuadrático c.f.[7]:

Teorema 8. *Supongamos que el par (\bar{u}, \bar{y}) satisface la desigualdad variacional (1.68) y verifica el problema de control óptimo (\mathbf{P}) . Además supongamos que existen $\delta > 0$ y $\tau > 0$ tales que la condición de positividad (1.93) se satisface. Luego existen constantes $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ tales que para todo $v \in U_{ad}$ con $\|\bar{u} - v\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$ satisfacen la condición de crecimiento cuadrático:*

$$J(v, y) \geq J(\bar{u}, \bar{y}) + \sigma \|v - \bar{u}\|_{L^2(Q)}^2, \quad (1.94)$$

donde $y = S(v)$. En particular \bar{u} es un control óptimo para el problema (\mathbf{P}) .

La demostración del **Teorema 8**, para el caso general, se la puede encontrar en c.f.[7] (Páginas 291-295).

Capítulo 2

Resolución numérica del problema de control óptimo.

En este segundo capítulo nos centraremos en la resolución numérica del problema de control óptimo. El objetivo principal del proyecto es proporcionar un modelo reducido, el cual requiere un menor esfuerzo de cálculo numérico que el modelo original. Antes de hacerlo, es de suma importancia resolver numéricamente el problema sin utilizar ninguna reducción, para así analizar numéricamente las características y el comportamiento de la solución aproximada en una computadora convencional y hacer comparaciones numéricas entre el modelo reducido y el modelo original en relación a tiempo de ejecución, error de aproximación, etc. Además, para proponer un modelo reducido, al no conocer la solución del problema, es necesario contar con una primera resolución numérica del sistema; esta idea será explicada mas adelante.

En lo que se refiere a la resolución numérica de las EDP's asociadas al problema de control óptimo, primero se utilizará un esquema de semi-discretización respecto a la variable espacial de las ecuaciones de estado y adjunta mediante los métodos de elementos finitos y Galerkin [13]. Luego se obtendrá un sistema de EDO's respecto a la variable temporal, que será resuelto por el método de Euler implícito c.f.[1]. El problema de control óptimo se resolverá numéricamente utilizando el método primal-dual de conjuntos activos c.f.[12].

Además, al final del capítulo presentamos los resultados de las pruebas numéricas, obtenidos al resolver el problema de control óptimo mediante el esquema propuesto.

2.1. Método primal-dual de conjuntos activos.

En esta sección aplicamos el método primal-dual de conjuntos activos para la resolución numérica del problema de control óptimo de la ecuación de Fisher. Existe una amplia gama de métodos numéricos para abordar problemas de control óptimo, entre ellos tenemos gradiente proyectado, el método SQP, entre otros, c.f.[7]. Mientras que nosotros usaremos la estrategia primal-dual de conjuntos activos, la cual es una herramienta eficiente en problemas de control no convexos que tienen restricciones en el control c.f.[6]. El método primal-dual emplea la caracterización del control óptimo componente a componente, la cual fue desarrollada en el capítulo anterior. En este método se definen los conjuntos activos dados en (1.73)-(1.74) mediante la caracterización del control y utiliza un indicador

para la búsqueda del óptimo.

Recordemos el problema de control con funcional reducido, mediante el operador control estado S mencionado en el capítulo anterior:

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S(u)(T, \cdot) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

sujeto a:

$$u \in U_{ad} = \{u \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\},$$

y la caracterización del control componente a componente:

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) > 0, \\ \in [0, 1], & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) = 0, \\ 1, & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) < 0. \end{cases}$$

Notemos que la relación de proyección que debe satisfacer el control óptimo es la siguiente:

$$\bar{u}(t, x) = \mathbb{P}_{[0,1]} \left\{ \frac{1}{\lambda} \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) \right\}, \quad (2.1)$$

donde \bar{p} es la solución del sistema adjunto (1.62)-(1.64) y $\mathbb{P}_{[0,1]}$ denota la proyección sobre el intervalo $[0, 1]$. Además, la caracterización del control óptimo componente a componente puede ser escrita de una manera equivalente:

Definimos $\bar{\mu} \in L^2(Q)$ tal que $\bar{\mu}(t, x) := -\{\lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x)\}$, de donde la caracterización componente a componente se reescribe como sigue:

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{u}(t, x) + \mu(t, x) < 0, & (\Leftrightarrow \mu(t, x) < 0) \\ \frac{1}{\lambda} \bar{y} \bar{p}, & \text{si } \bar{u}(t, x) + \mu(t, x) \in [0, 1], & (\Leftrightarrow \mu(t, x) = 0) \\ 1, & \text{si } \bar{u}(t, x) + \mu(t, x) > 1, & (\Leftrightarrow \mu(t, x) > 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

Mediante el análisis anterior concluimos que la cantidad $\bar{u} + \bar{\mu}$ es un indicador de que las restricciones de desigualdad se satisfacen o no, lo que justifica el paso **(S1)** del **Algoritmo 1**. El razonamiento anterior motiva la estrategia primal-dual de conjuntos activos descrito a continuación en el **Algoritmo 1**. La convergencia global y local del método primal-dual requieren un análisis más detallado y están fuera del alcance de este proyecto. Para mayor información se puede revisar c.f.[11] para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes.

2.2. Métodos de Galerkin y Euler implícito.

Las ecuaciones de estado y adjunta requieren ser resueltas numéricamente en (P_1) y (P_2) del paso **S2** para el **Algoritmo 1**. En esta sección aproximamos las soluciones de la ecuación de estado y adjunta mediante el método de elementos finitos y Galerkin para lo que se refiere a la variable espacial; mientras que utilizamos Euler implícito para la variable temporal en el sistema de EDO's resultante. En el tratamiento de la no linealidad existente en la ecuación de estado recurrimos al uso del método de Newton c.f.[1].

Algorithm 1 Primal-dual de conjuntos activos.

Como aproximación inicial, escogemos dos funciones u_0, μ_0 en $L^\infty(Q)$. Supongamos que las iteraciones u_{k-1} y μ_{k-1} han sido halladas. Para determinar u_k , los siguientes pasos son llevados a cabo:

S1) (*Determinación de los conjuntos activos e inactivos*)

Definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^1 &= \{(t, x) \in Q : u_{k-1}(t, x) + \mu_{k-1}(t, x) > 1\}, \\ \mathcal{A}_k^0 &= \{(t, x) \in Q : u_{k-1}(t, x) + \mu_{k-1}(t, x) < 0\}, \\ \mathcal{I}_k &= Q \setminus (\mathcal{A}_k^1 \cup \mathcal{A}_k^0) \end{aligned}$$

Si $\mathcal{A}_k^0 = \mathcal{A}_{k-1}^0$ y $\mathcal{A}_k^1 = \mathcal{A}_{k-1}^1$ entonces tenemos optimalidad y el algoritmo se termina. Caso contrario, continuamos con el siguiente paso.

S2) (*Paso de actualización*)

Determinamos las soluciones y_k, p_k en $W(0, T)$ de las siguientes ecuaciones (P1) y (P2) respectivamente. Calculamos u_k y actualizamos μ_k :

$$(P1) \begin{cases} y_{kt} - \gamma \Delta y_k + u_k(t, x) y_k = r y_k \left[1 - \frac{y_k}{\kappa}\right], & \text{en } Q, \\ y_k(t, x) = 0, & \text{en } \Sigma, \\ y_k(0, x) = y_0(x), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} -p_{kt} - \gamma \Delta p_k + u_k(t, x) p_k = r p_k \left[1 - \frac{2y_k}{\kappa}\right], & \text{en } Q, \\ p_k(t, x) = 0, & \text{en } \Sigma, \\ p_k(T, x) = y_k(T, x) - y_2(x), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

$$u_k(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{en } \mathcal{A}_k^0, \\ \frac{1}{\lambda} y_k p_k, & \text{en } \mathcal{I}_k, \\ 1, & \text{en } \mathcal{A}_k^1. \end{cases}$$

$$\mu_k := -(\lambda u_k - y_k p_k), \quad k := k + 1,$$

y continuamos con el paso **S1**.

2.2.1. Aproximación numérica de la ecuación de estado.

Dado un dominio tipo Lipschitz $\Omega \subset R^2$, la ecuación a resolver numéricamente es la siguiente:

$$y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right], \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (2.3)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.4)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.5)$$

donde γ , r y κ son constantes positivas y u un elemento de $L^\infty(Q)$.

Observación 5.

- Usamos la notación $\frac{\partial y}{\partial t}$ para referirnos a y_t . Además sin riesgo de confusión obviaremos la escritura de la variable espacial.

Seguidamente desarrollamos el análisis numérico respectivo para las ecuaciones diferenciales parciales relacionadas.

- **Esquema variacional de la ecuación de estado.**

A continuación realizamos la formulación variacional de la ecuación de Fisher, que nos servirá para sustentar matemáticamente el método de elementos finitos y Galerkin.

Partiendo de la ecuación (2.3), si se multiplica dicha ecuación por una función test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, luego se obtiene que:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \varphi - \gamma \nabla \cdot (\nabla y) \varphi + uy \varphi - ry \left(1 - \frac{y}{\kappa} \right) \varphi = 0, \quad (2.6)$$

para casi todo $t \in (0, T)$. Integrando la ecuación (2.6) sobre Ω se tiene que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \varphi \, dx - \int_{\Omega} \gamma \nabla \cdot (\nabla y) \varphi \, dx + \int_{\Omega} uy \varphi \, dx - \int_{\Omega} ry \left(1 - \frac{y}{\kappa} \right) \varphi \, dx = 0,$$

haciendo uso del Teorema de Green c.f.[13] y la linealidad de la integral, como $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$; se verifica que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \varphi \, dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} uy \varphi \, dx - r \int_{\Omega} y \left(1 - \frac{y}{\kappa} \right) \varphi \, dx = 0,$$

como se vió anteriormente, el término $\frac{\partial y}{\partial t}$ pertenece a $H^{-1}(\Omega)$ y por tanto escribimos:

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \gamma (\nabla y, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} + (uy, \varphi)_{L^2(\Omega)} - r \left(y \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right], \varphi \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (2.7)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ denota la relación de dualidad de H^{-1} , H_0^1 y además por el análisis para la ecuación de Fisher, realizado en el capítulo anterior, sabemos que la ecuación (2.7) se satisface para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y tiene única solución en sentido débil, la misma que satisface el problema inicial (2.3)-(2.5) en casi todas partes.

■ **Aproximación por el método de elementos finitos FEM.**

A continuación explicamos brevemente en que consiste el método de los elementos finitos a utilizarse. Sabemos que existe una base hilbertiana ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ c.f.[13], por tanto, consideramos un subespacio de dimensión finita \mathcal{V} de $H_0^1(\Omega)$ para nuestra aproximación.

Consideremos $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ una base de \mathcal{V} . Por el método de Galerkin, aproximamos una función y por:

$$y(t, x) \approx \sum_{i=1}^n y_i(t) \phi_i(x), \quad (2.8)$$

donde y_i son las coordenadas de y respecto a la base \mathcal{B} . Reemplazando (2.8) en (2.7) y además, tomando las funciones test φ a elementos de \mathcal{B} , obtenemos el siguiente sistema discretizado:

$$M\vec{y}'(t) + \gamma A\vec{y} + M_{u(t)}\vec{y}(t) - rM\vec{y}(t) + \frac{r}{\kappa}M\vec{y}^2(t) = 0;$$

donde:

- M es la matriz de masa de orden $n \times n$, con entradas $M(i, j) = (\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$.
- A es la matriz de rigidez de orden $n \times n$, con entradas $A(i, j) = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{L^2(\Omega)}$.
- $M_{u(t)}$ es la matriz de masa pesada de orden $n \times n$, con entradas:
 $M_{u(t)}(i, j) = (u(\cdot, t)\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$.
- \vec{y} es un vector de dimensión n , tal que $\vec{y} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$.
- \vec{y}^2 es un vector de dimensión n , tal que $\vec{y}^2 = (y_1^2(t), y_2^2(t), \dots, y_n^2(t))$.

■ **Discretización temporal por Euler implícito y método de Newton.**

La ecuación (2.2.1) representa un sistema de EDO's respecto a t . Hacemos uso del método de Euler implícito o también conocido como Euler hacia atrás c.f.[1], el cual es un esquema de diferencias. El esquema queda determinado de la siguiente manera:

Dada una partición del intervalo temporal $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_m = T$, la derivada respecto a t de y en el punto t_{k+1} se aproxima como:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t_{k+1}) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, m-1;$$

si entre t_{k+1} y t_k consideramos la distancia constante y la llamamos δt , obtenemos la siguiente expresión:

$$M \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\delta t} \right) + \gamma A y_{k+1} + M_{u_{k+1}} y_{k+1} - r M y_{k+1} + \frac{r}{\kappa} M y_{k+1}^2 = 0, \quad (2.9)$$

para todo $k = 1, 2, \dots, m-1$.

