

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO

" REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO "

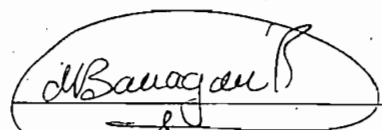
TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO
DE INGENIERO EN ELECTRONICA Y CONTROL

FRANCISCO GUERRERO NAJERA

AGOSTO DE 1984



Certifico que el presente
trabajo ha sido realizado
en su totalidad por el Sr.
Francisco Guerrero Nájera.

A handwritten signature in black ink, enclosed within a hand-drawn oval. The signature appears to read "M. Barragan B." with a stylized flourish at the end.

ING. MARCO BARRAGAN B.

Director de Tesis

DEDICATORIA

A mis Padres

A mi Esposa e Hijo

AGRADECIMIENTO

Quiero dejar constancia de mi agradecimiento al Ing. Marco Barragán B. por su acertada dirección; al Sr. Teodoro Hernandez M. sin cuya colaboración no hubiese podido salir adelante; al Ing. Efraín del Pino por su ayuda y colaboración en el desarrollo de los programas; a la Srta. Ana Viteri, por el trabajo mecanográfico. En fin, quiero agradecer a todas aquellas personas que, en una u otra forma, ayudaron a la realización de este trabajo.

INDICE

Pág.

CAPITULO I

1.1	Introducción	1
-----	--------------------	---

CAPITULO II

2.1	Realimentación Discreta de Estado	4
2.1.1	Discretización de las Ecuaciones de Estado	5
2.1.2	Análisis de la Representación en Variables de Fase	11
2.1.3	Localización Arbitraria de Polos	25
2.2	Realimentación Optima de Estado	37
2.2.1	Conceptos básicos de Control Optimo	37
2.2.2	Programación Dinámica	44
2.2.3	El Regulador Lineal Discreto	48
2.2.4	Aplicación de Control Optimo a Realimentación de Estado	61
2.2.5	Diseño	63

CAPITULO III

3.1	Programas Desarrollados	67
3.1.1	Programa Maestro	68
3.1.2	Programa ENTRADA2	72
3.1.3	Programa de Cálculos Iniciales (CALINI)	74
3.1.4	Programa REALDISEST	90
3.1.5	Programa REALOPTEST	95

	Pág.
3.1.6 Programa SALIDA	100
3.2 Ejemplos	103
3.2.1 Ejemplo 1	103
3.2.2 Ejemplo 2	127
3.2.3 Ejemplo 3	134
3.2.4 Ejemplo 4	144
3.2.5 Ejemplo 5	149

CAPITULO IV

4.1 Conclusiones y Recomendaciones	156
4.1.1 Discretización, Controlabilidad y Transformación a Variables de Fase	156
4.1.2 Realimentación Discreta de Estado	158
4.1.3 Realimentación Optima de Estado	160
4.1.4 Resumen	162

APENDICES

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO I

1.1 INTRODUCCION.

El presente trabajo es una continuación de la Tesis del Ing. J.C. Guerra, denominada "Realimentación de Estado" y que se refiere al diseño de sistemas de control en sistemas análogos utilizando la técnica del mismo nombre. En cambio, en este caso, se trata de una generalización, pues ahora se tiene la posibilidad de manejar tanto sistemas análogos como discretos o digitales; además se incluye una técnica de diseño llamada Realimentación Óptima de Estado. A continuación se hace una somera explicación de los objetivos que se persiguen.

La primera técnica a la que se hace mención consiste en conseguir cumplir con ciertas especificaciones de diseño mediante la localización de polos; esto se consigue, realimentando todos los estados del sistema a través de amplificadores lineales, cuyas ganancias forman el vector de realimentación \underline{f} que es el objetivo matemático del diseño. Una de las ventajas que se obtienen, es que no se requieren varias tentativas para conseguirlo, pues una vez determinada la posición que deben tener los polos de lazo cerrado, el vector \underline{f} se determina de manera única.

Empleando una herramienta llamada Programación Dinámica y la Realimentación de Estado y con el objeto de minimizar un funcional denominado criterio de funcionamiento o costo, se consigue hallar un vector de realimentación variable en cada período, que puede estar determinado

por la frecuencia de un muestreador o por el ciclo de reloj de un sistema digital. Esto se denomina la Realimentación Óptima de Estado.

Para realizar cualquiera de estas opciones, ya sea localizar los polos o minimizar costos, el sistema debe estar descrito en variables de estado, lo que no es una restricción, puesto que, prácticamente cualquier proceso físico puede ser descrito por esta modelación. Hay que anotar, sin embargo, que no todos los sistemas son susceptibles de controlarse por medio de las técnicas antes citadas; una condición que deben cumplir es que sean controlables, lo que en pocas palabras significa que los estados del sistema puedan ser "manejados" por una entrada dada. Además, la teoría y los programas suponen que la planta que es objeto de diseño, es lineal, invariante en el tiempo y con una entrada y una salida.

El Capítulo II detalla el desarrollo teórico y analítico que fundamenta lo anteriormente expuesto; está dividido en dos partes. En la primera, que trata de la Realimentación Discreta de Estado, se presentan los siguientes puntos:

- Discretización de las ecuaciones de estado cuando se tienen sistemas continuos.
- Análisis de la representación de los procesos físicos en variables de fase o forma canónica controlable, donde se explica detalladamente el concepto de Controlabilidad y la relación con las ecuaciones de diferencias y la función de transferencia de la planta, y,
- Teoría de la realimentación de estado y la localización arbitraria de polos.

En la segunda parte se exponen los siguientes puntos:

- Conceptos fundamentales de control óptimo, en la que se pone énfasis en el significado de lo que es un criterio de funcionamiento.
- Programación Dinámica, desarrollo y utilidad.
- El Problema del Regulador Lineal, cuya solución es la base de la Realimentación Óptima de Estado.
- Aplicación de la Realimentación Óptima de Estado; y, finalmente,
- Diseño, donde se presentan los criterios a seguirse para utilizar esta técnica.

El Capítulo III contiene una descripción detallada de los programas, que son el objeto de esta tesis; se presentan los fundamentos teóricos, diagramas de flujo y además, listados de las variables utilizadas en cada uno de ellos. Se desarrollan también varios ejemplos, con el fin de demostrar la validez del trabajo y de hacer más claras las ideas expuestas a lo largo de él.

Por último, en el Capítulo IV se exponen las conclusiones y recomendaciones acerca del desarrollo mismo de los programas, así como de la parte teórica en que se basan.

Se espera, con ésto, contribuir en una pequeña parte a completar la biblioteca de programas del Area de Sistemas de Control proporcionando una herramienta más para el diseño y análisis de sistemas de control discreto, que tanto avance tienen en éstos últimos tiempos.

C A P I T U L O I I

2.1 REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO.

La gran mayoría de sistemas pueden ser representados por la técnica de las variables de estado, puesto que esta modelación no tiene restricciones respecto a la clase del sistema; que puede ser análogo o digital, lineal o no, o puede ser independiente del tiempo o variante en él.

Además, la técnica de la Realimentación de Estado es un campo sumamente interesante: es posible, por medio de esta técnica, escoger un valor adecuado de ganancia para cumplir con ciertas especificaciones y además localizar los polos de lazo cerrado arbitrariamente para satisfacer otras especificaciones.

Lo que interesa es la Realimentación Discreta de Estado y para ello se consideran sistemas lineales discretos con planta digital o análoga. Cuando se tiene el primer caso, y todas las entradas y salidas son digitales el sistema puede ser descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}x(k) + \underline{B}u(k) \quad (2.1)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}x(k) + \underline{D}u(k) \quad (2.2)$$

Donde A es una matriz de orden $n \times n$, B es una matriz $n \times p$, C

es una matriz $q \times n$ de \underline{D} es una matriz $q \times p$; n es el orden del sistema; p es el número de entradas y q es el número de salidas.

Se consideran solamente sistemas lineales discretos con una entrada ($p=1$) y una salida ($q=1$) de tal forma que las ecuaciones (2.1) y (2.2) quedan de la siguiente manera:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) \quad (2.3)$$

$$y(k) = \underline{c}\underline{x}(k) + du(k) \quad (2.4)$$

Si se tiene planta análoga es necesario discretizar las ecuaciones de estado del sistema continuo.

2.1.1 DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO.

Un sistema análogo tiene su representación a variables de estado con ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t) \quad (2.5)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}u(t) \quad (2.6)$$

Se añaden elementos de muestreo y retención de orden cero (r.oc.) para obtener un sistema discreto como se muestra en la Fig. 2.1.

En este caso es necesario discretizar las ecuaciones de estado.

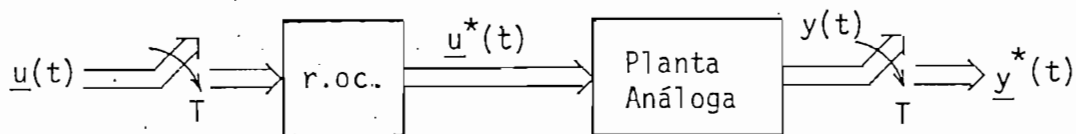


Fig. 2.1 Sistema discreto con planta análoga.

La solución de la ecuación de estado (2.5) llamada ecuación dinámica es:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\phi}(t, \tau) \underline{B}(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Que es la solución de $\underline{x}(t)$ considerando un sistema variante en el tiempo.

Si se muestrea la señal en períodos T lo suficientemente pequeños como para reconstruir la señal original de la señal muestreada, se puede afirmar que la solución de la ecuación (2.7) es válida en el intervalo $kT \leq t \leq (k+1)T$ donde k es un número entero mayor que cero, y además, puesto que el vector $\underline{u}^*(t)$ se mantiene constante durante los períodos de muestreo debido al elemento retenedor de orden cero, $\underline{x}(t)$ puede escribirse como:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\phi}(t, \tau) \underline{B}(\tau) d\tau \underline{u}(kT) \quad (2.8)$$

donde $kT \leq t \leq (k+1)T$

A la función $\phi(t, t_0)$ se la llama matriz de transición de estado y se la obtiene de una manera compleja, su determinación está fuera del alcance de este trabajo, simplemente se expone la fórmula con la que se obtiene esta matriz:

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{e}^{\int_{t_0}^t \underline{A}(\tau) d\tau} \quad (2.9)$$

Puesto que $\underline{A}(t) = \underline{A}$ ya que se consideran sistemas invariantes en el tiempo, la ecuación de la matriz de transición de estados toma la siguiente forma:

$$\underline{\phi}(t, t_0) \underset{\underline{A} = \text{const.}}{=} \underline{\phi}(t-t_0) = \underline{e}^{\underline{A}(t-t_0)} \quad (2.10)$$

Volviendo a la ecuación (2.8), se puede describir la transición de estados entre los instantes de muestreo haciendo $kT = t_0$ y $(k+1)T = t$ con lo que se obtiene:

$$\underline{x}[(k+1)T] = \underline{\phi}[(k+1)T, kT] \underline{x}(kT) + \left\{ \int_{kT}^{(k+1)T} \underline{\phi}[(k+1)T, \tau] \underline{B}(\tau) d\tau \right\} \underline{u}(kT) \quad (2.11)$$

Sea $\theta [(k+1)T]$ el integral; así:

$$\theta [(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \underline{\phi} [(k+1)T, \tau] B(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

entonces se obtiene:

$$\underline{x} [(k+1)T] = \underline{\phi} [(k+1)T, kT] \underline{x}(kT) + \underline{\theta} [(k+1)T, kT] \underline{u}(kT) \quad (2.13)$$

En este momento se tiene discretizada ya la ecuación dinámica para el caso de un sistema lineal, variante en el tiempo.

Si se considera el caso invariante en el tiempo, por medio de las ecuaciones (2.10) y (2.12) en la ecuación (2.13), se obtiene:

$$\underline{x} [(k+1)T] = \underline{\phi} [(k+1)T - kT] \underline{x}(kT) + \underline{\theta} [(k+1)T - kT] \underline{u}(kT) \quad (2.14)$$

$$\underline{x} [(k+1)T] = \underline{\phi}(T) \underline{x}(kT) + \underline{\theta}(T) \underline{u}(kT) \quad (2.15)$$

Nótese que las matrices ϕ y θ son invariantes en el tiempo.

Con el objeto de obtener una notación similar a la de la ecuación (2.1) se llama:

$$\underline{A}_D = \underline{\phi}(T) \quad (2.16)$$

$$\underline{B}_D = \underline{\theta}(T) \quad (2.17)$$

Ahora la ecuación de salida; cambiando t por kT en la ecuación (2.6) queda:

$$\underline{y}(kT) = \underline{C}\underline{x}(kT) + \underline{D}u(kT) \quad (2.18)$$

Por notación se eliminará en lo sucesivo a T de las ecuaciones, para obtener:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_D \underline{x}(k) + \underline{B}_D \underline{u}(k) \quad (2.19)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) + \underline{D}u(k) \quad (2.20)$$

Para el caso de una entrada y una salida se tiene:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_D \underline{x}(k) + \underline{b}_D \underline{u}(k) \quad (2.21)$$

$$y(k) = \underline{c}\underline{x}(k) + d u(k) \quad (2.22)$$

dónde $\underline{A}_D = \underline{e}^{\underline{A}T}$ (2.23)

$$\underline{b}_D = \int_{kT}^{(k+1)T} \underline{e}^{\underline{A}[(k+1)T-\tau]} \underline{b} d\tau \quad (2.24)$$

y puesto que T es pequeño, se puede aproximar \underline{b}_D de la siguiente manera: (Fig. 2.2)

Se sabe que el integral definido simple representa el área encerrada por la función a integrarse, el eje de variable de integración y los límites de integración. Si el período de integración es pequeño, esta área puede calcularse aproximadamente como:

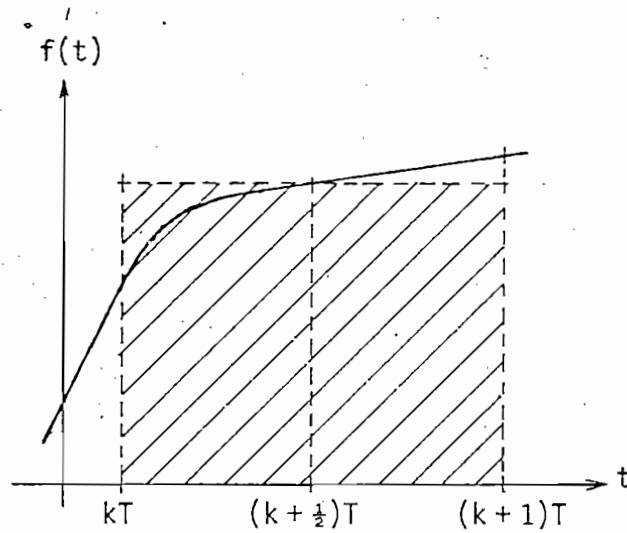


Fig. 2.2 Aproximación de la integral, por la regla de medio punto.

$$\text{Area} = f(kT + T/2)T \quad (2.25)$$

Aplicando esto se puede obtener \underline{b} así:

$$\underline{b}_D = \underline{e} \frac{A[(k+\frac{1}{2})T]}{\underline{b} \times T} \quad (2.26)$$

Puesto que \underline{b} es constante, se puede escribir, para $k = 0$,

$$\underline{b}_D = \underline{e} \frac{A(T/2)}{\underline{b} \times T} \quad (2.27)$$

El escalar d en la ecuación (2.22) representa en la Fig. 2.3 un enlace directo entre la entrada y la salida, que generalmente no existe, por lo que se considerará, en la presente tesis, $d = 0$. Con estas consideraciones, en resumen se tiene:

1.- Planta discreta o digital:

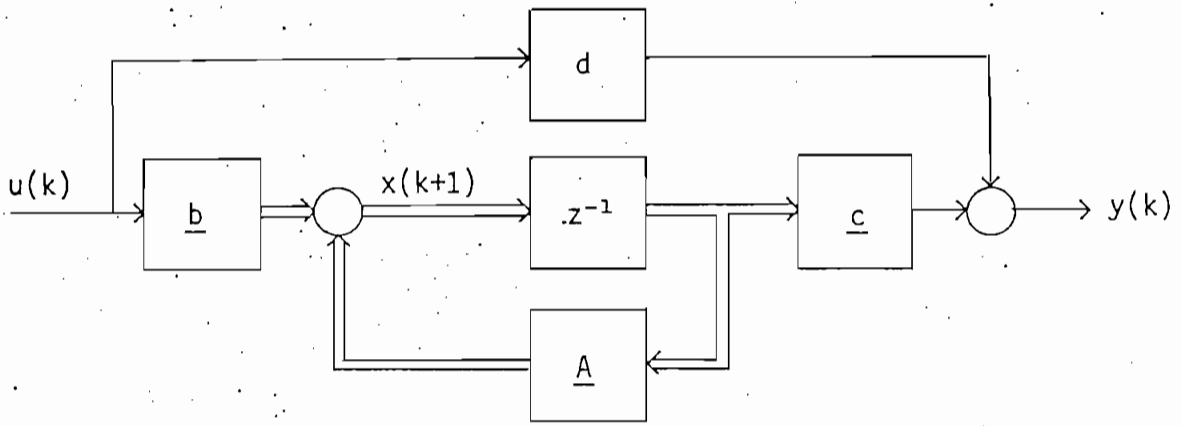


Fig. 2.3 Diagrama de bloques del sistema descrito a variables de estado; z^{-1} es un retardo en el tiempo.

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}x(k) + \underline{b}u(k) \tag{2.28a}$$

$$y(k) = \underline{c}x(k) \tag{2.28b}$$

2.- Planta análoga:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_D \underline{x}(k) + \underline{b}_D u(k) \tag{2.29a}$$

$$y(k) = \underline{c}x(k) \tag{2.29b}$$

Donde \underline{A}_D y \underline{b}_D están definidos por las ecuaciones (2.23) y (2.27) respectivamente.

2.1.2 ANALISIS DE LA REPRESENTACION EN VARIABLES DE FASE.

La representación de sistemas en variables de estado, no es única, por lo que se han desarrollado varios métodos para seleccionar

Las variables de estado. De estos métodos sólo interesan las formas canónicas, especialmente la forma canónica controlable llamada también descripción de sistemas a variables de fase.

En general, las formas canónicas son tres: forma canónica de Jordan, forma canónica observable y forma canónica controlable.

La forma canónica de Jordan muestra las ecuaciones de estado desacopladas entre sí, cuando los autovalores o polos de lazo cerrado no son repetidos, de tal manera que la matriz \underline{A} aparece como una matriz diagonal, en la que los elementos de la diagonal son los autovalores y los demás son ceros,:

$$\underline{A}^J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Si se tienen autovalores repetidos, se forman los llamados bloques de Jordan: así, sea un sistema de orden 5 con dos autovalores λ_1 de multiplicidad 3 y λ_2 de multiplicidad 2, entonces la matriz \underline{A} puede tener la siguiente forma:

$$\underline{A}^J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Se han marcado con líneas de puntos los bloques de Jordan.

Si el sistema es observable, es decir si para un tiempo inicial k_0 cualquier estado $x_i(k_0)$ $i=1,2,\dots,n$ puede ser determinado a partir de $y(k)$, $u(k)$ conocidos, con $k_0 \leq k \leq k_M$ donde k_M es un tiempo finito, entonces existe la representación llamada forma canónica observable, en este caso \underline{A} toma la forma:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

y el vector \underline{c} tiene la forma:

$$\underline{c} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (2.33)$$

En la ecuación (2.32) los a_i son los coeficientes de la ecuación de diferencias que describe el sistema; en el caso de una entrada y una salida esto es:

$$y(k+n) + a_n y(k+n-1) + \dots + a_2 y(k+1) + a_1 y(k) = u(k) \quad (2.34)$$

Por otro lado, la descripción a variables de fase se puede obtener si el sistema es controlable. El concepto de controlabilidad es sumamente importante pues sólo si un sistema es controlable se puede realizar la Realimentación de Estado. Por esta razón se analizará un

poco más este punto.

- Definición de Controlabilidad.-

Sea el sistema descrito por las ecuaciones (2.28); se dice que es completamente controlable si para un período finito $k_N \geq k_0$ existe un grupo de controles $\underline{u}(k_i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ tal que el estado inicial $\underline{x}(k_0)$ pueda ser transferido a cualquier estado final $\underline{x}(N)$.

El sistema lineal invariante en el tiempo es controlable si y solo si la matriz $\underline{S}_{n \times n}$ formada como sigue:

$$\underline{S} = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b} \quad \underline{A}^2\underline{b} \quad \dots \quad \underline{A}^{N-1}\underline{b}] \quad (2.35)$$

tiene rango n ,

Para probarlo se recurre a la solución de la ecuación de estado:

$$\underline{x}(N) = \underline{A}^N \underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{N-k-1} \underline{b} u(k) \quad (2.36)$$

$$\underline{x}(N) - \underline{A}^N \underline{x}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{N-k-1} \underline{b} u(k) \quad (2.37)$$

$\underline{A}^N \underline{x}(N) - \underline{A}^N \underline{x}(0)$ se denota como $\underline{x}(N)$ y se define el vector \underline{v} como:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La parte derecha de la ecuación (2.37) puede escribirse como $\underline{S} \cdot \underline{v}$ con lo que se tiene:

$$\underline{x}(N) = \underline{Sv} \quad (2.39)$$

Para tener controlabilidad, cada estado inicial $\underline{x}_i(0)$ debe poderse transferir, por medio de un control no limitado $u(k)$, $k=1,2,\dots,N-1$, a cualquier estado final $\underline{x}_i(N)$ para algún $N \geq 0$ finito. Para ello la ecuación (2.39) debe tener solución, ya que representa n ecuaciones simultáneas lineales y la condición es que \underline{S} tenga rango n .

Ahora se trata de hallar la transformación a variables de fase y para ello es importante dar cita del siguiente teorema:

Sea el sistema descrito por las ecuaciones (2.38) ó (2.39) y si este es controlable existe la siguiente transformación:

$$\underline{x}^f(k) = \underline{P} \underline{x}(k) \quad (2.40)$$

$$\underline{x}^f(k) = \underline{A}^f \underline{x}^f(k) + \underline{b}^f u(k) \quad (2.41)$$

$$y(k) = \underline{c}^f \underline{x}^f(k) \quad (2.42)$$

que es la representación en la forma canónica controlable o en variables

de fase; donde A tiene la forma:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

y b es:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matriz P tiene la forma:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_1 A \\ \underline{p}_1 A^2 \\ \vdots \\ \underline{p}_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

con

$$\underline{p}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [\underline{S}]^{-1} \quad (2.46)$$

La demostración es como sigue:

sea:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n} \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Para el primer estado, de la ecuación (2.40) se tiene que:

$$\underline{x}_1^f(k) = p_1 \underline{x}(k) \quad (2.48)$$

En el siguiente período se tiene:

$$\underline{x}_1^f(k+1) = p_1 \underline{x}(k+1) \quad (2.49)$$

Si se reemplaza en esta ecuación la (2.28) se obtiene:

$$\underline{x}_1^f(k+1) = p_1 \underline{A} \underline{x}(k) + p_1 \underline{b} u(k) \quad (2.50)$$

A continuación se reescribe la ecuación (2.41) reemplazando en ella las ecuaciones (2.43) y (2.44).

$$\begin{bmatrix} x_1^f(k+1) \\ x_2^f(k+1) \\ \dots \\ x_{n-1}^f(k+1) \\ x_n^f(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^f(k) \\ x_2^f(k) \\ \dots \\ x_{n-1}^f(k) \\ x_n^f(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.51)$$

Desarrollando para $x_1^f(k+1)$ se tiene que:

$$x_1^f(k+1) = x_2^f(k) \quad (2.52)$$

De la ecuación (2.50) se puede ver que se cumple:

$$x_1^f(k) = \underline{P}_1 \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{P}_1 \underline{b} u(k) \quad (2.53)$$

Pero la ecuación (2.40) dice que $x_1^f(k)$ es función únicamente de $\underline{x}(k)$ entonces $\underline{P}_1 \underline{b} = 0$ por tanto (2.53) queda de la siguiente forma:

$$x_1^f(k+1) = x_2^f(k) = \underline{P}_1 \underline{A} \underline{x}(k) \quad (2.54)$$

Avanzando un período se tiene, al igual que antes:

$$x_2^f(k+1) = x_3^f(k) = \underline{P}_1 \underline{A} \underline{x}(k+1) \quad (2.55)$$

$$x_2^f(k+1) = x_3^f(k) = \underline{P}_1 \underline{A} \cdot \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{P}_1 \underline{A} \underline{b} u(k) \quad (2.56)$$

$$= \underline{P}_1 \underline{A}^2 \underline{x}(k) \quad (2.57)$$

\swarrow
 $\underline{P}_1 \underline{A} \underline{b} = 0$

Por inferencia se puede escribir:

$$x_i^f(k) = \underline{P}_1 \underline{A}^{i-1} \underline{x}(k) \quad (2.58)$$

\swarrow
 $\underline{P}_1 \underline{A}^{i-2} \underline{b} = 0$

En general se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1^f(k) \\ x_2^f(k) \\ x_3^f(k) \\ \dots \\ x_n^f(k) \end{bmatrix} = \underline{P} \underline{x}(k) = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_1 \underline{A} \\ \underline{p}_1 \underline{A}^2 \\ \dots \\ \underline{p}_1 \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(k) \quad (2.59)$$

Donde se debe cumplir que:

$$\underline{p}_1 \underline{b} = \underline{p}_1 \underline{A} \underline{b} = \dots = \underline{p}_1 \underline{A}^{n-2} \underline{b} = 0 \quad (2.60)$$

Ahora bien, avanzando un período en la ecuación (2.40) y reemplazando en ella la ecuación (2.28a) se tiene:

$$\underline{x}^f(k+1) = \underline{P} \underline{x}(k+1) = \underline{P} \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{P} \underline{b} u(k) \quad (2.61)$$

nuevamente de la ecuación (2.40), suponiendo que \underline{P}^{-1} existe, se obtiene:

$$\underline{x}(k) = \underline{P}^{-1} \underline{x}^f(k) \quad (2.62)$$

entonces la ecuación (2.61) queda:

$$\underline{x}^f(k+1) = \underline{P} \underline{A} \underline{P}^{-1} \underline{x}^f(k) + \underline{P} \underline{b} u(k) \quad (2.63)$$

De esto se obtiene:

$$\underline{A}^f = \underline{P} \underline{A} \underline{P}^{-1} \quad (2.64)$$

$$\underline{b}^f = \underline{P} \underline{b} \quad (2.65)$$

En la ecuación (2.28b) reemplazando la (2.62) se tiene:

$$\underline{y}(k) = \underline{c} \underline{P}^{-1} \underline{x}^f(k) \quad (2.66)$$

para obtener la ecuación (2.42) haciendo:

$$\underline{c}^f = \underline{c} \underline{P}^{-1} \quad (2.67)$$

La ecuación (2.65) se puede escribir como:

$$\underline{b}^f = \underline{P} \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \underline{b} \\ \underline{p}_1 \underline{A} \underline{b} \\ \underline{p}_1 \underline{A}^2 \underline{b} \\ \dots\dots\dots \\ \underline{p}_1 \underline{A}^{n-1} \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

donde se han aplicado las condiciones de la ecuación (2.60); lo anterior se puede escribir como sigue:

$$\underline{p}_1 [\underline{b} \underline{A} \underline{b} \underline{A}^2 \underline{b} \dots \underline{A}^{n-1} \underline{b}] = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (2.69)$$

Nótese que en la parte izquierda de la ecuación (2.69) se tiene al vector \underline{p}_1 multiplicado por la matriz de controlabilidad \underline{S} de la ecuación (2.35) donde $N = n$, y puesto que ahora \underline{S} es una matriz cuadrada $n \times n$ con rango n , su inversa existe, entonces se puede multiplicar a la derecha por \underline{S}^{-1} en la ecuación (2.69) y se obtiene:

$$\underline{p}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \underline{S}^{-1} \quad (2.70)$$

Además, puesto que \underline{S}^{-1} tiene rango n así también la matriz \underline{P} formada de vectores $\underline{p}_i = \underline{A}^{n-1} \underline{p}_1$ debe tener rango n , es decir que la suposición hecha en la ecuación (2.62) de que \underline{P}^{-1} existe es verdadera.

Con esto concluye la demostración, pues se ha probado que si \underline{S} tiene rango n la transformación a variables de fase existe.

Es interesante observar la relación entre las variables de fase y las funciones de transferencia, puesto que todos los coeficientes que se tienen en estas funciones están en una u otra forma en las matrices \underline{A}^f y \underline{c}^f .

Para determinar esta relación se obtendrá la representación a variables de fase a partir de la función de transferencia:

Sea $T(z)$ la función de transferencia de un sistema dado:

$$T(z) = \frac{c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \dots + c_2 z + c_1}{z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1} \quad (2.71)$$

Sea z la representación de un adelanto, en el dominio del tiempo. De tal forma que se puede escribir a $y(kT)$ de la siguiente manera:

$$y(k) = \frac{c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \dots + c_2 z + c_1}{z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1} u(k) \quad (2.72)$$

Para que la representación en variables de estado de esta e-

cuación sea de la forma canónica controlable, se escogen las variables de estado de la siguiente manera:

$$x_1(k) = \frac{u(k)}{z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1} \quad (2.73)$$

$$x_1(k+1) = z x_1(k) = x_2(k) \quad (2.74a)$$

$$x_2(k+1) = z x_2(k) = z^2 x_1(k) = x_3(k) \quad (2.74b)$$

$$\vdots$$
$$x_{n-1}(k+1) = z x_{n-1}(k) = z^{n-1} x_1(k) = x_n(k) \quad (2.74c)$$

Con el objeto de hallar la última ecuación de estado se reescribe la ecuación (2.73) como sigue:

$$(z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1) x(k) = u(k) \quad (2.75)$$

$$x_n(k+1) + a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_2 x_2 + a_1 x_1 = u(k) \quad (2.76)$$

Despejando $x_n(k+1)$ de la ecuación anterior, se obtiene la última ecuación de estado:

$$x_n(k+1) = -a_n x_n - a_{n-1} x_{n-1} - \dots - a_2 x_2 - a_1 x_1 + u(k) \quad (2.77)$$

En este momento prácticamente se han determinado las matrices A y b de la ecuación dinámica, puesto que se hallan ya definidas todas las ecuaciones de estado.

Para hallar la ecuación de salida se realiza lo siguiente:

reemplazando la ecuación (2.73) en la ecuación (2.72) se tiene:

$$y(k) = (c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \dots + c_2 z + c_1) x_1(k) \quad (2.78)$$

$$y(k) = c_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} + \dots + c_2 x_2 + c_1 x_1$$

A continuación se escriben las ecuaciones (2.74) y la (2.78) en forma matricial:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.79)$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \underline{x}(k)$$

Que es la representación en variables de fase que se había a nalizado anteriormente. De este análisis se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- 1.- Los coeficientes de la ecuación característica de la función de transferencia son los mismos de la n-esima fila de la matriz de estados \underline{A}^f , con el signo cambiado.
- 2.- Los coeficientes del numerador de $T(z)$ son los mismos del vector de salida \underline{c}^f .

3.- Además, los coeficientes a_j son también los coeficientes de la ecuación de diferencias (2.34).

Aprovechando esta relación entre la ecuación de transferencia y la descripción en variables de fase, se demostrará que si un sistema es controlable y todos sus estados son accesibles, se puede, por medio de la Realimentación de Estado, localizar los polos del sistema arbitrariamente con el fin de cumplir ciertas especificaciones de diseño.

En resumen se puede decir que si un sistema es controlable, existe la modelación en variables de fase, donde

$$\underline{x}^f(k) = \underline{P} \underline{x}(k) \quad (2.40)$$

Las ecuaciones del sistema son:

$$\underline{x}^f(k+1) = \underline{A}^f \underline{x}^f(k) + \underline{b}^f \underline{u}(k) \quad (2.41)$$

$$y(k) = \underline{c}^f \underline{x}^f(k) \quad (2.42)$$

donde:

$$\underline{A}^f = \underline{P} \underline{A} \underline{P}^{-1} \quad (2.64)$$

$$\underline{b}^f = \underline{P} \underline{b} \quad y \quad (2.65)$$

$$\underline{c}^f = \underline{c} \underline{P}^{-1} \quad (2.67)$$

2.1.3 LOCALIZACION ARBITRARIA DE POLOS.

La técnica de la Realimentación de Estado es una poderosa herramienta en el diseño de sistemas de control discreto usando las variables de estado. Esta técnica supone que todos los estados del sistema son accesibles, pero como se sabe, no siempre es posible tener acceso a ellos dado que muchas veces no tienen significado físico.

La figura 2.4 muestra el diagrama de bloques de un sistema multivariante de control digital con Realimentación de Estado en el que se tiene un dispositivo de muestreo y retención, y una planta análoga que puede entenderse también como un sistema digital con todas las señales digitales; este sistema tiene además un lazo de realimentación de ganancia \underline{F} que es objeto de diseño.

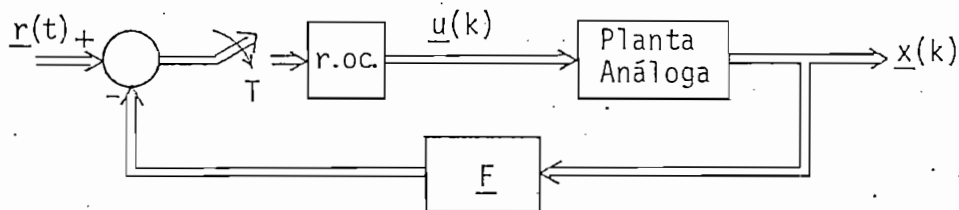
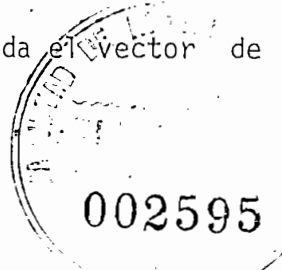


Fig. 2.4 Sistemas de control con Realimentación Discreta de Estado.

En el caso de no tener acceso a todos los $x_i(k)$ será necesario utilizar un OBSERVADOR para estimar algunas o todas las variables de estado utilizando el vector de salida que generalmente es accesible. La Fig. 2.5 muestra el diagrama de bloques del sistema con realimentación de salidas donde se incluye un observador que nos da el vector de variables de estado estimado $\underline{x}(k)$.



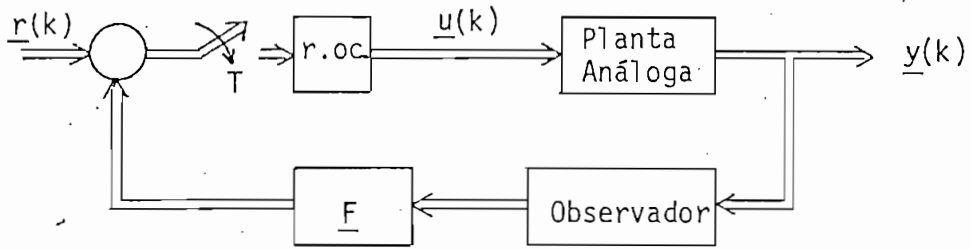


Fig. 2.5 Sistema de control con Realimentación de salidas a través de un Observador.

Existen varios métodos para realizar el diseño del bloque de realimentación de la Fig. 2.4; pero debido a que el método de las variables de fase ofrece la mejor adaptabilidad para ser implementado en un computador, se limitará el estudio al mismo.

Se considerarán sistemas de una entrada y una salida, en los cuales todos los estados son accesibles. En este caso la entrada se reduce a una función escalar $r(k)$, y la salida a otra función escalar $y(k)$, y la matriz de realimentación se reduce al vector \underline{f} .

En la Fig. 2.3; se puede ver que la entrada $u(k)$, está formada por:

$$u(k) = r(k) - \underline{f}x(k) \quad (2.80)$$

donde \underline{f} es un vector transpuesto de la forma:

$$\underline{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] \quad (2.81)$$

Reemplazando la ecuación (2.80), en la ecuación de estado

(2.28a), se tiene:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{b}r(k) - \underline{b}f\underline{x}(k) \quad (2.82)$$

$$\underline{x}(k+1) = (\underline{A} - \underline{b}f)\underline{x}(k) + \underline{b}r(k) \quad (2.83)$$

Si \underline{A} y \underline{b} son matrices en la forma canónica controlable, la matriz de coeficientes de $\underline{x}(k)$, queda:

$$\underline{A}^f - \underline{b}^f f^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_1+f_1) & -(a_2+f_2) & -(a_3+f_3) & \dots & -(a_n+f_n) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Considérese ahora, un sistema digital de una entrada y una salida que está descrito por la ecuación de diferencias de la forma:

$$y(k+n) + a_n^* y(k+n-1) + \dots + a_3^* y(k+2) + a_2^* y(k+1) + a_1^* y(k) = c_n u(k+n-1) + c_{n-1} u(k+n-2) + \dots + c_2 u(k+1) + c_1 u(k) \quad (2.85)$$

Cuya ecuación característica es:

$$\lambda^n + a_n^* \lambda^{n-1} + \dots + a_2^* \lambda + a_1^* = 0 \quad (2.86)$$

Ahora bien, en el sistema descrito por (2.83), la ecuación

característica se obtiene de la siguiente forma:

$$[\lambda \underline{I} - (\underline{A}^f - \underline{b}^f \underline{f}^f)] = 0 \quad (2.87)$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1 \\ (a_1+f_1) & (a_2+f_2) & \dots & \lambda+(a_n+f_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.88)$$

Esta ecuación característica se evalúa como:

$$\lambda^n + (a_n + f_n^f) \lambda^{n-1} + \dots + (a_2 + f_2^f) \lambda + (a_1 + f_1^f) = 0 \quad (2.89)$$

Supóngase ahora que la ecuación (2.86) es el resultado de de sarrollar el producto

$$(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*) = 0 \quad (2.90)$$

Donde los λ_i^* $i=1,2,\dots,n$ son los polos o autovalores arbi trarios que el diseñador ha escogido para cumplir las respectivas espe cificaciones de control. Y supóngase que los a_i son los coeficientes del sistema original no realimentado.

Entonces igualando los coeficientes de las mismas potencias de la ecuación (2.86) y los de la ecuación (2.89) se tiene:

$$a_i^* = a_i + f_i^f \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.91)$$

Donde se puede obtener el vector \underline{f}^f como sigue:

$$\underline{f}^f = [a_1^* - a_1 \quad a_2^* - a_2 \quad \dots \quad a_n^* - a_n] \quad (2.92)$$

Puesto que este vector está representado en variables de fase, es necesario pasarlo a la descripción original, para ello supongamos que $r(k) = 0$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$, entonces la ecuación (2.80) queda:

$$u(k) = -\underline{f} \underline{x}(k) \quad (2.93)$$

Por medio de la ecuación (2.62) se tiene:

$$u(k) = -\underline{f} \underline{P}^{-1} \underline{x}^f(k) \quad (2.94)$$

De donde se puede concluir que

$$\underline{f}^f = \underline{f} \underline{P}^{-1} \quad \text{o} \quad (2.95)$$

$$\underline{f} = \underline{f}^f \underline{P} \quad (2.96)$$

Puesto que de la ecuación (2.92) se obtiene \underline{f}^f , por medio de la transformación dada en (2.96) se puede hallar el vector de realimentación en la descripción original \underline{f} que permite que el sistema cumpla con las especificaciones de diseño.

