

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DESACELERACIÓN DE LA MORTALIDAD EN ADULTOS MAYORES DE LA POBLACIÓN ECUATORIANA

PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MATEMÁTICO

BORIS SANTIAGO POLANCO JÁCOME

boriscout@gmail.com

DIRECTOR: LUIS ALCIDES HORNA HUARACA, PH.D.

luis.horna@epn.edu.ec

Quito, Mayo 2015

DECLARACIÓN

Yo BORIS SANTIAGO POLANCO JÁCOME, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

BORIS SANTIAGO POLANCO JÁCOME

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por BORIS SANTIAGO POLANCO JÁCOME, bajo mi supervisión

Luis Alcides Horna Huaraca, Ph.D.
DIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Horna, por su apoyo en la realización de este trabajo y por impulsar el desarrollo de mi formación profesional.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi padres y mis hermanos, este trabajo ha sido posible gracias a ustedes.

Índice de Contenido

Lista de Figuras	ix
Lista de Tablas	xi
Resumen	xiv
Abstract	xv
1 Introducción	1
1.1 La transición demográfica en el Ecuador	3
1.2 Definiciones importantes	5
2 Análisis de los principales modelos utilizados	12
2.1 Conceptos preliminares	13
2.2 La función de supervivencia	13
2.2.1 Propiedades	13
2.3 La función fuerza de mortalidad	15
2.4 Algunos modelos paramétricos	18
2.4.1 La distribución exponencial	18
2.4.2 La distribución de Gompertz	20
2.4.3 La distribución de Weibull	20
2.5 El modelo frailty logístico	22
2.5.1 La ley de Makeham	23
2.5.2 El modelo logístico	23
2.5.3 El modelo Gompertz logístico	24
2.5.4 Teoría de Strehler Mildvan	25
2.6 Un modelo de mortalidad flexible	26
3 El fenómeno de desaceleración de la mortalidad	28
3.1 Un poco de historia	28
3.2 Dos alternativas para encontrar la edad en que se presenta la desace- ración de la mortalidad	30

3.2.1	Tasa de Envejecimiento de la Tabla de Vida LAR	30
3.2.2	Definiciones basadas en la función fuerza de mortalidad	31
4	Ajuste de los modelos propuestos a datos de población ecuatoriana	34
4.1	EL problema de mínimos cuadrados.	34
4.2	El algoritmo de Gauss Newton	36
4.3	Intervalos de Confianza	39
4.4	Pruebas de hipótesis sobre los parámetros	39
4.5	Bondad de Ajuste	40
4.6	Ajuste de datos de mortalidad para la población ecuatoriana.	40
4.7	Ajustes a los diferentes modelos para datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991	44
4.7.1	Modelo frailty logístico	45
4.7.2	Modelo de Weibull	46
4.7.3	Modelo de Gompertz	47
4.7.4	Modelo logístico	47
4.7.5	Modelo de Gompertz logístico	48
4.7.6	Modelo μ_{Γ}	49
4.8	Ajustes a los diferentes modelos para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991	51
4.8.1	Modelo frailty logístico	51
4.8.2	Modelo de Weibull	52
4.8.3	Modelo de Gompertz	53
4.8.4	Modelo logístico	53
4.8.5	Modelo Gompertz logístico	54
4.8.6	Modelo μ_{Γ}	55
4.8.7	Modelo frailty logístico	57
4.8.8	Modelo μ_{Γ}	58
4.8.9	Modelo frailty logístico	60
4.8.10	Modelo μ_{Γ}	60
5	Resultados	62
5.1	Cálculo de las edades donde comienza la desaceleración de la mortali- dad utilizando la metodología <i>LAR</i>	73
5.2	Resumen del trabajo	76
5.3	Aporte Personal	77
6	Conclusiones y Recomendaciones	79
6.1	Conclusiones	79
6.2	Recomendaciones	81

Bibliografía	82
Anexos	83
A Definiciones Importantes	85
A.1 Variable aleatoria	85
A.2 Distribución de una variable aleatoria	85
A.3 Probabilidad condicional	85
A.4 Proceso de Wiener	85
B Edades de inicio de desaceleración de la mortalidad para datos de población ecuatoriana, período 1991 – 2013	87
C Códigos implementados en R	89
C.1 Código para realizar el ajuste por mínimos cuadrados no lineales a las diferentes funciones	89
C.2 Intervalos de confianza al 95 %.	90
C.3 Prueba de hipótesis sobre los parámetros.	90

Lista de Figuras

1.1	Población ecuatoriana para los años 1950, 2000 y 2050.	2
1.2	Evolución de la población por grupos de edad	4
1.3	Caso difuso	5
1.4	Ciclo económico vital Ecuador 2011.	7
1.5	Distribución de tipos de transferencias generacionales.	8
1.6	Desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas	10
2.1	Tiempo de vida futuro T_x	14
2.2	Función Fuerza de Mortalidad para la Distribución Exponencial con $\lambda = 0,02$	20
2.3	Función fuerza de mortalidad para la distribución de Weibull con parámetros $\lambda = 0,014, \alpha = 2,05$	21
2.4	Función fuerza de mortalidad para la Distribución Logistic Frailty con parámetros $A = 4,3 * 10^{-7}, s = 0,568, \alpha = 0,157$	22
2.5	Función fuerza de mortalidad para la distribución Logística con parámetros $\gamma = 0,011, k = 0,465, A = 1,9 * 10^{-7}, \alpha = 0,174$	24
2.6	Función fuerza de mortalidad para el modelo Gompertz logística con parámetros $k = 6,2 * 10^{-4}, A = 7,2 * 10^{-4}, B = 9,2 * 10^{-7}, \alpha = 0,156$	25
2.7	Función fuerza de mortalidad para μ_T con parámetros $a = 0,018, b = 5, c = 2,5 * 10^5, d = 2,29$	27
3.1	Fuerza de mortalidad tipo Weibull creciente y acelerada	32
3.2	Fuerza de mortalidad tipo frailty logístico creciente y desacelerada	33
4.1	El problema de mínimos cuadrados.	35
4.2	Datos de fuerza de mortalidad para el período 1991 – 2013 Hombres Ecuador.	42
4.3	Niveles de la función fuerza de mortalidad a lo largo del período 1991 – 2013 con datos de mortalidad de hombres ecuatorianos.	42
4.4	Datos de fuerza de mortalidad para el período 1991 – 2013 Mujeres Ecuador.	43

4.5	Niveles de la función fuerza de mortalidad a lo largo del período 1991 – 2013 con datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas.	43
4.6	Ajuste datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 a diferentes funciones.	45
4.7	Ajuste datos de mortalidad a diferentes funciones.	51
5.1	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991	63
5.2	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo frailty logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991	64
5.3	Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad Gompertz logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991	65
5.4	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de hombres ecuatorianos año 1991.	66
5.5	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991. . .	67
5.6	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo frailty logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991.	68
5.7	Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad Gompertz logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991	69
5.8	Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de mujeres ecuatorianas año 1991	70
5.9	Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de hombres ecuatorianos año 1991	71
5.10	Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de mujeres ecuatorianas año 1991	72
5.11	Tasa de envejecimiento de la tabla de vida para hombres y mujeres población ecuatoriana 1991.	74
5.12	Tasa de envejecimiento de la tabla de vida para hombres y mujeres población ecuatoriana 1991.	75

Lista de Tablas

1.1	Esperanzas de vida.	1
1.2	Valores del coeficiente de entropía para los años 1950, 2000 y 2050.	3
2.1	Propiedades de la distribución exponencial	19
2.2	Propiedades distribución de Gompertz	20
2.3	Propiedades de la distribución de Weibull	21
4.1	Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de hombres ecuatorianos 1991.	45
4.2	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.	46
4.3	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.	46
4.4	Resultados de los estimadores para el modelo de Weibull para datos de población de hombres ecuatorianos 1991.	46
4.5	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Weibull.	46
4.6	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Weibull.	46
4.7	Resultados de los estimadores para el modelo de Gompertz para datos de población de hombres ecuatorianos del año 1991.	47
4.8	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Gompertz.	47
4.9	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Gompertz.	47
4.10	Resultados de los estimadores para el modelo logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.	47
4.11	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de logístico.	48
4.12	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo logístico.	48
4.13	Resultados de los estimadores para el modelo Gompertz logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.	48

4.14	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo Gompertz logístico.	48
4.15	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo Gompertz logístico.	49
4.16	Resultados de los estimadores para el modelo μ_{Γ} para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.	49
4.17	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_{Γ}	49
4.18	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_{Γ}	49
4.19	Parámetros estimados para datos de Ecuador-hombres 1991.	50
4.20	Criterio de información de Akaike Hombres 1991	50
4.21	Criterio de información de Bayesiano Hombres 1991	50
4.22	Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	51
4.23	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.	52
4.24	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.	52
4.25	Resultados de los estimadores para el modelo de Weibull para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	52
4.26	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Weibull.	52
4.27	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Weibull.	52
4.28	Resultados de los estimadores para el modelo de Gompertz para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	53
4.29	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Gompertz.	53
4.30	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Gompertz.	53
4.31	Resultados de los estimadores para el modelo logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	53
4.32	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo logístico.	54
4.33	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo logístico.	54
4.34	Resultados de los estimadores para el modelo Gompertz logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	54
4.35	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo Gompertz logístico.	54
4.36	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo Gompertz logístico.	55
4.37	Resultados de los estimadores para el modelo μ_{Γ} para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.	55
4.38	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_{Γ}	55
4.39	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_{Γ}	55
4.40	Parámetros estimados para datos de Ecuador-mujeres 1991.	55

4.41	Criterio de información de Akaike Mujeres 1991.	56
4.42	Criterio de información Bayesiano Mujeres 1991.	56
4.43	Parámetros estimados para datos de Ecuador Hombres 1991.	57
4.44	Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.	57
4.45	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.	58
4.46	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.	58
4.47	Resultados de los estimadores para el modelo μ_{Γ} para datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.	58
4.48	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_{Γ}	58
4.49	Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_{Γ}	58
4.50	Criterio de información de Akaike Hombres 1991.	58
4.51	Criterio de información Bayesiano Hombres 1991.	59
4.52	Parámetros estimados para datos de Ecuador Mujeres 1991.	59
4.53	Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.	60
4.54	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.	60
4.55	Resultados de los estimadores para el modelo μ_{Γ} para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.	60
4.56	Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_{Γ}	60
4.57	Prueba de hipótesis.	61
4.58	Criterio de información de Akaike mujeres 1991.	61
4.59	Criterio de información Bayesiano mujeres 1991.	61
5.1	Edades de inicio de desaceleración de la mortalidad y disminución de la aceleración	76
B.1	Edades de inicio de la desaceleración de la mortalidad para hombres con datos de Ecuador para el período 1991 – 2013	87
B.2	Edades de inicio de la desaceleración de la mortalidad para mujeres con datos de Ecuador para el período 1991 – 2013	88

Resumen

En este trabajo se estudia el fenómeno de desaceleración de la mortalidad en adultos mayores de la población ecuatoriana. Este fenómeno es de gran interés en el campo actuarial, ya que en la actualidad nuestro país atraviesa por un proceso de transición demográfica con el cual se espera que dentro de aproximadamente 30 años la población de adultos mayores en el Ecuador aumente.

Para este trabajo se ajustan datos de mortalidad a ciertas funciones típicas en el análisis de supervivencia mediante el método de mínimos cuadrados. Después de validar estadísticamente cada modelo, se selecciona el que provea un mejor ajuste mediante ciertos criterios estadísticos. Posteriormente, se presentan dos alternativas para determinar la edad cuando la desaceleración de la mortalidad se presenta. Finalmente, se realiza una comparación de los resultados obtenidos.

Los datos utilizados corresponden a proyecciones de población obtenidas a través del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC) y tablas de mortalidad de un proyecto de titulación previo[14].

Todo el cálculo numérico se desarrolla utilizando el lenguaje y entorno de programación *R*, el cual es un proyecto de software libre para análisis estadístico, numérico y gráfico.

Palabras clave: función fuerza de mortalidad, desaceleración de la mortalidad, transición demográfica

Abstract

This research aims to study the phenomenon of late life mortality deceleration in Ecuadorian population. This phenomenon is very important in the actuarial field, because nowadays our country is going through a demographic transition process. As a result of this process the late life population will increase in the next 30 years.

The results are obtained by fitting several mortality data to certain typical functions in survival analysis using the least squares method. After some statistical validation process, the best fitted curve is selected using certain statistical criteria. Then, two alternatives are examined in order to determine the age at which the mortality deceleration process starts. Finally, a comparison between the obtained results is performed. The data used in this research corresponds to population projections obtained from Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) and mortality tables taken from a previous thesis[14].

All the numerical calculations are derived by using the programming language and environment R, which is a free software project for statistical, graphic and numerical analysis.

Keywords Force of mortality function, late life mortality deceleration, demographic transition.

Capítulo 1

Introducción

En el Ecuador, las características demográficas de la población han variado notablemente, entre ellas, el número de habitantes que se ha incrementado de una manera muy significativa, llegando al punto de triplicarse durante los últimos 40 años.

En el año 1950 se contaba con aproximadamente 3 millones de habitantes, luego por el año 1990 la población era de casi 10 millones. Actualmente, según datos publicados diariamente por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) en su página de internet ¹ para el año 2014 el número de habitantes sobrepasó los 16 millones.

Estos resultados muestran una tendencia a tener rasgos demográficos propios de un país desarrollado,² como por ejemplo un mayor incremento en la esperanza de vida lo cual conlleva a una mayor cantidad de adultos mayores en la población. A continuación se muestra un cuadro comparativo donde se observa el aumento de las esperanzas de vida para algunos países desarrollados y el Ecuador.

País	1980	1990	2000	2014
Ecuador	63	69	73	76
Argentina	70	72	74	76
Chile	69	74	77	80
Estados Unidos	74	75	77	79
Alemania	73	75	78	81
Suiza	75	77	80	83

Tabla 1.1: Esperanzas de vida.

Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de la página del Banco Mundial
<http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.DPND>.

A continuación, se presentan 3 pirámides poblacionales, donde se puede observar el aumento en la tasa de adultos mayores, pronosticándose para dentro de los próximos

¹<http://www.ecuadorencifras.gob.ec/>

²En general un país desarrollado es un país que posee un alto nivel de vida así como también un gran desarrollo industrial y comercial, entre estos países podemos enumerar algunos como por ejemplo: Alemania, Australia, Estados Unidos, Suiza, Chile y Argentina.

años una población senescente más numerosa.

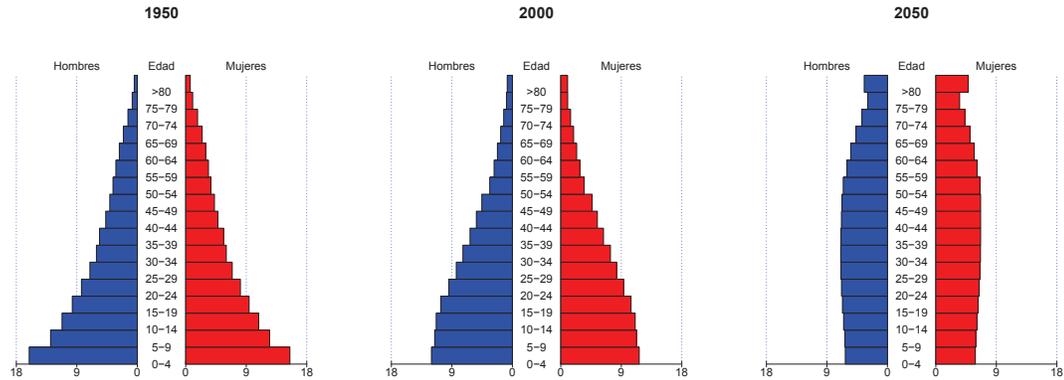


Figura 1.1: Población ecuatoriana para los años 1950, 2000 y 2050.

Fuente: Elaboración propia a partir de proyecciones poblacionales de la CEPAL.

En la figura 1.1 se observa que para el año 1950 la estructura de la pirámide poblacional es estable. En la base de la pirámide se observa la mayor proporción de la población debido a tasas de natalidad altas y en la parte alta de la pirámide el porcentaje de población es mínimo debido a tasas de mortalidad elevadas.

Para el año 2000 las tasas de natalidad disminuyen, haciendo que la base de la pirámide tome una forma rectangular. Finalmente, en la pirámide correspondiente al año 2050 se observa una estructura donde la población mayor a los 50 años se incrementa, esto se debe a que las tasas de natalidad y mortalidad disminuyen generando un envejecimiento de la población.

Lo dicho anteriormente, se justifica con algo que en teoría de la información se conoce como coeficiente o índice de entropía[5]. Este valor se puede considerar como una medida de dispersión de la información proporcionada por un conjunto de datos. La expresión utilizada para calcular este indicador es la siguiente:

$$H = -\frac{1}{\ln N} \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) \quad (1.1)$$

donde N es el número total de categorías distintas (grupos de edad), p_i es la proporción entre el número de individuos de una categoría i y el número total de individuos de todas las categorías $\frac{n_i}{n}$, con $n = \sum_{i=1}^N n_i$. Para nuestro caso $N = 17$, de donde los valores obtenidos para el índice de entropía de cada pirámide poblacional se muestran a continuación.

	1950	2000	2050
Hombres	0.9037	0.9132	0.9904
Mujeres	0.9166	0.9212	0.9955

Tabla 1.2: Valores del coeficiente de entropía para los años 1950, 2000 y 2050.

Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de la página del Banco Mundial
<http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.DPND>.

Para el caso de la población ecuatoriana tanto para hombres como para mujeres se observa que los valores del coeficiente de entropía aumentan. Para 1950 la diferencia entre el número de personas en el rango de edades más jóvenes es muy elevado con respecto a las edades más altas. Para el año 2000 tal diferencia se mantiene, sin embargo, ya no se presenta mayor concentración de la población en el grupo de edad de 0 – 4 años. Finalmente, en la pirámide poblacional pronosticada para el año 2050 se observa que la distribución de la población para los diferentes rangos de edades se vuelve más homogénea, esto hace que haya mayor dispersión en los datos pues la población ya no se concentra en los grupos de edad más jóvenes, sino más bien se distribuye en cada uno de los grupos, por tal razón el coeficiente de entropía aumenta nuevamente. Este cambio en la estructura de la población es considerado la transición demográfica y tiene un gran impacto en la economía.

1.1 La transición demográfica en el Ecuador

La transición demográfica consiste en el paso de una estructura poblacional de altas a bajas tasas de mortalidad y natalidad. Como consecuencia de este fenómeno se pasa del predominio de personas jóvenes al de personas de edad avanzada.

En el Ecuador este fenómeno se ha evidenciado notablemente. Se tiene que en 1990 la tasa de mortalidad³ era de 5 por mil habitantes, veinte años más tarde, en el año 2010, disminuyó a 4 por mil habitantes. En la actualidad la esperanza de vida al nacer de una persona tanto hombres como mujeres supera los 75 años, mientras que en 1990 era 69 años. En el mismo período la tasa de natalidad⁴ pasó de un 3 % a un 1,5 %, mientras que la tasa de fecundidad⁵ pasó del 11 % al 5 %, aproximadamente.

En nuestro país estos cambios demográficos afectan su crecimiento económico especialmente la producción de bienes y servicios, puesto que los cambios en la estructura

³**Tasa de mortalidad:** Es una proporción que indica el número de personas que fallecen respecto a la población total, usualmente expresada en tanto por mil.

⁴**Tasa de natalidad:** Es la relación entre el número de nacimientos ocurridos en un cierto período y la cantidad total de efectivos del mismo período. Se lee como el número de nacimientos de una población por cada mil habitantes en un año.

⁵**Tasa de fecundidad:** Es una medida que indica la relación entre el número de nacimientos ocurrido en un cierto período de tiempo y la cantidad de población femenina en edad fértil en el mismo período.

por edades influyen directamente en la estructura ocupacional y productiva de la población.

La evolución en la estructura por edades en el Ecuador la podemos observar en el siguiente gráfico obtenido a partir de proyecciones poblacionales de la CEPAL.

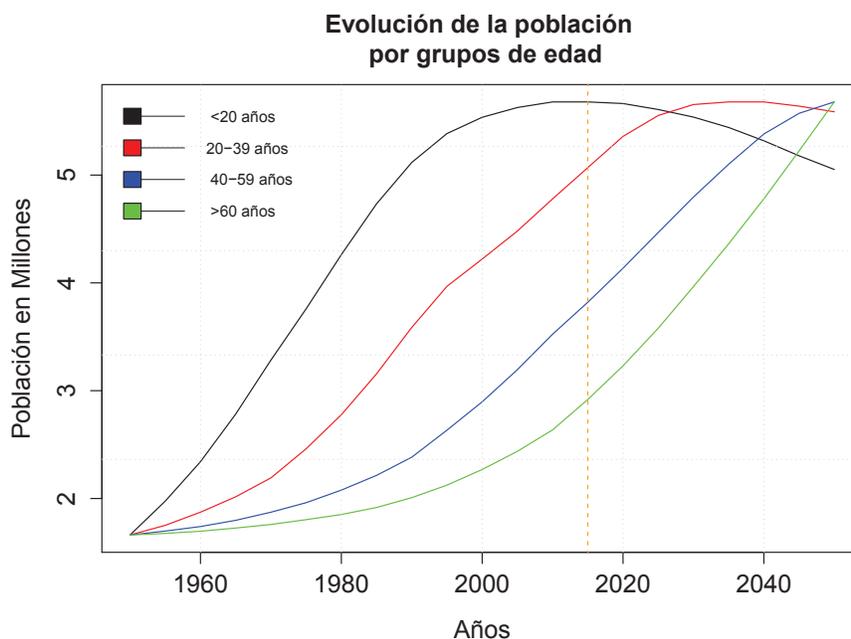


Figura 1.2: Evolución de la población por grupos de edad .

Fuente: Elaboración propia a partir de proyecciones poblacionales de la CEPAL.

En la figura 1.2 vemos que actualmente los aproximadamente 6 millones de personas menores de 20 años representan el 40 % de la población. Este grupo de edad para el año 2040 disminuirá a 5 millones con una tendencia a seguir bajando. Además, este grupo será superado por los grupos de edades mayores.

El conocer estos cambios demográficos nos permite explicar cambios en el mercado laboral debido a que inicialmente se tiene un aumento de la población en edad de trabajar, posteriormente conforme aumenta la esperanza de vida se origina una mayor proporción de la población mayor la cual es parte de la población económicamente dependiente que según el sistema de indicadores sociales del Ecuador SIISE ⁶, es el grupo de población que comprende las edades menores a 15 años y mayores a 64. Como parte de la transición demográfica el aumento de la población en edad de trabajar crea una estructura de edad que favorece el desarrollo económico de un país. Tal estructura origina lo llamado el bono demográfico, que constituye una oportunidad para generar políticas de estado planificadas a mediano y largo plazo.

⁶<http://www.siise.gob.ec>

1.2 Definiciones importantes

Para entender el concepto de bono demográfico es necesario que consideremos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1. *Transición Demográfica TD:* Es un esquema analítico a través del cual se describen las etapas por las cuales una sociedad pasa de un régimen demográfico "tradicional" a uno "moderno".

DEFINICIÓN 2. *Tasa de crecimiento natural TCN:* Es la diferencia entre la tasa de natalidad (TN) y la tasa de mortalidad (TM) que ocurre en un determinado lugar. Algebraicamente podemos representarla de la siguiente manera:

$$TCN = TN - TM \quad (1.2)$$

La tasa de crecimiento natural será positiva si se cumple que el número de nacimientos supera el número de muertes, negativa si se da lo contrario. Además, esta se considera alta si supera el 2%, moderada si se encuentra entre el 1% y el 2%, baja si es inferior al 1% [4]. Considerando que la tasa de crecimiento natural puede tomar los valores de 0 a 1, vamos a clasificarla en alta, moderada y baja. Esto lo podemos representar en el siguiente diagrama utilizando números difusos.

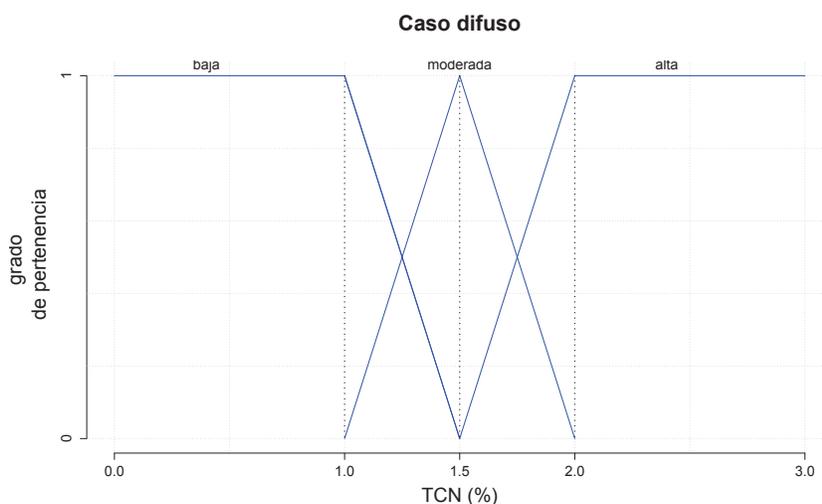


Figura 1.3: Caso difuso
Fuente: Elaboración propia.

DEFINICIÓN 3. *Tasa de dependencia poblacional TDP:* Se define como la razón entre la población dependiente, es decir la población mayor a los 64 años (P_{64}) más la población menor a los 15 años (P_{15}) y la población en edad de trabajar (PET)⁷. Algebraicamente podemos represen-

⁷De acuerdo al Sistema Integrado de Indicadores Sociales del Ecuador, la pobla-

tar tal relación como

$$TDP = \frac{P_{64} + P_{15}}{PET} \quad (1.3)$$

De la expresión anterior podemos concluir lo siguiente:

- Si $TDP < 1$, entonces $P_{64} + P_{15} < PET$.
- Si $TDP = 1$, se tiene que $P_{64} + P_{15} = PET$.
- Si $TDP > 1$ se tiene que $P_{64} + P_{15} > PET$

DEFINICIÓN 4. *Bono Demográfico BD:* El bono demográfico se define como el período de tiempo en el cual en la evolución demográfica de una nación la proporción del grupo en capacidad de trabajar se incrementa siendo más prominente que los otros grupos de edad. Relacionando este concepto con las definiciones dadas anteriormente se tiene que el bono demográfico se presenta cuando $TDP < 1$ es decir $P_{64} + P_{15} < PET$.

