

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

**APLICACION DE ONDILLAS A LA DETECCION DE
ENFERMEDADES DEL CORAZON**

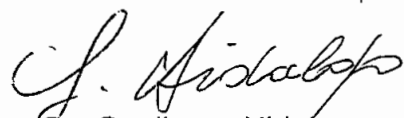
Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero en Electrónica y
Telecomunicaciones

ANTONIO ALEXANDER FRANCO CRESPO

QUITO - ECUADOR

OCTUBRE, 1999

Certifico que el presente trabajo ha sido desarrollado en su totalidad por el señor Antonio Franco Crespo.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'G. Hidalgo', written in a cursive style.

Dr. Gualberto Hidalgo
Director de tesis.

AGRADECIMIENTOS

A Jesús por marcarme el sendero, a todos los que hacen la Politécnica Nacional, a la Facultad de Ingeniería Eléctrica y en especial al Dr. Gualberto Hidalgo.

DEDICATORIA

A mis Padres y Hermanos que han sido los pilares
de mi vida.

INDICE

ABSTRACTO

Capítulo Uno: CORAZON Y ELECTROCARDIOGRAMA	1
1.1 Introducción	1
1.2 Anatomía y fisiología del corazón.	3
1.3 Origen de las señales del electrocardiograma.	8
1.4 Definición de los trazos electrocardiográficos.	11
1.4.1 Complejos electrocardiográficos normales.	11
1.4.2 Valores normales de los intervalos.	13
1.5 Derivaciones electrocardiográficas.	14
1.5.1 Derivaciones estándar de extremidades.	14
1.5.2 Derivaciones precordiales (Torácicas).	17
1.5.3 Derivaciones unipolares aumentadas de miembros.	20
1.6 Enfermedades cardiacas: hipertrofia ventricular.	21
1.6.1 Anormalidades anatómicas y fisiológicas que producen la morfología electrocardiográfica.	21
1.6.2 Hipertrofia ventricular izquierda.	22
1.6.3 Hipertrofia ventricular derecha.	24
Capítulo Dos: TRANSFORMADA DE ONDILLAS	26
2.1 Introducción.	26
2.2 El aparecimiento de la transformada de ondillas.	28
2.3 Definiciones matemáticas previas.	31
2.4 Transformada de Fourier con ventana.	34
2.5 Definición de transformada de ondillas.	36
2.6 Tipos de transformadas de ondillas.	38
2.6.1 Transformada continua de ondillas.	39
2.6.2 Transformada discreta con redundancia (Tramas).	40
2.6.3 Bases ortonormales.	41

Capítulo Tres: ANALISIS MULTIRRESOLUCION	43
3.1 Introducción.	43
3.2 Modelos multicanal y fisiología de la visión.	44
3.3 Multirresolución y ondillas.	47
3.4 Algoritmo para la descomposición por ondillas.	50
3.5 Semejanza con la teoría de filtros.	57
Capítulo Cuatro: ONDILLAS EN LA MEDICINA	61
4.1 Introducción.	61
4.2 Coeficientes filtro y gráficos de φ y ψ .	63
4.2.1 Base de Haar.	65
4.2.2 Base de Daubechies.	67
4.2.3 Base B-Spline.	70
4.2.4 Coiflets.	72
4.3 La transformada de ondillas aplicada a la detección de enfermedades del corazón.	75
Capítulo Cinco: RESULTADOS Y CONCLUSIONES	78
5.1 Presentación de los resultados obtenidos en el análisis de electrocardiogramas.	78
5.1.1 Hipertrofia ventricular izquierda severa.	78
5.1.2 Hipertrofia ventricular izquierda.	88
5.1.3 Hipertrofia ventricular derecha.	98
5.1.4 Criterios de diagnóstico.	106
5.2 Mejores Bases.	109
5.3 Acerca del algoritmo usado.	122
5.4 Propiedades de filtrado de las ondillas.	124
5.5 Conclusiones generales.	127
ANEXOS	
Anexo 1: Manual de funcionamiento del software Wavelet.	129
Anexo 2: Fotocopias de los electrocardiogramas digitalizados.	133
BIBLIOGRAFIA	

ABSTRACTO

El presente trabajo utiliza la transformada de ondillas para analizar electrocardiogramas digitalizados y presenta los resultados de comparar ECGs que corresponden a personas enfermas con sanas, para emitir criterios de diagnóstico de hipertrofias ventriculares.

La transformada de ondillas provee una buena resolución en tiempo y frecuencia a diferencia de la transformada de Fourier. Esta característica es muy importante en el análisis de señales biomédicas, que son de naturaleza no estacionaria y tienen características complejas en el tiempo y la frecuencia.

La transformada de ondillas (o wavelet transform en inglés) es una nueva herramienta que pasa los datos o funciones u operadores originales a diferentes componentes de frecuencia y estudia cada componente con una resolución ligada a esta escala.

Las ondillas que forman bases ortonormales tienen una utilidad muy grande en el análisis multirresolución, utilizan un basto rango de escalas para el análisis de una señal, la descomponen con ayuda de un grupo de canales de frecuencia, de un ancho de banda constante, sobre una escala logarítmica. La transformada de ondillas actúa como un microscopio matemático que permite analizar diferentes partes de la señal ajustando el foco.

Capítulo Uno: CORAZON Y ELECTROCARDIOGRAMA

1.1 Introducción	1
1.2 Anatomía y fisiología del corazón.	3
1.3 Origen de las señales del electrocardiograma.	8
1.4 Definición de los trazos electrocardiográficos.	11
1.5 Derivaciones electrocardiográficas.	14
1.6 Enfermedades cardiacas: hipertrofia ventricular.	21

Capítulo Uno : CORAZON Y ELECTROCARDIOGRAMA

1.1 INTRODUCCION

El corazón es el órgano central en la circulación en el hombre y está constituido por el miocardio, que es una pared de fibras musculares unidas por tejido conjuntivo, está revestido exterior e interiormente por una membrana cerosa llamada pericardio y endocardio respectivamente.

El corazón se contrae setenta u ochenta veces por minuto, mediante el acortamiento de las fibras musculares. Entre las contracciones se establecen periodos de relajación en los que la sangre penetra en las cavidades. Estas contracciones están provocadas por un sistema nervioso autónomo, regulado por el sistema vegetativo bajo el gobierno de un núcleo situado en el bulbo (centro cardiaco) y por influencias hormonales (adrenalina, etc.).

El tamaño, capacidad, duración del ciclo cardiaco, y otras características del corazón y del sistema circulatorio no son una constante, dependen de muchos factores como son: la edad, el sexo, la actividad a la que se dedica la persona, etc.

Durante el ciclo cardiaco, las fibras musculares del corazón se polarizan y despolarizan eléctricamente produciendo diferencias de potencial del orden de los milivoltios. Un electrocardiógrafo es un aparato que

registra las corrientes eléctricas emanadas del músculo cardiaco, a estos registros gráficos se los llama electrocardiogramas.

El electrocardiograma (ECG) es una prueba de laboratorio que ayuda al diagnóstico de las enfermedades del corazón, sin embargo, no se puede tener una seguridad absoluta si no se lo relaciona con otros datos clínicos.

Con los avances de la electrocardiografía, ha aumentado enormemente la precisión del diagnóstico electrocardiográfico. El ECG tiene un valor especial en las siguientes situaciones clínicas:

- Hipertrofia auricular y ventricular.
- Infarto al miocardio.
- Arritmias.
- Pericarditis.
- Padecimientos generalizados que afectan al corazón.
- Efectos de medicamentos cardiacos, especialmente la digital y la quinina.
- Trastornos en el metabolismo electrolítico, especialmente las anomalías de potasio. [10]

1.2 ANATOMIA Y FISILOGIA DEL CORAZON

El corazón está ubicado en la parte media de la cavidad torácica, sobre el diafragma, entre los dos pulmones, por detrás del peto externo costal que lo protege. El corazón se halla mantenido en su posición por su continuidad con los grandes vasos, que de él salen y a él llegan.

El corazón es un músculo hueco de tamaño variable, más grande en los deportistas; de forma cónica, cuya base mira hacia arriba y a la derecha y el vértice o punta, hacia abajo y a la izquierda.

El corazón desempeña a la vez de bomba aspirante e impelente, atrayendo a sus cavidades la sangre que circula por las venas e impulsándola por otra parte a las dos arterias, la aorta y la pulmonar, y por medio de estas, a todas las redes capilares del organismo.

El corazón está dividido por dos surcos, uno transversal y otro longitudinal, en cuatro cavidades, dos pequeñas y dos grandes. Las primeras se llaman aurículas y las segundas ventrículos, separadas las de un lado de las del opuesto, por un tabique interno interventricular e interauricular.

Cada aurícula se comunica con su ventrículo por medio de los orificios aurículo ventriculares.

En realidad existen dos corazones completamente separados, uno derecho y otro izquierdo, cada uno formado por su aurícula y su ventrículo respectivo.

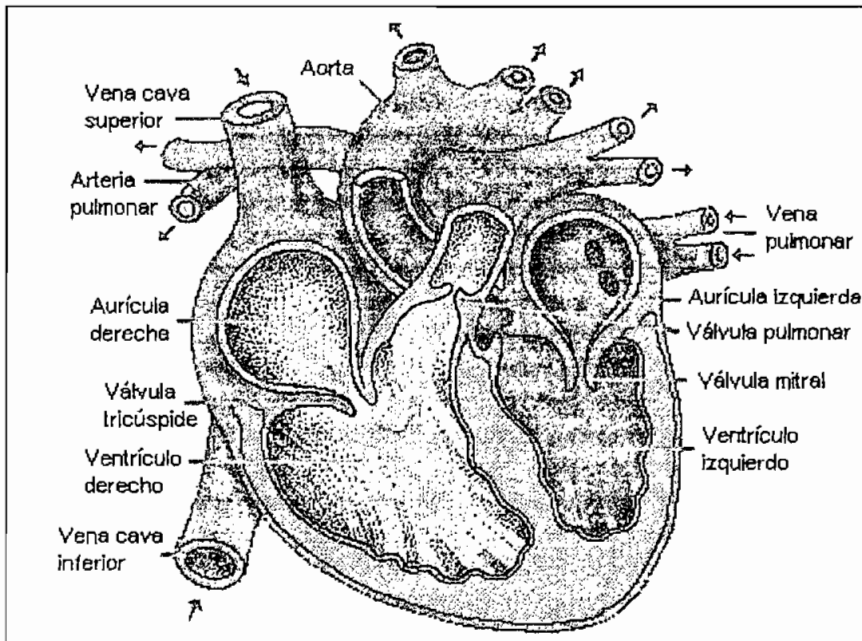


Figura 1.1: Corte transversal del corazón.

Las aurículas situadas hacia arriba, a más de ser pequeñas, están formadas por paredes delgadas y lisas en su parte interna; en cambio los ventrículos, situados hacia abajo, son más grandes y gruesos. Su superficie interna está cruzada por una serie de eminencias llamadas columnas carnosas del corazón, siendo las principales, los pilares, de cuyos vértices parten las cuerdas tendinosas que van a terminar en formaciones membranosas que ocluyen los orificios aurículo ventriculares, son las válvulas.

La válvula derecha se llama tricúspide por estar formada de tres repliegues, y la izquierda, bicúspide o mitral por tener tan solo repliegues, y por parecerse a una mitra de obispo.

Además del orificio aurículo ventricular, cada ventrículo presenta un orificio arterial, el pulmonar en el derecho y el aórtico en el izquierdo; a este nivel se encuentran unas membranas semilunares que ocluyen estos orificios, se llaman válvulas sigmoideas. En las aurículas se encuentran también otros orificios, correspondientes a las desembocaduras de las venas pulmonares en la aurícula izquierda y de las cavas en la derecha.

Las arterias nacen siempre en los ventrículos, las venas terminan en las aurículas.

Por su estructura el corazón es un músculo estriado, cuyas fibras se cruzan y entrecruzan formando asas y remolinos, se llama miocardio.

La superficie interna está cubierta por una membrana llamada endocardio; así como la externa, por otra, el pericardio dispuesto en forma de saco con dos hojas, la parietal y la visceral, destinadas a su protección. A su inflamación se la llama pericarditis.

El miocardio está irrigado por los vasos coronarios que se distribuyen en el espesor del órgano.

La coloración del corazón varía según los individuos y estados patológicos, desde el rosa claro al rojo oscuro. Su superficie exterior presenta a trechos líneas y hasta placas amarillentas, debidas a masas adiposas entre las capas de fibras musculares y el pericardio. Apenas bosquejadas en el nacimiento, aumentan con bastante rapidez en la pubertad y son mayores en el anciano, aun enflaquecido.

El volumen del corazón varía según el sexo y la edad. El Dr. Laennec comparaba el volumen del corazón con el puño. Dicha aproximación es muy poco precisa, son muchas las profesiones que hacen variar el volumen de la mano sin tener sobre el corazón influencia alguna. Bizot ha llegado a los resultados mostrados en la tabla 1.1. [20]

EIDADES	HOMBRES		MUJERES	
	LONGITUD	ANCHURA	LONGITUD	ANCHURA
De 1 a 4 años	52 mm	61 mm	51 mm	58 mm
De 5 a 9 años	70mm	74 mm	60 mm	65 mm
De 10 a 15 años	77 mm	83 mm	77 mm	70 mm
De 16 a 29 años	95 mm	103 mm	87 mm	96 mm
De 30 a 49 años	97 mm	108 mm	94 mm	100 mm
De 50 a 79 años	105 mm	119 mm	105 mm	105 mm

Tabla 1.1: Tamaño del corazón según la edad y el sexo.

El peso del corazón aumenta también con la edad y es más elevado en el hombre que en la mujer. En números redondos, el corazón, en el hombre

adulto, pesa en termino medio 270 a 275 gramos. Para las mujeres el peso es un poco menor, está alrededor de 250 gramos.

Ciclo cardiaco. El periodo que va desde el final de una contracción cardiaca hasta el final de la contracción siguiente se denomina ciclo cardiaco. El ciclo cardiaco incluye un periodo de relajación denominado diástole, seguido de un periodo de contracción denominado sístole. Cuando las aurículas están en diástole los ventrículos están en sístole y viceversa.

Sístole y diástole en las aurículas. La sangre llega por las venas hacia las aurículas, llenando estas cavidades distendiéndose. Una vez llenas se contraen y envían hacia los orificios aurículo ventriculares provistos de las válvulas tricúspides y mitral. Ante la presencia de la presión sanguínea, estas válvulas se abren y dejan pasar la sangre hacia los ventrículos. La sangre que pasa a los ventrículos no puede regresar hacia las venas, porque una nueva cantidad ha llegado a ellas para llenarlas otra vez.

Sístole y diástole de los ventrículos. Al abrirse los orificios aurículo ventriculares, la sangre llena los ventrículos. En este momento, en los ventrículos existen además los orificios arteriales, podría escapar por allí la sangre, pero las válvulas sigmoideas caen impidiendo su salida, produciéndose la diástole ventricular.

Como consecuencia de la presión sanguínea, las paredes ventriculares se contraen, se cierran los orificios aurículo ventriculares por medio de las válvulas y se abren los orificios arteriales pasando la sangre hacia las arterias, lo cual constituye la sístole ventricular. La sangre no puede regresar a los ventrículos por que las válvulas sigmoideas caen inmediatamente impidiendo su retroceso.

Debido a la presión de la sangre sobre las válvulas aurículo ventriculares, podría retroceder a las aurículas, pero esto no sucede debido a que están unidas por medio de las cuerdas tendinosas a los pilares del corazón, medio que les permite solo ocluir los orificios respectivos.

1.3 ORIGEN DE LAS SEÑALES DEL ELECTROCARDIOGRAMA

El electrocardiograma (ECG) es un registro gráfico de los potenciales eléctricos producidos en relación con el latido cardiaco. El corazón es singular entre los músculos del cuerpo, en vista de que posee la propiedad de contracción rítmica automática. Los impulsos que preceden a la contracción nacen en el sistema de conducción del corazón, estos impulsos producen la excitación de las fibras musculares a través del miocardio. La formación del impulso y su conducción producen corrientes eléctricas débiles que se extienden a través de todo el cuerpo.

Se pueden considerar tres estados para las membranas del miocardio

- Inactividad, estado en el cual las células están polarizadas.
- Actividad, que hace que las células se despolaricen.
- Recuperación, que es el momento en que las células se han repolarizado.

Estos cambios de estado de las membranas producen diferencias de potencial del orden de los milivoltios, que deben ser registradas para su estudio y análisis en aparatos de gran sensibilidad que son conocidos como electrocardiógrafos.

El potencial de la membrana en inactividad en el músculo cardiaco normal es aproximadamente de -85 a -95 mV. El potencial en actividad que se registra en el músculo cardiaco aumenta en 105 mV, lo cual significa que el potencial de membranas aumenta desde su valor normal muy negativo a un valor ligeramente positivo de aproximadamente $+20$ mV. [11]

El electrocardiógrafo, actuando como un galvanómetro, registra las diferencias de potencial producidas por el estímulo llegando a la fibra muscular a través del tejido especializado de conducción.

Los cambios eléctricos debidos a la actividad del músculo cardiaco se registrarán de manera correcta, como se registra la actividad de cualquier otro músculo, solo si el paciente está en reposo completo y con los músculos relajados.

El electrocardiograma normal está constituido por una onda P, un complejo QRS, y una onda T. El complejo QRS en realidad incluye tres ondas separadas, la Q, la R y la S.

La onda P depende de corrientes eléctricas generadas cuando las aurículas se despolarizan antes de la contracción, y el complejo QRS es producido por corrientes nacidas cuando los ventrículos se despolarizan antes de contraerse. Así pues, la onda de despolarización se difunde por los ventrículos. Por lo mismo, tanto la onda P como los componentes del complejo QRS son ondas de despolarización.

La onda T es causada por corrientes nacidas cuando los ventrículos se recuperan del estado de despolarización. Este proceso ocurre en el músculo ventricular, 0.25 a 0.30 de segundos después de la despolarización, y esta onda se conoce como onda de repolarización. Así pues, el ECG está formado por dos ondas, una de despolarización y una de repolarización.

1.4 DEFINICION DE LOS TRAZOS ELECTROCARDIOGRAFICOS

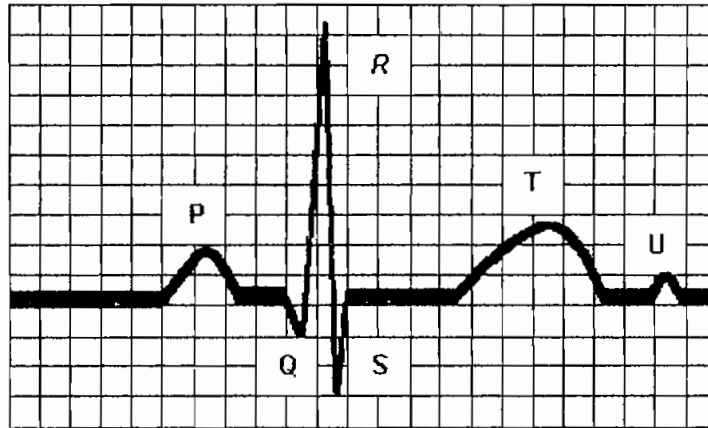


Figura 1.2: Electrocardiograma normal.

El papel electrocardiográfico contiene líneas horizontales y verticales a intervalos de 1 mm. Se observa una línea más gruesa cada 5 mm. El tiempo se mide en las líneas horizontales: 1 mm = 0.04 segundos; 5 mm = 0.2 segundos. El voltaje se mide en las líneas verticales y se expresa en milímetros (10 mm = 1 mV). En la práctica electrocardiográfica habitual, la velocidad de registro es de 25 mm/s.

1.4.1 Complejos electrocardiográficos normales

Onda P. Es la deflexión producida por la despolarización de ambas aurículas, derecha e izquierda. La onda P es la primera deflexión positiva vista en el ECG.

Onda T_a (o P_r). Es la deflexión producida por la repolarización auricular. Esta deflexión habitualmente no se observa en el ECG habitual de 12 derivaciones.

Onda Q. Es la deflexión negativa inicial producida por la despolarización ventricular. Esta deflexión precede a la primera deflexión positiva (R).

Onda R. Es la primera deflexión positiva del proceso de despolarización ventricular.

Onda S. Es la primera deflexión negativa de la despolarización ventricular que sigue a la primera deflexión positiva (R).

Onda T. Es la deflexión producida por la repolarización ventricular, representa la recuperación eléctrica de la contracción ventricular, los electrones se desplazan para recuperar su posición normal de reposo. La onda T se aplana cuando el corazón no recibe suficiente oxígeno.

Onda U. Es una deflexión (habitualmente positiva) que se ve después de la onda T y precede a la siguiente onda P. La causa de esta onda se desconoce, aunque actualmente se piensa que es el resultado de la repolarización lenta del sistema de conducción intraventricular. [11]

1.4.2 Valores normales de los intervalos

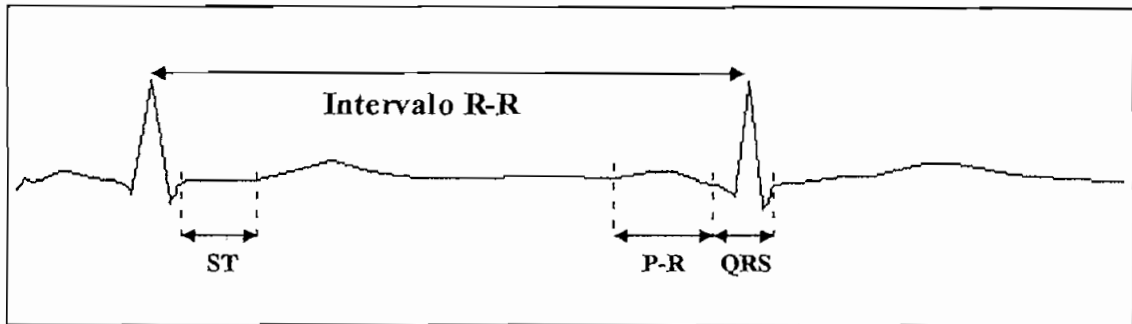


Figura 1.3: Intervalos normales en un electrocardiograma.

Complejo QRS. Mide el total del tiempo de despolarización ventricular. Se mide desde el principio de la onda Q (o de R si no se ve la onda Q) hasta el final de la onda S. El límite superior de la normalidad es de 0.1 segundos en las derivaciones del plano frontal.

Intervalo R-R. Es la distancia entre dos ondas R sucesivas. El intervalo en segundos entre los vértices de dos ondas R sucesivas dividido entre 60 dará la frecuencia cardiaca por minuto.

Intervalo P-R. Es la porción del trazo electrocardiográfico desde el inicio de la onda P hasta el principio del complejo QRS. De ordinario este intervalo es de aproximadamente 0.16 segundos.

Segmento ST. Es la porción del trazo que va desde el punto donde termina el complejo QRS hasta el principio de la onda T.

Intervalo Q-T. La contracción del ventrículo dura esencialmente entre la onda Q y el final de la onda T. Este intervalo de tiempo de ordinario dura 0.30 segundos.

1.5 DERIVACIONES ELECTROCARDIOGRAFICAS

Al tomar registros electrocardiográficos se utilizan posiciones estándar para colocar los electrodos. Que la polaridad del registro durante cada ciclo cardiaco sea positiva o negativa depende de la orientación de los electrodos con respecto al flujo de corriente en el mismo corazón. A continuación se exponen algunos de los sistemas convencionales de electrodo, denominados generalmente derivaciones electrocardiográficas.

1.5.1 Derivaciones estándar de extremidades

Derivación I. Al registrar la derivación I de extremidades la terminal negativa del electrocardiógrafo se conecta al brazo derecho y la positiva al brazo izquierdo.

Derivación II. Al registrar la derivación II de extremidades, la terminal negativa del electrocardiógrafo se conecta al brazo derecho y la positiva a la pierna izquierda.

Derivación III. Para registrar la derivación III, la terminal negativa del electrocardiógrafo se une al brazo izquierdo y la positiva a la pierna izquierda.

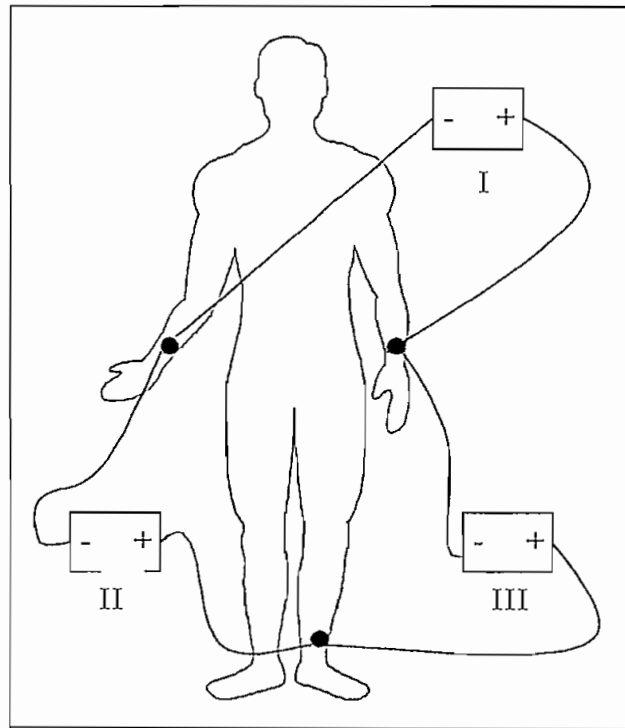


Figura 1.4: Disposición usual de los electrodos para registrar las derivaciones electrocardiográficas estándar.

Ley de Einthoven. La ley de Einthoven¹ dice que si se registran los potenciales eléctricos de dos cualesquiera de las tres derivaciones electrocardiográficas estándar, la tercera puede deducirse matemáticamente de las dos primeras, simplemente sumándolas (pero obsérvese que cuando se hace la suma es necesario ver los signos positivos y negativos de las diferentes derivaciones).

¹ Willen Einthoven, en 1901, ideó el primer electrocardiógrafo.

Como todos los electrocardiogramas normales son muy parecidos entre sí, no tiene gran importancia cual sea la derivación electrocardiográfica registrada cuando se desea diagnosticar las diferentes arritmias cardiacas, ya que el diagnóstico de las arritmias depende sobre todo de las relaciones cronológicas, principalmente entre las diferentes ondas del ciclo cardiaco.

Por otra parte, cuando se desea determinar el grado y tipo de lesión ocurrida en ventrículos o aurículas, tiene gran importancia cuáles son las derivaciones empleadas, ya que las anomalías del músculo cardiaco cambian mucho el trazado electrocardiográfico en algunas derivaciones y pueden no afectar en absoluto otras.

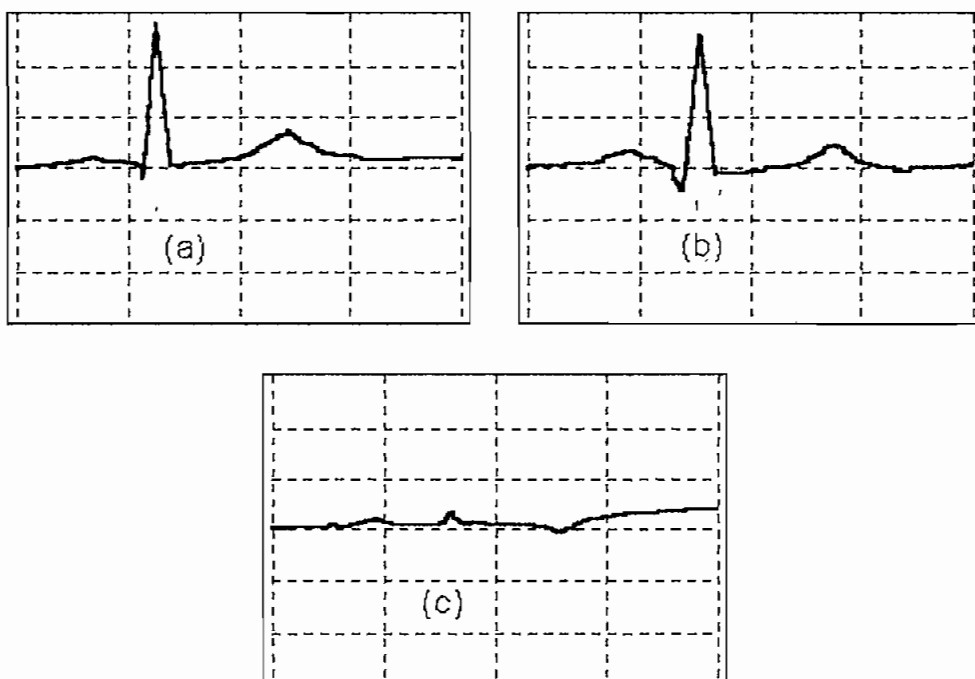


Figura 1.5: Electrocardiograma normal. (a) Derivación I. (b) Derivación II.
(c) Derivación III.

1.5.2 Derivaciones precordiales (Torácicas)

Muchas veces se registran electrocardiogramas con un electrodo colocado en la cara anterior del tórax encima del corazón. Este electrodo se conecta a la terminal positiva del electrocardiógrafo, y el electrodo negativo, denominado electrodo indiferente, se conecta a través de resistencias eléctricas al brazo derecho, el izquierdo y la pierna izquierda simultáneamente.

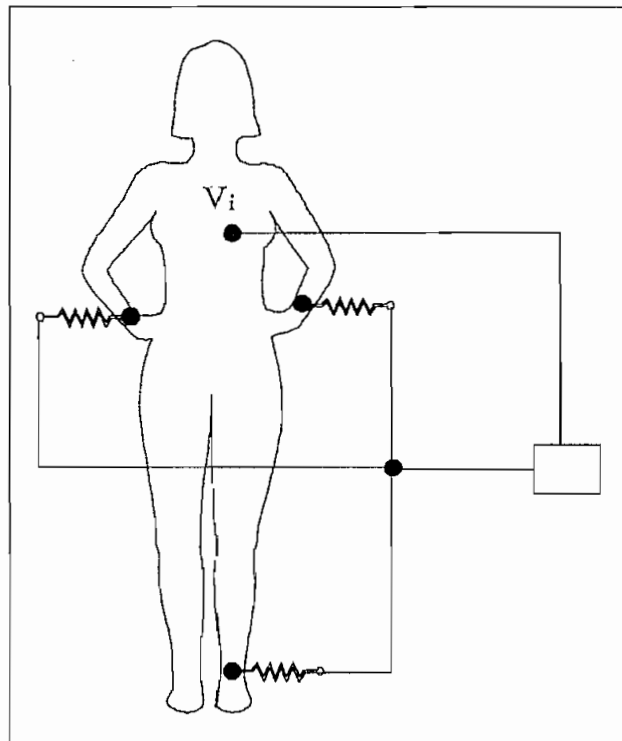


Figura 1.6: Conexiones del cuerpo con el electrocardiógrafo para registrar derivaciones torácicas.

Generalmente se registran seis derivaciones torácicas estándar a nivel de la pared anterior del tórax, colocando el electrodo precordial en alguno de los seis puntos siguientes

- V1: Intersección del cuarto espacio intercostal derecho con el borde derecho del esternón.
- V2: Intersección del cuarto espacio intercostal izquierdo y borde izquierdo del esternón.
- V3: A la mitad de la distancia entre V2 y V4.
- V4: Intersección de quinto espacio intercostal izquierdo y línea media clavicular.
- V5: A la misma altura de V4 en la intersección con la línea axilar anterior.
- V6: A la misma altura de V4 y V5 en la intersección con la línea axilar media.

Las diferentes derivaciones registradas por el método ilustrado se denominan V1, V2, V3, V4, V5 y V6.

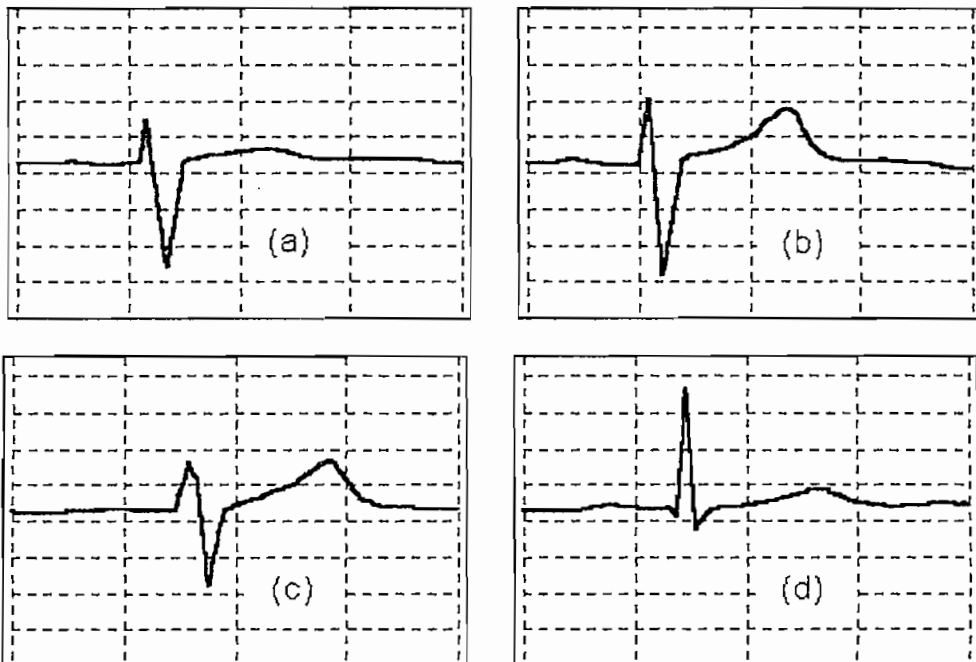


Figura 1.7: Electrocardiogramas normales. (a) Derivación V1. (b) Derivación V2. (c) Derivación V3. (d) Derivación V4.

Como la superficie del corazón está cerca de la pared torácica, cada derivación torácica registra principalmente el potencial eléctrico de la musculatura cardíaca inmediatamente por debajo del electrodo. En consecuencia, anomalías relativamente pequeñas en los ventrículos, sobre todo en la pared ventricular anterior, suelen causar cambios muy intensos en los electrocardiogramas obtenidos mediante derivaciones torácicas.

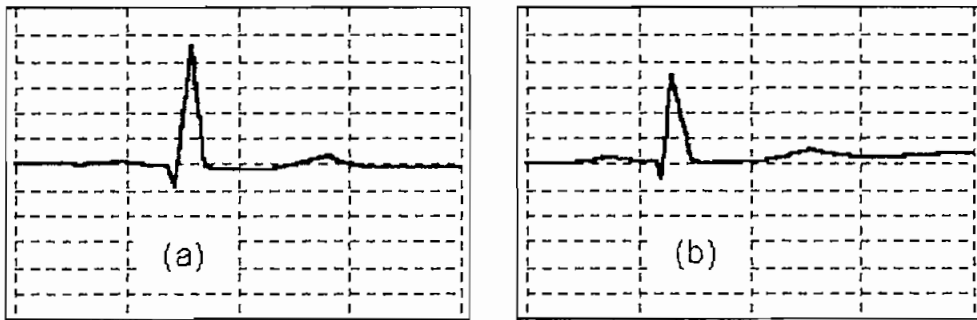


Figura 1.8: Electrocardiograma normal. (a) Derivación V5 (b) Derivación V6

En derivaciones V1 y V2 los registros QRS son principalmente negativos, porque el electrodo del tórax se halla más cerca de la base del corazón que de la punta. Por otra parte, los complejos QRS en las derivaciones V4, V5 y V6 son principalmente positivos porque el electrodo torácico en estas derivaciones se halla cerca de la punta, que es la dirección de electropositividad durante la despolarización.

1.5.3 Derivaciones unipolares aumentadas de miembros

Otro sistema de derivaciones, muy empleado, es la derivación unipolar aumentada de miembro. En este tipo de registro se conectan dos de las extremidades mediante resistencias eléctricas a la terminal negativa del electrocardiógrafo y la tercera extremidad se conecta a la terminal positiva.

Cuando la terminal positiva se halla en el brazo derecho, esta derivación se denomina aV_R ; cuando en el brazo izquierdo, derivación aV_L ; y cuando en la pierna izquierda, derivación aV_F .

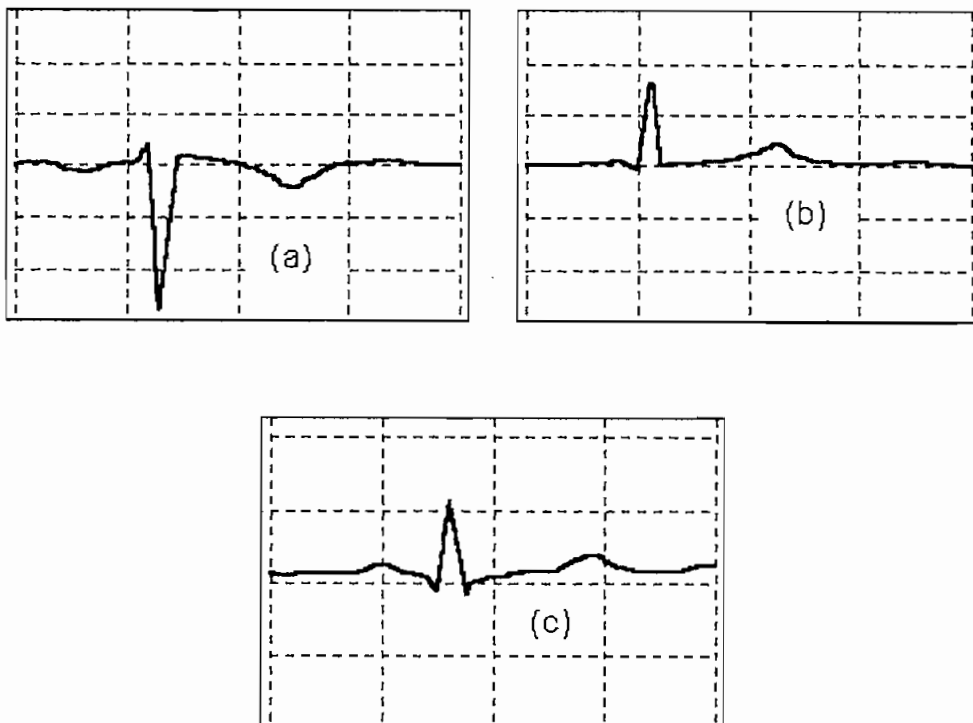


Figura 1.9: Electrocardiograma normal. (a) Derivación aV_R . (b) Derivación aV_L .
(c) Derivación aV_F .

Cada derivación unipolar aumentada de extremidad en realidad registra el potencial del corazón en el lado más cercano de la extremidad correspondiente. Así cuando se registra en derivación aV_R una curva negativa, ello significa que el lado del corazón que se halla cerca del brazo derecho es negativo en relación con el resto del órgano; cuando el registro aV_F es positivo, equivale a decir que la punta del corazón es positiva con respecto al resto del órgano.

1.6 ENFERMEDADES CARDIACAS: HIPERTROFIA VENTRICULAR

La hipertrofia ventricular es consecuencia de cualquier proceso patológico que produzca una carga de suficiente magnitud en cualquiera de los dos ventrículos. Más adelante se puede desarrollar fibrosis miocárdica de diversas intensidades, especialmente en la capa subendocárdica.