Desde el punto de vista de la función de transferencia, la Realimentación de Estado tiene el mismo significado; es decir, la localización arbitraria de polos, cambiando los coeficientes del denominador de $T(z)$ adecuadamente. Se hará un ligero análisis de este caso.

Cuando se tiene Realimentación de Estado lo que se hace es crear una entrada $u(k)$ realimentada de la forma:

$$u(k) = - \underline{f}x(k) + r(k) \quad (2.97)$$

donde $\underline{f} = [f_i = \text{coeficiente de realimentación del estado } x_i]$

Lo que se desea es obtener un sistema, cuyo diagrama de bloques tenga la forma acostumbrada: una planta y un lazo de realimentación desde la salida a la entrada, tal como en la Fig. 2.6d.

La Fig. 2.6 es un desarrollo del sistema descrito en variables de fase, hasta obtener, por medio del manipuleo de bloques, el sistema deseado.

En la Fig. 2.6b. se han reducido los lazos de realimentación aprovechando las técnicas de reducción de bloques, en este caso $N_1(z)$ es:

$$N_1(z) = f_n z^{n-1} + f_{n-1} z^{n-2} + \dots + f_2 z + f_1 \quad (2.98)$$

Al lazo de realimentación interno se puede reducir de igual manera:

$$N_2(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1 \quad (2.99)$$

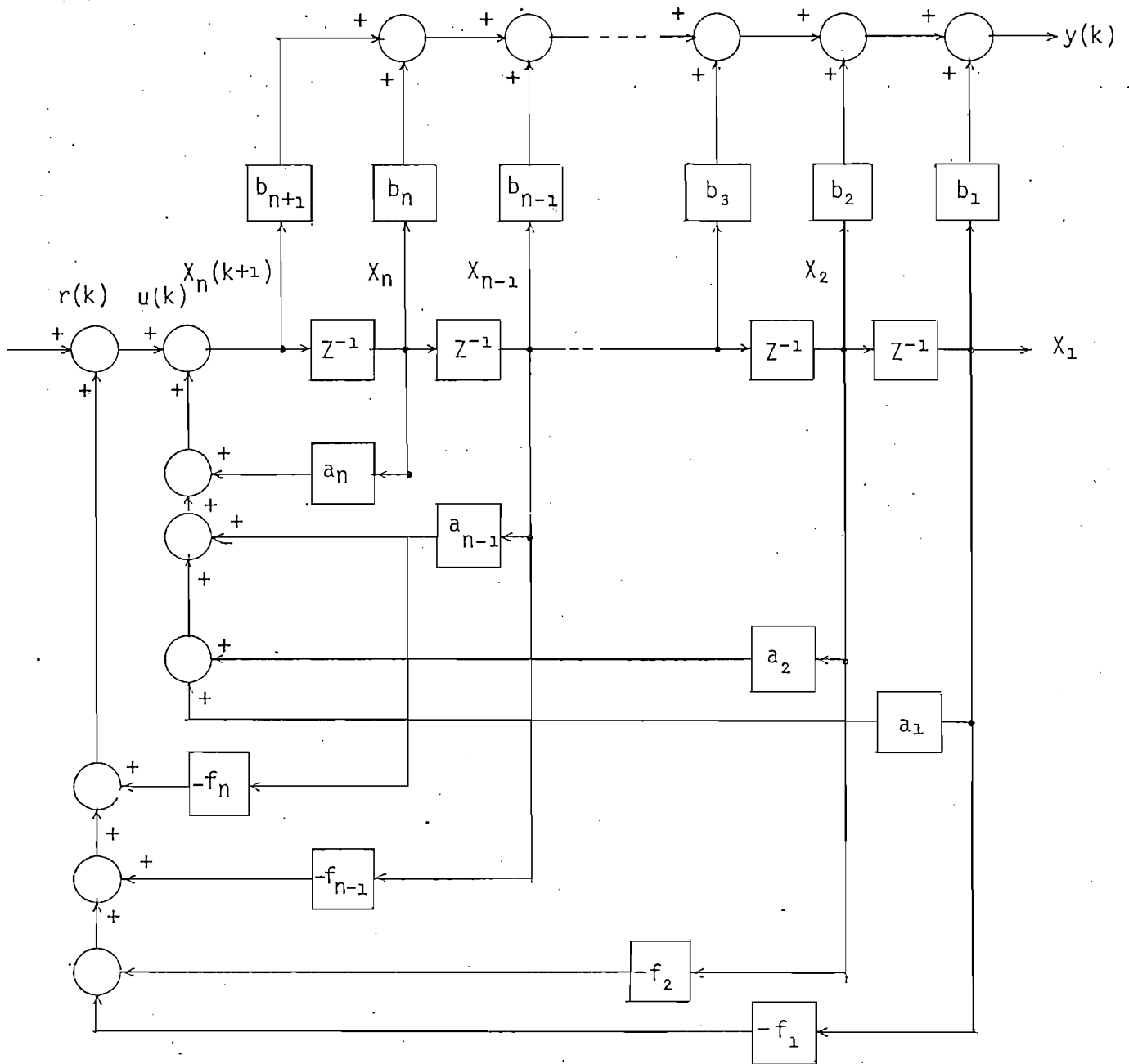


Fig. 2.6a. Sistema realimentado en detalle.

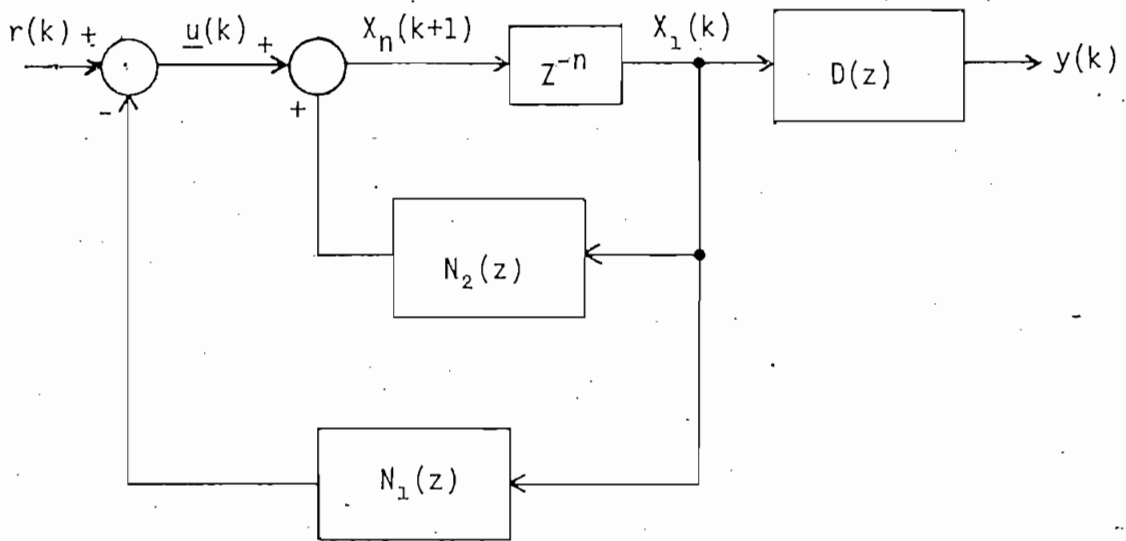


Fig. 2.6b. Se han reducido los lazos de realimentación interno y externo en dos bloques $N_1(z)$ y $N_2(z)$, el primero contiene los lazos externos y el segundo los internos.

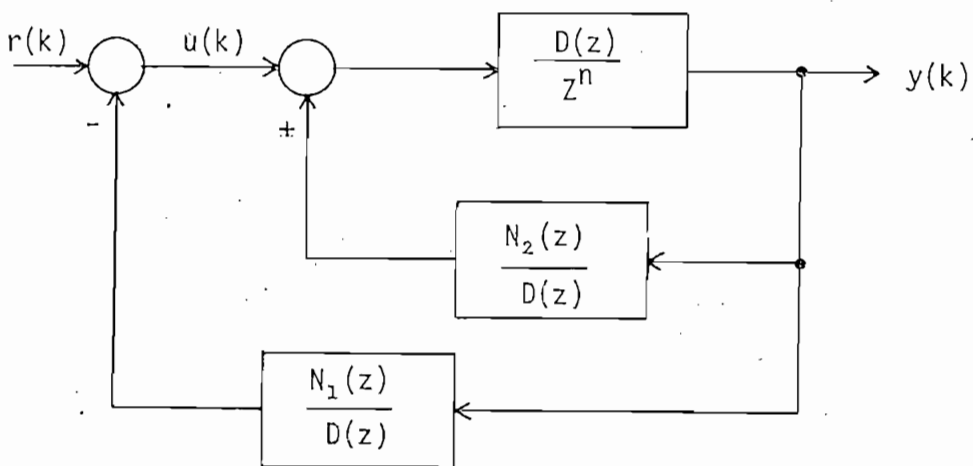


Fig. 2.6c. El bloque de salida se ha transferido al interior de los lazos.

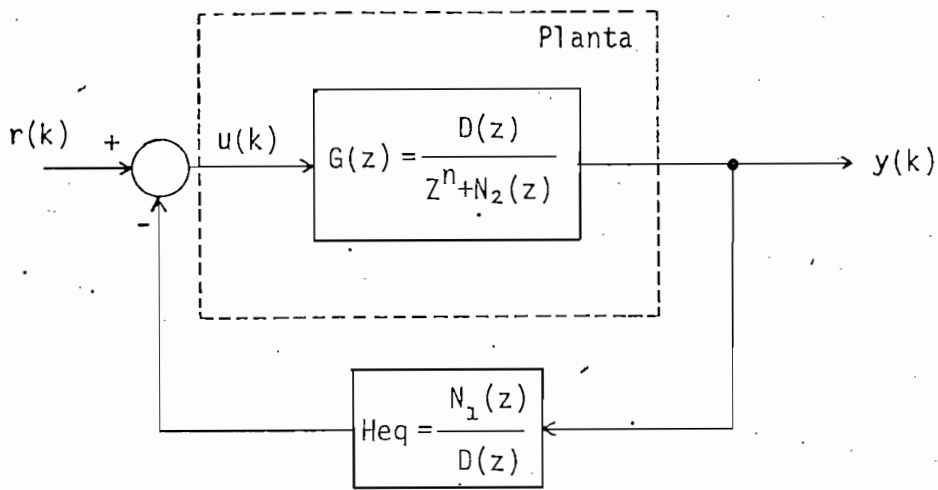


Fig. 2.6d. Sistema realimentado, el bloque $Heq(z)$ es el equivalente al vector \underline{f} de Realimentación de Estado.

La parte que da la salida $y(k)$ se la puede reducir a:

$$D(z) = c_{n+1}z^n + c_n z^{n-1} + \dots + c_2 z + c_1 \quad (2.100)$$

La planta $G(z)$ se la obtiene reduciendo los bloques superiores de la Fig. 2.6c:

$$G(z) = \frac{D(z)/z^n}{1 + [D(z)/z^n][N_2(z)/D(z)]} \quad (2.101)$$

$$= \frac{D(z)/z^n}{1 + N_2(z)/z^n} \quad (2.102)$$

$$G(z) = \frac{D(z)}{z^n + N_2(z)} \quad (2.103)$$

Reemplazando en esta última ecuación las ecuaciones (2.99) y (2.100), y de la Fig. 2.6c, se tiene:

$$G(z) = \frac{c_{n+1}z^n + c_n z^{n-1} + \dots + c_2 z + c_1}{z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1} \quad (2.104)$$

$$H_{eq}(z) = \frac{f_n z^{n-1} + f_{n-1} z^{n-2} + \dots + f_2 z + f_1}{c_{n+1} z^n + c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \dots + c_2 z + c_1} \quad (2.105)$$

Nótese que $H_{eq}(z)$ está conformado de la siguiente manera: los coeficientes del numerador son los coeficientes del vector \underline{f} y, el denominador de $H_{eq}(z)$ es igual al numerador de $T(z)$.

En resumen, para realizar la Realimentación de Estado es necesario:

- 1.- Discretizar las ecuaciones de estado por medio de las ecuaciones siguientes si estas corresponden a un sistema continuo en el tiempo:

$$\underline{A}_d = \underline{e}^{-AT} \quad (2.23)$$

Donde T es el período de muestreo, que debe ser lo suficientemente pequeño para que la función continua pueda ser reconstruída.

$$\underline{b}_d = \underline{e}^{AT/2} \underline{b} x T \quad (2.27)$$

- 2.- Investigar si el sistema es controlable, determinando si la matriz \underline{S} tiene rango n ; puesto que se trata de una matriz cuadrada, basta que su determinante sea diferente de cero.
- 3.- Determinar los polos λ_i^* $i=1, \dots, n$ que permitan que el sistema cumpla con las especificaciones de diseño.
- 4.- Determinar los coeficientes de la ecuación de diferencias que describe al sistema, o lo que es lo mismo; determinar los coeficientes de la función de transferencia de lazo cerrado a_i^* $i=1, \dots, n$.
- 5.- Pasar el sistema a variables de fase y hallar \underline{f}^f por medio de la ecuación (2.92) que se reescribe a continuación:

$$\underline{f}^f = [a_1^* - a_1 \quad a_2^* - a_2 \quad \dots \quad a_n^* - a_n] \quad (2.92)$$

donde los a_i son los elementos de la n -ésima fila de la matriz \underline{A}^f con el signo cambiado.

- 6.- Por último, hallar el vector de Realimentación \underline{f} en el espacio de Estado original por medio de la transformación:

$$\underline{f} = \underline{f}^f \underline{p} \quad (2.96)$$

La técnica de la Realimentación de Estado permite además optimizar ciertos criterios de desempeño de tal manera que el costo de trasladar los Estados desde un Estado inicial $x(0)$ a otro final $x(N)$,

sea mínimo. Este caso se analizará más detenidamente en la siguiente sección.

2.2 REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO.

Al diseñar un sistema de control discreto por la técnica de la Realimentación de Estado se trata de localizar los polos de tal manera que el sistema cumpla con ciertas especificaciones. Esto se lo puede hacer probando varias veces hasta obtener una respuesta aceptable; naturalmente esto requiere de cierta experiencia en diseño con Realimentación de Estado.

El objeto del control óptimo es determinar las señales de control que minimicen o maximicen algún criterio de funcionamiento, cumpliendo con ciertas restricciones físicas sobre la magnitud de las señales de control y los valores de los estados.

A lo largo de esta sección se demostrará que el problema de control óptimo es un subproblema de la Realimentación de Estado. Se analizarán también las técnicas que se utilizan para determinar estas señales de control.

2.2.1 CONCEPTOS BASICOS DE CONTROL OPTIMO.

A continuación se expondrán algunas definiciones importantes para el desarrollo de este tema:

-- Definición 1.--

A los valores del vector de entrada u en el intervalo $[k_0, k_f]$ se los llama HISTORIA DE CONTROL o simplemente CONTROL, k_0 es el paso

inicial y k_f el final.

- Definición 2.-

A los valores del vector de estado \underline{x} en el intervalo $[k_0, k_f]$ se los llama TRAYECTORIA DE ESTADO.

Debido a que los sistemas son reales, lo son también la Historia de Control y la Trayectoria de Estado, por lo tanto están limitados por ciertas restricciones físicas, que impiden que tomen valores fuera de algunos rangos determinados. De este hecho se derivan dos definiciones importantes:

- Definición 3.-

Una historia de control que satisface las restricciones físicas en el intervalo $[k_0, k_f]$ se denomina CONTROL ADMISIBLE.

- Definición 4.-

Una trayectoria de estado que satisface sus limitaciones físicas en el intervalo $[k_0, k_f]$ se denomina TRAYECTORIA ADMISIBLE.

El objetivo del Control Optimo es hallar el control admisible que hace que el sistema, descrito por las ecuaciones (2.1) y (2.2) siga la trayectoria admisible, que minimiza el siguiente criterio de funcionamiento o costo:

$$J = H [\underline{x}(k_f), k_f] + \sum_{k_0}^{k_f-1} g_d [\underline{x}(k), u(k), k] \quad (2.106)$$

Las siguientes definiciones tienen relación con este objetivo:

- Definición 5.-

Al control \underline{u} que minimiza el costo J se lo denomina CONTROL OPTIMO y se lo denota como \underline{u}^* .

- Definición 6.-

La trayectoria \underline{x} que sigue el sistema al aplicarse un control óptimo se denomina TRAYECTORIA OPTIMA y se lo denota como \underline{x}^* .

Además, si es posible hallar, para el control óptimo una relación funcional de la forma:

$$\underline{u}^*(k) = \underline{f}[\underline{x}(k), k] \quad (2.107)$$

se dice que \underline{u}^* es una LEY DE CONTROL OPTIMO.

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, se demostrará que la ley de control óptimo tiene la forma:

$$\underline{u}^*(k) = \underline{F}\underline{x}(k) \quad (2.108)$$

que como se sabe, es una Realimentación de Estado de la forma que se estudió en la sección anterior.

Se verá ahora que dependiendo de las formas que tomen los funcionales H y g_d en la ecuación (2.106) se pueden tener varios crite

rios de funcionamiento. Se analizarán muy brevemente algunos criterios de funcionamiento más comunes.

1.- Problema de tiempo mínimo.

En el que se trata de transferir un estado inicial dado $\underline{x}(k_0) = \underline{x}_0$ a un estado especificado $\underline{x}(k_f)$ en un tiempo mínimo. En este caso los funcionales H y g_d toman la siguiente forma:

$$H = k_f T \quad \text{y} \quad \sum_{k_0}^{k_f-1} g_d = k_0 T \quad (2.109)$$

entonces, el costo J es:

$$J = (k_f - k_0) T \quad (2.110)$$

donde T es el período de muestreo del muestreador o del ciclo de reloj del sistema digital.

2.- Problema de Control Terminal.

Se trata de minimizar la desviación del estado final de un cierto valor deseado $\underline{r}(k_f)$. En este caso el costo viene dado por la siguiente expresión:

$$J = \sum_{i=1}^n [x_i(k_f) - r_i]^2 \quad (2.111)$$

esto puede escribirse como:

$$J = [\underline{x}(k_f) - \underline{r}]^T [\underline{x}(k_f) - \underline{r}] \quad (2.112)$$

la parte derecha de la ecuación (2.112) es por definición el cuadrado de la NORMA del vector $|\underline{x}(k_f) - \underline{r}|$ y se denota así:

$$J = \|\underline{x}(k_f) - \underline{r}\|^2 \quad (2.113)$$

Quando se desea acentuar o disminuir el efecto de ciertos estados en el costo J , se introduce una matriz de ponderación \underline{H} , semidefinida positiva, es decir que cumple la siguiente propiedad:

$$\underline{z}^T \underline{H} \underline{z} > 0 \text{ para todo vector } \underline{z} \neq \underline{0} \quad (2.114)$$

Se suele escoger una matriz diagonal $\underline{H}_{n \times n}$ en la que los elementos h_{ij} $i=1, \dots, n$ son mayores o iguales que cero.

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Si el estado $x_j(k_f)$ no interesa en el cálculo del costo se puede hacer $0 < h_{jj} < 1$, al contrario, si se desea que tenga mayor peso se hará $h_{jj} > 1$.

Para introducir la ponderación en la expresión del costo se hace:

$$J = [\underline{x}(k_f) - \underline{r}]^T \underline{H} [\underline{x}(k_f) - \underline{r}] \quad (2.116)$$

3.- Problema de Rastreo.

Se trata de que el sistema siga una trayectoria específica $\underline{r}(k)$ con la mínima desviación; en este caso el costo será:

$$J = \sum_{k=k_0}^{k_f} [\underline{x}(k) - \underline{r}(k)]^T \underline{Q} [\underline{x}(k) - \underline{r}(k)] \quad (2.117)$$

Donde \underline{Q} debe ser una matriz $n \times n$ semidefinida positiva, además puede ser variante en cada paso, se puede entonces, denotarlo como $\underline{Q}(k)$.

4.- Problema de Mínimo Esfuerzo.

Se trata de aplicar las señales de control tan pequeñas como sea posible, de tal manera que el estado inicial \underline{x}_0 se transfiera a un estado final que está dentro de un grupo de ellos que se denominan BLANCO, como se muestra en la Fig. 2.7.

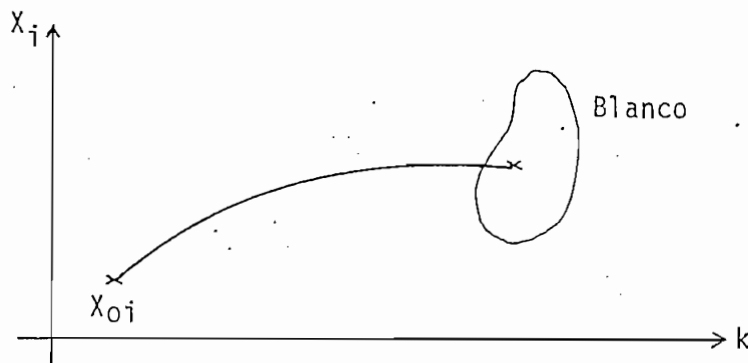


Fig. 2.7. Transferencia de un estado inicial \underline{x}_0 a un blanco especificado.

En este caso el costo tomará la siguiente forma:

$$J = \sum_{k=k_0}^{k_{f-1}} \|\underline{u}(k)\|^2 \quad (2.118)$$

Si se quiere introducir una ponderación en este caso, se debe considerar que no se puede despreciar el efecto de ningún control $u_i(k)$, $k=k_0, 1+k_0, \dots, k_f$; puesto que si se lo hace, no se está cumpliendo con el propósito de la minimización. Es decir, en este caso la matriz de ponderación debe ser definida positiva, por lo tanto se cumple la siguiente propiedad:

$$\underline{z}^T \underline{R} \underline{z} > 0 \text{ para todo } z \neq 0 \quad (2.119)$$

Entonces, introduciendo la ponderación, la ecuación del costo toma la siguiente forma:

$$J = \sum_{k=k_0}^{k_{f-1}} [\underline{u}^T(k) \underline{R} \underline{u}(k)] \quad (2.120)$$

En este caso, se escogerá una matriz $\underline{R}_{p \times p}$ diagonal donde los $r_{ij} > 0$ para $i=1, \dots, p$.

5.- Problema del Regulador Lineal.

Este es un caso especial que podría considerarse como la unión del problema de Rastreo y el de Mínimo Esfuerzo. Donde se trata que la salida del sistema tienda a cero con un costo mínimo. Este pro

blema será analizado en detalle más adelante.

Uno de los más poderosos instrumentos para hallar la solución a estos problemas es la optimización por medio de la Programación Dinámica.

2.2.2 PROGRAMACION DINAMICA.

La programación dinámica se basa en el Principio de Optimalidad, que puede definirse de la siguiente manera:

"Una política óptima tiene la propiedad que cualquiera que sea el estado inicial y el control en los pasos i iniciales, el control restante debe formar un control óptimo respecto del estado resultante a partir del control de los estados iniciales. En otras palabras, cualquier política de control que sea óptima en un intervalo $[k, N]$ es necesariamente óptima sobre el intervalo $[k+1, N]$ para $k=0,1,2,\dots,N-1$." ¹

Considérese el sistema descrito por la ecuación (2.1) que se reescribe a continuación:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}x(k) + \underline{B}u(k) \quad (2.121)$$

Se desea hallar la ley de control que minimice el siguiente criterio de funcionamiento:

$$J = h[\underline{x}(k_f)] + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} g_d[\underline{x}(k), \underline{u}(k), k] \quad (2.122)$$

por facilidad se hará $k_0 = 0$ y $k_f = N$:

El control \underline{u} admisible está limitado por un subespacio de vectores \underline{U} , que es el conjunto de todos los controles admisibles.

Se define ahora $J_{N,N}$ como:

$$J_{N,N} = J_{N,N} [x(N), N] \triangleq h [x(N), N] \quad (2.123)$$

donde $J_{N,N}$ es el costo de alcanzar el estado final.

Además, sea:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N} = J_{N-1,N} [x(N-1), u(N-1), N-1] &\triangleq g_d [x(N-1), u(N-1), N-1] + \\ &+ h [x(N), N] \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$J_{N-1,N} [x(N-1), u(N-1), N-1] = g_d [x(N-1), u(N-1), N-1] + J_{N,N} \quad (2.125)$$

donde $J_{N-1,N}$ es el costo de trasladar $x(N-1)$ a $x(N)$.

Nótese que $J_{N-1,N}$ no es función de $x(N)$ puesto que éste puede escribirse como $\underline{A}x(N-1) + \underline{B}u(N-1)$.

En este punto se escoge un control $u(N-1)$ tal que minimice el costo $J_{N-1,N}$ esto se lo definirá de la siguiente manera:

$$J_{N-1,N}^* \triangleq \min_{\underline{u}(N-1)} \left\{ g_d [\underline{x}(N-1), \underline{u}(N-1), N-1] + J_{N,N} [A\underline{x}(N-1) + B\underline{u}(N-1), N] \right\} \quad (2.126)$$

Se denotará la decisión \underline{u} óptima, en este paso como $\underline{u}^*[\underline{x}(N-1), N-1]$, luego se verá que dependiendo de g_d , \underline{u}^* es efectivamente dependiente de \underline{x} .

El costo de alcanzar $\underline{x}(N)$ desde $\underline{x}(n-2)$, será:

$$J_{N-2,N} = J_{N-2,N} [\underline{x}(N-2), \underline{u}(N-2), N-2] \triangleq g_d [\underline{x}(N-2), \underline{u}(N-2), N-2] + J_{N-1,N} \quad (2.127)$$

y el costo mínimo será:

$$J_{N-2,N}^* = \min_{\underline{u}(N-1), \underline{u}(N-2)} \left\{ g_d [\underline{x}(N-2), \underline{u}(N-2), N-2] + J_{N-1,N} \right\} \quad (2.128)$$

pero puesto que el mínimo de $J_{N-1,N}$ se determinó ya por medio de $\underline{u}^*[\underline{x}(N-1), N-1]$, basta escribir:

$$J_{N-2,N}^* = \min_{\underline{u}(N-2)} \left\{ g_d [\underline{x}(N-2), \underline{u}(N-2), N-2] + J_{N-1,N}^* \right\} \quad (2.129)$$

donde lo único que se debe escoger es el $\underline{u}^*[\underline{x}(N-2), N-2]$.

Como se puede ver, $J_{N-2,N}^*$ es el costo mínimo absoluto para alcanzar $\underline{x}(N)$ desde el estado $\underline{x}(N-2)$.

Se puede generalizar la ecuación (2.129) de la siguiente forma:

$$J_{N-k,N}^* = \min_{\underline{u}(N-k)} \{ g_d[\underline{x}(N-k), \underline{u}(N-k), N-k] + J_{N-k+1,N}^* \} \quad (2.130)$$

donde se han determinado los $\underline{u}^*[\underline{x}(N-1), N-1]$ para $i=1, \dots, k+1$ que minimizan los respectivos costos $J_{N-1,N}$.

A partir de la ecuación (2.130) se puede determinar que dependiendo de g_d , $\underline{u}^*(N-k)$ es función de $\underline{x}(N-k)$.

Para hallar el mínimo $J_{N-k,N}$ se deriva respecto de $\underline{u}(N-k)$ y se iguala a cero.

$$0 = \frac{dJ_{N-k,N}}{d\underline{u}(N-k)} = \frac{d}{d\underline{u}(N-k)} \left\{ g_d[\underline{x}(N-k), \underline{u}(N-k), N-k] + J_{N-k+1,N}^* \right\} \quad (2.131)$$

$$0 = \frac{d}{d\underline{u}(N-k)} [g_d] \quad | * | \quad (2.132)$$

Es claro, que dependiendo de la forma de g_d , se podrían encontrar soluciones \underline{u} que sean funciones de $\underline{x}(N-k)$; se escogería pues, al

|*| $dJ/d\underline{u}$ se define como el vector $n \times 1$

$$\frac{dJ}{d\underline{u}} = \begin{bmatrix} dJ/du_1 \\ dJ/du_2 \\ \vdots \\ dJ/du_n \end{bmatrix}$$

gundo que cumpla la siguiente condición:

$$\frac{d^2 J_{N-k,N}}{du^2(N-k)} \Big|_{\underline{u}^*[\underline{x}(N-k), N-k]} > 0 \quad (2.133)$$

Que indica que $J_{N-k,N}[\underline{x}(N-k), \underline{u}^*[\underline{x}(N-k), N-k], N-k]$ es un mínimo.

Quando se tiene este caso, el grupo de controles $\underline{u}^*[\underline{x}(N-k), N-k]$, para $k = N-1, N-2, \dots, 0$ es, según la definición 6, una Ley de Control Optimo.

2.2.3 EL REGULADOR LINEAL DISCRETO

En el problema del regulador, se trata de que la salida del sistema tienda a cero, minimizando cierto criterio de funcionamiento que puede considerarse como una unión de los problemas de rastreo y de mínimo esfuerzo.

Para la determinación de este criterio se proponen varias alternativas, de las cuales se escogen dos, que se han considerado como las más importantes.

La primera alternativa propone el siguiente criterio de funcionamiento:

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N) \underline{H} \underline{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) \underline{R} \underline{u}(k)] \quad (2.134)$$

Nótese que es, en efecto, una combinación del problema de rastreo y el de mínimo esfuerzo donde $\underline{r}(k) = 0$ para todo $k = 0, 1, \dots, N$.

La segunda alternativa propone en cambio, un criterio de funcionamiento que involucra la salida $\underline{y}(k)$ del sistema:

$$J = \underline{x}^T(N) \underline{P}_1 \underline{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\underline{y}^T(k+1) \underline{R}_3 \underline{y}(k+1) + \underline{u}^T(k) \underline{R}_2 \underline{u}(k)] \quad (2.135)$$

Si bien los criterios aparentemente no son iguales entre sí, los resultados que se obtienen son los mismos, para demostrar esto, se analizan separadamente los dos casos.

Ahora se desarrollará la minimización del criterio de la ecuación (2.134).

Recurriendo a la programación dinámica, se calcula el control $\underline{u}(N-1)$ que minimice el costo $J_{N,N}$.

$$J_{N,N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N) \underline{H} \underline{x}(N) \quad (2.136)$$

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-1) \underline{Q} \underline{x}(N-1) + \frac{1}{2} \underline{u}^T(N-1) \underline{R} \underline{u}(N-1) + J_{N,N} \quad (2.137)$$

$$J_{N-1,N}^* = \min_{\underline{u}(n-k)} \{ J_{N-1,N} \} \quad (2.138)$$

Ahora, puesto que $\underline{x}(N) = \underline{A} \underline{x}(N-1) + \underline{B} \underline{u}(N-1)$ se puede escribir la expresión de la ec. (2.138) como una función únicamente del esta

do $\underline{x}(N-1)$ y $\underline{u}(N-1)$:

$$J_{N-1,N} = \min_{\underline{u}(N-1)} \left\{ \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-1) \underline{Q} \underline{x}(N-1) + \frac{1}{2} \underline{u}^T(N-1) \underline{R} \underline{u}(N-1) + \frac{1}{2} [\underline{A} \underline{x}(N-1) + \underline{B} \underline{u}(N-1)]^T \underline{H} [\underline{A} \underline{x}(N-1) + \underline{B} \underline{u}(N-1)] \right\} \quad (2.139)$$

Para hallar $\underline{u}^*(N-1)$, se deriva la ecuación (2.139) y se iguala a cero,

$$\frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial \underline{u}(N-1)} = \underline{0} \quad (2.140)$$

desarrollando la ecuación anterior se tiene:

$$\underline{0} = \underline{R} \underline{u}^*(N-1) + \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \left[\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A}^T \underline{H} \underline{B} \underline{u}^*(N-1) + \frac{1}{2} \underline{B}^T \underline{H} \underline{A} \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{u}^{*T}(N-1) \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} \underline{u}^*(N-1) \right] \quad (2.141)$$

$$\underline{0} = \underline{R} \underline{u}^*(N-1) + \underline{B}^T \underline{H} \underline{A} \underline{x}(N-1) + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} \underline{u}^*(N-1) \quad (2.142)$$

$$\underline{0} = \underline{R} \underline{u}^*(N-1) + \underline{B}^T \underline{H} [\underline{B} \underline{u}^*(N-1) + \underline{A} \underline{x}(N-1)] \quad (2.143)$$

De la ecuación (2.142) se puede determinar $\underline{u}^*(N-1)$:

$$\underline{u}^*(N-1) = - [\underline{R} + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B}]^{-1} \underline{B} \underline{H} \underline{A} \underline{x}(N-1) \quad (2.144)$$

Para determinar si efectivamente se tiene un mínimo, se ob-

tiene la segunda derivada respecto de \underline{u} de la expresión del costo J .

$$\frac{d^2 J_{N-1,N}}{d\underline{u}^2(N-1)} = \underline{R} + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} \quad (2.145)$$

Puesto que \underline{R} es definida positiva y \underline{H} es semidefinida positiva, entonces:

$$\frac{d^2 J_{N-1,N}}{d\underline{u}^2(N-1)} > 0 \quad (2.146)$$

Luego, se puede afirmar que $\underline{u}^*(N-1)$ minimiza el costo $J_{N-1,N}$. Además se puede comprobar que \underline{u}^* es función únicamente, de $\underline{x}(N-1)$.

Se ha determinado ya el valor de la entrada \underline{u} para el paso $N-1$; para continuar con los siguientes pasos, se realizará un cambio en la notación.

$$\text{sea } \underline{H} \triangleq \underline{P}(N) \quad (2.147)$$

$$\text{y } \underline{u}^*(N-1) = -\underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1) \quad (2.148)$$

$$\text{donde } \underline{F}(N-1) = (\underline{R} + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B})^{-1} \underline{B} \underline{P}(N) \underline{A} \quad (2.149)$$

Reemplazando estas ecuaciones en la expresión del costo $J_{N-1,N}$, se obtiene:

$$J_{N-1,N}^* = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-1) \underline{Q} \underline{x}(N-1) + \frac{1}{2} [\underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1)]^T \underline{R} [\underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1)] +$$

$$+\frac{1}{2}[\underline{A}\underline{x}(N-1) - \underline{B}\underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1)]^T \underline{P}(N) [\underline{A}\underline{x}(N-1) - \underline{B}\underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1)] \quad (2.150)$$

esto se lo puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-1) \left\{ \underline{Q} + \underline{F}^T(N-1) \underline{R}\underline{F}(N-1) + [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-1)] \right. \\ \left. \underline{P}(N) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-1)] \right\} \underline{x}(N-1) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Se define la matriz $\underline{P}(N-1)$ como sigue:

$$\underline{P}(N-1) = \underline{Q} + \underline{F}^T(N-1) \underline{R}\underline{F}(N-1) + [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-1)]^T \underline{P}(N) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-1)] \quad (2.152)$$

Que se conoce con el nombre de matriz de ganancias de Riccati. Ahora, reemplazando por $\underline{P}(N-1)$ la parte correspondiente de la ecuación (2.151) se tiene la siguiente expresión simplificada:

$$J_{N-1,N}^* = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-1) \underline{P}(N-1) \underline{x}(N-1) \quad (2.153)$$

Nótese que la ecuación (2.153) tiene la misma forma de la (2.136), de tal manera que si se desarrolla aquella para $k=N-2$ se obtendría, por el mismo procedimiento, que:

$$\underline{u}^*(N-2) = - [\underline{R} + \underline{B}^T \underline{P}(N-1) \underline{B}]^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(N-1) \underline{A}\underline{x}(N-2) \quad (2.154)$$

$$\underline{u}^*(N-2) = - \underline{F}(N-2) \underline{x}(N-2) \quad (2.155)$$

$$\underline{P}(N-2) = \underline{Q} + \underline{F}(N-2) \underline{R}\underline{F}(N-2) + [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-2)]^T \underline{P}(N-1) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-2)] \quad (2.156)$$

donde el costo total mínimo desde este paso, está dado por la expresión que sigue:

$$J_{N-2,N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-2) \underline{P}(N-2) \underline{x}(N-2) \quad (2.157)$$

Por inferencia, se pueden escribir las ecuaciones para un paso k cualquiera:

$$\underline{u}(N-k) = - [\underline{R} + \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{B}]^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \underline{x}(N-k) \quad (2.158)$$

$$\underline{u}(N-k) = - \underline{F}(N-k) \underline{x}(N-k) \quad (2.159)$$

$$\underline{P}(N-k) = \underline{Q} + \underline{F}^T(N-k) \underline{R} \underline{F}(N-k) + [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-k)]^T \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-k)] \quad (2.160)$$

Se puede simplificar la ec. (2.160) desarrollando $\underline{P}(N-k)$:

$$\begin{aligned} \underline{P}(N-k) = & \underline{F}^T(N-k) \underline{R} \underline{F}(N-k) + \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} + \underline{F}^T(N-k) \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{B} \underline{F}(N-k) + \\ & - \underline{F}^T(N-k) \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{B} \underline{F}(N-k) + \underline{Q} \end{aligned} \quad (2.161)$$

reordenando y agrupando, se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{P}(N-k) = & \underline{Q} + \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-k)] + \\ & + \underline{F}^T(N-k) [\underline{R} + \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{B}] \underline{F}(N-k) - \underline{F}^T(N-k) \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \end{aligned} \quad (2.162)$$

De la ecuación (2.158) se puede obtener la expresión de

$\underline{F}(N-k)$:

$$\underline{F}(N-k) = [\underline{R} + \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{B}]^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \quad (2.163)$$

reemplazando la expresión de $\underline{F}(N-k)$ se obtiene:

$$\underline{P}(N-k) = \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-k)] + \underline{Q} \quad (2.164)$$

el costo en el intervalo $[N-k, N]$ estará dado por:

$$J_{N-k, N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-k) \underline{P}(N-k) \underline{x}(N-k) \quad (2.165)$$

Estas ecuaciones se cumplen para $k=0, 2, \dots, N$. Es interesante ver que para $k=N$ se tiene, en la ecuación (2.165), la expresión del costo total desde el paso 0 al paso N:

$$J_{0, N} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(0) \underline{P}(0) \underline{x}(0) \quad (2.166)$$

que depende solamente de la condición inicial $\underline{x}(0)$.