En el Ecuador según datos de la encuesta de empleo y desempleo en los hogares urbanos ENEMDU publicada en diciembre del 2014,⁸ se tiene que la población en edad de trabajar $PET = 11159255$ y la población $P_{64} + P_{15} = 3964734$ lo cual nos da un valor de $TDP = 0,3552866 < 1$, por lo cual estamos atravesando un período de bono demográfico.

La existencia de un bono demográfico, implica un ciclo económico vital⁹ de los seres humanos con dos tramos de edades deficitarias, estas son justamente el inicio y el final de la vida, pues aquí las personas consumen más de lo que producen.

El déficit generado por la aparición del bono demográfico es cubierto mediante un mecanismo llamado transferencia generacional que sirve para trasladar recursos desde el grupo de edad en capacidad de trabajar a los grupos de edad dependientes. Un ejemplo claro de este mecanismo es por ejemplo, el sistema de pensiones jubilares que es utilizado para cubrir el déficit correspondiente al grupo de edad mayor.

En publicaciones de la Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo se han mostrado resultados acerca del ciclo económico vital y las transferencias generacionales a partir de datos obtenidos de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares Urbanos y Rurales (*ENIGHUR*) efectuada por el Instituto Nacional de Estadísticas y

ción en edad de trabajar PET corresponde a la población mayor a los 10 años. [http : //www.siise.gob.ec/siiseweb/PageWebs/Empleo/ficemp_T08.htm](http://www.siise.gob.ec/siiseweb/PageWebs/Empleo/ficemp_T08.htm)

⁸Estos resultados se encuentran publicados en <http://www.ecuadorencifras.gob.ec/empleo-diciembre-2014/>

⁹Un ciclo económico vital es un patrón de producción y consumo a lo largo del ciclo de vida.

Censos (*INEC*).

Como parte de estos resultados tenemos el siguiente gráfico.

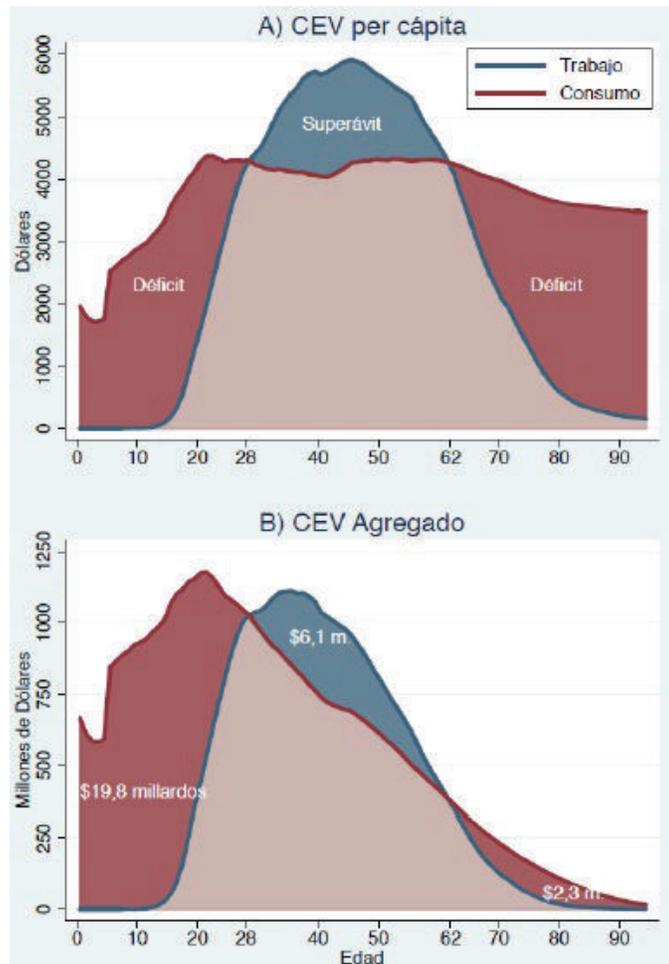


Figura 1.4: Ciclo económico vital Ecuador 2011.

Fuente: SENPLADES 2013 Subsecretaría de Información, Ecuador. El bono demográfico y sus implicaciones de política pública.

En el primer gráfico situado en la parte superior de la figura 1.4, se aprecia que las personas consumen más de lo que producen en los intervalos de edades menores a 28 y mayores a los 62 años de edad.

Por otro lado, se ve claramente que en el intervalo entre los 28 y 62 años el ecuatoriano promedio tiene un superávit, es decir produce más de lo que consume.

La curva azul que representa los ingresos laborales, alcanza un nivel máximo de aproximadamente \$6000 anuales en la edad 50, mientras que la curva roja que representa el consumo, a partir de los 20 años se mantiene casi constante hasta la edad 60, a partir de aquí disminuye lentamente.

Otra observación importante, es que el déficit generado por las edades avanzadas es mucho mayor al generado por el grupo de edad más joven.

En el gráfico que se ubica en la parte inferior de la figura, se aprecia la situación económica del país en conjunto, donde el déficit generado en las edades avanzadas es relativamente pequeño con respecto al generado por el grupo de edad mas joven. Sumando ambos déficits, tenemos que el superávit generado por el grupo de edad entre los 28 y 62 años es insuficiente para cubrir los déficits que generan los grupos de edad dependientes.

En cuanto a las transferencias generacionales que cubren el déficit generado por los grupos de edad vulnerables, podemos mencionar que existen tres tipos:

- Las que se genera en el núcleo familiar.
- Las que ocurre mediante el gobierno como intermediario.
- A través de la reasignación de recursos mediante la acumulación de activos en las edades productivas.

La distribución de tales tipos de transferencias la podemos apreciar en el siguiente diagrama.

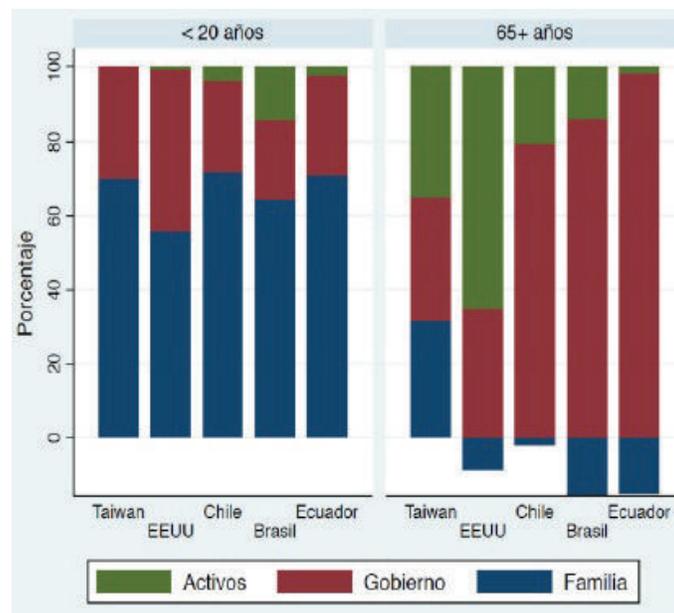


Figura 1.5: Distribución de tipos de transferencias generacionales.

Fuente: SENPLADES 2013 Subsecretaría de Información, Ecuador. El bono demográfico y sus implicaciones de política pública.

Como se observa en la gráfica anterior, en el Ecuador a diferencia de otros países la fuente más importante para financiar el déficit del grupo de edad avanzada es el gobierno en el cual mediante la recaudación de impuestos y aportes redistribuye tales recursos en servicios como salud, seguridad social, bonos de desarrollo humano y otras políticas dirigidas a la población senescente.

Ahora bien, si consideramos el período en el cual nuestro país termine su transición demográfica, la población de edades mayores a los 65 años va a tener un aumento bastante significativo, como se ve en la figura 1.1 afectando la adecuada redistribución de recursos a la población, esto quiere decir que el Estado tendrá que hacer una mayor inversión para este grupo de edad. Por ejemplo, se vería un efecto en la solvencia de los sistemas de pensiones o de seguridad social, ya que habiendo un mayor número de personas que reciben las pensiones por jubilación el Estado podría llegar a atravesar un déficit fiscal, esto porque el gasto que se tiene que realizar por cada pensionista se incrementaría conforme disminuyen las tasas de mortalidad. Es por este motivo que se considera importante el estudio de la mortalidad en los adultos mayores.

Uno de los primeros trabajos acerca de la mortalidad en los adultos mayores fue publicado en el año 1939 por Greenwood [10], en este estudio se establece que el incremento de la tasa de mortalidad con la edad presenta una disminución en las edades avanzadas. A partir de lo anterior surgen varias investigaciones en las cuales se llama a esta disminución como desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas (Late Life Mortality Deceleration).

Para el estudio de este fenómeno se utiliza la función fuerza de mortalidad¹⁰, denotada por μ . Como veremos mas adelante, esta función representa la tasa instantánea de que un individuo fallezca en un intervalo de tiempo pequeño. Uno de los ejemplos más importantes de esta función es la ley de mortalidad descubierta por Gompertz¹¹. Esta fórmula supone una fuerza de mortalidad que tiene un crecimiento exponencial. La propuesta de Gompertz supone que la fuerza de mortalidad tiene un comportamiento representado por la expresión:

$$\mu(x) = Ae^{\alpha x} \quad (1.4)$$

donde x representa la edad.

Tal expresión se ajusta muy bien dentro de gran parte del rango de edades, dando una excelente aproximación. Sin embargo, en edades altas correspondientes a la población envejecida este modelo no funciona adecuadamente.

Otros modelos han sido propuestos por diferentes autores, quienes sugieren que el crecimiento que presenta la ley de Gompertz toma un período de desaceleración en las edades altas, donde los valores de la función fuerza de mortalidad aumentan pero a un ritmo más lento.

Tomando el logaritmo natural de la expresión del modelo de Gompertz, tendríamos la

¹⁰En ramas como la Teoría de confiabilidad, esta función se la conoce como función hazard o función de tiempo de fallo

¹¹Benjamin Gompertz (Marzo 5 1779 – Julio 14 1865) fue un actuari y matemático autodidacta, llegó a ser miembro de la Royal Society, es muy conocido por la ley de Gompertz, modelo demográfico publicado en 1825

ecuación de una recta, la desaceleración de la mortalidad vendría dada por el desvío del comportamiento lineal para las edades avanzadas. En la siguiente figura se observa el comportamiento de este fenómeno.

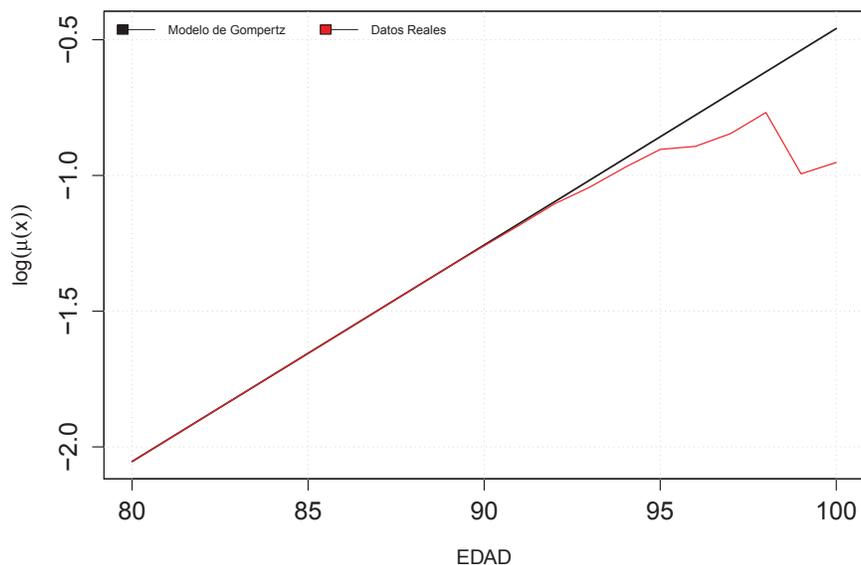


Figura 1.6: Desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas

Después de los 95 años el riesgo de muerte observado (línea roja) presenta un desvío del valor pronosticado por el modelo de Gompertz (línea negra).

Fuente:Elaboración propia

En el Ecuador, es de gran interés el estudio de la desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas, pues con el aumento de la población mayor a 65 años, pronosticado hasta el año 2050, se tiene el paso de una población joven a una envejecida. Esto trae muchas repercusiones en las políticas públicas, ya que al tener una mayor población envejecida aparecen problemas que deben ser afrontados por el Estado, por ejemplo el control de enfermedades predominantes en la vejez, esto es un problema de salud pública y seguridad social, pues como parte de los diferentes tratamientos pueden necesitarse medicamentos especiales como también médicos especialistas para tratar las enfermedades asociadas. Otra consecuencia de este fenómeno, sería que al tener una población envejecida numerosa, se vería afectada la economía per cápita del país, por lo que el gobierno se vería en la necesidad de traer gente joven adulta para continuar con el desarrollo de la economía, como es el caso actual de algunos países europeos, además de Japón, Corea del Sur y China.

En los estudios actuariales realizados en el Ecuador, no se considera el fenómeno de

desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas, por lo que este trabajo pretende ser un aporte a los estudios actuariales existentes.

Como objetivo principal de este trabajo, se propone identificar las edades a las que se presenta la desaceleración de la mortalidad. Contar con esta información permite conocer el perfil de mortalidad del grupo de población envejecida, lo cual permitirá establecer planes de pensiones más eficientes, donde se considere la probabilidad instantánea de morir que tiene un individuo.

En este trabajo se ajustará datos de mortalidad provenientes de tablas de vida de la población ecuatoriana a diferentes modelos, para posteriormente identificar la edad en la que se produce el fenómeno de desaceleración de la mortalidad. Los datos utilizados son provenientes de tablas de vida del Instituto Nacional de Estadística y Censos así como también un trabajo previo [14].

Capítulo 2

Análisis de los principales modelos utilizados

La distribución del tiempo en el que sucede un evento T sigue a menudo diferentes patrones. Estos han permitido a los estadísticos y matemáticos desarrollar una variedad de modelos para describir el proceso de la supervivencia y mortalidad. Tales modelos han sido empleados en ramas como la demografía y el análisis de confiabilidad en la industria.

En este capítulo se introduce algunas definiciones importantes relacionadas a la mortalidad estos son: la función de supervivencia, y la función fuerza de mortalidad. Para ello se revisará brevemente los conceptos asociados a las tablas de vida, basándonos principalmente en [3]. Posteriormente, haremos una breve revisión de algunos modelos de fuerza de mortalidad que han sido bastante utilizados en varios campos de las ciencias como la bioestadística, epidemiología, biología, gerontología, demografía, sociología y biomedicina.

2.1 Conceptos preliminares

El análisis de supervivencia comprende el estudio del tiempo que tarda en ocurrir un suceso, como la muerte de un individuo, lo cual puede interpretarse también como el tiempo de fallo de un sistema mecánico, esto último corresponde al área llamada teoría de la confiabilidad.

Para el análisis de supervivencia, generalmente se utiliza una variable aleatoria X que representa el tiempo que transcurre desde el instante de nacimiento de un individuo, hasta el instante de la muerte de este. Por facilidad, consideraremos a la variable aleatoria¹ X continua y positiva, la distribución de esta variable aleatoria se caracteriza por las siguientes funciones:

- Función de supervivencia.
- Función fuerza de mortalidad.

2.2 La función de supervivencia

Sea una variable aleatoria X positiva y continua, que representa la edad de muerte de un recién nacido o equivalentemente el tiempo que este sobrevive antes de morir. Sea $F_X(x)$ la función de distribución² de X , esto es:

$$F_X(x) = Pr(X \leq x) \text{ con } x \geq 0 \quad (2.1)$$

De este modo, la probabilidad de que un recién nacido sobreviva al menos x años, vendría dada por la siguiente expresión:

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x) \quad (2.2)$$

Conocida como **función de supervivencia**.

2.2.1 Propiedades

- Es monótona decreciente, es decir si $a > b$ entonces $S_X(a) \leq S_X(b)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x) = 0$, es decir todas las personas vivas eventualmente mueren.
- $S_X(0) = 1$, sin embargo puede darse el caso que $S_X(0) < 1$ cuando existe una probabilidad de muerte positiva en el momento $x = 0$

¹Ver Anexo A

²Ver Anexo A

Consideremos una persona con edad x , lo cual notaremos por (x) . Sea la variable aleatoria T_x , la cual denota el tiempo de vida futuro de (x) .

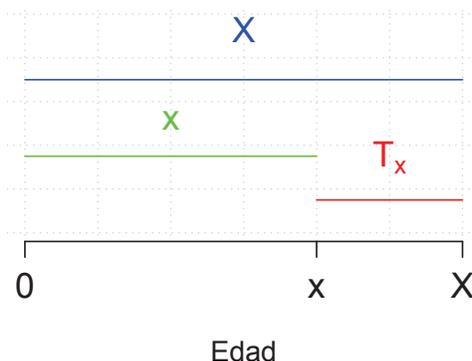


Figura 2.1: Tiempo de vida futuro T_x

Dentro de las ciencias actuariales, es necesario establecer enunciados probabilísticos acerca de esta variable aleatoria, para ello y con el fin de promover la investigación en este campo, se han adoptado entre la comunidad de actuarios un conjunto de símbolos, estos símbolos son parte de la Notación Actuarial Internacional³ donde se utiliza la siguiente terminología:

$${}_tq_x = Pr(T_x \leq t) \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr(T_x > t) \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

El símbolo ${}_tq_x$ se interpreta como la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca dentro de los próximos t años, es decir ${}_tq_x$ es la función de distribución de T_x . Por otro lado, ${}_tp_x$ se interpreta como la probabilidad de que un individuo con edad x alcance la edad $x + t$. Para el caso de un individuo de edad 0, tendríamos $T_0 = X$, por lo que se tiene:

$${}_xp_0 = S(x) \quad x \geq 0 \quad (2.5)$$

Por convención, para $t = 1$ se omite el prefijo t de las expresiones (2.3) y (2.4), con lo que se obtiene:

$$q_x = Pr((x) \text{ fallezca dentro de un año}) \quad (2.6)$$

$$p_x = Pr((x) \text{ alcance la edad } x + 1) \quad (2.7)$$

³International Actuarial Notation :<https://www.casact.org/pubs/proceed/proceed49/49123.pdf>

La probabilidad de que un recién nacido fallezca dentro de los próximos $x + t$ años dado que alcanzó la edad x es equivalente a escribir ${}_tq_x$, lo cual representa la probabilidad de que un individuo que alcanzó la edad x fallezca dentro de los próximos t años.

$${}_tq_x = P(X \leq x + t | X > x) \quad (2.8)$$

Utilizando la definición de probabilidad condicional⁴ se concluye lo siguiente:

$${}_tq_x = \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} \quad (2.9)$$

de donde resulta que:

$${}_tq_x = \frac{F_X(x + t) - F_X(x)}{P(X > x)} \quad (2.10)$$

$${}_tq_x = \frac{1 - P(X \geq x + t) - 1 + P(X > x)}{P(X > x)}$$

$${}_tq_x = \frac{P(X < x) - P(X \geq x + t)}{P(X > x)}$$

$${}_tq_x = \frac{S(x) - S(x + t)}{S(x)}$$

$${}_tq_x = 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)}$$

De aquí utilizando la expresión (2.4) tenemos que ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$, con lo que se puede obtener lo siguiente:

$${}_tp_x = \frac{S(x + t)}{S(x)} \quad (2.11)$$

2.3 La función fuerza de mortalidad

En la demografía y las ciencias actuariales es importante contar con una tabla que muestre el número de personas vivas a una edad exacta x (usualmente denotado por l_x), el número de muertes entre la edad x y $x + 1$ (usualmente denotado por d_x), y la probabilidad de muerte (denotada por $q_x = \frac{d_x}{l_x}$).

Ahora bien, desde un punto de vista estrictamente matemático y también por razones prácticas, es importante considerar los datos tabulados mencionados anteriormente, como los valores de funciones continuas l_x , d_x y q_x para valores enteros de la variable edad x . Por lo que se asume la existencia de una función continua l_x , cuyos valores para valores enteros de la variable edad, son iguales al número de individuos vivos a dicha edad y los valores entre las edades enteras proporcionan una aproximación del

⁴ver anexo A

número de individuos vivos en las edades intermedias.

De igual manera se supone la existencia de una función continua d_x , cuyos valores para valores enteros de x son iguales al número de muertes durante un año entre las edades x y $x + 1$, y cuyos valores intermedios proporcionan una aproximación del número de muertes dentro de un año durante el paso de tales edades no enteras.

Adicionalmente, es importante contar con una tasa instantánea de mortalidad como también una tasa de muerte promedio q_x .

Al mencionar la palabra "instantánea", lo primero que se nos ocurre es pensar en la derivada, por lo que más adelante de hallará que la tasa instantánea de mortalidad toma la forma de una derivada.

Considerando el número de muertes en un intervalo pequeño de edad Δx , tomando como punto de partida la edad x vendría dado por $l_x - l_{x+\Delta x}$, así la tasa promedio de muertes durante este intervalo de edad se puede definir como:

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x} \quad (2.12)$$

Para este caso la unidad de tiempo considerada es un año, se desea calcular la tasa de muerte promedio durante un año partiendo desde una edad x , lo cual puede ser calculado multiplicando (2.12) por uno sobre la longitud del intervalo de edad $\frac{1}{\Delta x}$.

Así, tomando el límite cuando el intervalo de edad tiende a ser cero, se define la tasa instantánea de muerte como el límite de la tasa de muerte promedio, es decir:

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x \cdot \Delta x} \quad (2.13)$$

La expresión anterior que representa una tasa instantánea como función de la edad x , es conocida como la función *fuerza de mortalidad*, denotada por el símbolo μ .

Comparando la expresión en (2.13) con la definición usual de derivada, se puede escribirla como sigue:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x = -\frac{d}{dx} \ln(l_x) \quad (2.14)$$

Ahora bien, sea l_0 un grupo de recién nacidos, $l_0 = 100000$ por ejemplo. Cada edad de muerte de un recién nacido tiene una distribución determinada por la función de supervivencia $S(x)$. Además, sea $L(x)$, el número de sobrevivientes a la edad x , inde-

xando a cada individuo mediante $j = 1, 2, \dots, l_0$ con lo que se obtiene:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j \quad (2.15)$$

donde I_j es una variable binaria que indica la supervivencia o no del individuo j , esta variable viene definida de la siguiente manera:

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } j \text{ sobrevive a la edad } x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dado que $E[I_j] = S(x)$, se tiene:

$$E[L(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 S(x) \quad (2.16)$$

Notando $E[L(x)]$ como l_x , se obtiene de la expresión anterior:

$$l_x = l_0 S(x). \quad (2.17)$$

Reemplazando la igualdad anterior en (2.14), con lo cual se tiene:

$$-\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x = -\frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} S(x) = \mu(x) \quad (2.18)$$

Para este estudio es necesario conocer los valores correspondientes a $\mu(x)$, estos serán calculados mediante la siguiente expresión

$$\mu(x) = -\ln(1 - q_x) \quad (2.19)$$

A continuación se procede a demostrar esta igualdad.

Para ello se parte la expresión (2.18) escribiéndola de la siguiente manera:

$$-\mu(y)dy = d\ln(S(y))$$

integrando esta expresión desde x a $x + n$, se tiene:

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln\left(\frac{S(x+n)}{S(x)}\right)$$

Ahora utilizando la igualdad (2.15) con lo que resulta:

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln({}_n p_x)$$

De aquí, gracias a que la función exponencial es inyectiva se obtiene:

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu(y)dy}$$

reescribiendo la expresión anterior tomando el cambio de variable $s = y - x$ se tiene lo siguiente:

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu(x+s)ds} \quad (2.20)$$

Finalmente, dado que en este trabajo se supone que $\mu(x+t) = \mu$ para todo $0 \leq t \leq 1$, es decir la fuerza de mortalidad es constante en el intervalo unitario, además como la unidad de medida es un año, se considera $n = 1$ en (2.20),

$$\begin{aligned} \ln(p_x) &= -\int_0^1 \mu ds \\ \mu(x) &= -\ln(1 - q_x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Con lo cual la expresión (2.19) queda demostrada.

2.4 Algunos modelos paramétricos

En esta sección, se hace una revisión de algunos modelos de supervivencia.

Entre los modelos que se revisarán a continuación se tiene: La distribución exponencial, el modelo de Gompertz, el modelo de Makeham Gompertz, el modelo de Weibull, el modelo logístico, Gompertz logístico, frailty logístico, y una distribución propuesta en el trabajo de Mark Bebbington [2], en donde recomienda su uso pues se ajusta muy bien a los datos de mortalidad en edades avanzadas.

2.4.1 La distribución exponencial

Es el modelo paramétrico más simple que sirve como punto de partida para después entender modelos más complejos.

Posee un único parámetro λ . Asume un riesgo constante sobre el tiempo, esto refleja

una propiedad importante de tal distribución, la pérdida de memoria⁵. La probabilidad de fallo en un intervalo de tiempo, depende sólo de la longitud del intervalo más no de dónde el intervalo esté localizado. Debido a esta propiedad, la probabilidad de que un individuo fallezca en un lapso específico depende nada más de la duración de éste y no del tiempo en que el individuo ha sobrevivido.

Esta propiedad hace que el modelo exponencial sea una mala elección para modelar la mortalidad humana. El parámetro λ puede tomar valores positivos, y la distribución con $\lambda = 1$ se llama exponencial estándar. Las siguientes fórmulas pueden ser derivadas de las definiciones usuales, mediante cálculos algebraicos simples.

Función de densidad de probabilidad	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0)$
Función de supervivencia	$S(x) = e^{-\lambda x}$
Función fuerza de mortalidad	$\mu(x) = \lambda$
Esperanza	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
Varianza	$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Tabla 2.1: Propiedades de la distribución exponencial

La distribución exponencial ha sido muy utilizada en estudios de confiabilidad de componentes electrónicos y sistemas técnicos, esta es un caso especial de la distribución de Weibull y la distribución de Gompertz, como se verá más adelante. A continuación se observa el siguiente ejemplo de un gráfico de una función fuerza de mortalidad para el modelo exponencial.

