

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DETERMINACION DE TRAYECTORIAS OPTIMAS
DE ESTADO MEDIANTE METODOS NUMERICOS

Tesis previa a la obtención del título
de Ingeniero, en la especialidad de
Electrónica y Control.

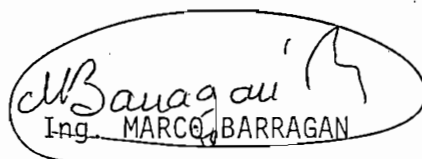
EDGAR RENE JARAMILLO PARRALES

Quito, Julio de 1986



C E R T I F I C A C I O N

Certifico que este trabajo de Tesis
ha sido realizado bajo mi Dirección
y aprobación.


Ing. MARCO BARRAGAN

A G R A D E C I M I E N T O

Quiero expresar mi profundo agradecimiento:

Al Ing. Marco Barragán, por sus atinadas y oportunas sugerencias a este trabajo.

A la Escuela Politécnica Nacional por haberme formado profesionalmente.

Y Al Cuerpo de Ingenieros del Ejército por las facilidades prestadas para la realización de esta Tesis.

EL AUTOR

D E D I C A T O R I A

A Dios, por el maravilloso DON de la vida.

A mis Padres, que constituyen el inefable ejemplo del
Amor, la paciencia y la sabiduría.

A mis Profesores, que con altísimo sentido de respon-
sabilidad, coadyuvaron a mi forma-
ción como Ingeniero.

C O N T E N I D O

	Pág.
1. INTRODUCCION	1
1.1. Objetivos y Alcance de esta Tesis	3
1.2. Descripción por Capítulos	5
2. EL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO	7
2.1. Limitación de las Técnicas Clásicas de Control	8
2.1.1. Síntesis Histórica	8
2.1.2. Objetivos de Control Optimo	11
2.2. Descripción Matemática del Problema	12
2.2.1. Formulación del Problema	12
2.2.2. Definición de las Condiciones de Borde	16
2.2.3. Determinación de Criterios de Rendimiento	18
2.3. El Problema del Control Optimo, Métodos Analíticos de Solución	25
2.3.1. Programación Dinámica	25
2.3.2. El Cálculo Variacional	29
3. APLICACION DE METODOS NUMERICOS	47
3.1. Método de la Pendiente más Pronunciada	48
3.1.1. Descripción Matemática	49
3.1.2. Algoritmo y Flujograma	52
3.1.3. Ejemplos	57
3.2. Método de la Variación de Extremales	73
3.2.1. Descripción Matemática	73

	Pág.
3.2.2. Algoritmo y Flujograma	79
3.2.3. Ejemplos	84
3.3. Método de Cuasilinealización	105
3.3.1. Descripción Matemática	105
3.3.2. Algoritmo y Flujograma	112
3.3.3. Ejemplos	114
4. CONCLUSIONES	132
4.1. Características Principales de las Técnicas Iterativas	133
4.1.1. Método de la Pendiente más Pronunciada	133
4.1.2. Método Variación de Extremales	135
4.1.3. Método de Cuasilinealización	137
4.2. Conclusiones	140
4.3. Recomendaciones	144
BIBLIOGRAFIA	146
ANEXOS	
A Manual de uso de los programas	
B Listado de las principales variables utilizadas	
C Listados de los programas	

C A P I T U L O I

INTRODUCCION

Como una retribución al esfuerzo realizado por la Escuela Politécnica Nacional, en formar Profesionales técnicos que constituyen el sosten de la Tecnología de nuestro país, se presenta este trabajo titulado "DETERMINACION DE TRAYECTORIAS OPTIMAS DE ESTADO MEDIANTE METODOS NUMERICOS".

El avance de la ciencia en todos los campos, ha llevado al origen de complejos sistemas de control, los cuales deben ser diseñados por el Ingeniero de control, de acuerdo a parámetros de funcionamiento deseados. Las técnicas clásicas de diseño han visto limitadas sus aplicaciones a sistemas de una sola entrada y una sola salida, con condiciones iniciales nulas -donde ofrecen buenas respuestas-, debido a la complejidad de los sistemas, especialmente en aquellos que se requiere optimizar la utilización de los recursos disponibles como: tiempo de trabajo, gasto de energía, etc.

La alternativa es entonces, la técnica del control óptimo, destinada a optimizar las entradas de control, las trayectorias de estado y a mantener criterios de rendimiento preestablecidos.

Este trabajo es un complemento, de la Tesis: "SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE RICATTI POR METODOS NUMERICOS COMPUTACIONALES" presentada por el Sr. Ing. Marco Araujo en el año 1980, en la cual se resuelve

el problema del control óptimo para el caso del Regulador Lineal. De aquí la necesidad de generalizar la solución para sistemas no lineales multientrada y multisalida, variables en el tiempo, lo cual constituye el objetivo de esta tesis.

1.1. OBJETIVOS Y ALCANCE DE ESTA TESIS

Vista la necesidad de contar con métodos de diseño de sistemas de Control Óptimo, se han planteado los siguientes objetivos:

- Presentar una herramienta útil de cálculo, para conseguir la solución general del Problema del Control Óptimo mediante la utilización de computadores Digitales.
- Incrementar el bloque de programas digitales, existente en la Facultad de Ingeniería Eléctrica, con estas técnicas de control, tales, que sirvan para que el diseñador y el estudiante de sistemas de Control se orienten en la resolución de los cada vez más complejos problemas.

El trabajo presentado se divide substancialmente en dos partes: análisis teórico del problema y conformación de métodos numéricos computacionales.

En la parte teórica se contemplan los requerimientos del control óptimo que son:

- Obtención del modelo matemático.
- Definición de los condicionantes.
- Definición de la Medida de Rendimiento.

Como punto de partida en la búsqueda de métodos de solución. Se realiza el análisis mediante técnicas variacionales hasta obtener las condiciones básicas del control óptimo.

En la parte práctica, se pretende encontrar procesos iterativos, tendientes a calcular control y trayectorias óptimas de estado, cumpliendo con las condiciones matemáticas o, establecidas en la teoría, tal que, mediante la utilización de dichos algoritmos sea factible la solución de problemas del tipo no lineal, con condiciones de borde separadas.

Es necesario dejar claro los limitantes que se tiene en los programas, a fin de que el usuario pueda utilizarlos con seguridad.