De estos resultados se pueden sacar algunas conclusiones:

- a.- El control óptimo en cada paso es una combinación lineal de los estados [véase ec. (2.159)], es decir, se trata de una Ley de Control Óptimo, donde la entrada del sistema es una Realimentación de Estado, lineal y variante en el tiempo como se muestra en la Fig. 2.8.
- b.- El costo mínimo total depende del valor inicial del estado \underline{x} , según la ecuación (2.166), donde $\underline{P}(0)$ resulta del cálculo de $\underline{P}(N-k)$ en forma sucesiva para $k=1, 2, \dots, N$ en la ecuación (2.160).

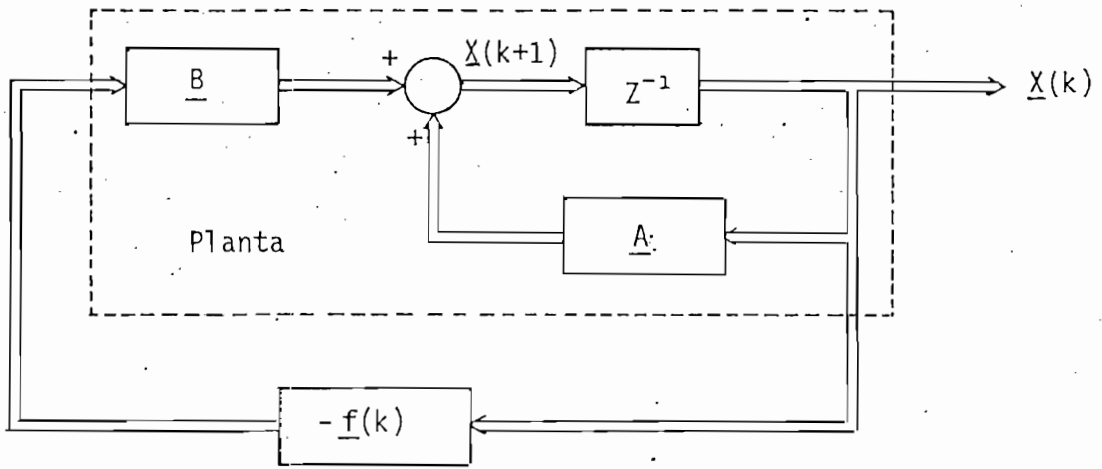


Fig. 2.8. Realimentación de Estado variante en el tiempo.

c.- La técnica de la programación dinámica permite tener ecuaciones re cur sivas que fácilmente pueden ser implementadas en un computador.

Ahora se realizará la minimización del segundo criterio de funcionamiento, que está descrito por la ecuación (2.135).

Puesto que en este caso se tiene, dentro de la ecuación del costo, al vector de salida y, se puede, por medio de la ecuación (2.167) dejar todo en función del vector de estado x y el vector de entrada u, para obtener una expresión similar a la que ya se había analizado.

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k) \tag{2.167}$$

Recurriendo, nuevamente al método de la programación dinámica, antes de realizar el cambio del vector de salida y por su equivalente en función del vector de estado x.

$$J_{N,N} = \underline{x}^T(N) \underline{P}_1 \underline{x}(N) \quad (2.168)$$

$$J_{N-1,N} = \underline{y}^T(N) \underline{R}_3 \underline{y}(N) + \underline{u}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{u}(N-1) + J_{N,N} \quad (2.169)$$

Reemplazando en la ecuación anterior la (2.167) se tiene:

$$J_{N-1,N} = \underline{x}^T(N) \underline{C}^T \underline{R}_3 \underline{C} \underline{x}(N) + \underline{u}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{u}(N-1) + J_{N,N} \quad (2.170)$$

$$\text{Sea } \underline{R}_1 = \underline{C}^T \underline{R}_3 \underline{C} \quad (2.171)$$

entonces la ecuación (2.170) toma la siguiente forma:

$$J_{N-1,N} = \underline{x}^T(N) \underline{R}_1 \underline{x}(N) + \underline{u}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{u}(N-1) + \underline{x}^T(N) \underline{P}_1 \underline{x}(N) \quad (2.172)$$

$$\text{o } J_{N-1,N} = \underline{x}^T(N) [\underline{R}_1 + \underline{P}_1] \underline{x}(N) + \underline{u}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{u}(N-1) \quad (2.173)$$

Nos interesa ahora, que esta ecuación quede en términos del paso N-1 para lo cual se reemplaza el vector $\underline{x}(N)$ por su equivalente dado por la ecuación dinámica (2.1):

$$J_{N-1,N} = [\underline{A}\underline{x}(N-1) + \underline{B}\underline{u}(N-1)]^T [\underline{R}_1 + \underline{P}_1] [\underline{A}\underline{x}(N-1) + \underline{B}\underline{u}(N-1)] + \\ + \underline{u}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{u}(N-1) \quad (2.174)$$

Para obtener el control $\underline{u}(N-1)$ que minimice el costo, se deriva la ecuación anterior, y se iguala a cero:

$$\underline{0} = 2 \underline{R}_2 \underline{u}^*(N-1) + 2 \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) [\underline{A} \underline{x}(N-1) + \underline{B} \underline{u}^*(N-1)] \quad (2.175)$$

De la ecuación anterior se puede obtener el control óptimo $\underline{u}^*(N-1)$,

$$\underline{u}^*(N-1) = - [\underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) \underline{B} + \underline{R}_2]^{-1} \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) \underline{A} \underline{x}(N-1) \quad (2.176)$$

Igual que en el caso anterior, se puede escribir:

$$\underline{u}^*(N-1) = - \underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1) \quad (2.177)$$

Reemplazando en la expresión del costo, se tendrá ya el costo mínimo para este paso:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \{ [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)] \underline{x}(N-1) \}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) \{ [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)] \underline{x}(N-1) \} + \\ &+ \underline{x}^T(N-1) \underline{F}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1) \end{aligned} \quad (2.178)$$

que también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \underline{x}^T(N-1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)]^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)] + \\ &+ \underline{F}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{F}(N-1) \underline{x}(N-1) \end{aligned} \quad (2.179)$$

Se define ahora a \underline{P}_2 como:

$$\underline{P}_2 = [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)]^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-1)] + \underline{F}^T(N-1) \underline{R}_2 \underline{F}(N-1) \quad (2.180)$$

Así, se puede escribir la ecuación (2.179) en la misma forma que tiene la (2.168),

$$J_{N-1,N} = \underline{x}(N-1)^T \underline{P}_2 \underline{x}(N-1) \quad (2.181)$$

de tal manera que se pueden generalizar las ecuaciones para cualquier paso $N-k$, donde $k = 1, \dots, N$.

Las ecuaciones de $\underline{u}^*(N-k)$, \underline{P}_k y $J_{N-k,N}$ se escriben a continuación:

Control Optimo para el paso $N-k$.

$$\underline{u}^*(N-k) = - \left\{ [\underline{R}_2 + \underline{B}^T(\underline{R}_1 + \underline{P}_k)\underline{B}]^{-1} \underline{B}^T(\underline{R}_1 + \underline{P}_k)\underline{A} \right\} \underline{x}(N-k) \quad (2.182)$$

Control Optimo como una Realimentación de Estado.

$$\underline{u}^*(N-k) = - \underline{F}(N-k) \underline{x}(N-k) \quad (2.183)$$

Matriz de Ricatti.

$$\underline{P}_k = [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-k)]^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F}(N-k)] + \underline{F}^T(N-k) \underline{R}_2 \underline{F}(N-k) \quad (2.184)$$

Control Optimo.

$$J_{N-k,N}^* = \underline{x}^T(N-k) \underline{P}_k \underline{x}(N-k) \quad (2.185)$$

La expresión que define a la matriz de ganancias de Ricatti

(2.184) puede simplificarse de la siguiente manera:

Desarrollando P_k se tiene:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_k &= \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A} + \underline{F}^T (N-k) \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} \underline{F} (N-k) + \\
 &\quad - \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} \underline{F} (N-k) + \\
 &\quad + \underline{F}^T (N-k) \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A} + \underline{F}^T (N-k) \underline{R}_2 \underline{F} (N-k)
 \end{aligned} \tag{2.186}$$

reordenando respecto de \underline{F}^T ,

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_k &= \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A} - \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} \underline{F} (N-k) + \\
 &\quad + \underline{F}^T (N-k) [\underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} + \underline{R}_2] \underline{F} (N-k) + \\
 &\quad - \underline{F} (N-k) \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A}
 \end{aligned} \tag{2.187}$$

separando en dos términos, se puede escribir:

$$\underline{P}_k = \underline{P}_{1k} + \underline{P}_{2k} \tag{2.188}$$

$$\text{donde } \underline{P}_{1k} = \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F} (N-k)] \tag{2.189}$$

en \underline{P}_{2k} se reemplaza la expresión de $\underline{F} (N-k)$ en el primer término de la siguiente manera:

$$\underline{P}_{2k} = \underline{F}^T (N-k) [\underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} + \underline{R}_2] [\underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{B} + \underline{R}_2]^{-1} \cdot x$$

$$x \quad \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A} - \underline{F}^T (N-k) \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) \underline{A} \quad (2.190)$$

Nótese que las matrices representadas entre corchetes forman la matriz identidad, por lo que los dos términos del lado derecho de la ecuación (2.190) son iguales y de signo contrario; por lo tanto:

$$\underline{P}_{2k} = \underline{0} \quad (2.191)$$

$$\text{entonces } \underline{P}_k = \underline{A}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_{k-1}) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F} (N-k)] \quad (2.192)$$

Se calcula ahora $\underline{F}(N-k-1)$ en el primer caso:

$$\begin{aligned} \underline{F}(N-k-1) &= [\underline{R}_2 + \underline{B}^T \underline{P}(N-k) \underline{B}]^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(N-k) \underline{A} \\ &= \underline{R} + \underline{B}^T [\underline{A}\underline{P} (N-k+1) \underline{A} - \underline{B}\underline{F} (N-k) + \underline{Q}] \underline{B}^{-1} x \\ &\quad x \underline{B}^T \underline{A}\underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{B}\underline{F} (N-k)] + \underline{Q} \underline{A} \end{aligned} \quad (2.193)$$

en el segundo caso $\underline{F}(N-k-1)$ es:

$$\underline{F}(N-k-1) = [\underline{R}_2 + \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_k) \underline{B}]^{-1} \underline{B}^T (\underline{R}_1 + \underline{P}_k) \underline{A} \quad (2.194)$$

comparando las dos últimas ecuaciones, se puede decir que tienen la misma forma, por lo tanto, los dos criterios nos darían los mismos resultados si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\underline{R}_2 = \underline{R} \quad (2.195)$$

$$\underline{R}_1 = \underline{Q} \quad (2.196)$$

$$\underline{P}_1 = \underline{H} \quad (2.197)$$

donde la relación entre las matrices \underline{P}_k y $\underline{P}(N-k+1)$ es:

$$\underline{P}_k = \underline{A} \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{B} \underline{F}(N-k)] \quad (2.198)$$

Se puede ver que si se cumplen las condiciones (2.195) a (2.197) la Ley de Control Óptimo es la misma, considerando cualquiera de los criterios de funcionamiento propuestos, aunque los costos sean diferentes entre sí.

2.2.4 APLICACION DE CONTROL OPTIMO A REALIMENTACION DE ESTADO.

Se ha visto, en el problema del regulador lineal discreto que el control óptimo es una ley de control, es decir, que la entrada del sistema \underline{u}^* está formada por una combinación lineal de los estados, siendo efectivamente, una Realimentación de Estado.

Normalmente se tendrán sistemas que no son reguladores, esto significa que la entrada no será necesariamente nula, sino que tendrá un cierto valor $\underline{r}(k)$. En este caso el sistema de lazo cerrado de la Fig. 2.3 se transforma en la de la Fig. 2.9, en la cual se ha añadido el vector de entrada $\underline{r}(k)$.

Ahora bien, si en este sistema se trabaja con el error definido en la ecuación (2.199), se tiene el mismo caso del regulador, sin

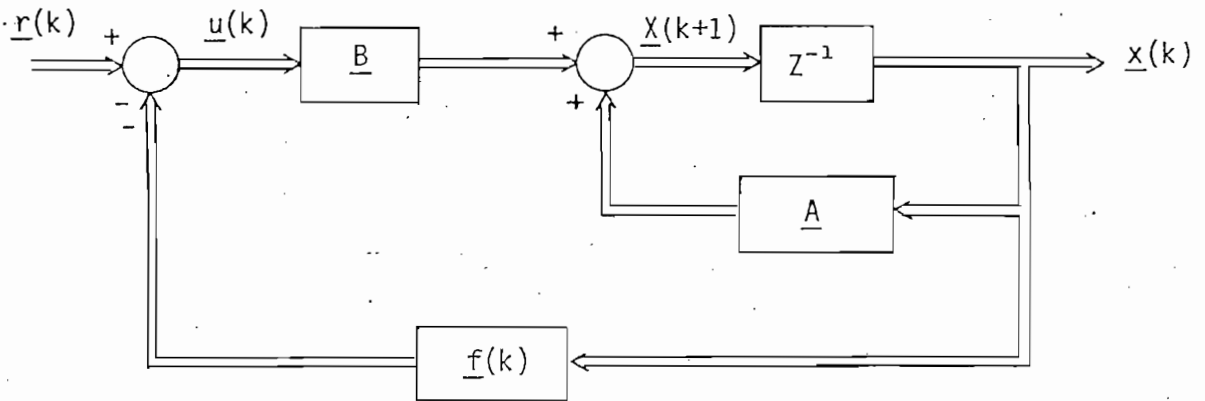


Fig. 2.9. Realimentación óptima de Estado en un sistema digital.

que deba preocupar el añadir más elementos a la ecuación del costo, puesto que en este caso se trabaja con el error substituyendo a la salida $y(k)$.

$$\underline{e}(k) = \underline{r}(k) - \underline{y}(k) \tag{2.199}$$

Por otro lado, la condición de entrada nula, en el regulador, no es una limitación grave, puesto que el diseño (en tiempo infinito) asegura que el sistema resultante es estable y posee sus características tales que el funcionamiento será satisfactorio practicamente para cualquier entrada diferente de cero. ⁽²⁾

Se puede concluir, entonces, que las ecuaciones desarrolladas para la solución del problema del regulador lineal discreto, son perfectamente aplicables a este caso, cuando la entrada $\underline{r}(k)$ es diferente de cero.

2.2.5 DISEÑO.

El objetivo de un diseñador será hallar el grupo de matrices $F(k)$ $k=1,2,\dots,N-1$ que minimicen el criterio de funcionamiento dado por la ecuación (2.134) o por la ecuación (2.135). Puesto que el segundo criterio de funcionamiento, es igual al primero, si se cumplen las condiciones (2.195) a (2.197), para la realización del diseño, solamente se utilizará la primera alternativa.

A continuación se reescriben las ecuaciones desarrolladas en el problema del Regulador Lineal pero ahora considerando un sistema con una sola entrada.

La ecuación que define al costo J toma la siguiente forma:

$$J = \frac{1}{2} \{ \underline{x}^T(N) \underline{H} \underline{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) + r u^2(k)] \} \quad (2.200)$$

El costo mínimo total sobre el intervalo $[N-k, N]$, esto es sobre los $N-k$ últimos pasos, viene dado por:

$$\begin{aligned} J_{N-1, N} &= \min_{u^*(N-k)} \{ J_{n-1, N} \} \\ &= \frac{1}{2} \underline{x}^T(N-k) \underline{P}(N-k) \underline{x}(N-k) \end{aligned} \quad (2.201)$$

El control $u^*(N-k)$ está dado por las ecuaciones (2.150) y (2.159) que se reescriben a continuación:

$$\begin{aligned} u^*(n-k) &= - [r + \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{b}]^{-1} \cdot \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \underline{x}(N-k) \\ &= - \underline{f}(N-k) \underline{x}(N-k) \end{aligned} \quad (2.202)$$

De la ecuación (2.162) se obtiene la expresión que describe al vector de realimentación $\underline{f}(N-k)$:

$$\underline{f}(N-k) = [r + \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{b}]^{-1} \cdot \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \quad (2.203)$$

Y como se había visto, la matriz de ganancias de Riccati viene dada por la siguiente expresión:

$$\underline{P}(N-k) = \underline{Q} + \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{b} \underline{f}(N-k)] \quad (2.204)$$

con la condición de borde:

$$\underline{P}(N) = \underline{H} \quad (2.205)$$

Las ecuaciones (2.203) y (2.204) se resuelven recursivamente calculándose primero $\underline{f}(N-k)$ y luego $\underline{P}(N-k)$ para $k=0,1,2,\dots,N$.

Puesto que el resultado que se obtiene para el control u^* es una Realimentación de Estado, el sistema debe ser controlable, para que pueda aplicarse esta solución; por lo tanto, antes de realizar el diseño, se debería comprobar si el par $[\underline{A}, \underline{b}]$ es completamente controlable.

En este caso, el cambio de base a variables de fase, no es necesario, puesto que el cálculo del vector \underline{f} no está dado en función

de la n -ésima fila de \underline{A}^f como en el caso estudiado en la sección anterior, sino por la expresión de la ecuación (2.203).

Una característica importante del problema del regulador lineal, es que si el sistema es completamente controlable, y si se cumple la condición de borde $\underline{p}(N) = \underline{0}$, entonces $\underline{f}(k_i)$ tiende a un valor \underline{f} constante ⁽³⁾; además, si el sistema es exponencialmente estable y $\underline{p}(N) = \underline{p}$, también $\underline{f}(k_i)$ tiende a estabilizarse en un valor constante \underline{f} cuando $N \rightarrow \infty$. Esto implica que el control óptimo $u^*(k)$, es exponencialmente estable, y tiende a un valor constante dado por:

$$u^*(k) \rightarrow u^* = - \underline{f} \underline{x} \quad (2.206)$$

Desde el punto de vista físico, esto significa, que si un sistema o proceso, va a ser controlado por un control óptimo por muchos períodos, los amplificadores a través de los cuales se realimenten los estados tendrán ganancia fija. Para determinar estos valores, que forman el vector \underline{f} , se resuelven las relaciones de recurrencia para tantos estados como sean necesarios, para que $\underline{f}(N-k)$ converja hacia un valor constante.

Resumiendo, los pasos necesarios para realizar el diseño de la Realimentación Óptima de Estado.

- 1.- Discretizar la matriz \underline{A} y el vector \underline{b} para conseguir \underline{A}_D y \underline{b}_D si el sistema está descrito en forma análoga.
- 2.- Comprobar si el sistema es controlable, encontrando la matriz de controlabilidad \underline{S} , y verificando que su determinante sea diferente

de cero.

- 3.- Determinar la forma de las matrices de ponderación \underline{H} y \underline{Q} y del coeficiente r , para conformar la ecuación del costo.
- 4.- Determinar el número máximo de muestreos N .
- 5.- Aplicar las relaciones de recurrencia (2.203) y (2.204) para determinar $\underline{f}(N-k)$.
- 6.- Si lo que se desea es obtener un vector \underline{f} constante, probar varias veces desde el paso 3º hasta obtener un resultado satisfactorio.

REFERENCIAS.

- (1) Kuo Benjamin C., DIGITAL CONTROL SYSTEMS, Holt Saunders, Japón, 1981, p.613.
- (2) Kuo Benjamin C., DIGITAL CONTROL SYSTEMS, Holt Saunders, Japón, 1981, p.601.
- (3) Kirk Donald E., OPTIMAL CONTROL THEORY, Prentice Hall, 1981 p.84.
- (3) Kwakernaak H. y Sivan R., LINEAR OPTIMAL CONTROL SYSTEMS, Wiley-Interscience, USA, 1972, p.495-496.

C A P I T U L O I I I

3.1 PROGRAMAS DESARROLLADOS

El propósito de los programas desarrollados es el de facilitar el diseño y/o análisis de sistemas de control con Realimentación de Estado. Están orientados a sistemas discretos, fijos y lineales, con una sola entrada y una sola salida.

Basicamente se presentan dos opciones: a) Diseño y Análisis de la Realimentación de Estado y b) Diseño y Análisis de Realimentación Óptima de Estado.

El equipo de computación es el que está disponible en el Laboratorio de Métodos Numéricos, que es un 4051 GRAFIC SISTEM de la Tektronix.

Para el desarrollo de los algoritmos necesarios para la resolución de estos problemas, se ha implementado el sistema de Biblioteca de Programas; esto es, a cada grupo de funciones similares se asigna un diferente programa; por ejemplo, todo lo relacionado con entrada de datos, verificación, almacenamiento en disco, etc., se implementa en un único programa; lo relacionado a salida de datos, en otro programa; de igual manera, las otras partes necesarias para los diferentes cálculos, se implementan en otros programas. Estos programas son controlados por medio de un Maestro, que lo que hace es seleccionar y ejecutar el deseado.

Esta técnica se aplica por dos poderosas razones:

- 1.- La memoria disponible al usuario es de 30 Kbytes y tratar de implementarlo todo en un solo programa coparía casi toda su capacidad (si no toda), haciendo imposible la resolución del problema.
- 2.- La implementación misma y la edición de pequeños programas, es mucho más simple, por la relativa independencia que tienen al ser tratados individualmente; incluso, dentro de un mismo programa, cada función que éste realiza es más fácil tratarla individualmente en programas o subrutinas.

Generalmente, el uso de este sistema de Biblioteca de Programas perjudica al tiempo de ejecución, puesto que la transferencia de control de un programa a otro y de éste a sus subrutinas, toman tiempo. Sin embargo, en este caso, esta demora no tiene importancia.

A continuación, la Tabla 3.1 muestra los programas desarrollados, su clasificación y funciones generales.

Seguidamente, se presenta una descripción detallada y justificada de cada uno de estos programas. El Anexo A contiene un listado completo de cada uno de ellos.

3.1.1 PROGRAMA MAESTRO

Como ya se había señalado, el programa Maestro controla la ejecución del resto de programas que conforman la Biblioteca de Progra-

mas.

Tabla 3:1.- PROGRAMAS DESARROLLADOS

NOMBRE PROGRAMA	CLASIFICACION	FUNCIONES
@TESIS/MAESTRO	PRINCIPAL	a) Presenta Opciones b) Carga programas c) Los ejecuta
@TESIS/ENTRADA2	ENTRADA/SALIDA	a) Permite ingreso de datos b) Almacenamiento c) Verificación y d) Corrección
@TESIS/CALINI	PROCESAMIENTO	a) Obtención de polos de lazo abierto b) Determinación de Período de muestreo c) Discretización d) Comprobación de la Controlabilidad e) Cambio a variables de Fase
@TESIS/REALDISEST	PROCESAMIENTO	Diseño y Análisis de la Realimentación de Estado
@TESIS/REALOPTEST	PROCESAMIENTO	Diseño y Análisis de la Realimentación de Estado
@TESIS/SALIDA	ENTRADA/SALIDA	Salida de los datos y resultados obtenidos en cada programa.

El computador utilizado dispone de veinte teclas programables, que lo que hacen es ejecutar el programa no desde la primera línea, si no desde otras; esta habilidad es utilizada por el programa Maestro para seleccionar los programas deseados.

Las funciones que este programa realiza son:

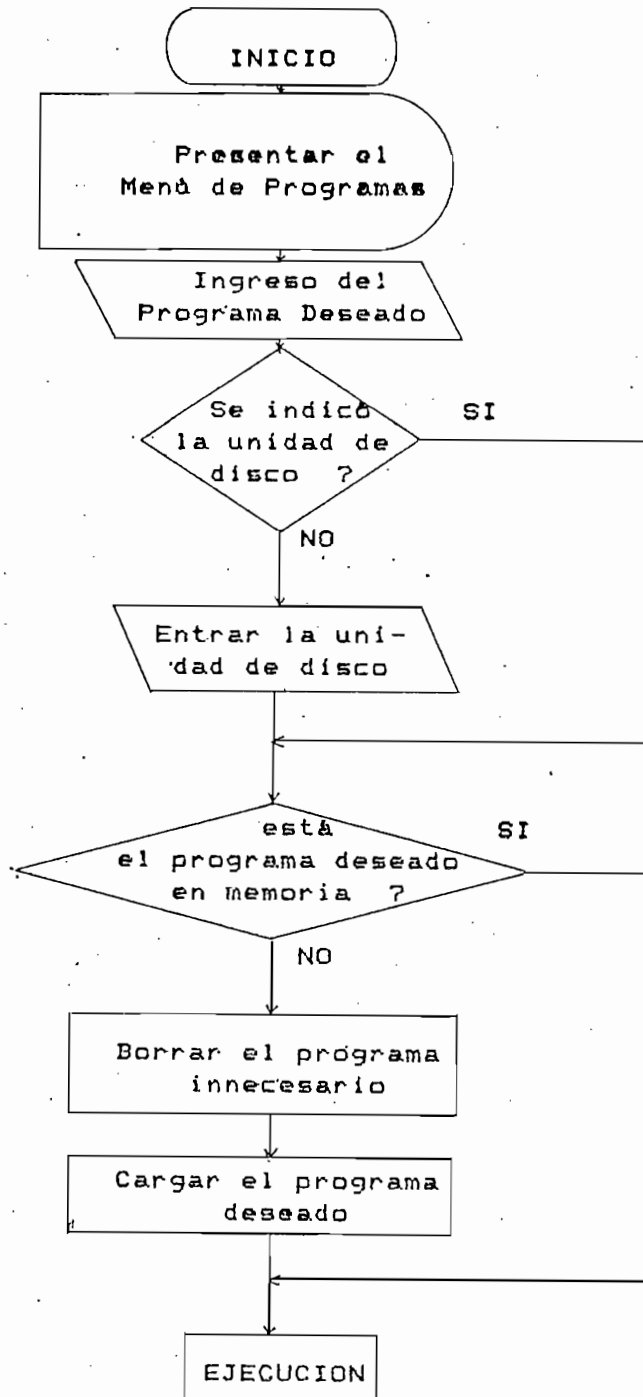
- a) Inicializa variables.
- b) Inicializa el trabajo con disco.
- c) Dispone en pantalla los programas que existen y el número de tecla que se debe presionar para seleccionarlo.
- d) Transfiere el control hacia el programa en memoria (este siempre se encuentra a partir de la línea 1000).
- e) El programa en memoria retorna al Maestro su identificación (un número); si éste corresponde al deseado, se transfiere definitivamente el control al programa en memoria, en caso contrario borra el programa (borra todas las líneas a partir de la 1001 en adelante), luego carga el programa deseado (a partir de la línea 1000) y le entrega el control definitivo.

El siguiente es un listado de las variables que se utilizan en este programa; la Fig. 3.1 muestra un diagrama de flujo del programa Maestro, en él se puede ver más claramente el funcionamiento de dicha rutina.

Tabla 3.2.- VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA MAESTRO

VARIABLE	DESCRIPCION
W0	Unidad donde se encuentra el disco
01	Programa deseado: 01=1 es ENTRADA2 01=2 es CALINI 01=3 es REALDISEST 01=4 es REALOPTEST 01=5 es SALIDA
02	# de Programa en memoria: este dato retorna al Maestro desde el mismo programa en memoria.
X\$	Nombre del programa que debe ser cargado.

fig. 3.1 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA MAESTRO



3.1.2 PROGRAMA ENTRADA2

Este programa sirve basicamente para el ingreso de los datos necesarios para identificar cierta planta o sistema y para sobre ellos, realizar los cálculos de Realimentación de Estado.

Las funciones que realiza este programa son:

- a) Permite el ingreso de datos desde el teclado.
- b) Lee los datos desde cierto archivo.
- c) Si los datos fueron ingresados desde teclado, permite el almacenamiento en archivo.
- d) Es capaz de listar y/o editar datos (el orden del sistema no se puede corregir).

Este programa no regresa al Prog. Maestro luego de su ejecución, sino que presenta un propio menú de opciones que son precisamente las funciones descritas anteriormente más una: transferir el control al programa de cálculos iniciales, CALINI. Esto se hace porque necesariamente, se debe conocer si el sistema es controlable; además se requiere su descripción a variables de fase, para realizar la Realimentación de Estado.

Los datos que se requieren para identificar cierta planta o sistema son:

- a) Clase de la planta: la planta puede ser análoga o digital.
- b) Orden del sistema: o el orden de la matriz A.

- c) Coeficientes de la matriz de estado A.
- d) Coeficientes del vector de entrada b. y
- e) Coeficientes del vector de salida c.

En la Tabla 3.3 se presenta un listado de las variables utilizadas.

Tabla 3.3.- VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA ENTRADA2

VARIABLE	DESCRIPCION
A	Matriz de estado
B	Vector de entrada
C	Vector de salida
N	Orden del sistema
C\$	Clase del sistema: C\$ = "A" : sistema análogo C\$ = "D" : sistema digital.
T\$	Nombre del archivo de datos
VO	VO = 1: Indica que existen datos en memoria.
Z9	Indica el número de opción que se ha escogido.
W9	Si W9 = 1: Indica que se ha realizado el ingreso manual.
W8	Si W8 = 1: Indica que se ha leído un archivo.
W7	Si W7 = 1: Indica que se han almacenado datos.

Las variables indicadoras W9, W8 y W7 sirven para establecer

ciertas condiciones, por ejemplo, sólo si se realiza el ingreso manual de datos ($W9 = 1$), se pueden archivar los datos (para evitar que los mismos datos queden almacenados en varios archivos, ahorrando espacio en el disco); otro ejemplo, sólo se puede listar o corregir si hay datos ($W8 = 1$ ó $W9 = 1$).

La Fig. 3.2 muestra el diagrama de flujo de este programa; en él se ve que las opciones 3, 4 y 5 sólo se pueden ejecutar si ciertas condiciones se han cumplido.

3.1.3 PROGRAMA DE CALCULOS INICIALES (CALINI).

Este programa realiza la fase inicial de preparación de datos. Las funciones que este programa realiza son las siguientes:

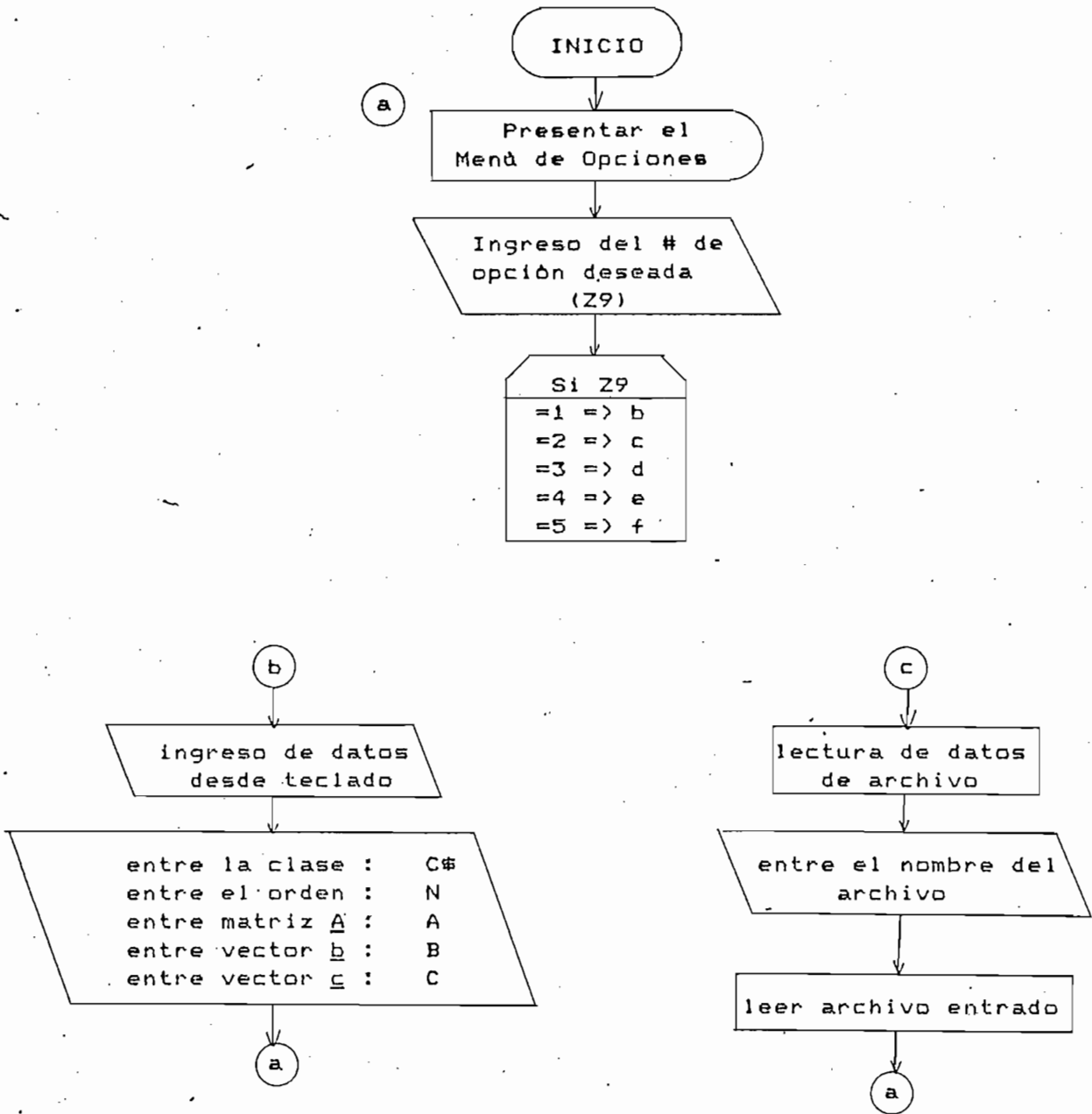
- a) Determinación de los polos del sistema de lazo abierto.
- b) Determinación del período de discretización.
- c) Discretización, si fuera necesaria.
- d) Determinación de la matriz de cambio de base P y transformación a variables de fase.

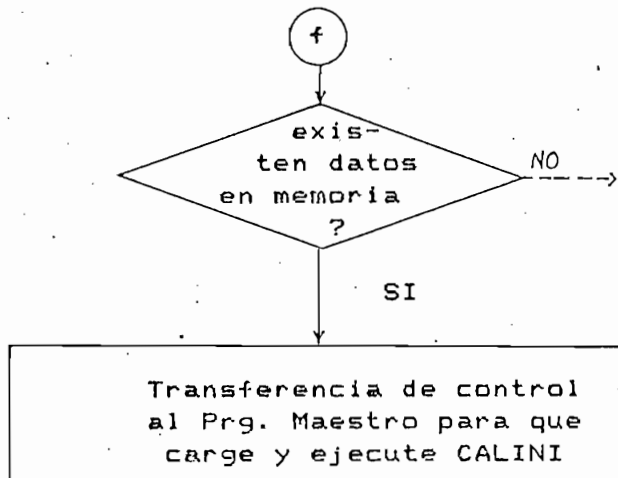
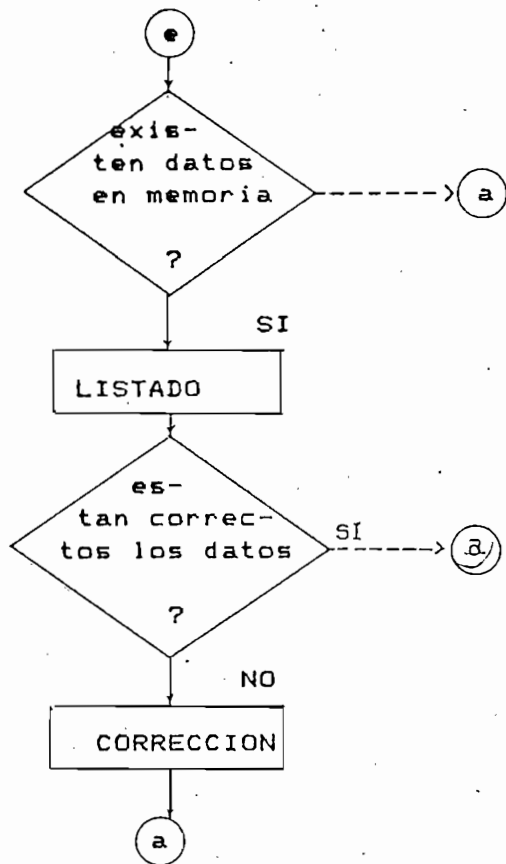
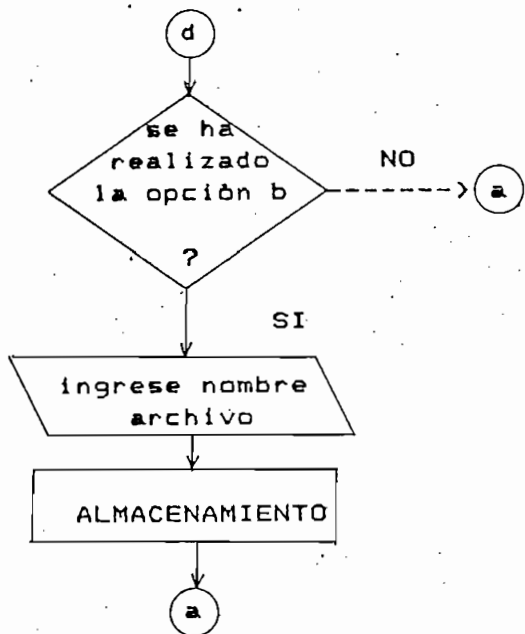
A continuación se presenta una más detallada descripción de estas funciones.

a) POLOS DE LAZO ABIERTO.

La determinación de los polos de lazo abierto se realiza con el propósito, entre otras cosas, de encontrar el período de discretiza-

fig 3.2. DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA ENTRADAZ





ción adecuado. Para ello se hallan los autovalores de la matriz \underline{A} por medio de un algoritmo que realiza los siguientes pasos: (1)

- 1.- Escalar o normalizar la matriz \underline{A} , es decir, acondicionar los valores numéricos para que el computador trabaje con mínimo error de redondeo.
- 2.- Realizar transformaciones de semejanza, tantas veces como sea necesario hasta obtener una matriz de Hessenberg, puesto que esto reduce notoriamente el número de iteraciones en el siguiente paso.
- 3.- Hallar los autovalores por medio del algoritmo QR, que los expertos consideran como el más apropiado para ser implementado en computador, porque introduce el menor error de redondeo.
- 4.- Si la matriz es simétrica, utilizar el método de Householder, que introduce menos errores que el método anterior.

b) PERIODO DE MUESTREO.

Cuando la planta es análoga, es necesario discretizar las matrices \underline{A} y \underline{b} ; es menester entonces, hallar un período de discretización adecuado. Este período debe ser tal que, la señal muestreada pueda ser reconstruída; el *teorema del muestreo* indica que la mínima frecuencia de muestreo debe ser por lo menos igual, sino mayor, que el doble de la mayor de las frecuencias que componen la señal a muestrearse.

La Fig. 3.3 (2), muestra el efecto de la localización de los

polos en la respuesta en el dominio del tiempo; esto es, mientras la parte real de los polos se aleja del origen hacia la izquierda, la atenuación es mayor, y como es bien conocido, si la parte real de los polos se vuelve positiva, el sistema es inestable. Ahora, si la parte imaginaria de los polos aumenta, (o disminuye respecto de cero) se incrementa la frecuencia de las oscilaciones.