A continuación usamos el método de Newton c.f.[1] para linealizar la expresión (2.9). Consideramos el siguiente cambio de variable por simplicidad: $w = y_{k+1}$ y $v = y_k$; de donde obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} F(w) &= (M + \gamma\delta t A + \delta t M_{u_{k+1}} - \delta t r M)w + \frac{\delta t r}{\kappa} M w^2 - M v, \\ F'(w) &= M + \gamma\delta t A + \delta t M_{u_{k+1}} - \delta t r M + \frac{2\delta t r}{\kappa} M S, \end{aligned}$$

donde w^2 denota a y_{k+1}^2 y S es la matriz $diag(w)^1$. Por tanto, dado un w_0 inicial conveniente, el sistema lineal a resolverse es:

$$F' dw = -F,$$

cuya solución dw servirá para la actualización del paso de Newton:

$$w = w + dw. \quad (2.10)$$

2.2.2. Aproximación numérica de la ecuación adjunta.

Análogamente a lo realizado para la ecuación de estado en la sección anterior, nos encargamos de discretizar y resolver numéricamente la ecuación adjunta. Nótese que la ecuación adjunta es lineal y puede resolverse directamente sin necesidad de aplicar un esquema adicional como en el caso de la ecuación de estado. El problema a resolver numéricamente es el siguiente:

$$-p_t - \gamma \Delta p + \left(u - r + \frac{2ry}{\kappa} \right) p = 0, \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (2.11)$$

$$p(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.12)$$

$$p(T, x) = y(x, T) - y_\Omega(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.13)$$

donde γ , r , κ son constantes positivas, $u \in L^\infty(Q)$ y $y \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$.

Igual que antes, se utiliza los métodos de elementos finitos y Galerkin para la parte espacial junto con el método de Euler implícito para el sistema de EDO's resultante. El esquema semidiscretizado es el siguiente:

$$-M\vec{p}_t(t) + \gamma A\vec{p}(t) + M_u\vec{p}(t) - rM\vec{p}(t) + \frac{2r}{\kappa} M_{y(t)}\vec{p}(t) = 0;$$

donde M , A , $M_{u(t)}$ tienen el mismo significado que se dió en el caso de la ecuación de estado y $M_{y(t)}$ es la matriz de masa con peso y , i.e. $M_{y(t)}(i, j) = (y(t, \cdot)\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$.

Utilizando el método de Euler implícito, análogo a lo realizado para la ecuación de estado, con paso temporal constante, obtenemos el siguiente esquema de discretización temporal:

$$-M \left(\frac{\vec{p}_k - \vec{p}_{k+1}}{\delta t} \right) + \gamma A\vec{p}_k + M_{u_k}\vec{p}_k - rM\vec{p}_k + \frac{2r}{\kappa} M_{y_k}\vec{p}_k = 0, \quad (2.14)$$

¹ $diag(w)$: representa la matriz diagonal con elementos no nulos dados por las componentes del vector w .

para $k = m, m - 1, \dots, 2$. Realizamos la siguiente traslación respecto a t para convertir (2.14) de una ecuación de valor final a una de valor inicial. Consideremos $s = m + 1 - k$, de donde $k = m + 1 - s$ y si reemplazamos en la ecuación (2.14) obtenemos lo siguiente:

$$M \left(\frac{p_{s+1} - p_s}{\delta t} \right) + \gamma A p_{s+1} + M_{u_{s+1}} p_{s+1} - r M p_{s+1} + \frac{2r}{\kappa} M_{y_{s+1}} p_{s+1} = 0,$$

para $s = 1, 2, \dots, m - 1$. Llamamos $G = M + \delta t \gamma A + \delta t M_{u_{s+1}} - \delta t r M + \frac{2\delta t r}{\kappa} M_{y_{s+1}}$, y $b = M p_s$, entonces dado un p_m inicial, el sistema lineal a resolverse para $s = 1, 2, \dots, m - 1$ es:

$$G p_{s+1} = b.$$

2.2.3. Experimentos numéricos.

En esta sección presentamos la resolución numérica del problema de control óptimo (P) mediante el Algoritmo 1. Las ecuaciones de estado y adjuntas asociadas al problema de control óptimo se resuelven siguiendo el esquema de las páginas 34-37.

A partir de ahora, nos referimos al paso de discretización espacial y al paso de discretización temporal como h y δt respectivamente.

Consideramos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ el cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 y $Q = \Omega \times (0, 1)$. Utilizamos la triangulación dada en la Figura 2.1 para el método de elementos finitos. En cada nodo se definen los polinomios lineales de Lagrange c.f.[13] asociados al método de Galerkin.

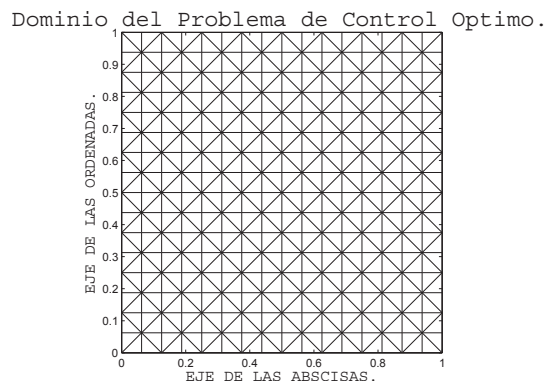


Figura 2.1: Triangulación del método de Galerkin con $h = 0,0625$.

Como ejemplo, presentamos la programación del siguiente modelo de control óptimo:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(u,y) \in U_{ad} \times W(0,1)} J(u, y) := \frac{1}{2} \|y(1, \cdot) - 0,5\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \\ \\ \text{sujeto a:} \\ \\ y_t - 0,01\Delta y + u(t, x)y = y[1 - y], \quad \text{en } Q, \\ \\ y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \\ \\ u \in U_{ad}, \end{array} \right.$$

donde:

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\},$$

y la condición inicial y_0 viene dado por:

$$y_0(x) = y_0(x_1, x_2) = 16x_1x_2(x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

En la Figura 2.2 presentamos el estado de densidad inicial y_0 , el cual pertenece a $C(\bar{\Omega})$. Queremos llegar a un estado deseado mostrado en la Figura 2.3, el cual es menor al estado inicial en la parte central del dominio y mayor a éste a medida que nos acercamos a la frontera. Se espera que el control óptimo sea positivo en la parte central del dominio. Físicamente significa que existe control de la densidad poblacional distribuida en esta zona, por ejemplo, recolección o muerte provocada.

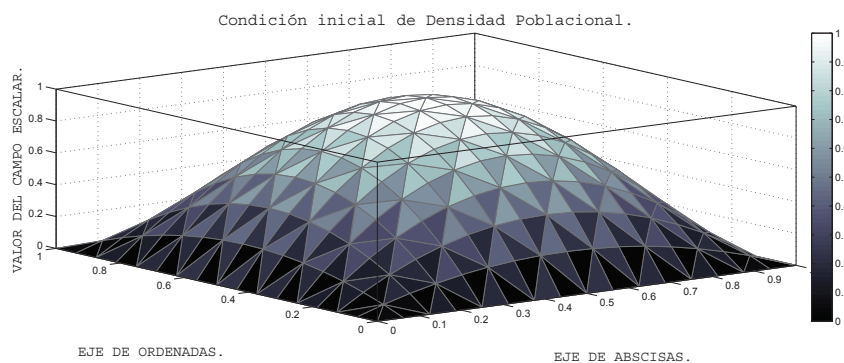


Figura 2.2: Condición de densidad inicial con $h = 0,0625$.

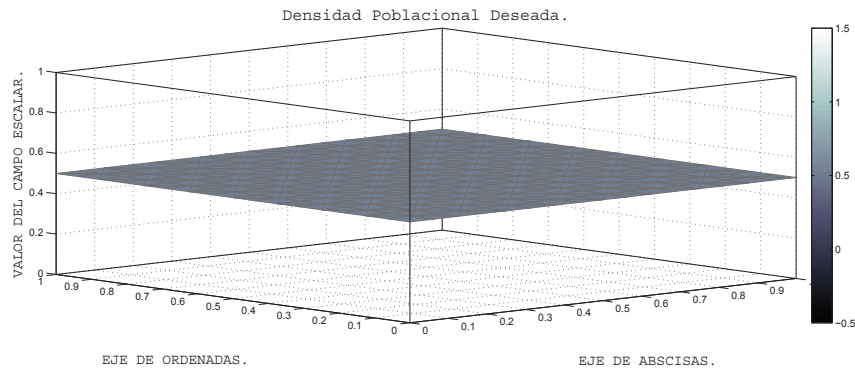


Figura 2.3: Densidad poblacional deseada (constante) con $h = 0,0625$ en el tiempo 1 segundo.

La Figura 2.4 corresponde a la solución del problema P_1 utilizando el Algoritmo 1, para el cual tomamos un paso de discretización espacial $h = 0,0625$ y temporal $\delta t = 0,003$.

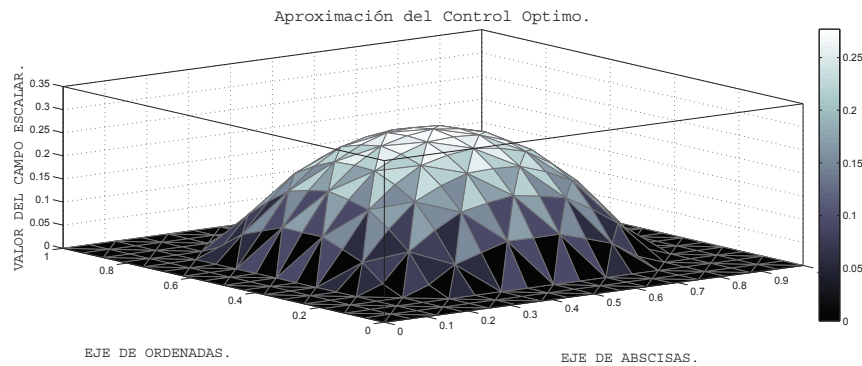


Figura 2.4: Aproximación $\tilde{u}^{h,\delta t}$ del control óptimo mediante el Algoritmo 1 con $h = 0,0625$ y $\delta t = 0,003$ en el tiempo 1 segundo.

Observamos que la aproximación de la solución de la ecuación de estado óptima es continua, positiva y creciente en el tiempo (Ver Figura 2.5). En la Figura 2.6 exhibimos la aproximación de la solución de la ecuación adjunta asociada al control óptimo. Ésta es continua en el tiempo y es resuelta desde el tiempo final al inicial.

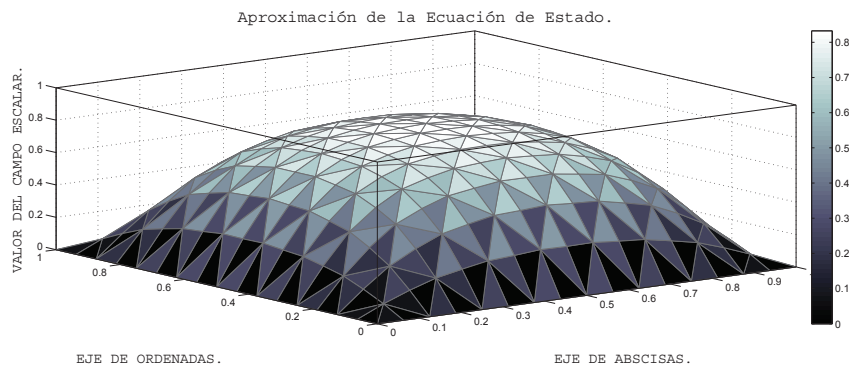


Figura 2.5: Aproximación $\tilde{y}^{h,\delta t}$ del estado óptimo mediante el método de elementos finitos con $h = 0,0625$ y $\delta t = 0,003$ en el tiempo 1 segundo.

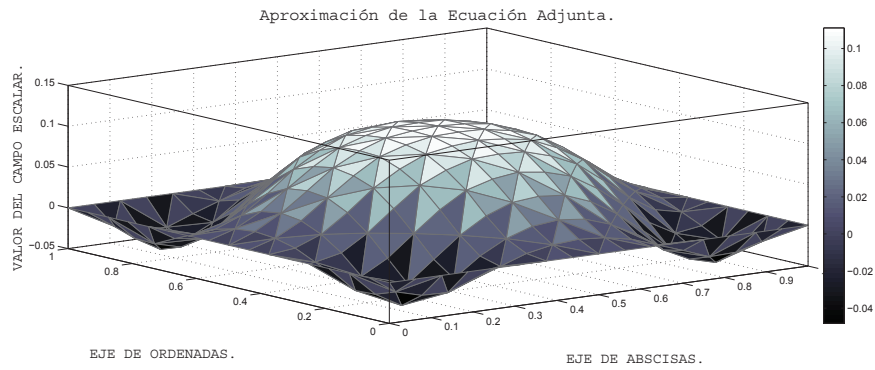


Figura 2.6: Aproximación del estado adjunto $\tilde{p}^{h,\delta t}$ mediante el método de elementos finitos con $h = 0,0625$ y $\delta t = 0,003$ en el tiempo inicial 0 segundos.

El **Algoritmo 1**, primal-dual de conjuntos activos, realiza 8 iteraciones para encontrar la aproximación del control óptimo. El tiempo de ejecución es de 3 minutos y 14 segundos. Notemos que el control óptimo se anula en la frontera y toma valores relevantes en la parte del dominio donde la densidad poblacional es mayor (Ver Figura 2.4), la cual corresponde a la parte central del dominio.

Capítulo 3

Error a posteriori para el control óptimo.

Con el objetivo de determinar cuan lejos está nuestra aproximación numérica de la solución analítica del problema de control, sin tener conocimiento a priori de ésta, se deducirá y calculará una estimación del error a-posteriori para el control óptimo. Ésta estimación provee un indicador del error cometido que nos permite diseñar un mecanismo para la construcción del modelo reducido. Realizamos ahora, el análisis de error a posteriori c.f.[4] para el control óptimo. Al final del capítulo se mostrará los resultados numéricos concernientes al error a posteriori para el control óptimo.

La idea es la siguiente: dado un elemento \tilde{u} en el conjunto de controles admisibles U_{ad} y asumiendo como premisa que el control óptimo \bar{u} es desconocido, nos hacemos la pregunta ¿qué tan lejos \tilde{u} está de \bar{u} ? Las condiciones de optimalidad suficientes de segundo orden (discutidas en el Capítulo 1) permiten realizar un análisis local. Estimaremos la distancia entre los dos controles utilizando una norma apropiada y además supondremos que \bar{u} existe en una vecindad de \tilde{u} . A \tilde{u} lo llamaremos control perturbado. Esta consideración será de gran utilidad cuando hayamos introducido el modelo reducido que tendrá como resultado una aproximación de \bar{u} .