1.6.1 Anormalidades anatómicas y fisiológicas que producen la morfología electrocardiográfica

La morfología electrocardiográfica de hipertrofia ventricular depende de los siguientes factores [10]

Grosor de la masa muscular. Existe una correlación definida entre el grosor de la masa ventricular y la altura de la onda R. La razón del

aumento no se conoce bien. El potencial de acción de una célula muscular hipertrofiada es normal y no hay incremento en el número de células por unidad de masa muscular en el corazón atrofiado. El aumento de voltaje que se registra en la superficie corporal probablemente está en relación con la proyección geométrica alterada de las fuerzas eléctricas.

Retardo en la conducción. Debido al aumento de la masa muscular, hay un retardo y alteración en la conducción, los cuales dan por resultado una mayor amplitud del complejo QRS.

Modificaciones en el endocardio. La depresión del segmento ST se puede observar en una derivación que refleje el potencial epicárdico.

Modificaciones en la repolarización. Debido a las modificaciones de la repolarización (cuyas razones no son claras), la onda T se invierte en aquellas derivaciones que registran las ondas R elevadas. Es característico que la inversión se inicie después de un intervalo ST definido y sea asimétrica. La inversión puede ser ligera o profunda.

1.6.2 Hipertrofia ventricular izquierda

La hipertrofia ventricular izquierda es el resultado habitualmente de las siguientes situaciones clínicas: (1) Hipertensión (esencial, renal u hormonal), (2) enfermedad valvular aórtica, (3) insuficiencia mitral de

diversos orígenes, (4) cardiopatía coronaria crónica, (5) hipertrofias por problemas de nutrición o idiopáticas (cardiopatía por beriberi y las miocardiopatías crónicas) y (6) cardiopatías congénitas.

El significado clínico y su pronóstico depende de la enfermedad subyacente. La morfología persistirá a menos que el curso se corrija. En la hipertrofia ventricular izquierda debida a la hipertensión, el ECG puede mejorar o regresar a lo normal después de un tratamiento médico o quirúrgico satisfactorio de la hipertensión.

Para la identificación de la hipertrofia ventricular izquierda se considera (criterios de voltaje válidos para mayores de 35 años)

a. $RI + SIII > 26 \text{ mm.}$

$RaVL > 11 \text{ mm.}$

$RV_5 \text{ o } RV_6 > 26 \text{ mm.}$

$SV1 + RV \text{ (o } RV) > 35 \text{ mm.}$

b. Desnivel negativo de ST y onda T negativa en estas derivaciones con voltaje alto de QRS.

c. Eje de QRS en el plano frontal superior a -30° ; esto puede existir pero no es esencial desde el punto de vista de diagnóstico.

d. Ligera a moderada prolongación del intervalo QRS (0.1 a 0.12 seg.) [10]

1.6.3 Hipertrofia ventricular derecha

La hipertrofia ventricular derecha puede producirse en la (1) estenosis mitral o en la enfermedad pulmonar difusa crónica y en las (2) cardiopatías congénitas o puede deberse a (3) deficiencias nutricionales o a un fenómeno idiopático, generalmente asociado a hipertrofia ventricular izquierda.

El diagnóstico electrocardiográfico cierto de la hipertrofia ventricular derecha, por lo general, tiene significado más ominoso que la hipertrofia ventricular izquierda. El pronóstico dependerá, por supuesto, de la enfermedad subyacente. El aspecto electrocardiográfico puede mejorar o normalizarse después de la corrección satisfactoria por la cirugía, de las lesiones congénitas y de la estenosis mitral.

Los criterios para la identificación de la enfermedad son los siguientes

- a. Desviación del eje a la derecha: eje medio de QRS en el plano frontal mayor de $+110^\circ$ en lactantes y niños jóvenes; mayor de $+90^\circ$ en adultos de más de 40 años.
- b. Onda R alta en V_1 (y V_2): RV_1 mayor de 5 mm; relación R:S en V_1 mayor de 1. Esto sobre todo en niños o adultos jóvenes con cardiopatía congénita o adquirida que produzca hipertrofia ventricular derecha.
- c. Desnivel negativo de ST y ondas T invertidas en V_{1-3} .

d. En contraste con lo anterior, la hipertrofia ventricular derecha que ocurre en años tardíos de la vida (más de 60 años) se caracteriza por que ECG simula un infarto anterior del miocardio. [10]

Capítulo Dos: TRANSFORMADA DE ONDILLAS

2.1 Introducción.	26
2.2 El aparecimiento de la transformada de ondillas.	28
2.3 Definiciones matemáticas previas.	31
2.4 Transformada de Fourier con ventana.	34
2.5 Definición de transformada de ondillas.	36
2.6 Tipos de transformadas de ondillas.	38

Capítulo Dos :TRANSFORMADA DE ONDILLAS

2.1 INTRODUCCION

Cuando se tiene una magnitud física, se pueden encontrar muchas formas de representarla, por ejemplo, podemos representar una cantidad de una forma en el sistema decimal o de otra diferente en el sistema binario.

La primera tarea en procesamiento de señales es encontrar una adecuada representación de la señal a analizarse. Una manera de obtener una representación específica es descomponer la señal en bloques elementales de cierta importancia.

El análisis de ondillas puede ser definido como una alternativa al análisis de Fourier con ventana. En este, lo importante es medir la frecuencia local contenida en un pedazo de una señal, mientras que en las ondillas se comparten diferentes representaciones de la señal con diferentes resoluciones.

La base de un análisis de Fourier con ventana es la utilización de funciones seno y coseno multiplicadas por una ventana deslizante. En el análisis de ondillas, la ventana es oscilatoria y es llamada ondilla madre.

A este tipo de función se la llama ondilla por ser una función que está bien localizada en el espacio y porque además es oscilante. Por ser

oscilante se la llama onda, pero por estar localizada es una ondilla, o wavelet en inglés.

Para generar las ondillas, que son las funciones generadoras del análisis de ondillas, a la ondilla madre se la traslada y dilata arbitrariamente.

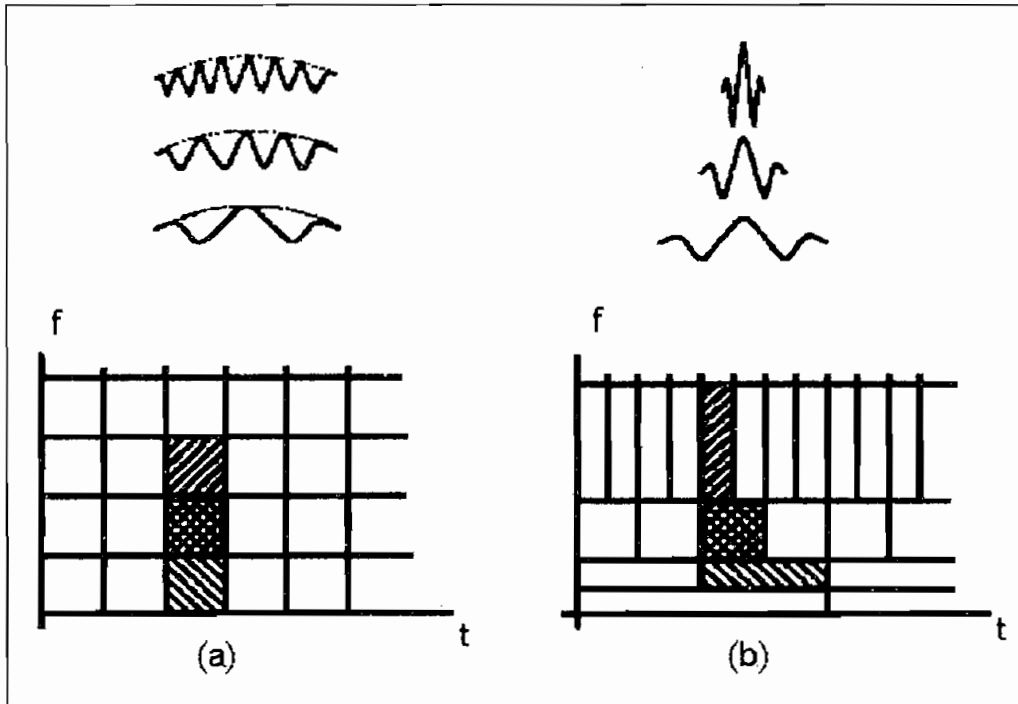


Figura 2.1: Funciones que forman bases ortogonales y su correspondencia en el plano tiempo-frecuencia. (a) Transformada de Fourier. (b) Transformada de ondillas.

La transformada de ondillas es una herramienta que pasa los datos o funciones u operadores originales a diferentes componentes de frecuencia y estudia cada componente con una resolución ligada a esta escala. Las ondillas proveen una herramienta que permite la localización tiempo-frecuencia.

Es común llamar entre las personas que trabajan en procesamiento de imágenes, al inverso de la frecuencia como escala. Pequeñas escalas corresponden a largas frecuencias y escalas grandes a pequeñas frecuencias. [15]

El análisis de Fourier, el de Fourier con ventana y el de ondillas están basados sobre el mismo concepto. En los tres casos, el análisis de una función consiste en presentar todas las correlaciones entre esta función y las componentes tiempo-frecuencia o tiempo-escala de las respectivas funciones generadoras utilizadas. La síntesis es obtenida exactamente como si estas funciones generadoras fueran bases ortonormales.

Distintas escalas pueden proveer información independiente (no redundante). El análisis de ondillas puede ser definido como un intento de dar un significado muy preciso a estos criterios.

2.2 EL APARECIMIENTO DE LA TRANSFORMADA DE ONDILLAS

Las ondillas estuvieron implícitas en matemáticas, física, procesamiento de señales y en análisis numérico durante un largo tiempo antes de que se las considerara como un campo científico unificado.

El concepto de ondillas puede ser visto como una síntesis de ideas que se originaron durante los últimos veinte o treinta años en ingeniería (codificación en subbandas en 1975), física (estados coherentes) y

matemáticas puras (estudios de los operadores de Calderón-Zygmund). De estos estudios se origina la primera síntesis de resultados, apareciendo la definición de "wavelet" y de "wavelet transform".

Su nombre aparece en los primeros años de la década de los ochenta con Morlet, Arens, Fourceau y Giard (1982), Morlet (1983), Grossmman y Morlet (1984).

La primera definición de una ondilla, dada por Grossmann y Morlet, es muy general. Una ondilla es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ satisface la condición $\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1$ para casi todo punto.

La segunda definición de una ondilla es adaptada a la teoría de Littlewood-Paley-Stein. Una ondilla es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cuya transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ satisface la condición $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 1$ para casi todo punto. Si ψ es una ondilla de este tipo, entonces $\sqrt{\log 2} \psi$ satisface la condición de Groddmann-Morlet.

La tercera definición se refiere al trabajo de Franklin y Strömberg. Una ondilla es una función ψ en $L^2(\mathbb{R})$ tal que $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, con $j, k \in \mathbb{Z}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Cada ondilla ψ cumple con la segunda condición.

Esto muestra que los cambios de la primera a la tercera definición se dan añadiendo condiciones y afinando el alcance de las ondillas. Aquí termina la primera síntesis.

Stephane Mallat, un especialista en procesamiento de imágenes, en 1985 descubre algunas relaciones cercanas entre:

1. Los filtros espejo en cuadratura (quadrature mirror filters), inventados por Croissier, Esteban y Galand para telefonía digital.
2. Los algoritmos piramidales (pyramid algorithms) de Burt y Adelson, que son usados en el procesamiento de imágenes.
3. Las bases ortonormales de ondillas descubiertas por Strömberg y sus sucesores.

A partir de estos resultados Ingrid Daubechies completa el trabajo de Haar (1910). Una segunda síntesis aparece con las bases ortonormales de Daubechies, estas ondillas proveen un análisis y síntesis de funciones mucho más efectivo que el obtenido anteriormente. Ella construye una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, para cada entero r de la forma: $2^{j/2}\psi_r(2^jx-k)$ con $j, k \in \mathbb{Z}$.

En estos pocos años ha existido un creciente interés por este tema, debido a que las ondillas son una herramienta matemática simple y útil, que permite una gran variedad de aplicaciones en el análisis de señales de

sonido o de imágenes. Una muestra de esto es que en 1990 investigadores de la Aware Inc. de Cambridge, Massachusetts, presentaron el primer circuito integrado para procesar la transformada de ondillas.

2.3 DEFINICIONES MATEMATICAS PREVIAS.

Definimos un espacio $L^2(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones de cuadrado integrable, es decir las funciones tales que

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

A este espacio se lo llama como espacio de Hilbert con su producto escalar definido como

$$\langle f, g \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{Ecuación 2.1}$$

La norma de una función viene dada por

$$\|f(t)\| = \left(\int |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dos funciones f y g son ortogonales cuando $\langle f, g \rangle = 0$, y se las representa como $f \perp g$. Una secuencia de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una secuencia ortonormal si $\langle f_m, f_n \rangle = \delta_{m,n}$ donde

$$\delta_{m,n} = 1 \text{ si } n = m \quad \text{o} \quad \delta_{m,n} = 0 \text{ si } n \neq m$$

Una muy conocida base ortogonal, es la dada para la serie de Fourier, dada por

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{donde } e_n(t) = e^{jn\pi t}.$$

Dado un sistema ortonormal $\{f_n: n \in \mathbb{Z}\}$ y una función f , se definen los coeficientes de Fourier de f con respecto a $\{f_n: n \in \mathbb{Z}\}$ como

$$c_k = \langle f, f_k \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

resultando que $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_k$ y $\{f_k: k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{C})$.

En los reales se tiene una teoría análoga.

La convolución de dos funciones $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ está definida por

$$f * g(t) = (f(u) * g(u))(t) = \int f(u)g(t-u)du$$

La transformada de Fourier de una función f está definida por

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Ecuación 2.2}$$

Donde t corresponde a la variable tiempo y ω a la variable frecuencia.

La transformada inversa de Fourier es

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

En este contexto se define a la transformada de ondillas de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ como

$$Tf(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad \text{Ecuación 2.3}$$

Donde $\psi_{a,b}$ tiene el mismo rol que $e^{j\omega t}$ en la definición de la transformada de Fourier. La existencia de una transformada inversa depende de la función ψ , más precisamente, si ψ es tal que

$$C_\psi = \int \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} < +\infty$$

La igualdad anterior implica en particular que $\widehat{\psi}(0) = 0$ (es decir que ψ oscila), de donde se tiene que

$$\int \psi(t) dt = \widehat{\psi}(0) = 0 \quad \text{Ecuación 2.4}$$

2.4 TRANSFORMADA DE FOURIER CON VENTANA

En muchas aplicaciones, dada una señal $f(t)$, es de interés conocer la frecuencia contenida localmente en el tiempo. Esto es parecido a la notación musical, esta le dice al músico cuales notas (información de frecuencia) debe tocar y en que momento (información de tiempo). La transformada de Fourier estándar

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

solo da una representación de la frecuencia contenida en f sin estar localizada espacialmente, las altas frecuencia no pueden ser leídas fácilmente a partir de la transformada. En efecto, la transformada está definida dentro de una integral que cubre todo el dominio espacial.

La localización puede ser lograda dividiendo a la señal f en partes (usando una ventana espacial $g(t)$). La ventana es trasladada a lo largo del eje espacial hasta cubrir toda la señal, en cada ventana aplicamos la transformada de Fourier

$$Gf(\omega, t) = \int f(s) g(s-t) e^{-j\omega t} ds$$

Esta mide localmente, alrededor del punto t , la amplitud de la componente sinusoidal de frecuencia ω . A menudo se usa para señales

discretas, donde t y ω son valores discretos: $t = nt_0$, $\omega = m\omega_0$, además m, n están sobre los enteros y $\omega_0, t_0 > 0$.

La función ventana, $g(t)$, es generalmente una función par. Una de las más usadas es la función Gaussiana, $g(t) = e^{-t^2}$.

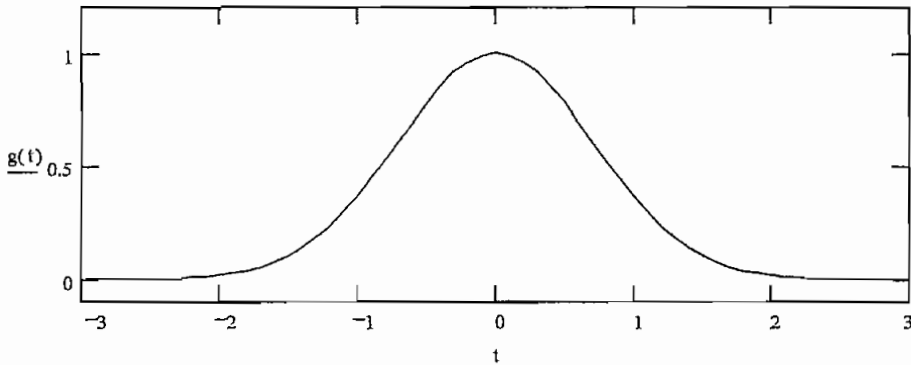


Figura 2.2: Función Gaussiana

La transformada de Fourier con ventana puede ser interpretada como los productos internos de una función $f(t)$ con una familia de funciones $g_{\omega_0, t_0}(s) = e^{j\omega_0 s} g(s - t_0)$

$$Gf(\omega, t) = \langle f(t), g_{\omega, t}(t) \rangle$$

con muchas aplicaciones sobre todo en la física y en el procesamiento digital de señales.

Si la ventana para el análisis en el dominio del tiempo es demasiado pequeña, la resolución en frecuencia es imperfecta. La otra posibilidad, es decir que la ventana sea grande, puede invalidar la cualidad de localización de la transformada.

2.5 DEFINICION DE TRANSFORMADA DE ONDILLAS.

La transformada de ondillas provee una descripción similar de tiempo-frecuencia que la transformada de Fourier con ventana, con unas pocas pero importantes diferencias. La transformada de ondillas está basada en la descomposición de una señal en una familia de funciones mediante traslaciones y dilataciones de una única función $\psi(t)$.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0, b \in \mathbb{R} \quad \text{Ecuación 2.5}$$

$$Tf(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Las funciones $\psi_{a,b}$ son llamadas ondillas, estas funciones no son necesariamente reales, también pueden ser complejas.

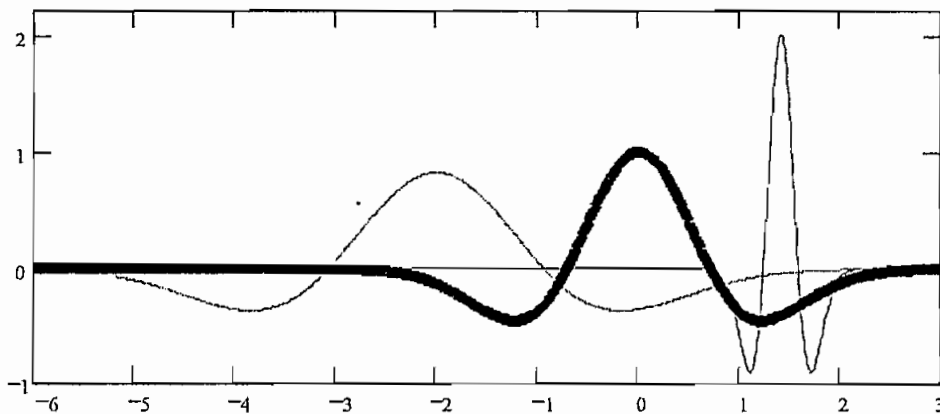


Figura 2.3: Unas pocas ondillas de la ondilla madre $\psi(t) = (1-2t^2)e^{-t^2} = \psi_{1,0}(t)$, que es la segunda derivada de una Gaussiana. Están dibujadas (de izquierda a derecha) $\psi_{(3/2),-2}(t)$, $\psi_{1,0}(t)$, $\psi_{(1/4),\sqrt{2}}$.

Cuando "a" cambia, la función $\psi_{a,0}(s) = |a|^{-1/2}\psi(s/a)$ cubre diferentes rangos de frecuencia, valores grandes del parámetro de escalamiento $|a|$ corresponden a pequeñas frecuencias o a escalas grandes, mientras que pequeños valores de $|a|$ corresponden a altas frecuencias o a escalas finas de $\psi_{a,0}$. Cambiando el parámetro b, el centro de localización de tiempo se mueve, cada $\psi_{a,b}(s)$ está localizada alrededor de $s = b$.

La diferencia entre la transformada de ondillas y la de Fourier con ventana está principalmente, en que la transformada de ondillas tiene mayor capacidad para hacer una ampliación en amplitud sobre gráficas de fenómenos de corta duración y alta frecuencia, como presentan los transitorios.

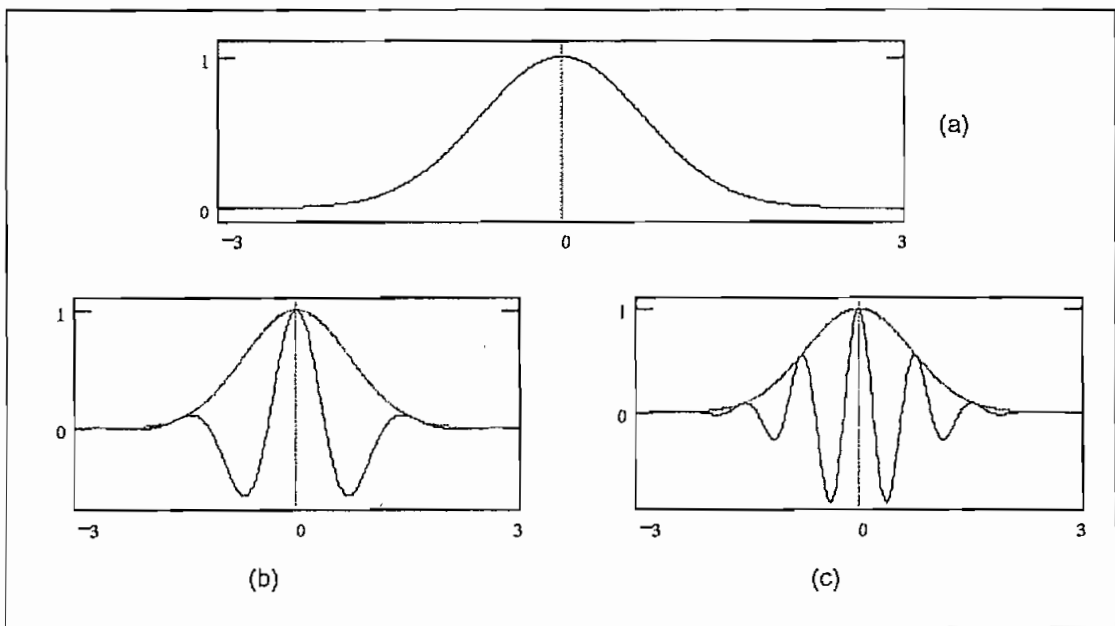


Figura 2.4: (a) Función ventana $g(t)$. (b) Gráfico de $g(t)\cos(\omega_0 t)$. (c) Gráfico de $g(t)\cos(2\omega_0 t)$. Todas esas curvas tienen el mismo soporte a pesar que contienen diferentes frecuencias. Esta es la principal diferencia entre la transformada de Fourier con ventana y la transformada de ondillas.

Esto se debe a que las funciones $g_{\omega,t}$, de la transformada de Fourier con ventana, están contenidas por la misma función envolvente g , trasladadas a una localización apropiada y "llenadas" con oscilaciones de alta frecuencia. Todas las $g_{\omega,t}$ independientemente del valor de ω , tienen el mismo ancho. En contraste las $\psi_{a,b}$ tienen "anchos de tiempo" adaptados a sus frecuencias: altas frecuencias corresponden a $\psi_{a,b}$ muy delgadas, mientras que las bajas frecuencia a $\psi_{a,b}$ muy anchas.

2.6 TIPOS DE TRANSFORMADAS DE ONDILLAS.

Existen diferentes tipos de transformada de ondillas, todas parten de la misma fórmula básica

$$Tf(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Se puede distinguir los siguientes tipos [15]

- A. La transformada continua de ondillas.
- B. La transformada discreta de ondillas.

Dentro de la transformada discreta de ondillas se presentan

- B1. Sistemas discretos redundantes (tramas o frames en inglés.)
- B2. Bases ortonormales (y otras) de ondillas.

2.6.1 Transformada continua de ondillas.

La transformada continua de ondillas, es aquella en la que los parámetros de dilatación y traslación a, b varían continuamente sobre los \mathfrak{R} (siempre que $a \neq 0$). Está dada por

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$Tf(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Para la transformada inversa, debe cumplirse la siguiente condición

$$C_{\psi} = \int \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} < +\infty$$

La función f puede ser reconstruida mediante

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(a,b) \psi_{a,b}(t) db \quad \text{Ecuación 2.6}$$

Es claro que para poder aplicar un algoritmo que pueda ser procesado por una computadora, este debe ser aplicado a señales discretas y no a continuas ya que el número de puntos considerados sería infinito. Es por eso que se usa la transformada discreta de ondillas y no la continua.

2.6.2 Transformada discreta con redundancia (Tramas).

En este caso el parámetro de dilación "a" y el de traslación "b", toman valores discretos. Para "a" se escoge las potencias enteras (positivas o negativas) con un parámetro de dilatación $a_0 > 1$ tal que $a = a_0^m$. Como ya se mencionó anteriormente, a los distintos valores de m le corresponden ondillas de diferentes anchos.

Lo anterior conlleva que el parámetro b dependa de m, ondillas delgadas (alta frecuencia) son trasladadas en pasos pequeños para cubrir todo el rango de tiempo, mientras ondillas anchas (baja frecuencia) son trasladadas en pasos grandes.

Como el ancho de $\psi(a_0^{-m} t)$ es proporcional a a_0^m , se escoge para la discretización un b tal que $b = nb_0 a_0^m$, donde $b_0 > 0$ y $n \in \mathbb{Z}$. Las ondillas de 2.5 se transforman en

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}(t - nb_0 a_0^m))$$

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad \text{Ecuación 2.7}$$

La transformada con tramas es más general que la transformada de ondillas con bases ortonormales.

2.6.3 Bases ortonormales.

Para algunos casos especiales de ψ , a_0 y b_0 , las $\psi_{m,n}$ constituyen bases ortonormales para $L^2(\mathbb{R})$. En particular, si se escoge $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$, existe ψ con buenas propiedades de localización en tiempo-frecuencia tal que 2.7 se convierte en

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t-n) \quad \text{Ecuación 2.8}$$

que constituye una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Para establecer que $\psi_{m,n}(t)$ constituye una base ortonormal, es necesario establecer que

1. Las $\psi_{m,n}$ sean ortonormales.
2. Cualquier función f de L^2 pueda ser construida con una combinación lineal finita de las $\psi_{m,n}$.

De lo anterior se deduce que cualquier función f en $L^2(\mathbb{R})$ puede ser expandida como una combinación de $\psi_{m,n}$ del tipo

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad \text{Ecuación 2.9}$$

Las ondillas que forman bases ortonormales, son utilizadas en el análisis multirresolución, por la importancia que tienen en la presente Tesis serán estudiadas con mayor profundidad en el siguiente capítulo.

El ejemplo más viejo de una función ψ definida por 2.8 que constituye una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ es la función de Haar dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad \varphi(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

La base de Haar ha sido conocida desde Haar (1910). La función de Haar sin embargo no tiene una buena localización de tiempo-frecuencia pero es muy utilizada para propósitos didácticos. [7]

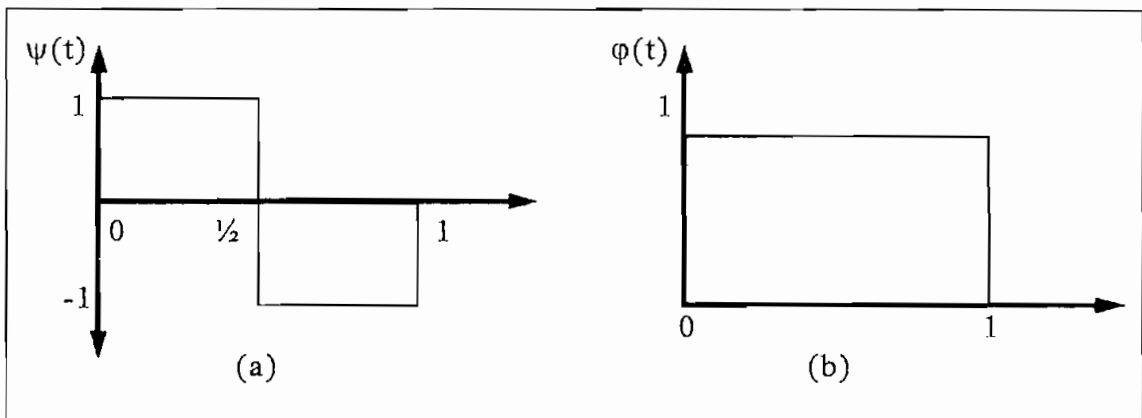


Figura 2.5: (a) Función ψ de Haar (b) Función de escalamiento de Haar.

En la figura 2.5 es fácilmente verificable, las siguientes relaciones que cumplen todas las funciones φ y ψ

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad \text{Ecuación 2.4}$$

$$\int \varphi(t) dt = 1 \quad \text{Por normalización}$$

Capítulo Tres: ANALISIS MULTIRRESOLUCION

3.1 Introducción.	43
3.2 Modelos multicanal y fisiología de la visión.	44
3.3 Multirresolución y ondillas.	47
3.4 Algoritmo para la descomposición por ondillas.	50
3.5 Semejanza con la teoría de filtros.	57

Capítulo Tres : ANALISIS MULTIRRESOLUCION

3.1 INTRODUCCION

Las ondillas que forman bases ortonormales son una herramienta que describe matemáticamente el "incremento de información" necesitado para ir de una aproximación gruesa a una aproximación más fina.

En el capítulo dos se mencionó la existencia de estas ondillas, las cuales están basadas en una familia de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen ciertas propiedades. A esa familia de subespacios se la llama análisis multirresolución.

El análisis multirresolución, también llamado análisis espacio-escala o tiempo-escala, aparece en 1986 con Mallat y Meyer, con ayuda de resultados anteriores que estudiaban simultáneamente imágenes a diferentes escalas (Witkin (1983) o Burt y Adelson (1983)).

En aplicaciones computacionales de imágenes, la descomposición en canales multifrecuenciales es entendida como multirresolución. Generalmente las estructuras que nosotros queremos reconocer tienen diferentes tamaños, por lo tanto no es posible definir a priori una resolución óptima para analizar aquellas.

El análisis multirresolución utiliza un basto rango de escalas para el análisis de una señal, la descompone con ayuda de un grupo de canales de frecuencia, de ancho de banda constante, sobre una escala logarítmica. Esto puede ser interpretado como una transformación discreta de ondillas.

La expansión de una función en sendos canales de frecuencia provee una representación que es intermedia entre una espacial y una representación de Fourier.

Estudios biológicos de la visión humana han sido siempre fuente de ideas para descubrimientos en el procesamiento de imágenes en computadora, el sistema visual humano es generalmente considerado como un procesador de imágenes óptimo. Lo importante no es imitar los procesos implementados en el cerebro humano sino entender las razones o motivaciones de tales procesos y analizar sus aplicaciones en problemas de procesamiento de señales.

3.2 MODELOS MULTICANAL Y FISILOGIA DE LA VISION

En los últimos 20 años se han realizado extensos trabajos para analizar la respuesta del sistema visual humano a estímulos de diferente frecuencia y orientación.

La figura 3.1 muestra el camino anatómico en el sistema visual humano. Fotorreceptores en los ojos miden la intensidad de luz de entrada, esta información es procesada por células en la retina y es transmitida a través del nervio óptico. El nervio óptico termina en una estación (núcleo lateral Geniculado) desde donde se transmite a la corteza visual.

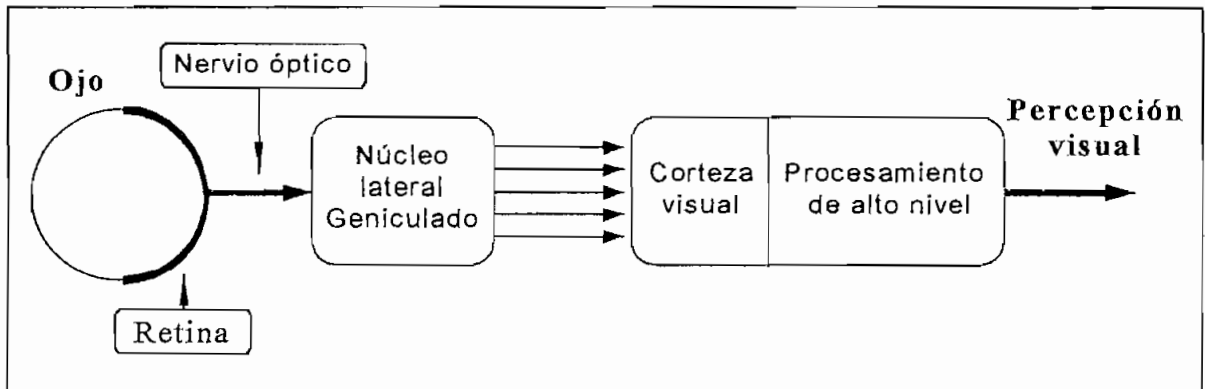


Figura 3.1: Sistema visual humano

Campbell y Robson¹ mostraron que la imagen retinal es procesada en canales de diferente frecuencia, estos experimentos fueron basados en técnicas de adaptación. Si un estímulo es mostrado a un observador por largo tiempo, la sensibilidad visual para el mismo tipo de estímulo decrece.

Se observó que la sensibilidad decrece para un estímulo cuya frecuencia está dentro de una banda en la vecindad de esa frecuencia, además fuera de esa banda de frecuencia, la sensibilidad no es afectada. Esto demuestra que la información visual de diferente banda de frecuencia es

procesada separadamente. Campbell y Robson suponen que la imagen retinal es descompuesta (aproximadamente) por filtros lineales pasa-banda independientes como se muestra en la figura 3.2.

Estudios como los de Georgeson² y Nachmias³ muestran que el ancho de banda de estos filtros es de alrededor de una octava, en otras palabras la imagen de la retina es descompuesta en bandas de frecuencia que tienen aproximadamente el mismo ancho sobre una escala logarítmica.

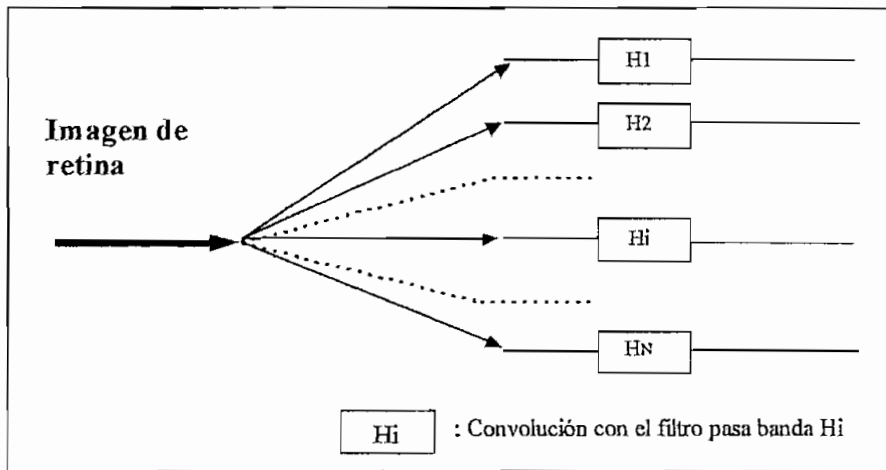


Figura 3.2: Modelo multicanal.

El modelo de un banco de filtros solo provee una descripción de algunos procesos del sistema visual y no toma en cuenta las no linealidades de los procesos biológicos, además recientes estudios sobre gatos y monos, que tienen una corteza visual similar a la de los humanos, refuerzan esas

¹ F. Campbell and J. Robson, "Application of Fourier analysis to the visibility of gratings," J. Physiol., vol 197, pag. 437 - 441, 1966

² M. Georgeson, "Mechanisms of visual image processing: studies of pattern interaction and selective channels in human vision", Ph.D. dissertation, Univ. Sussex, Brighton, England, 1975.

conclusiones. Esos resultados muestran que el ancho de banda de las celdas está en el rango de 0.6 a 2.0 octavas con un promedio de 1.3 octavas. La respuesta de estas celdas depende también de la orientación espacial del estímulo.

Los resultados de Campbell y Kulikowski⁴ muestran que el sistema visual humano tiene una sensibilidad máxima cuando la señal tiene una orientación de 0° o 90°. Entre estos límites, la sensibilidad decrece, teniendo un mínimo en 45°.

La idea principal de todo lo anterior no ha sido construir un modelo de la corteza visual humana sino justificar el uso de la descomposición en frecuencia en el procesamiento de imágenes.

3.3 MULTIRRESOLUCION Y ONDILLAS

Como ya se mencionó, la mejor definición para la descomposición en canales de frecuencia es una representación intermedia entre una espacial y una transformada de Fourier con ventana.

El análisis multirresolución consta de una secuencia de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen [12]

³ J. Nachmais and A. Weber, "Discrimination of simple and complex gratings," *Vis. Res.*, vol 15, pag. 217 - 223, 1975.

⁴ F. Campbell and J. Kulikowski, "Orientation selectivity of the human visual system," *J. Physiol.*, vol 197, pag. 437-441, 1966

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.1}$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{Ecuación 3.2}$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad \text{Ecuación 3.3}$$

$$f(t) \in V_j \leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.4}$$

Debe existir una función $\varphi \in V_0$ tal que $\{\varphi_{0,n} ; n \in \mathbb{Z}\}$
sea una base ortonormal para V_0 . 3.5

A la función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se la llama función de escalamiento y tiene la forma

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - n) \quad \forall j, n \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.6}$$

De 3.5 y 3.6 se puede concluir que $\{\varphi_{0,n} ; n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para $V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$.

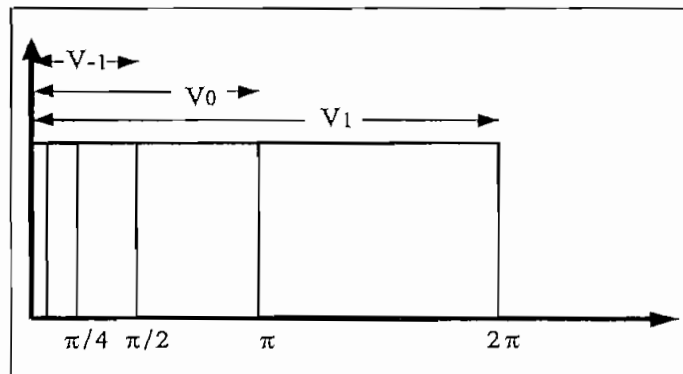


Figura 3.3: División en V_j espacios del espectro. Note que $V_0 \subset V_1$

Si denotamos como P_j al operador proyección ortogonal sobre V_j , esta proyección está dada por

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

El principio básico del análisis multirresolución es que con la existencia de subespacios cerrados que cumplen con las restricciones impuestas (3.1 a 3.5), debe existir una base ortonormal $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathfrak{R})$, con $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$ tal que para toda $f \in L^2(\mathfrak{R})$ se cumpla

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Es común definir en la expresión anterior

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad \text{Ecuación 3.9}$$

Además, para todo $j \in \mathbb{Z}$ se puede definir W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} de tal manera que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

donde \oplus indica suma vectorial. Además

$$W_j \perp W_i \quad \text{si } j \neq i$$

Al ser W_j subespacios ortogonales se tiene

$$L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

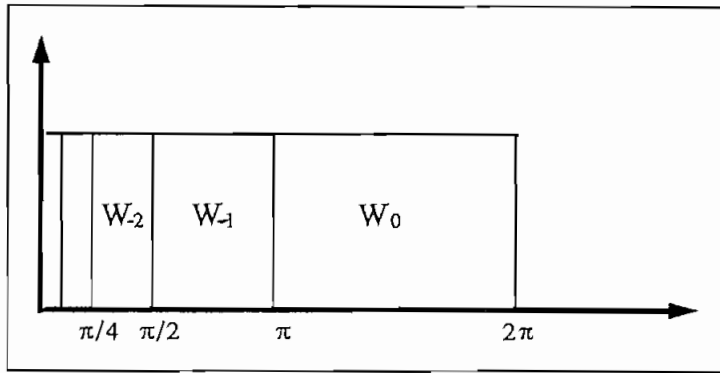


Figura 3.4: División en W_i espacios, note que $L^2(\mathcal{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$

Si se denota la proyección de f sobre W_m como $Q_m f$, se tiene que

$$Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \text{Ecuación 3.10}$$

de 3.8 se concluye que

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f \quad \text{Ecuación 3.11}$$

Donde $Q_m f$ representa los detalles que necesitan ser añadidos para pasar de un nivel de aproximación m al siguiente nivel más fino de aproximación $m+1$.