- No es el objetivo de esta tesis realizar análisis de estabilidad de los sistemas ni controlabilidad ni observabilidad, por lo tanto se asume que los datos del problema son válidos y no tienen ninguno de los problemas anotados.
- La precisión de los resultados y aún la seguridad de que la solución converge, está en función de la exactitud propuesta, es decir del ancho del subintervalo en que se divide el intervalo de tiempo en cuestión; por lo tanto la exactitud se considera para los ejemplos, por lo menos la décima parte del ancho t_0, t_f .
- Con fines prácticos se puede resolver hasta sistemas de quinto orden, para garantizar la capacidad de la memoria del computador utilizado - ADDS - PC/II de 64 Kbytes.
- En los problemas a ser resueltos se debe tomar en cuenta que las funciones de Control y trayectorias admisibles no deben estar limitadas por ningún contorno. Caso contrario, se deben modificar los programas.

1.2. DESCRIPCION POR CAPITULOS

:

La parte teórica de esta tesis se encuentra sustentada en el Capítulo Segundo, empezando por la formulación del problema en variables de estado, la definición de las condiciones de contorno y la elección del funcional que representa la medida de rendimiento.

La sección 2.3 presenta la solución general del problema del control óptimo. Se expone, como información, el método analítico llamado PROGRAMACION DINAMICA, visto brevemente, puesto que ya se lo analizó en un trabajo anterior.

La técnica del cálculo variacional es introducida en la sección 2.3.2 sin intentar profundizar en los principios matemáticos de esta teoría, se dan las definiciones básicas que van a servir para encontrar el conjunto de ecuaciones que definen el control óptimo y que son la base para el desarrollo de los métodos numéricos.

En el Capítulo tercero se tiene definido claramente el problema y se dan tres métodos alternativos de solución, analizándose su descripción matemática, sus algoritmos y ejemplos de aplicación. En la sección 3.1 el método de la pendiente mas pronunciada, en 3.2 el método variación de extremales, y en la sección 3.3 el método de cuasi linealización.

Finalmente, se dedica el capítulo cuarto a extractar las ventajas y desventajas de cada método estudiado, a fin de sacar conclusiones y posibles recomendaciones.

En los anexos se incluyen listados completos de los programas creados, listado de variables utilizadas, y el modo de empleo de los programas.

C A P I T U L O I I

EL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO

INTRODUCCION

El control óptimo tiene como objetivo primario, minimizar los costos de operación de procesos físicos, sociales y económicos. Se vió la necesidad de buscar soluciones óptimas a los sistemas de control, en cuanto se presentaron procesos que debían cumplir ciertos criterios estrictamente.

Los sistemas clásicos de control buscaban hasta cierto punto, mediante métodos iterativos, alcanzar el diseño de parámetros que hagan de un sistema: "Aceptable", de acuerdo a márgenes de error preestablecidos. Dicho funcionamiento aceptable está definido en términos de tiempo y frecuencia como: rizado, tiempo de estabilización, sobretiro, ganancia, margen de fase, ancho de banda, etc.

Es importante señalar que el factor decisivo en el desarrollo de la teoría de Control óptimo ha sido el surgimiento de los computadores Digitales, con cuya utilización se puede resolver en alta velocidad, los algoritmos necesarios.

En este capítulo se describe formalmente el problema del control óptimo y se dan las condiciones que debe cumplir el sistema. En tal virtud, el problema estaría listo para ser "traducido" a instrucciones en lenguaje computacional, siguiendo los métodos descritos en el capítulo siguiente.

2.1. LIMITACION DE LAS TECNICAS CLASICAS DE CONTROL

Las técnicas clásicas tales como simulación, análisis matemático o métodos gráficos enfrentan el problema de control sin tomar en cuenta la factibilidad práctica de la solución. Es decir que se resolvía un modelo matemático como tal, no como un problema de Ingeniería. Aún, con los sistemas automáticos, se busca compensar ciertos parámetros a fin de obtener un funcionamiento deseado, pero no se exige el cumplimiento estricto de alguna medida de rendimiento.

Se hizo prioritaria la necesidad de diseñar un sistema de control que a más de llenar los requerimientos físicos del problema, también haga cumplir una optimización de recursos, tal es el ejemplo de un sistema industrial, en donde a más de cumplir ciertas tareas específicas, se requiere optimizar la utilización de energía, recursos humanos, tiempo, etc.

Planteado de esta manera, se puede concluir que el Control óptimo viene a resolver el problema de Ingeniería, en todas sus especialidades.

2.1.1. SINTESIS HISTORICA

Se tiene conocimiento de que probablemente el ejemplo mas antiguo de control automático se originó en Alejandría durante la primera mitad del tercer siglo A. C.. Se trata de un reloj de agua creado por Ktesibios, conformado por un tanque de agua sin ningún escape, que acumula la entrada de agua (Fig. A). Si la velocidad de entrada se man

tiene constante, el nivel en el tanque da una medida del tiempo. Por tanto, para que el reloj de agua sea preciso, es importante mantener constante la velocidad del agua que entra en el tanque. Las vasijas de rebose (vertederos), sin duda alguna, se usaron con este fin en la antigüedad; pero desperdician grandes cantidades de agua y no son aseadas.

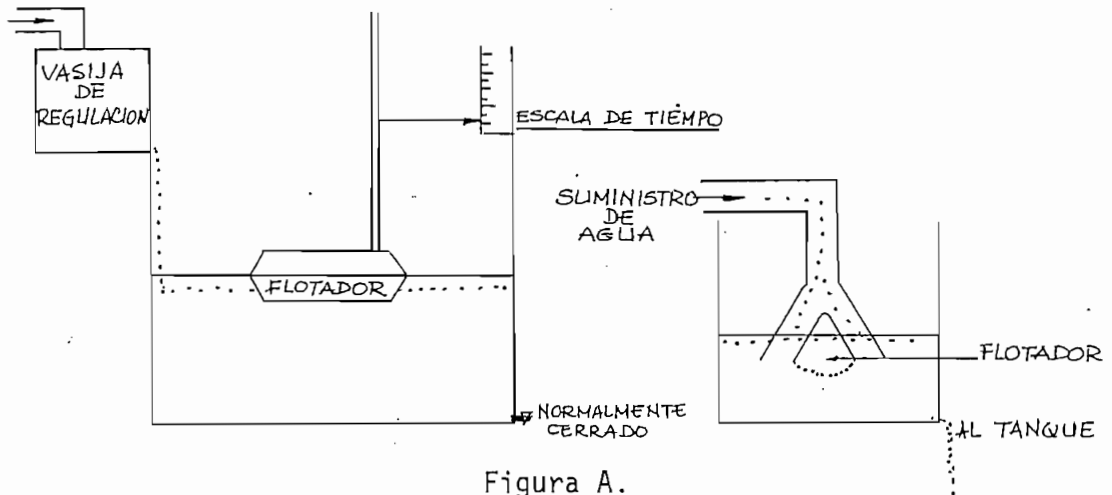


Figura A.