⁵Una variable aleatoria X se dice que es sin memoria si: $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$ para todo $s, t \geq 0$

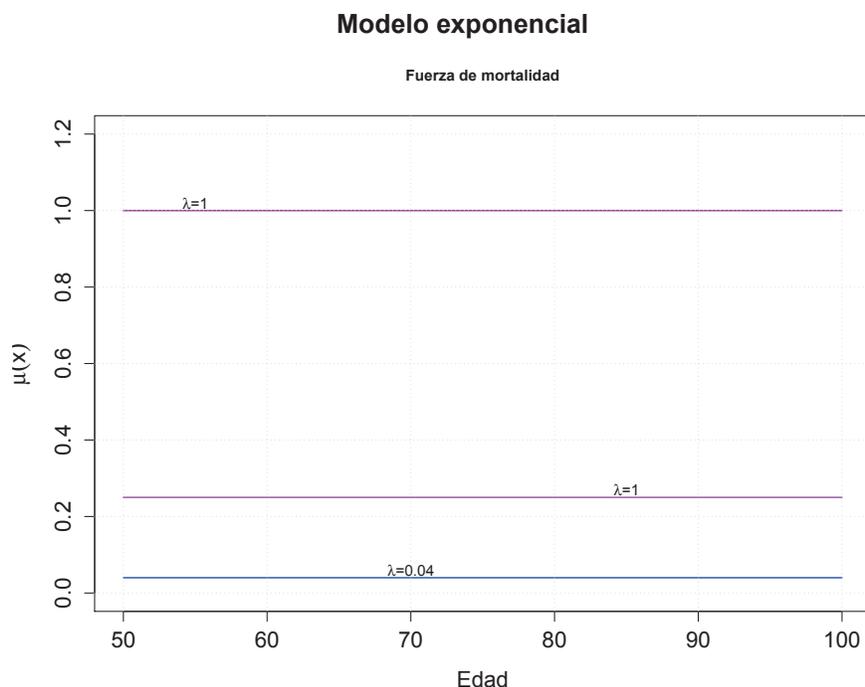


Figura 2.2: Función Fuerza de Mortalidad para la Distribución Exponencial con $\lambda = 0,02$

Fuente: Elaboración propia

2.4.2 La distribución de Gompertz

Es una distribución de probabilidad continua, esta es utilizada para estimar las esperanzas de vida en la edad adulta. Fue propuesta por Benjamin Gompertz en 1825. Es de gran interés entre la comunidad de actuarios y demógrafos en el análisis de supervivencia. En un trabajo reciente se la utilizó para modelar los tiempos de fallo de códigos de computadora [17].

Función de densidad de probabilidad	$f(x) = Ae^{-\frac{x}{\alpha}} e^{A\alpha(1-e^{-\frac{x}{\alpha}})}$
Función de supervivencia	$S(x) = e^{A\alpha(1-e^{-\frac{x}{\alpha}})}$ $A, \alpha > 0$
Función fuerza de mortalidad	$\mu(x) = Ae^{\frac{x}{\alpha}}$

Tabla 2.2: Propiedades distribución de Gompertz

2.4.3 La distribución de Weibull

Esta distribución fue propuesta en 1939 por el físico sueco Waloddi Weibull⁶ quien representó con este modelo la distribución de la resistencia a la ruptura de ciertos ma-

⁶Waloddi Weibull: 18 de junio de 1887-Annecy, 12 de octubre de 1979. Fue un ingeniero y matemático sueco. Es reconocido por su trabajo en el área de la fatiga de materiales y en la estadística por sus estudios sobre la distribución de Weibull.

teriales, luego en 1951 la utilizó para una variedad de aplicaciones. Esta distribución es una de las más utilizadas en el modelamiento de tiempos de vida en teoría de confiabilidad.

Función de densidad de probabilidad	$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \quad (\lambda, \alpha > 0)$
Función de supervivencia	$S(x) = e^{-(\lambda x)^\alpha} \quad \alpha, \lambda > 0$
Función fuerza de mortalidad	$\mu(x) = \alpha \lambda (\lambda x)^{\alpha-1}$
Esperanza	$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$
Varianza	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^2 \right\}$

Tabla 2.3: Propiedades de la distribución de Weibull

Notar que cuando $\alpha = 1$, la distribución de Weibull se reduce a una distribución exponencial con parámetro λ . En efecto, si una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial, entonces la variable aleatoria $\frac{X}{\lambda}$ tiene función de supervivencia $S(x) = e^{-(\lambda x)^\alpha}$.

Además se tiene de la expresión anterior que $\mu(x)$ es creciente en x para $\alpha \geq 1$ y decreciente para $\alpha \leq 1$.

Modelo de Weibull

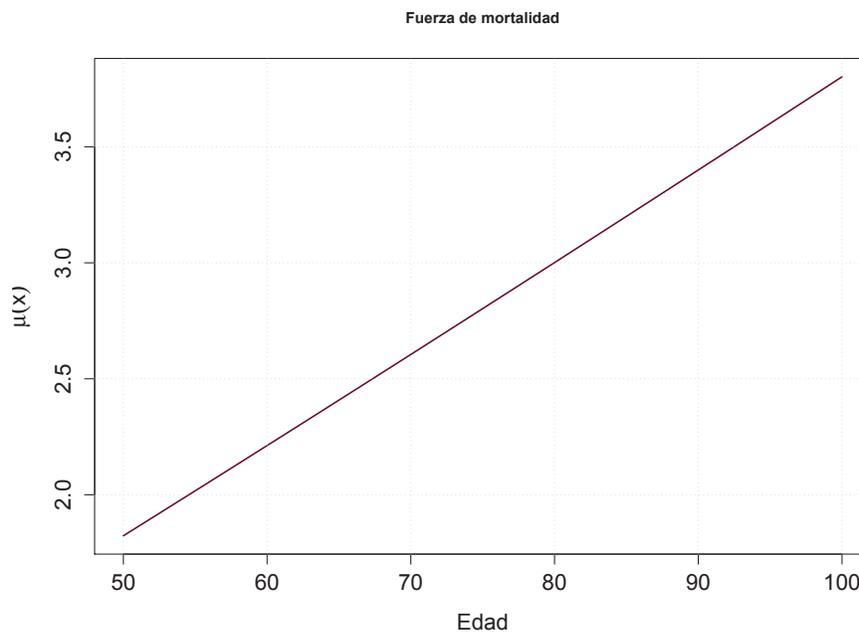


Figura 2.3: Función fuerza de mortalidad para la distribución de Weibull con parámetros $\lambda = 0,014$, $\alpha = 2,05$

Fuente: Elaboración propia

2.5 El modelo frailty logístico

Algunos autores, como es el caso de Yashine[27] y Vaupel [23] encontraron que el modelo de Gompertz no ajustaba correctamente la mortalidad en edades adultas por lo que proponen un modelo *frailty-logístico*.

Este modelo incorpora un parámetro s que determina el grado con el cual la tasa de mortalidad decrece en la edad adulta. Cuando s toma un valor muy grande la desaceleración de la mortalidad es mayor mientras que si $s = 0$ la ecuación anterior se reduce al modelo de Gompertz usual. La función fuerza de mortalidad viene dada por la siguiente expresión.

$$h(t) = \frac{Ae^{\frac{t}{\alpha}}}{1 + sA\alpha(e^{\frac{t}{\alpha}} - 1)} \quad (2.22)$$

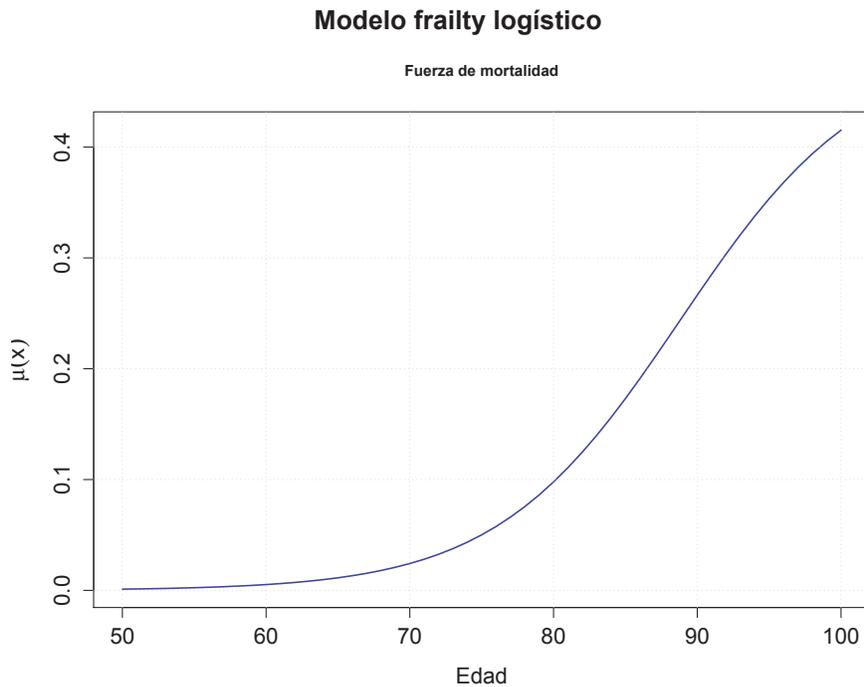


Figura 2.4: Función fuerza de mortalidad para la Distribución Logística Frailty con parámetros $A = 4,3 * 10^{-7}$, $s = 0,568$, $\alpha = 0,157$

Fuente: Elaboración propia

2.5.1 La ley de Makeham

Esta ley fue propuesta por Makeham⁷ quien manifestó que el modelo de Gompertz podía ser mejorado añadiendo un término constante, por lo que esta ley tiene la forma:

$$\mu(x) = c + ae^{bx} \quad (2.23)$$

donde la constante c se la considera como el riesgo de muerte por cualquier causa independiente de la edad x .

2.5.2 El modelo logístico

El modelo logístico es conocido actualmente bajo una variedad de nombres. Fue descubierto por Perks(1932), encontró empíricamente que los valores de $\mu(x)$ en una tabla de vida que estaba examinando podía ser ajustada por una curva logística. El modelo mas general tiene 4 parámetros independientes, tiene la forma:

$$\mu_x = \frac{\kappa z}{1 + z} + \gamma \quad (2.24)$$

donde

$$z = \alpha \cdot \exp(\beta x) \quad (2.25a)$$

$$= \exp(\beta(x - \theta)), \quad \theta = \frac{-\ln(\alpha)}{\beta} \quad (2.25b)$$

Este modelo fue ajustado a datos de 13 países industrializados [22], el ajuste mostró que κ era cercano a 1, lo cual llevó a considerar el siguiente modelo.

$$\mu_x = \frac{z}{1 + z} + \gamma \quad (2.26)$$

donde z se define como en (2.25a).

Si reemplazamos la ecuación (2.25a) en la ecuación (2.26), los parámetros a estimar son tres α, β y γ , luego si utilizamos la ecuación (2.25b) en (2.26), los parámetros a estimar son θ, β y γ .

Este modelo presenta dos propiedades importantes:

- Si z toma valores muy pequeños (edades > 70 años) entonces

$$\mu_x \approx \alpha \cdot \exp(\beta x) + \gamma \quad (2.27)$$

que es la ley propuesta por Makeham (1860).

⁷William Matthews Makeham (1826~1891) fue un actuari y matemático inglés, propuso el término independiente de la edad en la ley de Gompertz.

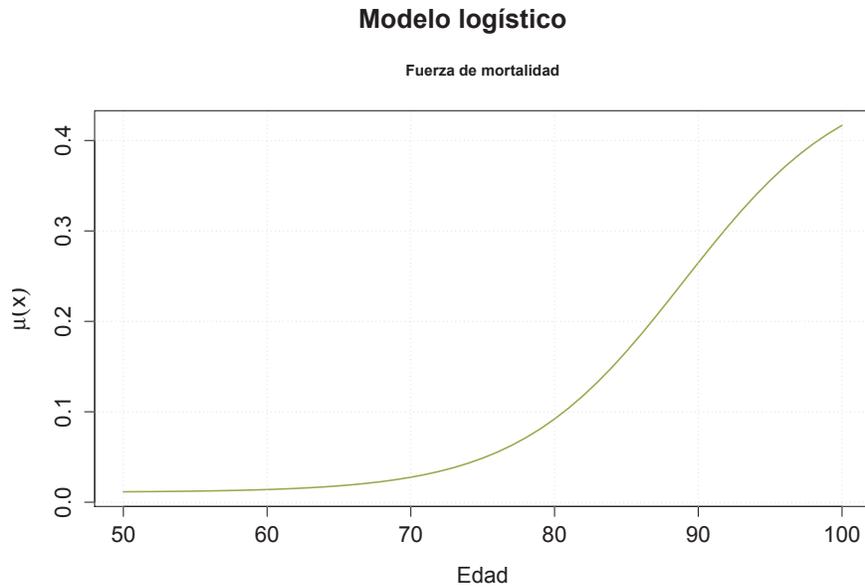


Figura 2.5: Función fuerza de mortalidad para la distribución Logística con parámetros $\gamma = 0,011$, $k = 0,465$, $A = 1,9 * 10^{-7}$, $\alpha = 0,174$

Fuente: Elaboración propia

- Cuando γ toma valores pequeños comparados con $\frac{z}{1+z}$, lo cual se evidencia en edades avanzadas, en el modelo (2.26) se tiene que:

$$\text{logit}(\mu_x) \approx \ln(\alpha) + \beta \cdot x \quad (2.28)$$

2.5.3 El modelo Gompertz logístico

Este modelo, fue propuesto por Steinsaltz[20], tiene 4 parámetros y la forma de una distribución logística generalizada. A su vez posee dos términos similares al modelo de Gompertz.

$$\mu(x) = k \frac{1 + Ae^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}} \quad (2.29)$$

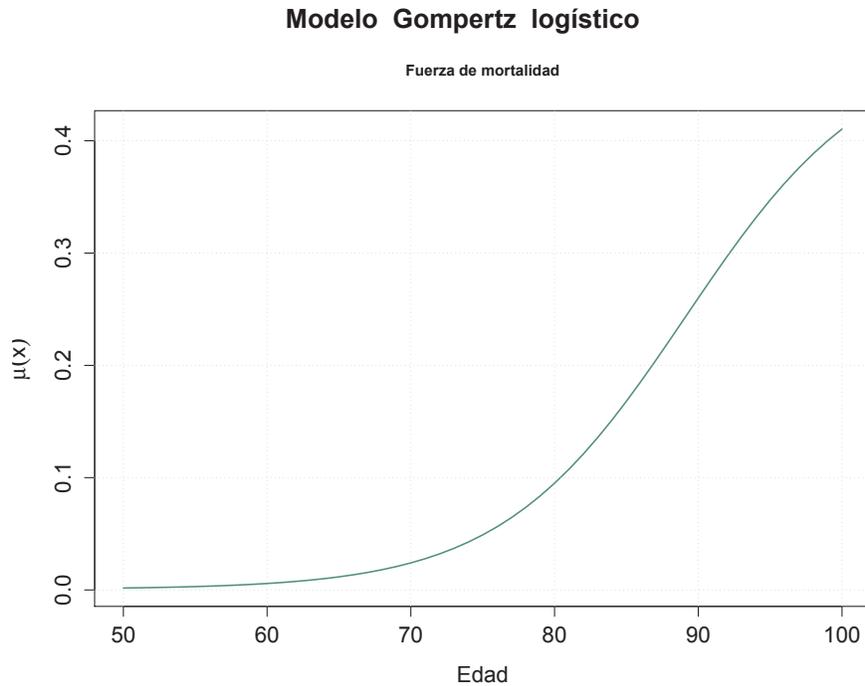


Figura 2.6: Función fuerza de mortalidad para el modelo Gompertz logística con parámetros $k = 6,2 * 10^{-4}$, $A = 7,2 * 10^{-4}$, $B = 9,2 * 10^{-7}$, $\alpha = 0,156$

Fuente: Elaboración propia

2.5.4 Teoría de Strehler Mildvan

La teoría de Strehler y Mildvan [21], sugiere una relación entre la vitalidad definida como la máxima capacidad de energía que tiene un individuo de edad x , la denotaremos por $v(x)$ y se considerará un modelo de mortalidad con la siguiente forma:

$$\mu(x) = \exp(-v(x)) \quad (2.30)$$

Una disminución lineal en la vitalidad, vendría dada por la siguiente expresión:

$$v(x) = v(0) - \alpha x = -\ln(A) - \alpha x \quad (2.31)$$

lo cual nos llevaría a la ley de Gompertz.

Weitz y Fraser [26], generalizaron tal disminución como un proceso de Wiener con variación (Wiener process with drift)⁸, resultando así un modelo de mortalidad el cual a partir de un punto se estabiliza, particularmente a esta forma se la conoce como forma de bañera (bathtub shape).

La adición de una tasa de recuperación, igualmente decrece linealmente con la edad, esto produce una función de mortalidad exponencial cuadrática [11]. Golubev [8], propone una ley de Gompertz generalizada, donde la mortalidad tiene un factor depen-

⁸Ver anexo A4

diente de la edad, teniendo así en la fuerza de mortalidad.

$$\mu(x) = \Lambda(x) \exp(-v(x)) \quad (2.32)$$

2.6 Un modelo de mortalidad flexible

Mark Bebbington[2], introdujo un modelo que puede representar una gran variedad de formas de funciones de fuerza de mortalidad, que pueden ser, crecientes, decrecientes, no monótonas o niveladas. El fenómeno de desaceleración de la mortalidad es difícil de estimar, ya que solo una pequeña porción de los datos es representativa.

En lugar de considerar un decaimiento lineal en la vitalidad como en la ecuación (2.30) junto con una función de recuperación, se combinan ambos en una expresión de la forma:

$$v(x) = cx^{-d} \quad (2.33)$$

donde c y d son parámetros [25].

Notemos que la ecuación (2.33) es no negativa, esto nos permite considerar una variación en la tasa neta de disminución de la vitalidad con la edad. Se asume además un factor de mortalidad que depende de la edad.

$$\Lambda(x) = A_0 x^b \quad (2.34)$$

reemplazando la expresión anterior en (2.32) con $b \in \mathbb{R}$ tenemos la función fuerza de mortalidad:

$$\mu(x) = A_0 x^b \exp(-cx^{-d}) \quad (2.35)$$

Posteriormente de acuerdo al trabajo de Pletcher [18], es necesario adicionar un parámetro $a \geq 0$, denominado el parámetro de Makeham, mismo que evita que la estimación de la aceleración de la mortalidad tenga un sesgo, esto además modifica la esperanza de vida (Bebbington et al. 2008b). Además los autores sugieren que el uso del parámetro A_0 , no es necesario pues este parámetro es un factor de escala, este factor reescalaría la fuerza de mortalidad en el eje x y reparametrizaría esta función en términos de c . Por lo cual el autor sugiere el uso de $A_0 = dc^{-(b+1)/d}$.

La fuerza de mortalidad obtenida, tendría la siguiente forma:

$$\mu(x) = a + A_0 x^b \exp(-cx^{-d}) \quad (2.36)$$

A partir de esta función fuerza de mortalidad, obtenemos la función de sobrevivencia utilizando la definición

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(a + A_0 \int_0^x y^b e^{-cy^{-d}} dy\right) \\ &= \exp\left(-ax - \Gamma(-(b+1)/d, cx^{-d})\right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde $\Gamma(w, z) = \int_z^\infty y^{w-1} e^{-y} dy$, es la función gamma incompleta superior. Sustituyendo $b^* = -(b+1)/d$ en 2.37, se tiene

$$S(x) = \exp\left(-ax - \Gamma(b^*, cx^{-d})\right) \quad (2.39)$$

Luego, dado que la función fuerza de mortalidad se define como $-\frac{d}{dx} \ln S(x)$ y además la derivada de la función Gamma incompleta se define por $\Gamma(a, x) = \int_0^x -x^{a-1} \exp(-x)$ tenemos que:

$$\mu_\Gamma(x) = a + \frac{c^{b^*} d}{x^{1+db^*}} \exp(-cx^{-d}) \quad (2.40)$$

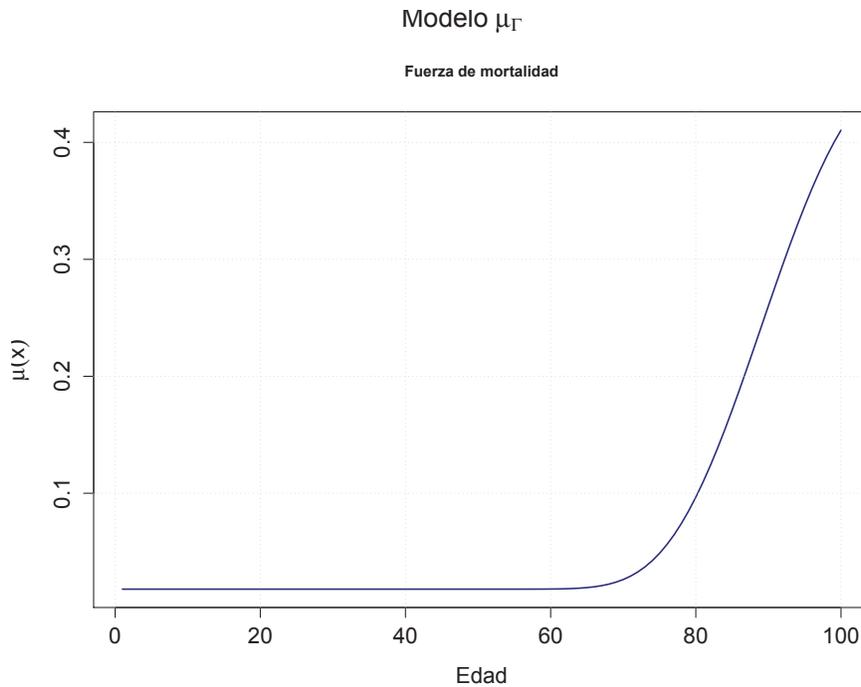


Figura 2.7: Función fuerza de mortalidad para μ_Γ con parámetros $a = 0,018$, $b = 5$, $c = 2,5 \cdot 10^5$, $d = 2,29$

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 3

El fenómeno de desaceleración de la mortalidad

Según la ley de Gompertz, la fuerza de mortalidad aumenta con el avance de la edad tomando una forma creciente, sin embargo, en las edades avanzadas los niveles de mortalidad pueden ser sobre estimados, es decir la tasa de mortalidad aumenta pero mas lentamente que de forma lineal , incluso ésta puede curvar con una tendencia a ser constante.

En este capítulo, se presenta dos métodos para determinar la edad en la que se presenta este fenómeno. Estos han sido propuestos por Mark Bebbington[2] y Shiro Horiuchi[12]. Tales métodos utilizan la función fuerza de mortalidad y sus derivadas.

3.1 Un poco de historia

Históricamente, el estudio de la mortalidad en edades avanzadas es muy extenso por lo que se tienen varios resultados importantes. Los primeros estudios empezaron con Gompertz [9], él sugirió que su ley de mortalidad propuesta, no se aplica en edades correspondientes a las personas mayores.

En 1939, dos investigadores británicos Greenwood e Irwin, en su artículo[10] explican que la fuerza de mortalidad detiene su incremento con la edad en edades extremadamente altas y tiende a tomar un valor constante. Además, Greenwood formuló lo siguiente: " El incremento de la tasa de mortalidad en edades avanzadas aumenta, sin embargo este incremento se da de una manera lenta, por lo que casi todos los métodos de ajuste de tipo Gompertz sobre estiman la mortalidad senil " .

Tal observación fue reportada años después por algunos autores (Gavrilov y Gavrilova [7], Horiuchi [12],[13] y Tatcher [22]). Tal incremento que se da de una manera lenta, es el que se lo conoce actualmente como el fenómeno de desaceleración de la morta-

lidad en edades avanzadas (Late Life Mortality deceleration). Tales autores sugieren también la posibilidad de que en edades avanzadas, la tasa de mortalidad tienda a un valor finito. Sus conclusiones fueron respaldadas después por otros investigadores, entre ellos Economos [6], quien reportó que este fenómeno se da en humanos y animales de laboratorio (decremento lineal para el logaritmo del número de sobrevivientes).

Por otra parte, Greenwood e Irwin [10], hicieron las primeras estimaciones para valores asintóticos de mortalidad humana a edades altas usando datos de una compañía aseguradora. De acuerdo a sus estimaciones, los valores límite de q_x fueron 0,439 para mujeres y 0,544 para hombres. Posteriormente, se calcularon nuevas estimaciones utilizando datos más adecuados y se obtuvieron estimaciones muy cercanas a las halladas por Greenwood e Irwin.

Entre los estudios que se realizaron después, podemos mencionar a Robine y Vaupel [19] quienes dieron una explicación del por qué sucede este fenómeno. Según estos autores, las personas con edades avanzadas viven en un entorno donde cuentan con mayor protección, a diferencia de las personas más jóvenes, que están expuestas a un mayor riesgo, este puede deberse a accidentes u otras causas, por lo tanto las personas mayores tienen un riesgo mas bajo de muerte que el predicho por la ley de Gompertz.

Muchos actuarios, entre ellos el mismo Gompertz después de notar el fenómeno de desaceleración de la mortalidad, propusieron una fórmula logística para ajustar el crecimiento de la mortalidad con la edad con el fin de considerar el nivelamiento de la mortalidad a edades avanzadas [1].

El fenómeno de desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas, ha sido también detectado en otras especies. En algunas de ellas la desaceleración de la mortalidad ocupa gran parte de su vida, este resultado fue hallado por Carey [15]. En su estudio se encontró que había un decremento en las tasas de mortalidad a edades altas en una población de 1,2 millones de moscas de fruta.

En otras áreas como la biología, este fenómeno ha sido conocido desde los años 60, por ejemplo Lindop [16] aplicó un modelo logístico con el fin de considerar la desaceleración de la mortalidad en ratones. George Sacher creyó que tal característica en los ratones se podía explicar por la heterogeneidad de la población. Un efecto de la heterogeneidad de la población es que esta conduce a una pendiente decreciente del modelo de Gompertz en edades avanzadas, esto ocurre porque sub poblaciones con alto nivel de riesgo de muerte fallecen más rápidamente.