3.4 ALGORITMO PARA LA DESCOMPOSICION POR ONDILLAS

El análisis multirresolución es un método que se adapta bien para el procesamiento de imágenes. Los subespacios V_j pueden ser interpretados como los espacios donde se obtiene una aproximación de la imagen al nivel j -ésimo, donde

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0.$$

Los detalles que aparecen en V_j son guardados en los subespacios W_{j-1} con lo cual se cumple $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Vale recordar también que los subespacios V_j tienen una estructura invariante para la dilatación y la traslación (3.4 y 3.5). Lo mismo se cumple para los complementos ortogonales W_j , además

$$(2^{-j/2} \psi_j(2^{-j} t - n))_{n \in \mathbb{Z}} \text{ es una base ortonormal de } W_j$$

$$(2^{-j/2} \psi_j(2^{-j} t - n))_{(n,j)} \text{ es una base ortonormal de } L^2(\mathbb{R}).$$

Lo que se presentará a continuación es válido para el caso unidimensional, es decir para el caso en que la señal a descomponerse tiene como única variable, a una, que está en una sola dimensión (Por ejemplo, cualquier función del tiempo, como una señal de sonido).

Los operadores de proyección ortogonal, P_j con $j \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$ sobre V_j están dados por

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$$

De estos se obtienen los coeficientes

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.12}$$

que se los puede descomponer en la secuencia

$$c_j = \{c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle : k \in \mathbb{Z}\}$$

En muchas aplicaciones numéricas la función f está dada como una secuencia finita de muestras, en este caso las muestras pueden ser interpretadas como los coeficientes $c_{j,k}$ de la proyección sobre un subespacio V_j asociado. En este tipo de transformada partimos de la resolución más fina (la función f) y encontramos resoluciones más burdas o toscas (hacia cero). El número de niveles de aproximación estará determinado por la aplicación dada.

Recordando de 3.4 que $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}t) \in V_{-1} \subset V_0$ y que $\varphi_{0,n}$ es una base ortonormal para V_0 (3.6) se tiene que

$$\varphi_{-1}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \varphi_{0,n}(t)$$

con

$$h[n] = \langle \varphi_{-1}, \varphi_n \rangle \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| = 1 \quad [7]$$

Que puede reescribirse como:

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}t\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \varphi(t+n) \quad \text{Ecuación 3.13}$$

donde

$$h[n] = \frac{1}{2} \int \varphi\left(\frac{1}{2}t\right) \overline{\varphi(t+n)} dt \quad \text{Ecuación 3.14}$$

Para otras escalas diferentes de V_0 y V_{-1} se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1,k}(t) &= 2^{\frac{1}{2}(j-1)} \varphi(2^{j-1}t - k) = 2^{\frac{1}{2}(j+1)} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}(2^j t - 2k)\right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}(j+1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \varphi(2^j t - 2k + n) \\ \varphi_{j-1,k}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \varphi_{j,2k-n}(t) \\ \varphi_{j-1,k} &= \sqrt{2} \sum_n h[n-2k] \varphi_{j,n} \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.15} \end{aligned}$$

Similarmente, $\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}t\right) \in W_{-1} \subset V_0$

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}t\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] \varphi(t+n)$$

y

$$\begin{aligned} \psi_{j-1,k}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] \varphi_{j,2k-n}(t) \\ \psi_{j-1,k}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n-2k] \varphi_{j,n}(t) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ecuación 3.16} \end{aligned}$$

Los coeficientes $g[n]$ se calculan a partir de los $h[n]$ por medio de

$$g[n] = (-1)^n h[n-1] \quad \text{Ecuación 3.17}$$

Reemplazando 3.15 en la definición de los coeficientes $c_{j-1,k}$ (3.12) se obtiene

$$c_{j-1,k} = \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle = \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n-2k] \varphi_{j,n} \right\rangle \quad \text{Ecuación 3.18}$$

$$c_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h[n-2k]} c_{j,n} \quad \text{Ecuación 3.19}$$

Esto sirve para que a partir de los coeficientes $c_j[n]$ de V_j se obtengan los coeficientes $c_{j-1}[k]$ del subespacio de menor resolución V_{j-1} .

Los términos que no están contenidos en c_{j-1} , los cuales contienen los detalles del paso de V_{j-1} a V_j , están contenidos en W_{j-1} . Más precisamente

$$Q_{j-1}f(t) = P_j f(t) - P_{j-1}f(t) = \sum d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t) \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Usando 3.9 y 3.16 se obtiene que

$$d_{j-1}[k] = \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n-2k] \varphi_{j,n} \right\rangle = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g[n-2k]} c_j[n] \quad \text{Ecuación 3.21}$$

Con la notación $c_{j,k}$ como $c_j[k]$ se puede escribir las ecuaciones 3.19 y 3.21 como

$$c_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h[n-2k]} c_j[n] \quad \text{o} \quad c_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] c_j[2k-n] \quad \text{Ecuación 3.22}$$

$$d_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g[n-2k]} c_j[n] \quad \text{o} \quad d_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] c_j[2k-n] \quad \text{Ecuación 3.23} \quad [12]$$

Ahora es posible notar que si existen N términos pertenecientes a la secuencia c_j , la siguiente resolución (que sería menos fina), tendría solo $\frac{1}{2}N$ términos aproximadamente.

La última expresión es una convolución seguida por un "diezmado" por 2. A la secuencia c_j se la descompone en la secuencia c_{j-1} y en d_{j-1} . El proceso puede continuar con c_j según se ve en la figura 3.5.

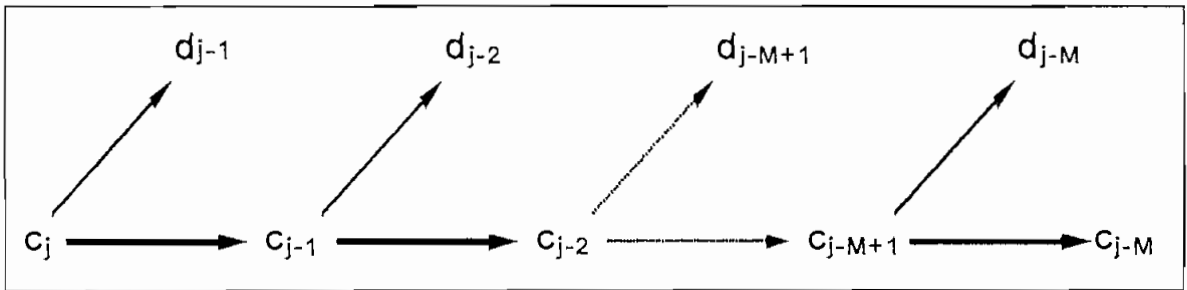


Figura 3.5: Algoritmo de descomposición por ondillas. Cada flecha representa una convolución seguida de la retención de los términos pares de la convolución (3.22 y 3.23)

Para considerar la reconstrucción de c_j de las secuencias $d_{j-1}, d_{j-2}, \dots, d_{j-M}$ y c_{j-M} , por inducción, es suficiente considerar la reconstrucción de c_{j+1} de d_j y c_j . Partiendo de

$$P_{j+1}f = P_jf + Q_jf$$

además, usando 3.16 y 3.19 se obtiene

$$\sum_p c_{j+1}[p] \varphi_{j+1}[p] = \sum_k c_j[k] \varphi_j[k] + \sum_k d_j[k] \psi_j[k]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k c_j[k] \left(\sum_n \sqrt{2}h[n] \varphi_{j+1}[2k-n] \right) + \sum_k d_j[k] \left(\sum_n \sqrt{2}g[n] \varphi_{j+1}[2k-n] \right) \\
 &= \sum_p \left\{ \sum_k (\sqrt{2}h[2k-p]c_j[k] + \sqrt{2}g[2k-p]d_j[k]) \right\} \varphi_{j+1}[p]
 \end{aligned}$$

$$c_{j+1}[p] = \sqrt{2} \sum_k (h[2k-p]c_j[k] + g[2k-p]d_j[k]) \quad \text{Ecuación 3.24 [12]}$$

o

$$\begin{aligned}
 c_j[2k] &= \sqrt{2} \sum_n (c_{j-1}[k+n]h[2n] + d_{j-1}[k+n]g[2n]) \\
 c_j[2k-1] &= \sqrt{2} \sum_n (c_{j-1}[k+n]h[2n+1] + d_{j-1}[k+n]g[2n+1])
 \end{aligned}$$

La ecuación 3.24 permite añadir la secuencia d_j y c_j para obtener c_{j+1} . Si se comienza el proceso con c_{j-M} y d_{j-M} y se conocen los detalles $d_{j-M+1}, \dots, d_{j-1}$, se tiene el algoritmo de reconstrucción dado por la figura 3.6

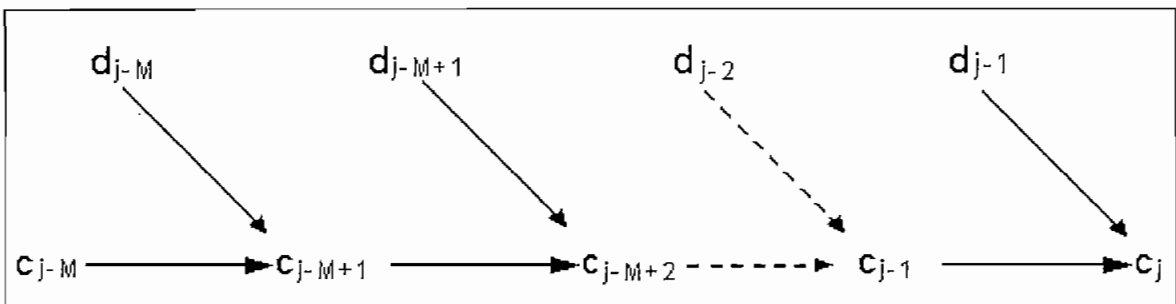


Figura 3.6: Algoritmo de reconstrucción de ondillas. Cada flecha requiere un “upsampling” por 2 y convolución (3.24)

El término en inglés upsampling significa insertar un cero después de cada muestra de la secuencia original.

En la práctica, los aparatos de medida solo dan un número finito de muestras, $P_0f = (\alpha_n)_{0 \leq n \leq N}$. Cada señal discreta P_jf ($j < 0$) tiene 2^jN muestras, para facilitar el cálculo de las aproximaciones discretas, se supone que la señal original, P_0f es simétrica con respecto a $n = 0$ y $n = N$.

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_{-n} \\ \alpha_{2N-n} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.25 [13]}$$

3.5 SEMEJANZA CON LA TEORIA DE FILTROS

Las secuencias $\{h[k]: k \in \mathbb{Z}\}$ y $\{g[k]: k \in \mathbb{Z}\}$ tienen solo N términos diferentes de cero, a este tipo de secuencias finitas se les da el nombre de filtros FIR (finite impulse response).

Las ecuaciones 3.19 y 3.21

$$c_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h[n-2k]} c_{j,n}$$

$$d_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g[n-2k]} c_j[n]$$

pueden reescribirse como

$$c_{j-1,k} = \overline{H} c_{j,n} \quad \text{y} \quad d_{j-1,k} = \overline{G} d_{j,n} \quad [7]$$

La respuesta de frecuencia de $H(z)$, $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j n \omega}$, tiene la forma de un filtro pasa bajos y la de $G(z)$ de un filtro pasa altos. Los algoritmos de descomposición y de reconstrucción son ilustrados por el diagrama de bloques de la figura 3.7.

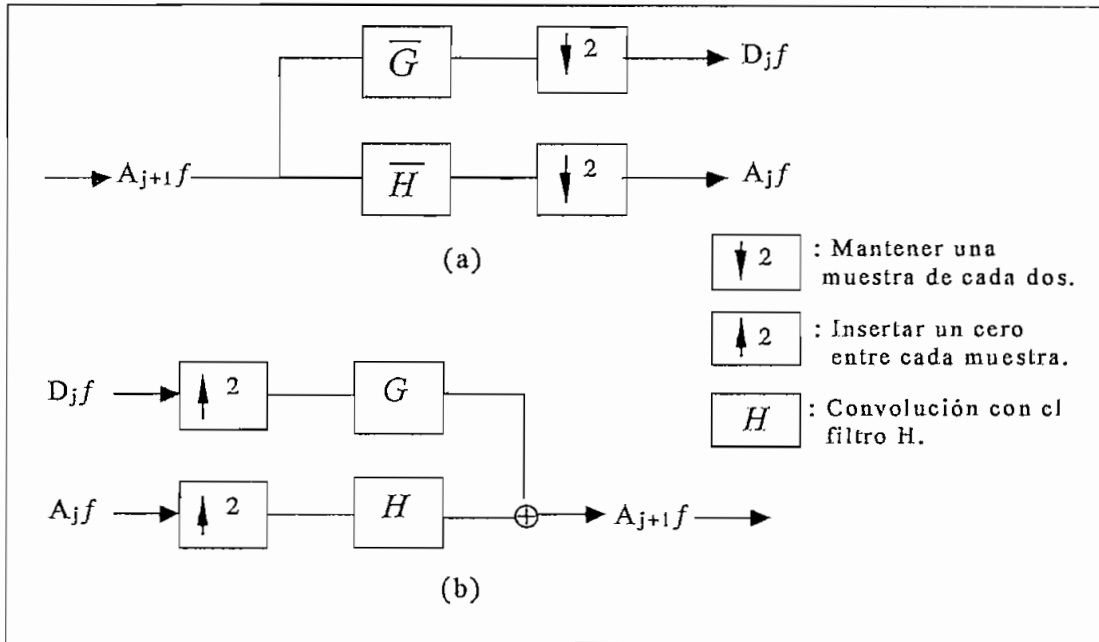


Figura 3.7: (a) Descomposición de $A_{j+1}f$ en A_jf . (b) Reconstrucción de $A_{j+1}f$ de A_jf y D_jf .

Los primeros esquemas de codificación subbanda (subband coding schemes) sin aliasing fueron establecidos por Esteban y Galand en 1977. En su trabajo las secuencias de los filtros son reales y escogidos de la forma

$$G(z) = H(-z)$$

$$\bar{H}(z) = H(z)$$

$$\bar{G}(z) = -H(-z)$$

Si $H(z)$ es simétrico, $G(z)$ es el espejo de $H(z)$ con respecto a la "mitad de la banda", $\pi/2$, donde $g(n) = (-1)^n h(n-1)$. Los filtros en consecuencia son llamados filtros espejo en cuadratura, QMF (quadrature mirror filters). Lastimosamente no es fácil conseguir filtros FIR que cumplan estas características.

Un esquema diferente fue propuesto por Mintzer (1985), Smith y Barnwell (1986) y Vetterli (1986)

$$G(z) = -z H(-z^{-1})$$

$$\overline{H}(z) = H(z^{-1})$$

$$G(z^{-1}) = -z^{-1} H(-z)$$

Smith y Barnwell (1986) llamaron a estos filtros como filtros conjugados en cuadratura, CQF (conjugate quadrature filters), aunque este término no llegó a ser tan popular como el de QMF.

Todas las bases ortonormales de ondillas asociadas con un análisis multirresolución dan un par de filtros CQF, que permiten una reconstrucción exacta de la señal.

Estos filtros cumplen las dos siguientes propiedades

$$|H(0)| = 1$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad [13]$$

Existe una relación muy cercana entre la respuesta de frecuencia de los filtros y las funciones ϕ y ψ . La transformada de Fourier de la función de escalamiento esta relacionada con el filtro H por

$$\phi(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} H(2^{-p} \omega)$$

Por otro lado, la función ψ está relacionada con un filtro conjugado por

$$\psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

con

$$G(\omega) = e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \quad [13]$$

Capítulo Cuatro: ONDILLAS EN LA MEDICINA

4.1 Introducción.	61
4.2 Coeficientes filtro y gráficos de φ y ψ .	63
4.3 La transformada de ondillas aplicada a la detección de enfermedades del corazón.	75

Capítulo Cuatro : ONDILLAS EN LA MEDICINA

4.1 INTRODUCCION

Las ondillas actualmente son utilizadas en campos tan diversos como las telecomunicaciones y la biología por su conveniencia para analizar señales no estacionarias (aquellas cuyas propiedades estadísticas cambian con el tiempo), siendo una alternativa poderosa a los métodos de Fourier en muchas aplicaciones médicas donde tales señales abundan. Las ondillas ayudan en el reconocimiento y detección de importantes características.

La mayoría de las señales biomédicas no son estacionarias, por el contrario tienen características complejas en el tiempo y frecuencia, usualmente estas consisten de pequeñas componentes de alta frecuencia en cortos periodos de tiempo acompañados por componentes permanentes de baja frecuencia. Un método apropiado de análisis para señales biomédicas debería considerar una buena resolución en frecuencia con una resolución fina en tiempo. Lo primero para localizar las componentes de baja frecuencia, y lo segundo para observar las componentes de alta frecuencia.

En la práctica es posible tratar las señales no estacionarias como estacionarias, dividiéndolas en bloques de segmentos pseudo estacionarios. Esto es, segmentos cuyas propiedades estadísticas no cambian en ese periodo de tiempo.

Una manera alternativa de analizar las señales no estacionarias biomédicas es expandirlas en funciones bases creadas por expansión, contracción y cambio de una única función prototipo seleccionada para la señal bajo estudio. En lenguaje de ondillas, a esta función se la llama la ondilla madre.

La transformada de ondillas puede proveer una buena resolución en tiempo a altas frecuencias y una buena resolución de frecuencia a bajas frecuencias. Su excelente combinación de resolución de tiempo y frecuencia hace de las ondillas una invaluable herramienta para numerosas aplicaciones médicas.

El método de ondillas actúa como un microscopio matemático que permite analizar las diferentes partes de la señal ajustando el foco.

Dentro de las aplicaciones dadas a las ondillas están el descubrimiento temprano de enfermedades coronarias, estudios de respiración fetal, la detección de cáncer de pecho y la compresión de imágenes médicas.

4.2 COEFICIENTES FILTRO Y GRAFICOS DE φ Y ψ ¹

A cada ondilla madre le corresponde un par de filtros (pasa-bajos y pasa-altos), definidos por los coeficientes filtro $h(n)$ y $g(n)$. A continuación se presentan los valores de los coeficientes filtro y la forma de las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, pero no se detallará el procedimiento seguido para obtenerlos. Todo esto es resultado de una teoría extensa que sale de los alcances de la presente tesis.

Serán necesarias para encontrar los coeficientes filtro $h(n)$ las igualdades ya mencionadas anteriormente

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad \text{Ecuación 2.4}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] = 1$$

$$\int \varphi(t) dt = 1$$

Los coeficientes del filtro espejo $G(z)$ se calculan mediante

$$g[n] = (-1)^n h[n - 1]$$

¹ Los valores de los coeficientes filtro que se presentan, son los que constan en "Ten lectures on wavelets" de Ingrid Daubechies. [7]

La respuesta de frecuencia de los filtros $H(z)$ y $G(z)$ se la calcula mediante

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jn\omega}$$

Cuando se construyen las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ a partir de los coeficientes filtro, se cumple, que si N de los coeficientes filtro $\{h[k]: k \in \mathbb{Z}\}$ son distintos de cero, la función de escalamiento es distinta de cero únicamente en el intervalo $(0, N-1)$, que es el soporte de dicha función. [3]

Para construir funciones de escalamiento a partir de coeficientes filtro, se parte de los valores enteros de x en la ecuación

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\varphi[2x-k]$$

$$\varphi(x) = h(0)\varphi(2x) + h(1)\varphi(2x-1) + \dots + h(N-1)\varphi(2x-N+1)$$

para luego utilizar

$$\varphi(j) = 0 \quad \text{para todo } j < 0 \text{ y } j > N-1$$

de lo cual se obtienen N ecuaciones cuya solución no es única, por lo que se necesita de la condición de normalización, $\int \varphi(t)dt = 1$, para resolver el sistema.

Una vez encontrados los valores de $\varphi(x)$ en los valores enteros, se encuentra $\varphi(x)$ para los puntos medios mediante la ecuación 3.15

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \varphi[x - k]$$

La ondilla madre, ψ , se la calcula a partir de la función de escalamiento, φ , mediante la relación

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \varphi[2x - k]$$

4.2.1 Base de Haar

La base de Haar es la más antigua y elemental de todas las ondillas, a pesar que no tiene una buena localización de tiempo-frecuencia es muy utilizada por su sencillez.

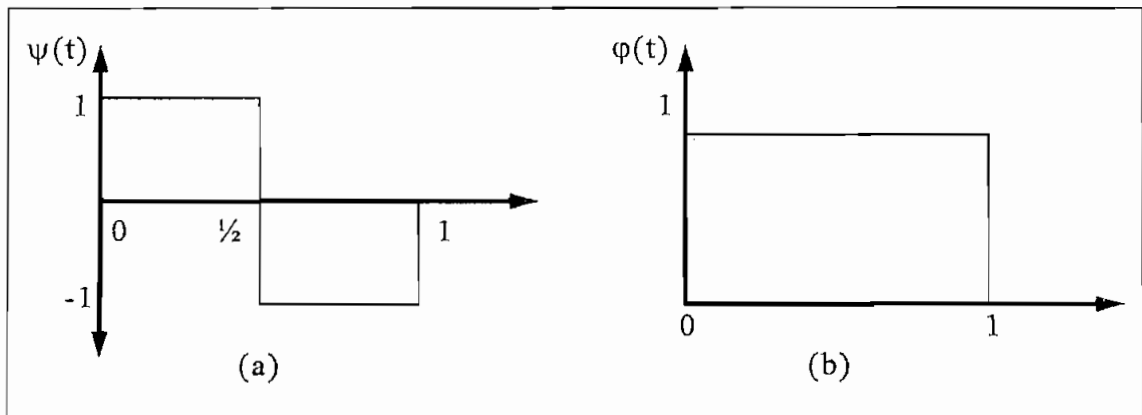


Figura 4.1: (a) Función generatriz de la base de Haar. (b) Función de escalamiento.

La función $\psi(t)$, también llamada función caja, está dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

además, se puede demostrar que

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t+1) - \frac{1}{2}\varphi(2t)$$

Los coeficientes filtro respectivos son

$$h(0) = 1/2 \quad h(1) = 1/2$$

0 para cualquier otro valor.

Su respuesta de frecuencia tiene la forma

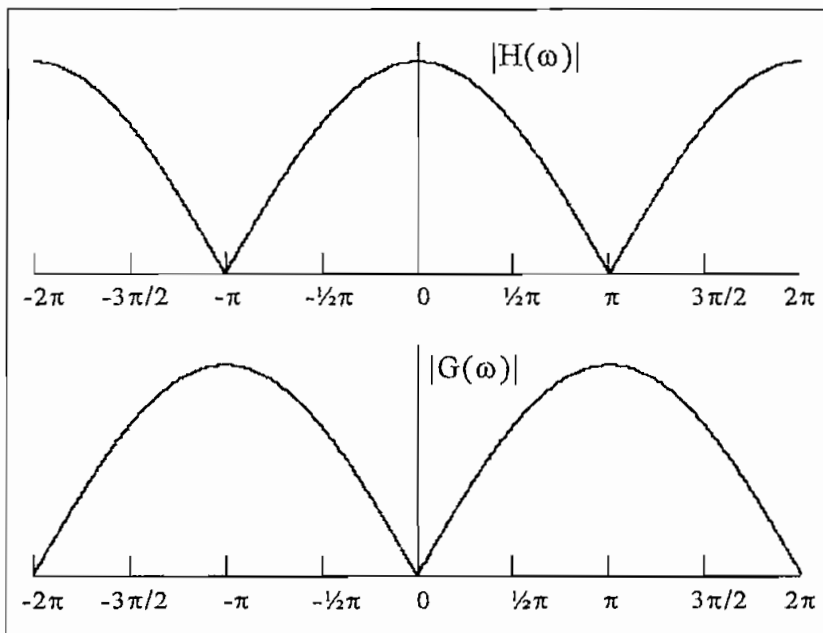


Figura 4.2: Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados de la base de Haar.

4.2.2 Base de Daubechies

Este tipo de bases fueron construidas en 1988 por Ingrid Daubechies y son de las más conocidas por su excelente localización de tiempo-frecuencia. Representan filtros FIR que no son simétricos, y este es su principal cuestionamiento.

Daubechies orden 2

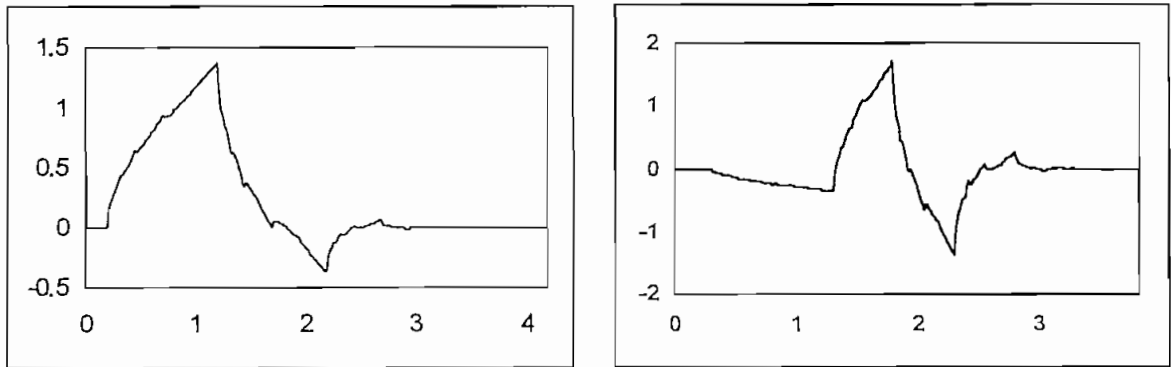


Figura 4.3: A la izquierda la función ϕ , mientras que a la derecha la función ψ de orden 2 de Daubechies.

Los coeficientes filtro son

$$h(0) = 0.341506351 \quad h(1) = 0.591506351$$

$$h(2) = 0.15849364 \quad h(3) = -0.091506351$$

0 para cualquier otro valor.

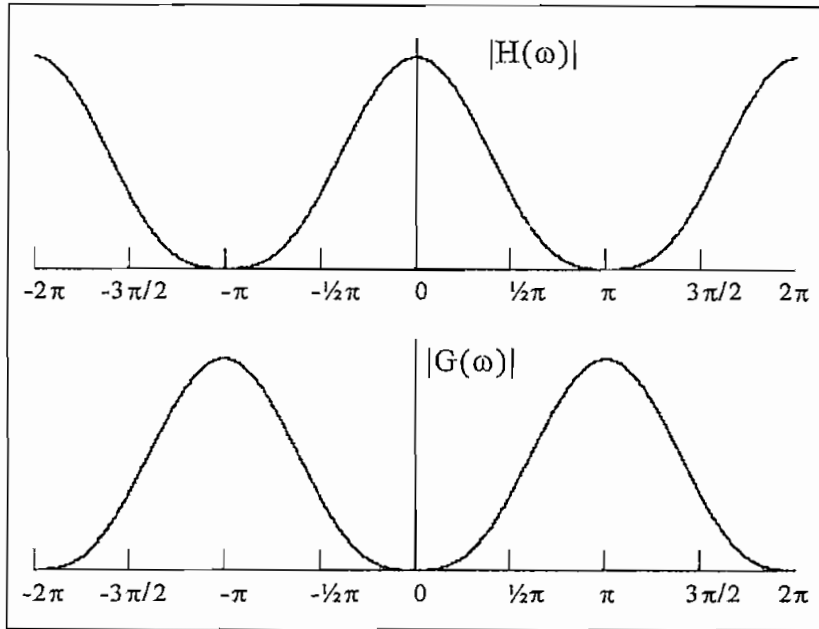


Figura 4.4: Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados correspondientes a Daubechies orden 2.

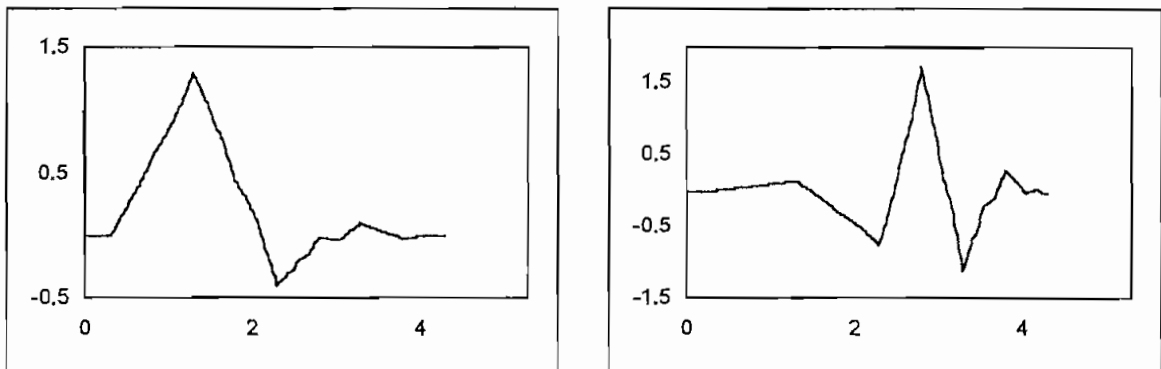


Figura 4.5: A la izquierda la función φ , mientras que a la derecha la función ψ de orden 3 de Daubechies. Nótese una mayor simetría que en la de orden 2.

Daubechies orden 8

Los coeficientes filtro normalizados a $\sqrt{2}$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] = \sqrt{2}$, son

$$h(0) = 0.054415842$$

$$h(1) = 0.312871591$$

$$h(2) = 0.675630737$$

$$h(3) = 0.585354684$$

$h(4) = -0.015829105$ $h(5) = -0.284015543$
 $h(6) = 0.000472485$ $h(7) = 0.128747427$
 $h(8) = -0.017369301$ $h(9) = -0.044088254$
 $h(10) = 0.013981028$ $h(11) = 0.00874609$
 $h(12) = -0.004870353$ $h(13) = -0.00039174$
 $h(14) = 0.000675449$ $h(15) = -0.000117477$

0 para cualquier otro valor.

Su respuesta de frecuencia tiene la forma

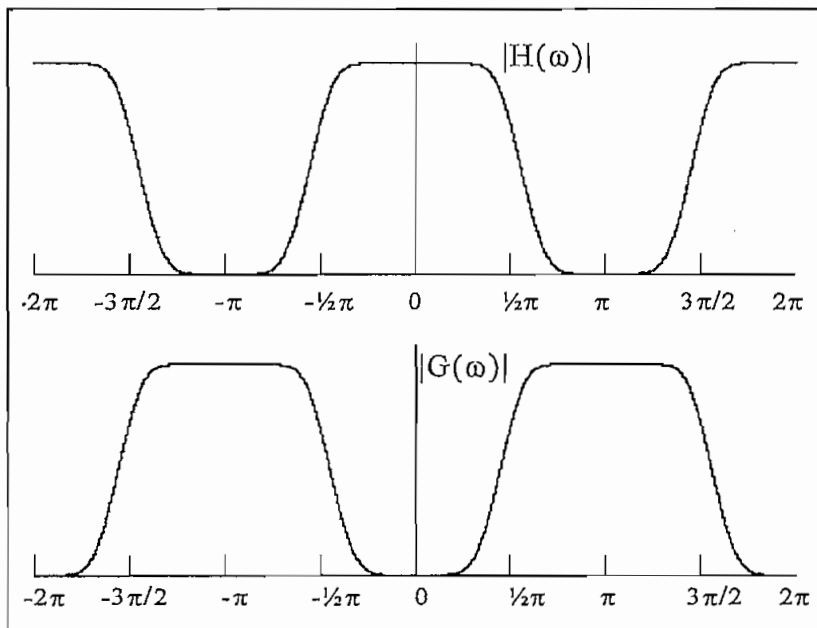


Figura 4.6: Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados de Daubechies orden 8.

4.2.3 Base B-Spline

Las ondillas Battle-Lemarié están asociadas con el análisis multirresolución y consisten de funciones spline. Se parte de una función constante dentro de un intervalo, de la cual se construyen las ondillas spline de orden r . Una característica muy importante de estos filtros es su simetría.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro valor de } t \end{cases}$$

La ondilla B-spline de orden r se obtiene convolucionando la anterior función por sí misma, $r+1$ veces.

$$\varphi_r(t) = \varphi(t) * \varphi(t) * \dots * \varphi(t) \quad r+1 \text{ veces}$$

Spline orden 1

Los coeficientes filtro respectivos son

$$h(0) = 0.25 \quad h(1) = 0.5$$

$$h(2) = 0.25$$

0 para cualquier otro valor.

Además se satisface que

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t+1) + \varphi(2t) + \frac{1}{2}\varphi(2t-1)$$

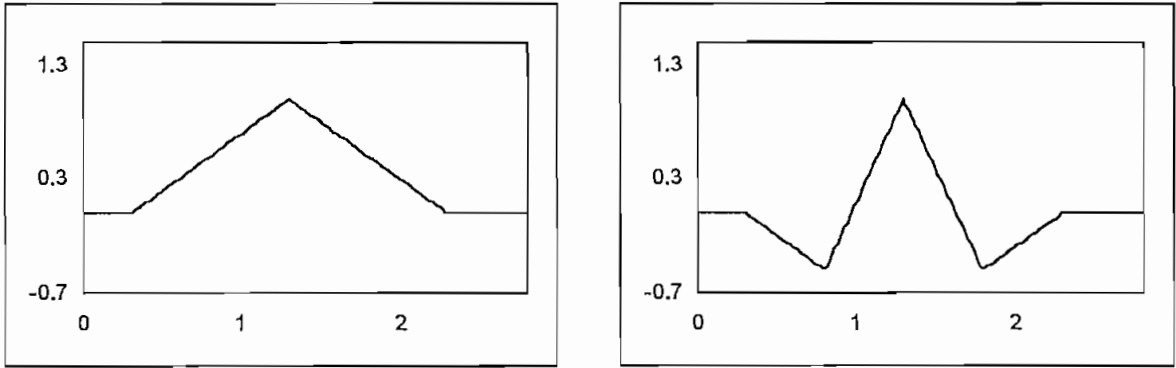


Figura 4.7: A la izquierda la función φ , mientras que a la derecha la función correspondiente a la base spline de orden 1.

Spline orden 2

Los coeficientes filtro son

$$h(0) = 0.125 \quad h(1) = 0.375$$

$$h(2) = 0.375 \quad h(3) = 0.125$$

0 para cualquier otro valor.

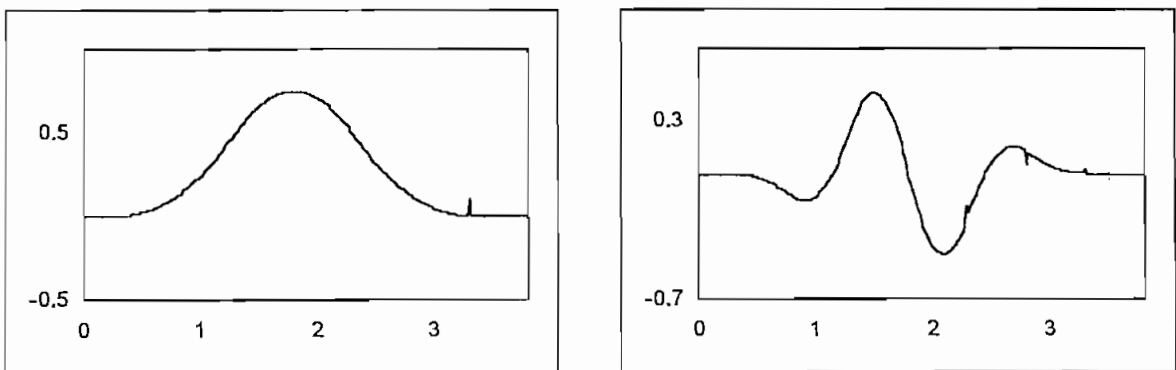


Figura 4.8: A la izquierda la función φ , mientras que a la derecha la función ψ . Se cumple $\varphi(t) = \frac{1}{4} \varphi(2t+1) + \frac{3}{4} \varphi(2t) + \frac{3}{4} \varphi(2t-1) + \frac{1}{4} \varphi(2t-2)$

Su respuesta de frecuencia tiene la forma

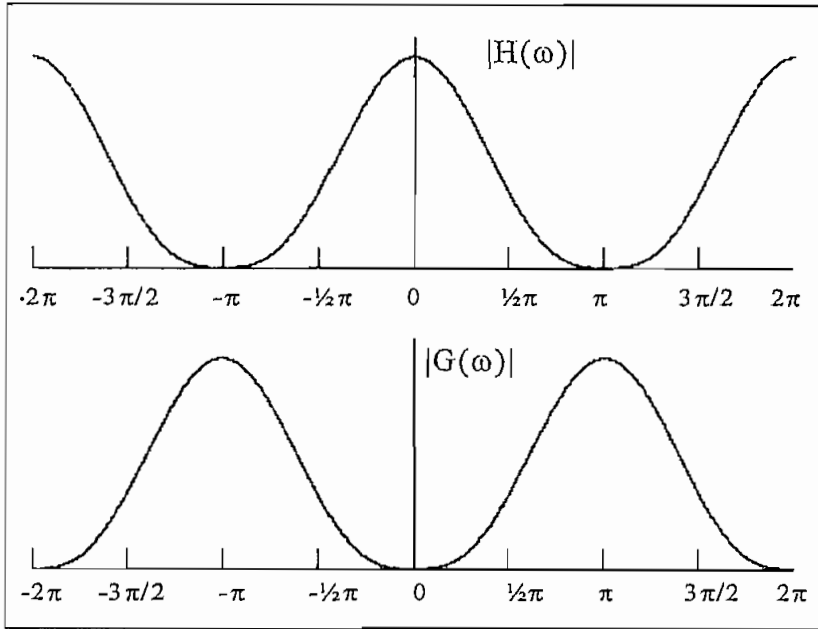


Figura 4.9 : Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados de la base Spline 2.

4.2.4 Coiflets

En la primavera de 1989, R. Coifman sugirió que sería mejor construir bases de ondillas ortonormales con un alto número de momentos de decaimiento tanto para ψ como para ϕ . Lo fundamental es encontrar ψ , ϕ tal que

$$\int dx x^l \psi(x) = 0, \quad l=0, \dots, L-1$$

$$\int dx \phi(x) = 1, \quad \int dx x^l \phi(x) = 0, \quad l = 1, \dots, L-1$$

donde l es llamado el orden de la coiflet.