Reloj de agua y su vasija de Regulación

Los registros antiguos árabes indican se empleó un flotador en forma de cono, como regulador del suministro de agua, el cual obstruye la entrada de agua, cuando aumenta el nivel.

Con este ejemplo se ha querido demostrar que los sistemas de Control automático empieza con el hombre. Sin embargo, ha de pasar mucho tiempo, para que se tenga un conocimiento más explícito de los principios, aún cuando estos ya eran muy utilizados.

Se establecieron técnicas de diseño en distintas épocas, pasando por los diagramas de bode, lugar de las raíces, que empleaban conceptos

de: respuesta en la frecuencia, ancho de banda, ganancia, etc.

Más adelante se desarrolla la teoría de los servomecanismos como una de las grandes conquistas de los diseñadores de Control. Lógicamente estas técnicas se limitan a sistemas lineales o con mínimas no linealidades en los elementos, que podían superarse. Sin embargo, la ciencia tuvo su despegue después de las guerras mundiales lo que provocó la aparición de complejos sistemas que debían ser controlados, es entonces cuando McDonald desarrolla el primer concepto de control óptimo para sistemas de control en el año 1950. Su objetivo era minimizar la respuesta transitoria del tiempo en un sistema realimentado para entradas escalón. En 1957, Draper y Li escribieron conceptos teóricos para el Control óptimo de una máquina de combustión interna, en el cual se tiende a optimizar el consumo de combustible. Desde entonces, se ha escrito algunos documentos sobre este campo.

Con el surgimiento de la era aeroespacial, toma vigencia el interés por diseñar sistemas que optimizan la utilización del tiempo y la energía.

Esto ha motivado para que grandes investigadores como Bellman, Bertram, Kalman en los Estados Unidos, Boltyanskii, Gram Krelidge y Pontryagin en otros países, dediquen sus esfuerzos a desarrollar la teoría del Control óptimo. Adicionalmente, la teoría del Cálculo Variacional y los computadores digitales han sido las herramientas indispensables para hacer efectivo el trabajo creador de los diseñadores.

Cabe mencionar también, la importancia que ha tenido la teoría de Es

tados, como modelo ideal para representar los sistemas, cuyas ventajas se pueden extraer de este trabajo.

2.1.2. OBJETIVOS DE CONTROL OPTIMO

Superando las limitaciones del Control clásico, se desarrolla la teoría del Control óptimo con claros objetivos que son: determinar las señales de control, tales que causen: que el sistema o proceso a ser controlado, satisfaga sus condicionantes físicos y al mismo tiempo minimice o maximice (según el caso) algún criterio de funcionamiento.

Es evidente que la factibilidad de emplear el control óptimo : está condicionada al uso de un computador, debido a la complejidad de las ecuaciones, que generalmente son no lineales con condiciones de borde en dos puntos.

El problema enfrentado forma parte de lo que es: el problema general de control, y por lo tanto este trabajo se enfoca solamente a resolver esta gran parte. Puesto que: aún cuando es un computador el que determina la ley de Control óptimo, en lazo cerrado, no se han tomado en cuenta las perturbaciones que pueden afectar a la salida del sistema, que causarían variaciones en la realimentación y por tanto se alteren las condiciones originales del sistema; es decir que podría fallar la minimización de la medida de rendimiento. Más, este aspecto de la teoría de Control amerita un estudio específico, que no se contempla en este trabajo.

2.2. DESCRIPCION MATEMATICA DEL PROBLEMA

2.2.1. FORMULACION DEL PROBLEMA

El éxito de un sistema de control se fundamenta básicamente en su corrcta formulación matemática, elección de parámetros controlados, etc. De aquí, que se busca siempre encontrar un paquete de ecuaciones que describan lo más cercano a la realidad, cómo funciona un proceso, prediciendo la respuesta al sistema ante cualquier entrada anticipada.

Los métodos utilizados en este trabajo utilizan la teoría de estados, para describir un proceso. Esta teoría tiene grandes ventajas, y una de ellas es que unifica la presentación de los sistemas variables en el tiempo y los invariables, facilitando de esta manera la solución de las ecuaciones. Otra ventaja es, que puede ser programada la solución, fácilmente en una computadora, sin importar la linealidad de los sistemas, es decir que la teoría de estados es el fundamento para el estudio del problema de control óptimo en sistemas no lineales.

A continuación se enuncian algunos conceptos de interés que se introducen en la teoría de estados:

DEFINICION Nº 1

VARIABLE DE ESTADO: $x(t)$, es la función del tiempo cuyo valor en cualquier tiempo determinado es el estado del objeto abstracto en tal tiempo.

Los estados $x(t)$, describen generalmente la situación interna de un sistema, como por ejemplo: su posición, velocidad, aceleración, etc y se obtienen a partir de las relaciones matemáticas propias del problema.

En forma compacta se describe como estado de un sistema:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde $x_1(t)$, $x_2(t)$.. $x_n(t)$ son cada estado en particular, por ejemplo: $x_1(t)$ = posición, $x_2(t)$ = velocidad, etc.

DEFINICION N° 2

ESPACIO DE ESTADO.- Es el conjunto de todos los estados $X(t)$ que describen un sistema.

DEFINICION N° 3

VARIABLES DE CONTROL.- $u(t)$, son todas las funciones del tiempo, que actúan como entradas del sistema.

Análogamente al estado, existe una descripción compacta para el control:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

DEFINICION N° 4

TRAYECTORIA DE ESTADO.- $X(t)$, son todos los valores que obtiene $x(t)$ durante el intervalo (t_0, t_f) , con t como parámetro implícito. Puesto que $X(t)$ depende del valor inicial $X(t_0)$, de t_0 y de las señales de control, la trayectoria de estado es un funcional que toma valores de acuerdo a estos parámetros.

Pueden existir señales de entrada que no influyen en el estado, e inversamente pueden existir señales de salida que no son influenciadas por el estado. Estos casos son llamados incontrolables e inobservables, respectivamente.

EJ. 2.1. DESCRIPCION DE UN MOTOR DC.