Mark Bebbington en su trabajo [2], propuso una función para ajustar datos de mortalidad a una población de mujeres de Suecia, también utilizó datos de la misma población empleados por Carey, mediante el cálculo de las derivadas de esta función encontró las edades en las que se presenta la desaceleración de la mortalidad.

En la actualidad los demógrafos y actuarios utilizan una serie de modelos logísticos para modelar la función fuerza de mortalidad, luego se utilizan ciertos métodos como los que mencionaremos a continuación.

3.2 Dos alternativas para encontrar la edad en que se presenta la desaceleración de la mortalidad

En este trabajo se propone dos formas para determinar la edad a la que la desaceleración de la mortalidad comienza, ambos utilizan la función fuerza de mortalidad, la cual la ajustaremos a los datos obtenidos de las tablas de vida.

Los métodos que se presentarán son la tasa de envejecimiento de la tabla de vida y también uno que considera las derivadas de la función fuerza de mortalidad como la velocidad y aceleración, respectivamente.

3.2.1 Tasa de Envejecimiento de la Tabla de Vida LAR

Una de las formas más utilizadas para detectar patrones de aceleración o desaceleración en la mortalidad, es la tasa específica de mortalidad por edad, también conocida como tasa de envejecimiento calculada a partir de la tabla de vida o como lo indican sus siglas en inglés (LAR Life-Table Aging Rate).

Esta medida fue propuesta por Horiuchi and Coale en 1990 en su artículo[12].

Este valor se define como la derivada del logaritmo natural de la función fuerza de mortalidad con respecto a la edad:

$$k(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\frac{d}{dx} \mu(x) \right) = \frac{d}{dx} \ln(\mu(x)) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \quad (3.1)$$

donde $\mu(x)$ es la fuerza de mortalidad o tasa de mortalidad instantánea a la edad x para la población en estudio.

Así, el comienzo de la desaceleración de la mortalidad, será el punto en el cual u'/u disminuya.

El valor LAR , como lo llamaremos de ahora en adelante, mide el incremento de la mortalidad con respecto a la edad. Así una disminución de LAR nos indica desaceleración de la mortalidad, mientras que, un aumento de su valor nos indica aceleración de la misma.

Utilizando el valor de LAR podemos ver que el modelo de Gompertz no es adecuado para detectar patrones de desaceleración de la mortalidad, basta que utilicemos la definición anterior con el modelo de Gompertz. Esto nos daría como resultado lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 k(x) &= \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} & (3.2) \\
 &= \frac{\frac{A}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}}}{A e^{\frac{x}{\alpha}}} \\
 &= \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $k(x) = \frac{1}{\alpha}$, es decir el modelo de Gompertz, supone que la fuerza de mortalidad varía a una tasa constante para todas las edades. Lo cual contradice la suposición de que la fuerza de mortalidad aumenta pero a un ritmo más lento, es decir el valor de $k(x)$ disminuye en las edades avanzadas, por lo que no sería constante.

3.2.2 Definiciones basadas en la función fuerza de mortalidad

Vaupel en su trabajo [24], asume que la fuerza de mortalidad por edad es la posición de un objeto en un instante de tiempo. Luego, considera que la primera derivada de la posición del objeto con respecto al tiempo es la velocidad y la segunda derivada es la aceleración de la mortalidad

Así, una forma para medir el comienzo de la desaceleración de la mortalidad es estimar el valor donde la velocidad de la mortalidad tiene un máximo, es decir donde la segunda derivada vale cero. Además si calculamos la edad correspondiente donde la aceleración tiene su punto máximo, obtendremos la edad donde la fuerza de mortalidad empieza a disminuir.

Otras definiciones importantes son las propuestas por Mark Bebbington en su trabajo 'Modelling Deceleration in Senescent Mortality' [2] donde al igual que Vaupel, considera la velocidad y aceleración de la mortalidad como la primera y segunda derivadas de la función fuerza de mortalidad, respectivamente.

Además propone las siguientes definiciones que consisten en una análisis de la convexidad de la función $\mu(x)$, para lo cual hay que analizar su signo.

DEFINICIÓN 5. *La fuerza de mortalidad μ se incrementa y acelera (UIA) si y solo si existe una edad x^* tal que $\mu'(x) > 0$ y $\mu(x)'' > 0$ para todo $x > x^*$. Bajo estas circunstancias, se dice que no hay desaceleración de la mortalidad en edades avanzadas.*

EJEMPLO 1. Examinemos la función fuerza de mortalidad tipo Weibull. Recordemos que esta está dada por la siguiente expresión

$$\mu(x) = \gamma\beta(\beta x)^{\gamma-1}$$

con $\gamma, \beta > 0$ y $x > 0$

Además, la primera y segunda derivadas de esta función vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu'(x) = \gamma(\gamma - 1)\beta^2(\beta x)^{\gamma-2}$$

$$\mu''(x) = \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)\beta^3(\beta x)^{\gamma-3}$$

Ahora bien, notemos que si $\gamma > 2$, tanto $\mu'(x) > 0$ como $\mu''(x) > 0$ para todo $x > 0$, es decir $x^* = 0$. Por lo que la distribución de Weibull con parámetro $\gamma > 2$ no presenta el fenómeno que buscamos.

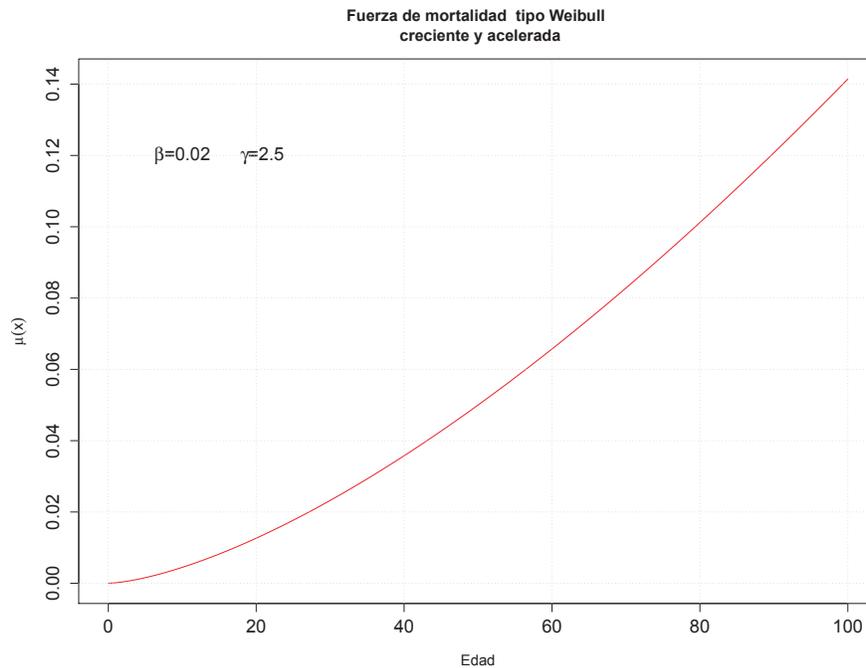


Figura 3.1: Fuerza de mortalidad tipo Weibull creciente y acelerada

DEFINICIÓN 6. La fuerza de mortalidad μ se incrementa y desacelera (UIA) si y solo si existe una edad x^{**} tal que $\mu'(x) > 0$ y $\mu(x)'' < 0$ para todo $x > x^{**}$. El valor de x^{**} más pequeño se denota por x_{ODV} (Onset of decreasing velocity). El primer máximo local de la función μ'' a la izquierda de x_{ODV} se denota x_{ODA} (Onset of decreasing acceleration).

EJEMPLO 2. EL modelo frailty logístico definido en (2.22)

$$\mu(x) = \frac{Ae^{\alpha x}}{1 + s^2(e^{\alpha x} - 1)\frac{A}{\alpha}}$$

Las derivadas de esta función están dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu'(x) = \frac{Ae^{\alpha x}(\alpha - As^2)\alpha^2}{(A(e^{\alpha x} - 1)s^2 + \alpha)^2}$$

A partir de la expresión anterior se tiene lo siguiente, μ es decreciente cuando $\alpha < As^2$, constante cuando $\alpha = As^2$ y creciente cuando $\alpha > As^2$.

$$\mu''(x) = \frac{Ae^{\alpha x}(As^2 - \alpha)(As^2(1 + e^{\alpha x}) - \alpha)\alpha^3}{(As^2(e^{\alpha x} - 1) + \alpha)^3}$$

Si $\alpha = As^2$ es trivial, cuando $\alpha < As^2$ μ'' es positiva. Cuando $\alpha > As^2$, existe una solución única para $\mu''(x) = 0$ en $x_0 = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha - As^2}{As^2}\right)$, con lo que $\mu''(x) < 0$ para todo $x > x_0$. Cuando $\alpha > As^2$, μ es (UID) con el comienzo de la desaceleración de la velocidad en $x_{ODV} = 0$ si $\alpha \leq 2As^2$ o x_0 si $\alpha \geq 2As^2$.

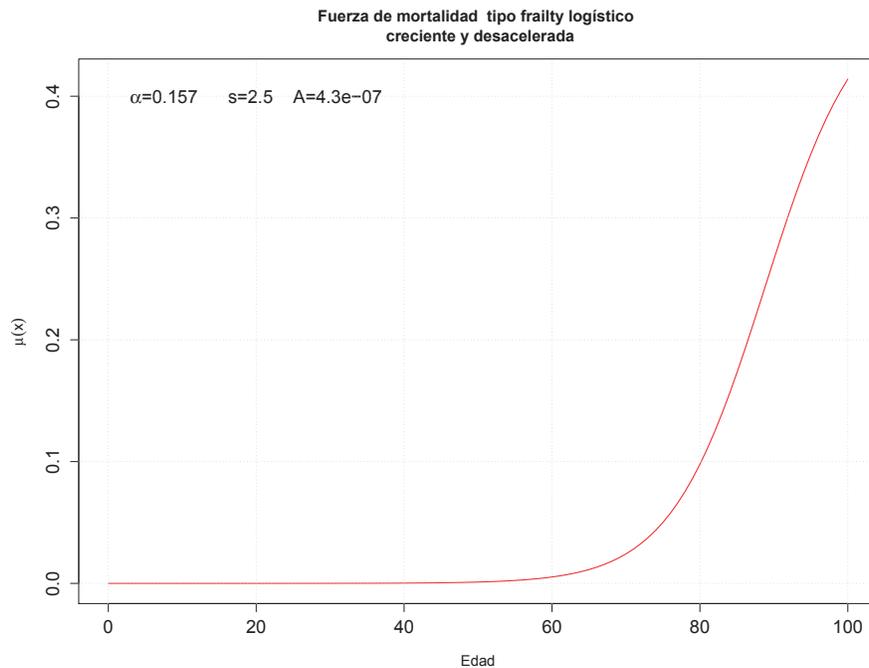


Figura 3.2: Fuerza de mortalidad tipo frailty logístico creciente y desacelerada

Capítulo 4

Ajuste de los modelos propuestos a datos de población ecuatoriana

En este capítulo se describe el proceso de ajuste de los datos de mortalidad a los diferentes modelos expuestos en el segundo capítulo. Los datos se ajustarán a las diferentes funciones fuerza de mortalidad minimizando la suma de cuadrados.

Los datos que se utilizarán son los correspondientes a las edades mayores a 65 años, pues según la Constitución del Ecuador a partir de esta edad una persona es considerada un adulto mayor. Además, para este trabajo la población de interés es la del grupo edad avanzada más no la población joven. Según Steinsaltz [20] incluir valores de fuerza de mortalidad correspondientes a la población joven repercute en la precisión de los ajustes haciendo que las estimaciones no sean las adecuadas.

4.1 EL problema de mínimos cuadrados.

Supongase que tenemos n valores x_1, x_2, \dots, x_n , con sus respectivos valores respuesta y una función no lineal f , la cual depende de parámetros desconocidos. Los parámetros estimados se determinarán como los parámetros que mejor ajusten la función no lineal f a las observaciones y_1, y_2, \dots, y_n . Tales parámetros se obtendrán minimizando la suma de residuos al cuadrado (**RSS**) con respecto un parámetro β :

$$RSS(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta))^2 \quad (4.1)$$

El proceso de minimizar (4.1), se lo conoce como estimación por mínimos cuadrados. La solución de este problema de minimización son los estimadores de los parámetros obtenidos por mínimos cuadrados, que serán denotados por $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$.

Estas estimaciones, son los valores de β que hacen que (4.1) sea lo más pequeño posible. En otras palabras, decimos que el mínimo global de $RSS(\beta)$, se alcanza cuando $\beta = \hat{\beta}$. Notar que en contraste a la regresión lineal, la minimización de (4.1) es un problema no lineal, debido a la no linealidad de f , y por lo tanto será necesario utilizar métodos de optimización numérica.

Tales métodos, son procesos iterativos que aproximan los valores óptimos del parámetro paso a paso. En cada paso, los algoritmos determinan un nuevo valor del parámetro basado en los datos, el modelo y los valores actuales del parámetro. Para ello, el algoritmo más común para la estimación en la regresión no lineal, es el método de Gauss-Newton, que consiste en aproximaciones lineales a la función no lineal en cada paso.

La idea del método de mínimos cuadrados se ilustra en el siguiente gráfico, donde se observa las distancias dadas por $y_i - f(x_i, \beta_i)$ (color rojo), la suma de estas distancias elevada al cuadrado es la función no lineal que se desea minimizar.

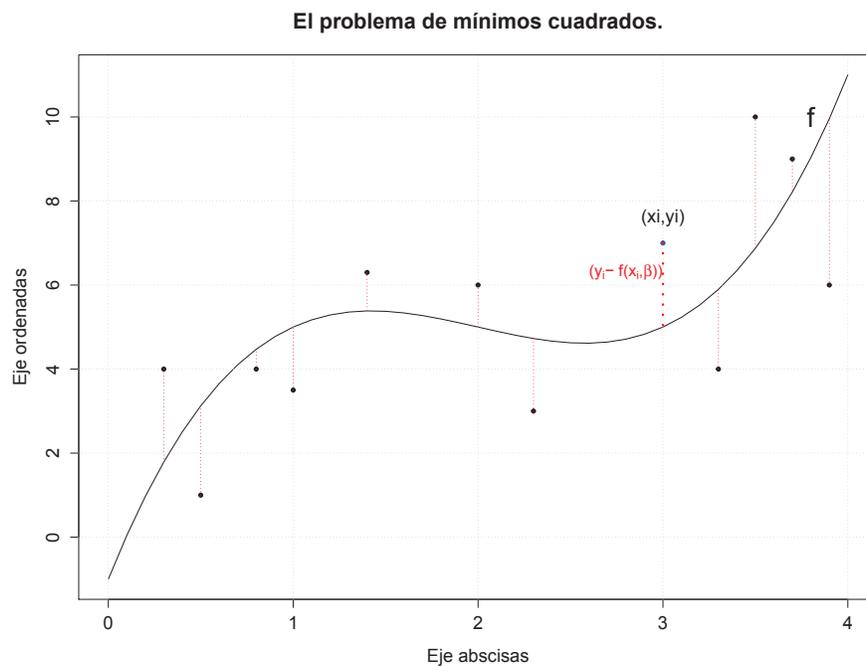


Figura 4.1: El problema de mínimos cuadrados.

Es importante mencionar que la optimización numérica no es perfecta. Dos de las complicaciones más comunes que se presentan son:

- Cómo iniciar el procedimiento y cómo escoger los valores iniciales de los parámetros.

- Cómo asegurar que el procedimiento alcanzó el mínimo global en lugar de un mínimo local.

Estos problemas están muy relacionados, pues si los valores iniciales del parámetro son lo suficientemente cercanos a los valores óptimos del parámetro, entonces el algoritmo se acercará en cada iteración al valor óptimo del parámetro (el algoritmo converge) . Por lo tanto es importante inicializar el algoritmo con valores iniciales adecuados. Por el contrario, si se eligen valores iniciales no adecuados, no se obtendrá un ajuste útil para el modelo.

Además, si la falta de convergencia persiste, posiblemente se deba a que el modelo no es el adecuado para los datos, por lo que se podría utilizar talvez un modelo más simple.

Dado que las soluciones del problema de regresión no lineal son de tipo numérico, estas pueden ser diferentes como consecuencia de diferentes algoritmos, diferentes parametrizaciones, o diferentes valores iniciales, sin embargo, las estimaciones no deben diferir considerablemente. Para resolver este problema ejecutaremos los algoritmos con varias combinaciones de valores, observando que ellas converjan a la misma solución. Luego escogeremos el mejor modelo en base a ciertos criterios estadísticos, los cuales expondremos mas adelante.

4.2 El algoritmo de Gauss Newton

El algoritmo de Gauss Newton se basa en la minimización de la función (4.1) bajo una condición de primer orden, la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\delta}{\delta\beta}RSS(\beta) = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \beta)] \left(-\frac{d}{d\beta} f(x_i, \beta) \right) = 0 \quad (4.2)$$

El problema de estimación es encontrar el valor de β que satisfaga la condición de primer orden anterior y que corresponda a un mínimo global de la función (4.1). Para ello se reemplaza $f(x_i, \beta)$ por una aproximación por desarrollo en serie de Taylor de primer orden alrededor de un punto β_1 , que es el valor inicial del parámetro buscado. La aproximación para la derivada será entonces:

$$\frac{d}{d\beta} f(x_i, \beta) \cong \frac{f(x_i, \beta) - f(x_i, \beta_1)}{\beta - \beta_1} \quad (4.3)$$

En la expresión anterior, el lado izquierdo es la pendiente de la tangente de la función $f(x_i, \beta)$ en el punto β_1 . mientras que el lado derecho es la linea secante de la función $f(x_i, \beta)$ que pasa por los puntos β_1 y β que es un valor generalizado del parámetro. En conclusión se está aproximando el valor de la tangente $f(x_i, \beta)$ a partir de la secante

que pasa por el punto β_i y β , que pertenecen a la función. Mientras más cercanos sean estos puntos entre si, mejor será la aproximación.

Simplificando la notación anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_i(\beta_1) &= \frac{d}{d\beta} f(x_i, \beta) \\ \Rightarrow RSS(\beta) &= \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \beta_1) - z_t(\beta_1)(\beta - \beta_1)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [\bar{y}_i(\beta_1) - z_i(\beta_1)\beta]^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde

$$\bar{y}_i = y_i - f(x_i, \beta_1) - z_t(\beta_1)\beta_1$$

Notar que para un valor determinado de β_1 , tanto $\bar{y}_i(\beta_1)$ como $z_i(\beta_1)$ son observables. Se considera el siguiente modelo lineal

$$\bar{y}_i(\beta_1) = z_i(\beta_1)\beta + e_i$$

Puede encontrarse el estimador β utilizando mínimos cuadrados ordinarios. Tal modelo se denomina pseudomodelo lineal, que posee como estimador de mínimos cuadrados a:

$$\beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^n [\bar{y}_i(\beta_1)z_i(\beta_1)]}{\sum_{i=1}^n [z_t(\beta_1)]^2}$$

En notación matricial sería:

$$\beta_2 = [z(\beta_1)'z(\beta_1)]^{-1} z(\beta_1)\bar{y}(\beta_1)$$

En conclusión, hemos hecho lo siguiente. Partiendo de un valor inicial de $\beta(\beta_1)$, y aproximando la función $f(x_i, \beta)$ a través de una serie de Taylor de primer orden alrededor de β_1 , obtuvimos un segundo valor estimado para $\beta(\beta_2)$ aplicando mínimos cuadrados ordinarios al pseudomodelo lineal. Repitiendo este proceso para encontrar valores sucesivos de los estimadores de β se encuentra el estimador $n + 1$:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= [z(\beta_n)'z(\beta_n)]^{-1} z(\beta_n)\bar{y}(\beta_n) \\ &= [z(\beta_n)'z(\beta_n)]^{-1} z(\beta_n)[y - f(x, \beta_n) - z(\beta_n)\beta_n] \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$= \beta_n + [z(\beta_n)'z(\beta_n)]^{-1}[y - f(x, \beta_n)]$$

La condición de primer orden para un mínimo puede ser escrita de la siguiente forma matricial:

$$z(\beta_n)'[y - f(x, \beta_n)] = 0$$

Si se cumple tal condición, debe darse que $\beta_{n+1} = \beta_n$. Por lo que comenzando con un valor inicial $\beta = \beta_1$ y aplicando el procedimiento descrito anteriormente, hasta que se da la convergencia entre los valores de los estimadores obtenidos, se habrá llegado a la solución de la condición de primer orden para la minimización de la suma de cuadrados del modelo no lineal dado en (4.1).

Una vez alcanzado el valor buscado mediante el proceso descrito anteriormente, basta determinar si dicho valor corresponde a un mínimo, de ser así es necesario verificar si este mínimo es de carácter global o local. Una de las técnicas habituales consiste en utilizar diferentes valores iniciales de β para el algoritmo. Para los distintos valores iniciales, podemos obtener distintos mínimos de la función, el mínimo que corresponde a la menor suma de cuadrados, será el estimado por mínimos cuadrados no lineales buscado.

El estimador obtenido por mínimos cuadrados no lineales posee las características siguientes:

- Es consistente.¹
- Puede considerarse que tiene una distribución normal con media β y varianza $\sigma^2[z(\beta)'z(\beta)]^{-1}$.

Para el ajuste de los modelos expuestos en este trabajo, dado que son funciones no lineales, utilizaremos el algoritmo descrito anteriormente, que viene implementado en el software R mediante la función `nls()` la cual es de gran utilidad para este tipo de problemas. La función `nls()`, es una función incluida en la librería `stats` del software para análisis estadístico R. Esta función utiliza el algoritmo de Gauss Newton para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales.

¹Un estimador es consistente si converge en probabilidad al parámetro a estimar cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1$$

4.3 Intervalos de Confianza

En general en los modelos no lineales no se dispone de un método para el cálculo exacto de intervalos de confianza. En este trabajo consideraremos intervalos de confianza asintóticos para los parámetros estimados de cada modelo. Estos están definidos como.

$$\hat{\beta}_j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p} SE(\hat{\beta}_j) \quad (4.6)$$

donde $n - p = n - \text{número de parámetros en el modelo}$.

$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$ denota el percentil $1 - \frac{\alpha}{2}$ en una distribución de student con $n - p$ grados de libertad.

4.4 Pruebas de hipótesis sobre los parámetros

Para evaluar la significancia de cada parámetro en cada modelo se realiza la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0 : \beta_j = q_m$$

$$H_1 : \beta_j \neq q_m$$

donde q_m representa el valor ue especificamos para el parámetro del modelo m . Para ello se calcula el estadístico de prueba:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_j - q_m}{SE(\hat{\beta}_j)} \quad (4.7)$$

De donde se rechaza la hipótesis nula si:

$$|t_c| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p} \quad (4.8)$$

Para el modelo frailty logístico, se utilizó una transformación $A = \exp(B)$, pues $\mu(0)$ es la mortalidad infantil, la cual se evidencia en las tablas de vida que es distinta de cero.

4.5 Bondad de Ajuste

La bondad de ajuste para cada modelo se evaluó utilizando el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC).

$$AIC = 2k - 2\ln(L) \quad (4.9)$$

donde k es el número de parámetros del modelo estadístico, y L es el máximo valor de la función de verosimilitud para el modelo estimado. El valor (AIC), es utilizado como una medida de calidad de ajuste de un modelo estadístico estimado. El modelo que brinda un mejor ajuste obtendrá el mínimo valor de (AIC). Los cálculos del (AIC) se realizaron utilizando la función del software R $\logLik()$ ², además se puede calcular este valor llamando a la función $AIC()$ disponible en la biblioteca estándar de R.

Por otro lado, el Criterio de Información Bayesiano (BIC), es otra medida de bondad de ajuste al igual que el AIC , basada en el máximo valor de la función de verosimilitud L , en el número de parámetros ajustados k y el número total de datos N .

El modelo con el más bajo valor de BIC es considerado el mejor en explicar los datos con el mínimo número de parámetros. Este valor también se calcula con la función $BIC()$ la cual también se encuentra disponible en la biblioteca estándar del software R.

Está dado por la siguiente expresión:

$$BIC = -2\ln(L) - \ln(N)k \quad (4.10)$$

4.6 Ajuste de datos de mortalidad para la población ecuatoriana.

En esta sección, se utilizan datos de población ecuatoriana, los cuales han sido obtenidos de dos fuentes muy importantes, una de ellas el Instituto Nacional de Estadística Y Censos INEC y otro un trabajo previo "Estimación y Ajuste de Tablas de Mortalidad Dinámicas para la población ecuatoriana hasta el año 2030"[14].

Ambas fuentes de datos se encuentran clasificadas por género y por año. Las funciones con las que cuentan tales tablas son las siguientes:

- l_x : Representa el número de personas de la generación inicial que llegaron con vida a la edad x .

²<http://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/logLik.html>

- ${}_n p_x$: La probabilidad de sobrevivir entre las edades exactas x y $x + n$
- ${}_n q_x$: La probabilidad de muerte entre la edad exacta x y $x + n$.
- ${}_n d_x$: El número de defunciones entre las edades x y $x + n$.
- ${}_n L_x$: Esta función corresponde al tiempo que vive toda la generación entre las edades. x y $x + n$.
- T_x : El número total de años vividos desde la edad x .

Como se mencionó en el capítulo dos, bajo la hipótesis que la fuerza de mortalidad es constante en el intervalo unitario, el estimador de la función fuerza de mortalidad que utilizaremos será:

$$\mu(x) = -\ln(1 - q_x) \quad (4.11)$$

A partir de estos valores, se ajustará los datos a las funciones fuerza de mortalidad expuestas anteriormente.

A continuación, un análisis exploratorio de los datos a utilizar. Primero se observa un gráfico de los valores estimados para la función fuerza de mortalidad en todo el período 1991 – 2013.