La cantidad de error estimada a posteriori nos servirá para saber si el control perturbado se mantiene cerca de la solución real y mantenernos a una cierta precisión conveniente.

Recordemos la desigualdad variacional y la caracterización del control óptimo \bar{u} componente a componente:

$$\int_Q [\lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x)] (u(t, x) - \bar{u}(t, x)) \, dx dt \geq 0,$$

para todo $u \in U_{ad}$, y además \bar{u} verifica la caracterización componente a componente:

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) > 0, \\ \in [0, 1], & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) = 0, \\ 1, & \text{si } \lambda \bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x) \bar{p}(t, x) < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

A partir de (3.1) es posible contruir una función $\xi \in L^2(Q)$, la cual nos permitirá estimar

el error entre \tilde{u} y \bar{u} . Para lo cual, observamos que se verifica lo siguiente:

$$\begin{cases} \lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) \geq 0, & \text{si } \bar{u}(t, x) = 0, \\ \lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) = 0, & \text{si } 0 < \bar{u}(t, x) < 1, \\ \lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x) \leq 0, & \text{si } \bar{u}(t, x) = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Si $\tilde{u} \in U_{ad}$ y \tilde{y} , \tilde{p} representan a su estados asociado y adjunto respectivamente; argumentamos de la siguiente manera: si \tilde{u} es el control óptimo, entonces se verifica que $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) = 0$ para los $(t, x) \in Q$ donde $0 < \tilde{u}(t, x) < 1$, salvo conjuntos de medida cero. Si \tilde{u} no es el control óptimo entonces no se verifica que $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) = 0$ en los $(t, x) \in Q$ donde $0 < \tilde{u}(t, x) < 1$, por lo que definimos ξ de la siguiente manera:

$$\xi(t, x) = -[\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)],$$

para casi todo $(t, x) \in Q$. Ahora si, para los $(t, x) \in Q$ donde $0 < \tilde{u}(t, x) < 1$ se cumple la siguiente condición:

$$\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) + \xi(t, x) = 0.$$

Si \tilde{u} es el control óptimo, entonces en los puntos $(t, x) \in Q$ donde $\tilde{u}(t, x) = 0$, la desigualdad $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) \geq 0$ se cumple por la condición (3.2). Si \tilde{u} no es el control óptimo entonces se verifica: $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) + \xi(t, x) \geq 0$ para:

$$\xi(t, x) = [\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)]_-,$$

con $[a]_- = \frac{(|a| - a)}{2}$.

Si \tilde{u} es el control óptimo, entonces en los puntos $(t, x) \in Q$ donde $\tilde{u}(t, x) = 1$ la desigualdad $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) \leq 0$ se cumple por la condición (3.2). Si \tilde{u} no es el control óptimo entonces se verifica: $\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x) + \xi(t, x) \leq 0$ para:

$$\xi(t, x) = -[\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)]_+,$$

con $[a]_+ = \frac{(|a| + a)}{2}$. Finalmente, la función perturbación nos queda definida como sigue:

$$\bar{\xi}(t, x) := \begin{cases} [\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)]_-, & \text{si } \tilde{u}(t, x) = 0, \\ -[\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)], & \text{si } 0 < \tilde{u}(t, x) < 1, \\ -[\lambda\tilde{u}(t, x) - \tilde{y}(t, x)\tilde{p}(t, x)]_+, & \text{si } \tilde{u}(t, x) = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

La idea fundamental que conlleva el propósito de definir ξ es que \tilde{u} generalmente no coincide con el control óptimo del problema original, pero si con el del siguiente problema perturbado:

$$\min_{u \in U_{ad}} \tilde{f}(u) := \frac{1}{2} \|S(u)(T, \cdot) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \int_Q \xi(t, x)u(t, x) \, dx \, dt.$$

A continuación enunciamos el siguiente teorema, el cual nos da una cota del error y en el contexto de optimización, un predictor de error a posteriori para el problema de control óptimo **(P)**.

Teorema 9. Sean \bar{u} un control óptimo para (\mathbf{P}) , $\tilde{u} \in U_{ad}$ y ξ definido como en (3.3). Si $\|\tilde{u} - \bar{u}\|_{L^\infty(Q)} < \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeño, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2(Q)} \leq C\|\xi\|_{L^2(Q)}, \quad (3.4)$$

para una cierta constante $C > 0$.

Demostración. Sea $\tilde{u} \in U_{ad}$, sin pérdida de generalidad suponemos $\bar{u} \neq \tilde{u}$. Puesto que \bar{u} es el control óptimo entonces verifica la desigualdad variacional de las condiciones de optimalidad de primer orden:

$$(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}, u - \bar{u})_{L^2(Q)} \geq 0, \quad (3.5)$$

para todo $u \in U_{ad}$. En particular, tomando $u = \tilde{u} \in U_{ad}$ tenemos que:

$$(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p}, \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} \geq 0, \quad (3.6)$$

por otro lado, de la definición de ξ introducida en (3.3), se verifica la siguiente desigualdad variacional:

$$(\lambda\tilde{u} - \tilde{y}\tilde{p} + \xi, v - \tilde{u})_{L^2(Q)} \geq 0,$$

para todo $v \in U_{ad}$; por lo que, tomando $v = \bar{u}$ se cumple que:

$$(\lambda\tilde{u} - \tilde{y}\tilde{p} + \xi, \bar{u} - \tilde{u})_{L^2(Q)} \geq 0,$$

lo cual, por la linealidad del producto escalar es equivalente a:

$$-(\lambda\tilde{u} - \tilde{y}\tilde{p} + \xi, \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} \geq 0. \quad (3.7)$$

Sumando las expresiones (3.6) y (3.7) y sacando provecho nuevamente de la linealidad del producto escalar, se tiene que:

$$(\lambda\bar{u} - \bar{y}\bar{p} - [\lambda\tilde{u} - \tilde{y}\tilde{p} + \xi], \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} \geq 0. \quad (3.8)$$

Recordando lo hecho en las secciones de condiciones de optimalidad de primer y segundo orden, la desigualdad variacional (3.5) puede escribirse de la siguiente manera equivalente:

$$(f'(\bar{u}), u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{para todo } u \in U_{ad},$$

con f funcional reducido. Reescribiendo la expresión (3.8), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f'(\bar{u}) - f'(\tilde{u}) - \xi, \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} &\geq 0, \\ (f'(\bar{u}) - f'(\tilde{u}), \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} - (\xi, \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} &\geq 0, \end{aligned}$$

por tanto se verifican las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} (f'(\bar{u}) - f'(\tilde{u}), \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} &\geq (\xi, \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)}, \\ (f'(\tilde{u}) - f'(\bar{u}), \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} &\leq (\xi, \bar{u} - \tilde{u})_{L^2(Q)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Además, el teorema del valor medio c.f.[13] y la convexidad de U_{ad} nos garantizan la existencia de un $\hat{u} \in \{v \in L^\infty(Q) : v = \zeta\bar{u} + (1 - \zeta)\tilde{u} \text{ con } \zeta \in (0, 1)\} \subset U_{ad}$ tal que:

$$(f''(\hat{u})(\tilde{u} - \bar{u}), \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)} = (f'(\tilde{u}) - f'(\bar{u}), \tilde{u} - \bar{u})_{L^2(Q)}, \quad (3.10)$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz c.f.[13], podemos afirmar lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\xi, \bar{u} - \tilde{u})_{L^2(Q)} &\leq |(\xi, \bar{u} - \tilde{u})_{L^2(Q)}|, \\ &\leq \|\xi\|_{L^2(Q)} \|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $M > 0$. De las condiciones de optimalidad de segundo orden, sabemos que existe $\delta > 0$ que verifica la condición:

$$f''(\bar{u})(v, v) \geq \delta \|v\|_{L^2(Q)}^2,$$

para todo $v \in L^\infty(Q)$ tal que $\|\bar{u} - v\|_{L^\infty} < \delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Además para algún $0 < \delta' < \delta$, existe un radio $r(\delta') > 0$ tal que:

$$f''(\hat{u})(v, v) \geq \delta' \|v\|_{L^2(Q)}^2,$$

para $\hat{u} \in U_{ad}$ tal que $\|\hat{u} - \bar{u}\|_{L^\infty(Q)} < r(\delta')$. Tomando en particular $v = \tilde{u} - \bar{u}$, tenemos que

$$f''(\hat{u})(\tilde{u} - \bar{u})^2 \geq \delta' \|\tilde{u} - \bar{u}\|_{L^2(Q)}^2, \quad (3.12)$$

y suponiendo que \bar{u} se encuentra lo suficientemente cerca de \tilde{u} tal que: $\|\hat{u} - \bar{u}\|_{L^\infty(Q)} < r(\delta')$; al combinar los resultados (3.12), (3.11) y (3.10) en (3.9), se tiene:

$$\delta' \|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}^2 \leq M \|\xi\|_{L^2(Q)} \|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2(Q)},$$

donde finalmente, como $\bar{u} \neq \tilde{u}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2(Q)} &\leq \frac{M}{\delta'} \|\xi\|_{L^2(Q)}, \\ &= C \|\xi\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

para una constante $C > 0$. □

A continuación mostramos los resultados numéricos del error a posteriori para el control óptimo concernientes al problema (P_1) , planteado en la página 38. Si \bar{u} denota el control óptimo para el problema (P_1) y $\tilde{u}^{h,\delta t}$ su aproximación calculada por el Algoritmo 1; recordemos que el error a posteriori estima el error entre el control óptimo \bar{u} y su aproximación $\tilde{u}^{h,\tau}$. Es decir se verifica que:

$$\|\bar{u} - \tilde{u}^{h,\delta t}\|_{L^2(Q)} \leq C \|\xi\|_{L^2(Q)},$$

para una cierta constante $C > 0$. En el cuadro 3.1 mostramos los resultados obtenidos para dos discretizaciones espaciales y temporales en el tiempo 1 segundo:

h	δt	$\ \xi(1, \cdot)\ _{L^2(\Omega)}$
0,0625	0,0030	$2,746 \times 10^{-2}$
0,0312	0,0015	$3,036 \times 10^{-2}$

Cuadro 3.1: Error a posteriori entre el control óptimo \bar{u} y la aproximación numérica $\tilde{u}^{h,\delta t}$ calculada mediante el Algoritmo 1 en el tiempo 1 segundo.

Capítulo 4

Reducción del modelo de control óptimo.

A lo largo de las últimas décadas se ha estudiado diferentes métodos para reducir modelos de control óptimo y a consecuencia de esto existen diferentes técnicas desarrolladas con este fin.

En este capítulo introducimos una de las técnicas más efectivas para reducir modelos ampliamente utilizada en diversos problemas; ésta es conocida como el método POD, que aplicaremos a la ecuación logística de Fisher, utilizando una primera observación del modelo c.f.[17]. Esta técnica nos permite reducir considerablemente el cálculo de la aproximación numérica de dicha EDP. En problemas de control óptimo, a veces sólo es posible reducir numéricamente la aproximación de la ecuación de estado más no la ecuación adjunta, en otros casos es posible reducir las dos ecuaciones. Una idea evidente es calcular dos bases POD diferentes para la ecuación de estado y adjunta, para así reducir cada ecuación de manera separada, aunque esto significaría mayor gasto en los cálculos de las bases POD. Proponemos utilizar la base POD asociada tanto a la ecuación de estado como a la ecuación adjunta para reducir el cálculo del control óptimo. Es decir, el esquema de reducción es un sistema acoplado de la ecuación de estado y adjunta. Las ecuaciones de estado y adjunta están conectadas por el sistema de optimalidad desarrollado en el Capítulo 1. Analíticamente consideramos a la base POD como una base ortonormal completa. Aún aceptada esta hipótesis debemos utilizar el criterio de error a posteriori para el control óptimo, el cual nos permite estimar la calidad de nuestra aproximación. Además, el criterio de parada del algoritmo primal dual de conjuntos activos, visto en el capítulo anterior, nos da la confianza que la base POD calculada, también es apta para la reducción numérica del problema **(P)**.

Reducimos la ecuación de estado y adjunta asociadas al problema de control óptimo utilizando la base POD construida con dichas ecuaciones y así disminuimos el cálculo numérico de la aproximación del control óptimo en el método primal-dual de conjuntos activos, visto en el capítulo anterior.

4.1. Método POD para la ecuación de Fisher.

En esta sección realizamos una breve introducción del método POD para la ecuación de Fisher, el cual es la herramienta que utilizamos para proponer un modelo reducido del problema de control óptimo estudiado. La idea es construir una base ortonormal para el

espacio de la solución de la ecuación diferencial. Además, dicha base debe almacenar la información mas relevante del modelo al mismo tiempo que poseer una menor cantidad de elementos que construyen la aproximación de la solución en relación al modelo original. Es decir, el método POD es útil para realizar una aproximación de Galerkin asociada a la construcción de aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones de estado y adjunta. Empezemos estudiando la construcción de la base POD en el sentido de los mínimos cuadrados. Para un estudio de mayor profundidad sobre el método se recomienda consultar el trabajo realizado por S. Jijón [17].