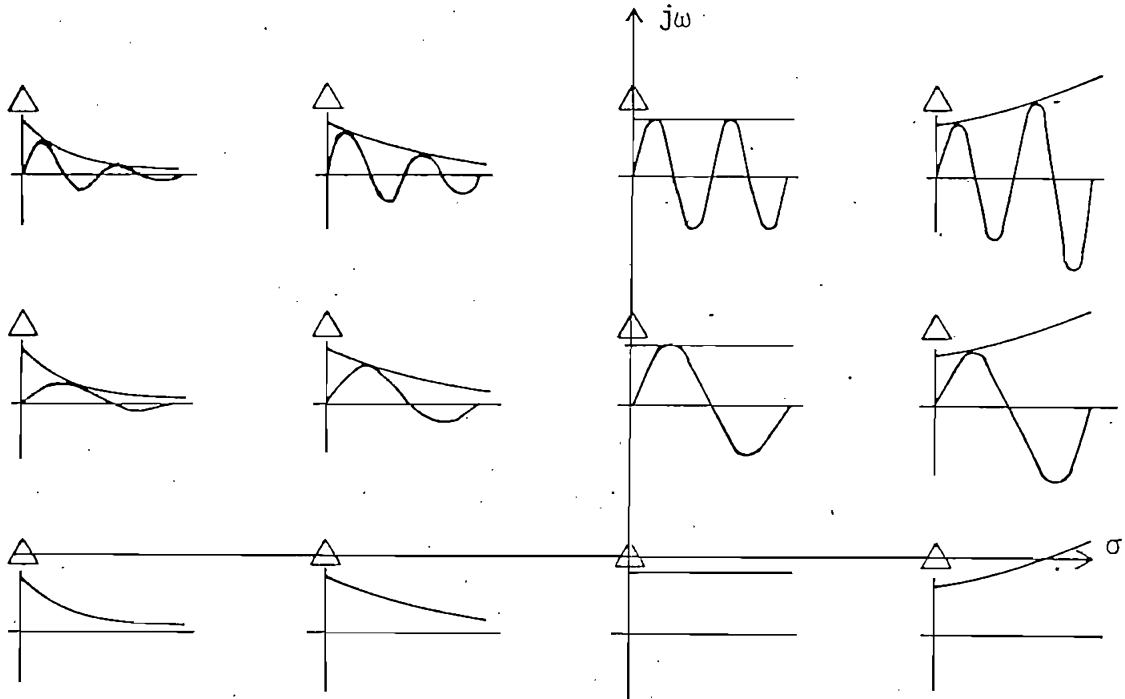


Fig. 3.3. Respuesta a un impulso para varias localizaciones de raíces en el plano s . (No se muestra la raíz conjugada).

Según esto, será necesario tomar en cuenta, para la determinación del período de muestreo, la parte real y la parte imaginaria de los polos del sistema. El método empleado para este efecto es:

- a) Determinar el máximo entre los valores absolutos de las partes reales y las partes imaginarias de los polos, y
- b) Establecer como un período de discretización adecuado, a la décima

parte del inverso del valor determinado en (a) puesto que este valor es, o bien una constante de tiempo (si es un valor real) o período de oscilación (si es un valor imaginario de un polo). Se toma la décima parte por seguridad, considerando la recomendación del teorema del muestreo.

Debe quedar claro que, el programa no impone este período de muestreo por una razón bien simple: el muestreador está limitado por sus condiciones físicas y es posible que el mínimo período obtenible sea mayor al que recomienda el programa, por lo tanto, siempre que se calcula el período de discretización, se deja al usuario la opción de cambiarlo.

Respecto del período de discretización aconsejado, se analiza rá más adelante en cuanto al efecto que produce en la determinación de la controlabilidad.

c) DISCRETIZACION.

Cuando la planta es análoga, es necesario discretizar las matrices A y b. En la sección 2.1. se analizan los métodos teóricos que se tienen para hallar A_D y b_D, sin embargo, numéricamente se debe realizar algunas consideraciones.

Reescribiendo a continuación las fórmulas (2.23) y (2.24)

$$\underline{A}_D = \underline{e}^{AT} \tag{3.1}$$

$$\underline{b}_D = \int_0^T \underline{e}^{A\tau} \underline{b} \, d\tau \tag{3.2}$$

Para implementar en computador la ecuación (3.1) se recurre a la identidad:

$$\frac{AT}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i T^i}{i!} \quad (3.3)$$

La exponenciación presentada de esta forma es más simple de implementarse, lo único que se debe considerar es que el sumatorio debe realizarse sólo hasta que los aportes de los $(A^i \times T^i) / i!$ sean inferiores a la precisión con que se desea trabajar.

La integración puede realizarse por varios métodos numéricos de diversas precisiones; en la sección 2.1., se desarrolló una aproximación llamada Regla del punto medio, que es buena si se considera que el período de muestreo es lo suficientemente pequeño como para que la variación de la función a integrarse no sea alta en este intervalo.

Naturalmente, si se deja la opción al usuario de cambiar el período de muestreo, al tratar de efectuar la integración por medio de dicha aproximación puede ocurrir que el resultado tiene mucho error si el intervalo de integración es muy grande.

Para evitar este problema, se realiza la integración numérica subdividiendo este intervalo en m subintervalos, y realizando la aproximación en cada uno de ellos y luego un sumatorio de estos resultados para obtener un valor final con menor error. La Fig. 3.4 compara los resultados del primer caso y el segundo, en donde la zona sombreada es el valor de la aproximación al integral real; como se puede apre-

ciar, el error en el primer caso es muy alto respecto del segundo.

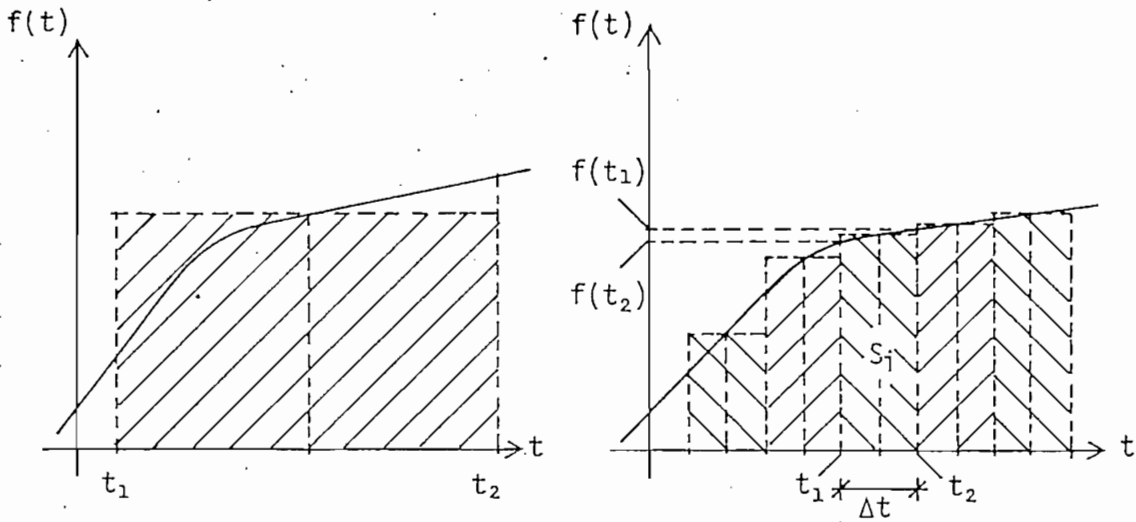


Fig. 3.4. Diferencias entre la integración en un único intervalo y la integración en varios subintervalos.

Las pruebas realizadas demostraron que, si bien la precisión aumentaba considerablemente, el tiempo de ejecución se incrementaba de igual manera, por esta razón se implementó una aproximación de mayor precisión como es la Regla del trapecio, con lo que se redujo considerablemente el número de subdivisiones que se requerían para obtener resultados satisfactorios.

La Regla del trapecio está dada por la siguiente fórmula ⁽³⁾; con referencia a la Fig. 3.4:

$$S_i = \frac{1}{2} (t_2 - t_1) [f(t_1) + f(t_2)] \quad (3.4)$$

puesto que $f(t) = \underline{e}^{\underline{A}t}$, la ecuación (3.4) se puede escribir como:

$$\underline{S}_i = \frac{1}{2} (\Delta t) \left[e^{-\underline{A}t_1} + e^{-\underline{A}t_2} \right] \underline{b} \quad (3.5)$$

reduciendo:

$$\underline{S}_i = \frac{1}{2} (\Delta t) \left[e^{-\underline{A}_i \Delta t} (1 + e^{-\underline{A} \Delta t}) \right] \underline{b} \quad (3.6)$$

Según las pruebas el número mínimo de subdivisiones, cuando se toma el Período de muestreo calculado por el programa, para obtener buenos resultados debe ser 4; pero si el usuario toma un período T mayor, la integración numérica da resultados que difieren del valor real, dependiendo de cuan grande sea el T respecto del valor recomendado. La solución para esto, es bien simple: el número de subdivisiones puede tomarse como:

$$m = 4 \left(\frac{T_b}{T_a} \right) \quad (3.7)$$

donde T_a es el período recomendado por el análisis de los polos, y T_b es el que introduce el usuario.

Con esto queda resuelto el problema de la discretización.

d) DETERMINACION DE LA CONTROLABILIDAD.

Tal como se establece en la sección 2.1, un sistema lineal invariante es completamente controlable si y solo si la matriz \underline{S} definida en la ecuación (2.35) tiene rango n, donde n es el orden del sistema. La ecuación (2.35) se reescribe a continuación.

$$\underline{S} = [\underline{b} \quad \underline{A} \underline{b} \quad \underline{A}^2 \underline{b} \quad \dots \quad \underline{A}^{n-1} \underline{b}] \quad (3.5)$$

Dado que \underline{S} es una matriz cuadrada, para investigar si su rango es n basta con comprobar si el determinante es diferente de cero.

Puesto que en cálculos posteriores se requiere de la matriz \underline{S} inversa, el método más simple de investigar la controlabilidad del sistema es realizando la inversión de \underline{S} por medio de la función INV del Matrix Functions Rom Pack que debe estar añadido al computador por medio del periférico Rom Expander; esta función calcula el determinante de la matriz que quiere invertirse; si éste es cero, al tratar de realizar la inversión ocurre un *error de tamaño*, es decir, se trató de efectuar una división por cero. Se puede colocar una bandera para que en el momento que ocurre este error, el control se desvíe hacia una rutina que indica que el sistema es incontrolable. Sin embargo, chequear la controlabilidad únicamente por este método podría causar problemas posteriores por resultados incorrectos. A continuación se tratan estos problemas:

Así, cuando se trabaja con sistemas de computación, se debe tener cuidado con el error de redondeo; en este caso, si el determinante de \underline{S} es teóricamente cero, puede ocurrir que este cálculo no da un valor exactamente igual a cero y no produce un error de tamaño, por tanto el programa continúa como si el sistema fuese controlable y al final, naturalmente, la respuesta será incorrecta. Para evitar este problema, se chequea además si este determinante no es menor que un cierto epsilon diferente de cero.

Por otro lado, existen matrices que teóricamente tienen inversa, pero sin embargo, no es posible, desde el punto de vista computacional, realizar este cálculo. Esto ocurre puesto que existen algunos números que no pueden ser representados completamente en forma binaria.

Otro problema radica en que, ocasionalmente pequeños cambios en cierta matriz producen grandes cambios en el cálculo de su inversa; en estos casos se dice que la matriz está *mal condicionada* y es especialmente sensible al redondeo.

Una medida de la condición de una matriz, se obtiene hallando un *número condición* que se calcula como:

$$k = \left| \frac{\text{mayor elemento de } \underline{S}^*}{\text{mayor elemento de } \text{INV}(\underline{S})} \right| \quad (3.10)$$

si k es cercano a 1, la matriz está bien condicionada, pero si k es mucho mayor que 1, \underline{S} es mal condicionada. El número $1/k$ es una especie de medida de la diferencia entre la verdadera matriz inversa y la calculada. Puesto que en este caso se trabaja con precisiones que están en el orden de $10E-7$ al calcular $\text{INV}(\underline{S})$ se chequea que k sea menor a $10E7$. Una más amplia explicación sobre el condicionamiento de una matriz, se puede encontrar en el Anexo A del manual de uso del Matrix Functions Rom Pack⁽⁴⁾.

Continuando con el análisis de la controlabilidad de un sistema que previamente ha sido discretizado, cabe indicar que los siguientes casos se pueden encontrar:

a) La planta original no es controlable y la discretizada si lo es.

- b) La planta original es controlable y la discretizada no lo es.
- c) La discretización introduce ininvertibilidad numérica.

Si se tiene el primer caso, la discretización ha servido para que el sistema pueda ser controlado por medio de la Realimentación de Estado, obteniendo las ventajas ya conocidas. En el caso (b) es preferible evitar la discretización y realizar la Realimentación de Estado en el sistema continuo utilizando la teoría ya desarrollada al respecto en Guerra J.C. , TESIS DE GRADO, E.P.N. (5).

En el tercer caso ocurre lo siguiente: el cálculo de la matriz A_D está dado por la ecuación (3.1), en la cual es claro que si T tiende a un valor muy pequeño la matriz A_D tiende a la identidad, de tal manera que las columnas de la matriz de controlabilidad S tienden a ser iguales entre sí, produciendo, numéricamente una matriz de rango menor que n , y por consiguiente, el paro del programa indicando que el sistema es incontrolable. En este caso, la solución será poner un período de discretización mayor.

e) TRANSFORMACION A VARIABLES DE FASE.

En la sección 2.1, se había dicho que la determinación del vector de realimentación f se la puede realizar por varios métodos, pero a través de la transformación a variables de fase es mucho más simple la implementación en computador. El primer paso para realizar este cambio de base es hallar la matriz de cambio P , para lo que se realizan los siguientes pasos:

- a) Se halla el vector fila \underline{p}_1 por medio de la ecuación (2.46) que se reescribe a continuación

$$\underline{p}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] \underline{S}^{-1} \quad (3.11)$$

- b) Se forma la matriz \underline{P} utilizando (2.45)

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_1 A \\ \underline{p}_1 A^2 \\ \vdots \\ \underline{p}_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

- c) Una vez obtenida la matriz \underline{P} , se procede a la transformación con (2.64) a (2.67).

$$\underline{A}^f = \underline{P} \underline{A} \underline{P}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\underline{b}^f = \underline{P} \underline{b} \quad (3.14)$$

$$\underline{c}^f = \underline{c} \underline{P}^{-1} \quad (3.15)$$

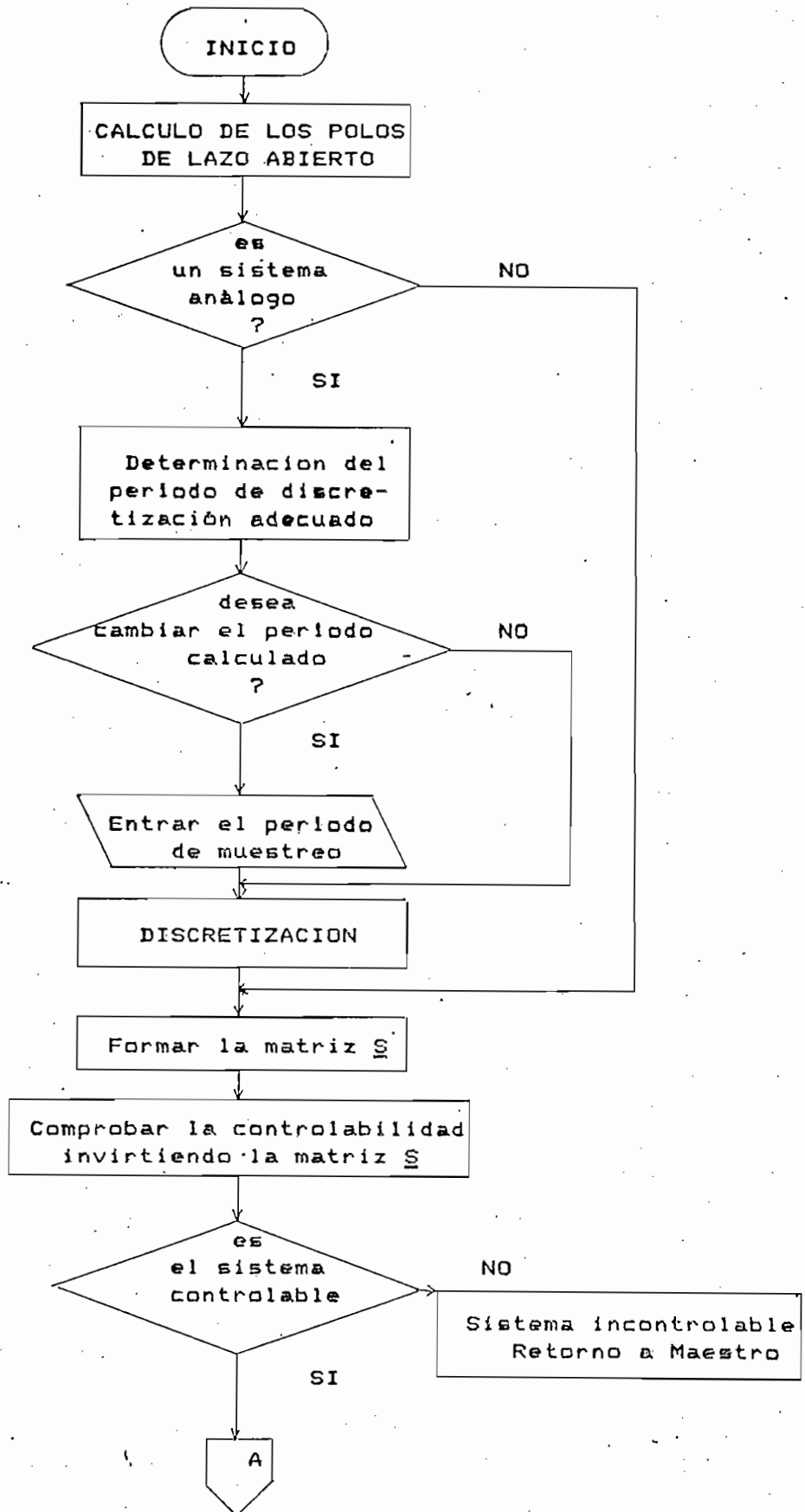
Con esto termina la ejecución de este programa, se indica que los cálculos iniciales están listos y se deja el control al programa Maestro para que el usuario pueda escoger el siguiente paso.

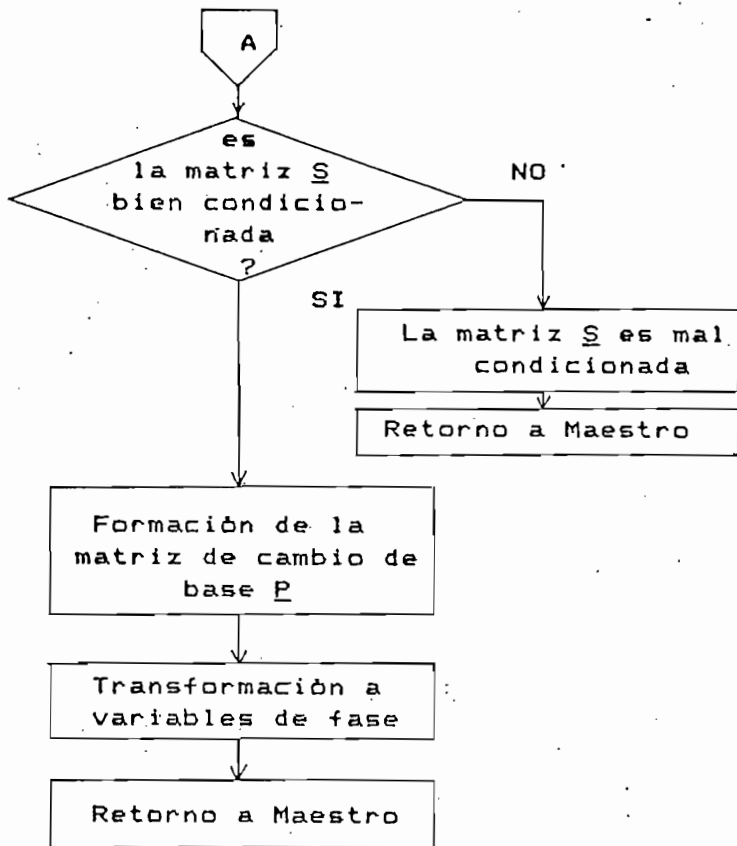
A continuación la Tabla 3.4, detalla las variables que se han utilizado en este programa, y la Fig. 3.5, muestra el diagrama de flujo del programa CALINI.

Tabla 3.4.- VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA CALINI.

VARIABLE	DESCRIPCION
U9	Vector que contiene las partes reales de los polos de lazo abierto del sistema
V9	Vector que contiene las partes imaginarias de los polos de lazo abierto del sistema.
A1	Matriz <u>A</u> discretizada (si la planta es digital $A1 = \underline{A}$)
B1	Vector <u>b</u> discretizado (si la planta es digital $B1 = \underline{b}$)
T5	Período de Discretización
S	Matriz de controlabilidad
S1	Inversa de la matriz de controlabilidad
P	Matriz de cambio de base
P1	Inversa de la matriz de cambio de base
A4	Matriz <u>A</u> en variables de fase
B4	Vector <u>b</u> en variables de fase
C4	Vector <u>c</u> en variables de fase
P5	Vector <u>p</u> ₁ necesario para el cálculo de <u>P</u>
X7	Mayor elemento de <u>S</u>
X8	Mayor elemento de $INV(\underline{S})$ tanto X7 como X8 se calculan para determinar la condición de la matriz <u>S</u>

fig 3.5 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA CALINI





3.1.4 PROGRAMA REALDISEST.

Este programa realiza la Realimentación Discreta de Estado. Básicamente presenta dos opciones que son: a) Diseño y b) Análisis. En la parte de diseño se calcula el vector de realimentación \underline{f} dados los polos deseados, mientras que en la parte de análisis se calculan los polos dado cierto vector \underline{f} . A continuación se tiene una descripción detallada del programa.

- Diseño.

El objetivo de la parte de diseño es hallar el vector de realimentación \underline{f} conociendo los polos que se desea que tenga el sistema de lazo cerrado, o también, conociendo los coeficientes del denominador de la función de transferencia $T(z) = Y(z)/R(z)$ que son los coeficientes del polinomio característico a_i^* de lazo cerrado que se desea conseguir. Por lo tanto, este subprograma presenta dos alternativas: a) introducir datos de los polos deseados, o b) introducir datos de los coeficientes a_i^* .

En el primer caso, se calculan los coeficientes a_i^* por medio de un algoritmo simple⁽⁶⁾ que realiza la siguiente operación:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (3.16)$$

donde los $\lambda_j = 1, 2, \dots, n$ son los polos ingresados por el usuario.

En el segundo caso, es decir, si se introducen los coeficien

tes a_j^* , se calculan los polos por medio de una subrutina llamada RAIZPOLI2 para hallar todas las raíces de un polinomio. |*|

Una vez que los a_j^* se han calculado, o han sido introducidos por el usuario, se calcula el vector de realimentación \underline{f} por medio de la ecuación:

$$f_j^f = a_j^* - a_j \quad (3.17)$$

Donde los a_j forman la n-ésima fila de la matriz de estado \underline{A} (en variables de fase) con el signo cambiado y como ya se había visto, son los coeficientes del polinomio característico del sistema de lazo a bierto, es decir, los que forman el denominador de la función de transferencia de lazo abierto $T_1(z) = Y(z)/U(z)$.

- Análisis.

En el análisis, lo que se trata de hacer es proporcionar elementos de juicio al diseñador sobre el comportamiento del sistema, dado cierto vector de realimentación de estado \underline{f} .

Esto es de suma utilidad cuando en un sistema no es posible tener acceso a todos los estados. Por ejemplo, un sistema de orden n está descrito por cierta ecuación de estado:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}x(k) + \underline{b}u(k) \quad (3.18)$$

|*| cortesía de Ing. E. del Pino.

al realizar el diseño se obtiene un vector \underline{f} , pero uno o varios estados x_j no son accesibles, entonces, no es posible realizar la Realimentación de Estado completamente; interesaría saber que ocurre si sólo se realimentan los estados accesibles a través de amplificadores cuya ganancia está especificada por el vector \underline{f} diseñado; para esto, en el análisis se dan como datos los f_j y se simulan los estados inaccesibles colocando $f_j = 0$.

El programa entrega resultados como: polos del sistema de lazo cerrado, coeficientes del denominador de la función de transferencia $T(z) = Y(z)/R(z)$ y además una medida de la respuesta natural del sistema con condición inicial $\underline{x}(0)$ impuesta por el programa.

Primeramente se calculan los coeficientes a_i^* por medio de la ecuación:

$$a_i^* = a_i + f_i^f \quad (3.19)$$

Luego, con estos resultados, se calculan los polos de lazo cerrado, utilizando la subrutina RAIZPOLI2.

En sistemas discretos, la solución de la ecuación (3.18) es muy simple si se dispone de un computador y de la condición inicial $\underline{x}(0)$, puesto que dicha ecuación es una fórmula de recurrencia de fácil implementación. La respuesta natural se calcula, en este programa imponiendo como condición inicial $\underline{x}(0) = \underline{1}$ y $r(k) = 0$ para todo k ; para buscar el error en estado estable a la entrada nula, siendo determinado cuando la salida del sistema tiene una variación no significativa; en-

tonces el error será precisamente $y(k_N)$ donde k_N es el paso en que se consigue la estabilidad. En la parte de diseño, luego de determinado el vector f se consulta al usuario si se desea este análisis, para poder "medir" la respuesta del sistema de lazo cerrado con la realimentación calculada.

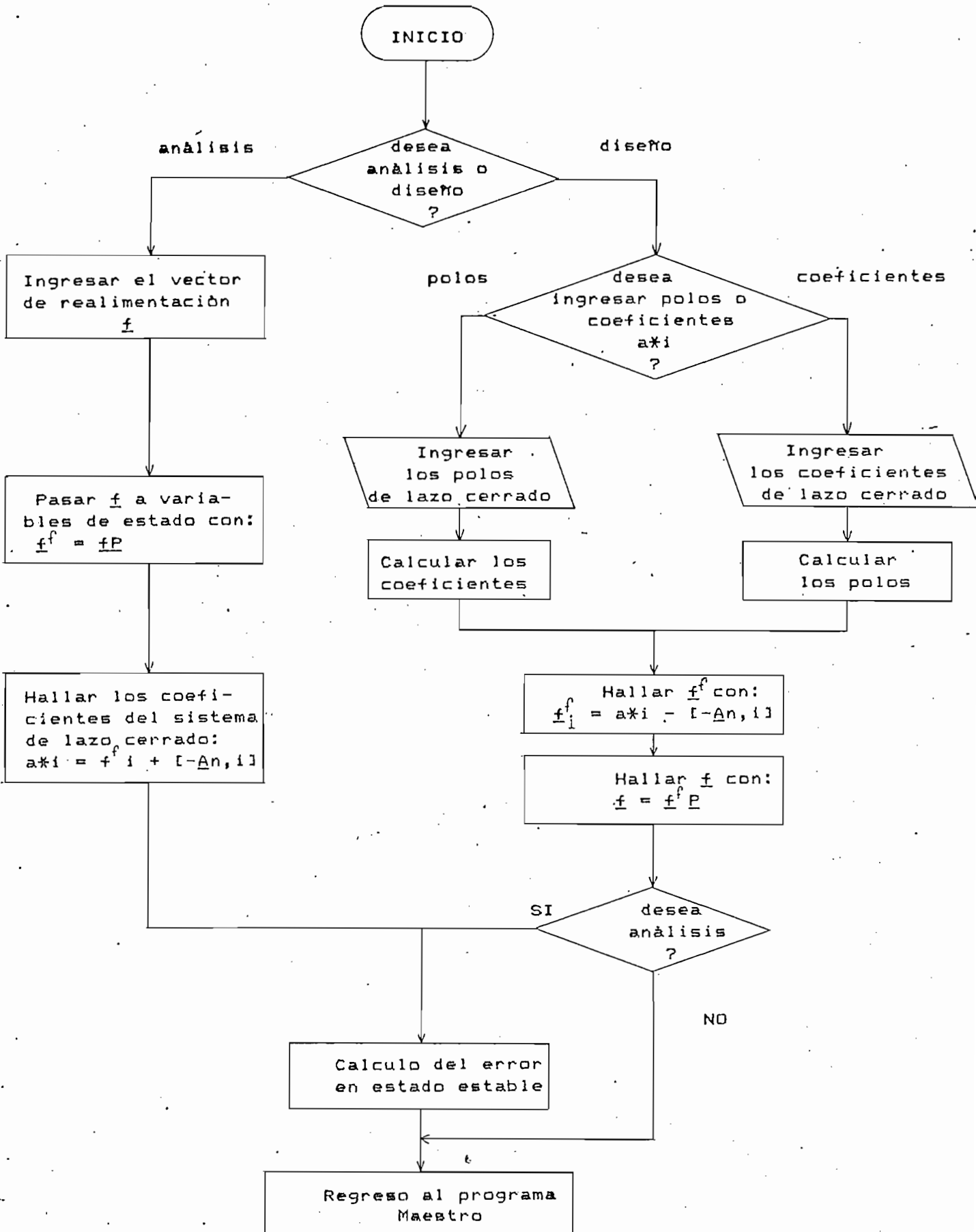
El diagrama de flujo del programa completo se muestra en la Fig. 3.6, donde se indican claramente los pasos que se siguen en las dos opciones.

La Tabla 3.5, muestra la descripción de las variables más importantes utilizadas en esta rutina.

TABLA 3.5.- VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA REALDISEST.

VARIABLE	DESCRIPCION
D	Vector que contiene los coeficientes del denominador de la función de transferencia $T(z)$ de lazo cerrado.
L1	Vector de las partes reales de los polos de lazo cerrado.
L2	Vector de las partes imaginarias de los polos de lazo cerrado.
F	Vector de coeficientes de realimentación en la descripción de estado original.
F4	Vector de coeficientes de realimentación en variables de fase.
03	Indicador de paso por Diseño; si es así 03 = 1
04	Indicador de paso por Análisis; si es así 04 = 1
02	Indicador de paso por REALDISEST; si es así 02 = 3

fig. 3.6 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA REALDISEST



3.1.5. PROGRAMA REALOPTEST.

Este programa calcula un grupo de vectores $\underline{f}(k)$, $k = N-1, N-2, \dots, 0$ de coeficientes de realimentación de estado que optimizan el criterio dado por la ecuación (3.20); N es el número máximo de pasos para los cuales se desea realizar el diseño.

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \underline{x}^T(0) \underline{H} \underline{x}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} [\underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) + r u^2(k)] \right\} \quad (3.20)$$

Para ello se utilizan las relaciones de recurrencia:

$$\underline{f}(N-k) = [r + \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{b}]^{-1} \underline{b}^T \underline{P}(N-k+1) \underline{A} \quad (3.21)$$

$$\underline{P}(N-k) = \underline{Q} + \underline{A}^T \underline{P}(N-k+1) [\underline{A} - \underline{b} \underline{f}(N-k)] \quad (3.22)$$

$$\text{donde } \underline{P}(N) = \underline{H} \quad (3.23)$$

que fueron desarrolladas en la sección 2.2, para el primer criterio de funcionamiento que se había propuesto.

Además, se ha visto en esa sección que se puede calcular el costo mínimo total dada la condición inicial $\underline{x}(0)$ por medio de la expresión:

$$J_{0,N} = \underline{x}^T(0) \underline{P}(0) \underline{x}(0) \quad (3.24)$$

El programa asigna inicialmente a las matrices de ponderación

\underline{H} y \underline{Q} , la matriz identidad, y el coeficiente de ponderación $r = 1$, dejando la opción al usuario de cambiar \underline{H} y \underline{Q} por matrices diagonales se midedfinidas positivas y a r por un escalar mayor que cero, para formar el criterio de funcionamiento como se desee.

Puesto que en la mayoría de los casos, el vector $\underline{f}(N-k)$, cuándo N es muy grande, tiende a un valor constante, se permite al usuario probar varias veces, con diferentes matrices de ponderación y con diferente número máximo de pasos N , hasta que se obtengan resultados satisfactorios.

Como se había dicho en el capítulo anterior, en ciertos ca-
sos la matriz de ganancias de Riccati $\underline{P}(N-k)$ puede ser de interés, pe-
ro dado que N no es fijo, no es posible almacenar en memoria las N ma-
trices $\underline{P}(k)$, por lo tanto, si se desean estos valores se debe pedir, en
su momento, que esta matriz se imprima en papel mientras se calcula.

Para poder tener una idea del comportamiento del sistema res
limentado con el último vector \underline{f} calculado, que generalmente es constan
te, al realizar el análisis, es decir el cálculo del costo total, se in
cluye también la determinación del error en estado estable cuando la en
trada $r(k)$ es nula y $\underline{x}(0) = 1$.

Otros cálculos que se realizan son:

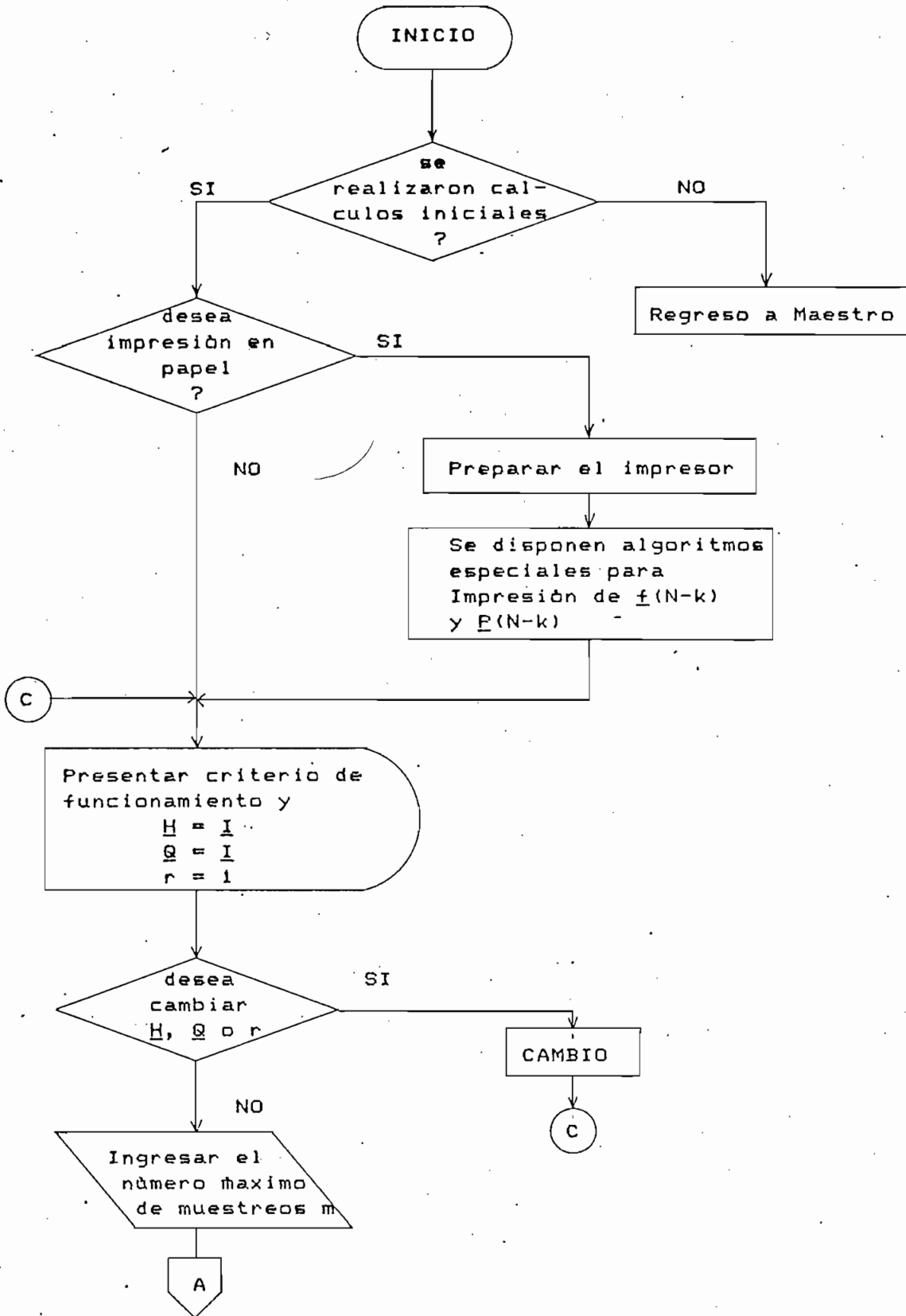
- Determinación de los polos de lazo cerrado con $\underline{f}(0)$ y
- Determinación de los coeficientes del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado.