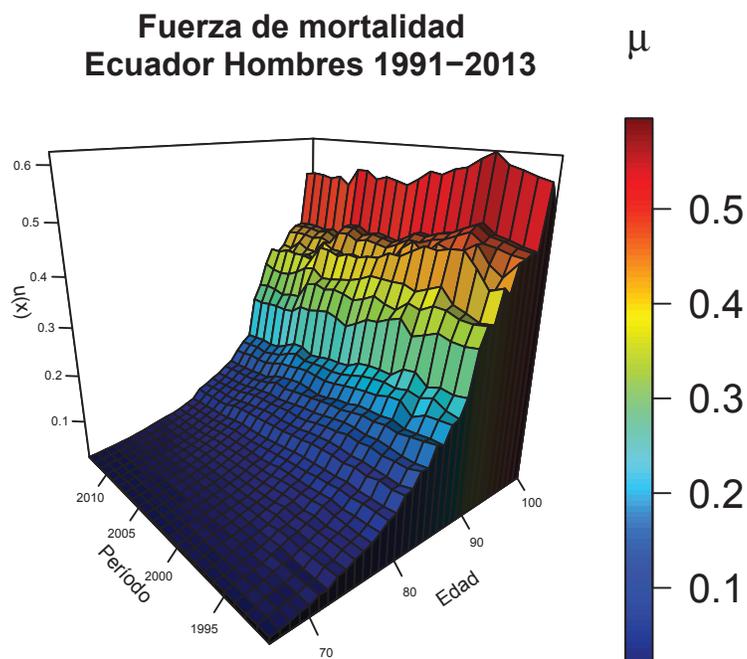


Figura 4.2: Datos de fuerza de mortalidad para el período 1991 – 2013 Hombres Ecuador.

Fuente: Elaboración Propia

En el gráfico anterior se aprecia las diferentes funciones fuerza de mortalidad para el período comprendido entre los años 1991 – 2013 de la población ecuatoriana de género masculino. Se observa también, que la tasa de mortalidad tiene un ligero aumento a lo largo del período. Para observar mejor tal variación recurrimos a un gráfico que nos permite visualizar los niveles de aumento.

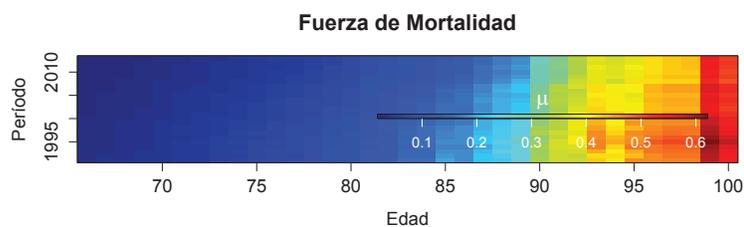


Figura 4.3: Niveles de la función fuerza de mortalidad a lo largo del período 1991 – 2013 con datos de mortalidad de hombres ecuatorianos.

En el período 1991 – 2013, para las mujeres se tiene las siguientes funciones fuerza de mortalidad y los valores que esta va tomando a lo largo del período.

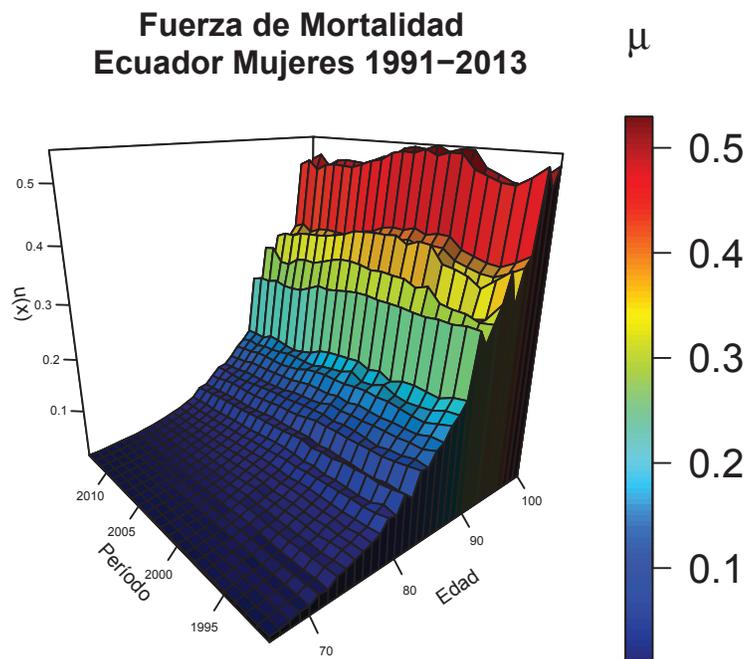


Figura 4.4: Datos de fuerza de mortalidad para el período 1991 – 2013 Mujeres Ecuador.

Fuente: Elaboración propia

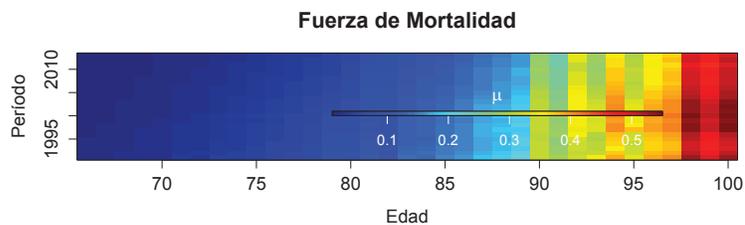


Figura 4.5: Niveles de la función fuerza de mortalidad a lo largo del período 1991 – 2013 con datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas.

En conclusión, observando los gráficos anteriores se ve que la tasa de mortalidad instantánea para los hombres ecuatorianos, tuvo una ligera variación, es decir para la

sección del período 1991 – 2000, aproximadamente, la edad en donde la fuerza de mortalidad empieza a aumentar es alrededor de los 85 años, y para el período 2001 – 2013 la edad en que la tasa instantánea de muerte empieza su incremento alrededor de las 90 años, lo cual permitiría concluir en primera instancia que los hombres aumentaron su esperanza de vida.

Para las mujeres el incremento de la fuerza de mortalidad es muy similar a el de los hombres, aunque se observa que la fuerza de mortalidad para este caso incrementó a partir de los 87 años al inicio del período y ,aproximadamente, a partir de los 93 años para el final del período, esto al igual que el caso anterior permite concluir que las mujeres aumentan su esperanza de vida. Además la esperanza de vida para el año final del período fue mayor también para las mujeres. A con

4.7 Ajustes a los diferentes modelos para datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991

Considerando los datos del año 1991, se obtuvo los siguientes ajustes para hombres y mujeres.

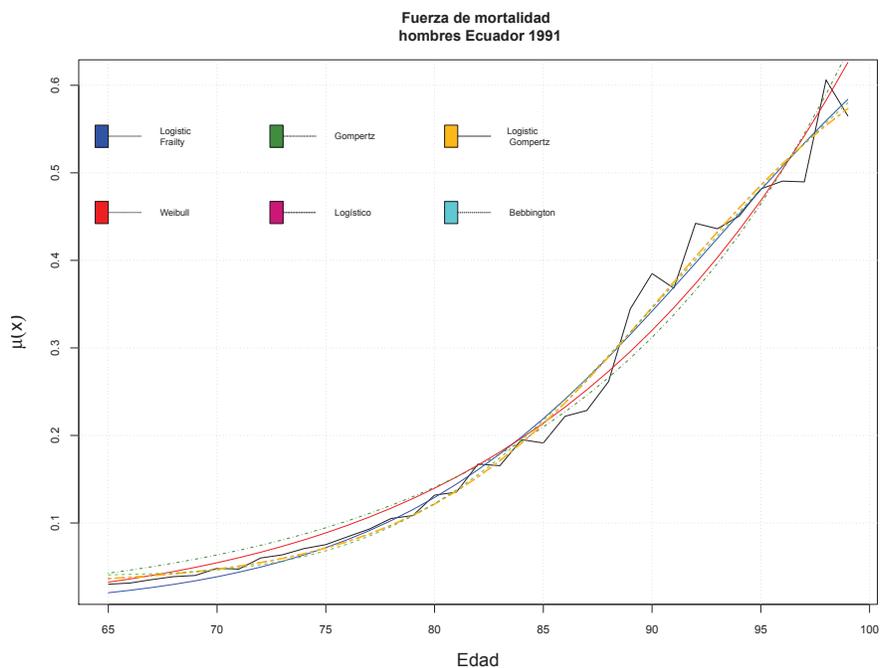


Figura 4.6: Ajuste datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 a diferentes funciones.

Fuente: Elaboración propia.

Los ajustes con sus respectivos intervalos de confianza y pruebas de hipótesis sobre los parámetros a continuación:

Para el modelo frailty logístico, se obtuvo los siguientes resultados.

4.7.1 Modelo frailty logístico

```

Nonlinear regression model
  model: ux ~ (exp(B) * exp(alpha * Edad))/(1 + s^2 * (exp(alpha * Edad) - 1) * exp(B)/alpha)
  data: datos
      B      s      alpha
-12.5043  0.3969  0.1328
residual sum-of-squares: 0.01404

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.1: Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de hombres ecuatorianos 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
	B	-12.5043	0.7698	-14.0724 -10.9362
	s	0.3969	0.0332	0.3294 0.4645
	alpha	0.1328	0.0095	0.1135 0.1521

Tabla 4.2: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	19.7740	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
2	18.1776	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
3	91.7401	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.3: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.

4.7.2 Modelo de Weibull

Para el modelo de Weibull se obtuvo los siguientes resultados.

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ gamma * beta * (beta * Edad)^(gamma - 1)
data: datos
gamma    beta
8.03796  0.01302
residual sum-of-squares: 0.02413

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.4: Resultados de los estimadores para el modelo de Weibull para datos de población de hombres ecuatorianos 1991.

Intervalos de confianza:

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
	gamma	8.0380	0.2532	7.5228 8.5531
	beta	0.0130	0.0001	0.0128 0.0133

Tabla 4.5: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Weibull.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	27.7946	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.
2	7421.8210	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.6: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Weibull.

4.7.3 Modelo de Gompertz

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ a * exp(b * Edad)
data: datos
      a      b
0.0002419 0.0795831
residual sum-of-squares: 0.03209

Number of iterations to convergence: 4
Achieved convergence tolerance: 3.252e-06

```

Tabla 4.7: Resultados de los estimadores para el modelo de Gompertz para datos de población de hombres ecuatorianos del año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0002	0.0001	0.0001	0.0004
b	0.0796	0.0032	0.0731	0.0861

Tabla 4.8: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Gompertz.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	13871.3572	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.
2	288.8820	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.9: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Gompertz.

4.7.4 Modelo logístico

Los resultados del ajuste utilizando un modelo logístico son:

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ gamma + ((k * A * exp(alpha * Edad))/(1 + A * exp(alpha * Edad)))
data: datos
      gamma      A      k      alpha
2.825e-02 1.813e-07 6.772e-01 1.711e-01
residual sum-of-squares: 0.01232

Number of iterations to convergence: 11
Achieved convergence tolerance: 1.834e-06

```

Tabla 4.10: Resultados de los estimadores para el modelo logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
gamma	0.0282	0.0107	0.0065	0.0500
A	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
k	0.6772	0.0647	0.5453	0.8090
alpha	0.1711	0.0196	0.1312	0.2111

Tabla 4.11: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	2.6477	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	3391021.2010	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	4.9930	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	42.3097	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.12: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo logístico.

4.7.5 Modelo de Gompertz logístico

Considerando el modelo Gompertz logístico, se obtiene los siguientes resultados:

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ k * (1 + (A) * exp(alpha * Edad))/(1 + (B) * exp(alpha * Edad))
data: datos
      k      A      B      alpha
2.825e-02 4.529e-06 1.813e-07 1.711e-01
residual sum-of-squares: 0.01232

Number of iterations to convergence: 10
Achieved convergence tolerance: 1.599e-06

```

Tabla 4.13: Resultados de los estimadores para el modelo Gompertz logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
k	0.0282	0.0107	0.0065	0.0500
A	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
alpha	0.1711	0.0196	0.1312	0.2111

Tabla 4.14: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo Gompertz logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	91.0873	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	109364.3235	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	3390981.2413	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	42.3097	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.15: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo Gompertz logístico.

4.7.6 Modelo μ_Γ

Para el modelo μ_Γ los resultados son los siguientes.

```
Nonlinear regression via the Levenberg-Marquardt algorithm
parameter estimates: 0.0398999649480478, 5.29894998553165, 12.3637017250283, 2.25119053798792
residual sum-of-squares: 0.01336
reason terminated: Relative error in the sum of squares is at most 'ftol'.
```

Tabla 4.16: Resultados de los estimadores para el modelo μ_Γ para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0399	0.0087	0.0221	0.0577
b	5.2989	0.2128	4.8650	5.7329
c	12.3637	1.4845	9.3361	15.3913
d	2.2512	0.3470	1.5435	2.9588

Tabla 4.17: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_Γ .

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	4.5837	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	20.2060	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	7.6549	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	3.6061	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.18: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_Γ .

Los parámetros estimados para cada modelo considerando datos de hombres de la población ecuatoriana para el año 1991 son:

Modelos	Parámetros
Frailty logístico	$A = 3,710552e - 06; s = 0,39695; \alpha = 0,13280$
Weibull	$\gamma = 8,03796; \beta = 0,01302$
Gompertz	$a = 0,00024; b = 0,07958$
Logístico	$\gamma = 2,825e - 02; A = 1,813e - 07; k = 6,772e - 01; \alpha = 1,711e - 01$
Gompertz logístico	$k = 2,825e - 02; A = 4,529e - 06; B = 1,813e - 07; \alpha = 1,711e - 01$
μ_γ	$a = 0,03990; b = 5,29895; c = 12,36370; d = 2,25119$

Tabla 4.19: Parámetros estimados para datos de Ecuador-hombres 1991.

Se observa que para los datos de mortalidad correspondientes al año 1991, los ajustes son buenos, revisemos ahora el *AIC* para cada modelo.

Modelos	AIC
Frailty logístico	-168,425
Weibull	-151,4601
Gompertz	-141,4814
Logístico	-170,9813
Gompertz logístico	-170,9813
μ_γ	-168,1433

Tabla 4.20: Criterio de información de Akaike Hombres 1991

Si revisamos el criterio de información bayesiano (*BIC*) tenemos

Modelos	BIC
Frailty logístico	-160,2036
Weibull	-144,7941
Gompertz	-134,8154
Logístico	-161,2046
Gompertz logístico	-161,2046
μ_γ	-158,3666

Tabla 4.21: Criterio de información de Bayesiano Hombres 1991

4.8 Ajustes a los diferentes modelos para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991

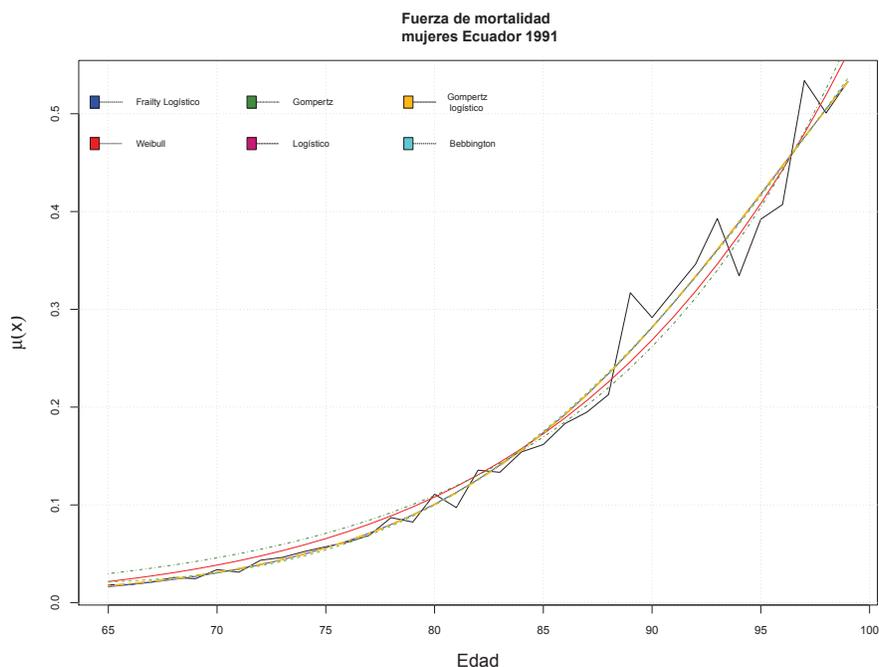


Figura 4.7: Ajuste datos de mortalidad a diferentes funciones.
Fuente: Elaboración propia.

Para mujeres, considerando el modelo frailty logístico, se obtuvo los siguientes resultados.

4.8.1 Modelo frailty logístico

```

Nonlinear regression model
  model: ux ~ (exp(B) * exp(alpha * Edad))/(1 + s^2 * (exp(alpha * Edad) - 1) * exp(B)/alpha)
  data: datos
      B      s    alpha
-12.4234  0.3755  0.1281
residual sum-of-squares: 0.01528

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.22: Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza:

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
B	-12.4234	0.9231	-14.3037	-10.5432
s	0.3755	0.0478	0.2781	0.4730
alpha	0.1281	0.0113	0.1052	0.1510

Tabla 4.23: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	16.4036	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
2	13.0542	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
3	77.5013	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.24: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.

4.8.2 Modelo de Weibull

Utilizando el modelo de Weibull, los resultados de los ajustes fueron:

```

Nonlinear regression model
  model: ux ~ gamma * beta * (beta * Edad)^(gamma - 1)
  data: datos
  gamma    beta
8.73647 0.01248
residual sum-of-squares: 0.01861

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.25: Resultados de los estimadores para el modelo de Weibull para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
gamma	8.7365	0.2789	8.1691	9.3038
beta	0.0125	0.0001	0.0123	0.0127

Tabla 4.26: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Weibull.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	27.7434	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.
2	8937.2834	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.27: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Weibull.

4.8.3 Modelo de Gompertz

Con el modelo de Gompertz los resultados son los siguientes:

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ a * exp(b * Edad)
data: datos
      a      b
0.0001035 0.0870675
residual sum-of-squares: 0.02328

Number of iterations to convergence: 7
Achieved convergence tolerance: 1.092e-06

```

Tabla 4.28: Resultados de los estimadores para el modelo de Gompertz para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0001	0.0000	0.0000	0.0002
b	0.0871	0.0034	0.0802	0.0939

Tabla 4.29: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo de Gompertz.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	30428.9947	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.
2	270.1899	2.0345	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.30: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo de Gompertz.

4.8.4 Modelo logístico

Considerando un modelo logístico se obtuvo:

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ gamma + ((k * A * exp(alpha * Edad))/(1 + A * exp(alpha * Edad)))
data: datos
      gamma      A      k      alpha
2.137e-03 3.547e-06 8.828e-01 1.309e-01
residual sum-of-squares: 0.01528

Number of iterations to convergence: 9
Achieved convergence tolerance: 4.043e-06

```

Tabla 4.31: Resultados de los estimadores para el modelo logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
gamma	0.0021	0.0166	-0.0317	0.0360
A	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
k	0.8828	0.2361	0.4012	1.3643
alpha	0.1309	0.0246	0.0807	0.1811

Tabla 4.32: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	60.1298	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	147732.7785	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	3.7388	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	35.2970	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.33: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo logístico.

4.8.5 Modelo Gompertz logístico

Con el modelo Gompertz logístico se obtiene:

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ k * (1 + (A) * exp(alpha * Edad))/(1 + (B) * exp(alpha * Edad))
data: datos
      k      A      B      alpha
2.137e-03 1.469e-03 3.547e-06 1.309e-01
residual sum-of-squares: 0.01528

Number of iterations to convergence: 27
Achieved convergence tolerance: 4.368e-05

```

Tabla 4.34: Resultados de los estimadores para el modelo Gompertz logístico para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
k	0.0021	0.0166	-0.0317	0.0360
A	0.0015	0.0143	-0.0277	0.0306
B	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
alpha	0.1309	0.0246	0.0807	0.1811

Tabla 4.35: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo Gompertz logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	60.1291	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	69.8611	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	147721.2071	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	35.2969	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.36: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo Gompertz logístico.

4.8.6 Modelo μ_Γ

Nonlinear regression via the Levenberg-Marquardt algorithm
parameter estimates: 0.0176661613472902, 6.03085246826715, 9.08238209003153, 1.45914730360468
residual sum-of-squares: 0.01524
reason terminated: Relative error in the sum of squares is at most 'ftol'.

Tabla 4.37: Resultados de los estimadores para el modelo μ_Γ para datos de población de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991.

Intervalos de confianza.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0177	0.0129	-0.0086	0.0439
b	6.0309	0.6975	4.6084	7.4534
c	9.0824	2.1358	4.7263	13.4384
d	1.4591	0.5224	0.3938	2.5245

Tabla 4.38: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_Γ .

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	76.4216	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	7.2130	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	4.2524	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	2.8790	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.39: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_Γ .

Modelos	Parámetros
Frailty logístico	$A = 4,023212e - 06; s = 0,37555; \alpha = 0,12807$
Weibull	$\gamma = 8,73646743; \beta = 0,01248439$
Gompertz	$a = 0,00010; b = 0,08707$
Logístico	$\gamma = 2,137e - 03; A = 3,547e - 06; k = 8,828e - 01; \alpha = 1,309e - 01$
Gompertz logístico	$k = 2,137e - 03; A = 1,469e - 03; B = 3,547e - 06; \alpha = 1,309e - 01$
μ_γ	$a = 0,01767; b = 6,03085; c = 9,08238; d = 1,45915$

Tabla 4.40: Parámetros estimados para datos de Ecuador-mujeres 1991.

Modelos	AIC
Frailty logístico	-165,4476
Weibull	-160,5463
Gompertz	-152,7173
Logístico	-163,4653
Gompertz logístico	-163,4653
μ_γ	-163,5509

Tabla 4.41: Criterio de información de Akaike Mujeres 1991.

Modelos	BIC
Frailty logístico	-157,2262
Weibull	-153,8803
Gompertz	-146,0512
Logístico	-153,6885
Gompertz logístico	-153,6885
μ_γ	-153,7744

Tabla 4.42: Criterio de información Bayesiano Mujeres 1991.

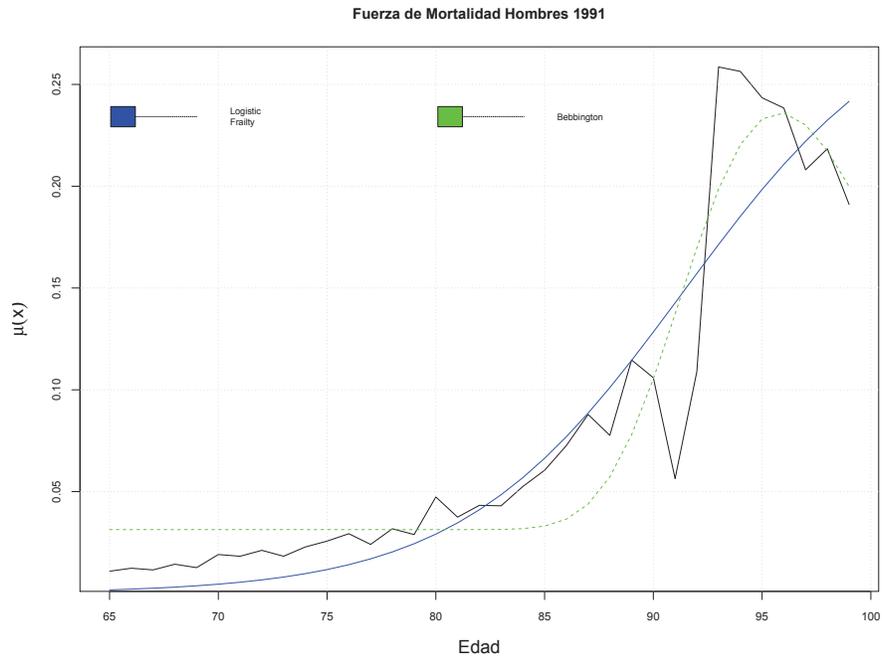
De acuerdo al criterio de información de Akaike (AIC), para hombres el modelo logístico presentó un menor valor de (AIC). Para mujeres el modelo frailty logístico obtuvo un menor (AIC), sin embargo se considerará, de aquí en adelante, los cuatro modelos que parecen ser los más adecuados por que en general el valor de (AIC) es bastante parecido. Los otros dos modelos no serán considerados, pues como vimos anteriormente, estos no detectan el fenómeno que estamos buscando.

En el próximo capítulo, a partir de los ajustes obtenidos se calculará las funciones de velocidad y aceleración para encontrar las edades en donde la desaceleración de la mortalidad comienza.

A continuación, se utiliza la otra fuente de datos mencionada en este trabajo.

Los datos que se van a utilizar se obtuvieron de un trabajo previo [14], tales datos corresponden a tablas de mortalidad desde el año 1990 hasta el año 2011, y que también se dispone de tablas de mortalidad por género.

Los datos correspondientes para hombres del año 1991 se ajustaron al modelo frailty logístico y al Modelo de Mark Bebbington, dado que no se utilizarán los modelos de Weibull ni de Gompertz en la siguiente gráfica se presenta los modelos mencionados antes, además los datos no se ajustaron a los modelos logístico y Gompertz logístico.



Modelos	Parámetros
Frailty logístico	$A = 5,514637e - 09; s = 0,81051; \alpha = 0,19478$
μ_γ	$a = 0,03134; b = 3,24515; c = 51,63591; d = 11,05376$

Tabla 4.43: Parámetros estimados para datos de Ecuador Hombres 1991.

4.8.7 Modelo frailty logístico

```

Nonlinear regression model
model: ux ~ (exp(B) * exp(alpha * Edad))/(1 + s^2 * (exp(alpha * Edad) - 1) * exp(B)/alpha)
data: datos
      B      s  alpha
-19.2108 0.8105 0.1948
residual sum-of-squares: 0.03165

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.44: Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de población de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
B	-19.210792	4.268589	-27.905622	-10.515961
s	0.810517	0.191621	0.420197	1.200837
alpha	0.194786	0.049407	0.094146	0.295425

Tabla 4.45: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	5.1373	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
2	4.2298	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
3	16.2975	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.46: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo frailty logístico.