Si $u \in U_{ad}$ y $y \in W(0, T)$ denota su correspondiente estado asociado, sabemos que $y \in C(0, T, H_0^1(\Omega))$; luego, consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{V} := \text{span}\{y(t) | t \in [0, T]\} \subset H_0^1(\Omega). \quad (4.1)$$

Como $y(0) = y_0 \neq 0$, luego $d = \dim(\mathcal{V}) \geq 1$, pero notemos que en principio \mathcal{V} es un espacio funcional de dimensión infinita. Sea el operador lineal y acotado $\mathcal{T} : L^2(0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}\varphi = \int_0^T \varphi(t)y(t)dt,$$

para $\varphi \in L^2(0, T)$. Al ser \mathcal{T} un operador lineal, su operador adjunto $\mathcal{T}^* : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(0, T)$ satisface que:

$$\langle \mathcal{T}\varphi, z \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \varphi, \mathcal{T}^*z \rangle_{L^2(0, T)},$$

para $(\varphi, z) \in L^2(0, T) \times H_0^1(\Omega)$ y está definido de la siguiente manera:

$$(\mathcal{T}^*z)(t) = \langle z, y(t) \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para cualquier $z \in H_0^1(\Omega)$ y casi todo $t \in [0, T]$.

El operador lineal y acotado $\mathcal{R} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{V} \subset V$ tiene la forma:

$$\mathcal{R}z = \int_0^T \langle z, y(t) \rangle_{H_0^1(\Omega)} y(t) dt,$$

para $z \in H_0^1(\Omega)$. Además, consideremos $\mathcal{K} = \mathcal{T}^*\mathcal{T} : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ definido por:

$$(\mathcal{K}\varphi)(t) = \int_0^T \langle y(s), y(t) \rangle_{H_0^1(\Omega)} \varphi(s) ds, \quad (4.2)$$

para $\varphi \in L^2(0, T)$.

Notemos que el operador \mathcal{R} es autoadjunto y compacto c.f.[4].

Haciendo uso del teorema de Hilbert-Schmidt c.f.[13] aseveramos que existe una base ortonormal completa $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$ de $\mathcal{V} = \text{imagen}(\mathcal{R})$ y una sucesión de números reales $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ tal que:

$$\mathcal{R}\varphi_i = \lambda_i\psi_i, \quad (4.3)$$

para $i = 1, \dots, d$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$. Para obtener una base ortonormal completa en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, necesitamos una base ortonormal para $(\text{rango}(\mathcal{R}))^\perp$. Lo cual

puede ser resuelto por el procedimiento de ortogonalización de Grand-Schmidt. Vamos a suponer que $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortogonal completa de $H_0^1(\Omega)$. Si $1 \leq d = \dim(\mathcal{V}) \leq \infty$, luego tenemos que $\lambda_i > 0$ para $1 \leq i \leq d$ y $\mathcal{R}\psi_i = 0$ para todo $i > d$.

Notemos que el operador lineal, acotado, compacto y autoadjunto \mathcal{K} tiene los mismos valores propios $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que el operador \mathcal{R} . Para $\lambda_i > 0$ las correspondientes funciones propias correspondientes de \mathcal{K} están dadas por:

$$v_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(T^*\psi_i)(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\langle \psi_i, y(t) \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para casi todo $t \in [0, T]$ y $1 \leq i \leq l$. A continuación enunciamos la propiedad que justifica la aplicación del método POD. En efecto, para los valores y funciones propias de \mathcal{R} y $l \in \mathbb{N}$ definimos la siguiente aplicación:

$$\mathfrak{J} : \underbrace{H_0^1(\Omega) \times \dots \times H_0^1(\Omega)}_{l\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{J}(\psi_1, \dots, \psi_l) := \int_0^T \left\| y(t) - \sum_{i=1}^l \langle y(t), \psi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} \psi_i \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt, \quad (4.4)$$

la cual es una medida de aproximación de la solución del estado del sistema en la base $\{\psi_i\}$.

Proposición 10. *Al ser $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert separable, $y \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ y \mathcal{V} es dado como en (4.1). Sea $\mathcal{K} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ definido en (4.2). Luego \mathcal{T} es acotado, autoadjunto, compacto y no negativo. Además existe $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo (4.3). También se verifica que para algún $l \leq d = \dim \mathcal{V}$, $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ resuelve el problema de minimización:*

$$\min_{\{\psi_i\}} \mathfrak{J}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l) \quad \text{s.t.} \quad \langle \tilde{\psi}_j, \tilde{\psi}_i \rangle = \delta_{ij},$$

para $1 \leq i, j \leq l$, junto con la condición:

$$\mathfrak{J}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l) = \sum_{i=l+1}^{\infty} \lambda_i.$$

Nótese que la última condición implica que el error cometido, en el sentido de (4.4) está dado por los valores propios menores a $i = l + 1, l + 2, \dots, \infty$.

4.2. Método POD discreto para la ecuación de Fisher.

El método POD en su versión discreta, permite aproximar matrices y vectores que conforman el modelo discreto de un modelo continuo con matrices y vectores correspondientes de tamaño mucho menor. Con este nuevo modelo, se puede calcular una aproximación numérica de la solución para modelos dinámicos respaldándonos en el método de proyección de Galerkin y utilizando la nueva base que genera un subespacio de dimensión finita del espacio original de soluciones. Sobre dicho espacio proyectamos nuestro sistema de dinámica poblacional.

4.2.1. Método de los snapshots. (Método de las capturas instantáneas)

Si $y = y(t, x) \in W(0, T)$ es una aproximación de la solución de la ecuación de Fisher:

$$y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa} \right], \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (4.5)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.6)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega. \quad (4.7)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio tipo Lipschitz. Dicha aproximación tiene inmersión continua en $C([0, T]; L^2(\Omega))$ y si $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_m = T$ es una partición del intervalo $[0, T]$. Diremos que, para $i = 1, \dots, m$, $y_i = y(t_i, x)$ es una snapshot de y al tiempo t_i c.f.[17]. Además sabemos que, por la condición de Dirichlet, $y(t_i, x) = 0$ en $\partial\Omega$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Sea $\mathcal{I} = \{y_j\}_{j=1}^m \subset L^2(\Omega)$ una familia de snapshots asociados a la ecuación de Fisher c.f.[17], al menos uno distinto de cero. Esta familia corresponde a una aproximación de la solución concerniente a cierta observación del sistema. Notemos $\mathcal{V}_m \subset L^2(\Omega)$ al espacio generado por los snapshots, es decir $V_m = \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Por el proceso de ortogonalización de Grand-Smith c.f.[13], dada $\{\psi_k\}_{k=1}^d$ una base ortonormal de \mathcal{V}_m con $d = \dim(\mathcal{V}_m)$, $d \leq m$ luego cada elemento de conjunto de las snapshots puede ser escrito de la siguiente forma:

$$y_j = \sum_{k=1}^d (y_j, \psi_k)_{L^2(\Omega)} \psi_k,$$

para toda $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Se busca una familia de funciones $\{\psi_k\}_{k=1}^l$ tal que para todo $l \in \{1, 2, \dots, d\}$ que resuelva:

$$(\hat{P}) \begin{cases} \min_{\{\psi_k\}_{k=1}^l} \sum_{j=1}^m \left\| y_j - \sum_{k=1}^l (y_j, \psi_k)_{L^2(\Omega)} \psi_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{sujeto a: } (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad \text{con } 1 \leq j, k \leq l. \end{cases} \quad (4.8)$$

A la familia $\{\psi_k\}_{k=1}^l$ que resuelve el problema (\hat{P}) se le conoce como base POD con rango l .

Para la construcción de la base POD dada por $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, definimos la matriz de correlación con entradas:

$$\mathcal{C}(i, j) = (y_i, y_j)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} y_i y_j \, dx, \quad (4.9)$$

para $i, j = 1, \dots, m$. Por como está definida \mathcal{C} , ésta es semidefinida positiva y simétrica. Es decir, sus valores propios son reales y positivos.

Consideremos el siguiente problema de minimización en dimensión finita:

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \min_{\{\psi_k\}_{k=1}^l} \sum_{j=1}^m \|y_j - \sum_{k=1}^l (y_j, \psi_k)_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ \text{sujeto a: } (\psi_k, \psi_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \end{cases}$$

para $1 \leq j, k \leq l \leq d$, donde n es el número de puntos de la discretización espacial. Además $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ y $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ representan la norma y producto usales en \mathbb{R}^n respectivamente. Por otro lado, δ denota a la distribución delta de Kronecker, definida de la siguiente manera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El problema de minimización anterior es equivalente al siguiente problema de maximización c.f.[17]:

$$(\check{P}) \begin{cases} \text{máx}_{\{\psi_k\}_{k=1}^l} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m |(y_j, \psi_k)_{\mathbb{R}^n}|^2 \\ \text{sujeto a: } (\psi_k, \psi_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \end{cases}$$

para $1 \leq j, k \leq l \leq d$.

Con el objetivo de resolver el problema de maximización anterior, introducimos el Lagrangeano asociado a (\check{P}) , $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{l \times l}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_l, \rho) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m |(y_j, \psi_k)_{\mathbb{R}^n}|^2 + \sum_{j,k=1}^l \lambda_{jk} [\delta_{kj} - (\psi_k, \psi_j)_{\mathbb{R}^n}],$$

para $\psi_1, \dots, \psi_l \in \mathbb{R}^n$ y la matriz diagonal $\rho \in \mathbb{R}^{l \times l}$ cuyas entradas son λ_{jk} , los valores propios de la matriz de correlación. Las condiciones de optimalidad de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}(\psi_1, \dots, \psi_l, \rho) \delta \psi_k = 0,$$

para toda $\delta \psi_k \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \{1, \dots, l\}$. De la condición anterior se sigue que, las condiciones de optimalidad de primer orden c.f.[17] para una base POD $\{\psi_\mu\}_{\mu=1}^{l+1}$ están dadas por:

$$\mathcal{C}\psi_\mu = \lambda_\mu \psi_\mu,$$

en \mathbb{R}^n y para $\mu \in \{1, \dots, l+1\}$.

A continuación enunciaremos dos proposiciones (para fines de consulta ver [17]) que avalarán la construcción de una base POD factible y proporcionarán una estimación de la diferencia de los y_j con su proyección sobre el subespacio de dimensión finita generado por la base POD.

Proposición 11. *Dados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$ los d valores propios más grandes de la matriz de correlación \mathcal{C} definida por (4.9) y $v_1, v_2, \dots, v_d \in \mathbb{R}^n$ sus vectores propios asociados. Entonces el conjunto $\{\psi_k\}_{k=1}^d$ dado por:*

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^m v_k^j y_j(x, \cdot), \quad (4.10)$$

donde $k = 1, \dots, d \leq m$ y v_k^j es la j -ésima componente del vector propio v_k , conforma un conjunto ortonormal de funciones de $L^2(\Omega)$ que resuelve el problema de minimización dado en (4.8). De ahora en adelante, llamaremos a este conjunto con el nombre de la base POD.

Proposición 12. *Para todo $l \leq d$ tenemos la siguiente fórmula de estimación del error de aproximación:*

$$\sum_{j=1}^m \|y(t_j) - \sum_{k=1}^l (y(t_j), \psi_k)_{L^2(\Omega)} \psi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=l+1}^d \lambda_k.$$

4.3. Modelo reducido de control óptimo.

La teoría enfocada a la reducción de un modelo de control óptimo nos motiva a proponer un esquema reducido basado en la construcción de un subespacio de dimensión finita del espacio solución de la ecuación de estado y adjunta. Así proponemos un esquema de Galerkin asociado a la base POD, con menor costo de cálculo que el esquema de Galerkin de elementos finitos referido en el Capítulo 2. Nótese que las funciones de la base POD están definidas sobre todo el dominio y no sólo localmente como es el caso de las funciones base de los elementos finitos que tienen soporte compacto; lo cual es eficiente pues estamos aprovechando valiosa información física del sistema.

A continuación introducimos el modelo reducido para el problema de control óptimo junto con el algoritmo para su programación subsiguiente.

4.3.1. Base POD para el esquema reducido.

En esta sección detallamos la construcción de la base POD utilizada para la reducción del cálculo de la aproximación del control óptimo (**P**).

Si $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_m = T$ es una partición del intervalo $[0, T]$ y sean las snapshots $\tilde{y}(\cdot, t_i)$, $\tilde{p}(\cdot, t_i)$, $i = 1, \dots, m$, de las soluciones de la ecuación de estado:

$$y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y = ry \left[1 - \frac{y}{\kappa}\right], \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (4.11)$$

$$y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.12)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (4.13)$$

y la ecuación adjunta:

$$-p_t - \gamma \Delta p + \left[u - r + \frac{2ry}{\kappa}\right] p = 0, \quad \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (4.14)$$

$$p(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.15)$$

$$p(T, x) = y(T, x) - y_\Omega(x), \quad \text{en } \Omega, \quad (4.16)$$

respectivamente, consideramos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{Z} = \{\tilde{y}(\cdot, t_1), \tilde{y}(\cdot, t_2), \dots, \tilde{y}(\cdot, t_m), \tilde{p}(\cdot, t_1), \tilde{p}(\cdot, t_2), \dots, \tilde{p}(\cdot, t_m)\}, \quad (4.17)$$

y llamemos z_i a los elementos de \mathcal{Z} , para $i = 1, \dots, 2m$. La matriz de correlación asociada al conjunto de primera observación (4.17), análoga a lo visto en (4.9), la escribimos como:

$$C(i, j) = (z_i, z_j)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} z_i z_j \, dx, \quad (4.18)$$

para $i, j = 1, \dots, 2m$. Donde C es semidefinida positiva y simétrica. Por tanto, sus valores propios son reales y positivos.

Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\tilde{d}} > 0$, los \tilde{d} valores propios más grandes de la matriz de correlación (4.18) y $v_1, v_2, \dots, v_{\tilde{d}} \in \mathbb{R}^n$ sus vectores propios asociados. Entonces el conjunto $\{\psi_k\}_{k=1}^{\tilde{d}}$ definido por:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^m v_k^j z_j(x, \cdot), \quad (4.19)$$

donde $k = 1, \dots, \tilde{d} \leq m$ y v_k^j es la j -ésima componente del vector propio v_k es la base POD asociada al conjunto de primera observación \mathcal{Z} .

Las ecuaciones de estado y adjunta serán resueltas numéricamente de manera análoga a lo hecho en el Capítulo 2 con la diferencia de que ahora las funciones test para el método de Galerkin, respecto a la variable espacial, serán las funciones ψ_i de la base POD, para $i = 1, \dots, l$; donde $l \in \mathbb{N}$ representa el truncamiento de los valores propios más significativos de la matriz de correlación (4.18).

La ecuación de estado y adjunta se aproximan como sigue:

$$y_l(x, t) = \sum_{j=1}^l \eta_j(t) \psi_j(x), \quad p_l(x, t) = \sum_{j=1}^l \rho_j(t) \psi_j(x),$$

donde $\eta_j(t)$ y $\rho_j(t)$ son las coordenadas de y y p en la base POD $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ respectivamente. Al tomar como hipótesis que $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ es una base ortonormal completa de $H_0^1(\Omega)$ luego se verifica lo siguiente:

$$y_l \rightarrow y \quad \text{y} \quad p_l \rightarrow p \quad \text{cuando} \quad l \rightarrow \infty.$$

Por facilidad de notación nos reservamos la escritura relacionada a la discretización temporal. El problema de control óptimo semidiscretizado reducido mediante el método POD, se escribe como sigue:

$$(P^\psi) \left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \|y_l(T, \cdot) - y_\Omega(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \\ \text{sujeto a:} \\ M^\psi \frac{\partial}{\partial t} \bar{y}^l(t) + \gamma A^\psi \bar{y}^l(t) + M_{u(t)}^\psi \bar{y}^l(t) = r M^\psi \bar{y}^l(t) - \frac{r}{k} M^\psi (\bar{y}^l(t))^2, \\ \bar{y}^l(0) = \bar{y}_0, \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \end{array} \right.$$

para casi todo $t \in (0, T)$, donde $\bar{y}^l : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$ representa la función $\bar{y}^l(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_l(t))^\top$ y las matrices M^ψ , A^ψ , $M_{u(t)}^\psi$ están dadas por:

- $M^\psi \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de masa para la base POD, con entradas:

$$M^\psi(i, j) = (\psi_i, \psi_j)_{L^2(\Omega)}.$$

- $A^\psi \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de rigidez para la base POD, con entradas:

$$A^\psi(i, j) = (\nabla \psi_i, \nabla \psi_j)_{L^2(\Omega)}.$$

- $M_{u(t)}^\psi \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es una matriz de masa pesada con entradas:

$$M_{u(t)}^\psi(i, j) = (u(t)\psi_i, \psi_j)_{L^2(\Omega)},$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$.

El estado adjunto asociado $\vec{p}^t : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$ queda determinado como la solución de la siguiente ecuación:

$$-M^\psi \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}^t(t) + \gamma A^\psi \vec{p}^t(t) + M_{u(t)}^\psi \vec{p}^t = r M^\psi \vec{p}^t - \frac{2r}{k} M_{\vec{y}^t(t)}^\psi \vec{p}^t(t), \quad \text{en } \Omega, \quad (4.20)$$

$$\vec{p}^t(T) = \vec{y}(T) - \vec{y}_\Omega, \quad (4.21)$$

donde:

- $M_{\vec{y}^t(t)}^\psi \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es una matriz de masa, con peso \vec{y}^t , con entradas:

$$M_{\vec{y}^t(t)}^\psi(i, j) = (\vec{y}^t(t)\psi_i, \psi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad (4.22)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$.

En lo que sigue, asumiremos que (P^ψ) tiene solución.

4.3.2. Ecuación de estado reducida.

De manera semejante a lo hecho en el capítulo anterior para la discretización de la ecuación de estado, aplicando la nueva aproximación respecto a la base POD-Galerkin (4.19) para la variable espacial, método de Euler implícito para la discretización temporal y el método de Newton para la no linealidad tenemos el esquema dado por el Algoritmo 2.

Algorithm 2 Ecuación de estado reducida.

Entrada : m (número de puntos en la discretización temporal), Ψ base POD. l (número de snapshots), y_1 (condición inicial), $u \in U_{ad}$ y $tol > 0$ (tolerancia relativo al método de Newton.)

Salida : Solución aproximada de la ecuación de estado de (P^ψ) , dada por w , mediante la reducción por POD.

1. Para $k = 1, 2, \dots, m - 1$ **calcular**:
 2. $w = y_{k+1}$, $v = y_k$,
 3. $F(w) = (M^\psi + \gamma \delta t A^\psi + \delta t M_u^\psi - \delta t r M^\psi)w + \frac{\delta t r}{k} M^\psi w^2 - M^\psi v$,
 4. $F'(w) = M^\psi + \gamma \delta t A^\psi + dt M_u^\psi - \delta t r M^\psi + \frac{2\delta t r}{k} M^\psi \text{diag}(w)$,
 5. Dado un w inicial:
 6. **mientras** $\|w - v\|_{L^2(\Omega)} < tol$, **resolver**:
 7. $F' dw = -F$,
 8. $v = w$.
 9. $w = w + dw$.
 10. **Fin.**
-

Notemos que una aproximación \tilde{y}^l de la ecuación de estado, calculada a partir del Algoritmo 2, tiene dimensión $l \times m$. El número de filas l se debe a la reducción mediante POD. Es decir cada columna de la matriz y representa una aproximación de la solución respecto a la base POD para cada tiempo $k\delta t$ con $k = 1, 2, \dots, m$ y δt paso de discretización temporal. Es necesario escribir y^l respecto a la base usual de elementos finitos; lo cual se logra de la siguiente forma:

$$\tilde{y} = \Psi \tilde{y}^l,$$

donde Ψ corresponde a la base POD dada en (4.19).

4.3.3. Ecuación adjunta reducida.

Para abordar la resolución numérica de la ecuación adjunta, reducida por el método POD, aplicamos la nueva aproximación respecto a la base POD-Galerkin para la variable espacial y método de Euler implícito para la discretización temporal. Este esquema lo mostramos en el Algoritmo 3.

Algorithm 3 Ecuación adjunta reducida.

Entrada : m (número de puntos en la discretización temporal). Ψ base POD. l (número de snapshots), \tilde{p}_m inicial, $u \in U_{ad}$ y $y \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$.

Salida : Solución aproximada de (4.14)-(4.16), dada por \tilde{p} , mediante la reducción de orden por POD.

2. Para $k = m - 1, m - 2, \dots, 1$. **Calcular:**

3. $G = M^\psi + \delta t \gamma A^\psi + \delta t M_{u_{k+1}}^\psi - \delta t r M^\psi + \frac{2\delta t r}{k} M_{y_{k+1}}^\psi$,

4. $b = M^\psi \tilde{p}_k$. **Resolver:**

5. $G \tilde{p}_{k+1} = b$.

6. **Fin.**

Una aproximación de la solución de la ecuación adjunta \tilde{p}^l , hallada a partir del Algoritmo 3, puede ser calculada en la base usual de elementos finitos de la siguiente manera:

$$\tilde{p} = \Psi \tilde{p}^l,$$

donde Ψ corresponde a la base POD dada en (4.19).

Proponemos dos algoritmos para la reducción del problema de control óptimo mediante técnicas POD. El Algoritmo 4 considera de entrada un número fijo de snapshots $l \in \mathbb{N}$ mientras que el Algoritmo 5, un número de snapshots que varía de acuerdo al criterio de error a posteriori.

El Algoritmo 4 se sustenta en la reducción realizada para la ecuación de estado y adjunta en el algoritmo del método primal-dual de conjuntos activos de orden reducido, mientras que motivándonos por la flexibilidad de las técnicas POD, en el Algoritmo 5 damos un algoritmo de modelo reducido más general con criterio de error a posteriori.

Algorithm 4 Primal-dual de conjuntos activos reducido.

Entrada: Ψ base POD. l (número de snapshots), $u_0 \in U_{ad}$ y $\mu_0 \in L^\infty(Q)$.

Salida: Soluciones aproximadas de (P^ψ) de la página 51, dadas por \tilde{u} y estado asociado \tilde{y} , mediante la reducción de orden por POD.

1. Definimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k^{1\psi} &= \{(t, x) \in Q : u_{k-1}^l(t, x) + \mu_{k-1}^l(t, x) > 1\}, \\ \mathcal{A}_k^{0\psi} &= \{(t, x) \in Q : u_{k-1}^l(t, x) + \mu_{k-1}^l(t, x) < 0\}, \\ \mathcal{I}_k^\psi &= Q \setminus (\mathcal{A}_k^{1\psi} \cup \mathcal{A}_k^{0\psi})\end{aligned}$$

2. Si $\mathcal{A}_k^{0\psi} = \mathcal{A}_{k-1}^{0\psi}$ y $\mathcal{A}_k^1 = \mathcal{A}_{k-1}^{1\psi}$ luego tenemos optimalidad.

3. **Fin.**

4. **Caso contrario**

5. Determinamos y_k^l y p_k^l con el Algoritmo 2 y Algoritmo 3 respectivamente.

6. Calculamos u_k^l de la siguiente manera:

$$u_k^l(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{en } \mathcal{A}_k^{0\psi}, \\ \frac{1}{\lambda} y_k^l p_k^l, & \text{en } \mathcal{I}_k^\psi, \\ 1, & \text{en } \mathcal{A}_k^{1\psi}. \end{cases}$$

7. Actualizamos μ_k :

$$\mu_k := -(\lambda u_k^l - y_k^l p_k^l),$$

8. $k := k + 1$.

9. Volvemos a 1.

10. **Fin.**

Algorithm 5 Modelo reducido con criterio de error a posteriori.

Entrada: Escogemos un $u \in U_{ad}$ de entrada, un número l de snapshots para la base POD, un número $l^{\text{máx}} > l$ y una tolerancia $tol > 0$.

Salida: Soluciones aproximadas de (P^ψ) de la página 51, dadas por \tilde{u} y estado asociado \tilde{y} , mediante criterio de error a posteriori.

1. Calculamos aproximaciones \tilde{y} y \tilde{p} de la soluciones de la ecuación de estado y adjunta respectivamente.
2. Determinamos una base POD de rango l utilizando la primera observación dada por \tilde{y} y \tilde{p} . Derivamos el esquema reducido mediante la base POD-Galerkin.
3. Calculamos $\tilde{u}^l, \tilde{y}^l, \tilde{p}^l$ asociadas a (P^ψ) .
6. Calculamos $\tilde{\zeta}^l$ como sigue:

$$\tilde{\zeta}^l := \begin{cases} [\lambda\tilde{u}^l - \tilde{y}^l\tilde{p}^l]_-, & \text{si } \tilde{u}^l = 0, \\ -[\lambda\tilde{u}^l - \tilde{y}^l\tilde{p}^l], & \text{si } 0 < \tilde{u}^l < 1, \\ -[\lambda\tilde{u}^l - \tilde{y}^l\tilde{p}^l]_+, & \text{si } \tilde{u}^l = 1. \end{cases}$$

7. Si $\|\tilde{\zeta}^l\| < tol$ o $l = l^{\text{máx}}$ luego

8. Paramos.

9. Caso contrario

10. Tomamos $l = l + 1$ y regresamos a 2.

11. Fin.

Capítulo 5

Pruebas numéricas del modelo reducido.

En este capítulo hacemos una breve descripción en lo que concierne a la programación del modelo reducido de control óptimo. Además mostramos resultados de pruebas numéricas concernientes al ejemplo dado al final del Capítulo 2 (Página 38). Así justificamos la teoría desarrollada en los capítulos anteriores y constatamos los beneficios y limitaciones de utilizar las técnicas POD. Nuestro objetivo es dar pie al desarrollo de mejores modelos reducidos a futuro.

5.1. Esquema numérico.

En esta sección resolvemos numéricamente el problema de control óptimo utilizando técnicas POD. La resolución del modelo ha sido llevado al cálculo de sistemas matriciales lineales de dimensión finita. Estos sistemas lineales son los que serán reducidos de orden conservando la información más relevante y significativa del modelo.

Para abordar la programación del modelo de control reducido es necesario resolver numéricamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y &= ry \left[1 - \frac{y}{\kappa}\right], & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \\y(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\y(0, x) &= y_0(x), & \text{en } \Omega.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}-p_t - \gamma \Delta p + \left[u - r + \frac{2ry}{\kappa}\right]p &= 0, & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \\p(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\p(T, x) &= y(T, x) - y_\Omega(x), & \text{en } \Omega,\end{aligned}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio tipo Lipschitz.

Las aproximaciones numéricas de las soluciones de las ecuaciones anteriores, las llamamos Z . Siguiendo el esquema de construcción de la base POD dada en las páginas 50-51, Z es una matriz de orden $n \times 2m$, donde n corresponde al número de nodos considerados en la

mallla del dominio, mientras que la cantidad m corresponde al número de la discretización temporal del intervalo $[0, T]$.

Además elegimos un número d de columnas de la matriz de primera observación Z (página 50). Dichas columnas las tomaremos equidistantes en los tiempos $t_i = i\delta t$ para $i = 1, \dots, d$, con δt constante. Por lo tanto, llamamos al conjunto $Z_{snap}(\cdot, j) = Z(\cdot, j)$ para $j = 1, \dots, d$, como el conjunto de snapshots.