Las ecuaciones simplificadas que describen un motor DC son las siguientes:

$$Ri + L \frac{d}{dt} i = V - K_f \frac{d}{dt} \theta \quad (\text{inducido}) \quad (2.3)$$

$$K_t i = J \frac{d^2}{dt^2} \theta + B \frac{d}{dt} \theta \quad (\text{inerencia}) \quad (2.4)$$

Se procede ahora a identificar en variables de estado una ecuación

matricial que relacione el voltaje de entrada V con el ángulo θ del eje de salida:

$x_1 = i$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \frac{d}{dt} \theta$; en forma compacta:

$$X = \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \frac{d}{dt} \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\frac{R}{L} x_1 + \dot{x}_1 = \frac{V}{L} - \frac{K_f}{L} x_3,$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{K_f}{L} x_3 + \frac{V}{L} \quad (2.6)$$

$$\frac{K_t}{J} x_1 = \dot{x}_3 + \frac{B}{J} x_3,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{K_t}{J} x_1 - \frac{B}{J} x_3 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2.8)$$

en forma matricial resulta:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_f}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_t}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (2.9)$$

Para encontrar la relación entre el voltaje de entrada y el ángulo θ

se requiere resolver la ecuación matricial 2.9. Para esto es necesario tener las condiciones de borde suficiente y mediante algún método analítico obtener las trayectorias: $i(t)$, $\theta(t)$ y $\frac{d\theta}{dt}(t)$

Hasta aquí, en la ecuación 2.9. se tiene el modelo matemático del problema, más adelante se analizan las condiciones o limitantes que se deben tomar en cuenta.

2.2.2. DEFINICION DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Es necesario precisar las limitantes del sistema a controlarse, tanto de las variables de estado como las de control, a fin de poder resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que describe al proceso.

Al respecto cabe señalar la forma general del sistema de ecuaciones de estado:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (2.10)$$

Donde $x(t)$ y $u(t)$ tienen la forma expresada en las relaciones 2.1. y 2.2.

El caso más general está dado con 2.10 no lineal y variable en el tiempo, que será el tipo de problemas que se pueden resolver al final de este trabajo.

En la realidad, las entradas de control y las trayectorias de estado estarán limitadas por algún contorno; sin embargo, por ahora no se

considerará ningún limitante en este sentido.

Los siguientes conceptos formalizan lo anteriormente enunciado.

DEFINICION Nº 5.

CONTROL ADMISIBLE.- Es el control que cumple los condicionantes físicos del problema, dentro del intervalo de tiempo en cuestión: $[t_0, t_f]$.

DEFINICION Nº 6.

ESTADO ADMISIBLE.- Son trayectorias admisibles, aquellas que están dentro de los límites físicos del sistema, dentro del intervalo $[t_0, t_f]$.

El intervalo $[t_0, t_f]$ es aquel espacio del tiempo dentro del cual se analiza el proceso a controlarse, por lo tanto, todo control o trayectoria debe calcularse para ese intervalo de tiempo.

Para aclarar este punto, conviene el siguiente ejemplo:

EJ. 2.1. CONDICIONANTES FISICOS DEL EJEMPLO 2.1.

- Voltaje de entrada: $V = u(t)$

Condicionante: $0 < V < V_{max}$

- Corriente de armadura: $i(t) = x_1(t)$

Según la potencia del motor $i(t)$ tiene un valor máximo.

Condiciones: $x_1(t_0) = 0$ (antes de arrancar)

$$x_1(t) < i_{\max}$$

- Posición angular: $\theta = x_2(t)$

Condiciones: $x_2(t_0) = 0$ (referencial)

$$x_2(t_f) = \theta_f$$

- Velocidad angular: $\alpha = x_3(t)$

$$x_3(t_0) = 0$$

$$x_3(t_f) = \alpha_f$$

en forma matricial, se tiene:

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X(t_f) = \begin{bmatrix} I \\ \theta_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.2.3. DETERMINACION DE CRITERIOS DE RENDIMIENTO

En general, un sistema de control óptimo está descrito por la ecuación:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (2.12)$$

y el rendimiento del sistema por la expresión:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.13)$$

por lo tanto, el control óptimo se enfoca hacia las trayectorias $x(t)$

y controles $u(t)$, tales que minimizen la medida del rendimiento 2.13.

La expresión del rendimiento puede tomar una de las siguientes formas de acuerdo al tipo de problema:

PROBLEMAS DE TIEMPO MINIMO.-

Se da este caso en un sistema que debe pasar de un estado inicial $x(t_0)$, a otro estado final $x(t_f)$ en el menor tiempo posible.

La expresión de J sería:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad (2.14)$$

donde el tiempo mínimo es igual a: $t_f - t_0$.

PROBLEMAS DE CONTROL DEL ESTADO FINAL.-

Cuando se trata de alcanzar el estado final de un sistema, lo más cercano a un estado deseado: $r(t_f)$. La forma del rendimiento sería la siguiente:

$$J = \sum_{i=1}^n \left[x_i(t_f) - r_i(t_f) \right]^2, \quad (2.15)$$

en esta expresión, las desviaciones positivas o negativas pesan igual, ya que el error es cuadrático. Aquí se aplica el concepto de NORMA de un vector:

$\|x(t_f) - r(t_f)\|_R$ es la NORMA del vector $x(t_f) - r(t_f)$ respecto a

R, y equivale a:

$$\left[x(t_f) - r(t_f) \right]^T R \left[x(t_f) - r(t_f) \right] \quad (2.16)$$

T: indica la transpuesta de la matriz

R: es una matriz real, semidefinida positiva, $n \times n$, de ponderación.

Para formalizar esta expresión, es necesario, enunciar la siguiente definición.

DEFINICION Nº 7

Una matriz real simétrica R es semidefinida positiva (o definida no-negativa), si para todo vector z, se tiene:

$$z^T R z \geq 0, \quad (2.17)$$

es decir que existen algunos vectores que hacen:

$$Rz = 0, \text{ y} \\ z^T R z = 0, \text{ por lo tanto,} \quad (2.18)$$

el resto de z darán:

$$z^T R z > 0, \quad (2.19)$$

esto implica que todos los elementos de la diagonal de R son no-negativos.

Volviendo a la medida del rendimiento, se encuentra una expresión matricial compacta:

$$J = \left\| \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|_R \right\|^2 \quad (2.20)$$

De acuerdo a los valores que tome la matriz R, es la ponderación de cada una de las desviaciones respecto al valor deseado de estado. Es decir que R_{ii} (ii-ésimo elemento de R) determina la importancia de la desviación de $x_i(t_f)$ de su valor deseado.