4.8.8 Modelo μ_Γ

```
Nonlinear regression via the Levenberg-Marquardt algorithm
parameter estimates: 0.0313297956881517, 3.24527146310341, 52.2692449957096,
11.1671859005701
residual sum-of-squares: 0.02512
reason terminated: Relative error in the sum of squares is at most 'ftol'.
```

Tabla 4.47: Resultados de los estimadores para el modelo μ_Γ para datos de mortalidad de hombres ecuatorianos correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0313	0.0061	0.0188	0.0438
b	3.2453	0.1431	2.9535	3.5370
c	52.2692	8.3476	35.2442	69.2943
d	11.1672	1.8472	7.3999	14.9345

Tabla 4.48: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_Γ .

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	438.4804	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	22.6856	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	6.1418	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	2.8790	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.49: Prueba de hipótesis para los parámetros del modelo μ_Γ .

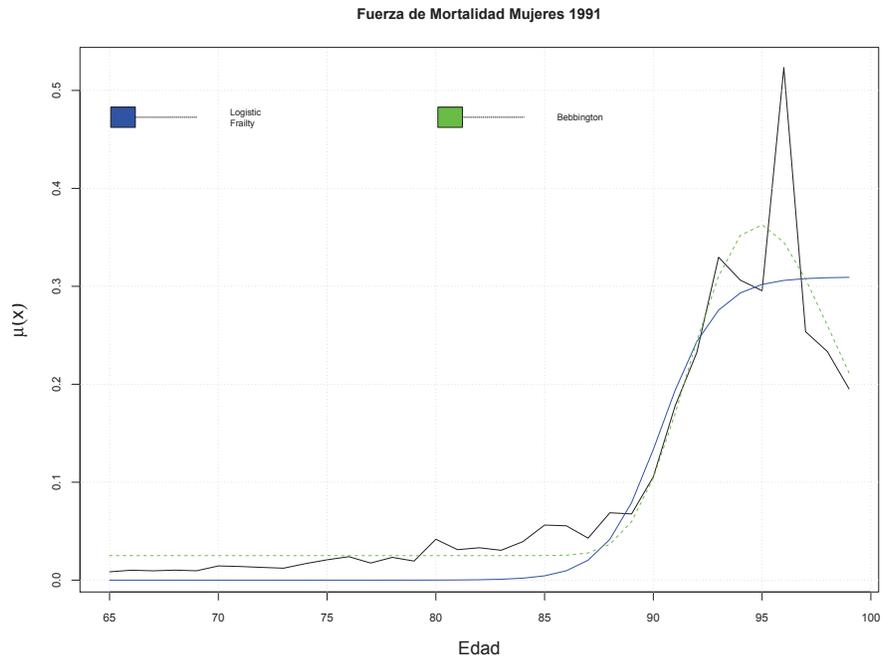
Modelos	AIC
Frailty logístico	-139,9619
μ_γ	-146,043

Tabla 4.50: Criterio de información de Akaike Hombres 1991.

Modelos	BIC
Frailty logístico	-131,7405
μ_γ	-136,2663

Tabla 4.51: Criterio de información Bayesiano Hombres 1991.

Para mujeres, se obtuvo las siguientes estimaciones:



Modelos	Parámetros
Frailty logístico	$A = 2,525965e - 32; s = 1,6000; \alpha = 0,7923$
μ_γ	$a = 0,025029; b = 3,390728; c = 70,261326; d = 15,161983$

Tabla 4.52: Parámetros estimados para datos de Ecuador Mujeres 1991.

4.8.9 Modelo frailty logístico

```

Nonlinear regression model
model:ux ~ (exp(B) * exp(alpha * Edad))/(1 + s^2 * (exp(alpha * Edad) - 1) * exp(B)/alpha)
data: datos
      B      s    alpha
-72.7561  1.6000  0.7923
residual sum-of-squares: 0.089

Algorithm "port", convergence message: relative convergence (4)

```

Tabla 4.53: Resultados de los estimadores para el modelo frailty logístico para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
B	-72.756144	26.768177	-127.281135	-18.231152
s	1.599971	0.335810	1.115949	2.283993
alpha	0.792291	0.297101	0.187116	0.97466

Tabla 4.54: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo frailty logístico.

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	2.8196	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
2	2.7866	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.
3	2.6991	2.0369	Se rechaza la hipótesis nula.

4.8.10 Modelo μ_Γ

```

Nonlinear regression via the Levenberg-Marquardt algorithm
parameter estimates: 0.025028855846773, 3.39072805474866, 70.2613255533593,
15.1619830187364
residual sum-of-squares: 0.04859
reason terminated: Relative error in the sum of squares is at most 'ftol'.

```

Tabla 4.55: Resultados de los estimadores para el modelo μ_Γ para datos de mortalidad de mujeres ecuatorianas correspondientes al año 1991 con datos correspondientes a un trabajo previo.

	Estimador	Error Estándar	2.5 %	97.5 %
a	0.0250	0.0082	0.0083	0.0417
b	3.3907	0.0856	3.2161	3.5653
c	70.2613	7.5933	54.7746	85.7480
d	15.1620	1.6774	11.7408	18.5832

Tabla 4.56: Intervalos de confianza al 95 % para los estimadores del modelo μ_Γ .

	t_c	$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-p}$	prueba
1	3.0581	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
2	27.9235	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
3	9.1213	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.
4	8.4426	2.0395	Se rechaza la hipótesis nula.

Tabla 4.57: Prueba de hipótesis.

Modelos	AIC
Frailty logístico	-103,7815
μ_γ	-120,9602

Tabla 4.58: Criterio de información de Akaike mujeres 1991.

Modelos	BIC
Frailty logístico	-95,56013
μ_γ	-113,1835

Tabla 4.59: Criterio de información Bayesiano mujeres 1991.

Para ambos casos, tanto mujeres como hombres, de acuerdo a los valores de AIC y BIC , se obtuvo que el mejor modelo es el modelo μ_Γ propuesto por Mark Bebbington.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo, se estima la edad en la que se produce la desaceleración de la mortalidad. Para ello se utilizará las funciones de velocidad y aceleración, mismas que pueden ser obtenidas mediante la derivada y la segunda derivada respectivamente de la función fuerza de mortalidad, además se calculan los valores de LAR .

Dado que se cuenta con los valores de los parámetros para las diferentes funciones a las que se ajustó los datos de mortalidad, es suficiente estudiar gráficamente la primera y segunda derivada.

Los gráficos de las funciones de velocidad y aceleración correspondientes a los diferentes modelos utilizados para datos de hombres ecuatorianos del año 1991 se muestran a continuación.

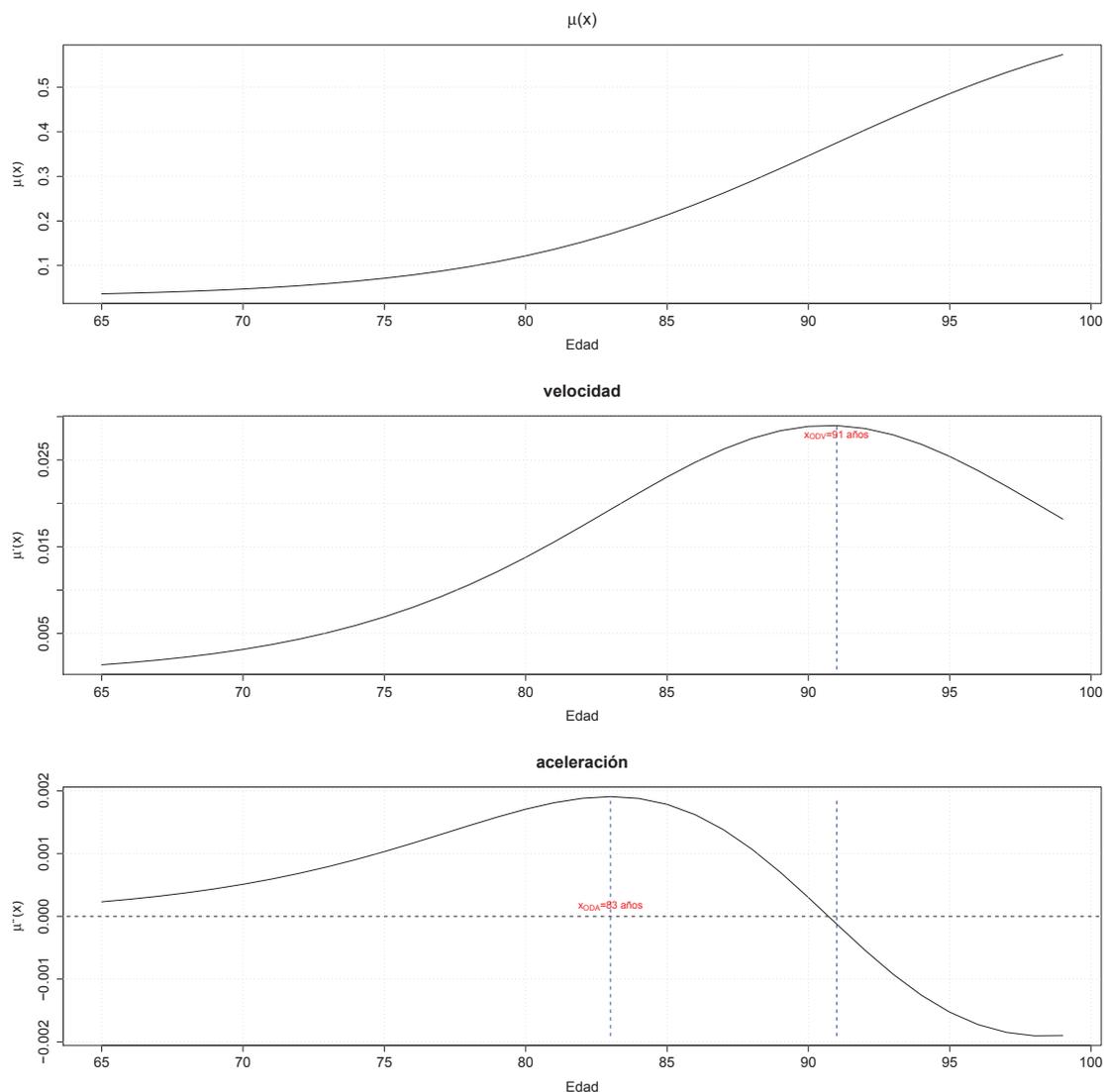


Figura 5.1: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991

Fuente: Elaboración propia

En la figura 5.1, se puede observar que la aceleración de la mortalidad empieza a decrecer alrededor de los 83 años. La fuerza de mortalidad empieza a desacelerar a partir de los 91 años y este valor edad coincide con la edad a la que la velocidad alcanza el punto máximo por lo que comienza a disminuir.

Seguidamente, en la figura 5.2, se presenta las gráficas de velocidad y aceleración de la mortalidad respectivamente. Pero en este caso se consideró un modelo frailty logístico para ajustar la función fuerza de mortalidad.

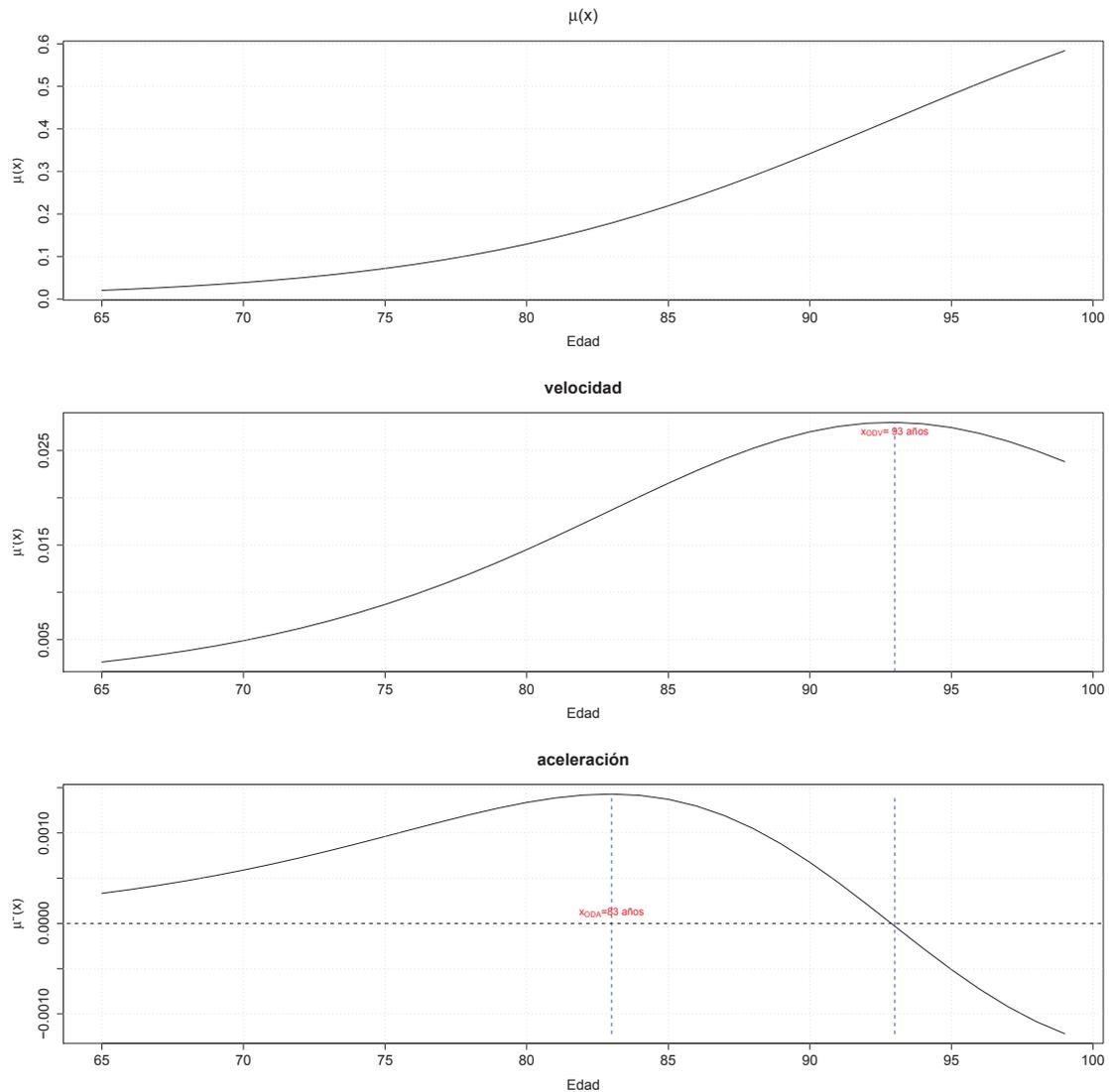


Figura 5.2: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo frailty logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991

Fuente: Elaboración propia

En la figura anterior se observa en el gráfico superior que la velocidad de la mortalidad alcanza su máximo en los 93 años, este valor coincide con la edad donde el fenómeno de desaceleración de la mortalidad comienza. También se observa que la aceleración alcanza su máximo a los 83 años de edad.

Utilizando ahora un modelo Gompertz logístico, se tienen los siguientes hallazgos.

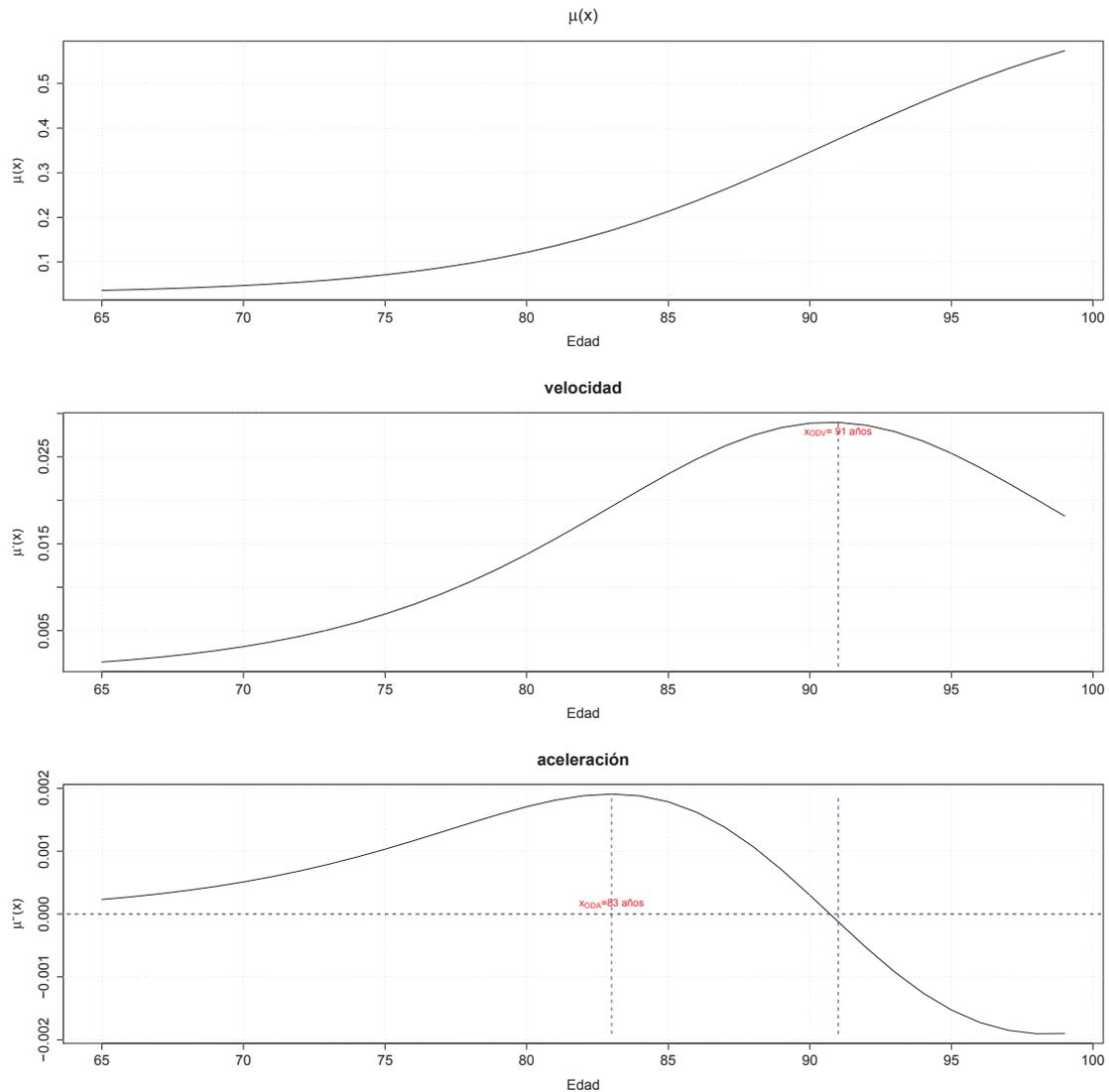


Figura 5.3: Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad Gompertz logístico para datos de hombres ecuatorianos año 1991

Fuente: Elaboración propia

En la figura 5.3, se observa las funciones de velocidad y aceleración de la mortalidad considerando una fuerza de mortalidad tipo Gompertz logística. La edad donde la función de velocidad alcanza su máximo, es a los 91 años. Además, a partir de este valor, el fenómeno de desaceleración de la mortalidad comienza. Por otro lado, la aceleración de la mortalidad alcanza su máximo a partir de los 83 años, a partir de este valor esta empieza a disminuir.

Finalmente, utilizando el modelo μ_{Γ} , con el cual se obtiene los siguientes resultados.

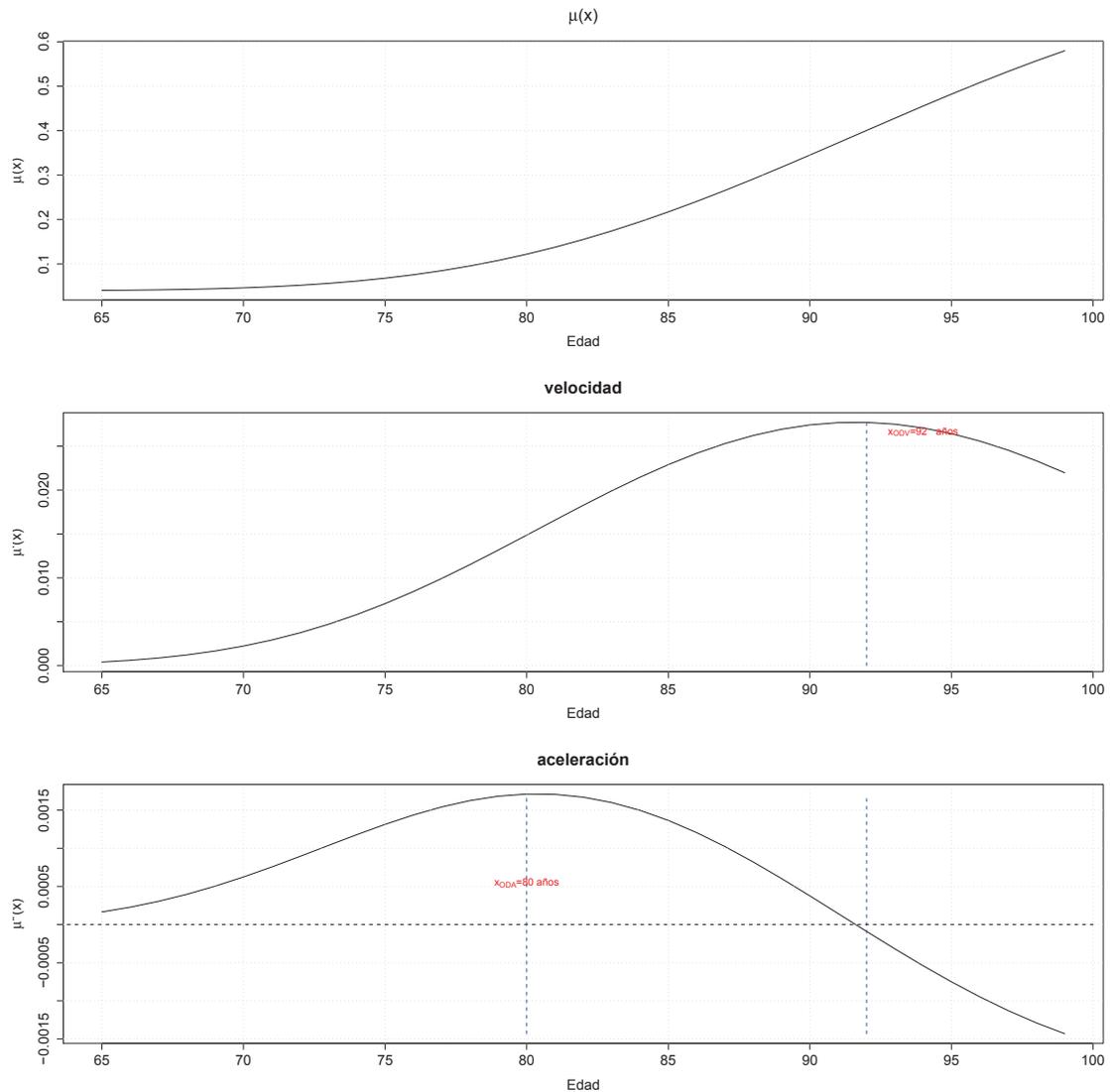


Figura 5.4: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de hombres ecuatorianos año 1991.

Fuente: Elaboración propia

En la figura 5.4, se observa que la desaceleración de la mortalidad comienza a partir de los 92 años. La velocidad y aceleración de la mortalidad empiezan a disminuir a partir de los 92 y 80 años de edad respectivamente.

Los gráficos de velocidad y aceleración correspondientes a los diferentes modelos para datos de mujeres ecuatorianas para el año 1991.

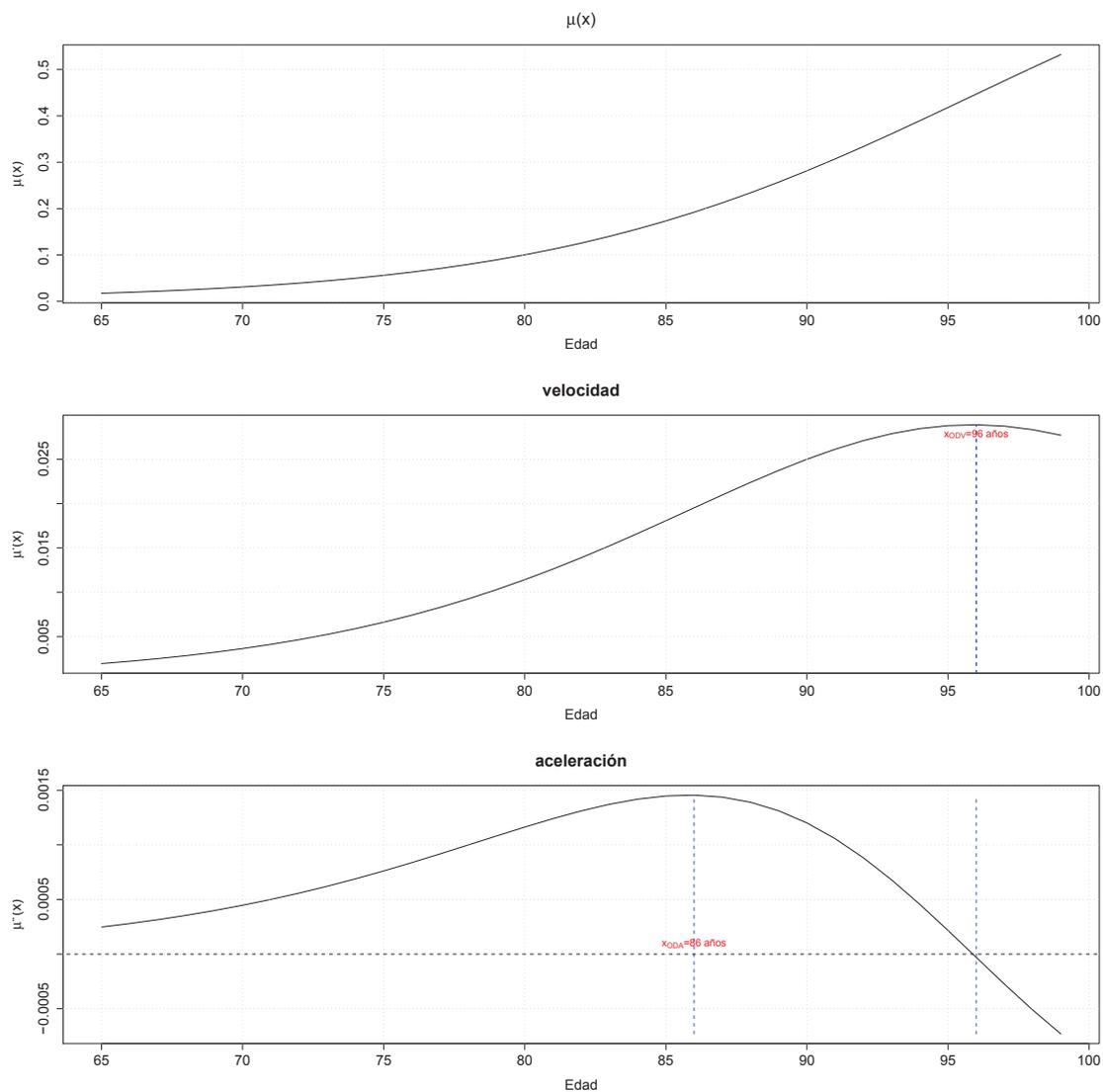


Figura 5.5: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991.