Coiflet orden 2

$h(0) = -0.0514297$ $h(1) = 0.23892972$
 $h(2) = 0.602859$ $h(3) = 0.2721405$
 $h(4) = -0.05142997$ $h(5) = -0.01107$
 0 para cualquier otro valor.

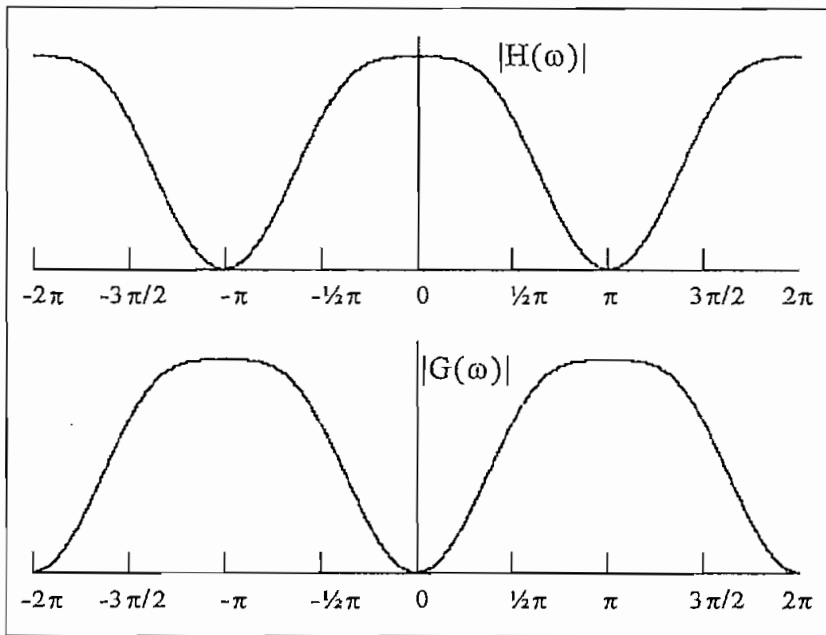


Figura 4.10: Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados de la coiflet $l=2$.

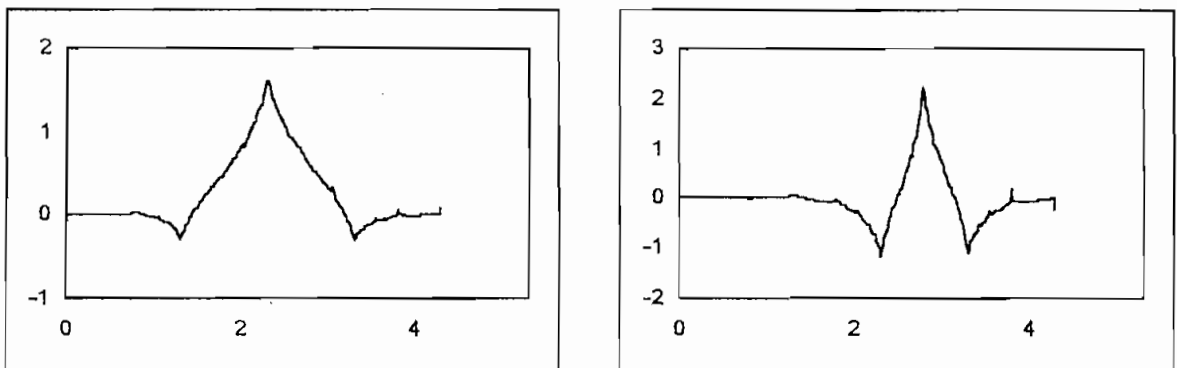


Figura 4.11 : A la derecha coiflet ψ y a la izquierda su correspondiente función ϕ .

Coiflet orden 6

Los coeficientes filtro respectivos son

$h(0) = -0.0026824$	$h(1) = 0.0055031$
$h(2) = 0.0165835$	$h(3) = -0.0465078$
$h(4) = -0.0432208$	$h(5) = 0.2865033$
$h(6) = 0.5612850$	$h(7) = 0.3029836$
$h(8) = -0.05077$	$h(9) = -0.058196$
$h(10) = 0.024434$	$h(11) = 0.0112292$
$h(12) = -0.0063696$	$h(13) = -0.0018205$
$h(14) = 0.0007902$	$h(15) = 0.0003297$
$h(16) = -0.00005$	$h(17) = -0.0000245$

0 para cualquier otro valor.

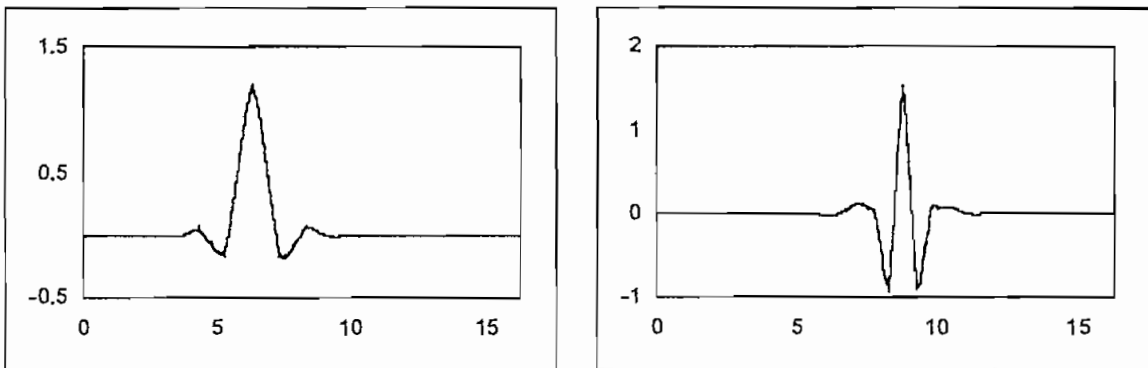


Figura 4.12: A la izquierda la función de escalamiento φ y a la derecha la coiflet ψ de orden 6. El soporte de las funciones para todos los casos es $3l - 1$. Para este caso, $l = 6$, el intervalo es $(0, 17)$.

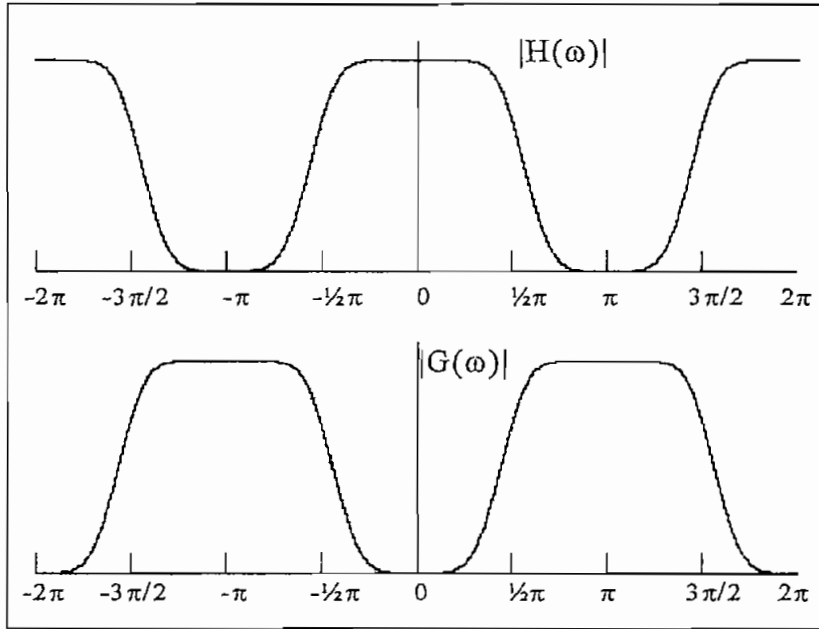


Figura 4.13: Respuesta de frecuencia de los filtros conjugados de la base coiflet 6.

4.3 LA TRANSFORMADA DE ONDILLAS APLICADA A LA DETECCION DE ENFERMEDADES DEL CORAZON

Como herramienta para detectar enfermedades del corazón se utilizó un software que permite aplicar la transformada de ondillas a electrocardiogramas digitalizados. En páginas posteriores se presentan ECGs que corresponden a personas sanas y se los compara con ECGs de individuos que presenten algún tipo de enfermedad plenamente identificada.

Como es evidente, el primer paso a seguir es el de digitalizar los electrocardiogramas para que puedan ser analizados por la computadora. El método empleado, primero digitaliza los ECGs con la ayuda de un escáner de alta resolución que obtiene gráficos en blanco y negro (no se

utiliza color porque la gama de colores resultantes dificulta el siguiente paso). Luego se usa un programa realizado en VisualBasic que permite distinguir en un archivo, del tipo BMP o JPG, de que color es un punto que se encuentra en una determinada coordenada. [16]

Este software en realidad es bastante simple, lo que hace es barrer el dibujo columna a columna, cuando encuentra el primer punto de color negro se guarda su localización y se salta a la siguiente columna.

Para pasar las coordenadas a su valor real, son necesarios los valores de dos puntos cualquiera del electrocardiograma original, lo más sencillo es escoger al primer punto y al máximo en amplitud del dibujo y luego pedir su valor de altura. Entonces se puede aplicar la fórmula

$$\text{Dato}(x) = \text{VIR} + (\text{Dato}(x) - \text{VID}) * (\text{AlturaReal} / \text{AlturaDibujo})$$

Donde

Dato(x) es el dato a ser cambiado de escala

AlturaDibujo = Valor Máximo dibujo (VMD) - Valor Inicial dibujo (VID)

AlturaReal = Valor Máximo real (VMR) - Valor Inicial real (VIR)

Finalmente a estos datos se los almacena en un archivo de texto de extensión dat.

Una alternativa al escáner es la de una mesa de digitalización (la cual existe en la Facultad de Sistemas de la EPN), el inconveniente es que esta herramienta reconoce los trazos gruesos y no la alta frecuencia.

Una vez que se han digitalizado los electrocardiogramas puede aplicarse la transformada de ondillas a esta serie de datos, que es una función discreta del tiempo. Los algoritmos utilizados son los que fueron presentados en el capítulo anterior

$$c_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] c_j[2k - n] \quad \text{Ecuación 3.22}$$

$$d_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] c_j[2k - n] \quad \text{Ecuación 3.23}$$

El software WAVELET, que aplica la transformada de ondillas a una función discreta del tiempo, será descrito en detalle al final de la presente tesis, en el anexo 1.

Capítulo Cinco: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1 Presentación de los resultados obtenidos en el análisis de electrocardiogramas.	78
5.2 Mejores Bases .	109
5.3 Acerca del algoritmo usado.	122
5.4 Propiedades de filtrado de las ondillas.	124
5.5 Conclusiones generales.	127

Capítulo Cinco : RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1 PRESENTACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL ANALISIS DE ELECTROCARDIOGRAMAS

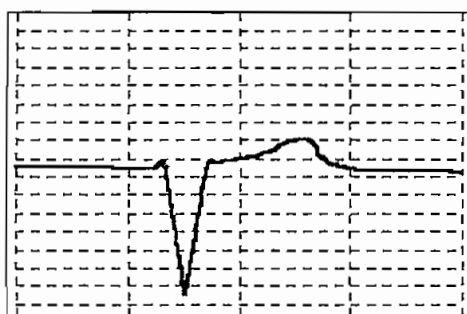
De la gran cantidad de enfermedades del corazón se escogió a las hipertrofias ventriculares, ya que para el diagnóstico de estas, el estudio de los electrocardiogramas tiene una importancia especial.

Las componentes de frecuencia mostradas fueron encontradas con los coeficientes filtro de la ondilla de Daubechies de orden 2. En la primera columna se presenta el ECG que pertenece a una persona enferma y a la derecha el ECG normal, primero se enseña el ECG original (V_0) y luego sus componentes, partiendo de la primera (W_{-1}) y continuando en orden descendente ($W_{-2}, W_{-3}, \dots, W_{-i}$).

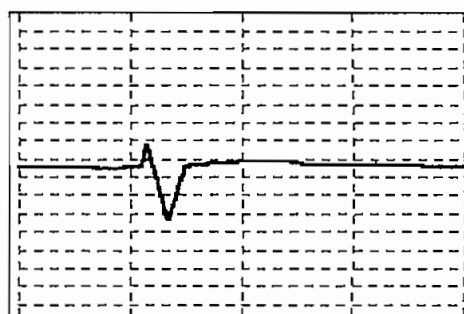
5.1.1 Hipertrofia ventricular izquierda severa

Derivación V1

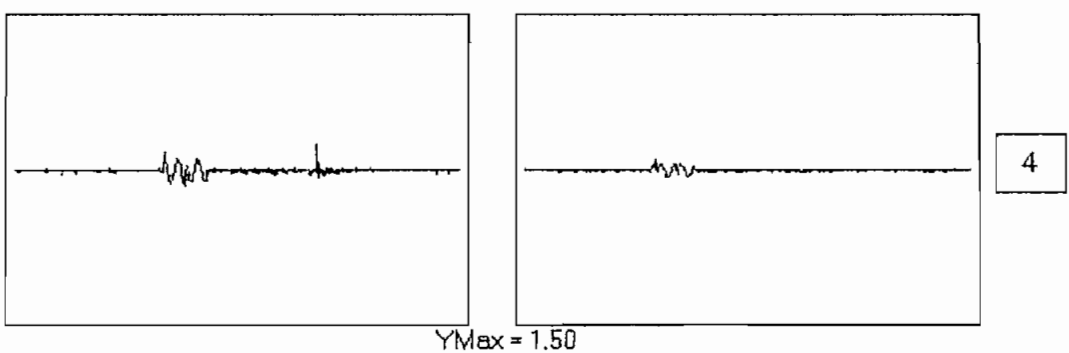
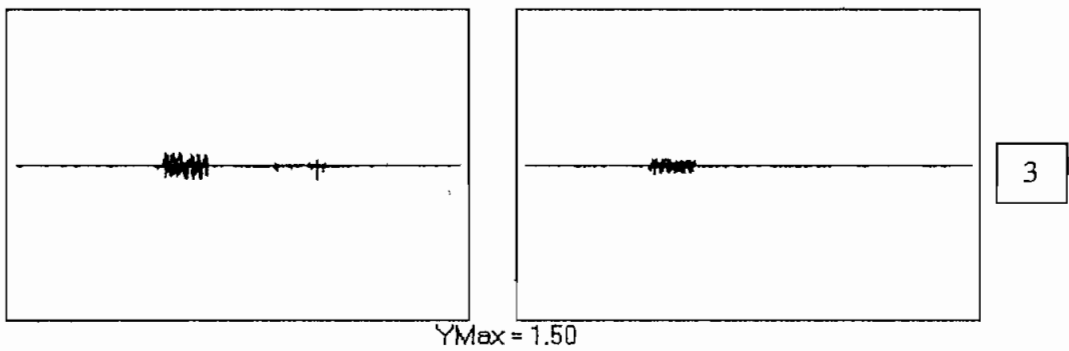
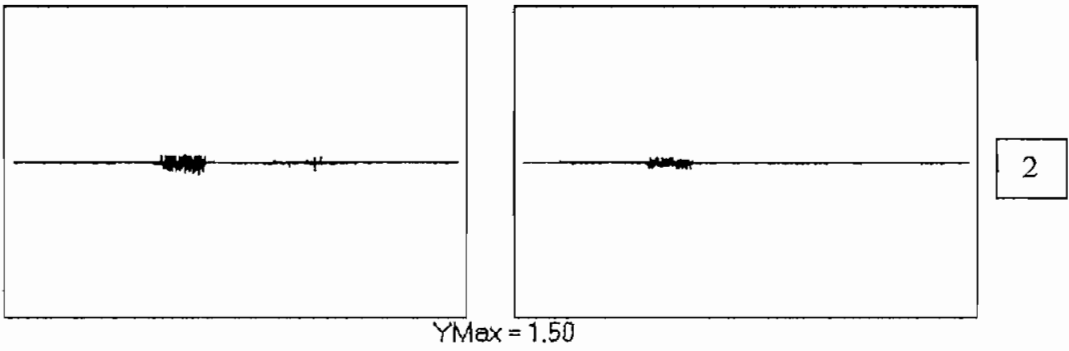
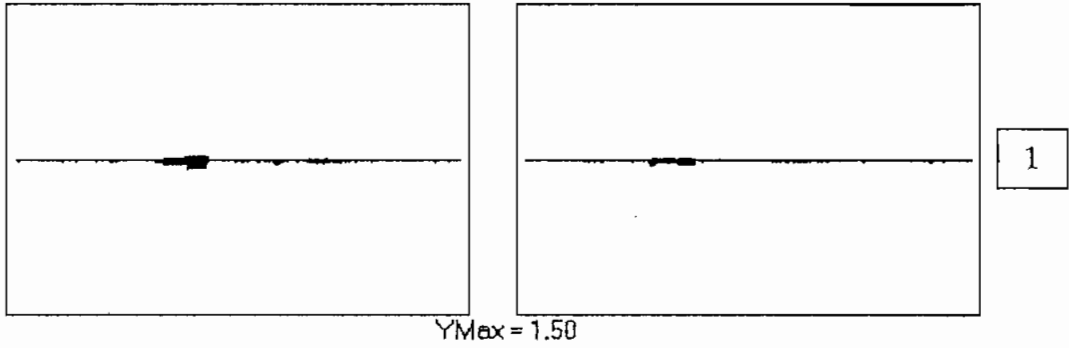
ECG enfermo

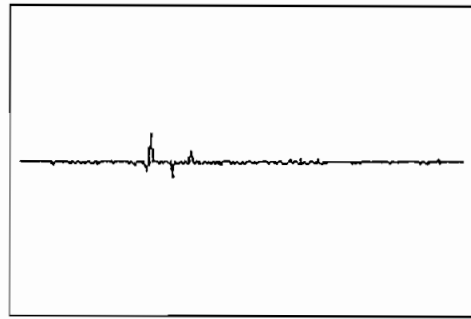


ECG normal



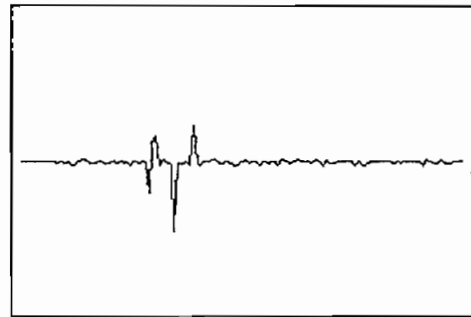
$Y_{Max} = 4.24$





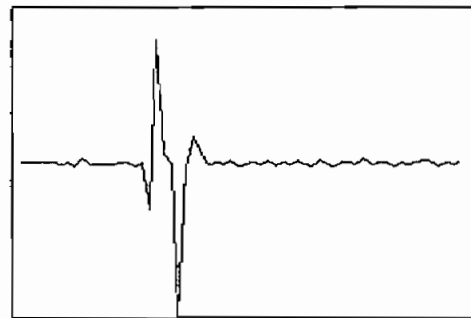
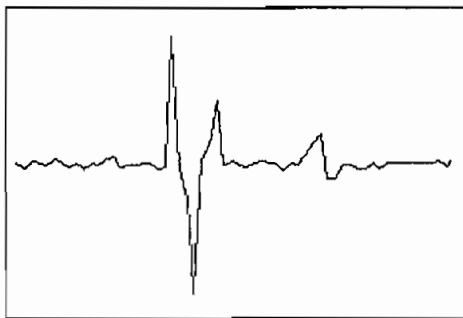
5

YMax = 1.50



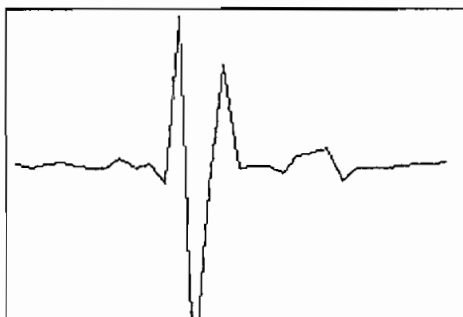
6

YMax = 1.50



7

YMax = 2.12



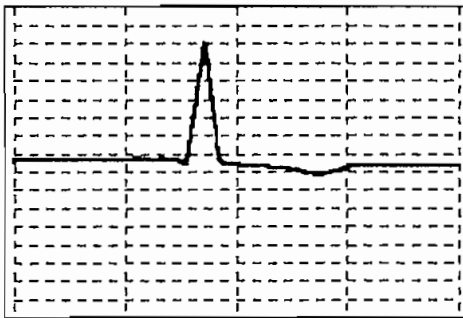
8

YMax = 6.00

ECG Enfermo: Se observa que la onda T tiene mayor amplitud (es clara la gran diferencia existente). También en la componente 8 el complejo QRS es de mayor amplitud que en el sano. Los complejos QRS son similares en las demás componentes.

Derivación V5

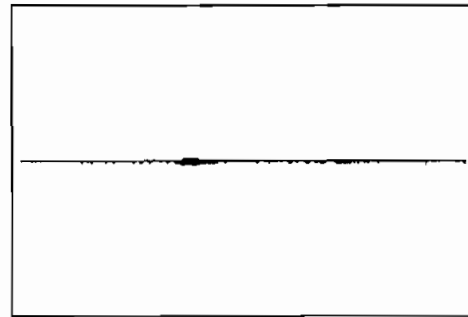
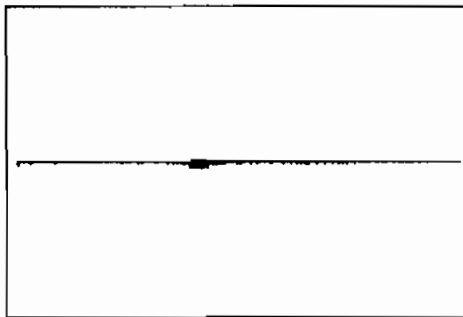
ECG enfermo



ECG normal

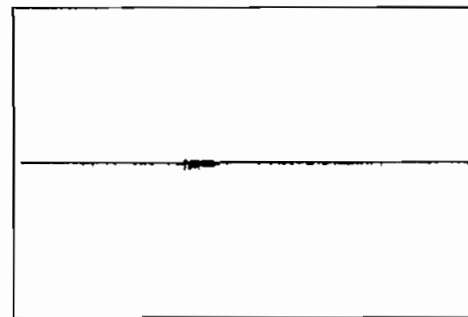
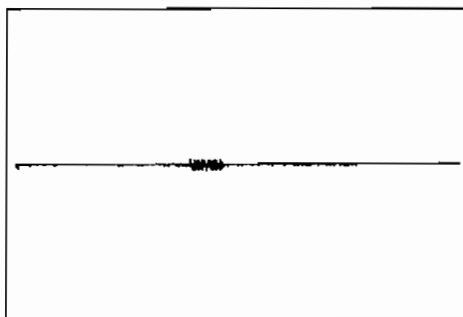


YMax = 4.24



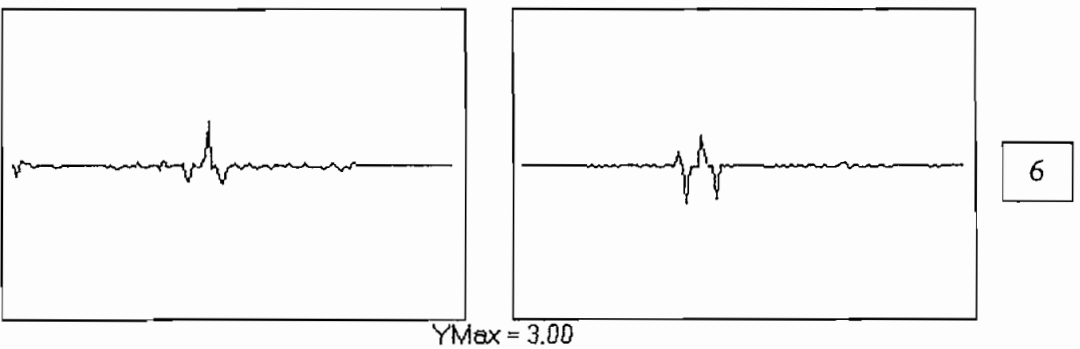
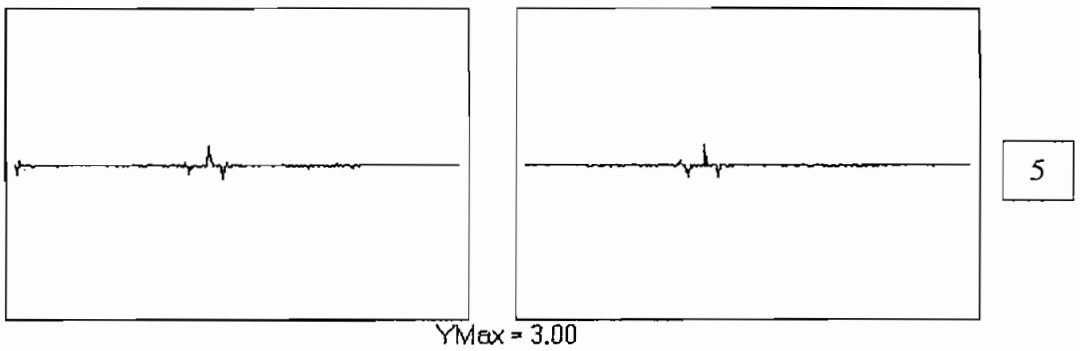
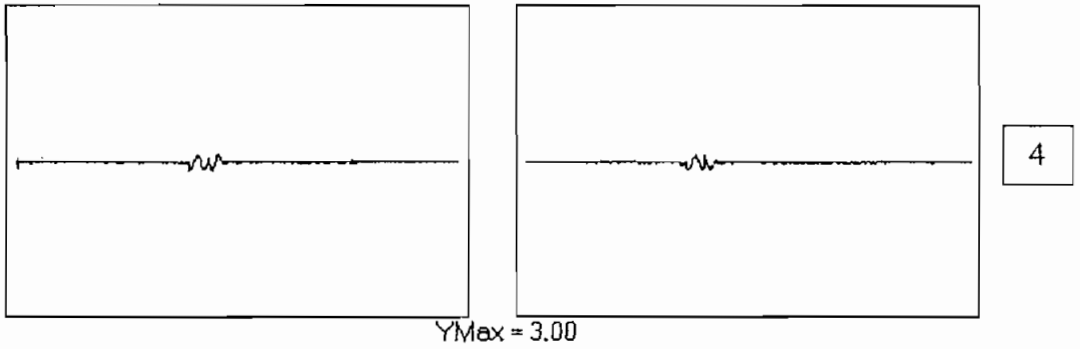
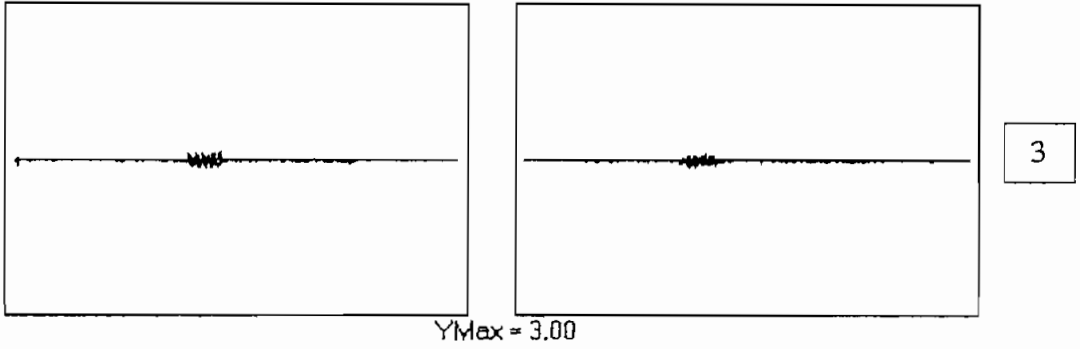
1

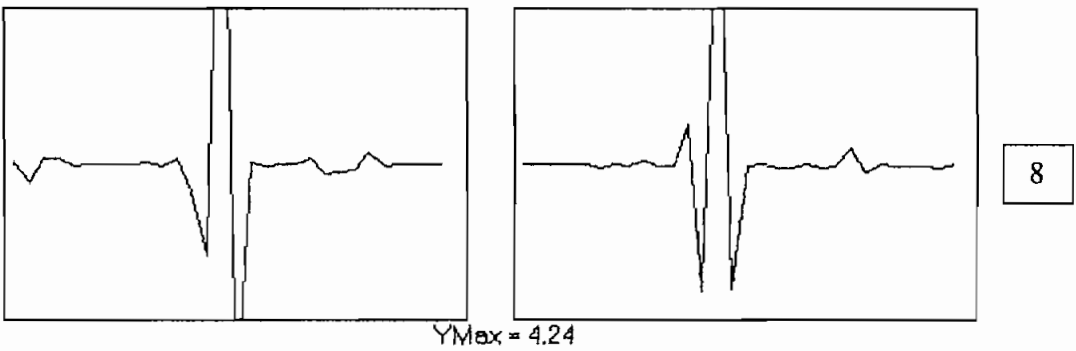
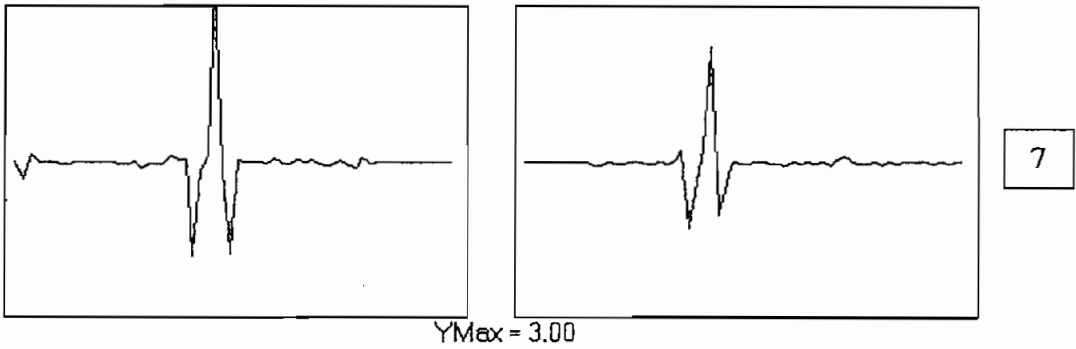
YMax = 3.00



2

YMax = 3.00





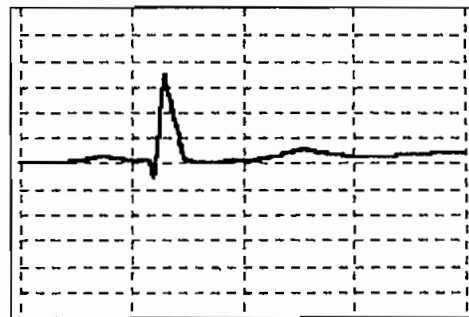
ECG Enfermo: La onda R es de mayor amplitud desde la componente 5.
Desde la componente 7 se nota que la onda T está invertida.

Derivación V6

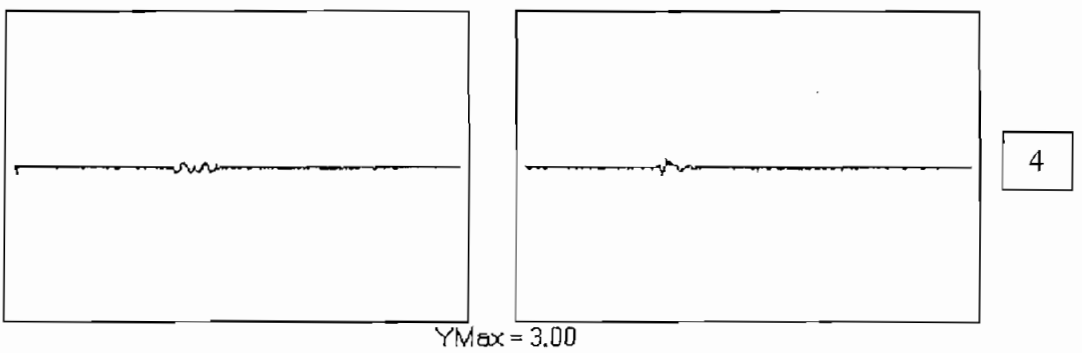
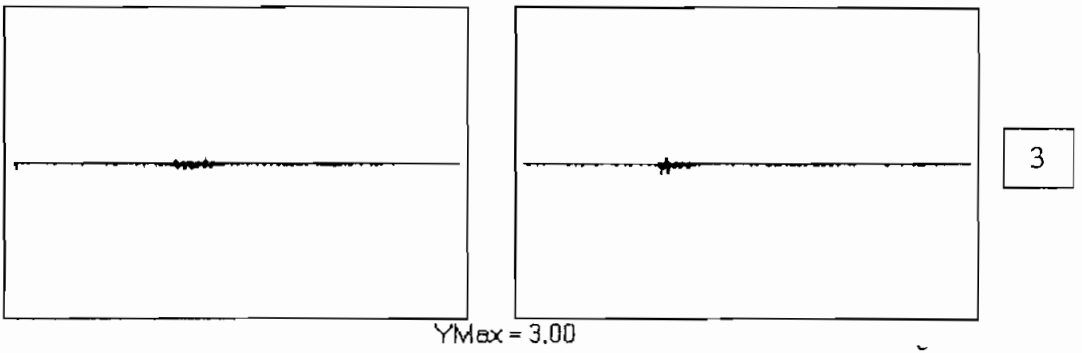
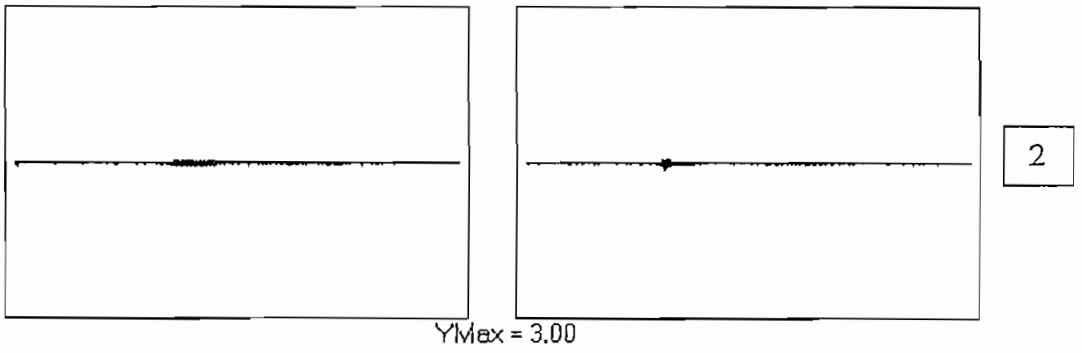
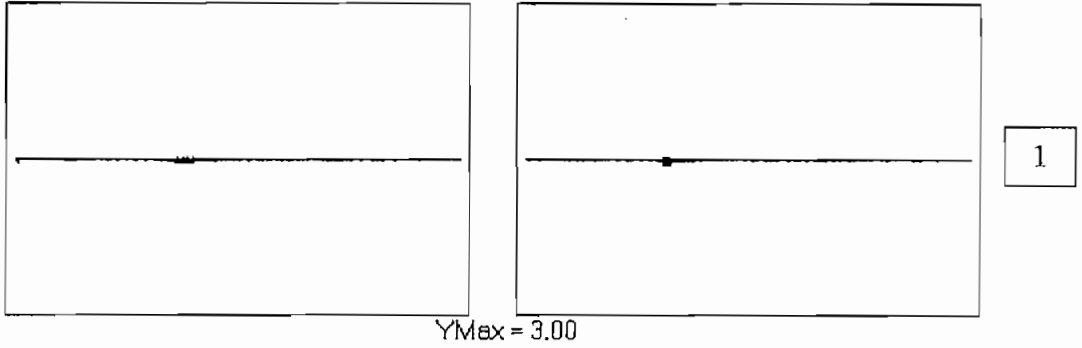
ECG enfermo

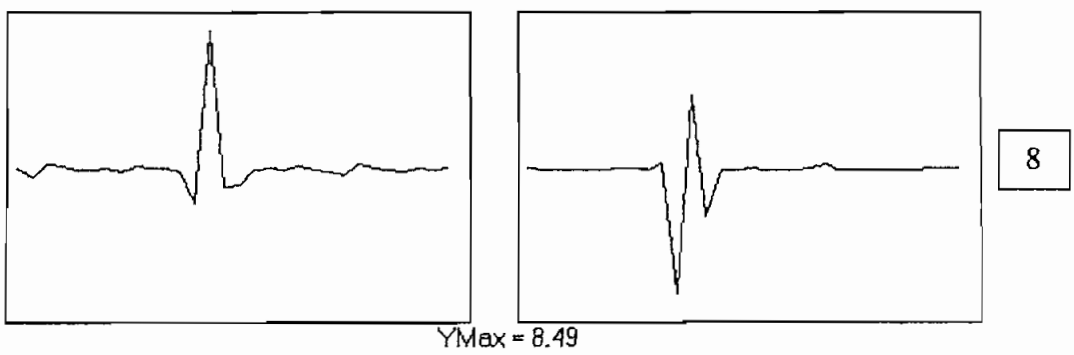
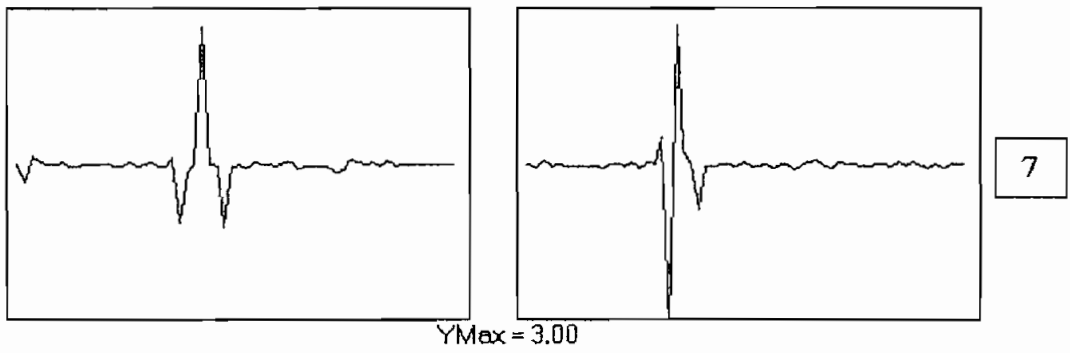
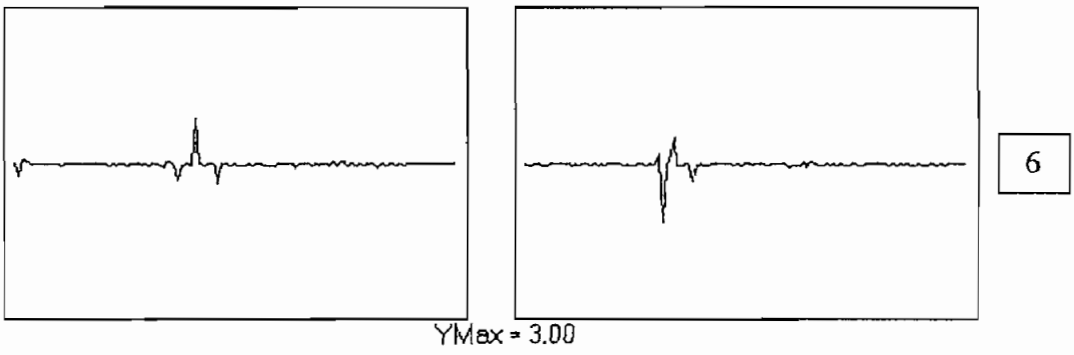
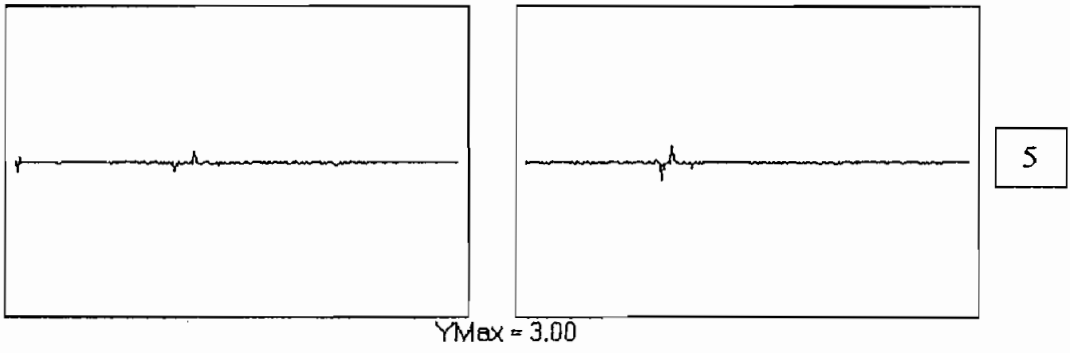


ECG normal



YMax = 3.00





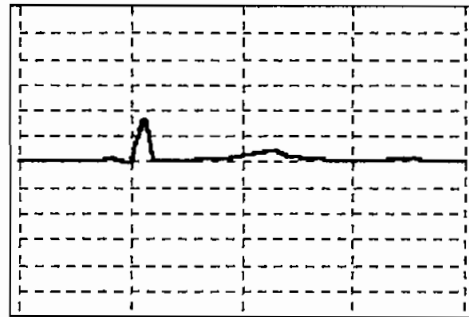
ECG Enfermo: La onda Q es más pequeña que en el sano. En la componente 6 y 8 la onda R es mayor. En la componente 8 la onda T está invertida.