La construcción numérica de la matriz de correlación, caracterizada en (4.18), se tomará de la siguiente manera:

$$C \approx Z_{snap}^\top M Z_{snap}, \quad (5.1)$$

con Z_{snap}^\top la matriz transpuesta de Z_{snap} y M la matriz de masa correspondiente a la base de los elementos finitos clásico.

Para el cálculo de los vectores y valores propios asociados a la matriz C utilizamos el comando *eig* del MATLAB, el cual devuelve dos matrices. La primera está constituida en sus columnas por los vectores propios que los notaremos como v_k , y la segunda es una matriz diagonal con los valores propios λ_k de C , para $k = 1, \dots, d$.

Dado $l \leq d$ un número de valores propios significativos (grandes) asociados a la matriz de correlación (5.1), construimos numéricamente la matriz Ψ (base POD de la página 42) donde, la k -ésima columna está dada como sigue:

$$\Psi(:, k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} Z_{snap} \psi_k, \quad (5.2)$$

y λ_k , ψ_k es el k -ésimo valor y vector propio asociado a la matriz de correlación (5.1) respectivamente.

Para construir las matrices de masa y rigidez correspondientes a la base POD-Galerkin, se seguirá los siguientes pasos:

La matriz de masa en la base POD, al ser Ψ una base ortonormal, está dada por:

$$M^\psi = I \in \mathbb{R}^{l \times l}, \quad (5.3)$$

donde I es la matriz identidad, mientras que la matriz de rigidez se aproxima de la siguiente manera:

$$A^\psi \approx \Psi^\top A \Psi, \quad (5.4)$$

donde A es la matriz de rigidez correspondiente a la base de los elementos finitos clásico.

Para el cálculo de las matrices M_u^ψ y M_y^ψ no podemos utilizar los comandos dados en MATLAB pues éstos funcionan con elementos lineales a soporte compacto y en nuestro caso las funciones POD están definidas en todo el dominio. Se usarán las siguientes aproximaciones con la utilización del método de aproximación de integración por fórmula

prismoidal c.f.[17]:

$$\int_{\Omega} y_k(t, x) \psi_i(x) \psi_j(x) \, dx \approx \sum_{\mu=1}^l y_k^{\mu}(t) \sum_{\nu=1}^{n_{\rho}} A_{\rho\nu} \psi_{\mu}(x_{\rho\nu}) \psi_i(x_{\rho\nu}) \psi_j(x_{\rho\nu}), \quad (5.5)$$

$$\int_{\Omega} u_k(t, x) \psi_i(x) \psi_j(x) \, dx \approx \sum_{\mu=1}^l u_k^{\mu}(t) \sum_{\nu=1}^{n_{\rho}} A_{\rho\nu} \psi_{\mu}(x_{\rho\nu}) \psi_i(x_{\rho\nu}) \psi_j(x_{\rho\nu}), \quad (5.6)$$

donde n_{ρ} es el número de triángulos que aproximan Ω (Ver triangulación del dominio en la página 37), $x_{\rho\nu}$ y $A_{\rho\nu}$ los centros de masa y áreas de estos triángulos respectivamente.

Además es necesario aproximar las proyecciones de algunas funciones respecto a la base POD c.f.[17]. Se lo hace de la siguiente manera:

$$y_k(t, x) \approx (y_k^h)^T M \Psi, \quad (5.7)$$

$$u_k(t, x) \approx (u_k^h)^T M \Psi, \quad (5.8)$$

donde M es la matriz de masa del método de elementos finitos.

5.2. Experimentos numéricos del modelo reducido por POD.

En esta sección presentamos la reducción del problema de control óptimo visto al final del Capítulo 2, página 38:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(u,y) \in U_{ad} \times W(0,1)} J(u, y) := \frac{1}{2} \|y(1, \cdot) - 0,5\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \\ \text{sujeto a:} \\ y_t - 0,01 \Delta y + u(t, x) y = y [1 - y], \quad \text{en } Q, \\ y(t, x) = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \text{en } \Omega, \\ u \in U_{ad}, \end{array} \right.$$

donde:

$$U_{ad} = \{u \in L^{\infty}(Q) \mid 0 \leq u(t, x) \leq 1 \text{ c.t.p. } (t, x) \in Q\},$$

y la condición inicial y_0 viene dada por:

$$y_0(x) = y_0(x_1, x_2) = 16x_1x_2(x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

Los resultados obtenidos nos sirven para verificar numéricamente nuestro esquema de reducción mediante POD. Aproximamos la solución del problema (P_1) en $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ el cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 y $Q = (0, 1) \times \Omega$.

Mostramos los resultados del modelo reducido por POD utilizando el Algoritmo 4, el decaimiento de los valores propios de la matriz de correlación y la estimación del error a posteriori entre el control óptimo \bar{u} del problema (P_1) y su aproximación numérica utilizando el esquema reducido.

Calculamos la base POD dada en (5.1) mediante una primera resolución numérica de las ecuaciones de estado y adjunta, siguiendo el esquema desarrollado en las páginas 34-37, con pasos de discretización espacial de $h = 0,0625$ y temporal de $\delta t = 0,003$. Para calcular la base POD utilizamos 400 snapshots.

En las Figuras 5.1 y 5.2 mostramos dos elementos de la base POD asociados a los dos valores propios más grandes. Éstos están definidos sobre todo el dominio.

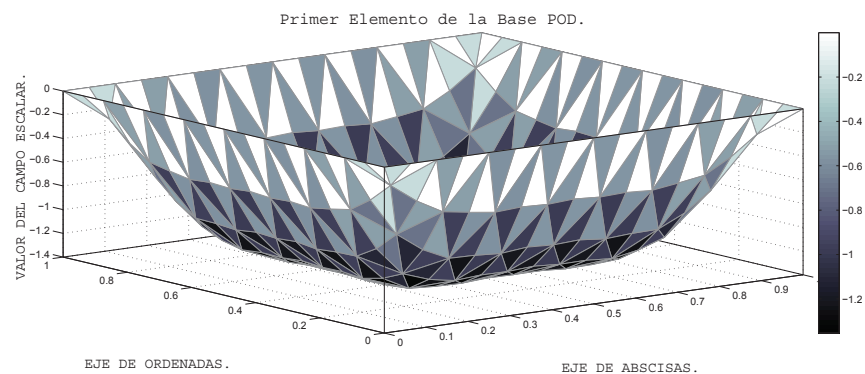


Figura 5.1: Elemento de la base POD asociado al primer valor propio de la matriz de correlación con $h = 0,0625$.

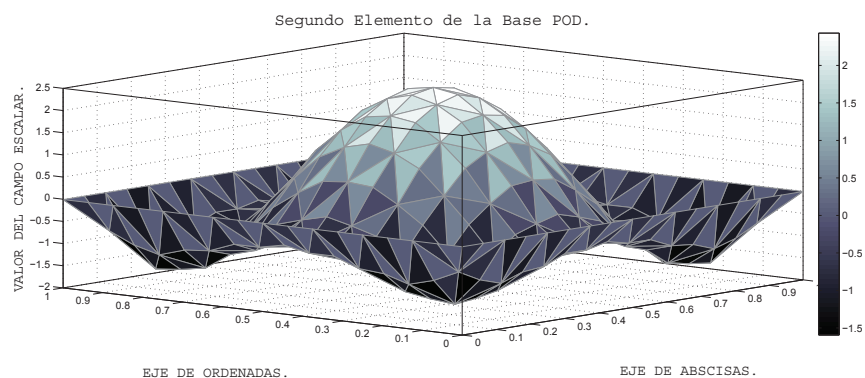


Figura 5.2: Elemento de la base POD asociado al segundo valor propio de la matriz de correlación con $h = 0,0625$.

En la Figura 5.3 y cuadro 5.1 exhibimos el decaimiento de los valores propios relativos de la matriz de correlación (5.1), con lo cual razonamos que basta tomar un número relativamente pequeño (entre 5 y 10) de elementos de la base POD para obtener una reducción aceptable que guarde la información mas relevante del sistema. El gráfico 5.3 es mostrado en escala logarítmica.

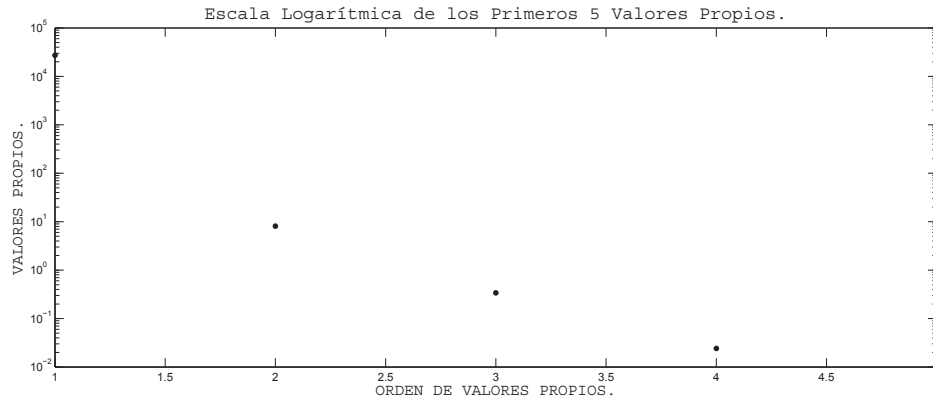


Figura 5.3: Decaimiento de los valores propios asociados a la matriz de correlación del método POD.

Índice.	Valores propios.
1	$2,725 \times 10^4$
2	$8,116 \times 10^0$
3	$3,399 \times 10^{-1}$
4	$2,414 \times 10^{-2}$
5	$1,314 \times 10^{-2}$

Cuadro 5.1: Los 5 primeros valores propios asociadas a la matriz de correlación del método POD.

Modelo reducido de control óptimo.

Resolvemos el problema de control óptimo (P_1), reducido mediante POD, usando el Algoritmo 4 y tomando $l = 10$ funciones de la base POD. El gráfico de la aproximación del control óptimo mediante el modelo reducido en el tiempo final (1 segundo) lo presentamos en la Figura 5.4. Las aproximaciones de los estados asociado y adjunto son presentados en las Figuras 5.5 y 5.6 respectivamente.

El Algoritmo 4 realiza 8 iteraciones para encontrar la aproximación del control óptimo. Observamos en la Figura 5.5 que la aproximación de la solución de la ecuación de estado óptima es continua, positiva y creciente en el tiempo. En la Figura 5.6 mostramos la aproximación de la solución de la ecuación adjunta asociada al control óptimo. Ésta también es continua en el tiempo.

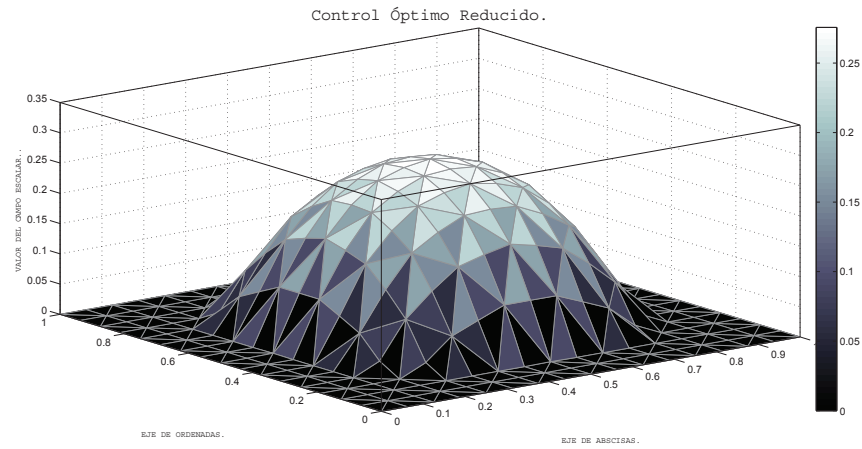


Figura 5.4: Reducción en la aproximación del control óptimo mediante POD con $h = 0,0625$, $\delta t = 0,003$ y $l = 10$ en el tiempo 1 segundo.

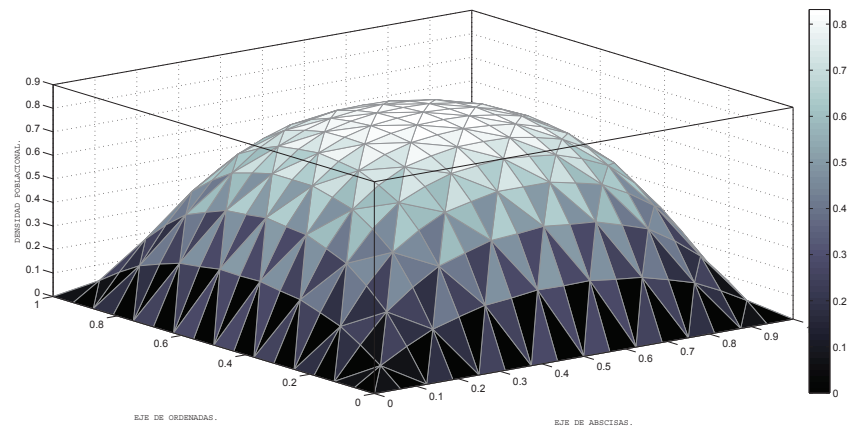


Figura 5.5: Aproximación del estado óptimo reducido mediante POD con $h = 0,0625$, $\delta t = 0,003$ y $l = 10$ en el tiempo 1 segundo.