Fuente: Elaboración propia

En la figura 5.5, se observa las funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo logístico. Se obtiene que la velocidad y aceleración de la mortalidad comienzan a disminuir a partir de los 96 y 86 años respectivamente. La desaceleración de la mortalidad en este caso se da a partir de los 96 años.

Utilizando un modelo frailty logístico se obtiene:

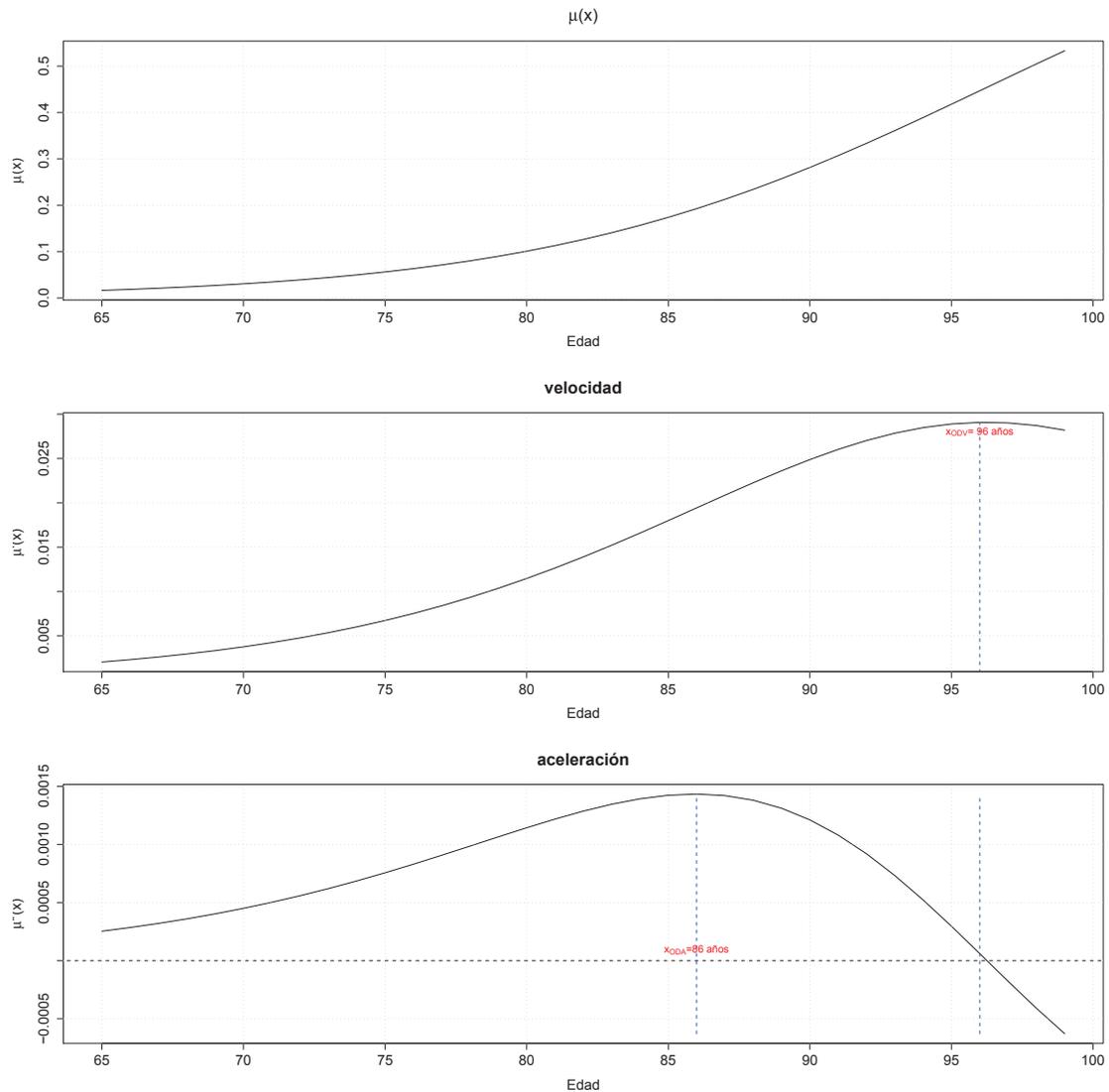


Figura 5.6: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad de tipo frailty logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991.

Fuente: Elaboración propia

La figura 5.6 muestra que la desaceleración de la mortalidad comienza a partir de los 96 años, valor donde la velocidad alcanza su máximo. Por otro lado, la velocidad y aceleración empiezan a disminuir a partir de los 96 y 86 años respectivamente.

Ahora, utilizando una función fuerza de mortalidad de tipo Gompertz logístico se obtiene lo siguiente.

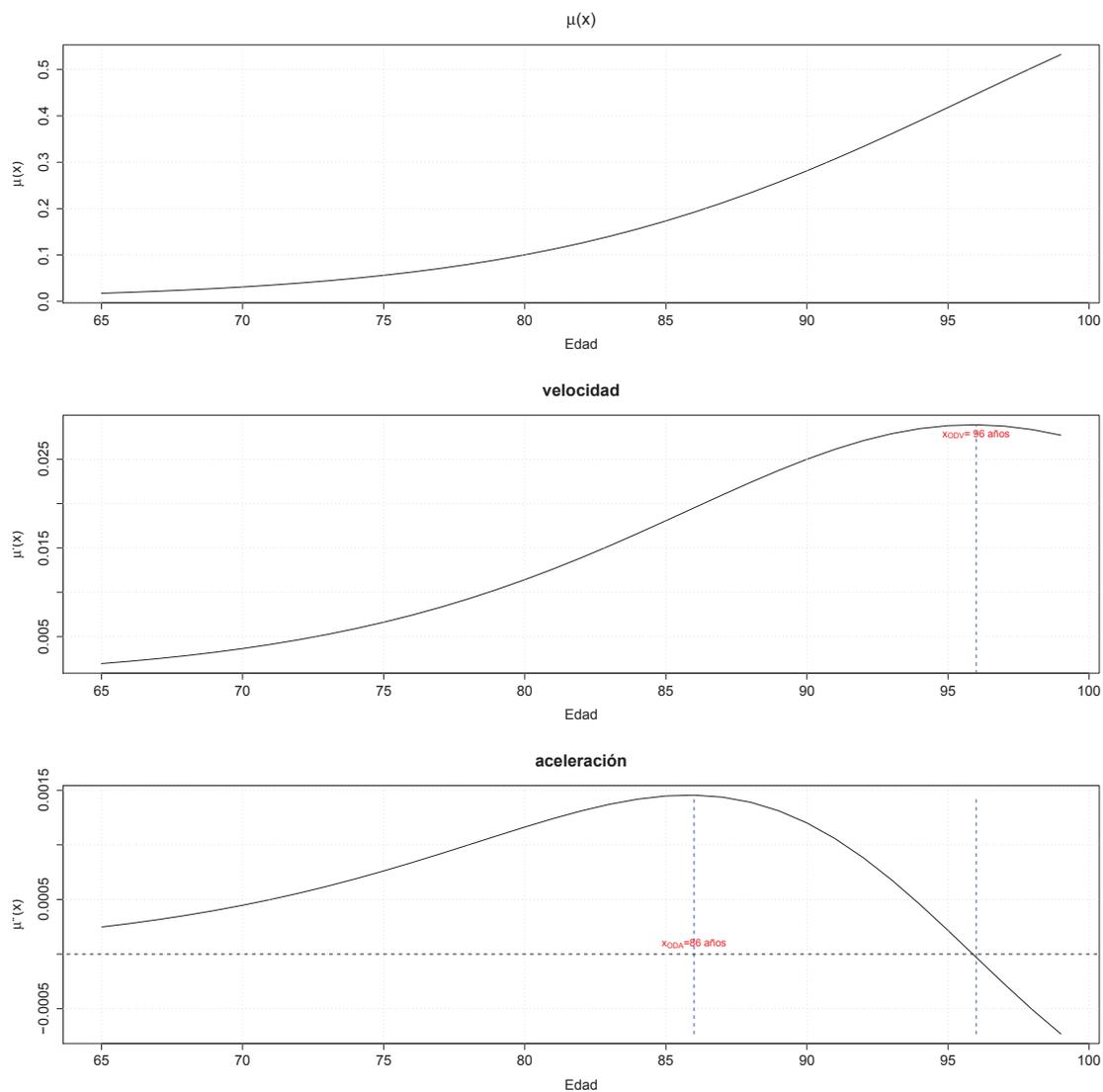


Figura 5.7: Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad Gompertz logístico para datos de mujeres ecuatorianas año 1991

Fuente: Elaboración propia

En la figura anterior, se aprecia que la edad donde el fenómeno de desaceleración de la mortalidad da inicio, es a partir de los 96 años. Además la edad donde la aceleración alcanza su máximo es a los 80 años de edad.

Finalmente, se consideras el modelo μ_{Γ} .

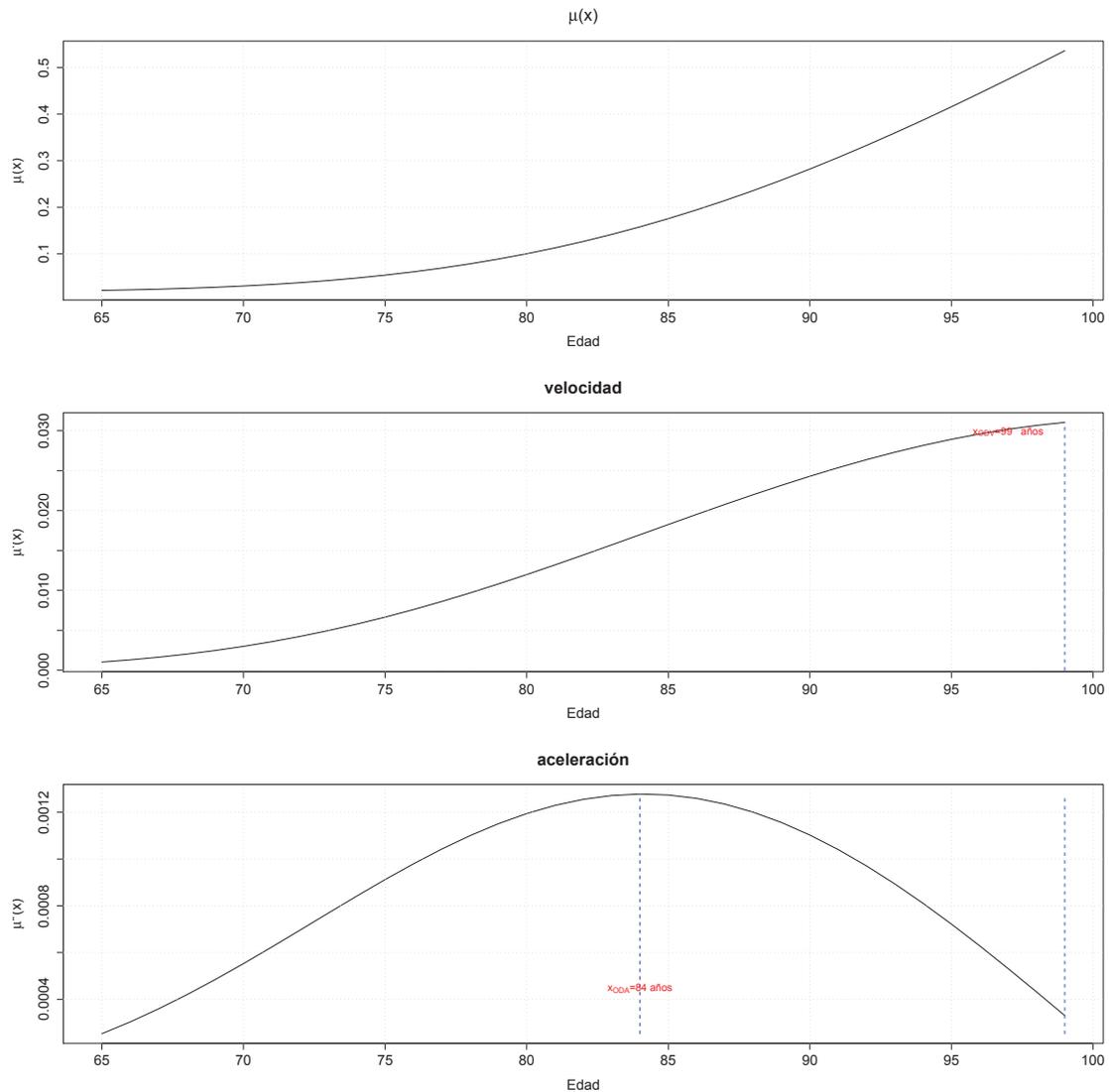


Figura 5.8: Funciones de velocidad y aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de mujeres ecuatorianas año 1991

Fuente: Elaboración propia

Con el modelo μ_{Γ} no hay hallazgos de desaceleración, pero se tiene que la aceleración de la mortalidad disminuye a partir de los 84 años, que es donde la aceleración alcanza su valor máximo.

A continuación se utiliza los datos provenientes del trabajo de Diego Huaraca [14], en este trabajo se construyó tablas de mortalidad desde el año 1991 hasta el año 2011, posteriormente se obtuvo tablas de mortalidad pronosticadas hasta el año 2030, con el fin de comparar los resultados, se utilizará las tablas construidas para el año 1991, las cuales se disponen también tanto para hombres como para mujeres.

En el capítulo anterior se realizó el ajuste respectivo a los diferentes modelos, donde se encontró que se pudieron ajustar los datos a los modelos frailty logístico y el modelo μ_{Γ} propuesto por Mark Bebbington, además utilizando los criterios AIC y BIC se encontró que el mejor modelo es el modelo μ_{Γ} .

A continuación, a partir de este modelo se procede a encontrar las edades en donde empieza la desaceleración de la mortalidad.

Los resultados que se obtuvieron pueden ser apreciados en la siguiente figura.

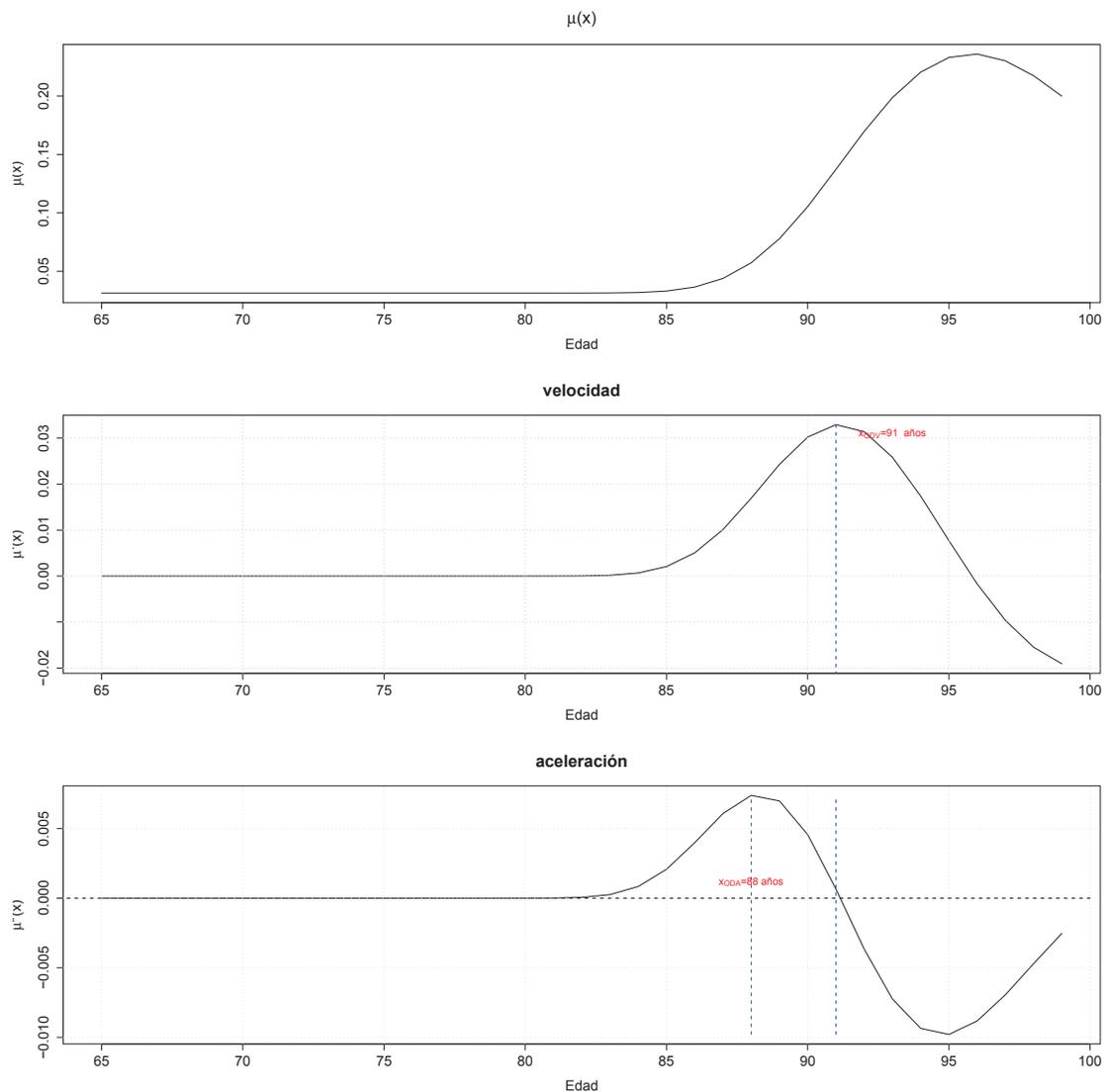


Figura 5.9: Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_{Γ} para datos de hombres ecuatorianos año 1991

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de tablas de mortalidad de un trabajo previo [14]

Como se observa en la figura 5.9, la velocidad de la mortalidad alcanza su máximo a la edad de 91 años, es decir a partir de esta edad la velocidad de la mortalidad empieza a

disminuir. Recordemos que a partir de esta edad es donde empieza la desaceleración de la mortalidad. Además la aceleración de la mortalidad empieza a decrecer a partir de los 88 años.

Para mujeres, se obtuvo los siguientes resultados:

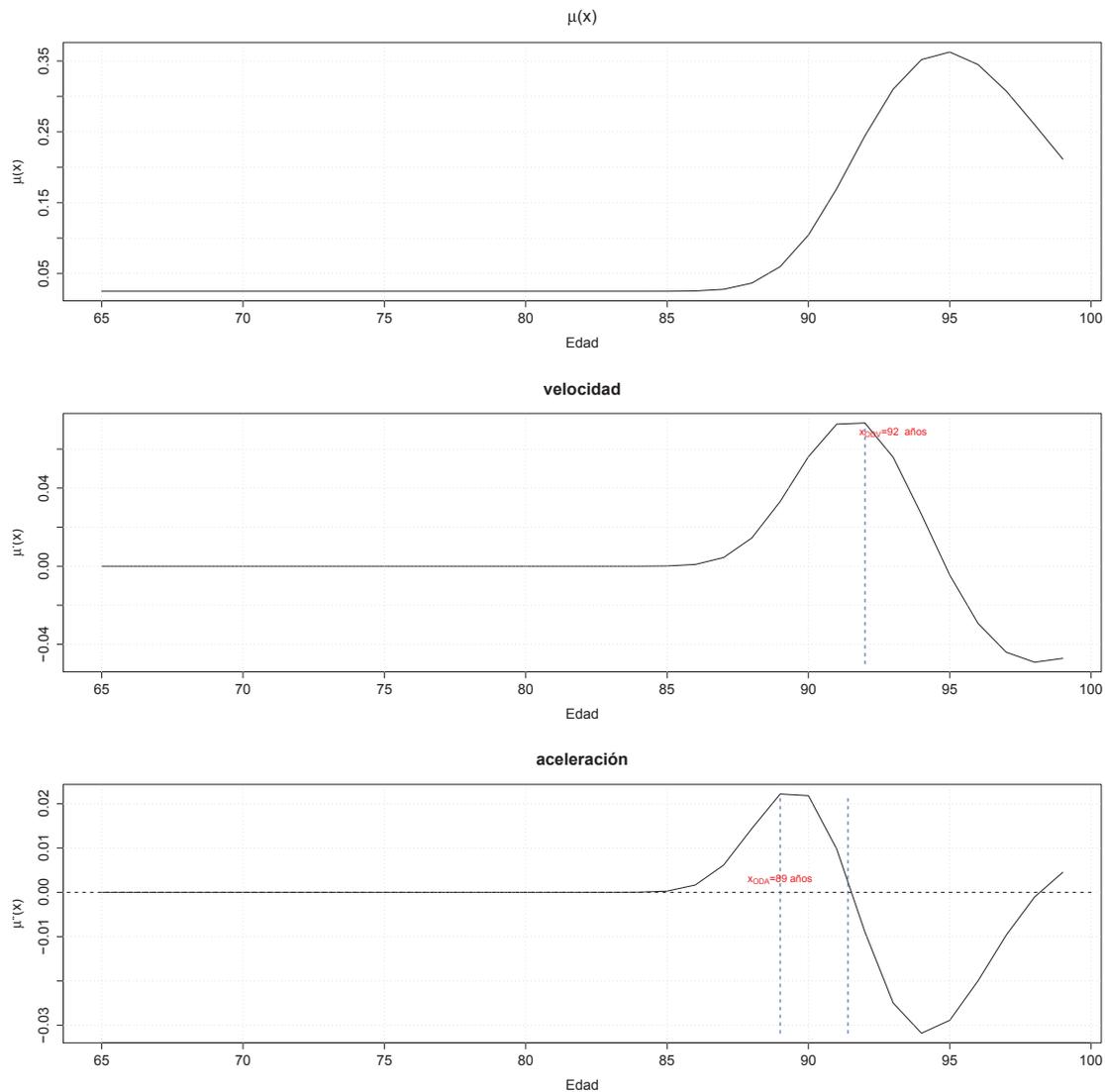


Figura 5.10: Funciones de velocidad y Aceleración considerando una fuerza de mortalidad μ_T para datos de mujeres ecuatorianas año 1991

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de tablas de mortalidad de un trabajo previo [14]

Notar que para el caso de las mujeres la velocidad de la mortalidad alcanza su máximo a partir de los 92 años, una vez más esto quiere decir que a partir de esta edad, la velocidad de la mortalidad empieza a disminuir. Esta edad corresponde también a la

edad donde la desaceleración de la mortalidad comienza. La función de aceleración alcanza su máximo a los 89 años, es decir a partir de esta edad la aceleración de la mortalidad empieza a disminuir.

5.1 Cálculo de las edades donde comienza la desaceleración de la mortalidad utilizando la metodología *LAR*

Para estimar la edad donde empieza la desaceleración de la mortalidad considerando la metodología *LAR* descrita en el capítulo 3, el procedimiento utilizado se describe a continuación:

- A partir de los datos de mortalidad se utilizó el valor de μ_x estimado por la expresión $\mu_x = -\ln(1 - q_x)$.
- Posteriormente se plantea un esquema de diferencias finitas para obtener los valores correspondientes a $u'(x)$.
- Finalmente se graficaron los valores resultantes y con lo que se observa el valor máximo de *LAR*.

Los resultados que se obtuvieron para los valores de *LAR* tanto para hombres como para mujeres fueron los siguientes:

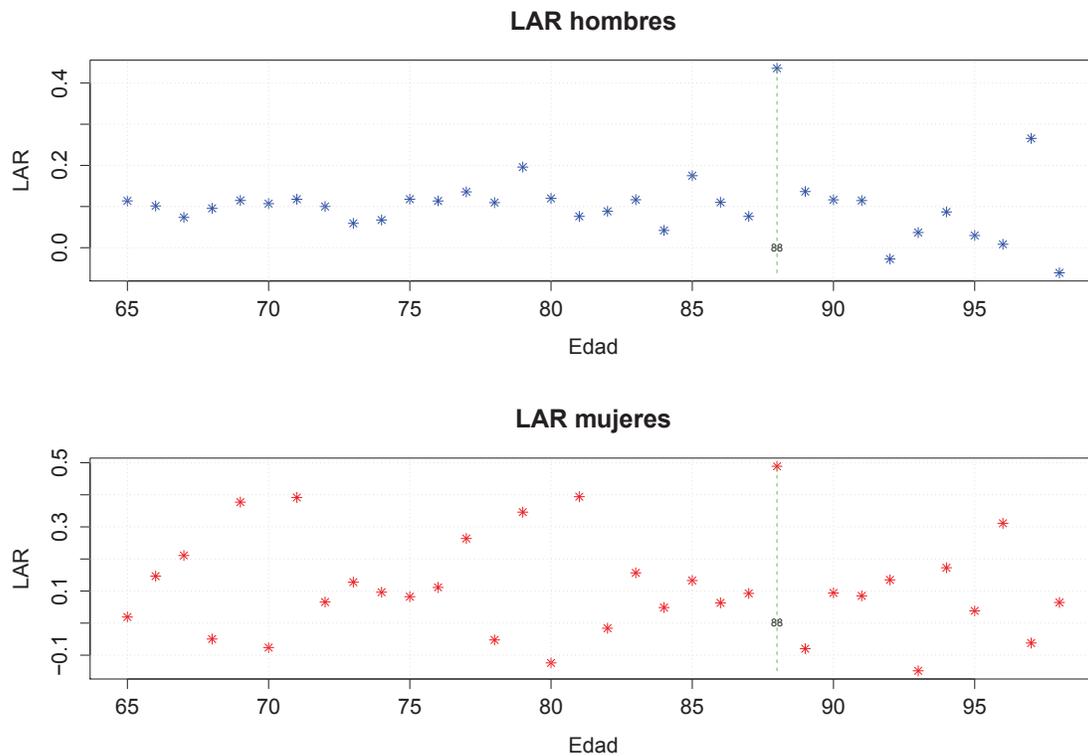


Figura 5.11: Tasa de envejecimiento de la tabla de vida para hombres y mujeres población ecuatoriana 1991.