Derivación aVL

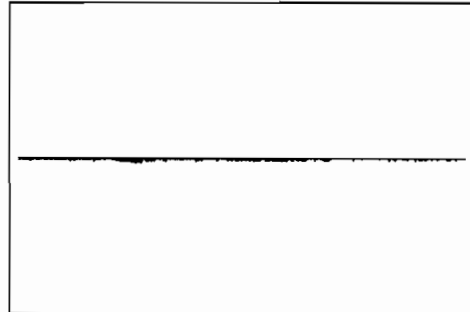
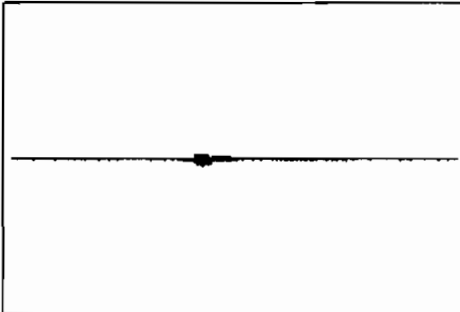
ECG enfermo



ECG normal

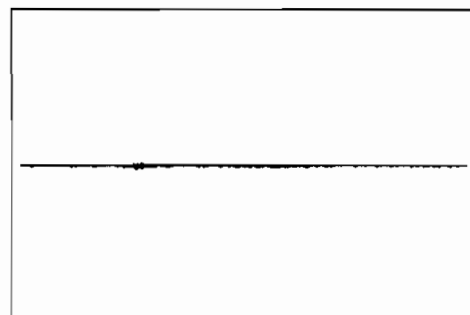
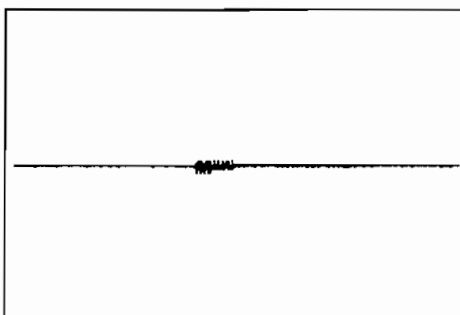


YMax = 3.00



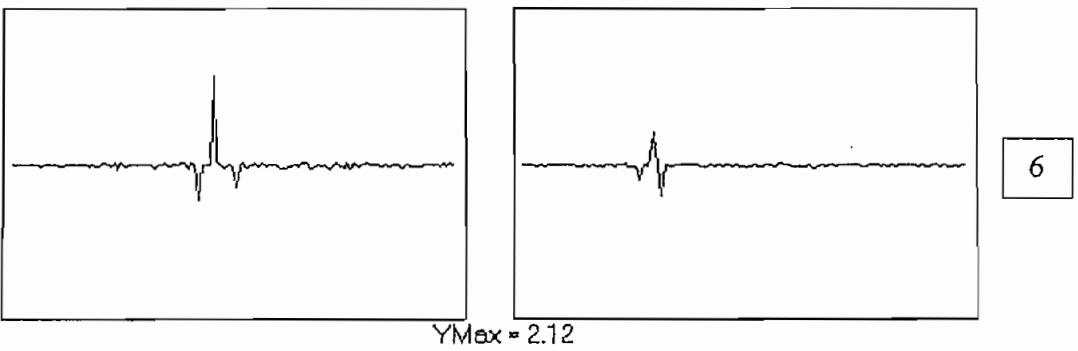
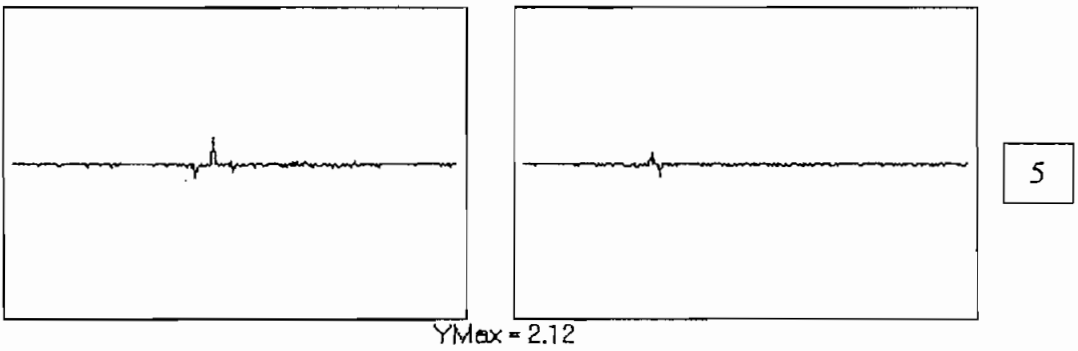
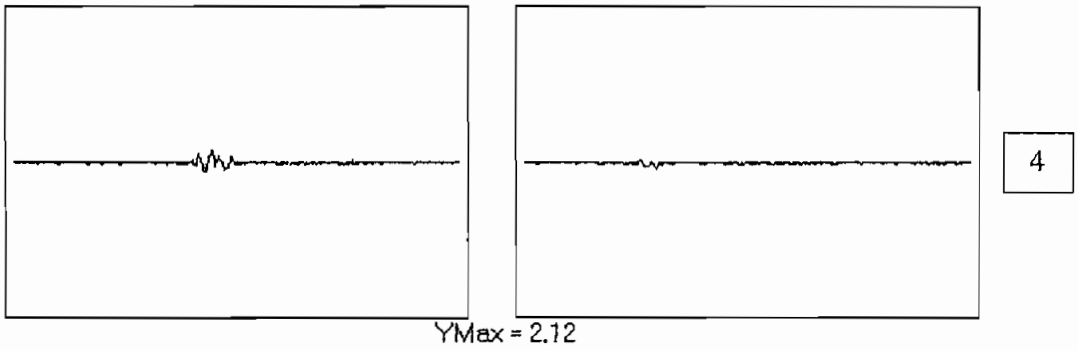
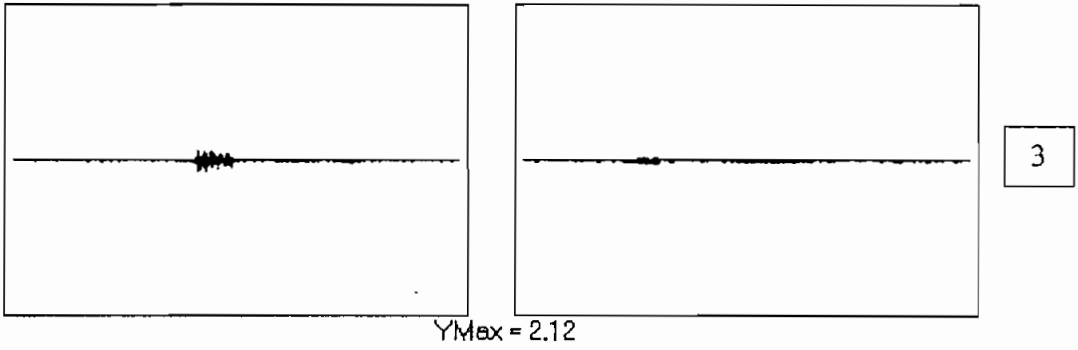
1

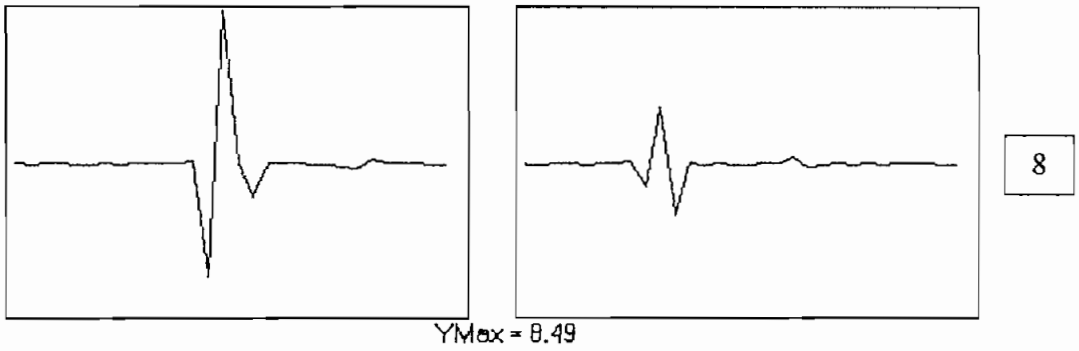
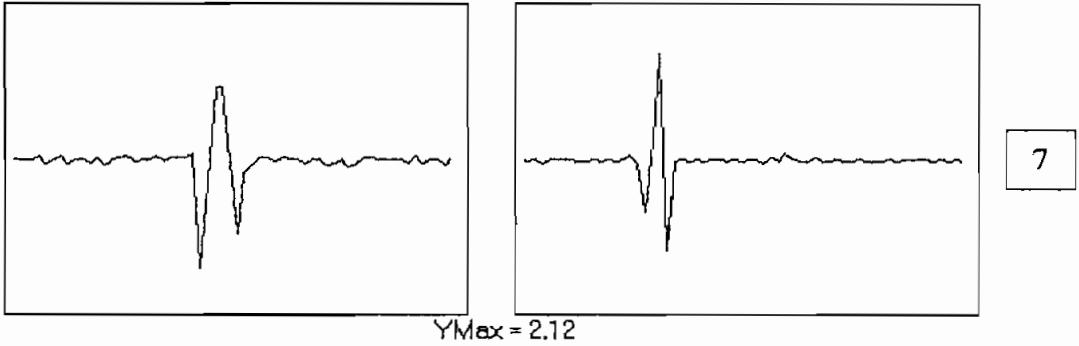
YMax = 2.12



2

YMax = 2.12





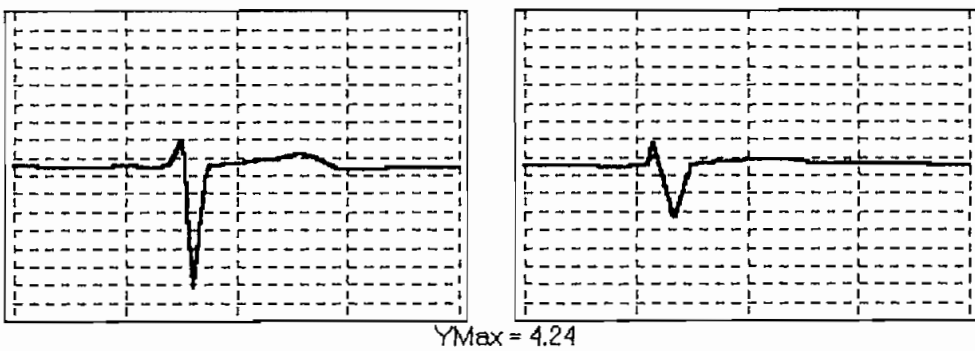
Las mismas conclusiones que para la derivación V6.

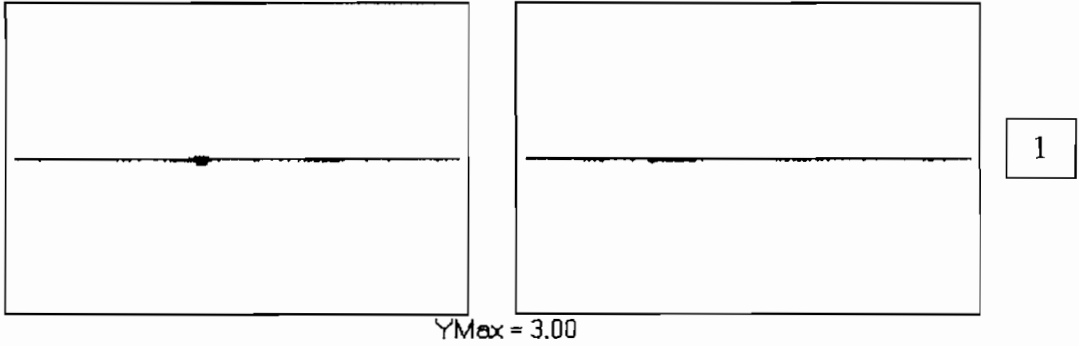
5.1.2 Hipertrofia ventricular izquierda

Derivación V1

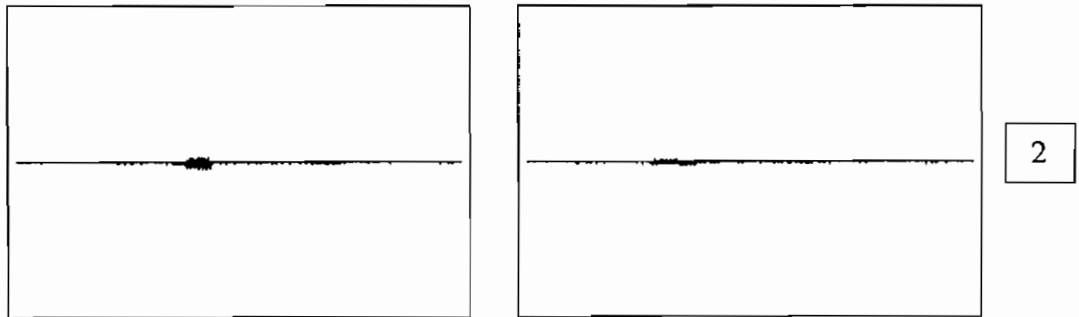
ECG enfermo

ECG normal

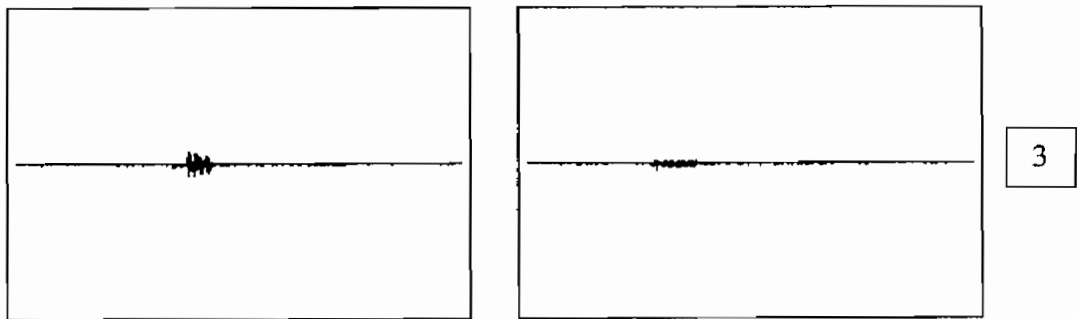




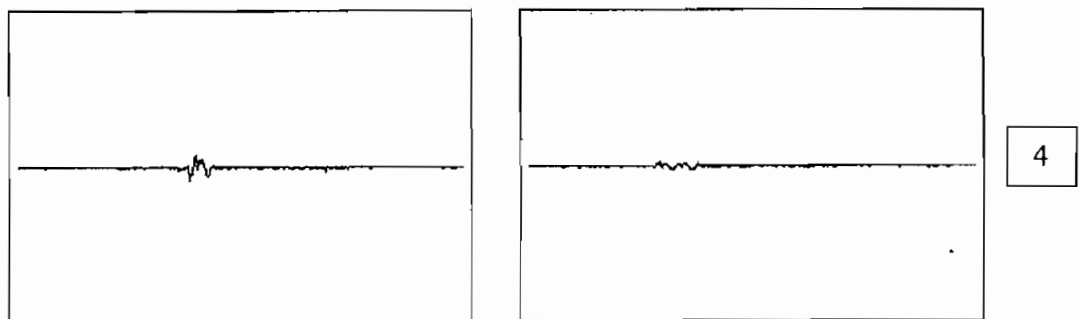
YMax = 3.00



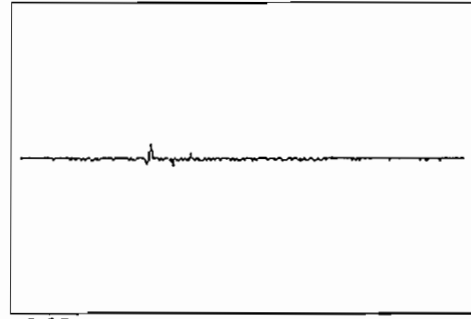
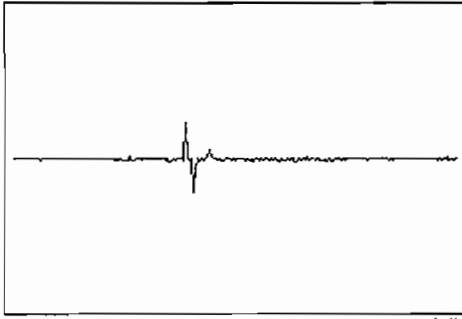
YMax = 3.00



YMax = 3.00

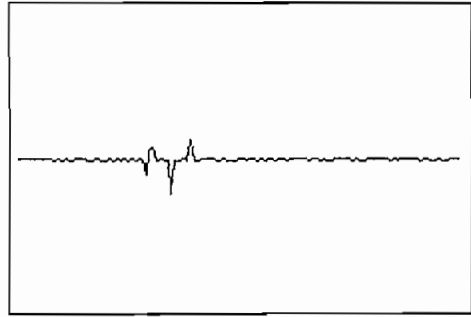


YMax = 3.00



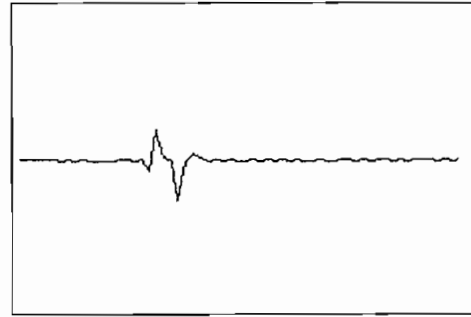
5

YMax = 3.00



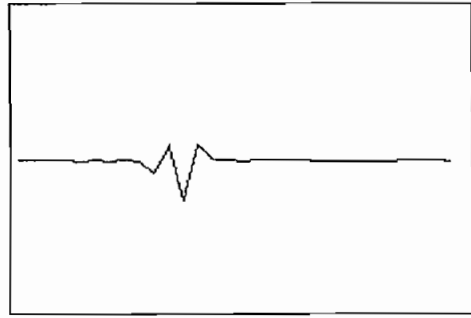
6

YMax = 3.00



7

YMax = 8.49



8

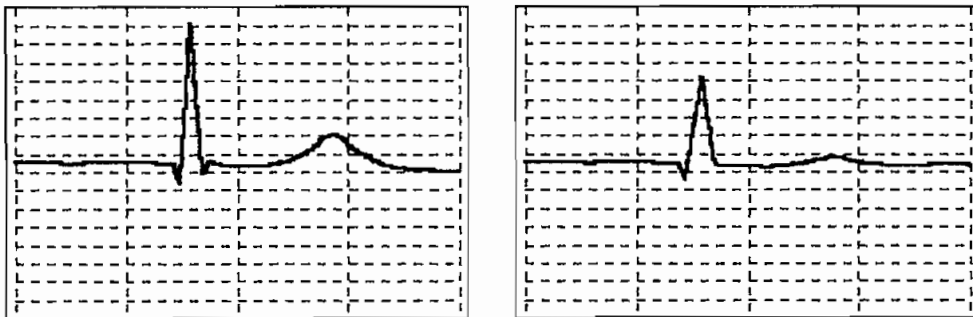
YMax = 24.00

ECG Enfermo: Desde la componente 5 la onda S es mucho más grande que en el sano. En las componentes 7 y 8 la onda R tiene mayor amplitud.

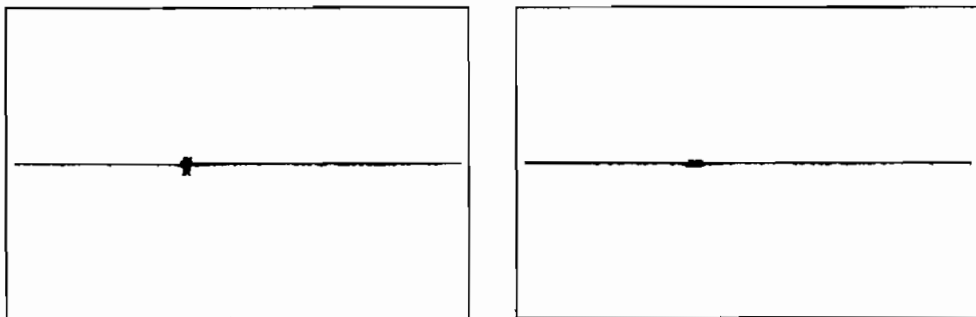
Derivación V5

ECG enfermo

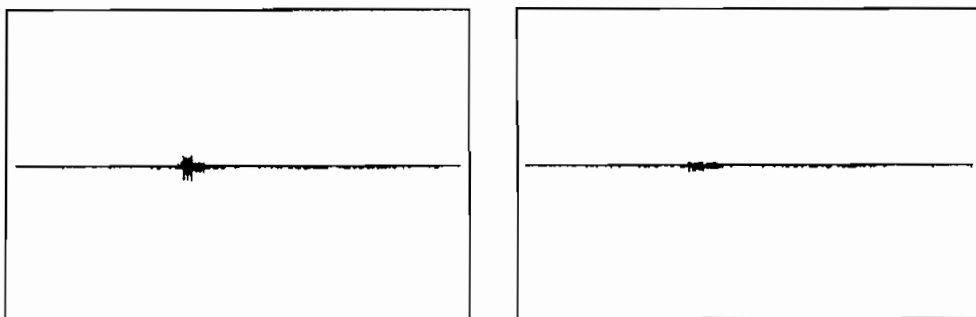
ECG normal



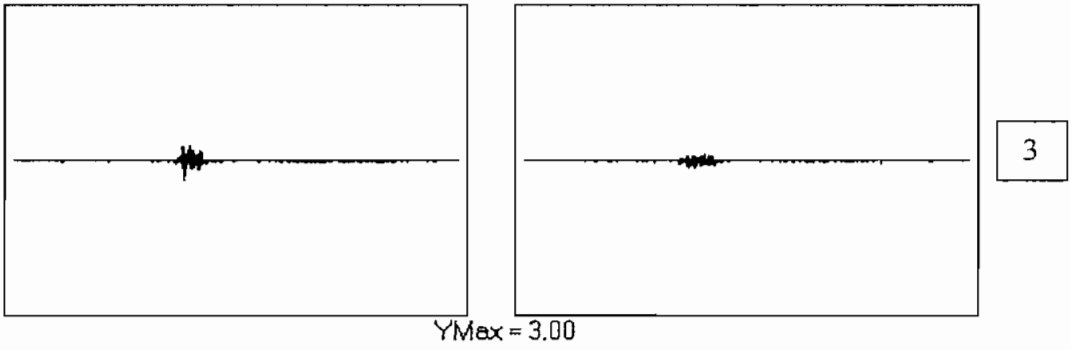
YMax = 4.24



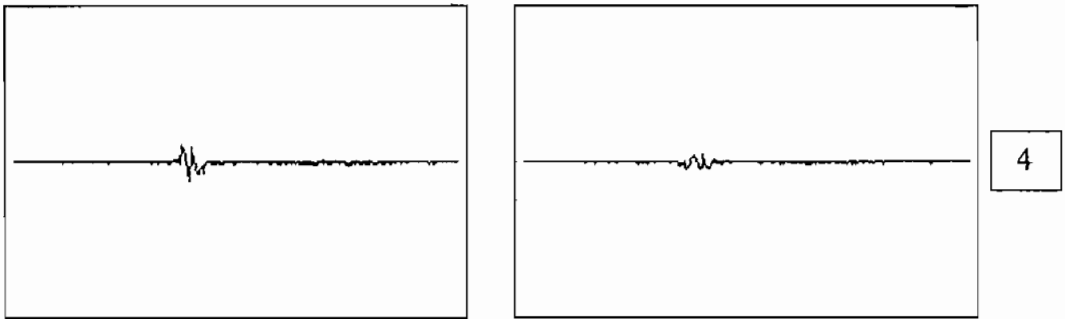
YMax = 3.00



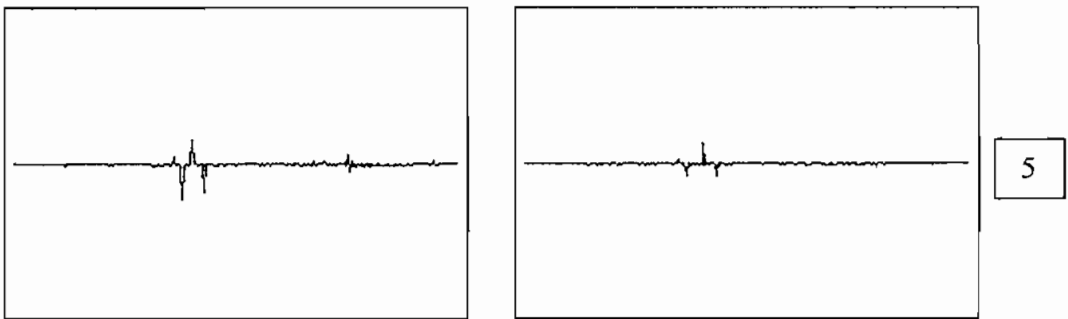
YMax = 3.00



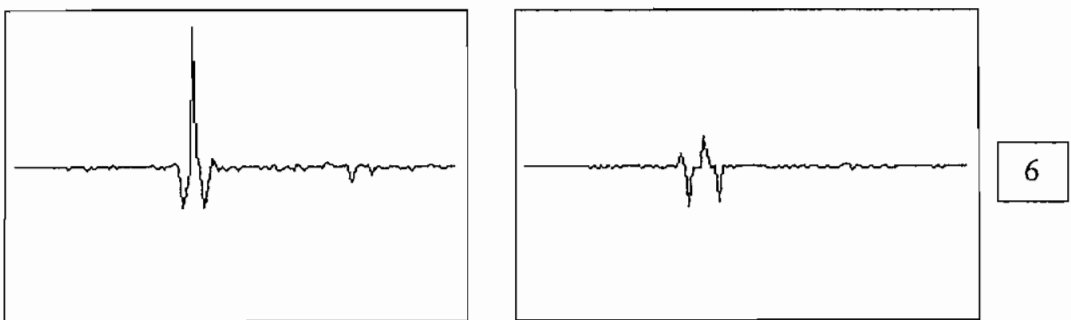
YMax = 3.00



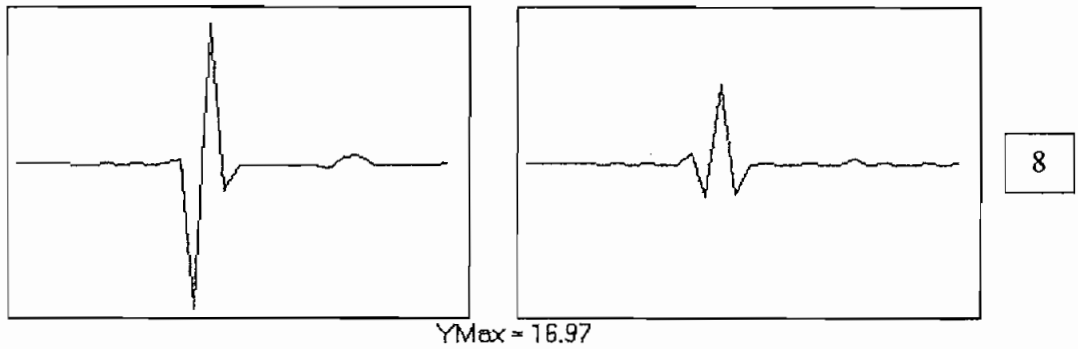
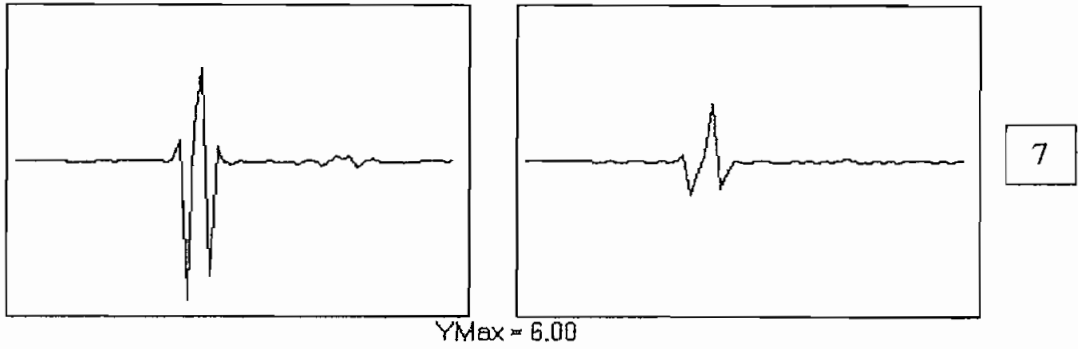
YMax = 3.00



YMax = 3.00



YMax = 3.00



ECG Enfermo: Desde la sexta componente la onda R es más pequeña en el ECG sano, en general el complejo QRS es de diferente dimensión. La onda T es de mayor amplitud.

Derivación V6

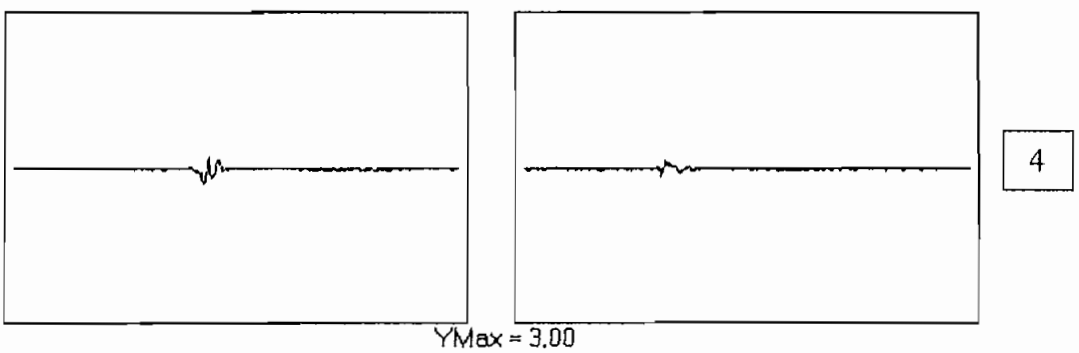
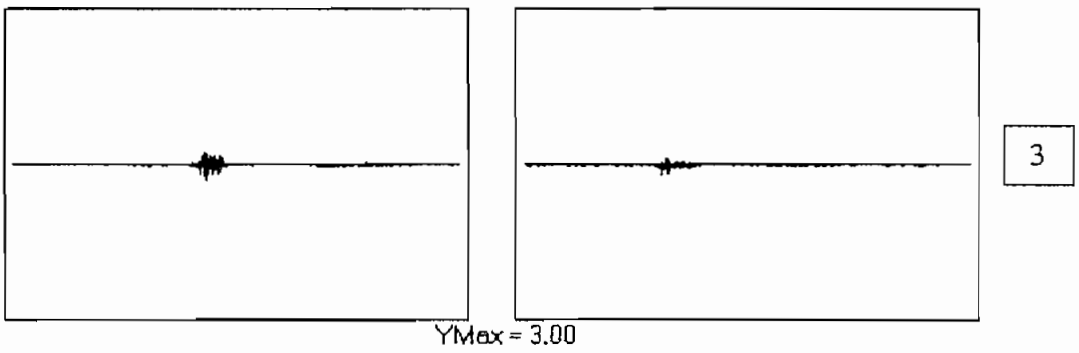
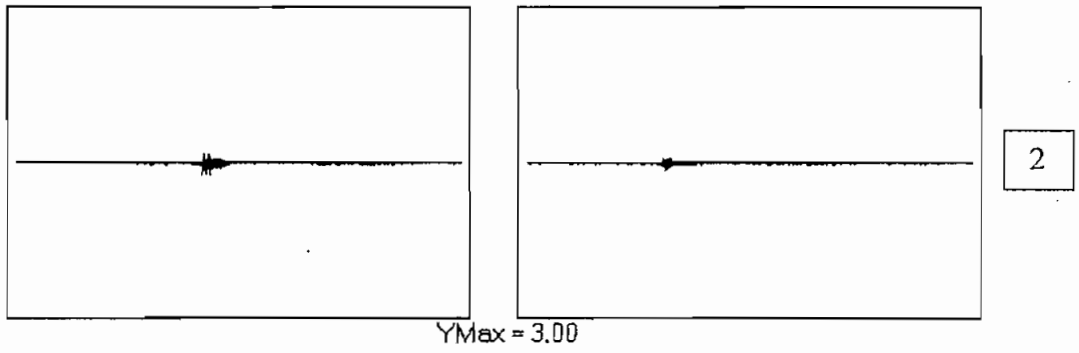
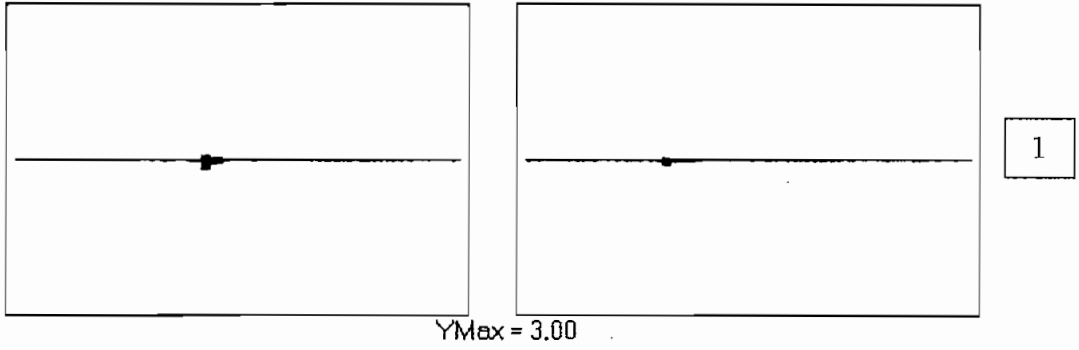
ECG enfermo

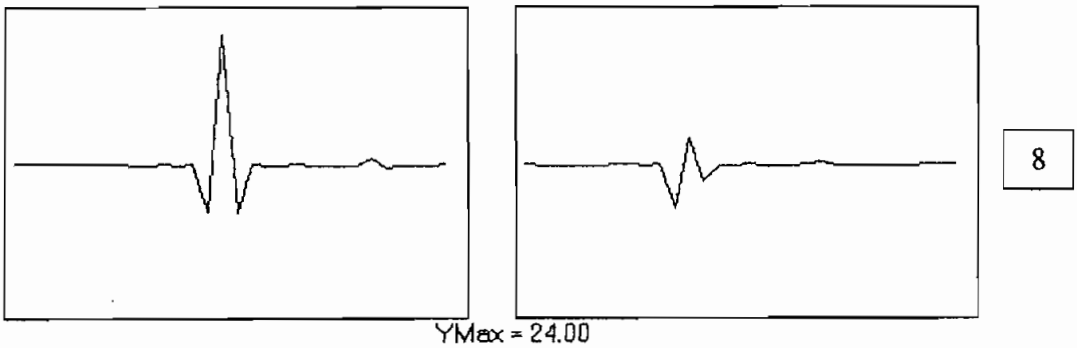
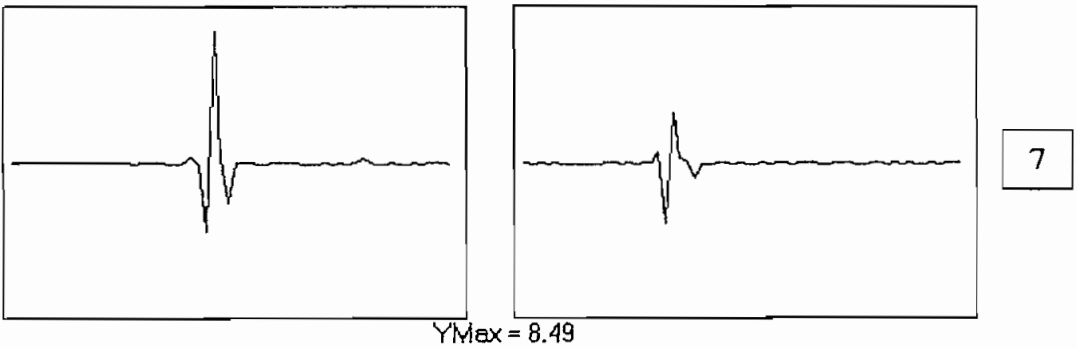
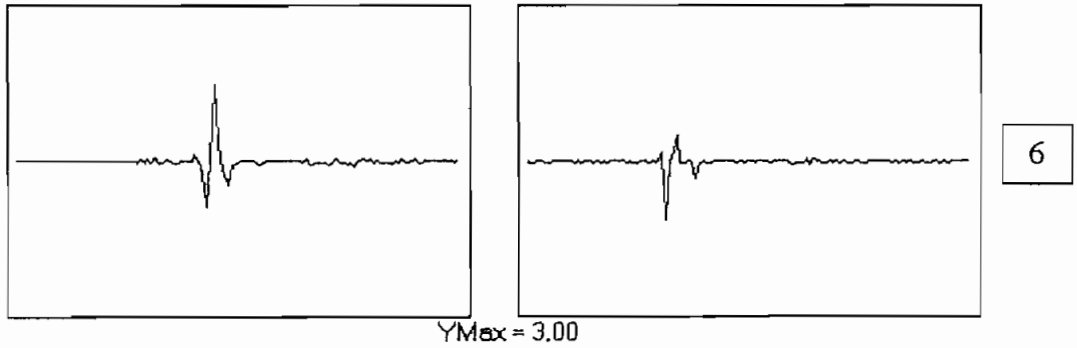
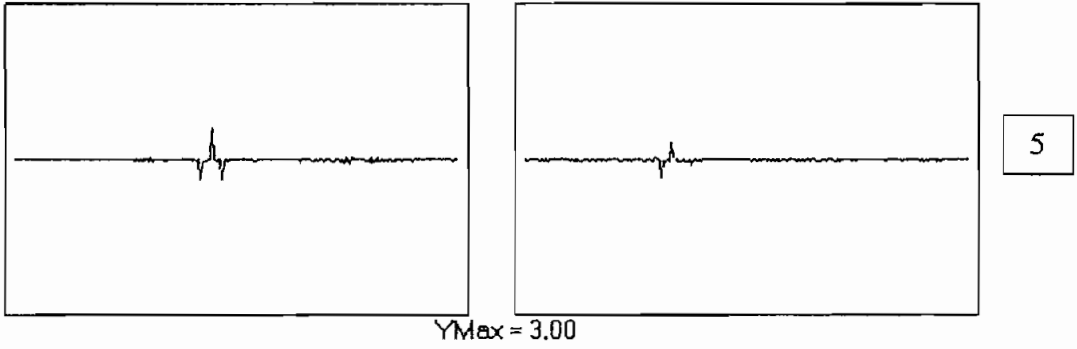


ECG normal



$Y_{Max} = 4.24$

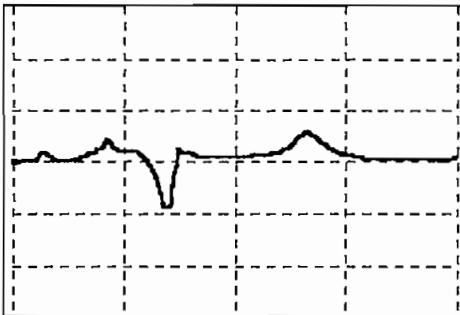




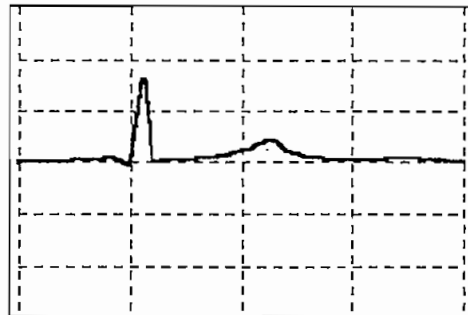
ECG Enfermo: La onda R es muy diferente desde la componente 7. La onda T es grande.