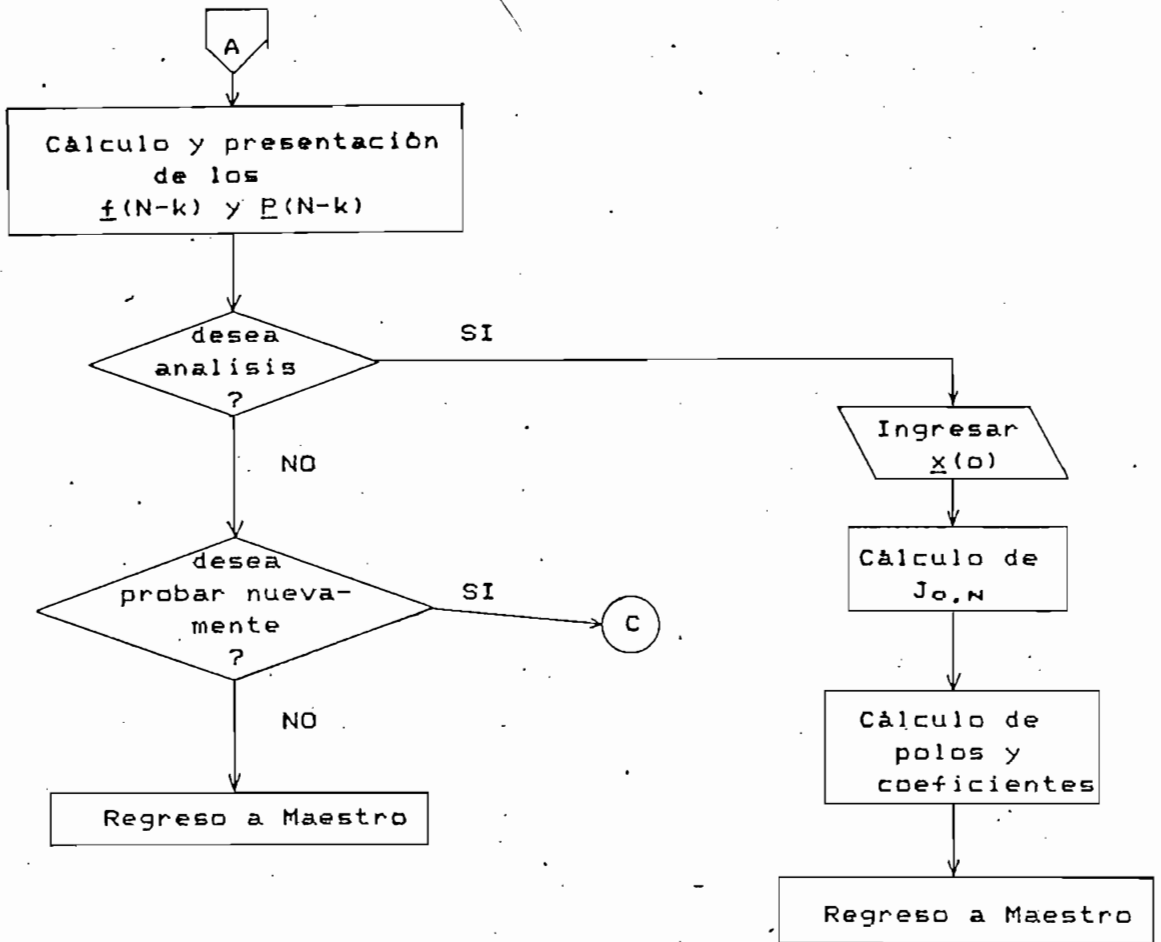
En la Tabla 3.6, se detallan las variables utilizadas en el programa; la Fig. 3.6, muestra su diagrama de flujo.

TABLA 3.6.- VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA REALOPTEST

VARIABLE	DESCRIPCION
H	Matriz de ponderación \underline{H}
Q	Matriz de ponderación \underline{Q}
R	Coficiente de ponderación r
M	Número máximo de muestreos N
F7	Vector \underline{f} en el paso i (sobre esta variable se calcula el $\underline{f}(i)$ que luego se almacenará en G_1).
P6	Matriz de ganancias de Riccati $\underline{P}(0)$ al final de la ejecución; se utiliza para el cálculo del costo total. Durante la ejecución almacena a $\underline{P}(i)$.
L3	Vector de las partes reales de los polos de lazo cerrado
L4	Vector de las partes imaginarias de los polos de lazo cerrado
D3	Vector que contiene los coeficientes de la función de transferencia de lazo cerrado
O2	Indicador de paso por REALOPTEST; si es así $O2 = 4$
O5	Indicador de conclusión de los cálculos de $\underline{f}(k)$
O6	Indicador de paso por análisis
E0	Error en estado estable del sistema de lazo cerrado para entrada nula y $\underline{x}(0) = \underline{1}$.
K6	Paso en que se consigue la estabilización del sistema
J1	Costo mínimo total
Q0	Vector de estados iniciales $\underline{x}(0)$

fig. 3.7 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA REALOPTEST





3.1.6. PROGRAMA SALIDA.

Este programa permite obtener los resultados calculados en los diferentes programas de procesamiento así como los datos que se ingresan para este efecto.

Se utilizan aquí todos los indicadores para saber que datos o resultados se imprimen. Puesto que este programa no es importante desde el punto de vista de la Realimentación de Estado, no se detallan sus algoritmos como en los otros casos. Simplemente la explicación se concentrará en detallar los datos y resultados que se imprimen en cada una de las alternativas:

Las alternativas que este programa presenta al usuario son:

- 1.- Datos Generales del Sistema.
- 2.- Resultados de los Cálculos Iniciales.
- 3.- Realimentación Discreta de Estado; Análisis y Diseño.
- 4.- Realimentación Óptima de Estado; Análisis y Diseño.

Las Tablas 3.7 a 3.10, presentan las variables que se imprimen en cada una de las alternativas y su contenido.

TABLA 3.7.- DATOS GENERALES DEL SISTEMA.

VARIABLES	CONTENIDO
T\$	Nombre del archivo.
C\$	Clase de la planta: C\$ = "A" : planta análoga C\$ = "D" : planta sigital
A	Matriz de estado <u>A</u> original
B	Vector de entrada <u>b</u> original
C	Vector de salida <u>c</u> original
U9,V9	Polos de lazo abierto

TABLA 3.8.- RESULTADOS DE LOS CALCULOS INICIALES

VARIABLES	CONTENIDO
A1	Matriz <u>A</u> discretizada
B1	Vector <u>b</u> discretizado
T5	Período de discretización
A4	Matriz <u>A</u> en variables de fase
B4	Vector <u>b</u> en variables de fase
C4	Vector <u>c</u> en variables de fase
S	Matriz de controlabilidad
P	Matriz de cambio de base a variables de fase

TABLA 3.9.- RESULTADOS DE LA REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO

VARIABLES	CONTENIDO
D	Vector de coeficientes del polinomio de lazo cerrado
L1,L2	Polos de lazo cerrado
F.	Vector de coeficientes de realimentación de estados
F4	Vector \underline{f} en variables de fase
E	Error en estado estable para entrada nula y $\underline{x}(0) = \underline{1}$
K5	Paso en el que se consigue la estabilidad

TABLA 3.10.- RESULTADOS DE LA REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO.

VARIABLES	CONTENIDO
H, Q, r	Matrices de ponderación
M	Número máximo de muestreos N
G	Vectores $\underline{f}(N-k)$ para $k = 1,2,\dots,N$
D	Coefficientes del polinomio característico de lazo cerrado
L3, L4	Polos de lazo cerrado
E0	Error en estado estable para entrada nula y $\underline{x}(0) = \underline{1}$
K6	Paso en que se consigue la estabilización
J1	Costo mínimo
Q0	Vector $\underline{x}(0)$

3.2. EJEMPLOS.

Esta sección pretende mostrar la utilidad de los programas desarrollados por medio del análisis de varios ejemplos. El primer ejemplo muestra un desarrollo completo de casi todas las opciones a las que se tiene acceso; los ejemplos 2 y 3 muestran las posibilidades del programa de Realimentación Discreta de Estado, mientras que los ejemplos 4 y 5 se utilizan para comprobar y exponer las ventajas de la Realimentación Óptima de Estado.

3.2.1. EJEMPLO 1.

La presente es una continuación de la tesis del Ing. J.C. Guerra, que trata de Realimentación de Estado en sistemas continuos, que se la incluye, pues resulta interesante comparar resultados: con este efecto, se toma como primer ejemplo aquel utilizado para probar todas las posibilidades de los programas desarrollados en dicha tesis⁽⁷⁾.

Sea el sistema de la Fig. 3.7, que representa un motor de corriente continua que tiene acoplados una carga inercial J y un rozamiento B . Se desea diseñar un control que lo haga funcionar como un Servomotor de posición.

A este sistema se añaden sensores de velocidad, posición y corriente con el fin de realizar el control por Realimentación de Estado. Las ecuaciones de estos sensores están dados por:

Para el sensor de posición:

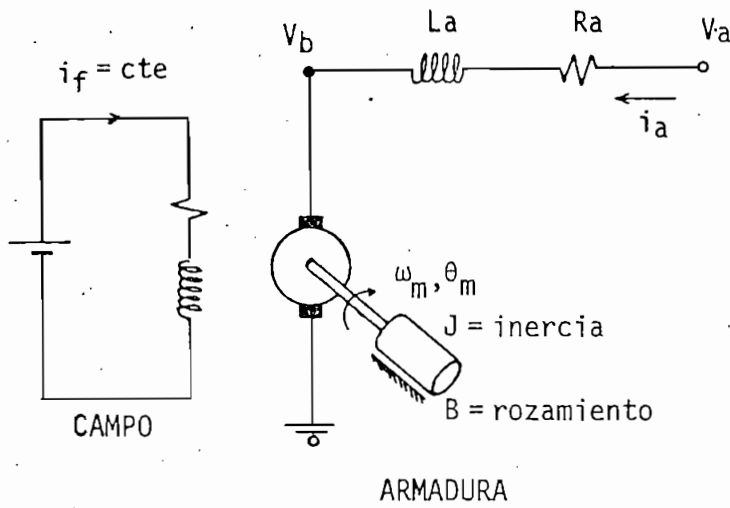


Fig. 3.8. Motor de c.d.

$$V_p = k_p \theta_m \quad (3.25)$$

Para el sensor de velocidad:

$$V_t = k_t \omega_m \quad (3.26)$$

Para el sensor de corriente:

$$V_i = k_i i_a \quad (3.27)$$

A continuación se forman las ecuaciones del sistema; en la malla de la armadura se tiene:

$$V_a = V_b + R_a i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a \quad (3.28)$$

La fuerza contraelectromotriz V_b es función de la velocidad del motor:

$$V_b = k_b w_m \quad (3.29)$$

la relación entre la parte eléctrica y la mecánica está dada por:

$$T = k_T i_a = J \frac{d}{dt} w_m + B w_m \quad (3.30)$$

además, la velocidad y la posición se relacionan por la siguiente ecuación diferencial:

$$w_m = \frac{d}{dt} \theta_m \quad (3.31)$$

Por medio de estas ecuaciones, se formarán las ecuaciones de estado; se escogen las variables sensadas como variables de estado.

$$x_1 = \theta_m \quad (3.32)$$

$$x_2 = w_m \quad (3.33)$$

$$x_3 = i_a \quad (3.34)$$

El control $u(t)$ está determinado por el voltaje de entrada V_a

$$u(t) = V_a(t) \quad (3.35)$$

de la ecuación (3.31) se obtiene la primera ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_2 \quad (3.36)$$

de la ecuación (3.30):

$$\frac{d}{dt} x_2 = \frac{1}{J} [-Bx_2 + k_T x_3] \quad (3.37)$$

y finalmente, de la ecuación (3.28) se tiene:

$$\frac{d}{dt} x_3 = \frac{1}{L_a} [u - k_b x_2 - R_a x_3] \quad (3.38)$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{k_T}{J} \\ 0 & -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.39)$$

Se escogen los siguientes valores (por valor unitario de J y L) para cada una de las variables: B=1; k_T=1; k_b=0 y R_a=4.

Entonces (3.39) queda como:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.40)$$

Puesto que se trata de un control de posición, la variable de salida que interesa es θ_w, entonces:

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \underline{x}(t) \quad (3.41)$$

Se desea realizar el diseño de un sistema de control por Realimentación de Estado tal que cumpla las siguientes especificaciones: máximo sobretiro porcentual (MSP) = 15%; constante de tiempo $\tau = 1$ seg.

Así definido el problema, se pueden determinar los polos que debe tener el sistema realimentado; para ello se halla primero a ζ y a w_n , por medio de las especificaciones dadas:

- Coeficiente de amortiguamiento para MSP del 15%:

$$\zeta = 0.5 \quad (3.42)$$

- Constante de tiempo y frecuencia natural:

$$\tau = \frac{1}{\zeta w_n} = 1 \text{ seg.} \Rightarrow w_n = 2 \quad (3.43)$$

Aproximando a un sistema de orden dos, el polinomio característico está dado por la siguiente expresión:

$$s^2 + 2w_n s + w_n^2 = 0 \quad (3.44)$$

reemplazando los valores deseados:

$$s^2 + 2s + 4 = 0 \quad (3.45)$$

de donde se obtienen los polos:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \quad (3.46)$$

para que las características que estos polos imponen al sistema no se afecten por la presencia de un tercer polo (el sistema es de orden tres) se coloca este último lejano de los de la ecuación (3.46), sea

$$s_3 = -6 \quad (3.47)$$

En el sistema continuo el vector de realimentación que se obtiene es:

$$\underline{f} = [24 \quad 9 \quad 3] \quad (3.48)$$

Ahora, estos datos se utilizan en los programas desarrollados: se ingresan la matriz A, el vector b, y el vector c y la clase de la planta (Análoga). Estos valores se discretizan y se transforman a variables de fase, luego se introducen los polos deseados pero en el dominio de la transformada z, esto es, se utiliza:

$$z = e^{sT} \quad (3.49)$$

Sea $T = 0.5$, entonces:

$$z_{1,2} = e^{0.5(-1 \pm \sqrt{3})} = 0.393 \pm j 0.462 \quad (3.50)$$

$$z = e^{0.5(-6)} = 0.0498 \quad (3.51)$$

Con estos valores se obtiene:

$$\underline{f}_D = [12.96 \quad 7.07 \quad 1.54] \quad (3.52)$$

Con esto, ya se pueden establecer algunas comparaciones:

Las matrices \underline{f} y \underline{f}_D están relacionadas de la siguiente manera:

$$\underline{x}(t) = (\underline{A} + \underline{b}\underline{f}) \underline{x}(t) + \underline{b}r(t) \quad (3.53)$$

y

$$\underline{x}(k+1) = (\underline{A}_D - \underline{b}_D \underline{f}_D) \underline{x}(k) + \underline{b}_D r(k) \quad (3.53)$$

Para efectos de comparación sean $r(t) = 0$ y $r(k) = 0$; entonces, de la ecuación (3.52) al discretizar se tiene:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{e}^{(\underline{A} - \underline{b}\underline{f})T} \quad (3.54)$$

la cual debe ser idéntica a la que se obtiene de la ecuación (3.53), que es:

$$\underline{x}(k+1) = (\underline{A}_D - \underline{b}_D \underline{f}_D) \underline{x}(k) \quad (3.55)$$

se realizan los cálculos con fines de comparación (sin precisión), se obtiene:

$$\underline{A} - \underline{b}\underline{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -24 & -9 & -7 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Con estas condiciones, se demostrará que lo que se requiere es que el polinomio característico tenga la forma:

$$z^P = 0 \tag{3.59}$$

es decir, que los polos del sistema sean todos iguales a cero.

La transformada z del error está dada por:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) [1 - T(z)] \tag{3.60}$$

sea R(z) definida por:

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^N} \tag{3.61}$$

donde N es un entero positivo, y A(z) es un polinomio en z^{-1} sin ceros en $z=1$. Ahora, para obtener error en estado estable nulo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z) [1 - T(z)]}{(1 - z^{-1})^N} = 0 \tag{3.62}$$

Para que esto se cumpla $1 - T(z)$ debe contener el factor $(1 - z^{-1})^N$, esto es:

$$1 - T(z) = (1 - z^{-1})^N G(z) \tag{3.63}$$

G(z) es un polinomio en z^{-1} ; resolviendo para T(z) se tiene:

$$T(z) = \frac{z^N - (z - 1)^N G(z)}{z^N} \quad (3.64)$$

$G(z)$ sólo contiene polos en cero, entonces el polinomio característico será:

$$z^p = 0 \quad (3.65)$$

donde p es un entero mayor o igual a N .

de las ecuaciones (3.60) y (3.64) se tiene que $E(z)$ es:

$$E(z) = A(z) G(z) \quad (3.66)$$

Puesto que $A(z)$ y $G(z)$ son polinomios en z^{-1} , $E(z)$ tendrá un número finito de términos en su expansión en series de potencias, lo que traducido al dominio del tiempo, significa que $e(t) \Rightarrow 0$ en un número finito de períodos.

Esta característica se verá en los resultados; al colocar los polos deseados en cero, el programa calcula el vector de realimentación \underline{f} como:

$$\underline{f} = [23.44 \quad 14.32 \quad 2.84] \quad (3.67)$$

una vez calculado \underline{f} se pide análisis, para obtener la medida de la respuesta natural y el paso en que se consigue la estabilización; esto es:

$$y(k_N) = 0 \quad y \quad k_N = 3 \quad (3.68)$$

es decir, la respuesta natural alcanza la estabilidad (con error en estado estable nulo) en tan solo tres períodos.

Todos estos resultados se pueden ver en las siguientes páginas; los datos que se han tomado están encuadrados en líneas de puntos.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 16-JUL-84

DATOS GENERALES DEL SISTEMA

Archivo : MOTORDC

NOMBRE DEL ARCHIVO: MOTORDC

CLASE DE LA PLANTA: Análoga

ORDEN DEL SISTEMA: N=3

DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

MATRIZ DE ESTADO A		
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	1.00000
0.00000	0.00000	-4.00000
VECTOR DE ENTRADA B		
0.00000		
0.00000		
1.00000		
VECTOR DE SALIDA C		
1.00000	0.00000	0.00000

Polos de Lazo Abierto

RAIZ<1>=0.000000
RAIZ<2>=-1.000000
RAIZ<3>=-4.000000

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 16-JUL-84

RESULTADOS DE LOS CALCULOS INICIALES

Archivo : MOTORDC

MATRICES DISCRETIZADAS

MATRIZ DE ESTADO A

1.00000	0.39347	0.05910
0.00000	0.60653	0.15707
0.00000	0.00000	0.13534

VECTOR DE ENTRADA B

0.01171
0.05879
0.21957

VECTOR DE SALIDA C

1.00000 0.00000 0.00000

PERIODO DE DISCRETIZACION: T=0.5000

MATRIZ DE ESTADO A en variables de fase

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.08209	-0.82395	1.74187

VECTOR DE ENTRADA B en variables de fase

0.00000
0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C en variables de fase

0.00353 0.02742 0.01171

MATRIZ DE CONTROLABILIDAD S

0.01171	0.04782	0.07717
0.05879	0.07014	0.04721
0.21957	0.02971	0.00402

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE P

23.44078	-17.42716	3.41614
23.44078	-1.34688	-0.88950
23.44078	8.40631	1.05345

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : DISEÑO

Archivo : MOTORDC

DATOS

=====

Coeficientes del polinomio característico

COEF. DE Z^0 = -0.018316

COEF. DE Z^1 = 0.407006

COEF. DE Z^2 = -0.835681

Polos de Lazo Cerrado

RAICES<1,2>=0.392947 ± J0.462030

RAIZ<3>=0.049787

RESULTADOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F

12.96298 7.06792 1.54333

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

0.06377 -0.41694 0.90618

Respuesta Natural: Eee=0.000018

Al paso

k=21

Ahora se verá lo que ocurre con este sistema cuando se controla por medio de la Realimentación Óptima de Estado; para establecer comparaciones se toman dos casos en que se observa como se minimizan los estados y el control.

Sea el criterio de funcionamiento dado por la siguiente expresión:

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \underline{x}^T(N) \underline{H} \underline{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) + r u^2(k)] \right\} \quad (3.69)$$

Si se observa la ecuación (3.69) se verá que si \underline{Q} tiene valores altos, el control será más exigente sobre los valores de los estados, con el fin de minimizar J ; ahora, si r es alto, si se desea que J se minimice entonces, el control $u(k)$ será mucho más pequeño.

Para visualizar este efecto, se toma primeramente:

$$\underline{Q} = 50\underline{I} \quad \text{y} \quad r = 0.01 \quad (3.70)$$

La Tabla 3.11, muestra los valores de $\underline{f}(k)$, $u(k)$ y $\underline{x}(k)$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$, donde $N = 30$.

Como puede verse en esta tabla, el control $u(k)$ sube desde casi cero a valores cercanos a 0.6 para tratar de que los estados disminuyan de valor rápidamente. Ahora se verá el caso contrario, es decir:

$$\underline{Q} = \underline{0} \quad \text{y} \quad r = 50 \quad (3.71)$$

TABLA 3.11

Paso k	$f(k)$			$u(k)$	$x(k)$		
0	0.25	-0.58	0.33	-0.003	1.00	1.00	1.00
1	0.25	-0.58	0.33	0.032	1.45	0.76	0.13
2	0.25	-0.58	0.33	-0.171	1.76	0.49	0.03
3	0.25	-0.58	0.33	-0.315	1.95	0.29	-0.03
4	0.25	-0.58	0.33	-0.410	2.06	0.15	-0.07
5	0.25	-0.58	0.33	-0.47	2.11	0.06	-0.10
6	0.25	-0.58	0.33	-0.505	2.12	-0.01	-0.12
7	0.25	-0.58	0.33	-0.523	2.10	-0.05	-0.13
8	0.25	-0.58	0.33	-0.529	2.07	-0.08	-0.13
9	0.25	-0.58	0.33	-0.528	2.02	-0.10	-0.13
10	0.25	-0.58	0.33	-0.521	1.97	-0.11	-0.13
11	0.25	-0.58	0.33	-0.511	1.91	-0.12	-0.13
12	0.25	-0.58	0.33	-0.498	1.85	-0.12	-0.13
13	0.25	-0.58	0.33	-0.484	1.76	-0.13	-0.13
14	0.25	-0.58	0.33	-0.469	1.72	-0.12	-0.12
15	0.25	-0.58	0.33	-0.453	1.66	-0.12	-0.12
16	0.25	-0.58	0.33	-0.438	1.60	-0.12	-0.12
17	0.25	-0.58	0.33	-0.422	1.54	-0.12	-0.11
18	0.25	-0.58	0.33	-0.407	1.48	-0.11	-0.11
19	0.25	-0.58	0.33	-0.392	1.43	-0.11	-0.10
20	0.25	-0.58	0.33	-0.377	1.37	-0.11	-0.10
21	0.25	-0.58	0.33	-0.363	1.32	-0.10	-0.10
22	0.25	-0.58	0.33	-0.349	1.27	-0.10	-0.09
23	0.25	-0.58	0.33	-0.337	1.23	-0.09	-0.09
24	0.25	-0.58	0.33	-0.323	1.18	-0.09	-0.09
25	0.25	-0.58	0.33	-0.311	1.13	-0.09	-0.08
26	0.25	-0.58	0.33	-0.300	1.09	-0.08	-0.08
27	0.25	-0.58	0.33	-0.288	1.05	-0.08	-0.08
28	0.25	-0.58	0.33	-0.277	1.01	-0.08	-0.07
29	0.23	-0.53	0.30	-0.243	0.97	-0.07	-0.07

La Tabla 3.12, muestra los valores de $\underline{f}(k)$, $u(k)$ y $\underline{x}(k)$; para $k = 0, 1, \dots, N-1$, donde $N = 30$; con los valores de \underline{Q} y r dados por la ecuación (2.71).

TABLA 3.12

Paso k	$\underline{f}(k)$			$u(k)$	$\underline{x}(k)$		
0	5E-3	-0.01	6E-3	-1.2E-4	1.00	1.00	1.00
1	6E-3	-0.01	7E-3	1.1E-4	1.45	0.76	0.13
2	6E-3	-0.01	7E-3	-0.004	1.76	0.48	0.02
3	6E-3	-0.01	7E-3	-0.009	1.95	0.29	E-3
4	6E-3	-0.01	7E-3	-0.011	2.07	0.18	-2E-3
5	6E-3	-0.01	8E-3	-0.013	2.14	0.11	-3E-3
6	7E-3	-0.01	8E-3	-0.014	2.18	0.06	-3E-3
7	7E-3	-0.02	8E-3	-0.015	2.21	0.03	-3E-3
8	8E-3	-0.02	9E-3	-0.016	2.22	0.02	-3E-3
9	8E-3	-0.02	9E-3	-0.017	2.22	0.01	-4E-3
10	8E-3	-0.02	0.01	-0.018	2.23	5E-3	-4E-3
11	0.01	-0.02	0.01	-0.020	2.23	1E-3	-4E-3
12	0.01	-0.02	0.01	-0.021	2.23	-1E-3	-5E-3
13	0.01	-0.02	0.01	-0.022	2.23	-2E-3	-5E-3
14	0.01	-0.02	0.01	-0.024	2.23	-3E-3	-5E-3
15	0.01	-0.03	0.01	-0.026	2.23	-4E-3	-6E-3
16	0.01	-0.03	0.01	-0.028	2.23	-5E-3	-7E-3
17	0.01	-0.03	0.02	-0.030	2.22	-6E-3	-7E-3
18	0.02	-0.03	0.02	-0.034	2.22	-6E-3	-8E-3
19	0.02	-0.04	0.02	-0.037	2.22	-7E-3	-8E-3
20	0.02	-0.04	0.02	-0.041	2.21	-8E-3	-9E-3
21	0.02	-0.04	0.02	-0.046	2.21	-8E-3	-0.01
22	0.02	-0.05	0.03	-0.052	2.21	-9E-3	-0.01
23	0.03	-0.06	0.03	-0.058	2.20	-0.01	-0.01
24	0.03	-0.06	0.03	-0.065	2.20	-0.01	-0.01
25	0.03	-0.07	0.04	-0.070	2.19	-0.01	-0.02
26	0.03	-0.07	0.04	-0.070	2.18	-0.01	-0.02
27	0.03	-0.06	0.03	-0.058	2.17	-0.02	-0.02
28	0.02	-0.03	0.02	-0.033	2.17	-0.02	-0.02
29	5E-3	-0.01	7E-3	-0.011	2.16	-0.01	-0.01

Se puede ver que el control $u(k)$ en este caso se mantiene menor a 0.08 ya que el coeficiente de ponderación r es muy alto mientras que no hay restricciones para el comportamiento de los estados; el estado $x_1(k)$ se va hacia un valor mayor que el inicial en los dos casos pero en el primero se nota una tendencia al amortiguamiento mientras que en este caso parece que oscila entre el valor de 2.19 aproximadamente; los estados $x_2(k)$ y $x_3(k)$ en cambio oscilan alrededor de cero, mientras que en el caso anterior se amortiguan rápidamente.

El programa de análisis entrega los siguientes datos:

$$\text{Primer Caso: } y(k_N) = 0.001 \text{ con } k_N = 949 \quad (3.72a)$$

$$\text{Polos: } \lambda_1 = 0.03, \quad \lambda_2 = 0.96, \quad \lambda_3 = 0.71 \quad (3.72b)$$

$$\text{Segundo Caso: SISTEMA CRITICAMENTE ESTABLE} \quad (3.73a)$$

$$\text{Polos: } \lambda_1 = 0.61, \quad \lambda_2 = 0.999, \quad \lambda_3 = 0.13 \quad (3.73b)$$

en el segundo caso se tiene un polo muy cercano al círculo unitario, esto hace que el sistema sea casi críticamente estable, puesto que el programa luego de calcular $y(k)$ para muchos períodos, no encontró estabilidad entrega el mensaje (3.73a).

Los resultados que se obtiene en el impresor se muestran en las siguientes páginas; hay que anotar que los cálculos de $u(k)$ y $\underline{x}(k)$ se lo hace por medio de un programa auxiliar (que se encuentra almacenado a partir de la línea 6000 del programa @TESIS/REALOPTEST).

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 16-JUL-84

REAL. OPT. DE ESTADO: DISEÑO y ANALISIS

Archivo : MOTORDC

DATOS

=====

MATRICES DE PONDERACION

=====

CRITERIO DE DESEMPEÑO

$$J = 1/2 \mathbf{x}^T(M) \mathbf{H} \mathbf{x}(M) + 1/2 \sum_{k=0}^{M-1} \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + u^T(k) \mathbf{r} u(k) \}$$

MATRIZ DE PONDERACION H

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ DE PONDERACION Q

50.00000	0.00000	0.00000
0.00000	50.00000	0.00000
0.00000	0.00000	50.00000

COEFICIENTE DE PONDERACION r=0.1

NUMERO MAXIMO DE MUESTREOS: M=30

RESULTADOS

=====

Paso	k	Matriz de Realimentación F(k)		
29		0.231017	-0.532356	0.304522
28		0.253279	-0.583564	0.333780
27		0.253669	-0.584501	0.334330
26		0.253815	-0.584854	0.334539
25		0.253815	-0.584854	0.334539
24		0.253815	-0.584854	0.334539
23		0.253815	-0.584854	0.334539
22		0.253815	-0.584854	0.334539
21		0.253815	-0.584854	0.334539

20	0.253815	-0.584854	0.334539
19	0.253815	-0.584854	0.334539
18	0.253815	-0.584854	0.334539
17	0.253815	-0.584854	0.334539
16	0.253815	-0.584854	0.334539
15	0.253815	-0.584854	0.334539
14	0.253815	-0.584854	0.334539
13	0.253815	-0.584854	0.334539
12	0.253815	-0.584854	0.334539
11	0.253815	-0.584854	0.334539
10	0.253815	-0.584854	0.334539
9	0.253815	-0.584854	0.334539
8	0.253815	-0.584854	0.334539
7	0.253815	-0.584854	0.334539
6	0.253815	-0.584854	0.334539
5	0.253815	-0.584854	0.334539
4	0.253815	-0.584854	0.334539
3	0.253815	-0.584854	0.334539
2	0.253815	-0.584854	0.334539
1	0.253815	-0.584854	0.334539
0	0.253815	-0.584854	0.334539

Coeficientes del polinomio caracteristico

COEF. DE $Z^0 = -0.021122$

COEF. DE $Z^1 = 0.731774$

COEF. DE $Z^2 = -1.699825$

Polos de Lazo Cerrado

RAIZ<1>=0.031064

RAIZ<2>=0.961875

RAIZ<3>=0.706886

Respuesta Natural: Eee=0.001257

Al Paso

k=949

COSTO MINIMO TOTAL: J= 300.155288358

VECTOR DE ESTADOS INICIAL X_0

VECTOR DE ESTADOS INICIAL $x(0)$

PASO: K	U(K)	X(K)		
0	-0.00350	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.03278	1.45253	0.76339	0.13457
2	-0.17124	1.76124	0.48608	0.02541
3	-0.31514	1.95199	0.28875	-0.03416
4	-0.40968	2.05990	0.15124	-0.07382
5	-0.46939	2.11024	0.05605	-0.09994
6	-0.50475	2.12090	-0.00930	-0.11659
7	-0.52315	2.10444	-0.05362	-0.12660
8	-0.52981	2.06973	-0.08317	-0.13200
9	-0.52842	2.02300	-0.10232	-0.13419
10	-0.52157	1.96862	-0.11420	-0.13418
11	-0.51108	1.90965	-0.12101	-0.13268
12	-0.49824	1.84821	-0.12428	-0.13017
13	-0.48394	1.78578	-0.12512	-0.12701
14	-0.46881	1.72338	-0.12429	-0.12345
15	-0.45328	1.66169	-0.12234	-0.11964
16	-0.43766	1.60117	-0.11964	-0.11572
17	-0.42215	1.54214	-0.11647	-0.11176
18	-0.40688	1.48476	-0.11301	-0.10781
19	-0.39196	1.42916	-0.10940	-0.10393
20	-0.37743	1.37538	-0.10572	-0.10013
21	-0.36333	1.32344	-0.10204	-0.09642
22	-0.34969	1.27334	-0.09839	-0.09282
23	-0.33650	1.22504	-0.09482	-0.08934
24	-0.32377	1.17851	-0.09132	-0.08597
25	-0.31150	1.13371	-0.08793	-0.08273
26	-0.29968	1.09057	-0.08464	-0.07959
27	-0.28812	1.04906	-0.08146	-0.07657
28	-0.27675	1.00911	-0.07837	-0.07362
29	-0.24283	0.97068	-0.07537	-0.07073

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REAL. OPT. DE ESTADO: DISEÑO y ANALISIS

Archivo : MOTORDC

DATOS
=====

MATRICES DE PONDERACION
=====

CRITERIO DE DESEMPENO

$$J = 1/2 \mathbf{x}^T(M) \mathbf{H} \mathbf{x}(M) + 1/2 \sum_{k=0}^{M-1} \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{r} \mathbf{u}(k) \}$$

MATRIZ DE PONDERACION H

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ DE PONDERACION Q

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

COEFICIENTE DE PONDERACION r=50.

NUMERO MAXIMO DE MUESTREOS: M=30

RESULTADOS
=====

Paso	k	Matriz de Realimentación F(k)		
29		0.004983	-0.011482	0.006568
28		0.015172	-0.034010	0.019096
27		0.026584	-0.058749	0.032661
26		0.031981	-0.069657	0.038328
25		0.031944	-0.068974	0.037713
24		0.029459	-0.063287	0.034476
23		0.026349	-0.056437	0.030676
22		0.023370	-0.049967	0.027124
21		0.020759	-0.044337	0.024049

20	0.018545	-0.039583	0.021460
19	0.016487	-0.035603	0.019297
18	0.015128	-0.032269	0.017487
17	0.013812	-0.029459	0.015962
16	0.012695	-0.027073	0.014669
15	0.011737	-0.025030	0.013561
14	0.010910	-0.023264	0.012604
13	0.010189	-0.021726	0.011771
12	0.009556	-0.020376	0.011039
11	0.008996	-0.019183	0.010392
10	0.008498	-0.018120	0.009817
9	0.008052	-0.017169	0.009301
8	0.007650	-0.016312	0.008837
7	0.007286	-0.015536	0.008417
6	0.006955	-0.014831	0.008035
5	0.006653	-0.014186	0.007686
4	0.006376	-0.013596	0.007366
3	0.006121	-0.013052	0.007071
2	0.005886	-0.012551	0.006799
1	0.005668	-0.012086	0.006548
0	0.005466	-0.011655	0.006314

Coeficientes del Polinomio característico

COEF. DE $Z^0 = -0.080916$
 COEF. DE $Z^1 = 0.822250$
 COEF. DE $Z^2 = -1.741101$

Polos de Lazo Cerrado

RAIZ<1>=0.608783
 RAIZ<2>=0.999313
 RAIZ<3>=0.133005

EL SISTEMA ES CRITICAMENTE ESTABLE
 TIENE UN POLO MUY CERCANO AL CIRCULO UNITARIO

COSTO MINIMO TOTAL: $J = 0.206557948366$

VECTOR DE ESTADOS INICIAL X_0

1.00000
 1.00000

VECTOR DE ESTADOS INICIAL $x(0)$

PASO: K	U(K)	X(K)		
0	-0.00012	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.00011	1.45257	0.76359	0.13531
2	-0.00441	1.76102	0.48440	0.01834
3	-0.00809	1.95264	0.29642	0.00151
4	-0.01074	2.06927	0.17955	-0.00157
5	-0.01268	2.13970	0.10803	-0.00257
6	-0.01420	2.18191	0.06437	-0.00313
7	-0.01546	2.20688	0.03772	-0.00354
8	-0.01661	2.22133	0.02141	-0.00387
9	-0.01771	2.22933	0.01140	-0.00417
10	-0.01884	2.23336	0.00522	-0.00445
11	-0.02003	2.23493	0.00136	-0.00474
12	-0.02132	2.23495	-0.00110	-0.00504
13	-0.02276	2.23397	-0.00271	-0.00536
14	-0.02437	2.23232	-0.00382	-0.00572
15	-0.02621	2.23020	-0.00465	-0.00613
16	-0.02833	2.22770	-0.00532	-0.00658
17	-0.03079	2.22488	-0.00593	-0.00711
18	-0.03369	2.22177	-0.00652	-0.00772
19	-0.03711	2.21835	-0.00715	-0.00844
20	-0.04118	2.21460	-0.00784	-0.00929
21	-0.04602	2.21048	-0.00864	-0.01030
22	-0.05172	2.20594	-0.00956	-0.01150
23	-0.05820	2.20089	-0.01065	-0.01291
24	-0.06492	2.19526	-0.01191	-0.01453
25	-0.07023	2.18895	-0.01332	-0.01622
26	-0.07013	2.18193	-0.01476	-0.01762
27	-0.05815	2.17426	-0.01584	-0.01778
28	-0.03312	2.16630	-0.01582	-0.01517
29	-0.01086	2.15879	-0.01393	-0.00932

3.2.2. EJEMPLO 2

Este ejemplo se utiliza para investigar el efecto, sobre la respuesta natural, al localizar los polos de lazo cerrado en el origen.

Sea el motor de la Fig. 3.7, utilizado en el ejemplo anterior, pero considérese ahora el torque constante, es decir i_a constante; en este caso las ecuaciones de estado están dadas por:

$$\underline{x}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \quad (3.74)$$

donde:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$u(t) = V_A(t) \quad (3.76)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(B k_T + k_T k_b)}{J Ra} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

y

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T}{J Ra} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

considérese ahora los siguientes valores de las constantes:

Torque constante $k_T = 0.345 \text{ Nm/amp}$

Constante de fcm $k_b = 0.345 \text{ Nm/amp}$

Carga inercial $J = 1.14\text{E-}3 \text{ kg-m}$

Coefficiente de rozamiento $B = 0.25 \text{ kg-m}$

Con estos valores se tiene:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -267.19 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 244.68 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

y

$$\underline{c} = [1 \quad 0] \quad (3.81)$$

Se discretizan las ecuaciones para $T = 0.005$ y se obtiene:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00276 \\ 0 & 0.26291 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0.000202 \\ 0.68373 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

luego se realizan los cálculos de diseño para $\lambda_i = 0$ dando:

$$\underline{f} = [296.28 \quad 0.97174] \quad (3.83)$$

Con estos valores, y por medio de la ecuación de estado de sistemas discretos se puede formar la ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.395 & 0.00078 \\ -200 & -0.392 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

La solución del sistema en el dominio de la transformada z es:

$$\underline{X}(z) = [z\underline{I} - (\underline{A}_D - \underline{b}_D \underline{f}_D)]^{-1} \underline{x}(0) \quad (3.84)$$

esto es:

$$\underline{X}(z) = \begin{bmatrix} 0.395 Z^{-2} + Z^{-1} & 0.00078 Z^{-2} \\ -200 Z^{-2} & -0.392 Z^{-2} - Z^{-1} \end{bmatrix} \underline{X}(0) \quad (3.85)$$

los elementos de la matriz de la ecuación (3.85) son todos polinomios en z^{-1} con un número finito (≤ 2) de términos, por tanto la respuesta natural del sistema viene a ser cero luego de dos períodos de muestreo; las respuestas del programa de análisis concuerdan con este desarrollo.