PROBLEMAS DE CONTROL DE MINIMO ESFUERZO.-

La concepción del "mínimo esfuerzo" está en relación directa a cada sistema en particular, dentro de lo que significa: la transferencia de un sistema desde un estado inicial arbitrario $x(t_0) = x_0$, hasta un estado final o conjunto de estados finales específicos. Por ejemplo:

En la operación de un vehículo aeroespacial, considerando que el impulso del cohete es $u(t)$ y asumiendo que la magnitud del impulso está en proporción al consumo de combustible, se desea minimizar el gasto total de combustible. La medida de rendimiento sería:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt, \quad (2.21)$$

si existe varios controles, y la razón del gasto del esfuerzo de control del i-ésimo control es $C_i |u_i(t)|$, $i = 1, 2, \dots, m$ (C_i es una constante de proporcionalidad), se puede minimizar con la expresión:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^m b_i |u_i(t)| \right] dt, \quad (2.22)$$

b_i : son los factores de ponderación de los $|u_i(t)|$ y $b_i \geq 0$.

Otro tipo de problemas sería como el siguiente ejemplo:

Se considera una red eléctrica con una fuente de voltaje, sin elementos almacenadores de energía, donde la fuente de voltaje es $u(t)$. Se desea controlar la red con la mínima disipación de energía de la fuente. La corriente que se consume es directamente proporcional a $u(t)$, por lo tanto la medida de rendimiento sería:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt, \quad (2.23)$$

para varios controles, se tendría la siguiente forma general de medida de rendimiento:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[u^T(t) R u(t) \right] dt \quad (2.24)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2 dt, \quad (2.25)$$

donde R es una matriz real simétrica definida positiva, de ponderación. Los valores de R podrían ser variables en el tiempo, lo cual significaría que se desea variar la ponderación de gasto del esfuerzo de control, durante el intervalo de interés $[t_0, t_f]$

PROBLEMAS DE RASTREO

Se dá este problema, cuando se trata de mantener el estado $x(t)$ de un sistema, lo más cercano al valor deseado $r(t)$, durante todo el in

intervalo $[t_0, t_f]$.

La medida de rendimiento podría ser:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} ||x(t) - r(t)||_Q^2 dt , \quad (2.26)$$

donde Q es una matriz real simétrica n x n, semidefinida positiva, que da la importancia relativa que debe tener cada desviación de los estados, respecto de los valores deseados correspondientes.

Finalmente, cabe mencionar el caso general, en el que estarían involucrados todos los casos anteriores, del cual se puede obtener la siguiente expresión para la medida del rendimiento:

$$J = ||x(t_f) - r(t_f)||_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[||x(t) - r(t)||_{Q(t)}^2 + ||u(t)||_{R(t)}^2 \right] dt \quad (2.27)$$

La función que desempeña cada uno de los términos de la expresión 2.27. ya se explicó en los párrafos anteriores.

La selección del criterio de rendimiento, es decir: encontrar los términos que debe contener el funcional J, así como los valores de las matrices de ponderación H, Q(t) y R(t), es un punto de gran importancia, en el cual, se deben tomar en cuenta los compromisos que podrían existir entre los diferentes parámetros de un sistema. Por ejemplo:

En el vuelo de un vehículo aeroespacial, se tienen los siguientes parámetros:

- Tiempo de vuelo
- Gasto de combustible
- Angulo de elevación, etc.

Reducir el tiempo de vuelo puede significar excesivo gasto de combustible; aumentar el tiempo de vuelo podría ocasionar que se altere el ángulo de elevación, etc. Es decir, que debe existir una correcta ponderación de cada parámetro, a fin de que la medida de rendimiento sea exactamente lo que se desea tener, como elemento de medida para catalogar si un sistema está siendo bien controlado o no lo está.

2.3. EL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO, METODOS ANALITICOS DE SOLUCION.

2.3.1. PROGRAMACION DINAMICA

En vista de que este método ya ha sido tratado en un trabajo anterior, en esta sección se lo estudiará muy brevemente.

Una vez que ha sido determinada la expresión que define la medida de Rendimiento, el siguiente paso, es encontrar la Ley de Control óptimo que minimize este criterio. Para esto, existen básicamente dos métodos: La Programación Dinámica y el Cálculo de Variaciones.

Para entender la Programación Dinámica, es necesario aclarar que su fundamento, está en un concepto llamado optimalidad.

PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD.-

La ruta óptima para un proceso de decisión multietapa, se indica en la Figura N° 2-1.



Figura N° 2-1.

- a) Ruta óptima desde a hasta e. (b) Dos posibles rutas óptimas desde b hasta e.



Llámesse Costo Jab, la decisión de seguir la ruta a-b, entonces la de cisión tomada en (a), resulta con un Costo Jab, más la restante a un costo Jbe. El mínimo costo Jae* desde a hasta e será por lo tanto:

$$Jae^* = Jab + Jbe \quad (2.28)$$

Surge la siguiente aseveración:

- Si a-b-e es la ruta óptima desde a hasta e, entonces b-e es la ruta óptima desde b hasta e.

Prueba de la contradicción.-

Se supone que la ruta óptima desde b hasta e es b-c-e, entonces

$$Jbce < Jbe$$

y que:

$$Jab + Jbce < Jab + Jbe = Jae^* \quad (2.29)$$

Pero, 2.29 sólo puede ser satisfecha, siempre que se anule el precedente que Jae* es la mínima ruta desde a hasta e, lo cual lleva a una contradicción, por lo tanto la aseveración queda demostrada.

En otras palabras: un plan óptimo tiene la propiedad de que, cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, las siguientes decisiones deben constituir un plan óptimo, independientemente del estado resultante de la primera decisión.

Ahora, se procede a mostrar una fórmula para resolver el problema del control óptimo mediante este principio.

RELACION DE RECURRENCIA DE LA PROGRAMACION DINAMICA.

El problema del Control óptimo para un sistema de Control invariante en el tiempo, de orden N:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \quad (2.30)$$

Consiste en determinar una ley de Control óptimo $u(t)$, que minimiza el criterio de rendimiento:

$$J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t)) dt \quad (2.31)$$

Realizando las transformaciones de sistemas continuo a Discreto, se obtiene la siguiente relación de recurrencia:

$$J_{N-k, N}(x(N-k)) = \min_{\bar{u}(N-k)} \left\{ g_D(x(N-k), u(N-k)) + J_{N-(k-1), N}(a_D(x(N-k), u(N-k))) \right\} \quad (2.32)$$

La demostración de esta relación, obtenida en base al principio de optimalidad, se puede encontrar en la obra "OPTIMAL CONTROL, THEORY, Donald Kirk, Capítulo 3, pags. 67-70.

Esta relación de recurrencia, se presta para ser convertida en un proceso computacional, lo cual es una de las ventajas de la Programación Dinámica para resolver problemas de Control óptimo.