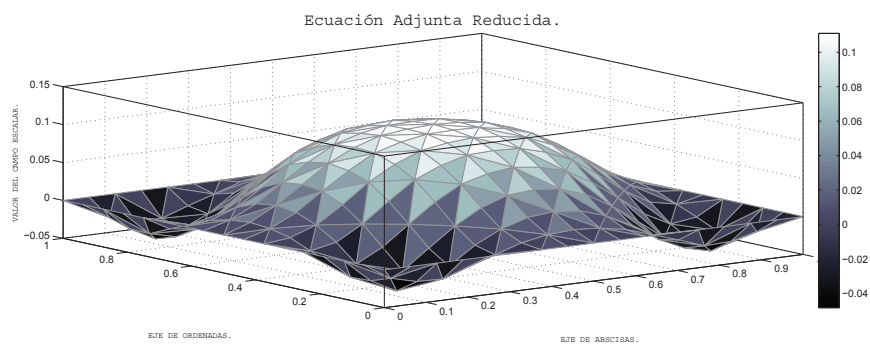


Figura 5.6: Aproximación del estado adjunto mediante POD con $h = 0,0625$, $\delta t = 0,003$ y $l = 10$ en el tiempo inicial 0 segundos.

Además, dado que l representa el número de valores propios más significativos de la matriz de correlación. En el cuadro 5.2 mostramos el tiempo que se toma el Algoritmo 4 para encontrar la aproximación del control óptimo considerando diferentes números de funciones propias de la base POD.

	Modelo reducido (POD)	Modelo completo (MEF)
l	Tiempo de ejecución.	Tiempo de ejecución.
5	1 minuto y 38 segundos.	3 minutos y 14 segundos.
7	1 minuto y 45 segundos	
10	2 minutos y 38 segundos.	

Cuadro 5.2: Tiempos de ejecución del Algoritmo 4 para diferentes números de elementos de la base POD.

Nótese que los tiempos en los que el Algoritmo 4 encuentra la aproximación del control óptimo, considerando diferentes números de elementos de la base POD, es menor al tiempo empleado por el Algoritmo 1 (3 minutos y 14 segundos) en el que no se realizó ninguna reducción.

Si \bar{u} denota al control óptimo del problema (P_1) de la página 59 y \tilde{u}^l a su aproximación calculada por el Algoritmo 4; a continuación presentamos el error a posteriori ξ para el control óptimo visto en el Capítulo 3. Éste estima el error cometido entre el control óptimo \bar{u} y su aproximación \tilde{u}^l . Es decir, se verifica que:

$$\|\bar{u} - \tilde{u}^l\|_{L^2(Q)} \leq C \|\xi\|_{L^2(Q)},$$

para una cierta constante $C > 0$. Las estimaciones de error a posteriori las mostramos en el cuadro 5.3, en el tiempo 1 segundo, para diferente número de funciones consideradas en la base POD.

l	$\ \xi(1, \cdot)\ _{L^2(\Omega)}$
5	$27,861 \times 10^{-3}$
7	$27,522 \times 10^{-3}$
10	$27,456 \times 10^{-3}$

Cuadro 5.3: Error a posteriori entre el control óptimo \bar{u} y la aproximación numérica \tilde{u}^l calculada mediante el Algoritmo 4.

Como es de esperarse, el gasto computacional del problema de control óptimo se concentra en la resolución de la ecuación de estado cuando la linealizamos mediante el método de Newton. La base POD construida como sistema acoplado de la ecuación de estado y adjunta ha servido para obtener una reducción aceptable en el cálculo de la aproximación numérica de la solución del problema de control óptimo. Evidenciamos que el orden del sistema matricial respecto al método de elementos finitos ha sido reducido de 289 a entre 5 y 10.

5.3. Conclusiones y recomendaciones.

A lo largo de este trabajo hemos notado que el estudio analítico de un problema de optimización es muy delicado e involucra herramientas muy poderosas sobre teoría de EDP's y teoría de optimización. Un buen análisis tanto numérico como analítico nos dará un modelo de control de dinámica poblacional aplicable a la realidad, el cual nos ayudará a entender el comportamiento de la población de una especie y controlar este fenómeno de acuerdo a nuestras necesidades.

Notamos que por las características físicas del modelo estudiado, éste puede ser extendido no solamente a problemas de dinámica poblacional, sino más bien a muchos fenómenos que involucren transformaciones de partículas dentro de un sistema físico debido a procesos de difusión y reacción.

Es claro que, el modelo propuesto mediante técnicas POD reduce el orden de las matrices asociadas al método de elementos finitos y consecuentemente disminuye el gasto en la búsqueda del control óptimo. Sin embargo, el precio que pagamos en contar con un modelo reducido es el gasto computacional en el cálculo de las matrices, principalmente de masa asociadas a la base POD-Galerkin; aunque éste es objetivamente menor. Además, el tiempo utilizado por el modelo reducido mediante POD para encontrar la aproximación del control óptimo es menor que el tiempo requerido por el modelo completo de elementos finitos, lo cual es de gran beneficio para obtener resultados numéricos con recursos computacionales limitados.

Al proponer un modelo reducido para el problema de control óptimo, con solución desconocida y sin un error a priori, es necesario considerar un criterio de error a posteriori, la cual es una cantidad que depende de una primera observación del comportamiento del sistema y nos permite apreciar la calidad de la aproximación de la solución obtenida. Junto a todas estas consideraciones ha ido de la mano el método de perturbaciones que nos revela que la aproximación de la solución de un problema de optimización no coincide con la solución del problema original pero sí con el de un problema perturbado. Ésto nos hace notar que si un problema de control es resuelto numéricamente con una base POD fija donde \bar{u} denota el control óptimo, entonces para un problema perturbado con solución $\bar{u} + \epsilon l$ para $\epsilon > 0$ pequeño y $l \in L^\infty(Q)$, es factible usar la misma base POD utilizada para el problema original.

Es imperativo ser minucioso en justificar analíticamente los criterios considerados para resolver el problema de control óptimo. Las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden son la base teórica de este trabajo de investigación, pues me permiten derivar algoritmos eficientes en la búsqueda del óptimo, los cuales constituyen el mayor aporte de este proyecto.

Debemos ser muy cautos en las hipótesis realizadas. Estas hipótesis muestran que tan aplicable y realista es nuestro modelo. Ahí recalca la importancia de realizar pruebas numéricas que nos ayuden a apreciar los resultados de manera tangible y darnos la posibilidad de variar parámetros del modelo para observar su comportamiento.

Anexos.

Definiciones.

Definición 4. Sea E un subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R}^n . Denotamos por $L^\infty(E)$ al espacio de todas las funciones medibles y esencialmente acotadas, dotadas de la siguiente norma:

$$\|y\|_{L^\infty(E)} = \text{ess sup}_{x \in E} |y(x)| := \inf_{|F|=0} \left(\sup_{x \in E \setminus F} |y(x)| \right),$$

donde $|F|$ representa la medida de Lebesgue del conjunto F .

Definición 5. Si $1 \leq p < +\infty$, se tiene que una sucesión $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ converge débilmente en $L^p(\Omega)$ a $f \in L^p(\Omega)$ si y solo si:

$$\int_{\Omega} f_n g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $g \in (L^p(\Omega))'$.

Definición 6. En el caso $L^\infty(\Omega)$, se tiene que $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ converge débil* en $L^\infty(\Omega)$ a $f \in L^\infty(\Omega)$ si y solo si:

$$\int_{\Omega} f_n g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $g \in L^1(\Omega)$.

Definición 7. Sea U un espacio de Banach real. Decimos que una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ converge débilmente a algún $u \in U$ si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u),$$

para toda $f \in U'$. Denotamos la convergencia débil con el símbolo “ \rightharpoonup ”, es decir, $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera Γ . Decimos que Ω , o Γ pertenece a la clase C^{k+1} , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si existen un finito número de sistemas de coordenadas S_1, \dots, S_M , funciones h_1, \dots, h_M y números $a > 0$ y $b > 0$, que verifican las siguientes propiedades:

(i) Las funciones h_i , $1 \leq i \leq M$, son k -veces diferenciable en el cubo $(N-1)$ -dimensional:

$$\bar{Q}_{N-1} = \{y = (y_1, \dots, y_{N-1}) : |y_i| \leq a, i = 1, \dots, N-1\},$$

y las derivadas parciales de orden k son Lipschitz continuas en \bar{Q}_{N-1} .

(ii) Para algún $P \in \Gamma$, existe $i \in \{1, \dots, M\}$ tal que, en el sistema de coordenadas S_i , existe algún $y \in \bar{Q}_{N-1}$ con $P = (y, h_i(y))$.

(iii) En el sistema de coordenadas local S_i , se verifique:

$$\begin{aligned} (y, y_N) \in \Omega &\Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{N-1}, \quad h_i(y) < y_N < h_i(y) + b; \\ (y, y_N) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega &\Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{N-1}, \quad h_i(y) - b < y_N < h_i(y). \end{aligned}$$

El significado geométrico de (iii) es que el dominio yace localmente en un lado de la frontera. Dominios y fronteras de clase $C^{0,1}$ son llamados dominios Lipschitz o dominios regulares y fronteras Lipschitz o fronteras regulares respectivamente.

Definición 9. Un operador $A : X \rightarrow Y$ es un operador lineal si verifica lo siguiente:

$$A[\tau u + v] = \tau Au + Av,$$

para todo $u, v \in X$, y $\tau \in \mathbb{R}$.

Definición 10. Un operador lineal $A : X \rightarrow Y$ es acotado si:

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_Y : \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Un resultado inmediato que se sigue de la definición anterior es que, un operador lineal es acotado si y solo si es continuo.

Definición 11. Sea H un espacio de Hilbert.

(i) Dos elementos se dicen ortogonales si $(u, v) = 0$, donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno del espacio de Hilbert.

(ii) Una base contable $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, se llama ortonormal si:

$$\begin{aligned} (w_k, w_l) &= 0, & (k, l = 1, \dots; k \neq l) \\ \|w_k\| &= 1, & (k = 1, \dots). \end{aligned}$$

Si $u \in H$ y $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ es una base ortonormal, podemos escribir:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k,$$

donde la serie es convergente en H . Además se verifica que:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k)^2.$$

Definición 12. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama convexa si se verifica que:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b),$$

para todo $a, b \in A$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definición 13. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto acotado y medible; y sea $\varphi = \varphi(x, y(x)) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. La aplicación Φ dada por

$$\Phi(y) = \varphi(\cdot, y(\cdot)),$$

la cual asocia a cada función $y : E \rightarrow \mathbb{R}$ con la función $z : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $z(x) = \varphi(x, y(x))$, es llamada un operador de Nemytskii.

Definición 14. Sean U, V espacios de Banach, \mathcal{U} un subconjunto no vacío y abierto de U , $F : \mathcal{U} \subset U \rightarrow V$ una función. Dado un $u \in \mathcal{U}$ y $h \in U$; si el siguiente límite:

$$\delta F(u, h) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (F(u + th) - F(u)),$$

existe en V , luego éste es llamado la derivada direccional de F , en u , en la dirección h .

Definición 15. Sean U, V espacios de Banach, \mathcal{U} un subconjunto no vacío y abierto de U . Una aplicación $F : \mathcal{U} \subset U \rightarrow V$ se dice Fréchet diferenciable en $u \in \mathcal{U}$ si existen un operador $A : U \rightarrow V$ lineal acotado y una aplicación $r(u, \cdot) : U \rightarrow V$ con las siguientes propiedades: para todo $h \in U$ tal que $u + h \in \mathcal{U}$, tenemos:

$$F(u + h) = F(u) + Ah + r(u, h),$$

donde r satisface la condición de que:

$$\frac{\|r(u, h)\|_V}{\|h\|_U} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \|h\|_U \rightarrow 0.$$

El operador A es llamado la derivada de Fréchet de F en u y escribimos $A = F'(u)$.

Definición 16. Sean los espacios de Hilbert reales $\{U, (\cdot, \cdot)_U\}$ y $\{V, (\cdot, \cdot)_V\}$. Además sea $A : U \rightarrow V$ un operador lineal acotado. Un operador A^* es llamado el operador adjunto de A si:

$$(v, Au)_V = (A^*v, u)_U,$$

para todo $u \in U$ y $v \in V$.

Resultados de interés.

Teorema 13. Convergencia dominada de Lebesgue. Asumimos que las funciones $\{f_k\}_k^\infty$ son integrables y se verifica:

$$f_k \rightarrow f,$$

en casi todas partes. Supongamos también que:

$$|f_k| \leq g,$$

en casi todas partes, para alguna función integrable g . Luego se verifica lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

Teorema 14. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea H un espacio de Hilbert, para todo $a, b \in H$, se verifica lo siguiente:

$$|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|,$$

donde (\cdot, \cdot) denota el producto escalar asociado al espacio de Hilbert H y $\|\cdot\|$ su norma asociada.

Teorema 15. Supongamos que la función $\varphi = \varphi(x, y(x)) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, referida en la Definición 13 del operador de Nemytskii, es medible con respecto a $x \in E$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y supongamos que φ es Lipschitz continua con respecto a “ y ” y además, satisface $|\varphi(x, 0)| \leq K$ para cierto $K > 0$ y casi todo $x \in E$. Entonces el operador de Nemytskii Φ asociado es continuo en $L^\infty(E)$.

Teorema 16. Si $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ y $g \in L^2(Q)$, la solución débil de la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\begin{aligned} y_t - \gamma \Delta y + u(t, x)y &= g, & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega, \\ y(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

pertenece a $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ c.f. [17] (Página 19, teorema 3) y existe un $C > 0$ tal que:

$$\|y\|_{W(0, T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq C (\|g\|_{L^2(Q)} + \|y_0\|_{C(\bar{\Omega})}).$$

Teorema 17. Crecimiento cuadrático. Si el par (\bar{u}, \bar{y}) satisface la desigualdad variacional (1.68) y verifica el problema de control óptimo **(P)**. Además supongamos que existen $\delta > 0$ y $\tau > 0$ tales que la condición de positividad (1.93) se satisface. Luego existen constantes $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ tales que para todo $v \in U_{ad}$ con $\|\bar{u} - v\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$ satisfacen la condición de crecimiento cuadrático:

$$J(v, y) \geq J(\bar{u}, \bar{y}) + \sigma \|v - \bar{u}\|_{L^2(Q)}^2,$$

donde $y = S(v)$. En particular \bar{u} es un control óptimo para el problema **(P)**.