Derivación aVL

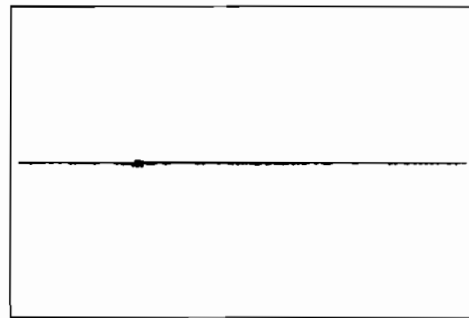
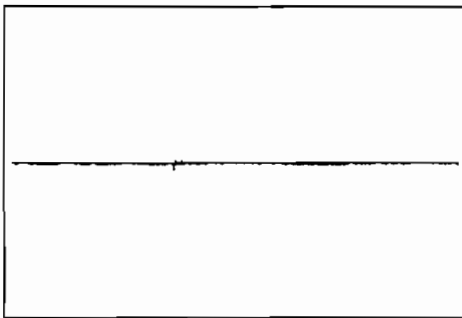
ECG enfermo



ECG normal

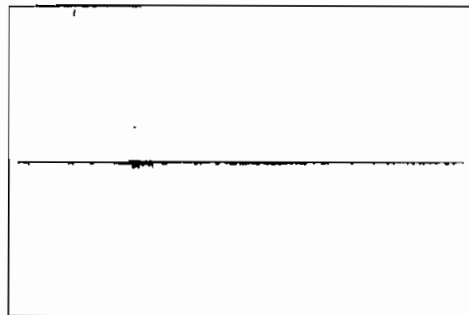
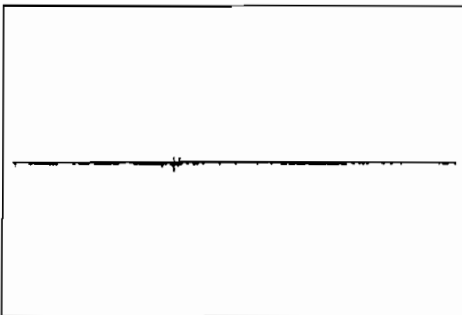


YMax = 1.50



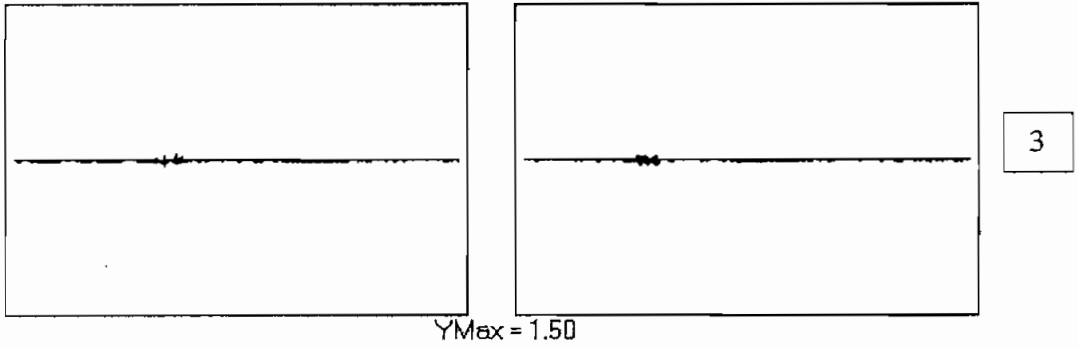
1

YMax = 1.50

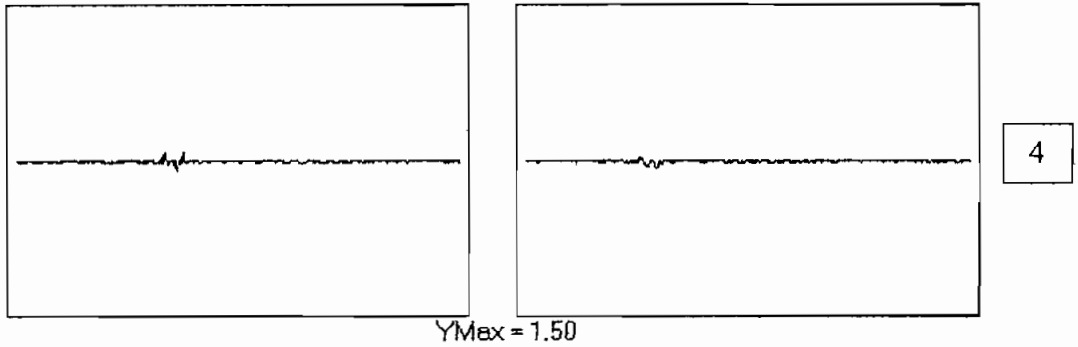


2

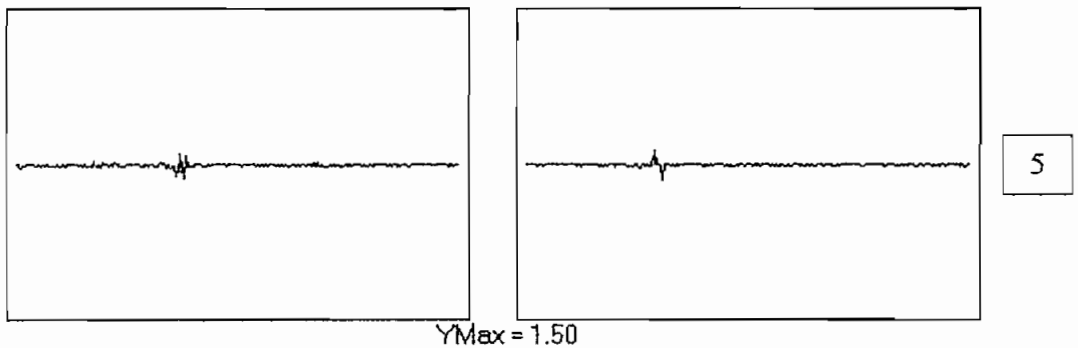
YMax = 1.50



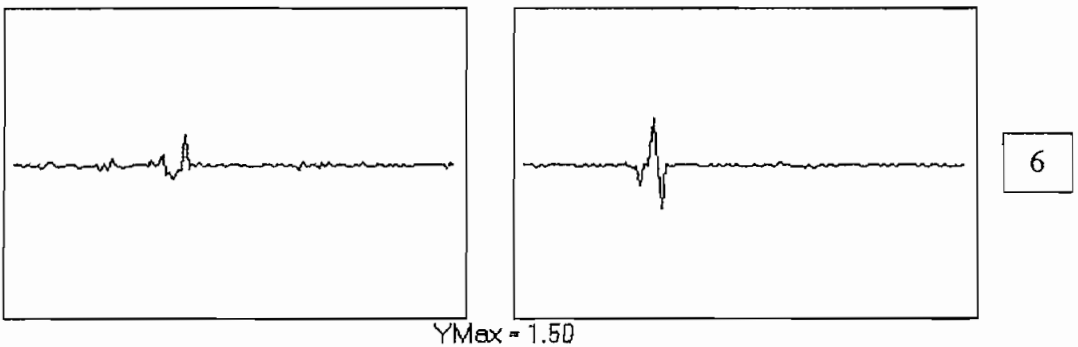
YMax = 1.50



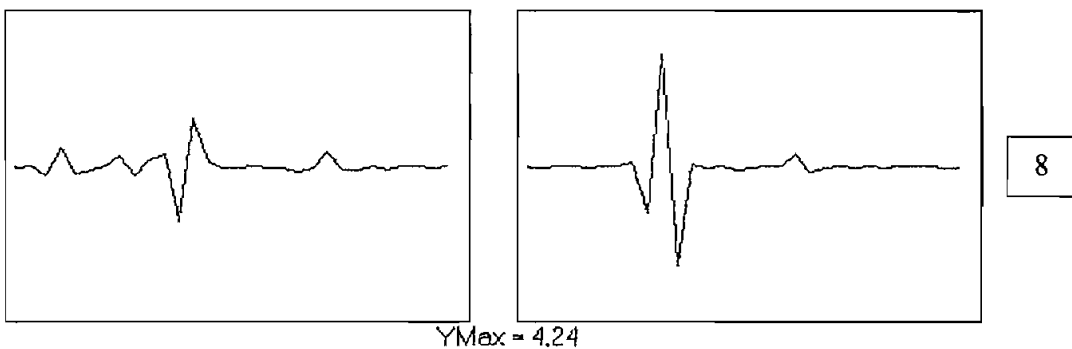
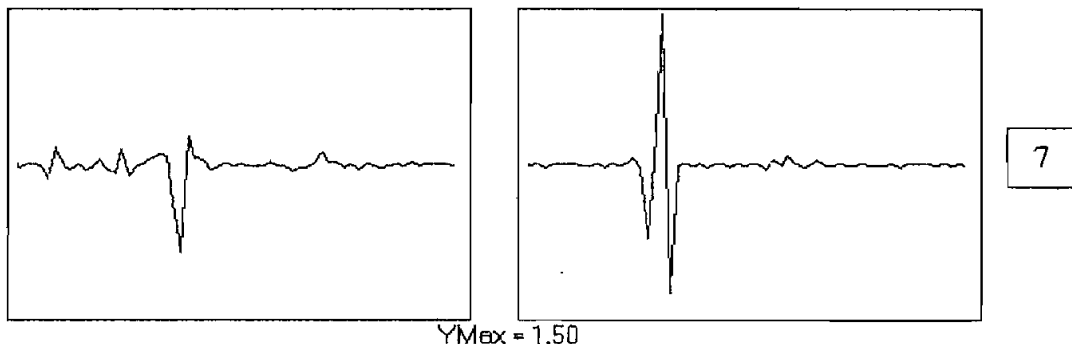
YMax = 1.50



YMax = 1.50



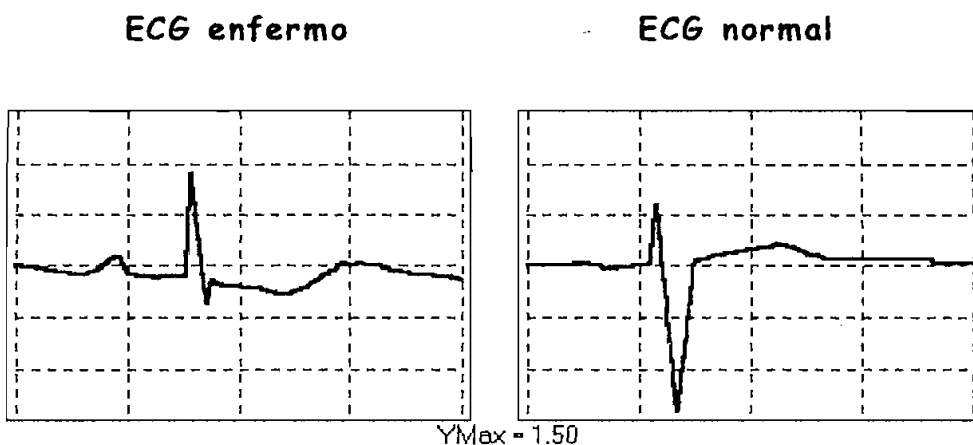
YMax = 1.50

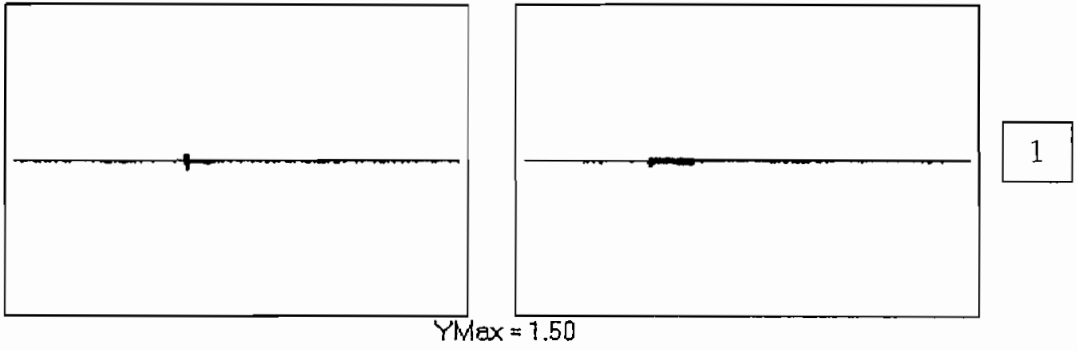


En el ECG enfermo: La onda R es casi inexistente, las ondas P, Q, T están muy desarrolladas e irregulares.

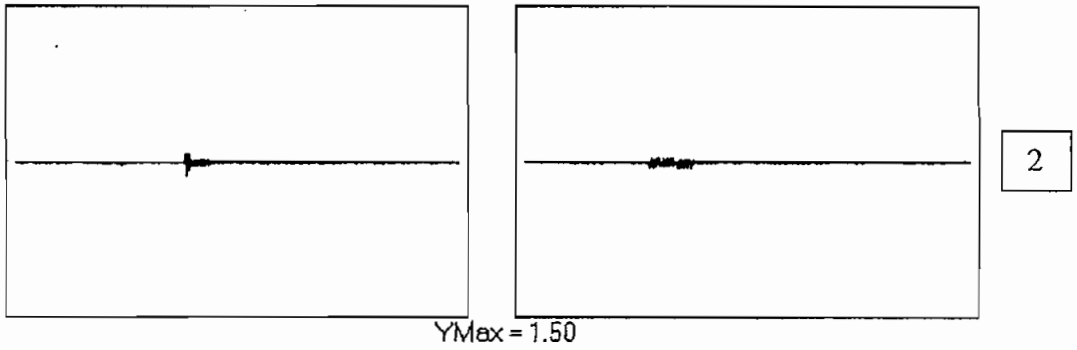
5.1.3 Hipertrofia ventricular derecha

Derivación V1

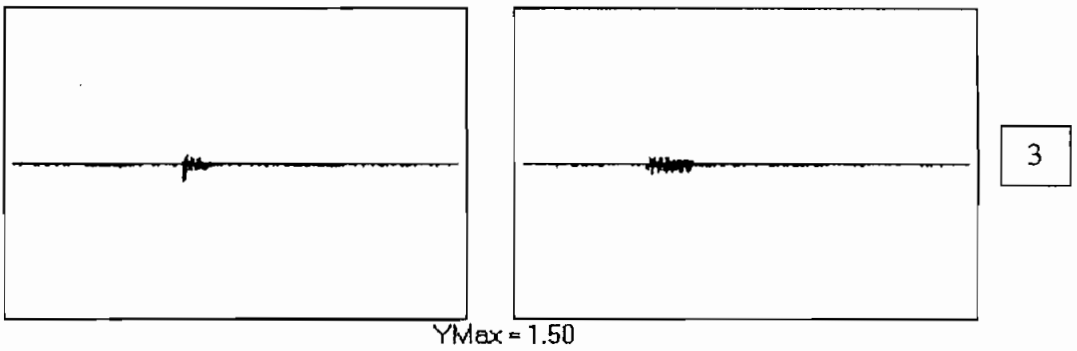




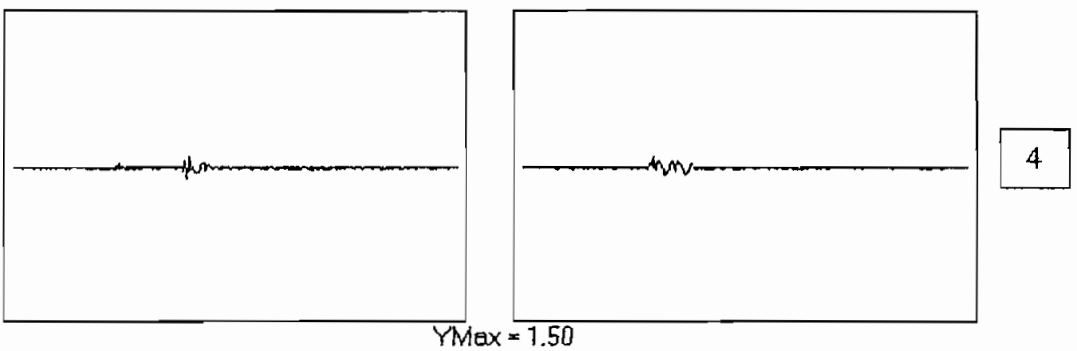
YMax = 1.50



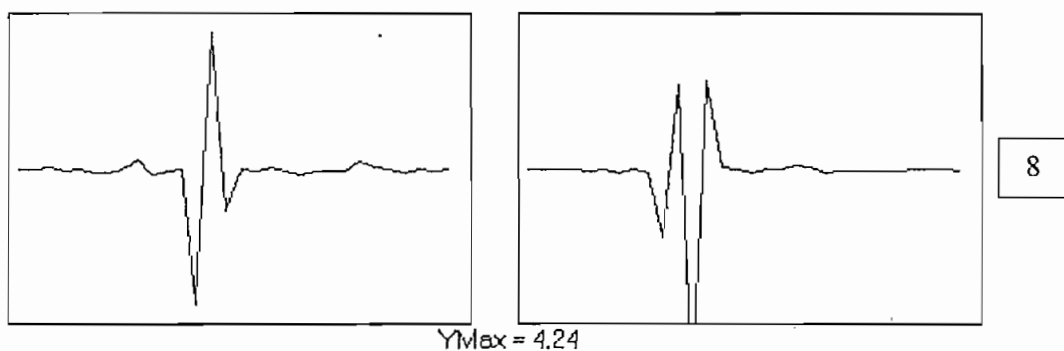
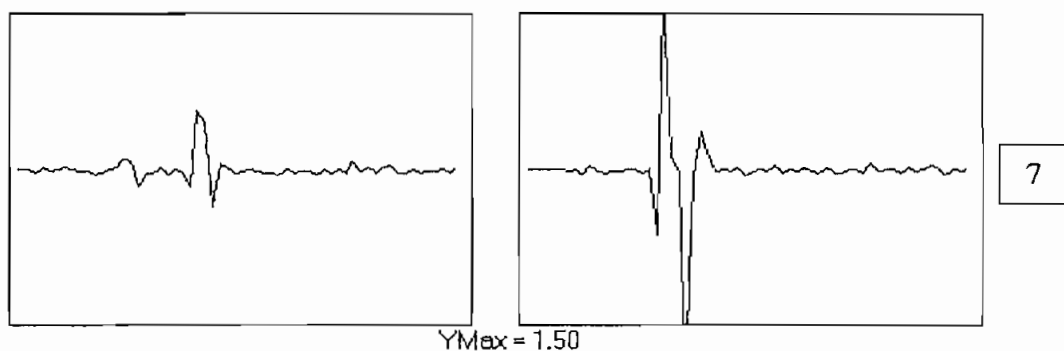
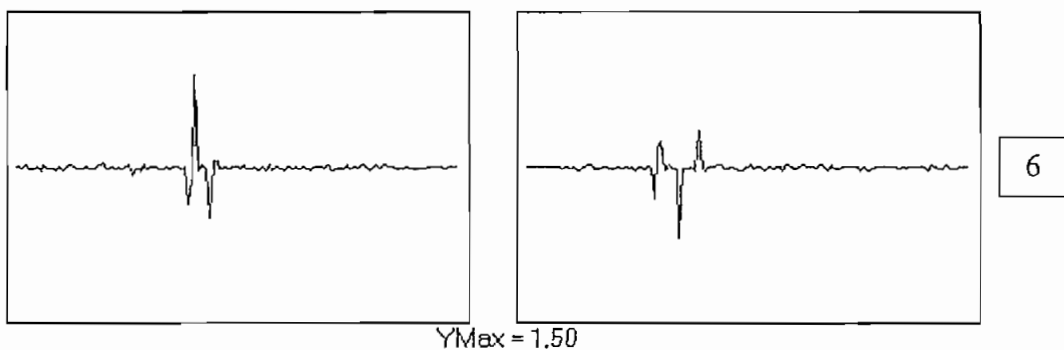
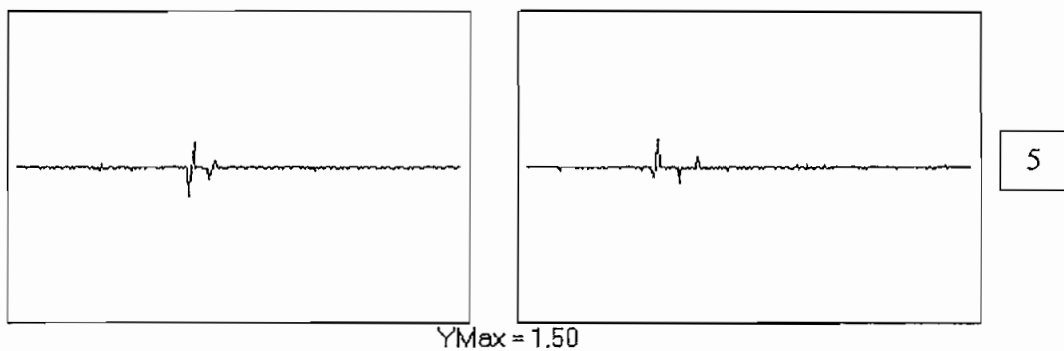
YMax = 1.50



YMax = 1.50



YMax = 1.50

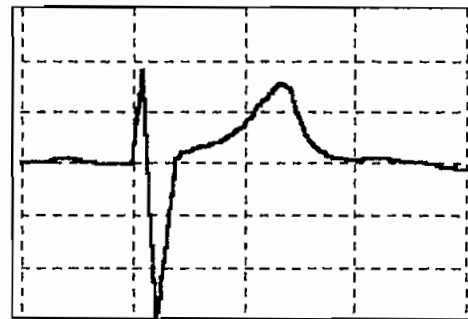
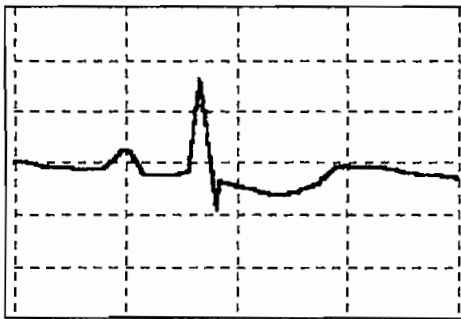


ECG Enfermo: La séptima componente es menor en amplitud que las otras, se ve a la onda P más grande, a la onda R grande y a la onda S más pequeña.

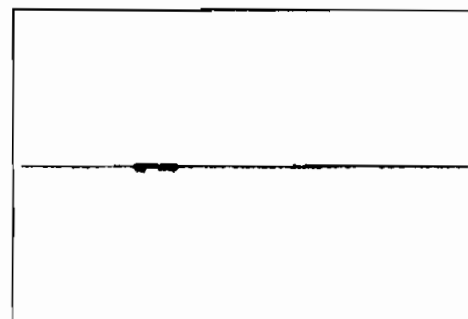
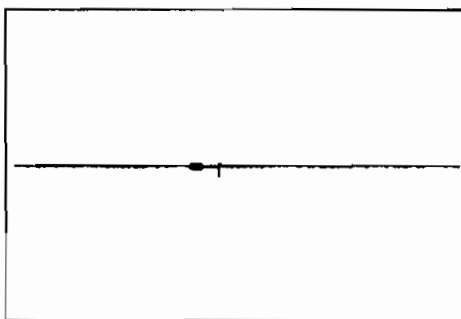
Derivación V2

ECG enfermo

ECG normal

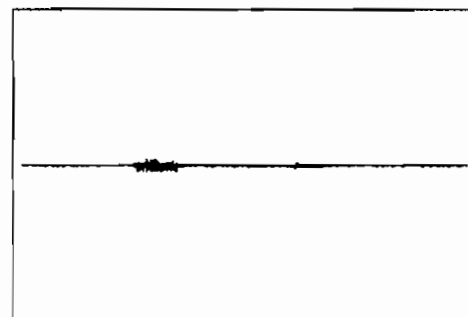
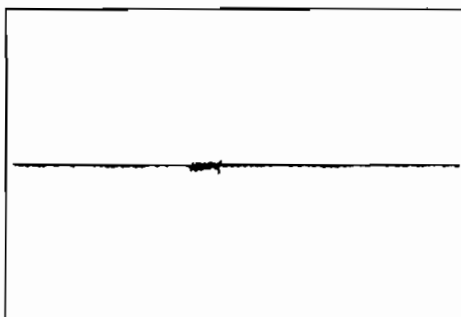


YMax = 1.50



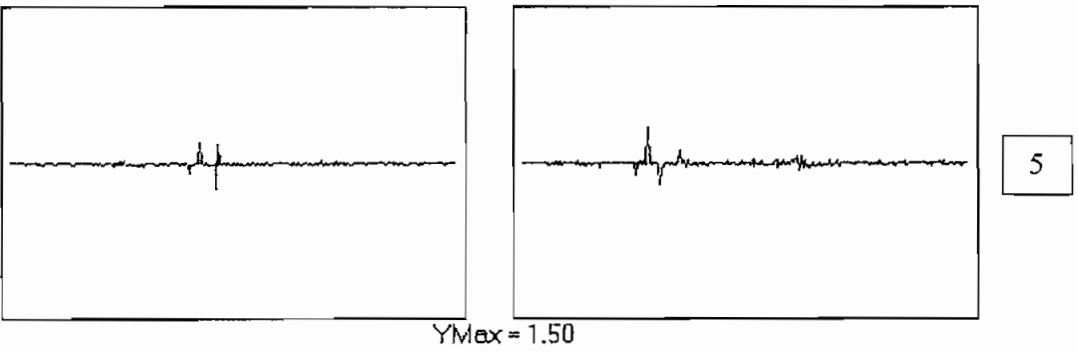
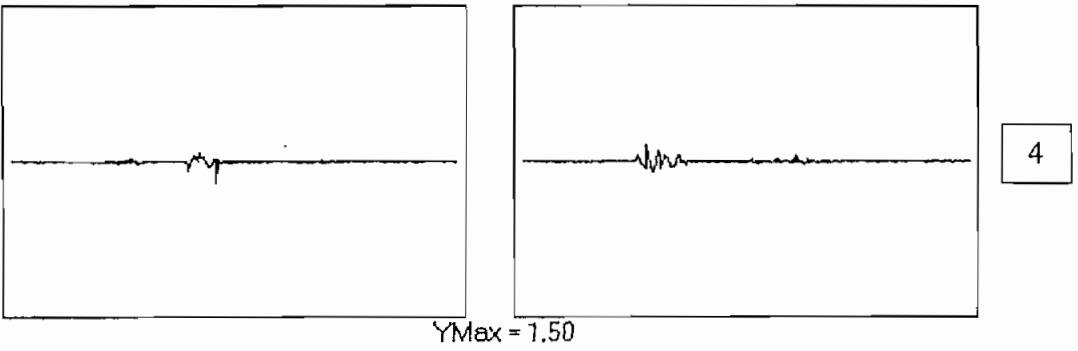
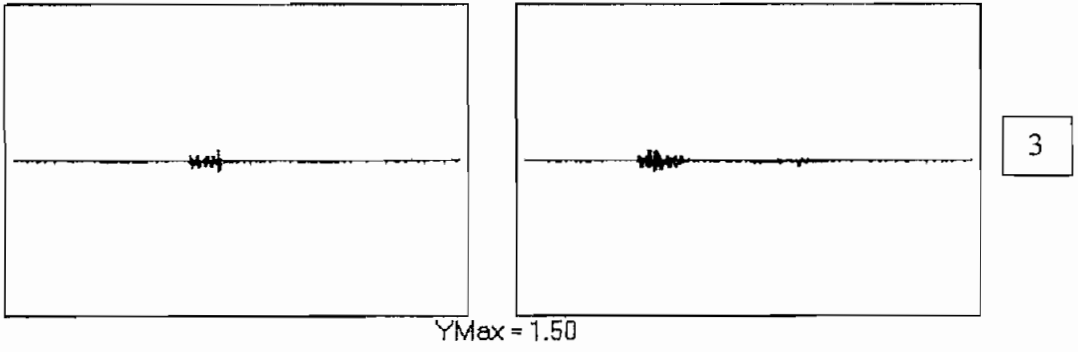
YMax = 1.50

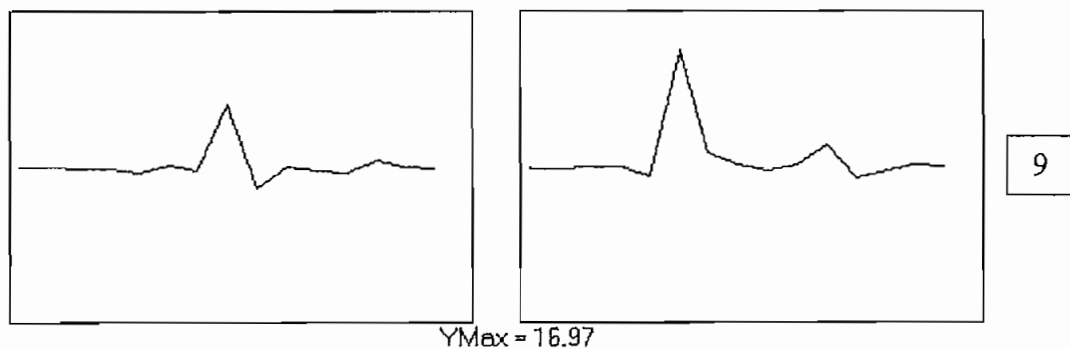
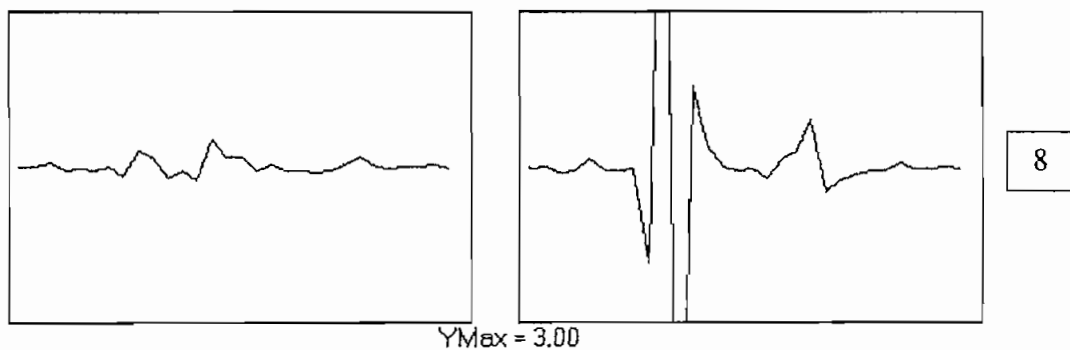
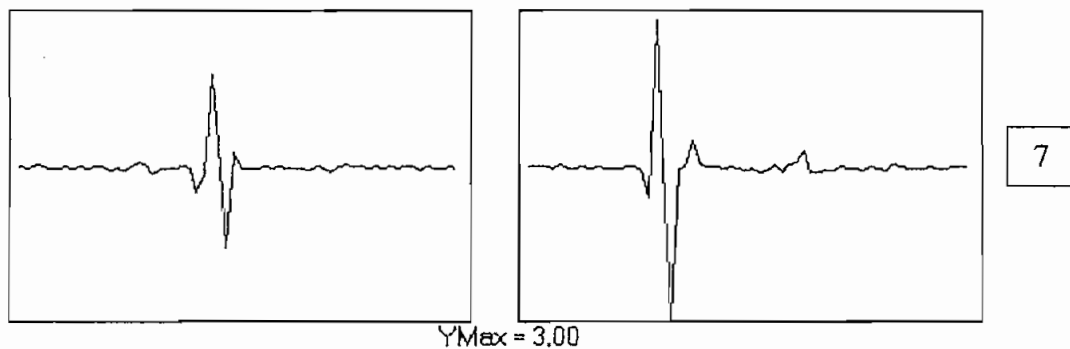
1



YMax = 1.50

2

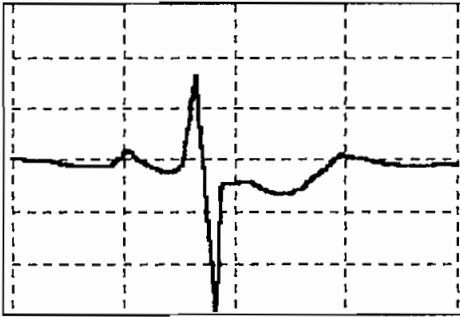




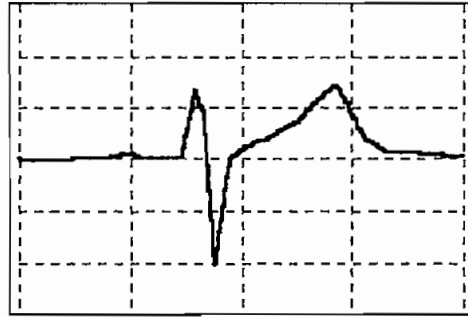
ECG Enfermo: La octava componente es menor en amplitud que cualquiera de las otras. No se observa la onda T, y la onda S es más pequeña.

Derivación V3

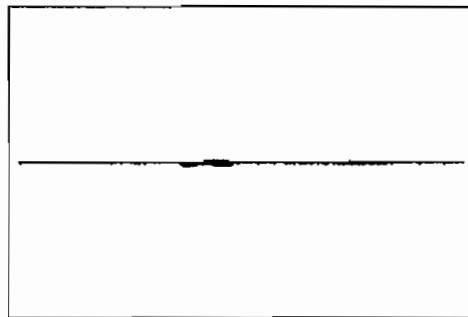
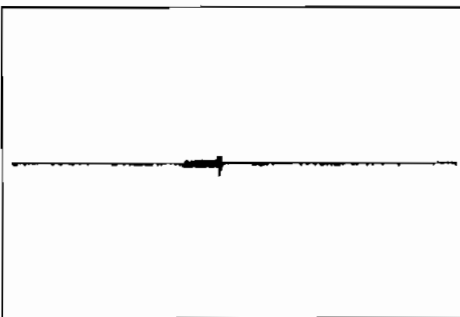
ECG enfermo



ECG normal

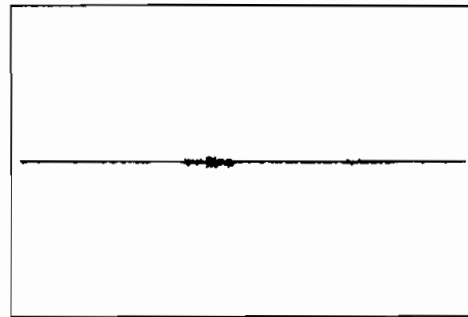
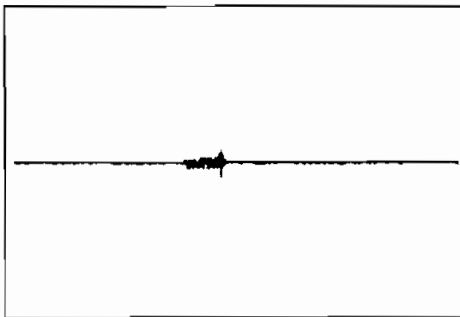


YMax = 1.50



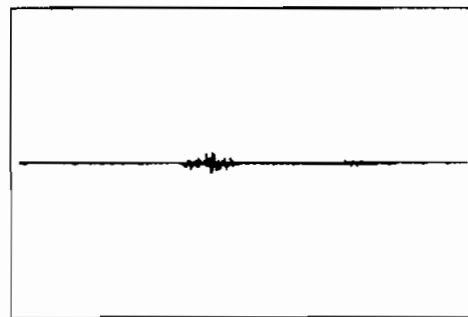
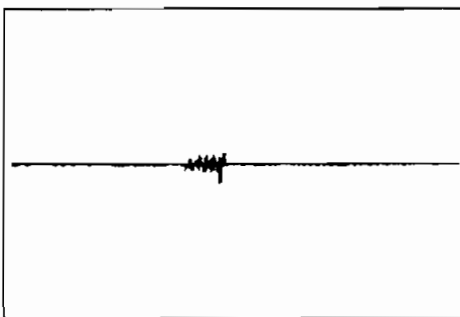
1

YMax = 1.50



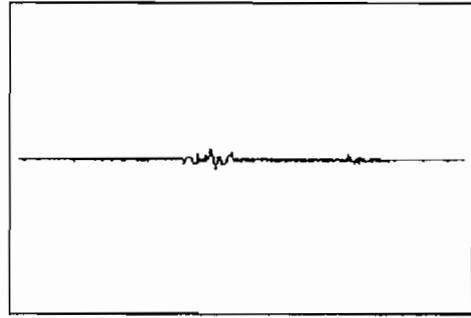
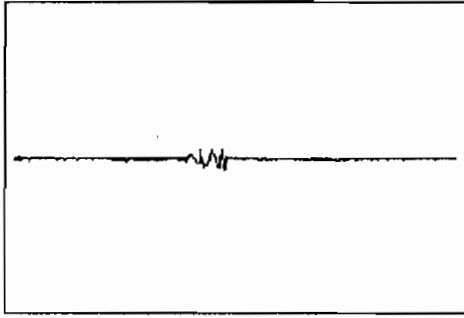
2

YMax = 1.50



3

YMax = 1.50



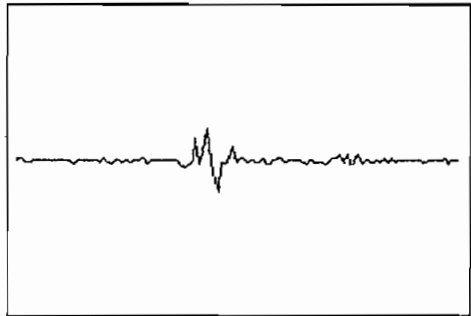
4

YMax = 1.50



5

YMax = 1.50



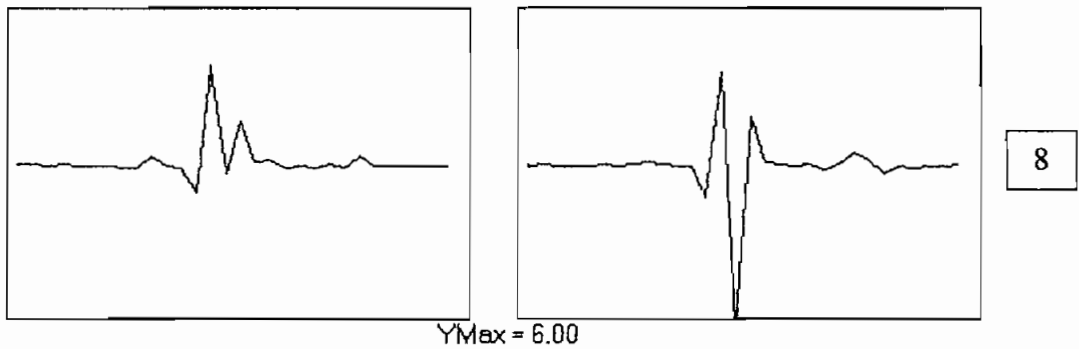
6

YMax = 1.50



7

YMax = 2.12



ECG enfermo: La onda S es de mayor amplitud en las componentes 6 y 7 la onda T es pequeña al contrario de la onda P que es más grande que en el ECG sano.