Las hojas que llevan estos datos y resultados están en las páginas siguientes; los datos que se han utilizado en este desarrollo se hallan enmarcados en líneas de puntos.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

DATOS GENERALES DEL SISTEMA

Archivo : REGULIC

NOMBRE DEL ARCHIVO: REGULIC

CLASE DE LA PLANTA: Analoga

ORDEN DEL SISTEMA: N=2

DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

MATRIZ DE ESTADO A

0.00000	1.00000
0.00000	-267.19000

VECTOR DE ENTRADA B

0.00000
244.68000

VECTOR DE SALIDA C

1.00000	0.00000
---------	---------

Folos de Lezo Abierto

RAIZ<1>=0.000000

RAIZ<2>=-267.190000

=====

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

RESULTADOS DE LOS CALCULOS INICIALES

Archivo : REGULIC

MATRICES DISCRETIZADAS

MATRIZ DE ESTADO A

1.00000	0.00276
0.00000	0.26291

VECTOR DE ENTRADA B

0.00202
0.68373

VECTOR DE SALIDA C

1.00000	0.00000
---------	---------

PERIODO DE DISCRETIZACION: T=0.0050

MATRIZ DE ESTADO A en variables de fase

0.00000	1.00000
-0.26291	1.26291

VECTOR DE ENTRADA B en variables de fase

0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C en variables de fase

0.00136	0.00202
---------	---------

MATRIZ DE CONTROLABILIDAD S

0.00202	0.00391
0.68373	0.17976

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE P

296.28474	-0.87533
296.28474	0.58722

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : DISEÑO

Archivo : REGULDC

DATOS

=====

Coefficientes del polinomio característico

COEF. DE Z^0 = 0.000000

COEF. DE Z^1 = 0.000000

Polos de Lazo Cerrado
RAIZ<1>=0.000000
RAIZ<2>=0.000000

RESULTADOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F
296.28474 0.97174

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

-0.26291 1.26291

Respuesta Natural: Eee=0.000000

Al paso

k=2

3.2.3. EJEMPLO 3.

Con el objeto de analizar el comportamiento de un sistema cuando se tienen estados inaccesibles y de paso, probar la validez de la parte de análisis del programa de Realimentación Discreta de Estado, se implementa el siguiente ejemplo:

Sea el sistema descrito por la siguiente función de transferencia:

$$T_1(z) = \frac{27.8 (S + 1)}{S^3 + 6S + 48.6S + 1} \quad (3.86)$$

Puesto que los coeficientes del denominador de esta función, cambiados de signo, definen la n-ésima fila de la matriz de estado en variables de fase, \underline{A} será:

$$\underline{A}^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -48.6 & -6 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

en tanto los coeficientes del numerador de esa función definen el vector de salida \underline{c} en variables de fase, entonces:

$$\underline{c}^f = [27.8 \quad 27.8 \quad 0] \quad (3.88)$$

el vector de entrada en variables de fase \underline{b} está definido como:

$$\underline{b}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Puesto que el sistema es análogo se utilizará un período de discretización $T = 0.1588$. Con esto se tienen ya los datos que se requieren ingresar en el computador. Los pasos a seguirse serán:

- 1.- Diseñar un vector de realimentación \underline{f} que coloque los polos del sistema en $\lambda_{1,2} = \pm 0.5$ y $\lambda_3 = 0$.
- 2.- Analizar el sistema cuando x_3 es inaccesible, esto se simula colocando $f_3 = 0$.
- 3.- Realizar el paso 2 para x_2 y x_1 .

Los resultados son los siguientes:

En diseño se calcula \underline{f} como:

$$\underline{f} = [321.96 \quad 82.93 \quad 9.64] \quad (3.90)$$

en este caso la respuesta natural se estabiliza en un valor:

$$E_{ee} = -0.0002 \quad \text{en el paso} \quad k_N = 18 \quad (3.91)$$

es decir en 2.8 seg.; hay que recordar que este valor no tiene un signi

ficado físico establecido, simplemente intenta dar una idea del comportamiento del sistema en el dominio del tiempo; si el estado x_2 no es accesible los polos se colocan en:

$$\lambda_{1,2} = 0.09 \pm j 1.12 \quad y \quad \lambda_3 = 0.64 \quad (3.92)$$

dos de los polos están fuera del círculo unitario, es decir en la región de inestabilidad; efectivamente, el programa entrega el mensaje indicando esta circunstancia.

En cambio si x_1 no es accesible los polos se mantienen en el círculo unitario, como se ve:

$$\lambda_{1,2} = 0.67 \pm j 0.59 \quad y \quad \lambda_3 = -0.65 \quad (3.93)$$

sin embargo, en este caso la estabilización es más lenta, aunque parece que el error permanente disminuye:

$$E_{ee} = 9.0E-5 \quad \text{al paso } k_N = 128 \quad (3.94)$$

es decir, 20.3 seg., casi 10 veces más que en el primer caso.

En el tercer caso, nuevamente un polo se coloca fuera del círculo unitario haciéndole inestable al sistema

Esto da una idea de lo que puede ocurrir en estos casos: el sistema se vuelve inestable, o por lo menos su respuesta natural se hace más lenta; sin embargo, es factible encontrar otro vector de reali-

mentación que coloque los polos de lazo cerrado de tal forma que el sistema funcione de una mejor manera, esto se lo realizará en parte, probando varias veces y también, en base a la experiencia.

Los resultados obtenidos en el computador se presentan en las páginas siguientes; los datos que se han utilizado se hallan enmarcados en líneas de puntos.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

DATOS GENERALES DEL SISTEMA

Archivo : PROB315

NOMBRE DEL ARCHIVO: PROB315

CLASE DE LA PLANTA: Analoga

ORDEN DEL SISTEMA: N=3

DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

MATRIZ DE ESTADO A

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
1.00000	-48.60000	-6.00000

VECTOR DE ENTRADA B

0.00000
0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C

27.80000	27.80000	0.00000
----------	----------	---------

Polos de Lazo Abierto

RAIZ<1>=0.020524

RAICES<2,3>=-3.010262 ± J6.297768

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

RESULTADOS DE LOS CALCULOS INICIALES

Archivo : PROB315

MATRICES DISCRETIZADAS

MATRIZ DE ESTADO A

1.00051	0.13426	0.00854
0.00854	0.58543	0.08302
0.08302	-4.02624	0.08731

VECTOR DE ENTRADA B

0.00049
0.00839
0.08500

VECTOR DE SALIDA C

27.80000 27.80000 0.00000

PERIODO DE DISCRETIZACION: T=0.1588

MATRIZ DE ESTADO A en variables de fase

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.38568	-1.05659	1.67324

VECTOR DE ENTRADA B en variables de fase

0.00000
0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C en variables de fase

-0.16680 -0.01511 0.24688

MATRIZ DE CONTROLABILIDAD S

0.00049	0.00234	0.00373
0.00839	0.01197	0.00484
0.08500	-0.02632	-0.05031

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE F

427.93874	-73.22841	4.76613
427.92515	-4.60269	-2.00844
427.93524	62.84702	3.09730

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : DISEÑO

Archivo : PROB315

DATOS
=====

Coeficientes del polinomio característico

COEF. DE Z^0 = 0.000000
COEF. DE Z^1 = -0.250000
COEF. DE Z^2 = 0.000000

Polos de Lazo Cerrado

RAIZ<1>=0.500000
RAIZ<2>=-0.500000
RAIZ<3>=0.000000

RESULTADOS
=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F

321.96399	82.92903	9.64496
-----------	----------	---------

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

0.38568	-1.30659	1.67324
---------	----------	---------

Respuesta Natural: Eee=-0.000197

Al paso k=18

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : ANALISIS

Archivo : PROB315

DATOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F

321.96399	82.92903	0.00000
-----------	----------	---------

RESULTADOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

-0.42012	0.31910	0.85339
----------	---------	---------

Coefficientes del polinomio característico

COEF. DE Z⁰= -0.805799

COEF. DE Z¹= 1.375689

COEF. DE Z²= -0.819845

Polos de Lazo Cerrado

RAIZ<1>=0.639371

RAICES<2,3>=0.090237 ± J1.118998

EL SISTEMA ES INESTABLE

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : ANALISIS

Archivo : PROB315

DATOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F		
321.96399	0.00000	9.64496

RESULTADOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

0.91015 -1.13517 0.97735

Coefficientes del polinomio caracteristico

COEF. DE Z^0 = 0.524464

COEF. DE Z^1 = -0.078578

COEF. DE Z^2 = -0.695886

Polos de Lazo Cerrado

RAICES<1,2> = 0.674585 ± J0.589701

RAIZ<3> = -0.653283

Respuesta Natural: Eee = 0.000090

Al Paso

k = 128

=====

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REALIMENT. DISC. DE ESTADO : ANALISIS

Archivo : PROB315

DATOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION F

0.00000 82.92903 9.64496

RESULTADOS

=====

MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase

0.28134 -1.79711 1.51573

Coeficientes del polinomio caracteristico

COEF. DE Z⁰= -0.104347

COEF. DE Z¹= -0.740522

COEF. DE Z²= -0.157508

Polos de Lazo Cerrado

RAIZ<1>=-0.150300

RAIZ<2>=1.001220

RAIZ<3>=-0.693412

EL SISTEMA ES INESTABLE

3.2.4. EJEMPLO 4.

Este ejemplo está tomado de Kuo, Benjamin; DIGITAL CONTROL SYSTEMS ⁽⁹⁾ con el objeto de comparar los resultados y así comprobar la validez del programa realizado para hallar el vector $\underline{f}(k)$ que minimiza el criterio dado en la ecuación (3.69).

Sea el sistema digital descrito por la ecuación de estado:

$$\underline{x}(k + 1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) \quad (3.95)$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

las matrices de ponderación son:

$$\underline{H} = \underline{0} \quad \text{y} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

y $r = 2$

en las páginas siguientes se muestran los resultados. Hay que anotar que fueron satisfactorios.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

DATOS GENERALES DEL SISTEMA

Archivo : EJM123

NOMBRE DEL ARCHIVO: EJM123

CLASE DE LA PLANTA: Digital

ORDEN DEL SISTEMA: N=2

DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$$
$$y(k) = cx(k)$$

MATRIZ DE ESTADO A

0.00000	1.00000
-1.00000	1.00000

VECTOR DE ENTRADA B

0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C

1.00000	0.00000
---------	---------

Polos de Lazo Abierto

RAICES<1,2>=0.500000 ± J0.866025

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REAL. OPT. DE ESTADO: DISEÑO y ANALISIS

Archivo : EJM123

DATOS
=====

MATRICES DE PONDERACION
=====

CRITERIO DE DESEMPEÑO

$$J = \frac{1}{2} x^T(M) H x(M) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \{ x^T(k) Q x(k) + u^T(k) r u(k) \}$$

MATRIZ DE PONDERACION H

0.00000	0.00000
0.00000	0.00000

MATRIZ DE PONDERACION Q

2.00000	0.00000
0.00000	0.00000

COEFICIENTE DE PONDERACION r=2.

NUMERO MAXIMO DE MUESTREOS: M=8

RESULTADOS
=====

Paso : k	Matriz de Realimentación F(k)
7	0.000000 0.000000
6	0.000000 0.000000
5	-0.500000 0.500000
4	-0.600000 0.400000
3	-0.615385 0.461538
2	-0.648649 0.486486
1	-0.650943 0.481132
0	-0.652459 0.485246

Coeficientes del polinomio característico

COEF. DE Z⁰= 0.347541
COEF. DE Z¹= -0.514754

Polos de Lazo Cerrado

RAICES(1,2)=0.257377 ± J0.530375

Respuesta Natural: Eee=0.000002

Al Paso k=21

COSTO MINIMO TOTAL: J= 5.14098360656

VECTOR DE ESTADOS INICIAL X₀

1.00000
1.00000

VECTOR DE ESTADOS INICIAL $x(0)$

1

1

PASO: K	U(K)	X(K)	
0	0.16721	1.00000	1.00000
1	0.57049	1.00000	0.16721
2	0.23607	0.16721	-0.26230
3	-0.07213	-0.26230	-0.19344
4	-0.11475	-0.19344	-0.00328
5	-0.03934	-0.00328	0.07541
6	0.00000	0.07541	0.03934
7	0.00000	0.03934	-0.03607

3.2.5. EJEMPLO 5.

Sea el sistema descrito por:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.98)$$

Se trata de hallar el grupo de controles que minimizan el costo J dado por la ecuación (3.64) donde \underline{H} y \underline{Q} son la matriz identidad y $r = 1$.

Los resultados se muestran en la Tabla 3.14.

TABLA 3.14

Paso k	$\underline{f}(k)$		$u(k)$	$\underline{x}(k)$	
0	-0.365	-0.644	1.009	1.000	1.000
1	-0.365	-0.644	0.049	1.000	-0.491
2	-0.365	-0.644	-0.153	-0.491	0.040
3	-0.365	-0.644	0.048	0.040	0.052
4	-0.365	-0.644	0.004	0.052	0.024
5	-0.365	-0.644	-0.007	-0.024	0.002
6	-0.365	-0.644	0.002	0.002	0.003
7	-0.365	-0.644	2.3E-4	0.003	-0.001
8	-0.365	-0.644	-3.9E-4	-0.001	5.0E-5
9	-0.365	-0.644	1.1E-4	5.0E-5	1.4E-4
10	-0.365	-0.644	1.0E-5	1.4E-4	-6.0E-5
11	-0.365	-0.644	-2.0E-5	-6.0E-5	0
12	-0.365	-0.641	1.0E-5	0	1.0E-5
13	-0.357	-0.643	0	1.0E-5	0
14	-0.250	-0.500	0	0	0

En este caso la Realimentación Óptima de Estado hace que el sistema tienda rápidamente a cero, esto se consigue mientras más estable es el sistema de lazo abierto. Los resultados obtenidos para este ejemplo se muestran en las siguientes páginas.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

DATOS GENERALES DEL SISTEMA

Archivo : PROB1210

NOMBRE DEL ARCHIVO: PROB1210

CLASE DE LA PLANTA: Digital

ORDEN DEL SISTEMA: N=2

DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k)\end{aligned}$$

MATRIZ DE ESTADO A

0.00000	1.00000
-0.50000	-1.00000

VECTOR DE ENTRADA B

0.00000
1.00000

VECTOR DE SALIDA C

1.00000	0.00000
---------	---------

Polos de Lazo Abierto

RAICES<1,2>=-0.500000 ± j0.500000

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

Fecha : 17-JUL-84

REAL. OPT. DE ESTADO: DISEÑO y ANALISIS

Archivo : PROB1210

DATOS

=====

MATRICES DE PONDERACION

=====

CRITERIO DE DESEMPEÑO

$$J = \frac{1}{2} x^T(M) H x(M) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) r u(k)]$$

MATRIZ DE PONDERACION H

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ DE PONDERACION Q

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

COEFICIENTE DE PONDERACION r=1.

NUMERO MAXIMO DE MUESTREOS: M=15

RESULTADOS

=====

Paso	k	Matriz de Realimentación F(k)	
14		-0.250000	-0.500000
13		-0.357143	-0.642857
12		-0.364078	-0.640777
11		-0.365007	-0.643512
10		-0.365278	-0.643860
9		-0.365293	-0.643855
8		-0.365296	-0.643862
7		-0.365297	-0.643863
6		-0.365297	-0.643863
5		-0.365297	-0.643863

4	-0.365297	-0.643863
3	-0.365297	-0.643863
2	-0.365297	-0.643863
1	-0.365297	-0.643863
0	-0.365297	-0.643863

Coeficientes del polinomio característico

COEF. DE Z^0 = 0.134703

COEF. DE Z^1 = 0.356137

Polos de Lazo Cerrado

RAICES<1,2> = -0.178069 ± J0.320928

Respuesta Natural: Eee = 0.000001

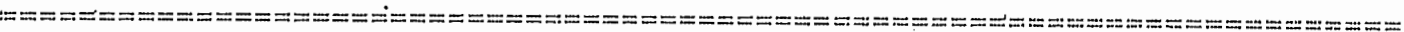
Al Paso k = 11

COSTO MINIMO TOTAL: J = 4.53837035825

VECTOR DE ESTADOS INICIAL X_0

1.00000

1.00000



VECTOR DE ESTADOS INICIAL $x(0)$

1
1

PASO: K	U(K)	X(K)	
0	1.00916	1.00000	1.00000
1	0.04926	1.00000	-0.49084
2	-0.15348	-0.49084	0.04010
3	0.04802	0.04010	0.05184
4	0.00357	0.05184	-0.02386
5	-0.00774	-0.02386	0.00152
6	0.00228	0.00152	0.00267
7	0.00023	0.00267	-0.00116
8	-0.00039	-0.00116	0.00005
9	0.00011	0.00005	0.00014
10	0.00001	0.00014	-0.00006
11	-0.00002	-0.00006	0.00000
12	0.00001	0.00000	0.00001
13	0.00000	0.00001	0.00000
14	0.00000	0.00000	0.00000

REFERENCIAS.

- (1) García Cristóbal, Tesis de Grado, EPN, 1980
- (2) Dorf, R., Sistemas Automáticos de Control, Fondo Educativo Interamericano, EUA. 1978, p.105.
- (3) Conte S.D. y de Boor C., Análisis Numérico, Mc Graw-Hill, 2º ed. México, 1981, p.304.
- (4) Matriz Functions Manual, Tektronix.
- (5) Guerra J.C., Tesis de Grado, EPN, 1983.
- (6) Guerra J.C., Tesis de Grado, EPN. 1983, p.97.
- (7) Guerra J.C., Tesis de Grado, EPN. 1983, p.39-40 y p.115-140.
- (8) Kuo Benjamin, DIGITAL CONTROL SYSTEMS, Holt Saunders, Japón, 1981, p.514-517.
- (9) Kuo Benjamin, DIGITAL CONTROL SYSTEMS, Holt Saunders, Japón, 1981, p.619, 621.

4.1. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

En base al estudio teórico realizado y a la implementación misma de los programas, se pueden obtener algunas conclusiones referentes a cada uno de los tópicos que se han tratado.

Específicamente, en lo que se refiere a la realización de los programas se derivan las siguientes conclusiones:

4.1.1. DISCRETIZACION CONTROLABILIDAD Y TRANSFORMACION A VARIABLES DE FASE.

1.- Previamente a la discretización, el programa CALINI calcula un período de muestreo T que es 10 veces menor a la menor constante de tiempo del sistema de lazo abierto; esto se hace con el fin de evitar la superposición del espectro de frecuencia en la señal muestreada. Puede ocurrir que T resulte relativamente pequeño, en este caso se tiene un efecto indeseable sobre la matriz de controlabilidad \underline{S} , que se explica a continuación: \underline{S} está formada por las matrices \underline{A} y \underline{b} discretizadas, las cuales se determinan por:

$$\underline{A}_D = e^{\underline{A}T} \quad \underline{b}_D = \int_0^T e^{\underline{A}\tau} \underline{b} d\tau \quad (4.1)$$

donde claramente se ve que si T tiende a cero \underline{A}_D tenderá a la ma-

triz identidad, mientras que \underline{b}_D tenderá a $\underline{0}$, lo que hace que \underline{S} formada como:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{b}_D & \underline{b}_D \underline{A}_D & \underline{b}_D \underline{A}_D^2 & \dots & \underline{b}_D \underline{A}_D^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

tiende también a cero; y más precisamente, desde el punto de vista de la Controlabilidad, todas sus columnas tenderán a ser iguales entre sí, lo que hace que su determinante sea muy pequeño, es decir, el sistema se hace incontrolable. Por lo general, el problema anterior se soluciona colocando un T mayor, que, para evitar la superposición de espectros, no debe ser mayor a diez veces el valor calculado por el computador.

- 2.- La discretización es la herramienta que hace que estos programas sean generales para sistemas continuos y digitales; es decir, no importa que el sistema sea continuo, el programa lo discretiza y se aprovechan las ventajas de la Realimentación Discreta de Estado.
- 3.- Las ecuaciones en (4.1) se resuelven en forma relativamente fácil por métodos analíticos, pero para resolverlas en computador, hay que hacer algunas aproximaciones: la determinación de \underline{A}_D se hace por medio de la siguiente expresión:

$$\underline{A} = \sum_{i=0}^M \{ [\underline{A}^i \tau^i] / i! \} \quad (4.3)$$

donde los términos M + 1 y subsiguientes no aportan significativamente al sumatorio. Por otro lado, al integral que determina \underline{b}_D

se calcula aplicando la Regla del Trapecio en m subdivisiones del intervalo de integración; m se determina por la siguiente expresión:

$$m = 4 (T_a / T_b) \quad (4.4)$$

T_a es el período que escoge el usuario y T_b el calculado por el programa. (Para mayores detalles refiérase a la sección 3.1.3).

- 4.- La transformación a variables de fase o forma canónica controlable es una de las varias alternativas que existen para determinar el vector de realimentación \underline{f} ; sin embargo, se escoge este procedimiento, pues tal vez es el que mejor se adapta para resolver el problema en un computador.
- 5.- Hay que anotar que, si se tiene la función de transferencia $T(z)$ o $T(s)$ de un sistema, directamente se conoce su descripción en variables de fase, esto es porque los coeficientes de la n -ésima fila de \underline{A} , con el signo cambiado, son los coeficientes del denominador de $T(z)$ o $T(s)$, mientras que los coeficientes del vector de salida \underline{c}^f forman el numerador. Este hecho permite que, dada una función de transferencia de un sistema continuo $T(s)$, se pueda conocer la respectiva función de transferencia discreta $T(z)$, utilizando la discretización y la transformación a la forma canónica controlable y, además, diseñar o analizar cierto vector de realimentación \underline{f} para un sistema descrito de esa manera.

4.1.2. REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO.

1.- La conclusión más importante, es el hecho de que por medio de la Realimentación Discreta de Estado, se pueden localizar los polos de un sistema, virtualmente en cualquier lugar, pudiéndose satisfacer, de esta manera, cualquier especificación de diseño que los polos puedan controlar; incluso, aunque no se ha realizado el análisis de este caso, la ganancia del sistema puede variarse en un amplio margen sin que por ello el sistema pierda estabilidad.

2.- Se había señalado que la Realimentación Discreta de Estado coloca los polos en cualquier lugar; en particular, si se colocan los polos de lazo cerrado en el origen, el error en estado estable se anula y además, el número de pasos para conseguir la estabilidad es el mínimo. En sistemas continuos no se puede realizar algo semejante, esto se demuestra a continuación.

Los polos del sistema continuo y del discreto se relacionan por medio de la transformada z :

$$z = e^{sT} \quad (4.5)$$

por inspección, en la ecuación (4.5) se puede ver que el significado de colocar los polos en cero, en el caso discreto, es el de colocarlos en menos infinito en el caso continuo; esto requeriría tener amplificadores de ganancia infinita en el lazo de realimentación, lo que físicamente es imposible. Esta propiedad de los sistemas discretos podría ser sumamente provechosa cuando no interesa su comportamiento en los pasos anteriores a la estabilización (en los cuales puede ocurrir que los estados, la salida o el control tomen valores muy altos respecto de una referencia). En los ejem-

plos que se utilizaron para determinar la validez de los programas se observó que invariablemente, el número de pasos necesario para alcanzar el estado estable era igual al orden del sistema; con los polos localizados en otra zona del plano z éste se incrementaba. Un análisis de este caso se desarrolla en el Ejemplo 1.

- 3.- En referencia a la parte de ANALISIS en este programa, se había visto que es de suma utilidad, entre otras cosas, para investigar el efecto que produce cierto vector de realimentación \underline{f} dado, que puede simular, colocando los $f_i = 0$, cuando hay estados inaccesibles o cuando no hay realimentación (sistema de lazo abierto); es específicamente ha sido de gran utilidad el conocer de alguna manera el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo.
- 4.- A través de ANALISIS, es posible hallar los coeficientes de las funciones de transferencia que relacionan a cualquier estado con la entrada, definiendo vectores de salida ficticios, donde, para hallar $x_i(z)/R(z)$, se coloca $c_i = 1$ y los demás en cero; en los resultados del programa los coeficientes del denominador se presentan bajo el título "Coef. del polinomio característico". mientras que los del numerador son los coeficientes del vector de salida en variables de fase. De igual manera, se pueden encontrar funciones de transferencia internos $X_i(z)/X_j(z)$, primeramente encontrando $X_i(z)/R(z)$ y $X_j(z)/R(z)$ y luego dividiéndolas entre sí.

4.1.3. REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO.

- 1.- La Realimentación Optima de Estado es una técnica que tiene aplicaca

ciones prácticas sobretodo en el diseño de reguladores lineales, es decir, en sistemas cuya entrada de referencia $r(k)$ es nula, y en los cuales el objetivo de diseño es llevar los estados y salidas a las cercanías del estado de equilibrio 0 ; sin embargo, en tiempo infinito, es aplicable a otros procesos, ya que en este caso se calcula un f constante; por lo tanto, los polos de lazo cerrado se mantendrán fijos, con lo que el sistema será estable para otro tipo de entradas, puesto que las características de estabilidad no varían.

- 2.- La conclusión más importante es el hecho de que la política de control óptimo en cada paso, es una combinación lineal de los estados del sistema, es decir, se trata de una Realimentación de Estado variable, que puede implementarse por medio de n amplificadores de ganancia variable por paso, cuyos valores pueden estar almacenados, en una memoria ROM o en el mismo computador si éste dispone de salida análoga; la facilidad de implementación es una característica de los sistemas discretos.
- 3.- Cuando se desean controlar únicamente N pasos (N finito), no se requiere que el sistema de lazo cerrado sea estable. El objetivo del control óptimo es minimizar el costo J total y si N es finito, J también será finito aún cuando algún estado sea inestable. No se tienen restricciones respecto de $\underline{x}(N)$ sino más bien lo que se desea es llevar a $\underline{x}(0)$ al estado de equilibrio lo más cercanamente posible. Sin embargo, puesto que en la mayoría de problemas se trata de diseñar un f constante (tiempo infinito) se impone como condición que el sistema sea estable.

4.- Dependiendo de los valores que se escojan para las matrices de ponderación \underline{H} , \underline{Q} y del coeficiente r se pueden obtener comportamientos diferentes del sistema, por ejemplo, si \underline{H} y \underline{Q} son cero, para minimizar el criterio de funcionamiento sólo se requiere que $u(k)$ sea pequeño y tendiente a cero, pero las restricciones respecto del comportamiento de los estados son mucho menores. Igual puede ocurrir en caso que r sea muy pequeño y \underline{Q} grande, pero ahora, es el control $u(k)$ que no tiene restricciones, pero que llevará a los estados más rápidamente hacia el equilibrio.

5.- El valor del costo total se puede determinar muy fácilmente, conociendo el vector de estados inicial $\underline{x}(0)$ y por medio de la ecuación:

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(0) \underline{P}(0) \underline{x}(0) \quad (4.6)$$

donde $\underline{P}(0)$ es la matriz de ganancias de Riccati correspondiente al paso $k = 0$.

4.1.4. RESUMEN.

En base a estas consideraciones y a otras de tipo general, se pueden obtener, las siguientes conclusiones:

1.- Como se dijo anteriormente, gracias a la discretización, estos programas son una generalización, en cuanto trabajan con sistemas discretos, digitales o continuos.

2.- Una conclusión muy importante es el hecho de que la Realimentación de Estado es una combinación lineal de los estados, estos pueden estar definidos por variables físicas o no; en el primer caso, sensores apropiados pueden medirlos y a través de amplificadores de ganancia fijas o variables, formar el control $u(k)$; si los estados no representan variables físicas, un OBSERVADOR puede estimarlas por medio de la salida $y(k)$; existe sin embargo, la posibilidad de que cierto estado sea inaccesible, por lo que se requiere realizar un análisis del efecto que ésto produciría en el sistema de lazo cerrado.

3.- Se había visto que el hecho de introducir un muestreador en un sistema continuo, puede producir efectos perjudiciales en lo que se refiere a la controlabilidad; es más, si se hiciera un análisis en el dominio del tiempo, se vería que la respuesta transitoria y en ciertos casos, la estabilidad del sistema se ven seriamente afectados. Entonces, para qué realizar la discretización, sobre todo si en sistemas continuos también existe la Realimentación de Estado? Es bien conocido que los sistemas discretos tienen muchas ventajas, por una serie de propiedades como son:

- Facilidad de implementación
- Mejor sensibilidad
- El ruido produce menores efectos
- Posibilidad de programación
- Actualmente son menos costosos
- Menor peso y tamaño

Estas y otras razones hacen que la discretización sea ventajosa en

la implementación física del control y por tanto justificable su realización.

- 4.- Para el análisis de la estabilidad y el comportamiento en el dominio del tiempo es de mucha utilidad disponer de herramientas tales como programas que graficen el lugar geométrico de las raíces, los diagramas de Bode y la respuesta en el tiempo para una entrada dada; pero el objetivo de esta tesis está orientado hacia la Realimentación Discreta de Estado, de tal manera que, con el objeto de analizar en cierta forma la respuesta en el tiempo, se implementó una subrutina llamada de ERROR EN ESTADO ESTABLE, que resuelve la respuesta del sistema en forma recursiva por medio de las ecuaciones de estado, imponiendo como condición inicial $\underline{x}(0) = 1$; la subrutina entrega como resultados el valor de la salida cuando ésta se estabiliza y el paso en que la consigue; esto da una idea, o mejor, una medida de la respuesta natural del sistema, que se puede utilizar para establecer comparaciones.

APENDICE A

```

1 DELETE V$
2 W0=-1
3 DIM V$(140)
4 V$=""
5 V0=0
6 GO TO 100
8 O1=1
9 GO TO 1000
12 O1=2
13 GO TO 1000
16 O1=3
18 GO TO 1000
20 O1=4
22 GO TO 1000
24 O1=5
26 GO TO 1000
80 GO TO 100
100 REM
110 REM
120 REM
130 REM
140 REM
150 REM
160 REM
170 REM
180 REM
190 REM
200 REM
210 PRINT USING 220:"REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO"
220 IMAGE P 5/ 20X FA / 7X 59"*
230 PRINT USING "/ 6X FA":V$
235 IF W0<>-1 THEN 280
240 PRINT USING "4/10XFA": "TECLA 1.- Indice de Programas"
250 PRINT USING "/10XFAS": "TECLA 2.- Ingreso de Datos"
270 GO TO 340
280 PRINT USING "4/10XFA": "TECLA 1.- Indice de Programas"
290 PRINT USING "/10XFAS": "TECLA 2.- Ingreso, Almacenamiento, Verificac"
295 PRINT "ioH'n y CorreccioH'n de Datos"
300 PRINT USING "/10XFA": "TECLA 3.- CaH'culos Iniciales"
310 PRI USI "/10XFAS": "TECLA 4.- RealimentacioH'n discreta de Estado:"
315 PRINT " Analisis y Diseno"
320 PRINT USING "/10XFAS": "TECLA 5.- RealimentacioH'n Optime de Estado?"
325 PRINT " Analisis y Diseno"
330 PRINT USING "/ 10X FA": "TECLA 6.- Resultados"
340 PRINT USING "4/30XFAS": "ESCOJA TECLAGG "
350 END
800 REM LINEA DE SELECCION DE PROGRAMAS
810 IF O1=02 THEN 1050
820 IF W0<>-1 THEN 860
830 PRINT USING "P 10/ 20X FA S": "UNIDAD DONDE ESTA EL DISCOGG "
840 INPUT W0
850 IF W0<>0 AND W0<>1 THEN 830
860 CALL "UNIT",W0
870 DATA "ENTRADA2", "CALINI", "REALDISEST", "REALOPTEST", "SALIDA"

```

@TESIS/MAESTRO

REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO
Y REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE FRANCISCO GUERRERO NAJERA
18 DE ENERO DE 1984

```

875 RESTORE 870
880 FOR J=1 TO 01
890 READ X$
900 NEXT J
910 X$="@TESIS/"&X$
920 DELETE 1001,30000
930 J=MEMORY
940 APPEND X$;1000
1000 REM *****CARGA DE PROGRAMAS*****
1010 Q2=0
1020 W0=-1
1040 REM
1050 GO TO 800

```

```

1000 REM @TESIS/ENTRADA2
1010 REM ***** INGRESO DE DATOS *****
1020 REM
1030 O2=1
1040 GO TO 800
1050 IF V0<>0 THEN 1120
1060 V0=0
1070 W9=0
1080 W8=0
1090 W7=0
1100 REM *****
1110 REM
1120 Y$="INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION Y ALMACENAMIENTO DE DATOS"
1130 V$=" "
1140 PRINT USING 1150:Y$
1150 IMAGE P 5/ 6X FA / 6X 59 "*"
1160 PRINT USING "/ 6X FA ":V$
1170 PRINT USING "4/20XFA": "1.- Ingreso desde Teclado"
1180 PRINT USING "/20XFA": "2.- Lectura de Datos de Archivo"
1190 PRINT USING "/20XFA": "3.- Almacenamiento de Datos en Archivo"
1200 PRINT USING "/20XFA": "4.- Listado y Correccion de Datos"
1210 PRINT USING "/20XFA": "5.- A los Caracoles"
1220 PRINT USING "3/30XFA": "ESCOJA CLASE:GG "
1230 INPUT Z9
1240 GO TO Z9 OF 1270,1740,2000,2250,3560
1250 GO TO 1140
1260 REM *****
1270 REM ***** INGRESO DESDE TECLADO *****
1280 T$=" "
1290 W$="INGRESO DE DATOS DESDE TECLADO"
1300 W9=1
1310 K9=0
1320 GOSUB 3690
1330 K9=K9+13
1340 IF K9<40 THEN 1370
1350 PAGE
1360 K9=6
1370 PRINT USING "6/20XFA": "PLANTA ANALOGA O DIGITAL (A/D)G "
1380 INPUT C$
1390 IF C$<>"A" AND C$<>"D" THEN 1330
1400 PRINT USING "/20X FA S": "INGRESE EL ORDEN DEL SISTEMA: N=G"
1410 INPUT N
1420 DELETE A,B,C
1430 DIM A(N,N),B(N,1),C(1,N)
1440 PRINT USING " / 20X FA": "INGRESE LA MATRIZ A POR FILAS"
1450 U$="INGRESE LA MATRIZ A POR FILAS (CONT)"
1460 FOR I=1 TO N
1470 FOR J=1 TO N
1480 GOSUB 3610
1490 PRINT USING "/ 20X 2A D A D FA S": "A( ;I; ", ";J; ")=G"
1500 INPUT A(I,J)
1510 NEXT J
1520 NEXT I
1530 GOSUB 3610

```

```

1540 PRINT USING "/ 20X FA": "INGRESE EL VECTOR B"
1550 U$="INGRESE EL VECTOR B (CONT)"
1560 J=1
1570 FOR I=1 TO N
1580 GOSUB 3610
1590 PRINT USING "/ 20X 2A D FA S": "B(;I;)=G"
1600 INPUT B(I,1)
1610 NEXT I
1620 I=1
1630 GOSUB 3610
1640 PRINT USING "/ 20X FA": "INGRESE EL VECTOR C"
1650 U$="INGRESE EL VECTOR C (CONT)"
1660 FOR J=1 TO N
1670 GOSUB 3610
1680 PRINT USING "/ 20X 2A D FA S": "C(;J;)=G"
1690 INPUT C(I,J)
1700 NEXT J
1710 V$="DATOS INGRESADOSGG"
1720 V0=1
1730 GO TO 1140
1740 REM *****
1750 REM ***** INGRESO DE DATOS DE ARCHIVO *****
1760 W$="LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO"
1770 GOSUB 3690
1780 PRINT USING "6/20XFA//20XS": "INGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO6"
1790 INPUT T$
1800 CALL "FILE",W0,T$,R$
1810 IF R$="" THEN 1920
1820 OPEN T$;1,"R",R$
1830 READ #1:N
1840 DELETE A,B,C
1850 DIM A(N,N),B(N,1),C(1,N)
1860 READ #1:A,B,C,C$
1870 CLOSE 1
1880 W8=1
1890 V$="DATOS LEIDOSGG"
1900 V0=1
1910 GO TO 1140
1920 PRINT USING "// 20X FA FA": "NO EXISTE EL ARCHIVO6666 "T$
1930 PRINT USING "/ 20X FA S": "DESEA LEER OTRO ARCHIVO ?(SI o NO) "
1940 INPUT X$
1950 IF X$="SI" OR X$="S" THEN 1780
1960 W7=0
1970 V$="NO SE LEYERON DATOS DE ARCHIVO66"
1980 GO TO 1140
1990 REM *****
2000 REM ***** ALMACENAMIENTO DE DATOS EN ARCHIVO *****
2010 IF W9=1 THEN 2040
2020 V$="NO EXISTEN DATOS, EJECUTE 1GG"
2030 GO TO 1140
2040 W$="ALMACENAMIENTO DE DATOS"
2050 GOSUB 3690
2060 PRINT USING "6/ 20X FA // 20X S": "INGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO6"
2070 INPUT T$

```

```

2080 CALL "FILE",W0,T$,R$
2090 IF R$="" THEN 2170
2100 PRINT USING 2110:"EL ARCHIVO ";T$;" YA EXISTEGGGG"
2110 IMAGE // 20X 11A FA FA
2120 PRINT USING "/ 20X FA S": "DESEA REESCRIBIRLO ?(SI o NO) "
2130 INPUT X$
2140 IF X$="SI" OR X$="S" THEN 2140
2150 GO TO 2060
2160 KILL T$
2170 CREATE T$;2000,0
2180 OPEN T$;1,"F",R$
2190 WRITE #1;N,A,B,C,C$
2200 CLOSE 1
2210 V$="DATOS ALMACENADOS EN EL ARCHIVO "&T$
2220 W7=1
2230 GO TO 1140
2240 REM *****
2250 REM *****LISTADO Y CORRECCION DE DATOS*****
2260 P9=32
2270 IF W9=1 OR W8=1 THEN 2300
2280 V$="NO EXISTEN DATOS, EJECUTE 1 o 2GG"
2290 GO TO 1140
2300 W$="LISTADO DE DATOS"
2310 GOSUB 3690
2320 IF W9=1 AND W7<>1 THEN 2340
2330 PRINT @P9: USING "//6XFAPA":"NOMBRE DEL ARCHIVO: ";T$
2340 PRINT @P9: USING "//6XFAA":"CLASE DE LA PLANTA: ";C$
2350 PRINT @P9: USING "//6XFAD":"ORDEN DEL SISTEMA: N=";N
2360 PRINT @P9: USING "//6XFA":"MATRIZ DE ESTADO A"
2370 PRINT @P9:
2380 FOR I=1 TO N
2390 PRINT @P9: USING "10X4D,5DS":A(I,1)
2400 FOR J=2 TO N
2410 PRINT @P9: USING "3X4D,5DS":A(I,J)
2420 NEXT J
2430 PRINT @P9:
2440 NEXT I
2450 PRINT @P9: USING "//6XFA":"VECTOR DE ENTRADA B"
2460 PRINT @P9:
2470 FOR I=1 TO N
2480 PRINT @P9: USING "10X4D,5D":B(I,1)
2490 NEXT I
2500 PRINT @P9: USING "//6XFA":"VECTOR DE SALIDA C"
2510 PRINT @P9: USING "10X4D,5DS":C(1,1)
2520 FOR J=2 TO N
2530 PRINT @P9: USING "3X4D,5DS":C(1,J)
2540 NEXT J
2550 PRINT @P9:
2560 V$="LISTADO EJECUTADOGG"
2570 IF P9=51 THEN 1140
2580 PRINT USING "// 20X FA S": "ESTA CORRECTO ?(SI o NO) GG"
2590 INPUT X$
2600 IF X$="NO" OR X$="N" THEN 2700
2610 PRINT USING "P10/20XFAS": "DESEA IMPRESION EN PAPEL ?(SI/NO) G"