Es importante deducir las características de este método para fines comparativos, por lo tanto, a continuación se enuncian algunas de ellas:

CARACTERISTICAS DE LA PROGRAMACION DINAMICA

i) OBTIENE MINIMOS ABSOLUTOS.-

Este método, emplea un proceso directo para resolver la relación 2-32, por lo tanto, los mínimos obtenidos son globales o absolutos. Se puede ver que esto es factible, puesto que se trabaja con el conjunto de controles admisibles que causan trayectorias admisibles, y se consideran solamente los controles que satisfacen el principio de optimalidad. Esto se visualiza en la Figura N° 2-2, donde el Control óptimo está en la zona rayada.

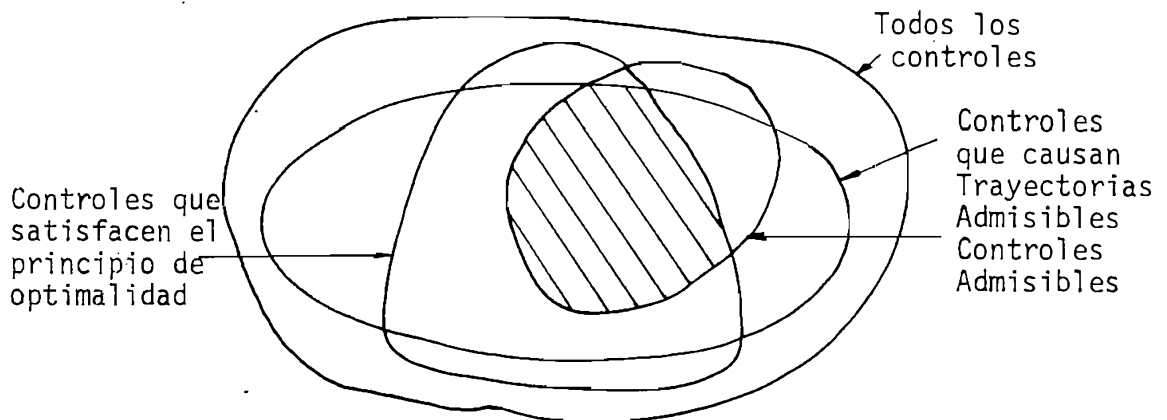


Figura N° 2-2

Subconjuntos del espacio de Control.

ii) PRESENCIA DE CONDICIONANTES.-

Como se puede deducir de la Fig. N° 2-2, la presencia de condicionantes facilita la búsqueda de la solución, puesto que reduce el campo a considerarse.

iii) FORMA DEL CONTROL OPTIMO.-

Este método provee una solución del tipo lazo cerrado o retroalimentado, para todos los valores de estado admisibles.

El proceso computacional no produce un tipo de expresión para $u(t)$ como:

$$u(t) = f(x(t), t)$$

sino que, ésta se puede obtener aproximadamente a partir de la solución tabulada de la relación de recurrencia 2-32.

iv) LIMITACION POR DIMENSIONALIDAD.-

Viene a ser la gran desventaja; y consiste en que, para sistemas de mayor dimensión, el espacio de memoria requerido es demasiado grande, lo que lleva a problemas de capacidad de computador con el consecuente gasto excesivo de tiempo de operación. Esto se hace evidente desde sistemas de tercer orden en adelante.

En los párrafos siguientes, se va a estudiar con mayor detenimiento el método que utiliza cálculo variacional, que como se verá, presenta mayores ventajas en cuanto a versatilidad y velocidad, aunque el principal limitante está en que no existirán limitantes para el estado y control admisibles.

2.3.2. EL CALCULO VARIACIONAL

Es conveniente revisar las siguientes definiciones que se introducen

en este campo, antes de entrar directamente al problema del control óptimo.

DEFINICION N° 8

FUNCIONAL $J(x)$.-

Es una regla de correspondencia, que asigna a cada función x dentro de un cierto Dominio Ω , un único valor real. El conjunto de números reales asociados con las funciones en Ω , se denomina Rango del funcional.

DEFINICION N° 9

LINEALIDAD DE $J(x)$.-

$J(x)$ es un funcional lineal de x si y sólo si satisface:

i.- El principio de Homogeneidad, es decir:

$$J(\alpha x) = \alpha J(x) \quad (2.33)$$

para todo $x \in \Omega$.

ii.- El principio de aditividad, es decir:

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2) \quad (2.34)$$

para todo x_1, x_2 y $x_1 + x_2 \in \Omega$.

DEFINICION Nº 10

INCREMENTO DE UN FUNCIONAL.-

Si x y δx son funciones, para las cuales el Funcional J está definido, entonces el incremento de J , representado por ΔJ , es:

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x) \quad (2.35)$$

donde ΔJ depende de x y δx , y δx se denomina la variación de la función x .

DEFINICION Nº 11

VARIACION DE UN FUNCIONAL.-

La variación es tan importante en el cálculo de máximos y mínimos de los Funcionales, como lo son los diferenciales para encontrar máximos y mínimos de las funciones.

Puesto que el incremento de un Funcional se define como:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \cdot \|\delta x\| \quad (2.36)$$

donde: δJ es lineal en δx si se cumple que:

$$\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0 \quad (2.37)$$

Entonces J es diferenciable en x y δJ es la variación de J evaluada

para la función x .

DEFINICION Nº 12

MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONALES.-

Un Funcional J cuyo dominio es Ω tiene un extremo relativo en x^* .

Si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todas las funciones x dentro de Ω que satisfacen:

$$||x - x^*|| < \epsilon \tag{2.38}$$

el incremento de J tiene el mismo signo.

$$\text{Si: } \Delta J = J(x) - J(x^*) > 0 \tag{2.39}$$

entonces, $J(x^*)$ es un mínimo relativo

$$\text{Si: } \Delta J = J(x) - J(x^*) < 0 \tag{2.40}$$

entonces, $J(x^*)$ es un máximo relativo.

Si 2.39 se satisface para un ϵ arbitrariamente grande, entonces $J(x^*)$ es un mínimo absoluto o global; similarmente si 2.40 se cumple para cualquier ϵ grande, entonces $J(x^*)$ es un máximo absoluto o global. x^* es denominado extremal y $J(x^*)$ es referido como un extremo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO VARIACIONAL

Sea x una función del tiempo, dentro de un dominio Ω , y $J(x)$ un Fun

cional diferenciable en x . Se supone que las funciones en Ω no son limitadas por ningún contorno.

Si x^* es un extremal, la variación de J debe ser nula en x^* , es decir:

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0$$

para todo δx admisible.

Más adelante se verá la utilidad de este principio, en la obtención de las relaciones matemáticas del control óptimo.

ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES QUE DEBE CUMPLIR UN EXTREMAL.-

Ahora se procede a estudiar un Funcional que involucra varias funciones independientes y sus primeras derivadas, que para el caso pueden ser variables de estado.

Se hallarán las condiciones que deben cumplir tales variables para ser extremales y por ende minimizar el funcional J .

Sea el funcional J de la forma:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.41)$$

con las siguientes condiciones de borde para $x(t)$:

$-x(t_0)$ y t_0 especificados

$-x(t_f)$ y t_f libres

Además: x_1, x_2, \dots, x_N son funciones independientes con la primera derivada continua; g tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas respecto a todos los argumentos.

Tiene sentido analizar este caso como más representativo puesto que, en la práctica casi siempre se conoce el estado actual ($x(t_0)$) del sistema y se debe saber a que estado ($x(t_f)$) se llegará, dentro de un tiempo limitado t_f , que puede ser libre o especificado.

Para visualizar las condiciones de borde consideradas, es conveniente expresarlas en la figura N° 2-3.

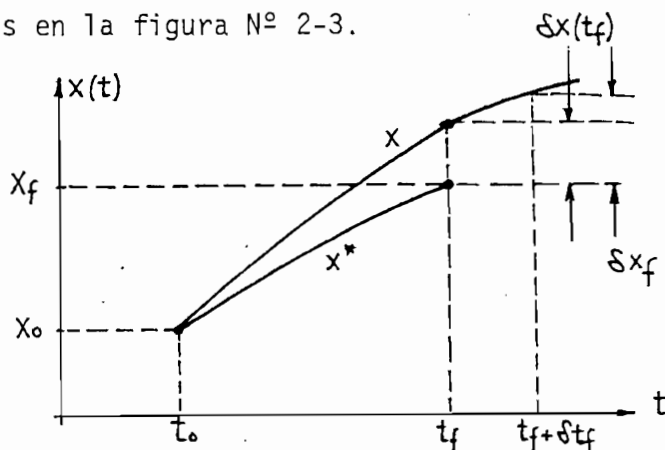


Figura N° 2-3

Trayectoria de estado extremal y su vecindad.

En adelante: x^* representa una función de estado extremal y x una función admisible.

De la Figura 2-3 se deduce la relación:

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f \quad (2.42)$$

que será utilizada en la siguiente deducción: sea el incremento del Funcional J:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \quad (2.43)$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(x(t), \dot{x}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right\} dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.44)$$

expresando el primer integrado en series de Taylor alrededor de $x^*(t), \dot{x}^*(t)$, resulta:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt + O(\delta x(t), \delta \dot{x}(t)) + \dots + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.45)$$

donde: $O(\delta x(t), \delta \dot{x}(t))$ representa los términos de 2do orden en $\delta x(t), \delta \dot{x}(t)$ que serán ignorados en adelante.

Integrando por partes el término que contiene $\delta \dot{x}(t)$ se tiene:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \delta \dot{x}(t) dt$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta x(t) dt$$

Puesto que $x(t_0)$ es especificado, todas las trayectorias admisibles deben pasar por $x(t_0)$, entonces $\delta x(t_0) = 0$; quedando por lo tanto:

$$I = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt \quad (2.46)$$

El segundo término integral de la expresión 2.45 puede ser escrito de otra manera:

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \left[g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) \right] \delta t_f + 0(\delta t_f) \quad (2.47)$$

Substituyendo 2.46 y 2.47 en 2.45 resulta:

$$\begin{aligned} \Delta J = & \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + \left[g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) \right] \delta t_f \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Es conveniente expresar $g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)$ en función de $x^*(t_f)$, mediante expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) = & g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) \\ & + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t) \right] \delta \dot{x}(t_f) + 0 \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Substituyendo 2.42 y 2.49 en la expresión 2.48, y conservando solamente los términos de primer orden, se encuentra la variación del funcional J:

$$\begin{aligned}
 \delta J(x^*, \delta x) &= 0 \\
 &= \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\
 &+ \left[g (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f \\
 &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right]^T \right\} \delta x(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Una vez que se ha obtenido la variación del funcional J, cabe aplicar el teorema fundamental del Cálculo variacional, a fin de determinar las condiciones que $x(t)$ debe cumplir para ser un extremal, entonces se tiene:

$$\delta J = 0,$$

el término integral debe ser nulo:

$$\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \tag{2.51}$$

Esta relación es denominada Ecuación de Euler, la cual debe cumplir un extremal $x^*(t)$, independientemente de las condiciones de contorno.

Las condiciones de borde se especifican a partir del término fuera del integral de 2.50, por lo tanto resulta:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\
& + \left[g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.52}$$

En resumen: para que una trayectoria $x(t)$ sea extremal, debe satisfacer las relaciones 2.51 y 2.52. Las condiciones de contorno se obtienen, substituyendo los datos respectivos (Estado final libre o especificado, y tiempo final libre o fijo). En adelante se considerará solamente el caso de tiempo final t_f fijo y estado final $x(t_f)$ libre, por ser el caso más representativo de los sistemas prácticos resultando un problema no lineal, con condiciones de borde separadas.

CONDICIONES QUE DEBE CUMPLIR EL CONTROL OPTIMO

Hasta aquí se ha visto las relaciones matemáticas del cálculo variacional que determinan las condiciones de una curva extremal, dadas por la Ecuación de Euler 2.51 y la Ecuación de las condiciones de Contorno 2.52. Ahora, se puede introducir directamente el problema del Control óptimo, el cual, como se anotó anteriormente consiste en: encontrar un control admisible $u^*(t)$ tal, que cause que el sistema:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \tag{2.53}$$

alcance una trayectoria óptima x^* , tal que minimize el criterio de rendimiento:

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \tag{2.54}$$

Además, se asumen las siguientes condiciones:

- i.- Las regiones admisibles de estado y control no están limitadas por ningún contorno.
- ii.- $x(t_0)$, t_0 son especificados
- iii.- $x(t)$, es un vector $n \times 1$
- iv.- $u(t)$, es un vector $m \times 1$
- v.- h es una función diferenciable en el tiempo.