5.1.4 Criterios de diagnóstico

Haciendo una síntesis de los resultados arrojados de la comparación entre los ECGs de una persona enferma y los ECGs de una persona sana, mencionados en los párrafos anteriores, se obtiene lo siguiente

Se ha comprobado que la transformada de ondillas en el análisis de señales cumple las veces de un microscopio de foco ajustable, cuando se analizan las componentes de frecuencia de un ECG, sus detalles se amplifican, facilitando el diagnóstico de enfermedades.

Al analizar las diferentes componentes de frecuencia por separado se tiene la ventaja de aislar diferente información, lo que convierte a la

transformada de ondillas en una herramienta poderosa en el análisis de señales biomédicas.

A los criterios mencionados, para el diagnóstico de las hipertrofias ventriculares, en el capítulo 1, en la sección 1.5, Enfermedades del corazón, el presente trabajo añade las siguientes diferencias entre el ECG que corresponde a una persona enferma y el ECG normal

Hipertrofia ventricular izquierda severa

V1: Se observa que la onda T tiene mayor amplitud (es clara la gran diferencia existente). También en la componente 8 el complejo QRS es de mayor amplitud que en el sano. Los complejos QRS son similares en las demás componentes.

V5: La onda R es de mayor amplitud desde la componente 5. Desde la componente 7 se nota que la onda T está invertida.

V6: La onda Q es más pequeña que en el ECG normal. En la componente 6 y 8 la onda R es mayor. En la componente 8 la onda T está invertida.

aVL: Las mismas conclusiones que para la derivación V6.

Hipertrofia ventricular izquierda

V1: Desde la componente 5 la onda S es mucho más grande que en el ECG sano. En las componentes 7 y 8 la onda R tiene mayor amplitud.

V5: Desde la sexta componente la onda R es más pequeña en el ECG sano, en general el complejo QRS es de diferente dimensión. La onda T es de mayor amplitud.

V6: La onda R es muy diferente desde la componente 7. La onda T es grande.

aVL: La onda R es casi inexistente, las ondas P, Q, T están muy desarrolladas e irregulares.

Hipertrofia ventricular derecha

V1: La séptima componente es menor en amplitud que las otras, se ve a la onda P más grande, a la onda R grande y a la onda S más pequeña.

V2: La octava componente es menor en amplitud que cualquiera de las otras. No se observa la onda T, y la onda S es más pequeña.

V3: La onda S es de mayor amplitud en las componentes 6 y 7 la onda T es pequeña al contrario de la onda P que es más grande que en el ECG sano.

5.2 MEJORES BASES

En la presente Tesis se han utilizado seis tipos diferentes de ondillas, cada una con sus respectivos coeficientes filtro y respuesta de frecuencia

1. Haar
2. Daubechies orden 2
3. Daubechies orden 8
4. B-Spline orden 2
5. Coiflet orden 2.
6. Coiflet orden 6.

En la búsqueda de criterios para el diagnóstico de enfermedades cardiacas se aplicó la transformada de ondillas a ECGs y como base se utilizó a la ondilla de Daubechies de orden 2.

Se sabe que cada nueva componente de frecuencia tiene la mitad de puntos que su predecesora, es decir, si N es el número de muestras originales y j el número de componente de frecuencia, cada subespacio W_{-j} tendrá $\frac{N}{2^j}$ puntos.

Los ECGs digitalizados están formados, aproximadamente, por 10.000 muestras (lo que corresponde a un ancho de banda de 5 KHz). El número

de muestras de sus componentes de frecuencia y diferentes resoluciones se puede observar en la tabla 5.1 y 5.2.

Subespacio	Número de puntos	Ancho de banda
V_0	10.000	[5 KHz – 0]
V_{-1}	5.000	[2.50 KHz – 0]
V_{-2}	2.500	[1.25 KHz – 0]
V_{-3}	1.250	[625.00 Hz – 0]
V_{-4}	625	[312.50 Hz – 0]
V_{-5}	312	[156.25 Hz – 0]
V_{-6}	156	[78.13 Hz – 0]
V_{-7}	78	[39.06 Hz – 0]
V_{-8}	39	[19.53 Hz – 0]
V_{-9}	19	[9.53 Hz – 0]

Tabla 5.1: Subespacios V_j y su respectiva respuesta de frecuencia y número de muestras.

Subespacio	Número de puntos	Ancho de banda
V_0	10.000	[5 KHz – 0]
W_{-1}	5.000	[5 KHz -2.5 KHz]
W_{-2}	2.500	[2.5 KHz -1.25 KHz]
W_{-3}	1.250	[1.25 KHz - 625 Hz]
W_{-4}	625	[625 Hz -312.5 Hz]
W_{-5}	312	[312.5 Hz - 156.25 Hz]
W_{-6}	156	[156.25 Hz - 78.13 Hz]
W_{-7}	78	[78.13 Hz - 39.06 Hz]
W_{-8}	39	[39.06 Hz - 19.53 Hz]
W_{-9}	19	[19.53 Hz - 9.53 Hz]

Tabla 5.2: Subespacios W_j y su respectiva respuesta de frecuencia y número de muestras

Entre más alto es el orden de un tipo de ondilla, mejor es la respuesta de frecuencia, pero es necesario un mayor número de coeficientes filtro para lograr aquello.

El problema de tener un número alto de coeficientes filtro, es que el algoritmo usado supone que las señales son simétricas con respecto a cero, y cuando no lo son (como es el caso de los ECGs), se produce distorsión en los primeros puntos de la función discreta. En las componentes de más baja frecuencia (V_{-5} , V_{-6} , V_{-7} , ...) la distorsión se amplifica, lo que ocasiona que no se pueda distinguir claramente la información.

Lo anterior es claro en las siguientes figuras, donde se muestra las componentes en frecuencia de una función sinusoidal calculadas mediante la ondilla de Haar y la de Daubechies de orden 8.

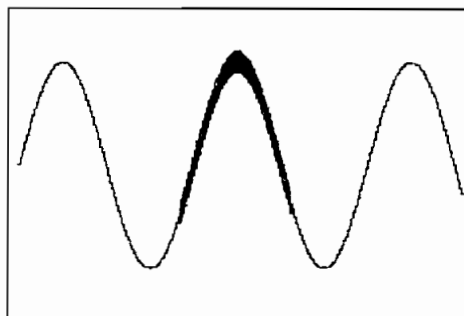


Figura 5.1: Función original, sinusoidal con contenido de alta frecuencia en la parte media.

Daubechies orden 8

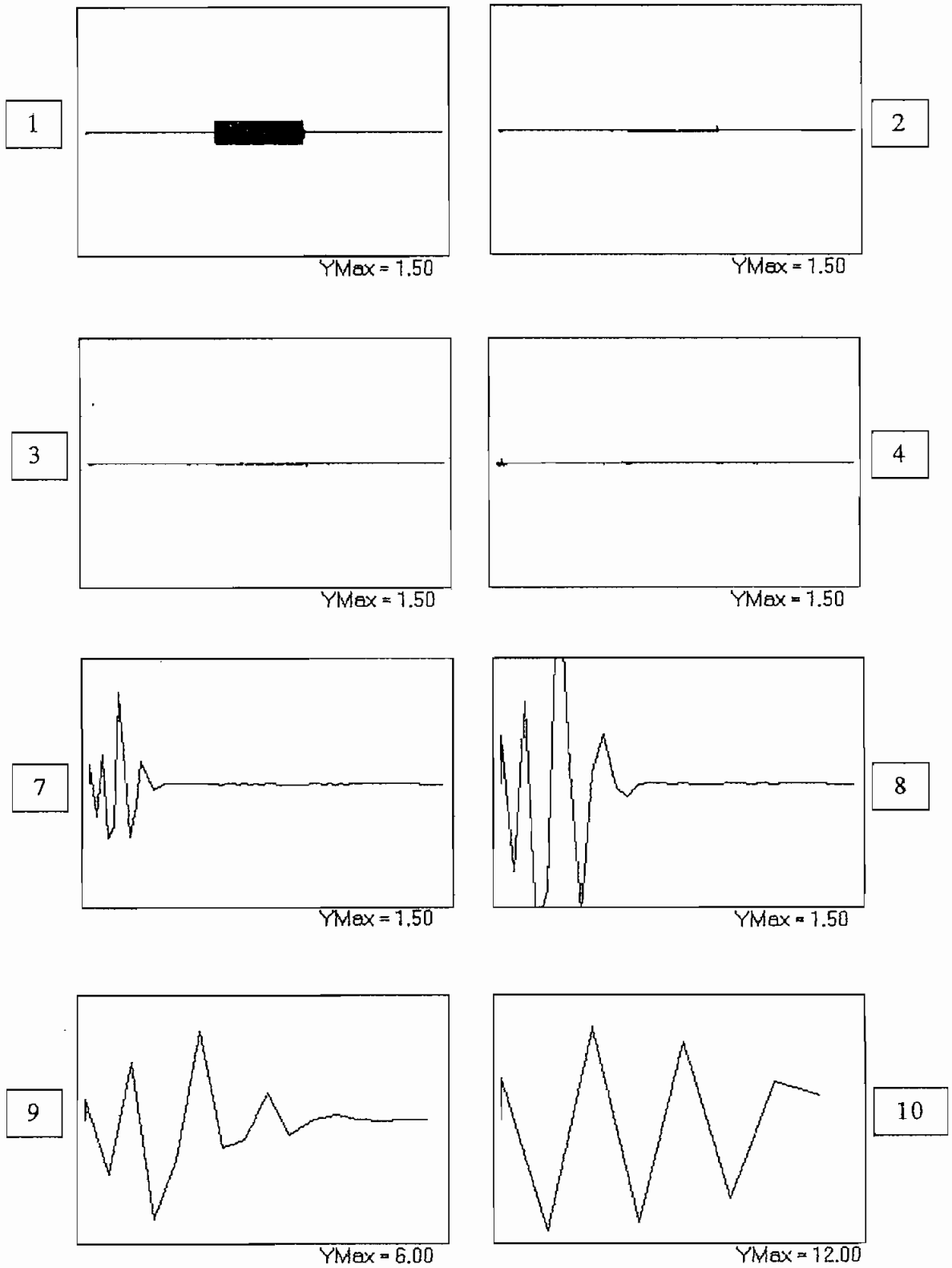


Figura 5.2: Componentes de frecuencia de la figura 5.1 usando Daubechies 8.

Haar

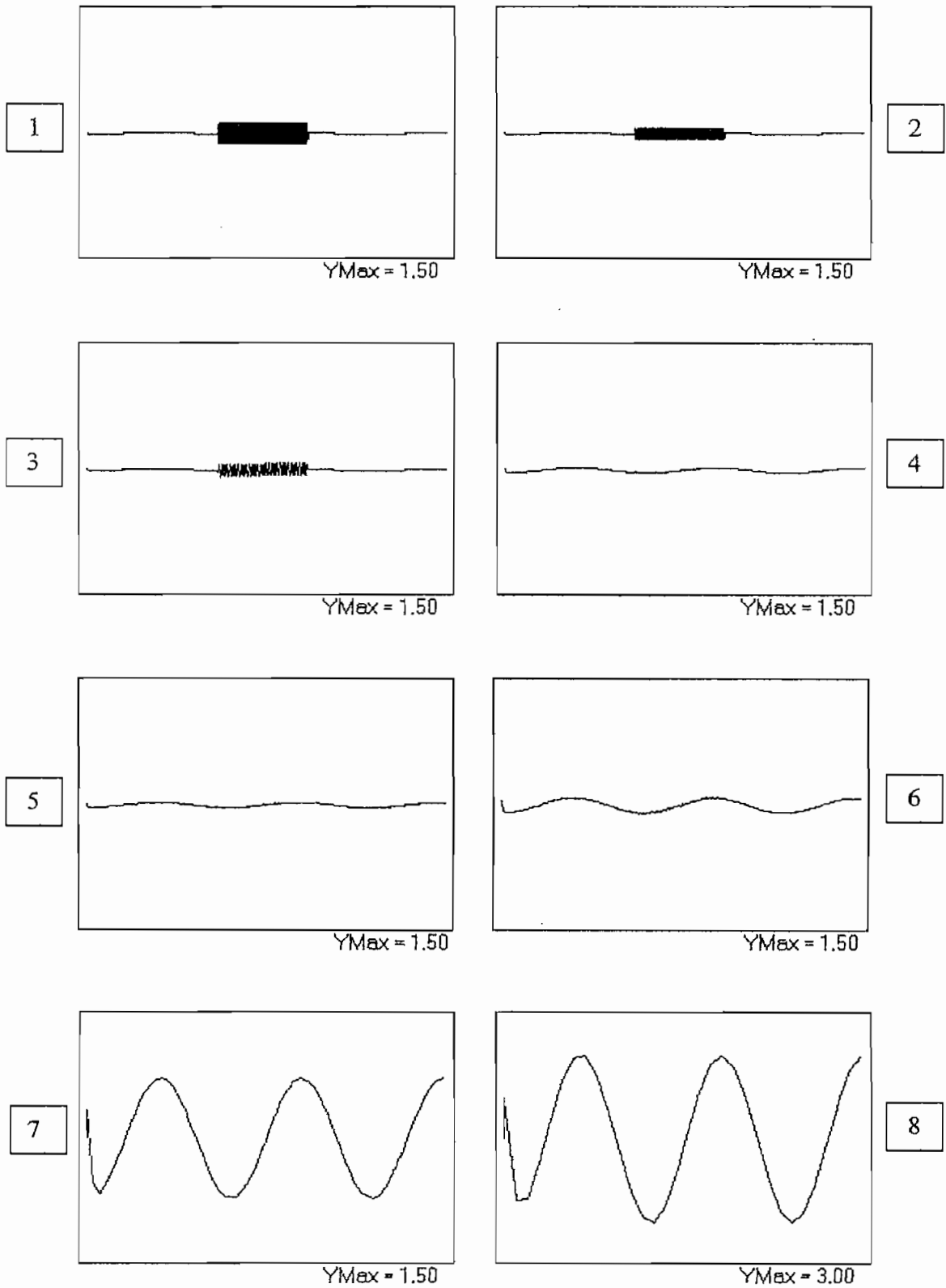


Figura 5.3: Componentes de frecuencia de la figura 5.1 usando la base de Haar.

Muchos autores mencionan que las mejores bases ortogonales de ondillas para compresión de datos o para reducción de ruido no necesariamente son las mejores para el análisis de señales. Cada ondilla tiene propiedades de localización tiempo-frecuencia diferentes como se puede ver al analizar las componentes de la figura 5.4.

Del análisis de las componentes de la figura 5.1 y 5.4 (y otras que no han sido presentadas) se puede concluir algunas cosas muy interesantes

La transformada de ondillas con la base de Haar produce componentes con una pobre localización en frecuencia aunque con una buena resolución en tiempo. Algo parecido sucede con la base Spline 2, con la diferencia que la localización en frecuencia mejora pero a costo de la localización en el tiempo.

Los resultados obtenidos con las coiflets son muy similares a los originados con las ondillas de Daubechies. Se puede observar además, que las componentes calculadas mediante la base coiflet de orden 2, tienen signo opuesto a las encontradas con la ondilla de Daubechies del mismo orden.

Las ondillas de mayor orden de Daubechies y de las coiflets proporcionan una mejor resolución en frecuencia (conclusión lógica de su mejor respuesta de frecuencia, ver capítulo anterior), sin embargo se puede observar más claramente los detalles en las ondillas de orden 2.

Por todo lo expuesto se escogió como base ortogonal predeterminada para la transformada de ondillas en el análisis de electrocardiogramas a la ondilla de Daubechies orden 2. En la figura 5.4 se presenta el electrocardiograma normal V1 y a continuación sus componentes de frecuencia calculadas mediante las seis diferentes bases presentadas anteriormente.

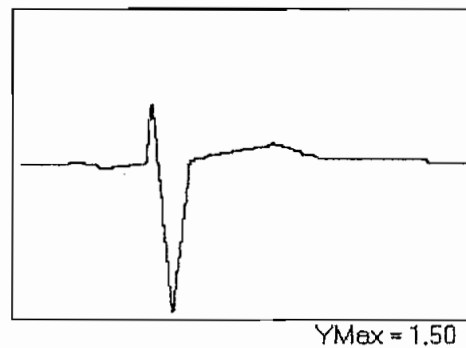


Figura 5.4: Función original, electrocardiograma normal V1.

Haar

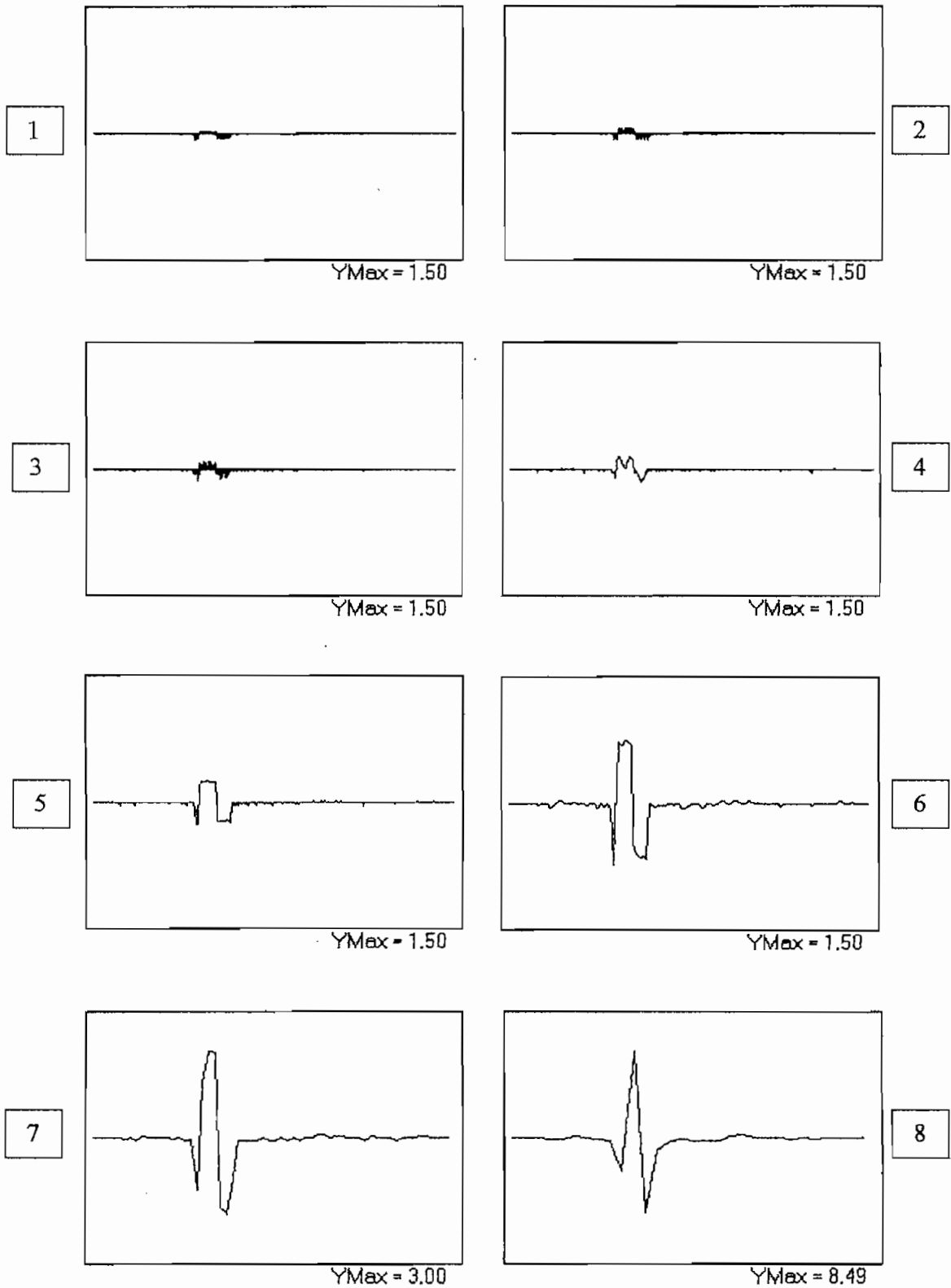


Figura 5.5: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando la base de Haar.

Spline orden 2

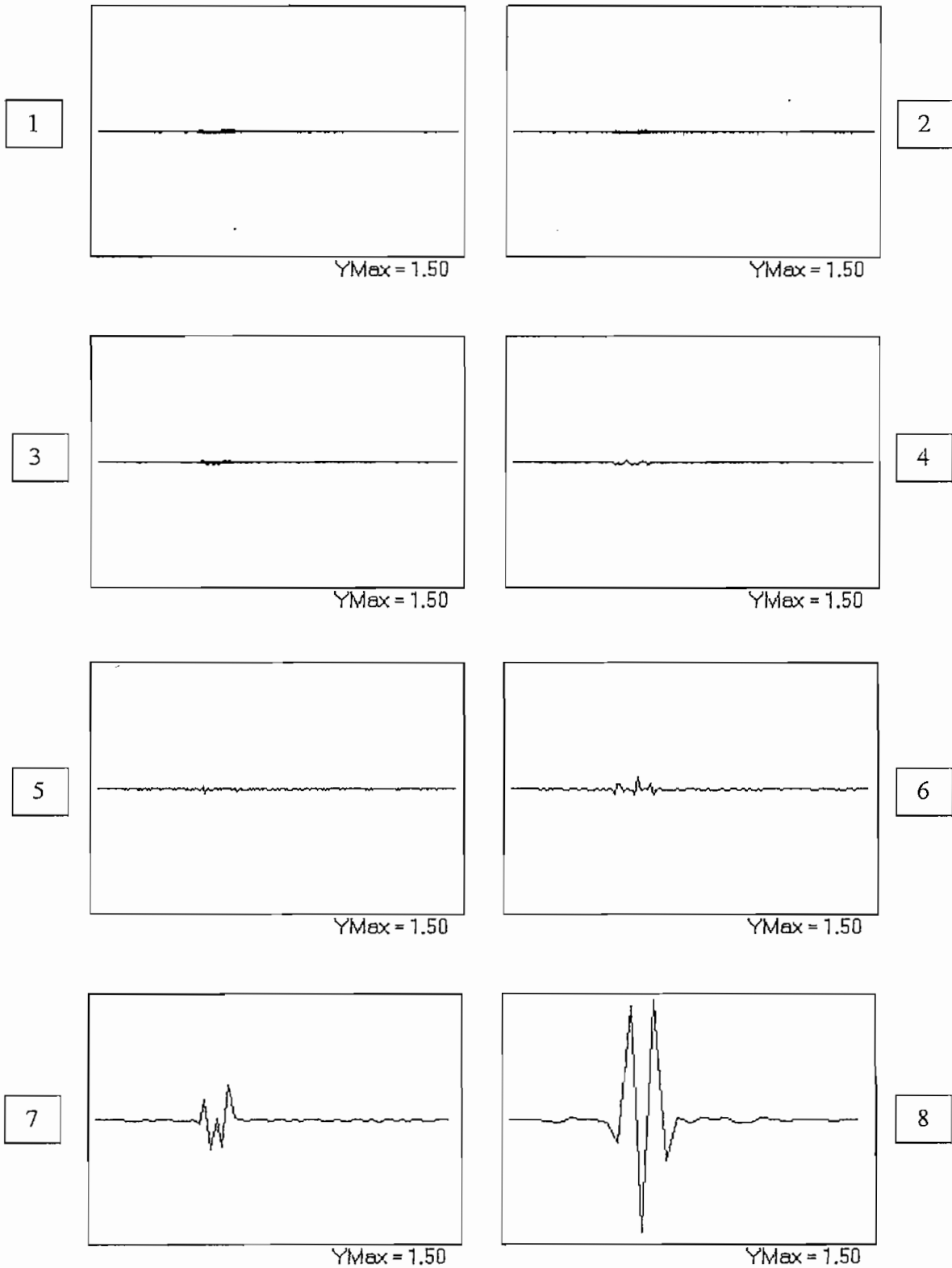


Figura 5.6: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando spline orden 2.

Coiflet orden 2

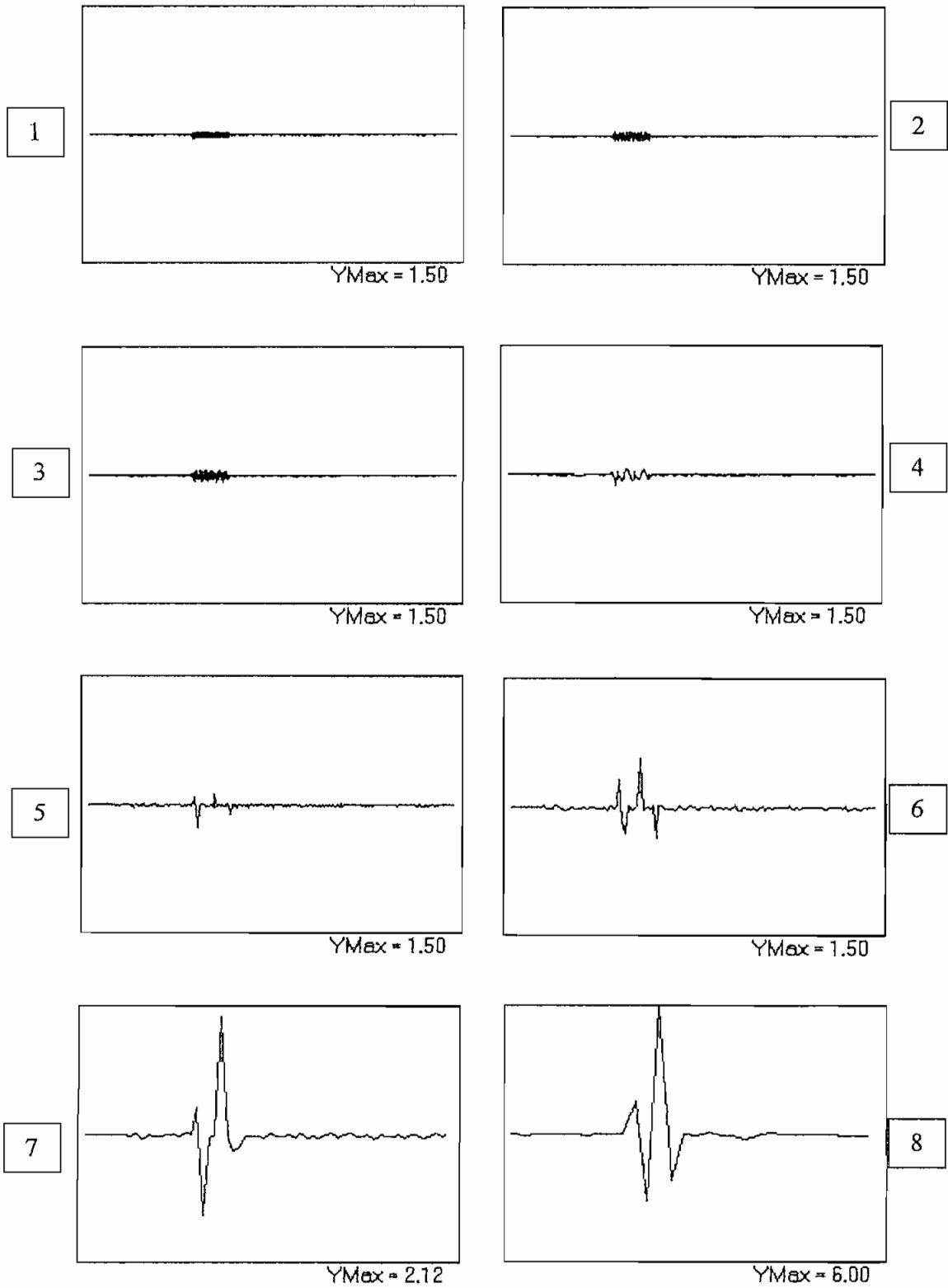


Figura 5.7: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando coiflet orden 2.

Coiflet orden 6

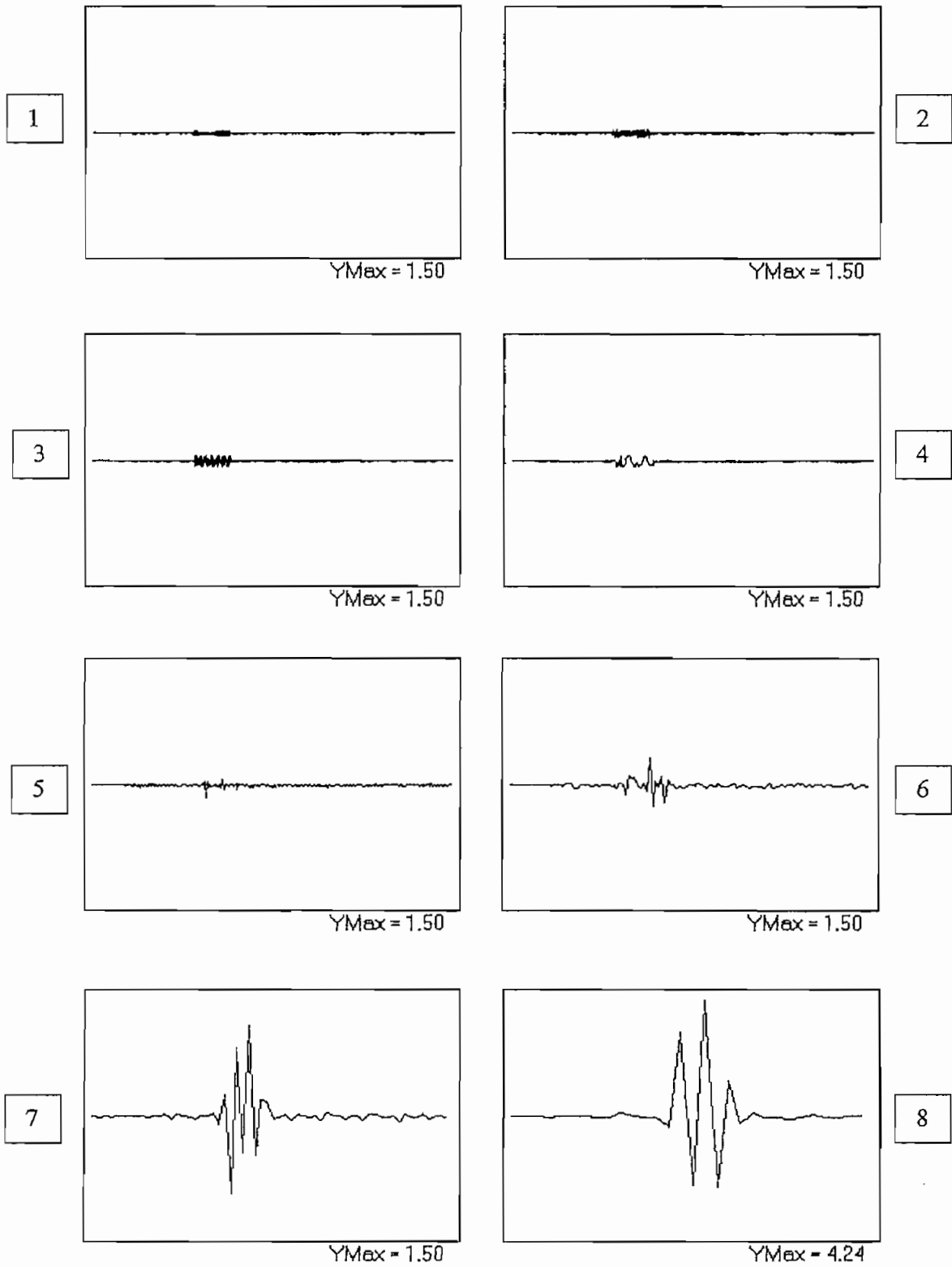


Figura 5.8: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando coiflet orden 6.

Daubechies orden 2

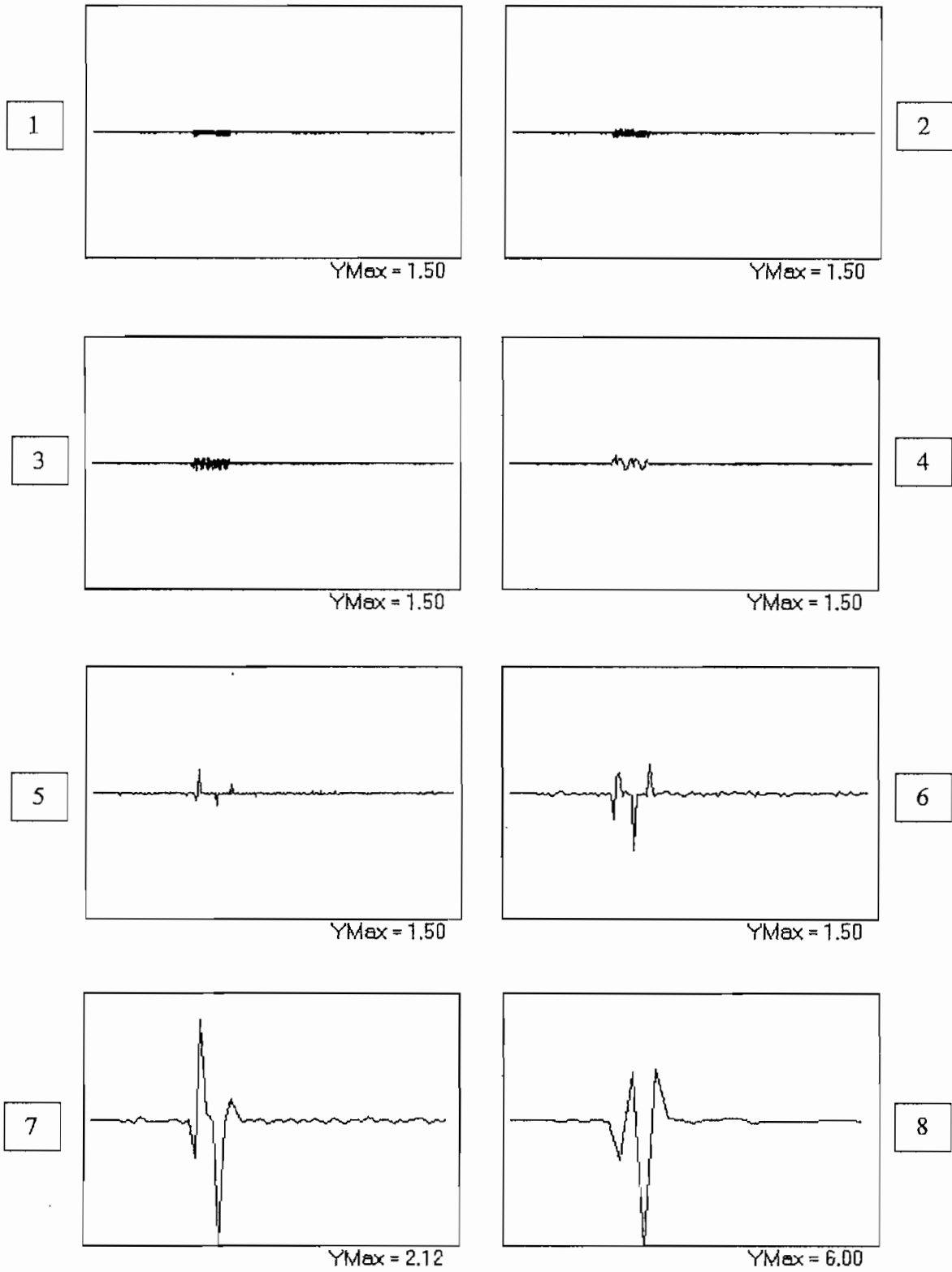


Figura 5.9: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando Daubechies 2.