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de tablas de mortalidad de un trabajo previo [14].

En la figura 5.11 se aprecia que los valores más altos LAR tanto para hombres como para mujeres corresponden a los 88 años de edad con 0,4358694 y 0,4889303 respectivamente.

Utilizando los datos provenientes del trabajo de Diego Huaraca [14], se calculó las edades de inicio de desaceleración de la mortalidad. Se obtuvo lo siguiente.

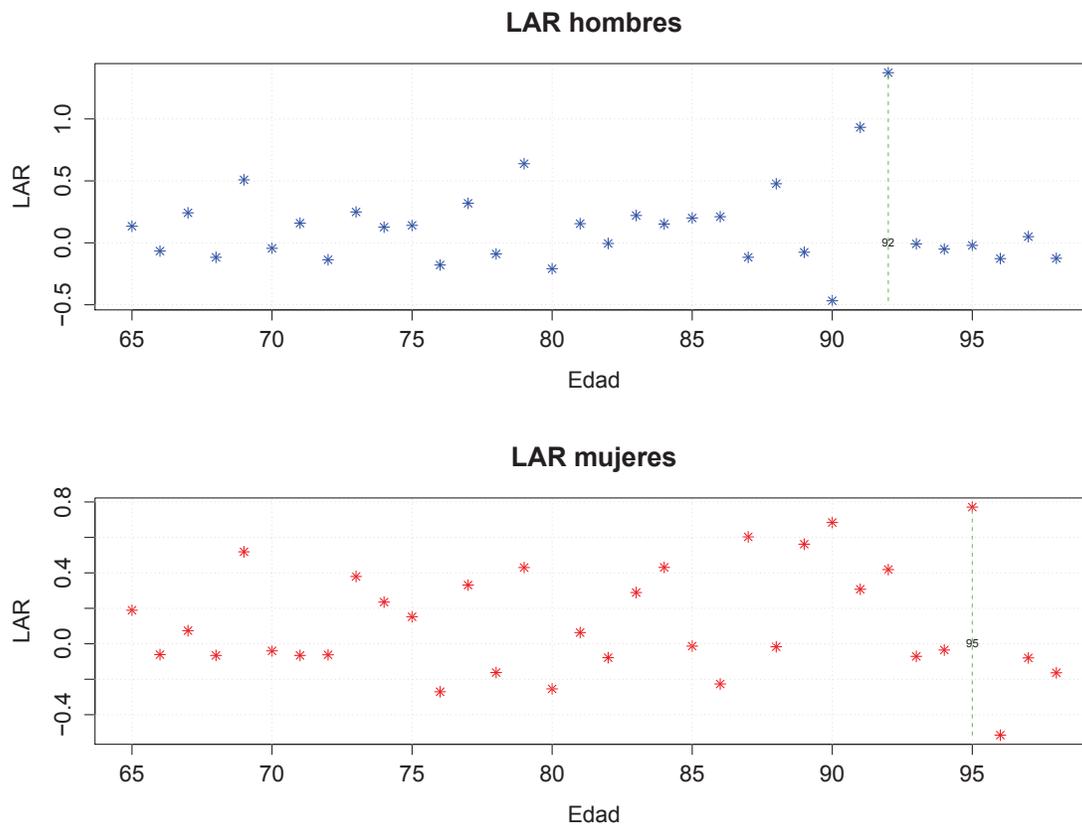


Figura 5.12: Tasa de envejecimiento de la tabla de vida para hombres y mujeres población ecuatoriana 1991.

Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos del trabajo de [14]

En la figura 5.12 se observa claramente que para el caso de los hombres, la desaceleración de la mortalidad comienza a los 92 años y a los 95 años para las mujeres.

Finalmente se muestra una tabla en donde se detalla los diferentes hallazgos.

		Inicio de la desaceleración de la mortalidad x_{ODV} .		Edad de inicio de disminución de la aceleración x_{ODA} .	
		Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Datos INEC	Modelo Logístico	91	96	83	86
	Modelo frailty logístico	93	96	83	86
	Modelo Gompertz logístico	91	96	83	86
	Modelo μ_{Γ}	92	99	80	84
	LAR	88	88	-	-
Datos DH	Modelo μ_{Γ}	91	92	88	89
	LAR	92	95	-	-

Tabla 5.1: Edades de inicio de desaceleración de la mortalidad y disminución de la aceleración

En la tabla 5.1, se muestra la edad de inicio de desaceleración de la mortalidad y la edad donde la aceleración comienza a disminuir, comparando tales edades podemos notar lo siguiente:

Para los hombres ecuatorianos en el año 1991, las edades de inicio de desaceleración de la mortalidad se presentaron entre los 88 y 93 años. Para mujeres ecuatorianas del mismo período con los datos provistos por el INEC, se obtuvo que el fenómeno buscado se da entre los 88 y 96 años, mientras que con la otra fuente de datos se da entre los 92 y 95 años.

De aquí se concluye también que hay una pequeña diferencia en el fenómeno de desaceleración de la mortalidad en hombres y en mujeres, pues se dan a diferentes edades, siendo menor para los hombres y mayor para las mujeres. Este resultado concuerda con que la esperanza de vida de las mujeres es más alta que la de los hombres, por lo que este fenómeno en las mujeres se presentará después que a los hombres.

Al utilizar el valor de LAR , se obtiene dos valores diferentes 88 años tanto para hombres como para mujeres considerando los datos del *INEC*, mientras que 92 y 95 años con los datos obtenidos del trabajo realizado por Diego Huaraca. Cabe recalcar que utilizando esta metodología solo se puede obtener la edad de inicio de la desaceleración de la mortalidad.

5.2 Resumen del trabajo

Primeramente, se llevó a cabo una revisión de los modelos a utilizar. Luego de recopilar tal información se seleccionó los modelos más importantes que según

la literatura son los más utilizados. Posteriormente, se revisó los métodos con los cuales se puede estimar la edad de inicio de la desaceleración de la mortalidad. Para la implementación de estos métodos se escogió de entre varias alternativas el software estadístico *R*. Durante la implementación fue necesario hacer un ajuste de mínimos cuadrados no lineal mediante técnicas numéricas y gráficas. Para este ajuste se utilizó la función `nls()` del paquete estándar de *R*. Este nos permitió ajustar los datos de tablas de mortalidad a los modelos de Gompertz, Weibull, logístico, frailty logístico, Gompertz logístico y el modelo μ_T propuesto por Mark Bebbington. De los modelos utilizados en el ajuste, se encontró que los de mejor ajuste fueron los modelos frailty logístico, logístico, Gompertz logístico, y el modelo propuesto por Mark Bebbington, para ello se utilizó el criterio de información de Akaike (*AIC*) y el criterio de información Bayesiano (*BIC*) que son medidas de calidad de ajuste. Además, se calcularon los intervalos de confianza para los parámetros y se realizó pruebas de hipótesis para analizar la significancia de los parámetros estimados en cada modelo.

Finalmente, al obtener las expresiones de la función fuerza de mortalidad se calculó la primera y segunda derivadas, con lo cual se estimó la edad de inicio de la desaceleración de la mortalidad. Este procedimiento se realizó con los datos del período 1991 – 2013, mismos que se muestran en el anexo B.

5.3 Aporte Personal

Durante la realización de este trabajo se utilizó diferentes herramientas las cuales se consideran una contribución importante para futuros estudios relacionados. Entre las herramientas que se utilizó podemos mencionar las siguientes:

El uso del coeficiente de entropía para argumentar la evolución de la población senescente en las pirámides poblacionales. La construcción de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis asintóticas las cuales en general en problemas no lineales resultan muy complicadas, fueron de gran ayuda para verificar que las estimaciones sean las adecuadas.

El desarrollo de todos los cálculos numéricos y gráficos en el software estadístico *R*, ya que hoy en día el uso de este lenguaje de programación se ha incrementado muchísimo en áreas relacionadas a la estadística y estadística aplicada. Finalmente, el principal aporte de este trabajo investigativo radica en el cálculo de las edades donde se inicia la desaceleración de la mortalidad en las edades avanzadas para la población ecuatoriana, el cual, a pesar de ser sumamente necesario por sus implicaciones, teóricas y prácticas, no había sido estudiado antes con el detalle que lo hemos realizado en este proyecto.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

6.1 Conclusiones

En el Ecuador, el fenómeno de desaceleración de la mortalidad en las edades avanzadas, es resultado del proceso de transición demográfica por el cual esta atravesando el país. En éste fenómeno también ha influido por ejemplo los avances en la medicina, los cuales han hecho que la esperanza de vida de la población aumente, dando como resultado, que la probabilidad de muerte en la vejez disminuya.

Los resultados obtenidos brindan herramientas para así estimar las probabilidades de muerte de una manera más precisa, especialmente para el grupo de edad que corresponde a la población envejecida. El estimar estas probabilidades es importante pues como se vió en el primer capítulo, el estado es el que cubre en su mayoría los gastos correspondientes al déficit de la población mayor a 65 años provocado en el proceso de transición demográfica. Además, después de este período se espera que la población senescente aumente significativamente con lo cual el estado debe incorporar políticas concernientes al grupo de población en estudio. Tales políticas deben ser con un horizonte de planificación a mediano y largo plazo.

De acuerdo a los resultados obtenidos se concluye lo siguiente:

1. El uso de modelos logísticos para la estimación de la función fuerza de mortalidad resultó adecuado para el estudio de la mortalidad de la población en edad avanzada, en nuestro caso se utilizó funciones de tipo logístico, las cuales permitieron obtener los resultados esperados, detectando la edad a la que el fenómeno comienza. Estos modelos, tienen como característica común que incluyen parámetros que no dependen de la edad. El fenómeno buscado no se pudo identificar con los modelos usuales como son el de Gompertz y el modelo de Weibull. Además, se utilizó el modelo propuesto por Mark Bebbington el

cuál se comportó de manera similar a los modelos logísticos.

2. Al observar las edades en la que se produce la desaceleración de la mortalidad mediante sus funciones de velocidad y aceleración , se concluye que para los tres modelos utilizados, las edades en que inicia este fenómeno son muy cercanas. Alrededor de los 92 años para hombres y 96 años para las mujeres. Por otro lado al calcular tales edades con la metodología *LAR* se encontró que las edades de inicio de desaceleración de la mortalidad empiezan alrededor de los 88 años tanto para hombres como para mujeres. Estos resultados además de los mostrados en el anexo B, muestran clara evidencia de presencia de este fenómeno en la población ecuatoriana, por lo que es importante su estudio.
3. La diferencia de 3 años en la edad de inicio de desaceleración de la mortalidad entre hombres y mujeres, concuerda con otros estudios realizados, pues generalmente la esperanza de vida de las mujeres es mayor a la de los hombres, de donde que la edad de inicio de la desaceleración de la mortalidad será mayor para las mujeres que para los hombres.
4. Una las posibles causas del fenómeno de desaceleración observado en las edades avanzadas es la falta de datos correspondientes a la población senescente.
5. Para el cálculo de las edades donde se produce la desaceleración de la mortalidad se utilizó el estimador $\mu(x) = -\ln(1 - qx)$, bajo la suposición de que la fuerza de mortalidad es constante para el intervalo de un año. Este estimador resultó de gran ayuda, pues en las tablas de vida la función fuerza de mortalidad usualmente no viene calculada.
6. En el período en estudio 1991 – 2013 se apreció que las edades donde se inicia la desaceleración de la mortalidad no difirieron significativamente. ¹. Estas edades difieren cuando se utiliza un período más amplio, para el caso de ciertos países europeos se cuenta con la base de datos Human mortality database, los cuales cuentan con tablas de vida para períodos de más de 100 años en algunos casos, esto permite evidenciar que las edades donde se produce la desaceleración de la mortalidad difieren notoriamente. Incluso se podría evidenciar eventos los cuales hicieron que la mortalidad de la población tenga una mayor variación, tales eventos pueden ser epidemias, guerras, etc.

¹Tales resultados pueden observarse en el anexo B

6.2 Recomendaciones

Se recomienda lo siguiente:

1. Promover este tipo de estudios de ámbito estadístico y demográfico, de modo que se pueda observar la evolución de las edades donde se dá el fenómeno de desaceleración de la mortalidad.
2. Para estudios posteriores, se recomienda el uso de funciones de tipo logístico para ajustar la función fuerza de mortalidad, pues con la metodolgia descrita en este trabajo se puede obtener la edad donde el fenómeno de desaceleración de la mortalidad comienza así como también la edad de cuando la aceleración empieza a disminuir.
3. Este trabajo se puede utilizar como punto de partida para analizar el tiempo de fallo de ciertos sistemas mecánicos, con el objeto de hallar el tiempo al que la tasa instantánea de fallo empieza a disminuir. Por lo cual se recomienda replicar éste análisis con datos no solo de mortalidad de poblaciones humanas.
4. Es importante impulsar el ahorro a las actuales generaciones de jóvenes correspondientes al grupo de edad en capacidad de trabajar y producir, pues al final de la transición demográfica este grupo de edad pasará a ser el grupo de población senescente. Impulsando el ahorro y al inversión en activos en este grupo de edad se podrá aprovechar los recursos obtenidos en la vejez, lo cual sería de beneficio para el estado en la fase final de la transición demográfica.

Bibliografía

- [1] R. E. BEARD, *Appendix: Note on some mathematical mortality models*, in Ciba Foundation Symposium-The Lifespan of Animals (Colloquia on Ageing), Volume 5, Wiley Online Library, 1959, pp. 302–311.
- [2] M. BEBBINGTON, C.-D. LAI, AND R. ZITIKIS, *Modelling deceleration in senescent mortality*, *Mathematical Population Studies*, 18 (2011), pp. 18–37.
- [3] N. L. BOWERS, H. U. GERBER, J. C. HICKMAN, D. A. JONES, AND C. J. NESBITT, *Actuarial mathematics*, vol. 2, Society of Actuaries Itasca, Ill., 1986.
- [4] Y. CHÁVEZ AND P. MEDINA, *Estructura ocupacional y bono demográfico en el Ecuador*, *Revista Analítika*, (2012).
- [5] M. COLOMER I DESPUIG, *La Heterogeneidad de la mortalidad como indicador de la salud comunitaria.*, Universidad de Barcelona, 2000.
- [6] A. C. ECONOMOS, *A non-gompertzian paradigm for mortality kinetics of metazoan animals and failure kinetics of manufactured products*, *Age*, 2 (1979), pp. 74–76.
- [7] L. A. GAVRILOV AND N. S. GAVRILOVA, *The biology of life span: a quantitative approach.*, (1991).
- [8] A. GOLUBEV, *How could the gompertz–makeham law evolve*, *Journal of theoretical Biology*, 258 (2009), pp. 1–17.
- [9] B. GOMPERTZ, *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies*, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (1825), pp. 513–583.
- [10] M. GREENWOOD, *The biostatistics of senility*, *Human Biology*, 11 (1939), pp. 1–23.
- [11] S. HORIUCHI, *Interspecies differences in the life span distribution: Humans versus invertebrates*, *Population and Development Review*, (2003), pp. 127–151.
- [12] S. HORIUCHI AND A. J. COALE, *Age patterns of mortality for older women: An analysis using the age-specific rate of mortality change with age*, *Mathematical Population Studies*, 2 (1990), pp. 245–267.

- [13] S. HORIUCHI AND J. R. WILMOTH, *Deceleration in the age pattern of mortality at older ages*, *Demography*, 35 (1998), pp. 391–412.
- [14] D. HUARACA, *Ajuste y Estimación de tablas de mortalidad dinámicas de la población ecuatoriana hasta el año 2030*, Julio 2014.
- [15] P. LIEDO, D. OROZCO, J. VAUPEL, ET AL., *Slowing of mortality rates at older ages in large medfly cohorts*, *Science*, 258 (1992), pp. 457–461.
- [16] P. J. LINDOP, *Growth rate, lifespan and causes of death in sas/4 mice*, *Gerontology*, 5 (1961), pp. 193–208.
- [17] K. OHISHI, H. OKAMURA, AND T. DOHI, *Gompertz software reliability model: estimation algorithm and empirical validation*, *Journal of Systems and Software*, 82 (2009), pp. 535–543.
- [18] S. D. PLETCHER, *Model fitting and hypothesis testing for age-specific mortality data*, *Journal of Evolutionary Biology*, 12 (1999), pp. 430–439.
- [19] J.-M. ROBINE AND J. W. VAUPEL, *Supercentenarians: Slower ageing individuals or senile elderly?*, *Experimental Gerontology*, 36 (2001), pp. 915–930.
- [20] D. STEINSALTZ, *Re-evaluating a test of the heterogeneity explanation for mortality plateaus*, *Experimental gerontology*, 40 (2005), pp. 101–113.
- [21] B. L. STREHLER AND A. S. MILDVAN, *General theory of mortality and aging*, *Science*, 132 (1960), pp. 14–21.
- [22] A. R. THATCHER, V. KANNISTO, AND J. W. VAUPEL, *The force of mortality at ages 80 to 120.*, (1998).
- [23] J. W. VAUPEL, *Kindred lifetimes: frailty models in population genetics.*, (1990).
- [24] J. W. VAUPEL AND A. BAUDISCH, *New ways to look at mortality deceleration*, (2008).
- [25] J. W. VAUPEL, A. BAUDISCH, M. DÖLLING, D. A. ROACH, AND J. GAMPE, *The case for negative senescence*, *Theoretical population biology*, 65 (2004), pp. 339–351.
- [26] J. S. WEITZ AND H. B. FRASER, *Explaining mortality rate plateaus*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 98 (2001), pp. 15383–15386.
- [27] A. I. YASHIN, I. A. IACHINE, AND A. S. BEGUN, *Mortality modeling: A review*, *Mathematical Population Studies*, 8 (2000), pp. 305–332.

Anexos

Anexo A

Definiciones Importantes

A.1 Variable aleatoria

Una variable aleatoria X es una función que asigna a cada elemento del espacio muestral un número real, es decir para cada $\omega \in \Omega$ $X(\omega) \in \mathbb{R}$

A.2 Distribución de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria definida en algún espacio muestral Ω . La función de distribución de X se define por:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x) \quad (\text{A.1})$$

A.3 Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos definidos en algún espacio muestral Ω . Si $P(B) > 0$ entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{A.2})$$

se llama la probabilidad condicional de A dado B .

A.4 Proceso de Wiener

Un proceso estocástico $W(t), t \geq 0$ se llama proceso de Wiener con variación (Wiener-Process with drift) si satisface las siguientes propiedades:

- $W(0)=0$.

- $W(t), t \geq 0$ es estacionario, de incrementos independientes.
- Cada incremento $W(t) - W(s)$ tiene una distribución normal con media $\mu(t - s)$ y varianza $\sigma^2(t - s)$.

Anexo B

Edades de inicio de desaceleración de la mortalidad para datos de población ecuatoriana, período 1991 – 2013

Año	Logístico		Frailty logístico		Gompertz logístico		μ_{Γ}	
	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODA}
1991	-	83	93	83	92	80	91	83
1992	90	83	92	83	91	80	90	83
1993	91	83	94	83	92	81	91	83
1994	91	83	93	83	92	81	91	83
1995	90	83	92	83	90	81	-	-
1996	91	83	93	83	91	81	91	83
1997	-	-	93	83	91	81	90	83
1998	90	83	92	83	90	81	90	83
1999	90	83	92	83	91	81	90	83
2000	-	-	92	83	90	81	-	-
2001	90	83	92	83	91	81	90	83
2002	90	83	92	83	90	81	90	83
2003	90	83	-	-	90	81	90	83
2004	90	83	92	83	91	81	90	83
2005	90	84	92	83	91	81	90	84
2006	90	84	-	-	91	81	90	84
2007	91	84	93	84	91	82	91	84
2008	-	-	92	84	91	82	90	84
2009	90	84	-	-	91	82	90	84
2010	91	85	93	84	91	82	91	85
2011	91	85	93	84	91	82	91	85
2012	91	85	93	84	91	83	91	85
2013	91	85	93	85	92	83	91	85

Tabla B.1: Edades de inicio de la desaceleración de la mortalidad para hombres con datos de Ecuador para el período 1991 – 2013

Año	Logístico		Frailty logístico		Gompertz logístico		μ_{Γ}	
	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODV}	x_{ODA}	x_{ODA}
1991	96	86	96	86	99	84	96	86
1992	97	86	96	86	99	85	97	87
1993	95	85	96	85	99	83	97	81
1994	95	85	96	86	99	83	95	85
1995	95	86	96	86	99	84	96	86
1996	95	86	95	86	99	83	96	86
1997	94	86	95	86	97	83	94	86
1998	94	86	95	86	99	84	94	86
1999	94	86	95	86	98	84	94	86
2000	95	86	95	86	99	84	95	86
2001	94	86	95	86	98	84	94	86
2002	94	86	95	86	98	84	94	86
2003	94	86	95	86	98	84	94	86
2004	94	86	95	86	97	84	94	86
2005	94	86	95	86	97	84	94	86
2006	94	86	95	86	98	84	94	86
2007	94	86	95	86	98	84	94	86
2008	94	86	95	86	98	84	94	86
2009	94	86	95	86	98	84	94	86
2010	95	86	95	86	98	84	95	87
2011	94	86	95	86	98	84	95	87
2012	95	87	95	87	99	85	95	87
2013	95	86	95	87	98	85	95	87

Tabla B.2: Edades de inicio de la desaceleración de la mortalidad para mujeres con datos de Ecuador para el período 1991 – 2013

Anexo C

Códigos implementados en R

C.1 Código para realizar el ajuste por mínimos cuadrados no lineales a las diferentes funciones

```
#####Frailty Logístico#####
ajuste1<-nls(ux~(exp(B)*exp(alpha*Edad))/(1+s^2*(exp(alpha*Edad)-1)*exp(B)/alpha),
            data=datos,start=list(B=-14.65,s=0.569,alpha=0.157),trace=TRUE,algorithm="port")
#####Weibull#####
ajuste2<-nls(ux~gamma*beta*(beta*Edad)^(gamma-1),
            data=datos,start=list(gamma=2,beta=5.68),trace=TRUE,algorithm="port")

#####Gompertz#####
ajuste3<-nls(ux~a*exp(b*Edad),
            data=datos,start=list(a=0.000217126,b= 0.0797629),trace=TRUE,
            nls.control(maxiter=100))

#####Logístico#####
ajuste4<-nls(ux~gamma+((k*A*exp(alpha*Edad))/(1+A*exp(alpha*Edad))),
            data=datos,start=list(gamma=0.011,A=4.3e-07,k=0.465,alpha=0.174),
            trace=TRUE,nls.control(maxiter=100))

#####Gompertz logístico#####
ajuste5<-nls(ux~k*(1+(A)*exp(alpha*Edad))/(1+(B)*exp(alpha*Edad)),
            data=datos,start=list(k=0.65,A=exp(1.9*10^(-7)),B=1.9*10^(-7),alpha=0.174),trace=TRUE ,
            control=list(maxiter = 5000, tol = 1e-04, minFactor = 1/1024))

###Modelo propuesto por Mark Bebbington###
library(minpack.lm)
##Valores iniciales
a=0.018
b=5.01
c=12.3
d=2.29
parStart<-list(a=a,b=b,c=c,d=d)
```

```

ux<-datos$ux
####cotas
lower.bound <- c(a=0, b=-Inf, c=1,d>0.00001)
upper.bound <- c(a=Inf,b=Inf,c=Inf,d=Inf)
#####funcion explicita###
getPred<-function(p,xdata)
p$a+(((exp(p$c))^(p$b))*p$d)/(xdata^(1+(p$d*p$b))))*exp(-exp(p$c)*(xdata^(-p$d)))

###funcion de residuos###
residFun<-function(p1,observed,xdata)observed-getPred(p1,xdata)
ajuste6<-nls.lm(par=parStart,lower=lower.bound,
upper=upper.bound,fn=residFun,observed=ux,xdata=datos$Edad,
control = nls.lm.control(maxiter=100,nprint=1))

```

C.2 Intervalos de confianza al 95 %.

```

int_de_confianza<-function(ajuste){
ind<-length(summary(ajuste)$par[,1])
a<-matrix(nrow = ind,ncol=2)
for(i in c(1:ind)){
  a[i,1]<-summary(ajuste)$par[i,1]-
  (abs(qt(.025, df=summary(ajuste)$df[2]))*summary(ajuste)$parameters[i,2])
  a[i,2]<-summary(ajuste)$par[i,1]+
  (abs(qt(.025, df=summary(ajuste)$df[2]))*summary(ajuste)$parameters[i,2])
}
colnames(a)<-c("2.5% ", "97.5%")
a<-cbind(xtable(summary(ajuste)$par[,1:2]),a)
xtable(a, digits = 4)
}

```

C.3 Prueba de hipótesis sobre los parámetros.

```

####vector de valores de q correspondientes a la Hipótesis nula \beta_j=q
hctest<-function(ajuste,h){
  ind<-length(summary(ajuste)$par[,1])
  tc<-vector("numeric",ind)
  prueba<-vector("numeric",ind)
  for(i in c(1:ind))
  {
  tc[i]<-(summary(ajuste)$parameters[i,1]-h[i])/summary(ajuste)$parameters[i,2]
  }
  for(i in c(1:ind))

```

```
{  
  prueba[i]<-  
  ifelse(abs(tc[i])>qt(.975, df=summary(ajuste)$df[2]),  
         "Se rechaza la hipótesis nula.", "No se rechaza la hipótesis nula.")}  
xtable(cbind(abs(tc), qt(.975, df=summary(ajuste)$df[2]), data.frame(prueba)), digits=4)  
}
```