```

```

2620 INPUT X$
2630 IF X$="SI" OR X$="S" THEN 2650
2640 GO TO 1140
2650 P9=51
2660 PRINT USING "//20X FA": "ALISTE EL IMPRESOR, RETURN PARA CONTINUARG"
2670 INPUT X$
2680 GO TO 2300
2690 REM *****
2700 REM ***** CORRECCION *****
2710 W$="CORRECCION DE DATOS"
2720 GOSUB 3690
2730 PRINT USING "6/20XFA": "1.- CorreccioH'n o eliminacioH'n de archivo"
2740 PRI USI "/20XFA": "2.- CorreccioH'n de Elementos de las matrices"
2750 PRINT USING "/20XFA": "3.- Cambio de la Clase del Sistema"
2760 PRINT USING "/20XFA": "4.- TeH'rmino de la correccioH'n"
2770 PRINT USING "3/20XFAS": "CLASE DESEADAGG "
2780 INPUT Z9
2790 GO TO Z9 OF 2810,3050,3350,3540
2800 GO TO 2720
2810 REM -----
2820 REM ----- CORRECCION O ELIMINACION DE ARCHIVO -----
2830 PAGE
2840 PRINT USING "10/20XFAS": "CORRECCION O ELIMINACION ?(C/E) G"
2850 INPUT X$
2860 IF X$="" THEN 2720
2870 KILL T$
2880 IF X$="E" THEN 3020
2890 PRINT USING "//20XFA//20XS": "INGRESE NOMBRE CORRECTO"
2900 INPUT T$
2910 IF T$="" THEN 3020
2920 CALL "FILE",W0,T$,R$
2930 IF R$="" THEN 2960
2940 PRI USI "//20XFAFAFA": "EL ARCHIVO ";T$;" YA EXISTE, PRUEBE OTROG"
2950 GO TO 2890
2960 CREATE T$;2000,0
2970 OPEN T$;1,"F",R$
2980 WRITE #1;N,A,B,C,C$
2990 CLOSE 1
3000 W$="ARCHIVO CORREGIDO: "&T$
3010 GO TO 2720
3020 W$="ARCHIVO ELIMINADO; DATOS EN MEMORIA"
3030 GO TO 2720
3040 REM -----
3050 REM ----- CORRECCION DE ELEMENTOS DE LAS MATRICES -----
3060 X$="INGRESE EL NOMBRE DE LA MATRIZ QUE DESEA CORREGIR (A, B o C)G "
3070 PRINT USING "F 10/ 2X FA S":X$
3080 INPUT X$
3090 IF X$<>"A" AND X$<>"B" AND X$<>"C" THEN 3060
3100 IF X$="A" THEN 3130
3110 IF X$="B" THEN 3190
3120 GO TO 3250
3130 PRINT USING "// 20X FA S": "INGRESE FILA,COLUMNAG "
3140 INPUT I,J
3150 IF I>N OR J>N THEN 3130

```



```

3160 PRI USI."// 20X FA D A D 2A S":*VALOR CORRECTO DE A(";I;",";J;")="
3170 INPUT A(I,J)
3180 GO TO 3300
3190 PRINT USING "// 20X FA S":*INGRESE FILAG "
3200 INPUT I
3210 IF I>N THEN 3190
3220 PRINT USING "//20X FA D 2A S":*VALOR CORRECTO DE B(";I;")="
3230 INPUT B(I,1)
3240 GO TO 3300
3250 PRINT USING "// 20X FA S":*INGRESE COLUMNAG "
3260 INPUT J
3270 IF J>N THEN 3250
3280 PRINT USING "// 20X FA D 2A S":*VALOR CORRECTO DE C(";J;")="
3290 INPUT C(1,J)
3300 PRINT USING "//20X FA S":*OTRO CAMBIO (SI o NO)G "
3310 INPUT X$
3320 IF X$="S" OR X$="SI" THEN 3060
3330 W$="MATRICES CORREGIDAS"
3340 GO TO 2720
3350 REM -----
3360 REM ----- CORRECCION DE CLASE -----
3370 PRINT USING "F10/15XFA":*Cambio de la Clase del Sistema"
3380 X$="A"
3390 IF C$="D" THEN 3410
3400 X$="D"
3410 PRINT USING "5/5XFAAS":*ACTUAL: ";C$
3420 IF C$="A" THEN 3450
3430 PRINT USING "FA20XFAPA":*igital";"NUEVO: ";*Añah'logo"
3440 GO TO 3460
3450 PRINT USING "FA20XFAPA":*nah'logo";"NUEVO: ";*Digital"
3460 PRINT USING "3/20XFAS":*CONFIRME (S) "
3470 INPUT Z$
3480 IF Z$<>"S" AND Z$<>"SI" THEN 2720
3490 C$=X$
3500 W$="CLASE DE LA PLANTA CORREGIDA"
3510 GO TO 2720
3520 REM *****
3530 REM ***** TERMINO DE CORRECCIONES *****
3540 V$="DATOS CORREGIDOSGG"
3550 GO TO 1140
3560 REM *****
3570 REM ***** A LOS CALCULOS *****
3580 O1=2
3590 GO TO 800
3600 REM *****
3610 REM ***** SUBROUTINA DE CAMBIO DE PAGINA *****
3620 K9=K9+2
3630 IF K9<29 THEN 3680
3640 PAGE
3650 K9=6
3660 IF I=1 AND J=1 THEN 3680
3670 PRINT USING "/// 20X FA":U$
3680 RETURN
3690 REM *****

```

```

3700 REM ***** SUBROUTINA DE CENTRADO DE TITULOS *****
3710 PRINT USING "P3/";
3720 FOR I9=1 TO (72-LEN(W$))/2
3730 PRINT " ";
3740 NEXT I9
3750 PRINT W$
3760 FOR I9=1 TO (72-LEN(W$))/2
3770 PRINT " ";
3780 NEXT I9
3790 FOR I9=1 TO LEN(W$)
3800 PRINT "=";
3810 NEXT I9
3820 PRINT
3830 RETURN

```

```

1000 REM
1010 REM *****DISCRETIZACION, CONTROLABILIDAD Y*****
1020 REM *****TRANSFORMACION A VARIABLES DE FASE*****
1030 Q2=2
1040 GO TO 800
1050 IF V0=>1 THEN 1080
1060 V$="NO EXISTEN DATOS, EJECUTE TECLA 2GG"
1070 GO TO 100
1080 DELETE A1,B1,S0,R1
1090 DIM A1(N,N),B1(N,1),S0(N,1)
1100 A1=A
1110 B1=B
1120 REM *****DISCRETIZACION*****
1130 IF N=1 THEN 5600
1140 GOSUB 1160
1150 GO TO 4070
1160 DELETE U9,V9,Z3,T
1170 DIM U9(N),V9(N),T(N,3),Q$(1),Z3(N,N)
1180 IF N>1 THEN 1270
1190 DIM Z2(1,1),Q(1,5)
1200 U9(1)=A1(1,1)
1210 V9(1)=0
1220 Z2(1,1)=1
1230 Z3(1,1)=0
1240 T(1,1)=2
1250 T1=1
1260 GO TO 1890 <
1270 GOSUB 1310
1280 GO TO 1890 X
1290 REM *****
1300 REM ***** SCALE A *****
1310 FOR T1=1 TO N
1320 FOR T2=1 TO N
1330 Z3(T1,T2)=A1(T1,T2)
1340 NEXT T2
1350 T(T1,2)=1
1360 NEXT T1
1370 Q1=0.75
1380 Q2=1.33
1390 T3=0
1400 T4=0
1410 FOR T1=1 TO N
1420 Q7=0
1430 Q8=0
1440 FOR T2=1 TO N
1450 IF T1=T2 THEN 1480 X
1460 Q7=Q7+ABS(A1(T2,T1))
1470 Q8=Q8+ABS(A1(T1,T2))
1480 NEXT T2
1490 IF Q7*Q8=0 THEN 1530 X
1500 Q3=Q7/Q8
1510 IF Q3<Q1 THEN 1550 L
1520 IF Q3>Q2 THEN 1550 X
1530 T4=T4+1

```

```

1540 GO TO 1620 X
1550 Q9=SQR(Q3)
1560 FOR T2=1 TO N
1570 IF T1=T2 THEN 1600 X
1580 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)*Q9
1590 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)/Q9
1600 NEXT T2
1610 T(T1,2)=T(T1,2)*Q9
1620 NEXT T1
1630 T3=T3+1
1640 IF T3>30 THEN 1800 X
1650 IF T4<N THEN 1400 X
1660 Q4=0
1670 FOR T1=1 TO N
1680 FOR T2=1 TO N
1690 Q3=A1(T1,T2)
1700 Q4=Q4+Q3*Q3
1710 NEXT T2
1720 NEXT T1
1730 Q4=SQR(Q4)
1740 FOR T1=1 TO N
1750 FOR T2=1 TO N
1760 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)/Q4
1770 NEXT T2
1780 NEXT T1
1790 RETURN
1800 FOR T1=1 TO N
1810 T(T1,2)=1
1820 FOR T2=1 TO N
1830 A1(T1,T2)=Z3(T1,T2)
1840 NEXT T2
1850 NEXT T1
1860 Q4=1
1870 RETURN
1880 REM ***** END OF SCALING *****
1890 REM ***** FIND EIGENVALUES *****
1900 Z8=48
1910 Q6=1/2*Z8
1920 GOSUB 2030
1930 REM ***** OUPUT EIGENVALUES *****
1940 U9=U9*Q4
1950 V9=V9*Q4
1960 FOR T1=1 TO N
1970 IF T(T1,1)<>0 THEN 2000
1980 PRINT @P9:"LNO SE PUEDE ENCONTRAR VALOR PROPIO No ";T1;"GGGG"
1990 END
2000 NEXT T1
2010 REM ***** END *****
2020 RETURN
2030 REM ***** FIND EIGENVALUES *****
2040 IF N<2 THEN 2620
2050 IF N>2 THEN 2080
2060 T(1,3)=A1(2,1)
2070 GO TO 2620

```

```

2080 T5=N-2
2090 FOR T3=1 TO T5
2100 T4=T3+1
2110 Q1=0
2120 FOR T1=T4 TO N
2130 Z3(T1,T3)=A1(T1,T3)
2140 Q1=Q1+ABS(A1(T1,T3))
2150 NEXT T1
2160 IF Q1<>ABS(A1(T4,T3)) THEN 2210
2170 T(T3,3)=A1(T4,T3)
2180 Z3(T4,T3)=0
2190 GO TO 2600
2200 REM *****
2210 Q3=0
2220 FOR T1=T4 TO N
2230 Q2=A1(T1,T3)/Q1
2240 A1(T1,T3)=Q2
2250 Q3=Q3+Q2*Q2
2260 NEXT T1
2270 Q2=SQR(Q3)
2280 IF A1(T4,T3)<0 THEN 2300
2290 Q2=-Q2
2300 Q3=Q3-Q2*A1(T4,T3)
2310 A1(T4,T3)=A1(T4,T3)-Q2
2320 T(T3,3)=Q2*Q1
2330 Z3(T4,T3)=Z3(T4,T3)-T(T3,3)
2340 Q7=Q1*SQR(Q3)
2350 FOR T1=T4 TO N
2360 Z3(T1,T3)=Z3(T1,T3)/Q7
2370 T(T1,3)=A1(T1,T3)/Q3
2380 NEXT T1
2390 FOR T2=T4 TO N
2400 Q2=0
2410 FOR T1=T4 TO N
2420 Q2=Q2+A1(T1,T3)*A1(T1,T2)
2430 NEXT T1
2440 FOR T1=T4 TO N
2450 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)-T(T1,3)*Q2
2460 NEXT T1
2470 NEXT T2
2480 FOR T2=1 TO N
2490 Q2=0
2500 FOR T1=T4 TO N
2510 Q2=Q2+A1(T2,T1)*A1(T1,T3)
2520 NEXT T1
2530 FOR T1=T4 TO N
2540 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)-T(T1,3)*Q2
2550 NEXT T1
2560 NEXT T2
2570 NEXT T3
2580 FOR T3=1 TO T5
2590 A1(T3+1,T3)=T(T3,3)
2600 NEXT T3
2610 T(N-1,3)=A1(N,N-1)

```

```

2620 Q5=0
2630 FOR T3=1 TO N
2640 T(T3,1)=0
2650 IF T3=N THEN 2670
2660 Q5=Q5+T(T3,3)^2
2670 FOR T1=T3 TO N
2680 Z3(T3,T1)=A1(T3,T1)
2690 Q5=Q5+A1(T3,T1)^2
2700 NEXT T1
2710 NEXT T3
2720 Q5=Q6*SQR(Q5)
2730 REM ***** QR ITERATION *****
2740 R2=A1(N,N-1)
2750 IF N<=2 THEN 2800
2760 IF A1(N,N) <> 0 THEN 2800
2770 IF A1(N-1,N) <> 0 THEN 2800
2780 IF A1(N-1,N-1) <> 0 THEN 2800
2790 GO TO 2810
2800 R2=0
2810 T5=N
2820 T8=0
2830 T6=10*N
2840 FOR T1=1 TO N-1
2850 FOR T3=1 TO N
2860 IF A1(T1,T3) <> 0 THEN 2950
2870 NEXT T3
2880 NEXT T1
2890 FOR T1=1 TO N
2900 T(T1,1)=1
2910 U9(T1)=A1(T1,T1)
2920 V9(T1)=0
2930 NEXT T1
2940 RETURN
2950 T3=T5-1
2960 T7=T3
2970 T1=T3
2980 IF T3<0 THEN 2940
2990 IF T3=0 THEN 3780
3000 IF ABS(A1(T5,T3))<=Q5 THEN 3780
3010 IF T5=2 THEN 3840
3020 T1=T1-1
3030 IF ABS(A1(T3,T1))<=Q5 THEN 3060
3040 T3=T1
3050 IF T3>1 THEN 3020
3060 IF T3=T7 THEN 3840
3070 Q1=A1(T5,T5)+A1(T7,T7)+R2
3080 Q2=A1(T5,T5)*A1(T7,T7)-A1(T5,T7)*A1(T7,T5)+0.25*R2*R2
3090 A1(T3+2,T3)=0
3100 Q7=A1(T3,T3)*(A1(T3,T3)-Q1)+A1(T3,T3+1)*A1(T3+1,T3)+Q2
3110 Q8=A1(T3+1,T3)*(A1(T3,T3)+A1(T3+1,T3+1)-Q1)
3120 R1=ABS(Q7)+ABS(Q8)
3130 IF R1<>0 THEN 3160
3140 R2=A1(T5,T5-1)
3150 GO TO 3060

```

```

3160 Q9=A1(T3+2,T3+1)*A1(T3+1,T3)
3170 R2=0
3180 T8=T8+1
3190 FOR T1=T3 TO T7
3200 T0=T1-1
3210 R4=T1+1
3220 R5=T1+2
3230 IF T1=T3 THEN 3290
3240 Q7=A1(T1,T0)
3250 Q8=A1(R4,T0)
3260 Q9=0
3270 IF R5>T5 THEN 3290
3280 Q9=A1(R5,T0)
3290 Q3=ABS(Q7)+ABS(Q8)+ABS(Q9)
3300 IF Q3=0 THEN 3340
3310 Q7=Q7/Q3
3320 Q8=Q8/Q3
3330 Q9=Q9/Q3
3340 Q1=SQR(Q7*Q7+Q8*Q8+Q9*Q9)
3350 IF Q7<0 THEN 3370
3360 Q1=-Q1
3370 IF T1=T3 THEN 3390
3380 A1(T1,T0)=Q1*Q3
3390 IF Q3<>0 THEN 3420
3400 IF T1+3>T5 THEN 3750
3410 GO TO 3710
3420 Q2=1-Q7/Q1
3430 Q1=Q7-Q1
3440 Q7=Q8/Q1
3450 Q8=Q9/Q1
3460 FOR T2=T1 TO T5
3470 Q1=A1(T1,T2)+A1(R4,T2)*Q7
3480 IF R5>T5 THEN 3500
3490 Q1=Q1+A1(R5,T2)*Q8
3500 Q1=Q1*Q2
3510 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)-Q1
3520 A1(R4,T2)=A1(R4,T2)-Q1*Q7
3530 IF R5>T5 THEN 3550
3540 A1(R5,T2)=A1(R5,T2)-Q1*Q8
3550 NEXT T2
3560 T4=R5
3570 IF T1<T7 THEN 3590
3580 T4=T5
3590 FOR T2=T3 TO T4
3600 Q1=A1(T2,T1)+A1(T2,R4)*Q7
3610 IF R5>T5 THEN 3630
3620 Q1=Q1+A1(T2,R5)*Q8
3630 Q1=Q1*Q2
3640 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)-Q1
3650 A1(T2,R4)=A1(T2,R4)-Q1*Q7
3660 IF R5>T5 THEN 3680
3670 A1(T2,R5)=A1(T2,R5)-Q1*Q8
3680 NEXT T2
3690 IF T1+3>T5 THEN 3750

```

```

3700 Q1=-A1(T1+3,R5)*Q8*Q2
3710 T0=T1+3
3720 A1(T0,T1)=Q1
3730 A1(T0,R4)=Q1*Q7
3740 A1(T0,R5)=Q1*Q8+A1(T0,R5)
3750 NEXT T1
3760 IF T8>T6 THEN 4050
3770 GO TO 2950
3780 U9(T5)=A1(T5,T5)
3790 V9(T5)=0
3800 T(T5,1)=1
3810 REM
3820 T5=T3
3830 GO TO 2950
3840 R1=0.5*(A1(T3,T3)+A1(T5,T5))
3850 Q1=0.5*(A1(T5,T5)-A1(T3,T3))
3860 Q1=Q1*Q1+A1(T3,T5)*A1(T5,T3)
3870 T(T3,1)=1
3880 T(T5,1)=1
3890 IF Q1<0 THEN 3960
3900 R3=SQR(Q1)
3910 U9(T3)=R1-R3
3920 U9(T5)=R1+R3
3930 V9(T3)=0
3940 V9(T5)=0
3950 GO TO 4010
3960 R3=SQR(-Q1)
3970 U9(T3)=R1
3980 V9(T3)=R3
3990 U9(T5)=R1
4000 V9(T5)=-R3
4010 REM
4020 REM
4030 T5=T5-2
4040 GO TO 2950
4050 RETURN
4060 REM ***** END OF EIGENVALUES *****
4070 REM *****
4080 A1=A
4090 IF C$="I" THEN 4800
4100 REM ***** MAYOR AUTOVALOR (VALOR ABSOLUTO) *****
4110 DELETE I8,R8,A3,A2,T5,R1,T2,A5,A9
4120 R8=0
4130 FOR I=1 TO N
4140 IF R8=>ABS(U9(I)) THEN 4160
4150 R8=ABS(U9(I))
4160 NEXT I
4170 FOR I=1 TO N
4180 IF R8=>ABS(V9(I)) THEN 4200
4190 R8=ABS(V9(I))
4200 NEXT I
4210 REM ***** CALCULO DEL PERIODO OPTIMO *****
4220 T6=0.1*(1/R8)
4230 T5=T6

```



```

4240 X$="SE HA CALCULADO EL PERIODO DE DISCRETIZACION COMO T="
4250 PRINT USING "P6/10XFAFD,6D":X$;T5
4260 PRINT USING "///25XFAS*": "DESEA CAMBIARLO ? (S/N)GG "
4270 INPUT X$
4280 IF X$="N" OR X$="NO" THEN 4350
4290 IF X$="S" AND X$="SI" THEN 4260
4300 PRINT USING "/20XFAS*": "INTRODUZCA NUEVO PERIODO: T=GG"
4310 INPUT T5
4320 IF T5<T6 THEN 4350
4330 N2=N*INT(T5/T6)*4
4335 IF N=1 THEN 5680
4340 PRINT USING "//19XFAFDFA*": "LA DISCRET. SE DEMORA APROX ";N2;" SEG"
4350 REM ***** CALCULO DE LAS MATRICES DESCRETIZADAS *****
4360 T9=T5
4370 DIM A2(N,N),B1(N,1),A3(N,N),A5(N,N),A9(N,N)
4380 GOSUB 4400
4390 GO TO 4590
4400 I=0
4410 A2=T9*A
4420 A9=0
4430 CALL "IDN",A3
4440 A9=A9+A3
4450 I=I+1
4460 A5=A3 MPY A2
4470 A3=A5/I
4480 IF I>30 THEN 4580
4490 R8=0
4500 FOR I2=1 TO N
4510 FOR J2=1 TO N
4520 IF R8>=ABS(A3(I2,J2)) THEN 4540
4530 R8=ABS(A3(I2,J2))
4540 NEXT J2
4550 NEXT I2
4560 IF R8<1.0E-7 THEN 4580
4570 GO TO 4440
4580 RETURN
4590 A1=A9
4600 REM ----->>>MATRIZ A DISCRETIZADA
4610 X=0
4620 N3=1
4630 IF T5<T6 THEN 4650
4640 N3=INT(T5/T6)
4650 N2=N3*4
4660 B1=0
4670 T7=T5/N2
4680 T8=1+EXP(T7)
4690 T8=T7*T8/2
4700 S0=T8*B
4710 B1=B1+S0
4720 X=X+1
4730 IF X>=N2 THEN 4790
4740 T9=X*T7
4750 GOSUB 4400
4760 S0=A9 MPY B

```

```

4770 S0=T8*S0
4780 GO TO 4710
4790 REM ----->>>VECTOR B DISCRETIZADO
4800 REM *****CONTROLABILIDAD*****
4810 REM
4820 REM -----DIMENCIONAMIENTO DE VARIABLES AUXILIARES-----
4830 REM
4840 DELETE S,P,F1,S1,A2,A3,A4,A5,S2,B4,C4,P2,P3,P5
4850 DIM S(N,N),P(N,N),F1(N,N),S1(N,N),A2(N,N),A3(N,N),A4(N,N),A5(N,N)
4860 DIM S2(N,1),B4(N,1),C4(1,N),P2(1,N),P3(1,N),P5(1,N)
4870 REM -----COMPROBACION DE CONTROLABILIDAD-----
4880 REM -----CALCULO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD-----
4890 K=0
4900 CALL "IDN",A2
4910 FOR J=1 TO N
4920 S2=A2 MPY B1
4930 K=K+1
4940 FOR I=1 TO N
4950 S(I,K)=S2(I,1)
4960 NEXT I
4970 A5=A2 MPY A1
4980 A2=A5
4990 NEXT J
5000 REM -----CALCULO DE S1-----
5010 ON SIZE THEN 5430
5020 S1=INV(S)
5030 IF ABS(DET)<=1.0E-7 THEN 5430
5040 X8=S(1,1)
5050 X7=0
5060 FOR I=1 TO N
5070 FOR J=1 TO N
5080 IF X8=>S(I,J) THEN 5100
5090 X8=S(I,J)
5100 IF X7=>S1(N,N) THEN 5120
5110 X7=S1(I,J)
5120 NEXT J
5130 NEXT I
5140 IF ABS(X8*X7)>10000000 THEN 5510
5150 REM ----- CALCULO DE LA MATRIZ DE CAMBIO -----
5160 K=0
5170 P2=0
5180 P2(1,N)=1
5190 P5=P2 MPY S1
5200 CALL "IDN",A2
5210 FOR I=1 TO N
5220 P3=P5 MPY A2
5230 K=K+1
5240 FOR J=1 TO N
5250 P(K,J)=P3(1,J)
5260 NEXT J
5270 A5=A2 MPY A1
5280 A2=A5
5290 NEXT I
5300 REM -----CALCULO DE F1-----

```

```

5310 P1=INV(P)
5320 REM-----CALCULO DE LAS MATRICES EN VARIABLES DE FASE-----
5330 A3=A1 MPY P1
5340 A4=P MPY A3
5350 REM ----->>>>>A4=MATIZ A EN VARIABLES DE FASE
5360 B4=TRN(P2)
5370 REM ----->>>>>B4=VECTOR B EN VARIABLES DE FASE
5380 C4=C MPY P1
5390 REM ----->>>>>C4=VECTOR C EN VARIABLES DE FASE
5400 V$="LISTO, EJECUTE TECLA 4, 5 o 6GG"
5410 V0=2
5420 GO TO 100
5430 REM
5440 REM ----->>>ERROR: DETERMINANTE DE S =0
5450 OFF SIZE
5460 V$="EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ S ES CERO"
5470 A$=CHR(13)
5480 V$=V$&A$
5490 V$=V$&"          EL SISTEMA NO ES CONTROLABLE !!GG"
5500 GO TO 100
5510 REM ----->>> ERROR: MATRIZ S MAL CONDICIONADA
5520 PRINT USING "P10/15XFAS";"LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD SHL ES MAL "
5530 PRINT "CONDICIONADA"
5540 PRINT USING "/15XFAS";"DESEA CONTINUAR CON LOS CALCULOS ? GGG"
5550 INPUT X$
5560 X$=SEG(X$,1,1)
5570 IF X$="S" THEN 5160
5580 V$="SISTEMA MAL CONDICIONADOG"
5590 GO TO 100
5600 REM CASO: N=1
5610 DIM U9(N),V9(N),A4(N,N),B4(N,N),C4(N,N)
5620 U9(1)=A1(1,1)
5630 V9(1)=0
5640 IF C$="D" THEN 5860
5650 IF A1=0 THEN 6500
5660 R8=A1(1,1)
5670 GO TO 4210
5680 A1(1,1)=EXP(A1(1,1)*T6)
5690 N3=1
5700 IF T5<T6 THEN 5720
5710 N3=INT(T5/T6)
5720 N2=N3*4
5730 R1=0
5740 T7=T5/N2
5750 T8=1+EXP(T7)
5760 T8=T7*T8/2
5770 S0=T8*B(1,1)
5780 B1(1,1)=B1(1,1)+S0
5790 X=X+1
5800 IF X=>N2 THEN 5860
5810 A9=EXP(A(1,1)*X*T7)
5820 LET S0=A9*B(1,1)*T8
5830 GO TO 5780
5860 REM COTROLABILIDAD

```

```

5870 IF B(1,1)=1.0E-12 THEN 5440
5880 DIM F(N,N),S(N,N),F1(N,N),S1(N,N)
5890 F(1,1)=1/B1(1,1)
5900 S(1,1)=B1(1,1)
5903 F1(1,1)=B1(1,1)
5906 S1(1,1)=1/S(1,1)
5910 A4=A1
5920 B4=B1
5930 C4(1,1)=C(1,1)*B1(1,1)
5940 GO TO 5400

```

```

1000 REM                                     @TESIS/REALDISEST
1010 REM ***** REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO *****
1020 REM
1030 O2=3
1040 GO TO 800
1050 IF V0=>2 THEN 1080
1060 V$="CALCULOS INICIALES NO REALIZADOS, EJECUTE TECLA 366"
1070 GO TO 100
1080 PRINT USING 1140:"REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO"
1090 O3=0
1100 O4=0
1110 DELETE F,F4,A2,L1,L2,D,D1,C9
1120 DIM F(1,N),F4(1,N),A2(N),L1(N),L2(N),D(N+1),D1(N+1)
1130 V$=""
1140 IMAGE F5/20XFA/7X59"*"
1150 PRINT USING "/6XFA":V$
1160 PRINT USING "6/20XFAS": "DESEA ANALISIS O DISENO ? (A/D) G"
1170 INPUT X$
1180 IF X$="D" THEN 1480
1190 IF X$="A" THEN 1240
1200 GO TO 1160
1210 REM
1220 REM ----- ANALISIS -----
1230 REM
1240 PRINT USING 1250:"REALIMENTACION DISCRETA DE ESTADO: ANALISIS"
1250 IMAGE F5/20XFA/7X59"*"
1260 PRINT USING "6/20XFA": "INGRESE VECTOR DE REALIMENTACION F"
1270 FOR J=1 TO N
1280 PRINT USING "/20XFADFAS": "F(";J;")=G"
1290 INPUT F(1,J)
1300 NEXT J
1310 F4=F MPY F1
1320 D=1
1330 FOR J=1 TO N
1340 D(J)=-A4(N,J)+F4(1,J)
1350 NEXT J
1360 FOR I=1 TO N+1
1370 D1(N+2-I)=D(I)
1380 NEXT I
1390 REM *****
1400 REM ***** OBTENCION DE LOS POLOS DE LAZO CERRADO *****
1410 GOSUB 2940
1420 L1=R1
1430 L2=I1
1440 REM *****
1450 REM ***** CALCULO DEL ERROR EN ESTADO ESTABLE *****
1460 GOSUB 2630
1470 GO TO 2530
1480 REM ----- DISENO -----
1490 REM
1500 PRINT USING "//15XFA": "DESEA INGRESAR POLOS O"
1510 PRINT USING "15X FA": "COEFICIENTES DE LA ECUACION DE DIFERENCIAS"
1520 PRINT USING "15XFAS": "DEL SISTEMA DE LAZO CERRADO ?(P/C) G"
1530 INPUT X$

```

```

1540 IF X$="C" THEN 2100
1550 IF X$="P" THEN 1570
1560 GO TO 1500
1570 REM ----- INGRESOS DE LOS POLOS DEL SISTEMA -----
1580 PRINT USING "P5/20XFA": "INGRESO DE LOS POLOS DEL SISTEMA"
1590 FOR I=1 TO N
1600 PRINT USING "/20XFAIFA18XFAS": "LAMDA(";I;")=G"; "(Parte Real) "
1610 GOSUB 2570
1620 INPUT L1(I)
1630 PRINT USING "20XFAIFA18XFAS": "LAMDA(";I;")=G"; "(Parte Imaginaria)"
1640 GOSUB 2570
1650 INPUT L2(I)
1660 NEXT I
1670 REM
1680 REM ----- CALCULO DE LOS COEFICIENTES -----
1690 REM CALCULO DE LOS a*
1700 DELETE C9
1710 C9=1.0E-8
1720 L1=-L1
1730 IF ABS(L2(1))<C9 THEN 1790
1740 D(3)=1
1750 D(2)=2*L1(1)
1760 D(1)=L1(1)*L1(1)+L2(1)*L2(1)
1770 J9=2
1780 GO TO 1820
1790 D(2)=1
1800 D(1)=L1(1)
1810 J9=1
1820 I=J9
1830 IF I=N THEN 2050
1840 I=I+1
1850 IF ABS(L2(I))<C9 THEN 1980
1860 M9=2*L1(I)
1870 N9=L1(I)*L1(I)+L2(I)*L2(I)
1880 I=I+1
1890 D(I+1)=1
1900 D(I)=D(I-2)+M9
1910 IF I=3 THEN 1950
1920 FOR J=I-1 TO 3 STEP -1
1930 D(J)=D(J-2)+M9*D(J-1)+N9*D(J)
1940 NEXT J
1950 D(2)=M9*D(1)+N9*D(2)
1960 D(1)=N9*D(1)
1970 GO TO 2030
1980 D(I+1)=1
1990 FOR J=I TO 2 STEP -1
2000 D(J)=D(J-1)+L1(I)*D(J)
2010 NEXT J
2020 D(1)=D(1)*L1(I)
2030 IF I<N THEN 1840
2040 L1=-L1
2050 FOR I=1 TO N+1
2060 D1(N+2-I)=D(I)
2070 NEXT I

```

```

2080 GO TO 2350
2090 REM
2100 REM ----- INGRESO DE COEFICIENTES -----
2110 REM
2120 PRINT USING "P 5/20XFA": "INGRESE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA"
2130 FOR I=0 TO N
2140 PRINT USING "/20XFADFAS": "COFICIENTE DE  $\psi(k+"; I; ")=G$ "
2150 INPUT D(I+1)
2160 NEXT I
2170 IF D(I-1)=1 THEN 2340
2180 IF D(N+1)=0 THEN 2230
2190 FOR I=1 TO N
2200 D1(I)=D(I)/D(N+1)
2210 NEXT I
2220 GO TO 2270
2230 PRINT "J          COEFICIENTE DE  $\psi(k+"; N+1; ")$  NO PUEDE SER CERO"
2240 PRINT "J          INGRESE NUEVAMENTEGGGGG ";
2250 INPUT D(N+1)
2260 GO TO 2170
2270 FOR I9=1 TO N+1
2280 D1(N+2-I9)=D(I9)
2290 NEXT I9
2300 REM ***** CALCULO DE LOS POLOS DE LAZO CERRADO *****
2310 GOSUB 2940
2320 L1=R1
2330 L2=I1
2340 REM *****
2350 REM ----- CALCULO DE F de fase -----
2360 FOR I=1 TO N
2370 F4(1,I)=D(I)+A4(N,I)
2380 NEXT I
2390 REM ----- CALCULO DE F en el espacio de estado inicial -----
2400 F=F4 MPY P
2410 REM ***** DISEÑO LISTO *****
2420 REM ---->> L1 VECTOR DE LA PARTES REALES DE LOS POLOS DEL SISTEMA
2430 REM ---->> L2 VECTOR DE LA PARTES IMAGINARIAS DE LOS POLOS DEL SIST
2440 REM ---->> F4 VECTOR DE REALIMENTACION en variables defase
2450 REM ---->> F  VECTOR DE REALIMENTACION
2460 REM ---->> D  VECTOR DE COEFICIENTES DE LA ECUACION DE DIFERENCIAS
2470 REM
2480 O3=1
2490 PRINT USING "/20XFAS": "DESEA ANALISIS ?G "
2500 INPUT X$
2510 IF X$="N" OR X$="NO." THEN 2530
2520 GOSUB 2630
2530 REM ***** LISTO PROGRAMA REALDISEST *****
2540 V$="LISTO, EJECUTE TECLA 6 PARA SALIDA DE DATOSGG"
2550 V0=3
2560 GO TO 100
2570 REM *****
2580 REM ***** SUB: RETROCESO DE 36 ESPACIOS *****
2590 FOR I9=1 TO 36
2600 PRINT "H";
2610 NEXT I9

```

```

2620 RETURN
2630 REM *****
2640 REM ***** SUB: ERROR EN ESTADO ESTABLE *****
2650 DELETE K,X0,X1,Y,Y1,A2,A5,C9,E
2660 C9=1.0E-5
2670 K=0
2680 DIM A2(N,N),A5(N,N),X0(N,1),X1(N,1),Y(1,1),Y1(1,1)
2690 X0=1
2700 A2=B1 MPY F
2710 A5=A1-A2
2720 Y=C MPY X0
2730 C8=Y(1,1)*1000
2740 X1=A5 MPY X0
2750 Y1=C MPY X1
2760 IF Y1(1,1)>C8 THEN 2850
2770 E=ABS(Y1(1,1)-Y(1,1))
2780 IF K>N AND E<=C9 THEN 2850
2790 IF K>7000 THEN 2910
2800 K=K+1
2810 X0=X1
2820 Y=Y1
2830 REM ***** GRAFIZAR SI NECESARIO *****
2840 GO TO 2740
2850 D4=1
2860 K5=K-1
2870 E=Y(1,1)
2880 IF Y1(1,1)<C8 THEN 2900
2890 K5=-1
2900 RETURN
2910 K5=-2
2920 E=Y(1,1)
2930 RETURN.
2940 REM RAIZPOLI2
2950 REM
2960 REM SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
2970 REM METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
2980 REM 31 DE MAYO DE 1980
2990 REM ING. EFRAIN DEL PINO V.
3000 REM
3010 REM N - GRADO DEL POLINOMIO
3020 REM D1 - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
3030 REM DE POTENCIAS
3040 REM
3050 REM R1 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
3060 REM I1 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
3070 REM
3080 REM N, D1 NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA.
3090 REM
3100 NO=N
3110 DELETE A9,C9,R1,I1,U,V,U1,V1,T,X0,X1,Y,Y1
3120 DIM A9(NO),C9(NO),R1(NO),I1(NO)
3130 J9=0
3140 E=1.0E-10
3150 E1=E^2

```



```

3160 R1=0
3170 I1=0
3180 FOR J=1 TO NO
3190 A9(J)=D1(J+1)/D1(1)
3200 NEXT J
3210 IF NO>0 THEN 3230
3220 RETURN
3230 IF A9(NO)<>0 THEN 3270
3240 J9=J9+1
3250 NO=NO-1
3260 GO TO 3210
3270 IF NO<>1 THEN 3310
3280 J9=J9+1
3290 R1(J9)=-A9(NO)
3300 RETURN
3310 IF NO<>2 THEN 3630
3320 X=-A9(1)/2
3330 J9=J9+1
3340 T=X*X-A9(2)
3350 IF T<0 THEN 3400
3360 T=SQR(T)
3370 R1(J9)=X+T
3380 R1(J9+1)=X-T
3390 RETURN
3400 R1(J9)=X
3410 R1(J9+1)=R1(J9)
3420 I1(J9)=SQR(-T)
3430 I1(J9+1)=-I1(J9)
3440 RETURN
3450 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U + JV
3460 U=1
3470 V=0
3480 FOR J=1 TO NO
3490 T=U*X-V*Y+C9(J)
3500 V=V*X+U*Y
3510 U=T
3520 NEXT J
3530 RETURN
3540 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U1 + JV1
3550 U1=NO
3560 V1=0
3570 FOR J=1 TO NO-1
3580 T=U1*X-V1*Y+(NO-J)*C9(J)
3590 V1=V1*X+U1*Y
3600 U1=T
3610 NEXT J
3620 RETURN
3630 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
3640 T=ABS(A9(NO))
3650 DIM A9(NO),C9(NO)
3660 IF T=1 THEN 3740
3670 H=T^(1/NO)
3680 T=1
3690 FOR J=1 TO NO

```

```

3700 T=T*H.
3710 C9(J)=A9(J)/T
3720 NEXT J
3730 GO TO 3760
3740 C9=A9
3750 H=1
3760 X=0.7
3770 Y=0.6
3780 GOSUB 3450
3790 F1=U*U+V*V
3800 IF F1<E1 THEN 4000
3810 GOSUB 3540
3820 T=U1*U1+V1*V1
3830 X1=-(U*U1+V*V1)/T
3840 Y1=(U*V1-V*U1)/T
3850 X=X+X1
3860 Y=Y+Y1
3870 GOSUB 3450
3880 F2=U*U+V*V
3890 IF F2<E1 THEN 3980
3900 IF F2<F1 THEN 3960
3910 X=X-X1
3920 Y=Y-Y1
3930 X1=0.8*X1
3940 Y1=0.8*Y1
3950 GO TO 3850
3960 F1=F2
3970 GO TO 3810
3980 IF ABS(X1)<E AND ABS(Y1)<E THEN 4000
3990 GO TO 3960
4000 X=X*H
4010 Y=Y*H
4020 IF ABS(Y)>E THEN 4040
4030 Y=0
4040 J9=J9+1
4050 R1(J9)=X
4060 I1(J9)=Y
4070 IF Y=0 THEN 4210
4080 J9=J9+1
4090 R1(J9)=X
4100 I1(J9)=-Y
4110 R=-2*X
4120 S9=X*X+Y*Y
4130 A9(1)=A9(1)-R
4140 A9(2)=A9(2)-R*A9(1)-S9
4150 IF N0<5 THEN 4190
4160 FOR J=3 TO N0-2
4170 A9(J)=A9(J)-R*A9(J-1)-S9*A9(J-2)
4180 NEXT J
4190 N0=N0-2
4200 GO TO 3270
4210 T=1
4220 FOR J=1 TO N0-1
4230 T=T*X+A9(J)