Demostración. Recordemos que el operador control-estado $S : L^\infty(Q) \rightarrow W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ es dos veces Fréchet diferenciable por el **Teorema 7**. Denotemos $f(u) := J(u, y(u)) = J(u, S(u))$ el problema de control óptimo con funcional reducido dado en (1.8), deducimos de c.f. [7] (Teorema 4.25, página 242) lo siguiente:

$$f''(\bar{u})[v_1, v_2] = \mathcal{L}''(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p})[(v_1, y_1), (v_2, y_2)], \quad (5.9)$$

donde \bar{p} es el estado adjunto asociado al par (\bar{u}, \bar{y}) mientras que $y_i = S'(\bar{u})v_i$ para $i = 1, 2$. Por el **Teorema 4**, y_i es la solución de la siguiente ecuación lineal:

$$\begin{aligned} y_{it} - \Delta y_i + \left[\bar{u} - r + \frac{2r}{\kappa} \bar{y} \right] y_i &= -v_i \bar{y}, & \text{en } Q, \\ y_i(t, x) &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ y_i(0, x) &= 0, & \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. De esta manera podemos realizar la siguiente acotación en términos de la norma $L^2(Q)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|f''(\bar{u})[v_1, v_2]| &\leq |\mathcal{L}''(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p})[(v_1, y_1), (v_2, y_2)]|, \\
&\leq c\{\|y_1\|_{W(0,T)}\|y_2\|_{W(0,T)} + \|y_1\|_{W(0,T)}\|v_2\|_{L^2(Q)} \\
&\quad + \|y_2\|_{W(0,T)}\|v_1\|_{L^2(Q)} + \|v_1\|_{L^2(Q)}\|v_2\|_{L^2(Q)}\}, \\
&\leq c\|v_1\|_{L^2(Q)}\|v_2\|_{L^2(Q)},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

para $c > 0$. Utilizamos la continuidad del operador $S'(\bar{u})$ en la representación $y_i = S'(\bar{u})v_i$ como una aplicación de $L^\infty(Q)$ en $W(0, T)$. Además $f'(\bar{u})$ puede ser expresado de la siguiente manera:

$$f'(\bar{u})h = \int_Q (\lambda\bar{u}(t, x) - \bar{y}(t, x)\bar{p}(t, x)) h(t, x) \, dx \, dt.$$

A continuación realizamos la expansión de Taylor de segundo orden para f en \bar{u} . Sea $v \in U_{ad}$ tal que $\|\bar{u} - v\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$ para ε suficientemente pequeño. Además, si notamos $\rho := \lambda\bar{u} - \bar{y}p$ tenemos la desigualdad componente a componente:

$$\rho(t, x)(v(t, x) - \bar{u}(t, x)) \geq 0,$$

para casi todo $(t, x) \in Q$. Tomemos $h(t, x) = v(t, x) - \bar{u}(t, x)$, luego tenemos la siguiente expansión de segundo orden alrededor de \bar{u} :

$$\begin{aligned}
f(v) - f(\bar{u}) &= f'(\bar{u})h + \frac{1}{2}f''(\bar{u})h^2 + r_2^f, \\
&\geq \int_{A_\tau(\bar{u})} \rho(t, x)h(t, x) \, dxdt + \frac{1}{2}f''(\bar{u})h^2 + r_2^f, \\
&\geq \tau \int_{A_\tau(\bar{u})} |h(t, x)| \, dxdt + \frac{1}{2}f''(\bar{u})h^2 + r_2^f,
\end{aligned}$$

donde $r_2^f = r_2^f(\bar{u}, h)$ denota el residuo de segundo orden de la expansión de Taylor de f y $A_\tau(\bar{u})$ definido como en la página 30. Realizamos la descomposición $h := h_0 + h_1$, donde:

$$\begin{aligned}
h_0(t, x) &= \begin{cases} h(t, x), & \text{si } (t, x) \notin A_\tau(\bar{u}), \\ 0, & \text{si } (t, x) \in A_\tau(\bar{u}), \end{cases} \\
h_1(t, x) &= \begin{cases} h(t, x), & \text{si } (t, x) \in A_\tau(\bar{u}), \\ 0, & \text{si } (t, x) \notin A_\tau(\bar{u}). \end{cases}
\end{aligned}$$

Por construcción, tenemos que $h_0 \in C_\tau(\bar{u})$ i.e. satisface las condiciones del *cono crítico* (1.92). Con esas funciones se sigue que:

$$f(v) - f(\bar{u}) \geq \tau \int_{A_\tau(\bar{u})} |h(t, x)| \, dxdt + \frac{1}{2}f''(\bar{u})(h_0 + h_1)^2 + r_2^f. \tag{5.11}$$

Utilizando la condición de positividad (1.93) y la representación (5.9), existe una constante $\delta > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2}f''(\bar{u})h_0^2 \geq \frac{\delta}{2}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2.$$

Usando la desigualdad de Young c.f.[8], concluimos de (5.10) que para una constante $c > 0$:

$$\begin{aligned}
|f''(\bar{u})[h_0, h_1]| &\leq c\|h_0\|_{L^2(Q)}\|h_1\|_{L^2(Q)}, \\
&\leq \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c\|h_1\|_{L^2(Q)}^2, \\
&\leq \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c\|h_1\|_{L^1(Q)}\|h_1\|_{L^\infty(Q)}, \\
&\leq \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c_1\varepsilon\|h_1\|_{L^1(Q)},
\end{aligned}$$

ya que $\|h_1\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$, para c_1 una constante positiva. Además, se verifica que:

$$\left| \frac{1}{2}f''(\bar{u})h_1^2 \right| \leq c\|h_1\|_{L^2(Q)}^2 \leq c_2\varepsilon\|h_1\|_{L^1(Q)}.$$

Combinando las desigualdades de arriba tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f''(\bar{u})(h_0 + h_1)^2 &\geq \frac{\delta}{2}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 - \left[\frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + (c_1 + c_2)\varepsilon\|h_1\|_{L^1(Q)} \right], \\
&\geq \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 - (c_1 + c_2)\varepsilon\|h_1\|_{L^1(Q)}.
\end{aligned}$$

Escogemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $(c_1 + c_2)\varepsilon \leq \tau/2$. Como $h_1 = 0$ en $Q \setminus A_\tau$, podemos inferir que:

$$\|h_1\|_{L^1(Q)} = \int_{A_\tau(\bar{u})} |h_1| \, dx \, dt.$$

Sustituyendo las desigualdades anteriores en (5.11), tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(v) - f(\bar{u}) &\geq \tau \int_{A_\tau(\bar{u})} |h| \, dx \, dt - \frac{\tau}{2} \int_{A_\tau(\bar{u})} |h| \, dxdt + \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f, \\
&\geq \frac{\tau}{2} \int_{A_\tau(\bar{u})} |h| \, dxdt + \frac{\delta}{4}\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f.
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, escogemos $\varepsilon \leq 1$, luego por la definición de h tenemos que $|h(t, x)| \geq h(t, x)^2$; de donde:

$$\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 = \int_{Q \setminus A_\tau(\bar{u})} h^2 \, dxdt,$$

finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
f(v) - f(\bar{u}) &\geq \frac{\tau}{2} \int_{A_\tau(\bar{u})} h^2 \, dxdt + \frac{\delta}{4}\|h\|_{L^2(Q \setminus A_\tau(\bar{u}))}^2 + r_2^f, \\
&\geq \min \left\{ \frac{\tau}{2}, \frac{\delta}{4} \right\} \|h\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f.
\end{aligned}$$

Además podemos ver que se verifica lo siguiente:

$$\frac{r_2^f(\bar{u}, h)}{\|h\|_{L^2(Q)}^2} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \|h\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0,$$

de donde, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos la siguiente acotación:

$$f(v) - f(\bar{u}) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\tau}{2}, \frac{\delta}{4} \right\} \|h\|_{L^2(Q)}^2 = \sigma \|h\|_{L^2(Q)}^2,$$

lo cual afirma el crecimiento cuadrático. □

■ **Gráficos.**

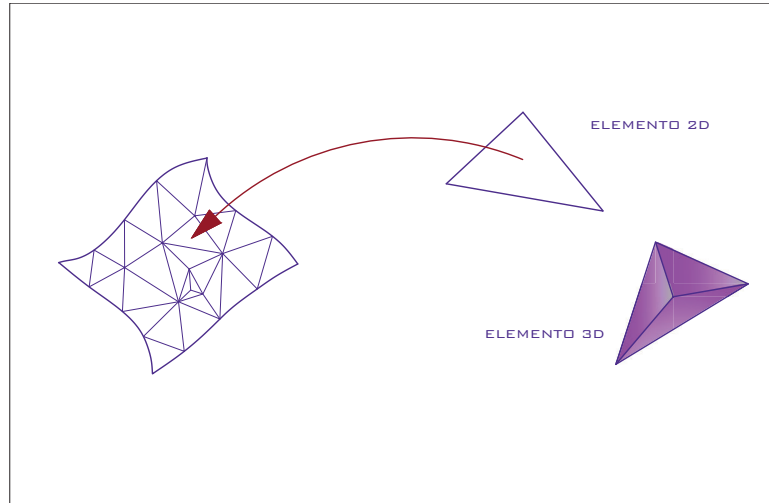


Figura 5.7: Polinomio de Lagrange de grado 1 asociado al método de elementos finitos-Galerkin.

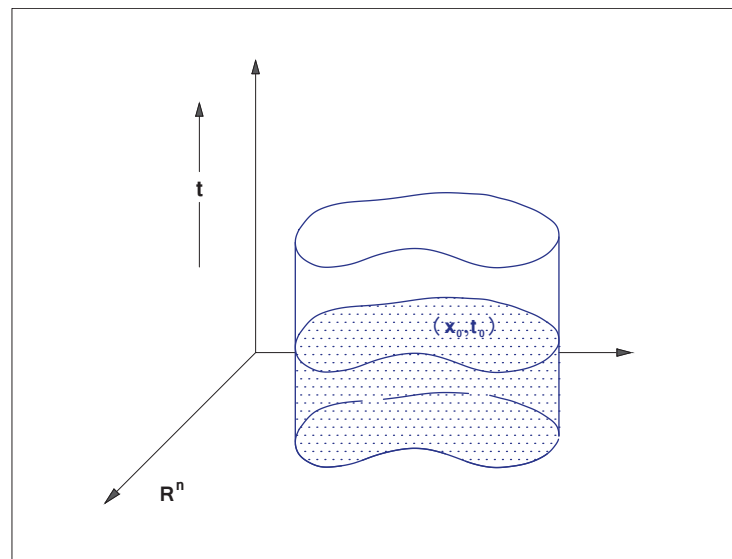


Figura 5.8: Cono tempo-espacial asociado a problemas de evolución.

Bibliografía

- [1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. Numerical Mathematics. Springer, 2000.
- [2] B. Alexander, Existencia de Soluciones no Triviales para problemas de Dirichlet no lineales. Tesis previa a la obtención de Magister en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2010.
- [3] E. Kamman, F. Tröltzsch, and S Volwein. A Method of a Posteriori Error Estimation with Applications with Proper Orthogonal Descomposition, aún no publicado. 2012.
- [4] E. Kamman, F. Tröltzsch, and S Volwein. A Posteriori Error Estimation For Semi-linear Parabolic Optimal Control Problems with Applications to Model Reduction by POD. 2012.
- [5] E. Kreyszig, Introductory Functional Analisis with Applications. JW&S 1989.
- [6] F. Tröltzsch, S. Volkwein. POD A-posteriori Error Estimates for Linear-Quadratic Optimal Control Problems. AMS, 2017.
- [7] F. Tröltzsch. Optimal Control of Partial Differential Equations. AMS, USA 2010.
- [8] H. Brezis. Functional Analysis, Sovolev Spaces and Parcial Diferential Equations. Springer 2010.
- [9] H. Joshi, G. Herrera, S. Lenhart, M. Neubert. Optimal Dynamic Harvest of A Mobile Renewable Resource. Vol 22. Natural Resource Modeling.
- [10] H. Joshi and S. Lenhart[2004], Solving a Parabolic Identification Problem by Optimal Control Methods, Houston J. Math. 30(4), 1221-1242.
- [11] J. C. de los Reyes. Análisis Numérico para las Ecuaciones Diferenciales Parciales. EPN 2008.
- [12] J. C. de los Reyes. A Primal-dual Active Set Method for Bilaterally Control Constrained Optimal Control of the Navier-Stokes Equations. 2004.
- [13] L. Evans. Partial Differential Equations. AMS, USA, 1998.
- [14] M. Gunsburguer, Modeling and analysis of the forced Fisher equation. Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, IA 50011-2064, USA
- [15] M. Neubert[2003], Marine Reserves and Optimal Harvesting, Ecol. Lett. 6(9), 843-849.

- [16] R. Fister[1997], Optimal Control of Harvesting in a Predator-Prey Parabolic System, Houston J. Math. 23, 341-355.
- [17] S. Jijón and P. Merino. Reducción del Modelo de Fisher Utilizando el Metodo POD. Proyecto de titulación previo a la obtención de Matemático, Escuela Politécnica Nacional, 2012.
- [18] S. Lenhart y M. Bhat[Febrero 1998]” Applications of Distributed Parameters Control Model in Wildlife Damage Management” Vol 2. Mathematical Models.