Daubechies orden 8

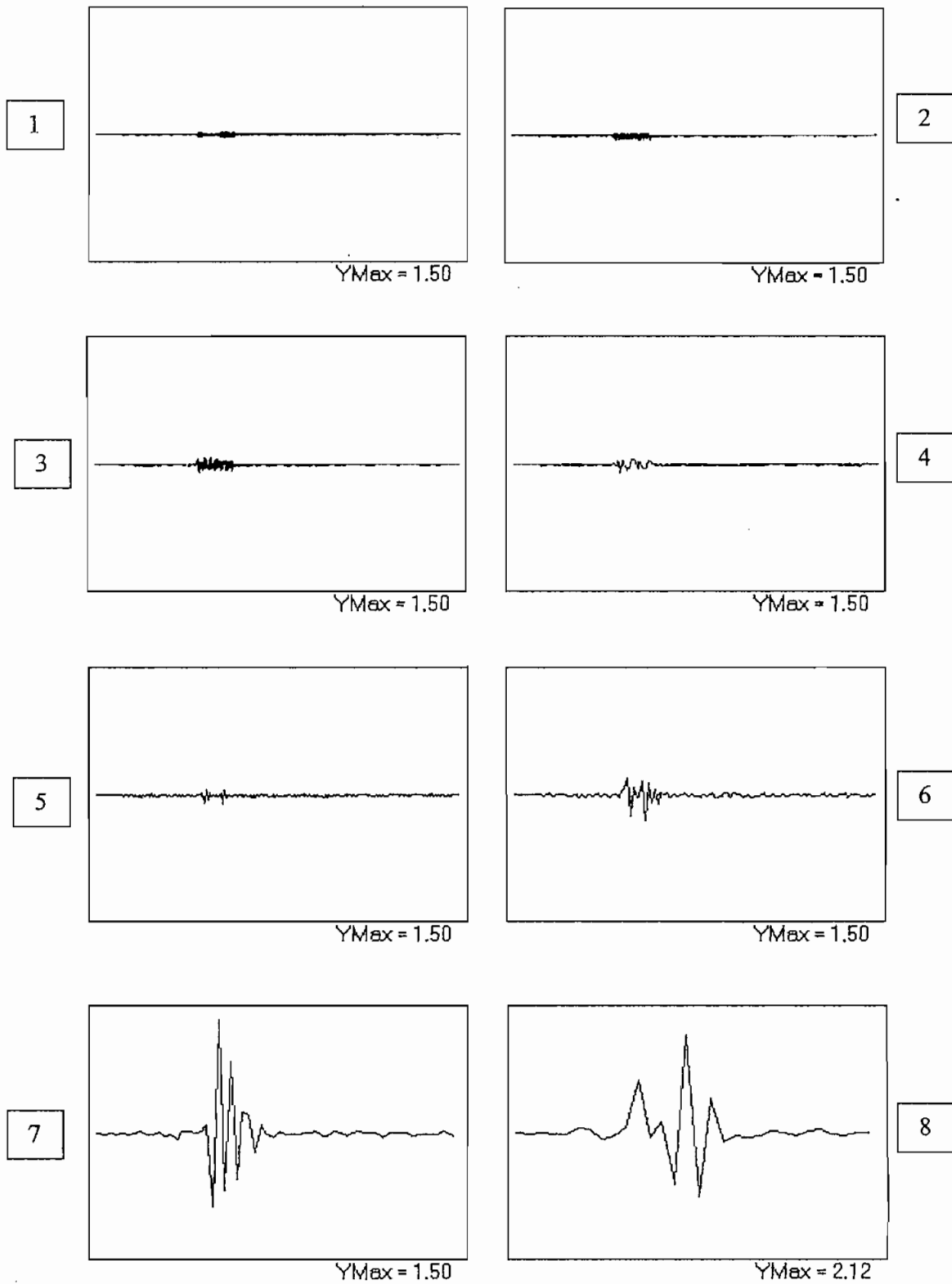


Figura 5.10: Componentes de frecuencia de la figura 5.4 usando Daubechies 8.

5.3 ACERCA DEL ALGORITMO USADO

Los algoritmos presentados en el capítulo tres y utilizados en el software wavelet, no son los únicos que existen,

Algoritmo 1:

$$c_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h[n-2k]} c_j[n]$$

$$d_{j-1}[k] = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g[n-2k]} c_j[n]$$

$$c_{j+1}[p] = \sqrt{2} \sum_k (h[2k-p] c_j[k] + g[2k-p] d_j[k])$$

algunos autores (como Albert Cohen [4]) utilizan un algoritmo muy parecido, con la única diferencia de un factor $\sqrt{2}$.

Algoritmo 2:

$$c_{j-1}[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[2k-n] c_j[n]$$

$$d_{j-1}[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[2k-n] c_j[n]$$

y para la reconstrucción

$$c_{j+1}[p] = 2 \sum_k (h[p-2k] c_j[k] + g[p-2k] d_j[k])$$

El factor $\sqrt{2}$ influye en el resultado, únicamente en la amplitud de las componentes. Si fijamos a la amplitud de la función original como 1, la amplitud de las diversas componentes y resoluciones esta dada por los valores presentados en la tabla 5.3 para el algoritmo 1 y por la tabla 5.4 para el algoritmo 2.

Resolución		Componente	
V_0	1	V_0	1
V_{-1}	$\sqrt{2}$	W_{-1}	$\sqrt{2}$
V_{-2}	2	W_{-2}	2
V_{-3}	$2\sqrt{2}$	W_{-3}	$2\sqrt{2}$
V_{-4}	4	W_{-4}	4

Tabla 5.3: Subespacios V_j y W_j y los factores de incremento de amplitud para el algoritmo 1.

Resolución		Componente	
V_0	1	V_0	1
V_{-1}	1	W_{-1}	1
V_{-2}	1	W_{-2}	1
V_{-3}	1	W_{-3}	1
V_{-4}	1	W_{-4}	1

Tabla 5.4: Subespacios V_j y W_j y los factores de incremento de amplitud para el algoritmo 2.

Definitivamente, el algoritmo 1 provee una mejor ventana de visualización para las componentes de frecuencia, es muy conveniente poder observar a las componentes de frecuencia a diferente escala porque esto permite mirar los detalles pequeños de mejor forma y aislar los datos del ruido.

Para mostrar las diferentes resoluciones de la función original, no es necesario cambiar la escala de amplitud ya que esta alternativa, que ofrece el análisis multirresolución, no se utiliza en la detección de enfermedades del corazón.

Estos dos criterios, que la tabla 5.5 clarifica, fueron utilizados en el software Wavelet, que es el que implementa la transformada de ondillas para el estudio de los ECGs.

Resolución		Componente	
V_0	1	V_0	1
V_{-1}	1	W_{-1}	$\sqrt{2}$
V_{-2}	1	W_{-2}	2
V_{-3}	1	W_{-3}	$2\sqrt{2}$
V_{-4}	1	W_{-4}	4

Tabla 5.5: Subespacios V_j y W_j y los factores de incremento de amplitud utilizados en el software Wavelet.

5.4 PROPIEDADES DE FILTRADO DE LAS ONDILLAS

Aunque pueda sonar redundante hablar de las cualidades de filtrado de las ondillas, habiendo mencionado la palabra filtro un sin número de veces en los capítulos anteriores, no parece inoportuno dedicarle algunos párrafos adicionales, debido a los excelentes resultados obtenidos mediante esta transformada.

En los electrocardiogramas como en la mayoría de señales de telecomunicaciones, el ruido, que tiene componentes de alta frecuencia, se suma a la señal original produciendo pérdida de datos y distorsión de la forma inicial.

En la tabla 5.1 se puede mirar como cambia el contenido de frecuencia de la señal primitiva al pasar por un filtro basa-bajos de media banda. Se nota claramente que las componentes de alta frecuencia van desapareciendo a medida que se calculan resoluciones más toscas de la función discreta en el tiempo.

En el filtrado de señales, las ondillas de orden superior presentan ventajas frente a las bases de menor orden debido a su mejor respuesta de frecuencia.

Estos filtros tienen una importancia adicional, la banda de frecuencia va cambiando en forma logarítmica. El usuario puede determinar en que momento termina el filtrado para evitar que se comiencen a perder datos a causa del estrechamiento de la banda de frecuencia.

En las figuras 5.12, 5.13 y 5.14 pueden verse los resultados de filtrar la función de la figura 5.11. Se compara el uso de diferentes ondillas para eliminar la alta frecuencia.

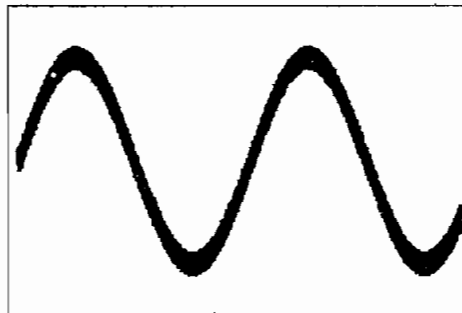


Figura 5.11: Función original, compuesta de una sinusoidal de baja frecuencia más sinusoidal de alta frecuencia y pequeña amplitud.

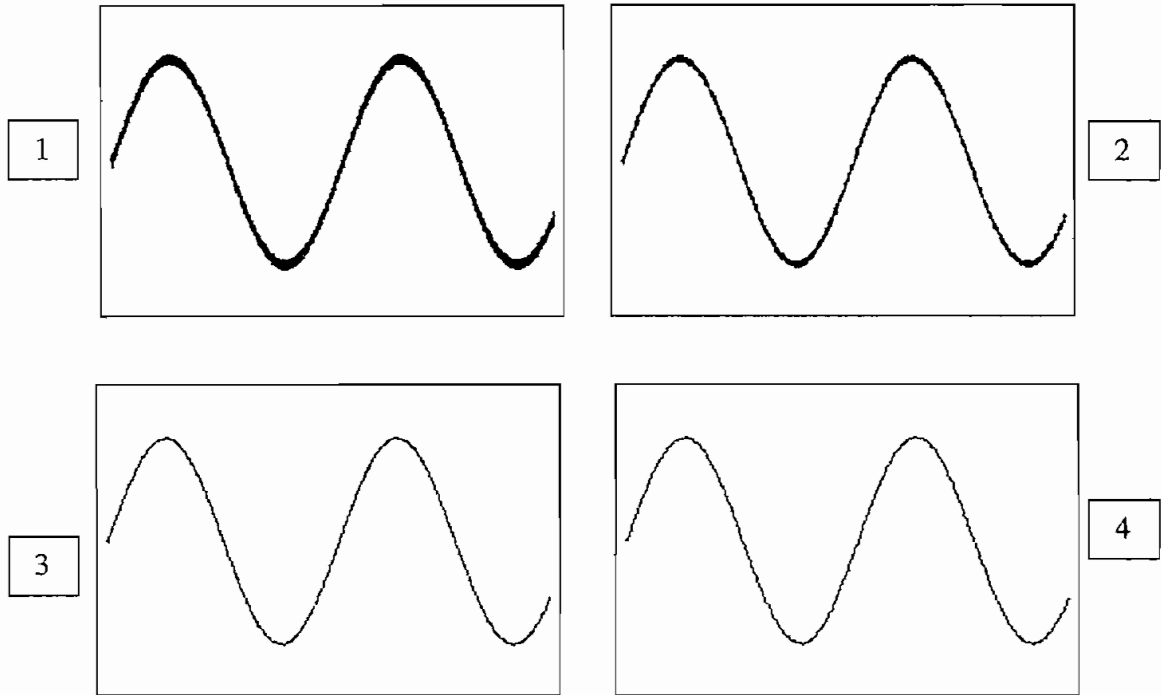


Figura 5.12: Diferentes resoluciones obtenidas con la ondilla de Haar. Nótese que para eliminar la alta frecuencia se necesita un mayor número de resoluciones.

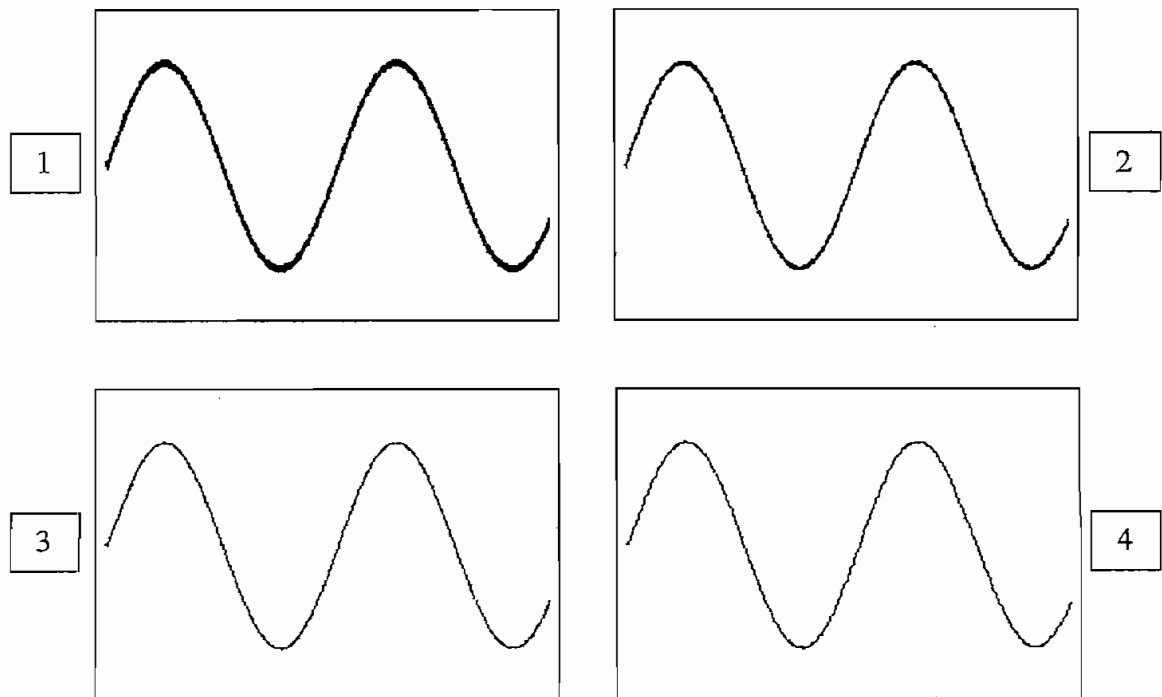


Figura 5.13: Primeras cuatro resoluciones obtenidas por el filtrado con la base de Daubechies de orden 2.

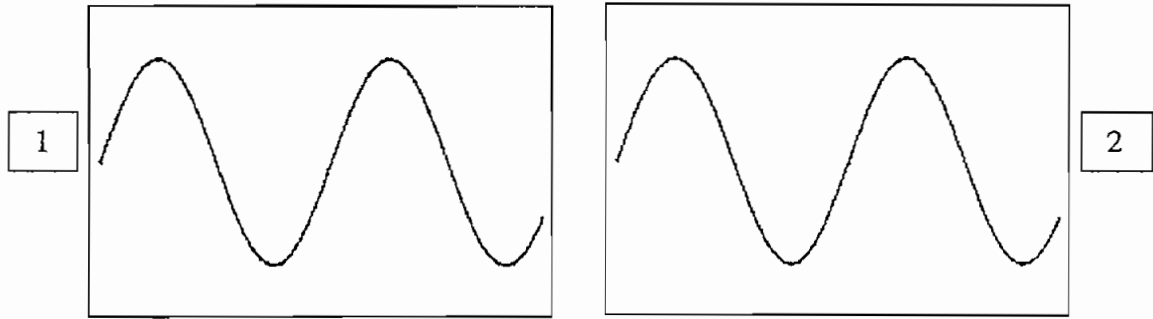


Figura 5.14: Primeras dos resoluciones obtenidas por el filtrado con la base de Daubechies de orden 8.

5.5 CONCLUSIONES GENERALES

Al analizar los electrocardiogramas con la transformada de ondillas, se obtienen criterios adicionales de identificación de enfermedades cardiacas. El análisis de un alto porcentaje de la totalidad de afecciones al corazón, podría convertir a esta herramienta en un nuevo método de diagnóstico, esto sería posible de existir el respaldo económico de alguna institución relacionada al tema.

El campo de procesamiento digital de señales ha sido poco estudiado y aplicado en la Universidad y el País en general, en los últimos años se han dado pasos grandes en esta materia, los algoritmos son mucho más fáciles de implementar gracias al software y hardware existente. Sería muy importante, tanto científica como económicamente para la Universidad, que se dedique un espacio para la investigación y el desarrollo de estos conocimientos.

Casi no existe bibliografía en español sobre el tema de las ondillas (wavelets), un tema muy desarrollado en países como Francia y EEUU, a pesar que han transcurrido más de 10 años desde el aparecimiento de esta rama de las matemáticas y procesamiento de señales. Esto demuestra una vez más la gran distancia existente entre estos países y América Latina en cuanto a investigación y a ciencia se refiere.

El método de digitalización utilizado para este trabajo, no permite obtener información de alta frecuencia, los electrocardiogramas utilizados se encuentran en la banda de [5KHz - 0], esta limitación lastimosamente no pudo ser superada en el desarrollo de la Tesis. Sin embargo, la posibilidad de obtener componentes de alta frecuencia crearía un problema adicional, no fácil de resolver, que es el de distinguir entre los datos y el ruido del electrocardiógrafo, que es un equipo electrónico.

ANEXOS

Anexo 1: Manual de funcionamiento del software Wavelet.	129
Anexo 2: Fotocopias de los electrocardiogramas digitalizados.	133

Anexo 1: MANUAL DE FUNCIONAMIENTO DEL SOFTWARE WAVELET

El software Wavelet, realizado en lenguaje Visual Basic versión 5.0, es en realidad simple de utilizar, porque presenta un interface con el usuario muy amigable.

Este software puede trabajar en cualquier computadora que tenga como sistema operativo Windows 95 o superior. Debido al alto número de operaciones matemáticas que necesita realizar, la velocidad del procesador influirá en el tiempo necesario para concluir una orden del usuario. En computadoras de más de 66 Mhz de velocidad, este software no presenta ningún problema.

Wavelet lee archivos de hasta 10.000 datos (límite impuesto debido a que no se usaron electrocardiogramas con un mayor número de muestras), sin embargo en el programa fuente se podría cambiar este límite de ser necesario.

Los electrocardiogramas tienen la siguiente escala en amplitud

$$10\text{mm} = 1\text{mV} = 1$$

es decir, al digitalizar los ECGs, la escala de amplitud usada estaba en mV.

El archivo ejecutable tiene el mismo nombre que el software, Wavelet. Es indispensable que los ECGs normales se encuentren en el directorio c:\wavelet\electros\ para el funcionamiento correcto del programa.

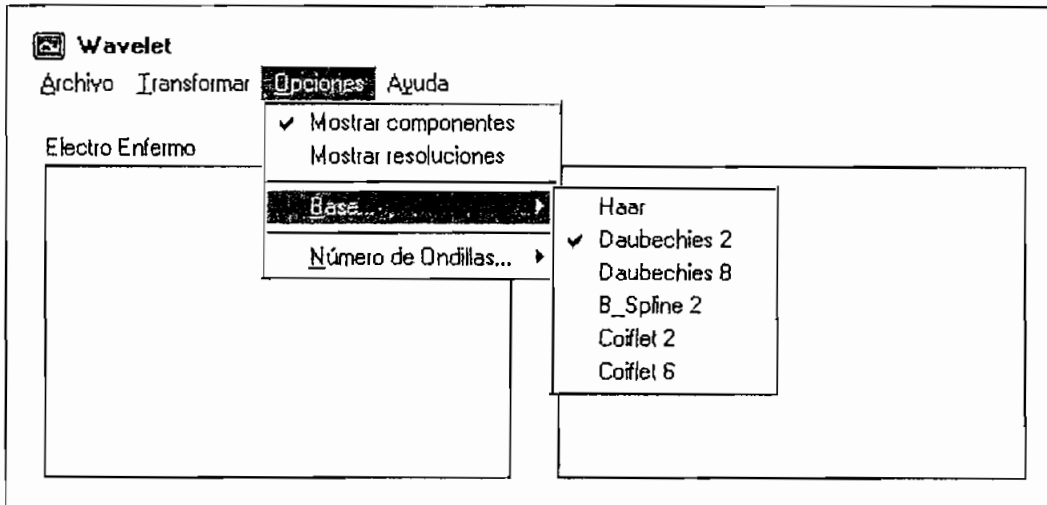


Figura 1: Programa Wavelet, menú Opciones, que permite elegir la base de ondillas, entre mostrar componentes y mostrar resoluciones, y el número de ondillas.

Lo primero que debemos hacer una vez que estamos dentro de Wavelet es seleccionar tres parámetros diferentes en el menú OPCIONES

- Escoger entre mostrar resoluciones y mostrar componentes.
- El número de componentes o resoluciones a mostrar.
- La base de ondillas.

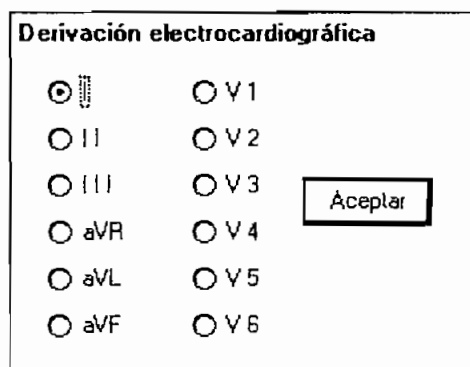


Figura 2: Menú que permite escoger el electrocardiograma normal.

Luego debemos seleccionar el ECG enfermo que queremos comparar, presionamos F3 o elegimos ABRIR en el menú ARCHIVO. Para seleccionar el ECG normal presionamos F4 o en el menú ABRIR optamos por comparar.

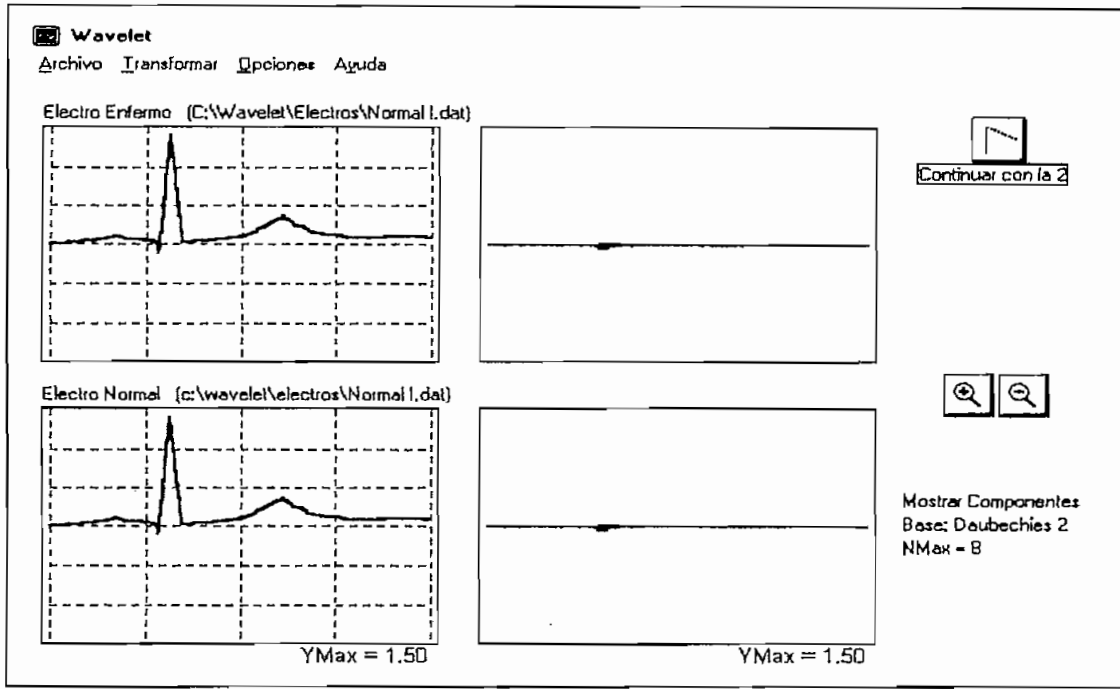


Figura 3: Pantalla principal del software Wavelet.

Se puede cambiar la escala de amplitud mediante los botones que se encuentran en a la derecha de la ventana. Tanto para aumentar como para disminuir la escala, se utiliza el factor $\sqrt{2}$. El valor máximo de la amplitud de la ventana de los ECGs se muestra en la parte inferior de las mismas.

Para comenzar a observar las diferentes componentes o resoluciones, debemos escoger en el menú TRANSFORMAR, COMENZAR (F5). Para mirar las siguientes presionamos en el icono de flecha en la esquina superior derecha o elegimos CONTINUAR en el menú TRANSFORMAR (F6).

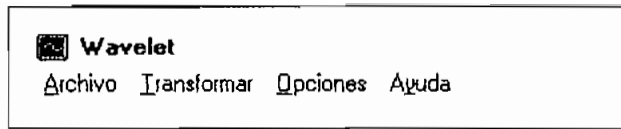


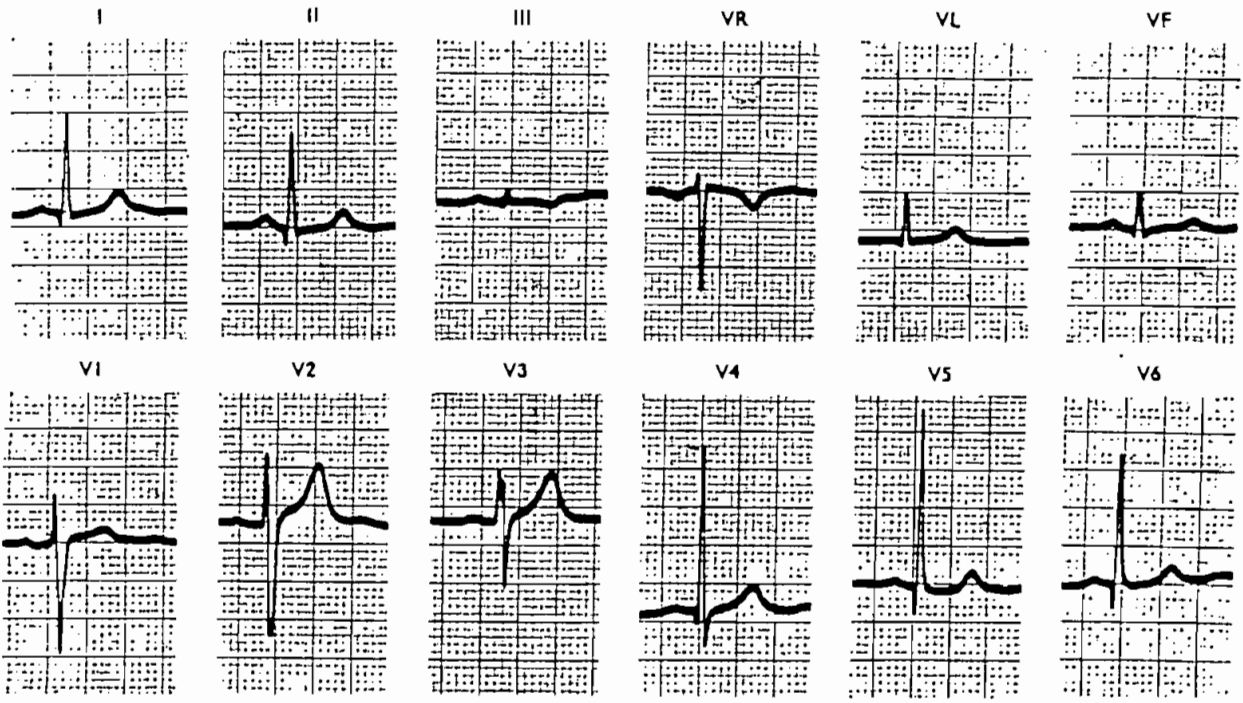
Figura 4: Menú principal del programa wavelet.

Si queremos aplicar la transformada de ondillas a los ECGs actuales, con otras opciones, seleccionamos **COMENZAR NUEVAMENTE** en el menú **TRANSFORMAR** y cambiamos los parámetros en el menú **OPCIONES**.

**Anexo 2: FOTOCOPIAS DE LOS ELECTROCARDIOGRAMAS
DIGITALIZADOS**

NORMAL ELECTROCARDIOGRAMS

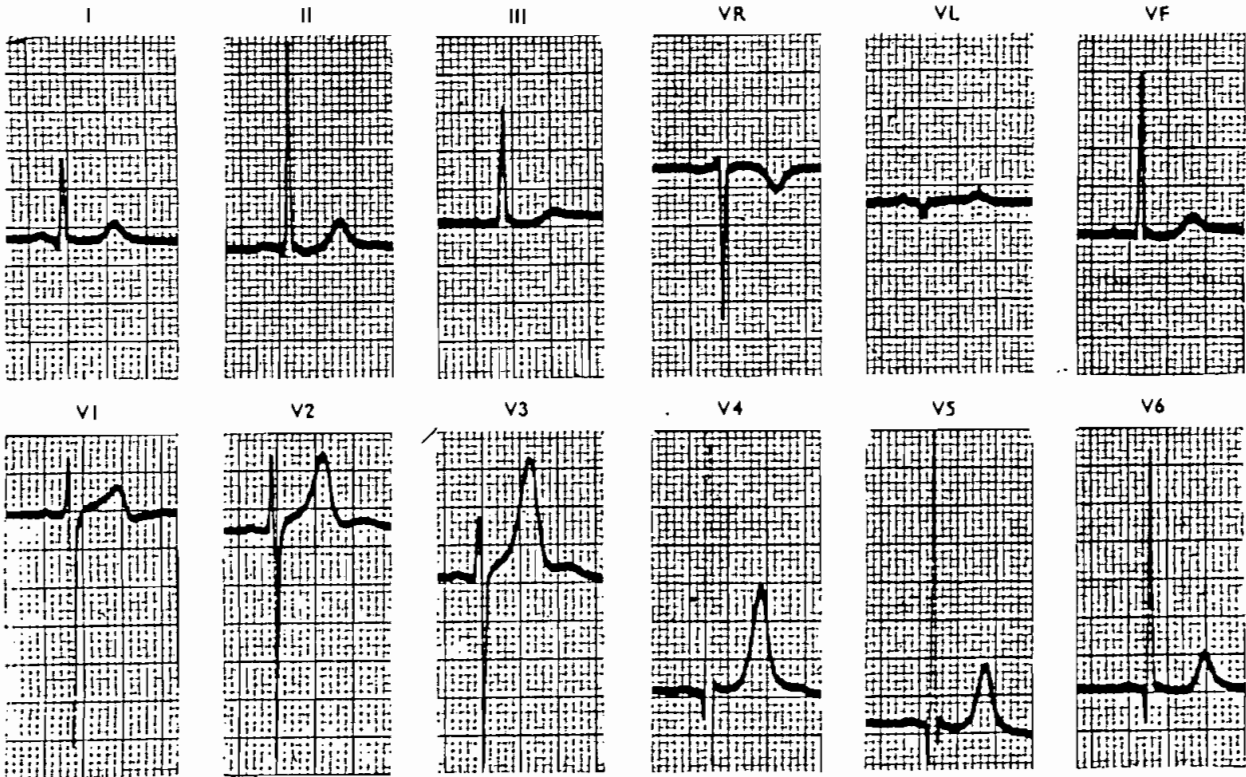
3



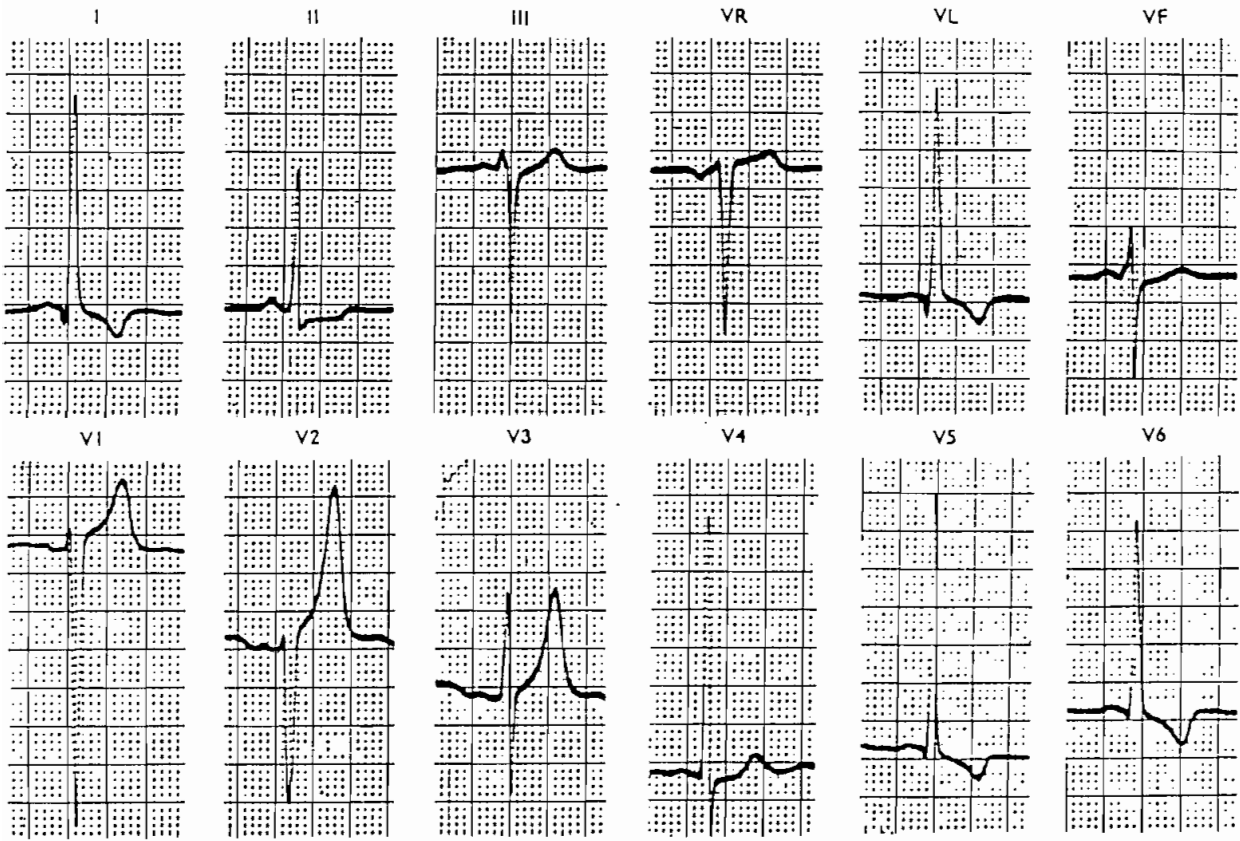
3 Normal electrocardiogram, intermediate position. The complexes in VF and VL are similar in shape and both resemble that in V6.

VENTRICULAR HYPERTROPHY

294

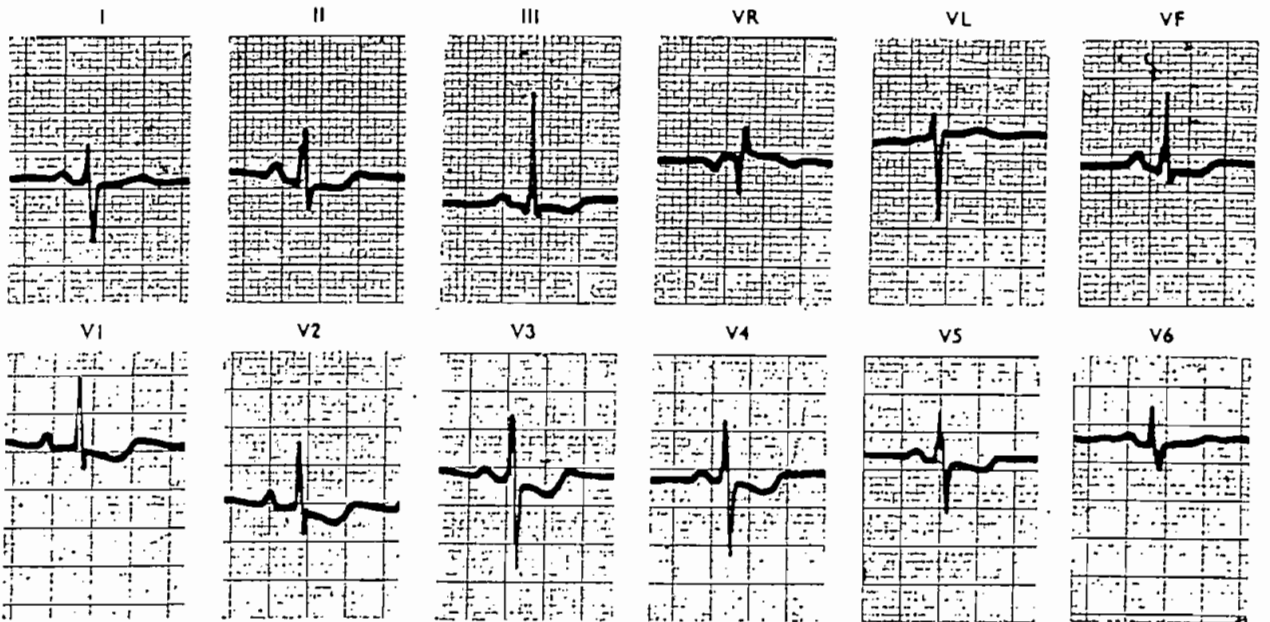


Hipertrofia ventricular izquierda. Conway Neville, "An atlas of cardiology, electrocardiograms and chest x-rays", Wolfe Medical Publications, Barcelona, 1990



Hipertrofia ventricular izquierda severa. Conway Neville, "An atlas of cardiology, electrocardiograms and chests x-rays", Wolfe Medical Publications, Barcelona, 1990

VENTRICULAR HYPERTROPHY



Hipertrofia ventricular derecha. Conway Neville, "An atlas of cardiology, electrocardiograms and chests x-rays", Wolfe Medical Publications, Barcelona, 1990

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aguilar Jorge, "Identificación de trastornos del ritmo del corazón mediante análisis de electrocardiogramas", Tesis EPN, 1995.
- [2] Akay Metin, "Wavelet applications in medicine", IEEE Spectrum, Mayo 1997, Pags 50 - 56.
- [3] Caisaguano José, "Análisis de Ondelettes", Tesis EPN, Noviembre 1997.
- [4] Cohen Albert y Kovacevic Jelena, "Wavelets: the mathematical background", IEEE Proceedings, Vol. 84 N. 4, Abril 1996, Pags. 574 - 522.
- [5] Conway Neville, "An atlas of cardiology, electrocardiograms and chest x-rays", Wolfe medical Publications, Barcelona, 1990.
- [6] Cooksey, Dunn y Massie, "Clinical vectocardiography and electrocardiography", Year book medical publishers, Londres, 1977, Segunda edición.
- [7] Daubechies Ingrid, "Ten lectures on wavelets", Society for industrial and applied mathematics (SIAM), Pennsylvania, 1992.
- [8] Dueñas Montero, "Transmisión y recepción de telemetría médica", Tesis EPN.
- [9] Gazes Peter, "Clinical Cardiology", Year book medical publishers, Chicago, 1977.

- [10] Goldman, "Principios de Electrocardiografía clínica", Editorial el Manual Moderno, México, 1981, Séptima edición.
- [11] Gutton Arthur, "Tratado de fisiología médica", Editorial Interamericana, Madrid 1984, Quinta edición.
- [12] Hernández Eugenio y Weiss Guido, "A first course on wavelets", CRC Press, New York, 1996.
- [13] Mallat Stephane, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation", IEEE Transactions on pattern analysis and Machine Intelligence, Vol II, N. 7, Julio 1989, Pags. 674 - 693
- [14] Mallat Stephane, "Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models", IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, Vol 37, N. 12, Diciembre 1989, Pags. 2091 - 2110.
- [15] Meyer Yves, "Wavelets: Algorithms and applications", (SIAM), Philadelphia, 1993.
- [16] Microsoft, "Manual del programador Visual Basic 4.0", Microsoft Corporation, 1995. Versión en español.
- [17] Paltan David, "Anatomía, Fisiología e Higiene", Editorial La Salle, Quito, 1960, Séptima edición.
- [18] Ramchandran, Vetterli y Herley, "Wavelets, subband coding and best bases", Proceedings of the IEEE, Vol 84, N.4, Abril, 1996. Pags. 541 - 560.

[19] Rosebaum y Elizari, "Fronteras de la Electrofisiología cardíaca", Editorial Intermédica, Buenos Aires, 1985.

[20] Testut y Latarje, "Anatomía humana", Tomo2, Editorial Salvat, Barcelona, 1979.

[21] Vetterli Martin y Herley Cormac, "Wavelets and filter banks: Theory and design", IEEE transactions on signal processing, Vol 40, N. 9, Septiembre 1992. Pags. 2207 - 2232.

DIRECCIONES DE INTERNET

<http://www.cardiologycompass.com>

<http://homepages.enterprise.net/djenkins/index.html>

<http://www.cardio.ucsf.edu/card.html>

<http://www.hipocrates.net/bibelec/bibelec.html>

<http://www.mmip.mcgill.ca/heart/index.html>

<http://www.wavelet.org>

<http://www.amara.com/current/wavelet.html>

<http://www.rahul.net/jfm/dwt.html>

<http://cm.bell-labs.com/cn/ms/who/jelena/wavelet/home.html>