```

4240 A9(J)=T
4250 NEXT J
4260 NO=NO-1
4270 GO TO 3270

```

000 REM @TESIS/REALOPTEST
010 REM ***** REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO *****
020 REM
030 D2=4
040 GO TO 800
050 IF V0=32 THEN 1080
060 V$="CALCULOS INICIALES NO REALIZADOS, EJECUTE TECLA 306"
070 GO TO 100
080 GOSUB 4770
090 DELETE H,Q,R,R9,I,G,X,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8,X9,X0,H1,H9
100 DIM H(N,N),Q(N,N),I(N,N),H1(N,N),H9(N,N)
110 CALL "IDN",I
120 H=I
130 Q=I
140 R=1
150 D6=0
160 DELETE I
170 GOSUB 1690
180 PRINT USING "/6XFAS": "DESEA CAMBIAR ESTOS VALORES ? (S/N)GG "
190 INPUT Z$
200 IF Z$<>"S" AND Z$<>"SI" THEN 1230
210 GOSUB 2560
220 GO TO 1170
230 PRINT USING "6XFAS": "INGRESE M (MáH'ximo # de muestreos)GG "
240 INPUT M
250 IF M>0 THEN 1280
260 PRINT "JJ M debe ser positivoGG"
270 GO TO 1230
280 H9=H
290 GOSUB 2030
300 FOR I9=1 TO 72
310 PRINT "=";
320 NEXT I9
330 PRINT USING "/30XFAS": "RETURN para continuar"
340 INPUT X$
350 D5=1
360 PRINT USING "6XFAS": "DESEA ANALISIS ? (S/N) "
370 INPUT X$
380 IF X$<>"S" AND X$<>"SI" THEN 1610
390 REM *****
400 REM ***** ANALISIS *****
410 D6=1
420 PRINT USING 1430: "REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO ; ANALISIS"
430 IMAGE F5/20XFA/7X59 "*"
440 DELETE D2,D3,L3,L4,E0,K6,Q0,Q1,F5,J1
450 DIM Q0(N,1),Q1(1,N),F5(1,N),D2(N+1),D3(N+1),L3(N),L4(N),J1(1,1)
460 PRINT USING "3/6XFAS": "Este AnáH'lysis calcula el costo J miH'nimo"
470 PRINT " total"
480 PRI USI "/6XFAS": "para lo que se requiere el vector de estados "
490 PRINT " inicial Xo"
500 FOR I=1 TO N
510 PRINT USING "//10XFADFAS": "INGRESE Xo( ;I; )=GG"
520 INPUT Q0(I,1)
530 NEXT I

```

```

1540 GOSUB 4210
1550 GOSUB 2870
1560 GOSUB 4680
1570 GOSUB 4370
1580 L3=R1
1590 L4=I1
1600 GO TO 1650
1610 PRINT USING "//6XFAS": "DESEA PROBAR NUEVAMENTE ? (S/N) GG"
1620 INPUT X$
1630 IF X$="N" OR X$="NO" THEN 1650
1640 GO TO 1170
1650 REM ***** LISTO PROGRAMA: REALOPTEST *****
1660 V0=4
1670 V$="LISTO, EJECUTE TECLA 6 para Salida de DatosGG"
1680 GO TO 100
1690 REM *****
1700 REM ***** SUB: PRESENTACION EN PANTALLA DE H, Q y R *****
1710 PRINT USING 1720: "REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO"
1720 IMAGE P//22XFA/8X59"*"
1730 PRINT USING 1740: "MATRICES DE PONDERACION"
1740 IMAGE 2/25XFA/25X23"="
1750 PRINT @32,18:4
1760 PRINT USING "//6XFA": "CRITERIO DE DESEMPE\O"
1770 PRINT @32,18:0
1780 X$="J = 1/2xHL_t(M)HHL_xHL(M) + 1/2 SUM(xHL_t(k)QH_xHL(k) + ut(k)rut("
1790 X$=X$&"k)3"
1800 PRINT USING "/34XFA": "M-1"
1810 PRINT USING "10XFA": X$
1820 PRINT USING "34XFA": "k=0"
1830 X$="MATRIZ DE PONDERACION HHL"
1840 H1=H
1850 GOSUB 1910
1860 X$="MATRIZ DE PONDERACION QH"
1870 H1=Q
1880 GOSUB 1910
1890 PRINT USING "//6XFAFD.FD": "COEFICIENTE DE PONDERACION r=";R
1900 RETURN
1910 REM *****
1920 REM ***** SUB: IMPRESION DE MATRICES *****
1930 PRINT USING "//6XFA/": X$
1940 FOR I9=1 TO N
1950 PRINT USING "10X4D.5DS": H1(I9,1)
1960 IF N=1 THEN 2000
1970 FOR J=2 TO N
1980 PRINT USING "3X4D.5DS": H1(I9,J)
1990 NEXT J
2000 PRINT
2010 NEXT I9
2020 RETURN
2030 REM *****
2040 REM ***** SUB CALCULO DE LOS Fi *****
2050 DELETE X0,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,P6,G,F6,F7
2060 DIM G(M,N),P6(N,N),X4(N,N),X6(N,N),X7(N,N),X0(N,1),X1(1,N)
2070 DIM X5(1,N),X2(1,1),F6(1,N),F7(1,N)

```

```

2080 X1=TRN(B4)
2090 P6=H
2100 IF P9=51 THEN 2140
2110 PRINT USING 2120;"Paso : k";"Matriz de RealimentacioH'n FH_(k)"
2120 IMAGE F3/6X60"--"/6X"1"XFA3X"1"6XFA9X"1"/6X60"--"
2130 GO TO 2150
2140 GOSUB 4920
2150 FOR K1=1 TO M
2160 REM =====>> CALCULO DE Fk
2170 X0=P6 MPY B4
2180 X2=X1 MPY X0
2190 X3=1/(R+X2(1,1))
2200 X4=P6 MPY A4
2210 X5=X1 MPY X4
2220 X5=X3*X5
2230 FOR J=1 TO N
2240 G(K1,J)=X5(1,J)
2250 NEXT J
2260 REM =====>> PRESENTAR G
2270 FOR J=1 TO N
2280 F6(1,J)=G(K1,J)
2290 NEXT J
2300 F7=F6 MPY P1
2310 FOR J=1 TO N
2320 G(K1,J)=F7(1,J)
2330 NEXT J
2340 IF P9=51 THEN 2410
2350 PRINT USING "6XA6X4D3XAS";"1";"M-K1";"1"
2360 FOR J=1 TO N
2370 PRINT USING "2X4D,6DS";G(K1,J)
2380 NEXT J
2390 PRINT
2400 GO TO 2430
2410 PRINT @P9;"      MATRIZ DE RICCATI, PHP("M-K1+1;")",P6
2420 PRINT @P9;"      VECTOR DE REALIMENTACION fhf("M-K1;")",F7
2430 REM =====>> CALCULO DE Fk
2440 X6=TRN(A4)
2450 X7=X6 MPY X4
2460 F6=X1 MPY X4
2470 X0=TRN(F6)
2480 X6=X0 MPY X5
2490 X7=X7-X6
2500 P6=X7+Q
2510 NEXT K1
2520 IF P9<51 THEN 2540
2530 PRINT @P9;"      MATRIZ DE RICCATI, PHP(0)",P6
2540 DELETE X0,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,F6,F7
2550 RETURN
2560 REM *****
2570 REM ***** SUB: CAMBIO DE H, Q, o R *****
2580 PRINT USING "6XFAS";"CUAL MATRIZ ? (H, Q o r)GG "
2590 INPUT X#
2600 IF X#="R" THEN 2690
2610 IF X#<"H" AND X#<"Q" THEN 2580

```

```

2620 PRINT USING "P5/20XFAPA/": "INGRESO DE LA MATRIZ DE PONDERACION ";X$
2630 GOSUB 2760
2640 IF X$="Q" THEN 2670
2650 H=H1
2660 GO TO 2680
2670 Q=H1
2680 RETURN
2690 PRINT USING "P6/6XFAS": "INGRESE NUEVO VALOR DE rGG "
2700 INPUT R
2710 IF R>0 THEN 2680
2720 PRINT USING "//6XFA": "EL VALOR DE r DEBE SER POSITIVO"
2730 PRINT USING "6XFAS": "INGRESE NUEVAMENTE: r=GGGG"
2740 INPUT R
2750 GO TO 2710
2760 REM *****
2770 REM ***** SUB. INGRESO DE UNA MATRIZ DE PONDERACION *****
2780 H1=0
2790 FOR I9=1 TO N
2800 PRINT USING "/6XFADADFAS": "INGRESE EL ELEMENTO (";I9;"", ";I9;"")=GG"
2810 INPUT H1(I9,I9)
2820 IF H1(I9,I9)=>0 THEN 2850
2830 PRINT USING "6XFA": "NO PUEDE SER NEGATIVO, INGRESE NUEVAMENTEGG"
2840 GO TO 2800
2850 NEXT I9
2860 RETURN
2870 REM          RAIZPOLI2
2880 REM
2890 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
2900 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
2910 REM          31 DE MAYO DE 1980
2920 REM          ING. EFRAIN DEL PINO V.
2930 REM
2940 REM          N - GRADO DEL POLINOMIO
2950 REM          D2 - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
2960 REM          DE POTENCIAS
2970 REM
2980 REM          R1 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
2990 REM          I1 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
3000 REM
3010 REM          N, D2 NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
3020 REM
3030 NO=N
3040 DELETE A9,C9,R1,I1,U,V,U1,V1,T,X0,X1,Y,Y1
3050 DIM A9(NO),C9(NO),R1(NO),I1(NO)
3060 J9=0
3070 E=1.0E-10
3080 E1=E^2
3090 R1=0
3100 I1=0
3110 FOR J=1 TO NO
3120 A9(J)=D2(J+1)/D2(1)
3130 NEXT J
3140 IF NO>0 THEN 3160
3150 RETURN

```

```

3160 IF A9(N0) <> 0 THEN 3200
3170 J9=J9+1
3180 N0=N0-1
3190 GO TO 3140
3200 IF N0 <> 1 THEN 3240
3210 J9=J9+1
3220 R1(J9)=-A9(N0)
3230 RETURN
3240 IF N0 <> 2 THEN 3560
3250 X=-A9(1)/2
3260 J9=J9+1
3270 T=X*X-A9(2)
3280 IF T <= 0 THEN 3330
3290 T=SQR(T)
3300 R1(J9)=X+T
3310 R1(J9+1)=X-T
3320 RETURN
3330 R1(J9)=X
3340 R1(J9+1)=R1(J9)
3350 I1(J9)=SQR(-T)
3360 I1(J9+1)=-I1(J9)
3370 RETURN
3380 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U + JV
3390 U=1
3400 V=0
3410 FOR J=1 TO N0
3420 T=U*X-V*Y+C9(J)
3430 V=V*X+U*Y
3440 U=T
3450 NEXT J
3460 RETURN
3470 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U1 + JV1
3480 U1=N0
3490 V1=0
3500 FOR J=1 TO N0-1
3510 T=U1*X-V1*Y+(N0-J)*C9(J)
3520 V1=V1*X+U1*Y
3530 U1=T
3540 NEXT J
3550 RETURN
3560 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
3570 T=ABS(A9(N0))
3580 DIM A9(N0),C9(N0)
3590 IF T=1 THEN 3670
3600 H8=T^(1/N0)
3610 T=1
3620 FOR J=1 TO N0
3630 T=T*H8
3640 C9(J)=A9(J)/T
3650 NEXT J
3660 GO TO 3690
3670 C9=A9
3680 H=1
3690 X=0.7

```



```

3700 Y=0,6
3710 GOSUB 3380
3720 F1=U*U+V*V
3730 IF F1<E1 THEN 3930
3740 GOSUB 3470
3750 T=U1*U1+V1*V1
3760 X1=-(U*U1+V*V1)/T
3770 Y1=(U*V1-V*U1)/T
3780 X=X+X1
3790 Y=Y+Y1
3800 GOSUB 3380
3810 F2=U*U+V*V
3820 IF F2<E1 THEN 3910
3830 IF F2<F1 THEN 3890
3840 X=X-X1
3850 Y=Y-Y1
3860 X1=0,8*X1
3870 Y1=0,8*Y1
3880 GO TO 3780
3890 F1=F2
3900 GO TO 3740
3910 IF ABS(X1)<E AND ABS(Y1)<E THEN 3930
3920 GO TO 3890
3930 X=X*H8
3940 Y=Y*H8
3950 IF ABS(Y)>E THEN 3970
3960 Y=0
3970 J9=J9+1
3980 R1(J9)=X
3990 I1(J9)=Y
4000 IF Y=0 THEN 4140
4010 J9=J9+1
4020 R1(J9)=X
4030 I1(J9)=-Y
4040 R=-2*X
4050 S9=X*X+Y*Y
4060 A9(1)=A9(1)-R
4070 A9(2)=A9(2)-R*A9(1)-S9
4080 IF N0<5 THEN 4120
4090 FOR J=3 TO N0-2
4100 A9(J)=A9(J)-R*A9(J-1)-S9*A9(J-2)
4110 NEXT J
4120 N0=N0-2
4130 GO TO 3200
4140 T=1
4150 FOR J=1 TO N0-1
4160 T=T*X+A9(J)
4170 A9(J)=T
4180 NEXT J
4190 N0=N0-1
4200 GO TO 3200
4210 REM *****
4220 REM ***** SUB CALCULO DE COEFICIENTES *****
4230 FOR J=1 TO N

```

```

4240 F5(1,J)=G(M,J)
4250 NEXT J
4260 D3=1
4270 DELETE F6
4280 DIM F6(1,N)
4290 F6=F5 MPY P1
4300 FOR J=1 TO N
4310 D3(J)=-A4(N,J)+F6(1,J)
4320 NEXT J
4330 FOR I=1 TO N+1
4340 D2(N+2-I)=D3(I)
4350 NEXT I
4360 RETURN
4370 REM *****
4380 REM ***** SUB: ERROR EN ESTADO ESTABLE *****
4390 DELETE K,X0,X1,Y,Y1,A2,A5,C9,E
4400 C9=1.0E-5
4410 K=0
4420 DIM A2(N,N),A5(N,N),X0(N,1),X1(N,1),Y(1,1),Y1(1,1)
4430 X0=1
4440 A2=B1 MPY F6
4450 A5=A1-A2
4460 Y=C MPY X0
4470 C8=Y(1,1)*10
4480 X1=A5 MPY X0
4490 Y1=C MPY X1
4500 IF Y1(1,1)>C8 THEN 4590
4510 E=ABS(Y1(1,1)-Y(1,1))
4520 IF K>N AND E<=C9 THEN 4590
4530 IF K>7000 THEN 4650
4540 K=K+1
4550 X0=X1
4560 Y=Y1
4570 REM ***** GRAFIZAR SI NECESARIO *****
4580 GO TO 4480
4590 O4=1
4600 K6=K-1
4610 E0=Y(1,1)
4620 IF Y1(1,1)<C8 THEN 4640
4630 K6=-1
4640 RETURN
4650 K6=-2
4660 E0=Y(1,1)
4670 RETURN
4680 REM *****
4690 REM ***** SUB. CALCULO DEL COSTO TOTAL *****
4700 DELETE X2
4710 DIM X2(N,1)
4720 X2=F6 MPY Q0
4730 Q1=TRN(Q0)
4740 J1=Q1 MPY X2
4750 DELETE X2,Q1
4760 RETURN
4770 REM *****

```

```

4780 REM ***** SUB. INICIO *****
4790 PRINT USING 1720:"REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO"
4800 X$="NOTA: Si se desean los valores de la matriz de ganancias de"
4810 PRINT USING "3/6XFA":X$
4820 X$="Riccati F(i), se debe pedir impresioH'n en papel, pues"
4830 PRINT USING "12XFA":X$
4840 X$="estos valores no se almacenan en memoria."
4850 PRINT USING "12XFA":X$
4860 PRINT USING "4/10XFAS": "DESEA IMPRESION EN PAPEL ? (S/N) GG"
4870 P9=51
4880 INPUT X$
4890 IF X$="S" OR X$="SI" THEN 4910
4900 P9=32
4910 RETURN
4920 REM *****
4930 REM ***** SUBROUTINA: ENCABEZONAMIENTO *****
4940 REM ----->> FUNCION 1
4950 B$=""
4960 IF T$="" THEN 4980
4970 B$="Archivo : "&T$
4980 REM ----->> FUNCION 2
4990 A$="REALIMENTACION OPTIMA DE ESTADO: DISENNO"
5000 PRI USI "P/FA30XFAS": "Aliste el impresor"; "RETURN para continuarGG"
5010 INPUT X$
5020 REM ----->> FUNCION 3
5030 PRINT @P9: USING "F3/6XFAS": "ESCUELA POLITECNICA NACIONAL"
5040 CALL "TIME",Z$
5050 Z$=SEG(Z$,1,9)
5060 PRINT @P9: USING "21XFAPA": "Fecha : ";Z$
5070 PRINT @P9: USING "/6XFA": "FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
5080 PRINT @P9: USING "/6XFA": "SISTEMAS DE CONTROL"
5090 PRINT @P9: USING "/6X45AS": A$
5100 IF B$="" THEN 5130
5110 PRINT @P9: USING "2XFA": B$
5120 GO TO 5140
5130 PRINT @P9: ""
5140 PRINT @P9: USING 5150:
5150 IMAGE 6X66"--"
5160 RETURN

```

```

000 REM @TESIS/SALIDA
010 REM ***** SALIDA DE DATOS *****
020 REM
030 O2=5
040 GO TO 800
050 IF V0>0 THEN 1080
060 V$="NO EXISTEN DATOS, EJECUTE TECLA 1GG"
070 GO TO 100
080 W$=""
090 DELETE A5,B5,C5,R1,I1,D4,E1,K7
100 DIM A5(N,N),B5(N,1),C5(1,N),R1(N),I1(N),D4(N+1)
110 IF V0<3 THEN 1120
120 PRINT USING 1130:"SALIDA DE DATOS";W$
130 IMAGE P5/28XFA/6X59"*//6XFA
140 IF V0=1 THEN 1290
150 PRINT USING "3/6XFA/15XFA": "OPCIONES:"; "ImpresioH'n de:"
160 PRINT USING "//15XFA": "1.- Datos Generales del Sistema"
170 PRINT USING "/15XFA": "2.- Resultados de los CaH'culos Iniciales"
180 IF V0=2 THEN 1220
190 PRINT USING "/15XFA": "3.- RealimentacioH'n Discreta de Estado"
200 IF V0=3 THEN 1220
210 PRINT USING "/15XFA": "4.- RealimentacioH'n Optima de Estado"
220 PRINT USING "/15XFA": "5.- FIN DE PROGRAMA"
230 PRINT USING "//30XFAS": "ESCOJA OPCION GG"
240 INPUT K
250 GO TO K OF 1270,1500,1690,1830,4210
260 GO TO 1120
270 REM *****
280 REM ***** SALIDA: DATOS GENERALES DEL SISTEMA *****
290 Z1=0
300 A$="DATOS GENERALES DEL SISTEMA"
310 GOSUB 3890
320 A5=A
330 B5=B
340 C5=C
350 GOSUB 3490
360 IF V0<2 THEN 1410
370 R1=U9
380 I1=V9
390 PRINT @P9: USING "/6XFA/": "Polos de Lazo Abierto"
400 GOSUB 2720
410 GOSUB 3360
420 IF V0=1 THEN 1460
430 W$="Realizada OpcioH'n 1GG"
440 Z1=1
450 GO TO 1120
460 V$="SALIDA: Datos Generales del SistemaGG"
470 GO TO 100
480 REM *****
490 REM ***** SALIDA: RESULTADOS CALINI *****
500 A$="RESULTADOS DE LOS CALCULOS INICIALES"
510 Z1=2
520 GOSUB 3890
530 IF C$="D" THEN 1600

```

```

1540 PRINT @P9; USING "3/6XFA": "MATRICES DISCRETIZADAS"
1550 A5=A1
1560 B5=B1
1570 C5=C
1580 GOSUB 3670
1590 PRINT @P9; USING "/6XFAFD.4D": "PERIODO DE DISCRETIZACION: T="; T5
1600 GOSUB 2950
1610 GOSUB 3360
1620 IF V0=2 AND Z1=1 THEN 1650
1630 W$="Realizada Opcion n 2GG"
1640 GO TO 1120
1650 V$="SALIDA: Datos Generales del Sistema y Resultados InicialesGG"
1660 GO TO 100
1670 REM *****
1680 REM ***** SALIDA: REALDISEST *****
1690 IF V0=3 THEN 1720
1700 W$="No se realizaron calculos de R. Disc. de EstadoGG"
1710 GO TO 1120
1720 A$="REALIMENT. DISC. DE ESTADO"
1730 IF O3=1 THEN 1760
1740 A$=A$&" : ANALISIS"
1750 GO TO 1770
1760 A$=A$&" : DISENNO"
1770 GOSUB 3890
1780 GOSUB 2150
1790 GOSUB 3360
1800 W$="Realizada Opcion n 3GG"
1810 Z1=3
1820 GO TO 1120
1830 REM *****
1840 REM ***** SALIDA: REALOPTEST *****
1850 IF V0=4 THEN 1870
1860 GO TO 1080
1870 A$="REAL. OPT. DE ESTADO: DISENNO"
1880 IF O6<>1 THEN 1900
1890 A$=A$&" y ANALISIS"
1900 GOSUB 3890
1910 GOSUB 1960
1920 GOSUB 3360
1930 W$="Realizada Opcion n 4GG"
1940 Z1=4
1950 GO TO 1120
1960 REM *****
1970 REM ***** SUB: SALIDA REALOPTEST *****
1980 PRINT @P9; USING "//6XFA/6XFA": "DATOS"; "====="
1990 GOSUB 4230
2000 PRINT @P9; USING "/6XFAFD": "NUMERO MAXIMO DE MUESTREOS: M="; M
2010 PRINT @P9; USING "/6XFA/6XFA": "RESULTADOS"; "====="
2020 GOSUB 4530
2030 IF O6=1 THEN 2050
2040 RETURN
2050 D4=D3
2060 GOSUB 2610
2070 R1=L3

```

```

2080 I1=L4
2090 GOSUB 2690
2100 E1=E0
2110 K7=K4
2120 GOSUB 2830
2130 GOSUB 4660
2140 RETURN
2150 REM *****
2160 REM ***** SUB: SALIDA REALDISEST *****
2170 IF O3=1 THEN 2310
2180 PRINT @P9: USING "//6XFA/6XFA": "DATOS"; "====="
2190 GOSUB 2450
2200 PRINT @P9: USING "//6XFA/6XFA": "RESULTADOS"; "====="
2210 GOSUB 2530
2220 D4=D
2230 GOSUB 2610
2240 R1=L1
2250 I1=L2
2260 GOSUB 2690
2270 K7=K5
2280 E1=E
2290 GOSUB 2830
2300 RETURN
2310 PRINT @P9: USING "//6XFA/6XFA": "DATOS"; "====="
2320 D4=D
2330 GOSUB 2610
2340 R1=L1
2350 I1=L2
2360 GOSUB 2690
2370 PRINT @P9: USING "//6XFA/6XFA": "RESULTADOS"; "====="
2380 GOSUB 2450
2390 GOSUB 2530
2400 IF O4<>1 THEN 2440
2410 K7=K5
2420 E1=E
2430 GOSUB 2830
2440 RETURN
2450 REM *****
2460 REM ***** SUB: IMPRESION DE F *****
2470 PRINT @P9: USING "/6XFA/5XS": "MATRIZ DE REALIMENTACION FHF"
2480 FOR J=1 TO N
2490 PRINT @P9: USING "X6D.5DS": F(1,J)
2500 NEXT J
2510 PRINT @P9:
2520 RETURN
2530 REM *****
2540 REM ***** SUB: IMPRESION DE F4 *****
2550 PRINT @P9: USING "/6XFA/5XS": "MATRIZ DE REALIMENTACION Ffase"
2560 FOR J=1 TO N
2570 PRINT @P9: USING "X6D.5DS": F4(1,J)
2580 NEXT J
2590 PRINT @P9:
2600 RETURN
2610 REM *****

```

```

2620 REM ***** SUB: IMPRESION EC. DE DIFERENCIAS *****
2630 X$="Coeficientes del polinomio caracteristico"
2640 PRINT @P9: USING "/6XFA/":X$
2650 FOR I=1 TO N
2660 PRINT @P9: USING "6XFADF2AFD.6D": "COEF. DE Z^";I-1;"=" ";D4(I)
2670 NEXT I
2680 RETURN
2690 REM *****
2700 REM ***** SUB: IMPRESION DE POLOS *****
2710 PRINT @P9: USING "/6XFA/": "Polos de Lazo Cerrado"
2720 I=1
2730 IF I1(I) <> 0 THEN 2780
2740 PRINT @P9: USING "6XFADFADF.6D": "RAIZ<";I;">=" ;R1(I)
2750 I=I+1
2760 IF I <= N THEN 2730
2770 RETURN
2780 PRINT @P9: USING 2790: I; ", "; I+1; ">=" ;R1(I); " +H_ J"; ABS(I1(I))
2790 IMAGE 6X"RAICES<"DAD2AFD.6DFADF.6D
2800 I=I+2
2810 IF I <= N THEN 2730
2820 RETURN
2830 REM *****
2840 REM ***** SUB: ERROR EN ESTADO ESTABLE *****
2850 IF K7=-1 THEN 2900
2860 IF K7=-2 THEN 2920
2870 PRINT @P9: USING "//6XFADF.6D": "Respuesta Natural: Eee=" ;E1
2880 PRINT @P9: USING "/6XFADF": "Al paso k=" ;K7
2890 RETURN
2900 PRINT @P9: USING "/6XFA": "EL SISTEMA ES INESTABLE"
2910 RETURN
2920 PRINT @P9: USING "/6XFA": "EL SISTEMA ES CRITICAMENTE ESTABLE"
2930 PRI @P9: USI "6XFA": "TIENE UN POLO MUY CERCANO AL CIRCULO UNITARIO"
2940 RETURN
2950 REM *****
2960 REM ***** SUB: LISTADO DATOS CALINI *****
2970 X$="MATRIZ DE ESTADO AHA en variables de fase"
2980 PRINT @P9: USING "/6XFA/":X$
2990 FOR I=1 TO N
3000 PRINT @P9: USING "10X4D.5DS":A4(I,1)
3010 IF N=1 THEN 3050
3020 FOR J=2 TO N
3030 PRINT @P9: USING "3X4D.5DS":A4(I,J)
3040 NEXT J
3050 PRINT @P9:
3060 NEXT I
3070 PRI @P9: USI "/6XFA": "VECTOR DE ENTRADA BHE en variables de fase"
3080 PRINT @P9:
3090 FOR I=1 TO N
3100 PRINT @P9: USING "10X4D.5D":B4(I,1)
3110 NEXT I
3120 X$="VECTOR DE SALIDA CHC en variables de fase"
3130 PRINT @P9: USING "/6XFA//7XS":X$
3140 FOR J=1 TO N
3150 PRINT @P9: USING "3X4D.5DS":C4(1,J)

```

```

160 NEXT J
170 PRINT @P9: USING "/6XFA/": "MATRIZ DE CONTROLABILIDAD SHS"
180 FOR I=1 TO N
190 PRINT @P9: USING "9X5D.5DS": S(I,1)
200 IF N=1 THEN 3240
210 FOR J=2 TO N
220 PRINT @P9: USING "2X5D.5DS": S(I,J)
230 NEXT J
240 PRINT @P9:
250 NEXT I
260 PRINT @P9: USING "/6XFA/": "MATRIZ DE CAMBIO DE BASE PHP"
270 FOR I=1 TO N
280 PRINT @P9: USING "9X5D.5DS": P(I,1)
290 IF N=1 THEN 3330
300 FOR J=2 TO N
310 PRINT @P9: USING "2X5D.5DS": P(I,J)
320 NEXT J
330 PRINT @P9:
340 NEXT I
350 RETURN
360 REM *****
370 REM ***** SUBROUTINA FIN DE PAGINA *****
380 REM ----->>FUNCION 1
390 PRINT @P9:
400 PRINT @P9: USING 3410:
410 IMAGE 72"="
420 PRINT @P9:
430 REM ----->> FUNCION 2
440 IF P9=32 THEN 3460
450 RETURN
460 PRINT USING "30XFAS": "RETURN para continuar"
470 INPUT X#
480 RETURN
490 REM *****
500 REM ***** SUB: LISTADO DATOS GENERALES *****
510 PRINT @P9:
520 IF T#="" THEN 3540
530 PRINT @P9: USING "/6XFAPA": "NOMBRE DEL ARCHIVO: ";T#
540 PRINT @P9: USING "/6XPAFAS": "CLASE DE LA PLANTA: ";C#
550 IF C#="D" THEN 3580
560 PRINT @P9: "nãH'loãa"
570 GO TO 3590
580 PRINT @P9: "igital"
590 PRINT @P9: USING "/ 6XFA·D": "ORDEN DEL SISTEMA: N=";N
600 PRINT @P9: USING "/6XFA": "DATOS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO:"
610 IF C#="D" THEN 3650
620 PRINT @P9: USING "/15XFA": "dxHx(t)/dt=AHAxHx(t) + bHbu(t)"
630 PRINT @P9: USING "15XFA": "y(t)=cHcxHx(t)"
640 GO TO 3670
650 PRINT @P9: USING "/15XFA": "xHx(k+1)=AHAxHx(k) + bHbu(k)"
660 PRINT @P9: USING "15XFA": "y(k)=cHcxHx(k)"
670 PRINT @P9: USING "/ 6XFA": "MATRIZ DE ESTADO AHA"
680 PRINT @P9:
690 FOR I=1 TO N

```



```

3700 PRINT @P9: USING "10X4D.5DS":A5(I,1)
3710 IF N=1 THEN 3750
3720 FOR J=2 TO N
3730 PRINT @P9: USING "3X4D.5DS":A5(I,J)
3740 NEXT J
3750 PRINT @P9:
3760 NEXT I
3770 PRINT @P9: USING "/6XFA": "VECTOR DE ENTRADA BHB"
3780 PRINT @P9:
3790 FOR I=1 TO N
3800 PRINT @P9: USING "10X4D.5D":B5(I,1)
3810 NEXT I
3820 PRINT @P9: USING " /6XFA": "VECTOR DE SALIDA CHC"
3830 PRINT @P9: USING "/7XS":
3840 FOR J=1 TO N
3850 PRINT @P9: USING "3X4D.5DS":C5(1,J)
3860 NEXT J
3870 PRINT @P9:
3880 RETURN
3890 REM *****
3900 REM ***** SUBROUTINA: ENCABEZONAMIENTO *****
3910 REM ----->> FUNCION 1
3920 B$=""
3930 IF T$="" THEN 3950
3940 B$="Archivo : "&T$
3950 REM ----->> FUNCION 2
3960 P9=51
3970 PRINT USING "/20XFAS": "Desea impresioH'n en papel ? (S/N) "
3980 INPUT X$
3990 IF X$="S" OR X$="SI" THEN 4020
4000 P9=32
4010 GO TO 4040
4020 PRI USI "/FA 30XFAS": "Aliste el impresor"; "RETURN para continuarGG"
4030 INPUT X$
4040 REM ----->> FUNCION 3
4050 PRINT @P9: USING "P3/6XFAS": "ESCUELA POLITECNICA NACIONAL"
4060 CALL "TIME",Z$
4070 Z$=SEG(Z$,1,9)
4080 PRINT @P9: USING "21XFAPA": "Fecha : ";Z$
4090 PRINT @P9: USING "/6XFA": "FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
4100 PRINT @P9: USING "/6XFA": "SISTEMAS DE CONTROL"
4110 PRINT @P9: USING "/6X45AS":A$
4120 IF B$="" THEN 4150
4130 PRINT @P9: USING "2XFA":B$
4140 GO TO 4160
4150 PRINT @P9: ""
4160 PRINT @P9: USING 4170:
4170 IMAGE 6X66"--"
4180 RETURN
4190 REM *****
4200 REM ***** REGRESO A MAESTRO *****
4210 V$=""
4220 GO TO 100
4230 REM *****

```

```

1240 REM ***** SUB: PRESENTACION DE H, Q y R *****
1250 PRINT @P9: USING 4260: "MATRICES DE PONDERACION"
1260 IMAGE /25XFA/25X23"="
1270 PRINT @P9: USING "/6XFA": "CRITERIO DE DESEMPEÑO"
1280 X$="J = 1/2 xHxt(M)HHHxHx(M) + 1/2 SUM(xHxt(k)QHxHx(k) + ut(k)ru("
1290 X$=X$&"k))"
1300 PRINT @P9: USING "/34XFA": "M-1"
1310 PRINT @P9: USING "10XFA": X$
1320 PRINT @P9: USING "34XFA": "k=0"
1330 X$="MATRIZ DE PONDERACION HHH"
1340 H1=H
1350 GOSUB 4410
1360 X$="MATRIZ DE PONDERACION QHQ"
1370 H1=Q
1380 GOSUB 4410
1390 PRINT @P9: USING "/6XFAFD,FD": "COEFICIENTE DE PONDERACION r=";R
1400 RETURN
1410 REM *****
1420 REM ***** SUB: IMPRESION DE MATRICES *****
1430 PRINT @P9: USING "/6XFA/": X$
1440 FOR I9=1 TO N
1450 PRINT @P9: USING "10X4D,5DS": H1(I9,1)
1460 IF N=1 THEN 4500
1470 FOR J=2 TO N
1480 PRINT @P9: USING "3X4D,5DS": H1(I9,J)
1490 NEXT J
1500 PRINT @P9:
1510 NEXT I9
1520 RETURN
1530 REM *****
1540 REM ***** SUB: IMPRESION MATRIZ G *****
1550 PRI @P9: USI 4560: "Paso : k"; "Matriz de Realimentacio'n FHF(k)"
1560 IMAGE 2/6X60"-"/6X"!"XFA3X"!"6XFA9X"!"6X60"-
1570 FOR K1=1 TO M
1580 PRINT @P9: USING "6XA6X4D3XAS": "!"M-K1;"!"
1590 FOR J=1 TO N
1600 PRINT @P9: USING "2X4D,6DS": G(K1,J)
1610 NEXT J
1620 PRINT @P9: USING 4630:
1630 IMAGE /6X60"-
1640 NEXT K1
1650 RETURN
1660 REM *****
1670 REM ***** SUB: IMPRESION COSTO TOTAL *****
1680 PRINT @P9: "J COSTO MINIMO TOTAL: J= ";J1(1,1)
1690 PRINT @P9: USING "/6XFA/": "VECTOR DE ESTADOS INICIAL XHXo"
1700 FOR I=1 TO N
1710 PRINT @P9: USING "10X4D,5D": Q0(I,1)
1720 NEXT I
1730 RETURN

```

A P E N D I C E B

A P E N D I C E B

MANUAL DE USO.

Pasos a seguirse para la utilización de los programas:

Prenda el equipo en el siguiente orden:

- 1.- Unidad de discos 1 (y 2)
- 2.- Unidad de discos 0
- 3.- El computador.

Coloque el disco en una de las unidades.

De ahora en adelante, los pasos a seguirse serán comandos que se introducen por el teclado. Es importante recalcar que cada vez que un comando se completa, se debe presionar la tecla marcada <RETURN> para ingresarlo. En el presente manual este hecho se representa con el símbolo "<".

Inicialice el reloj interno por medio de la instrucción:

CALL "SETTIM","dd-~~mm~~-aa/hh:mm:ss"< donde dd-~~mm~~-aa señalan la fecha de la siguiente manera: dd = día; ~~mm~~ = mes (siglas en inglés); aa = año. hh:mm:ss, señalan la hora así: hh = horas; mm = minutos; ss = segundos (opcional).

Inicialice la unidad de disco por medio de la instrucción :

CALL "MOUNT",numdis,avar\$<, donde numdis es el número de la unidad don
de se colocó el disco; avar\$ es una variable alfanumérica cualquiera
(las variables alfanuméricas se definen por una letra cualquiera y el
signo "\$"; ejem: X\$).

Cargue el programa MAESTRO con la instrucción:

```
OLD " TESIS/MAESTRO"<
```

Corra el programa con la instrucción:

```
RUN.<
```

A partir de este momento, este programa toma control sobre
la ejecución de toda la biblioteca de programas desarrollados para es-
ta tesis. El programa le muestra al usuario un menú de opciones que
puede escoger por medio de las teclas definibles que se encuentran en
la parte superior izquierda del teclado.

Luego de esto, se pueden seguir las instrucciones que se
presentan en pantalla. Si en algún momento se quiere detener la ejecu-
ción del programa, basta presionar la tecla marcada con <BREAK> (en
el extremo inferior derecho del teclado) dos veces, el sistema imprime
en pantalla un mensaje en inglés que indica el número de línea a la
cual le corresponde seguir. Si se desea continuar debe darse el coman-
do:

```
RUN linum<
```

linum es la línea que el mensaje indicó. Si no se desea continuar se

puede presionar la tecla definible 1 para regresar al menú principal.

Al terminar es importante seguir los siguientes pasos:

- Borrar la memoria del computador con la instrucción:

DELETE ALL< o simplemente DEL ALL<

- Borrar la pantalla presionando la tecla marcada <PAGE> (al extremo su perior izquierdo del teclado)

- Apagar el equipo (en cualquier orden) si no hay más usuarios que lo quieran utilizar.

Restricciones.-

Los programas solamente trabajan con sistemas lineales invariantes en el tiempo y con una entrada y una salida y que estén descritos en variables de fase. Existen partes del programa que dependiendo de las condiciones de estabilidad, del período de discretización y del orden del sistema de lazo cerrado pueden tomar cierto tiempo en la eje cución.

BIBLIOGRAFIA

- Kuo, Benjamin; DIGITAL CONTROL SYSTEMS, Holt Saunders, Japón, 1981.
- Guerra J.C., Tesis de Grado, EPN, 1983.
- García C., Tesis de Grado, EPN, 1981.
- Ogata, K.; INGENIERIA DE CONTROL MODERNA, Prentice Hall, 1980.
- Dorf, R.; SISTEMAS AUTOMATICOS DE CONTROL; F.E.I., 1978.
- Distefano; RETROALIMENTACION Y SISTEMAS DE CONTROL; Shaums. 1978.
- Durán, Hernán; Tesis de Grado, EPN, 1981.
- Manual de Uso; MATRIX FUNCTIONS, Tektronix.
- Kirk, Donald; OPTIMAL CONTROL THEORY, Prentice Hall.
- Kwakernaak H y Silvan R.; LINEAR OPTIMAL CONTROL SYSTEMS; Wiley-Interscience, 1972.