En base a v.- se tiene:

$$h(x(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[h(x(t), t) \right] dt + h(x(t_0), t_0) \quad (2.55)$$

reemplazando en la relación 2.54, se tiene:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} \left[h(x(t), t) \right] \right\} dt + h(x(t_0), t_0)$$

puesto que $x(t_0)$ y t_0 son especificados, entonces no tienen influencia en la minimización de $J(u)$ y por lo tanto el término $h(x(t_0), t_0)$ puede ser ignorado. Mediante la regla de derivación compuesta se obtiene:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \right\} dt \quad (2.56)$$

Se forma un Funcional aumentada $J_a(u)$, al incluir un término que re

presenta las ecuaciones diferenciales del sistema dadas en la expresión 2.53:

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) + p^T(t) \left[a(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) \right] \right\} dt \quad (2.57)$$

Se han traducido los multiplicadores de Lagrange variables en el tiempo: $P_1(t), P_2(t) \dots P_N(t)$, puesto que las condiciones deben satisfacerse en todo el intervalo de tiempo establecido $[t_0, t_f]$.

Se definió una función g aumentada:

$$g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + p^T(t) \left[a(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) \right] + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \quad (2.58)$$

que resume lo anterior:

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \right] dt \quad (2.59)$$

Ahora se determina la variación de $J_a(u)$, con las suposiciones dadas en i hasta v y además, considerando que los estados finales pueden ser especificados o libres. Se introducen las variaciones δx , $\delta \dot{x}$, δu , δp y δt_f .

En base a la ec. 2.50 para un extremal, y aumentando los términos $\frac{\partial g_a}{\partial u}$, $\frac{\partial g_a}{\partial p}$ de acuerdo al incremento de argumentos de g_a .

$$\begin{aligned}
 \delta J_a(u^*) = 0 = & \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\
 & + \left[g_a (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right. \\
 & \left. - \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \right. \\
 & \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \right\} \delta x(t) \\
 & + \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} (x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta u(t) \\
 & + \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} (x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta p(t) \Big\} dt
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

- A fin de determinar las condiciones que hagan $\delta J_a = 0$ se arreglan los términos que contienen h, dentro del integral

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t), t) \right]^T \dot{x}^*(t) + \frac{\partial h}{\partial t} (x^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t), t) \right]^T \dot{x}^*(t) \right. \\
 & \left. = \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (x^*(t), t) \right] \dot{x}^*(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} (x^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t), t) \right] \right\} \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

- Utilizando la regla de derivación compuesta en el último término

$$\begin{aligned}
 & = \cancel{\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (x^*(t), t) \right]} \dot{x}^*(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} (x^*(t), t) - \cancel{\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (x^*(t), t) \right]} \dot{x}^*(t) - \\
 & - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} (x^*(t), t)
 \end{aligned}
 \tag{2.62}$$

- Asumiendo que las segundas derivadas parciales son continuas, se puede intercambiar el orden de diferenciación, entonces estos términos sumados dan cero.

- El término integral de 2.60 queda:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\left[\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^{*T}(t) \left[\frac{\partial a}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[- p^{*T}(t) \right] \right] \delta x(t) + \left[\left[\frac{\partial g}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \right. \right. \\ \left. \left. + p^{*T}(t) \left[\frac{\partial a}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), t) \right] \right] \delta u(t) \right. \\ \left. + \left[a(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) \right]^T \delta p(t) \right\} dt \quad (2.63)$$

- El resultado de esta integral debe ser cero, independientemente de las condiciones de contorno en un extremal. De aquí resulta que:

$$\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.64)$$

- Esta ecuación debe cumplirse, pues corresponde a la ecuación de estado, entonces, el coeficiente de $\delta p(t)$ es cero.

Para que el coeficiente de $\delta x(t)$ sea cero, se debe cumplir:

$$\dot{p}^*(t) = - \left[\frac{\partial a}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) - \frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.65)$$

lo cual es factible, ya que los multiplicadores de Lagrange son arbitrarios.

La variación $\delta u(t)$ es independiente, por lo tanto su coeficiente debe ser cero, entonces:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \quad (2.66)$$

Los términos de 2.60 fuera de integral, también deben anularse para que la variación sea cero, por lo tanto;

$$0 = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[g(x(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + p^{*T}(t_f) \left[a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) \right] \right] \delta t_f \quad (2.67)$$

Aplicando las condiciones propias de cada problema se puede encontrar la relación de condiciones de borde, a partir de la ecuación 2.67.

Se han determinado hasta aquí, las condiciones necesarias para resolver el problema del control óptimo, las cuales tienden a cumplir el Teorema fundamental del Cálculo de variaciones.

Ahora resulta conveniente introducir una función auxiliar, que permite simplificar las ecuaciones mencionadas, tal es, la función Hamiltoniano definida por:

$$H(x, u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + p^T(t) \left[a(x(t), u(t), t) \right] \quad (2.68)$$

Substituyendo esta función en las condiciones 2.64 hasta 2.67 se obtiene:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} (x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad (2.69)$$

$$\dot{p}^*(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad (2.70)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad (2.71)$$

y

$$0 = \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t} (x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f \quad (2.72)$$

Se tiene un conjunto de $2N$ ecuaciones diferenciales de estado-coestado (2.69 y 2.70) y un conjunto de m ecuaciones algebraicas (2.71) que deben ser satisfechas por el Control óptimo en el intervalo $[t_0, t_f]$ y como se anticipó, resulta un problema con condiciones de borde separadas, poco simple de resolver por métodos convencionales.

CONDICIONES DE CONTORNO.-

Se supone conocida la condición inicial $x^*(t_0) = x_0$ y el tiempo inicial t_0 , por lo tanto con el estado final y el tiempo final quedan las siguientes alternativas:

i- Problemas con tiempo final fijo

i-1 Estado final $x(t_f)$ fijo

i-2 Estado final $x(t_f)$ libre

i-3 Estado final $x(t_f)$ condicionado a un lugar geométrico.

ii- Problemas con tiempo final libre

ii-1 Estado final $x(t_f)$ fijo

ii-2 Estado final $x(t_f)$ libre

ii-3 Estado final $x(t_f)$ condicionado a un lugar geométrico.

No es el objetivo de este trabajo analizar cada una de estas posibilidades, sino que el análisis del Capítulo III, se orienta con las condiciones de contorno dadas en i-2, es decir, se considera t_f especificado y $x(t_f)$ desconocido o libre. Se ha optado por este tipo de problemas, por ser los de mayor generalidad, tomando en cuenta que pueden ser lineales o no lineales, variantes en el tiempo, multivariables y no limitados por ningún contorno.

Finalmente se puede deducir que el Cálculo variacional resulta ideal para resolver el problema del Control óptimo, en la generalidad de sistemas, tal como se ha mencionado.. Sin embargo en este trabajo se ha limitado el trabajo para sistemas que aceptan estados y controles admisibles no limitados por ningún contorno. Para cuando sea necesario trabajar con estados y controles limitados o condicionados, existe el método del mínimo de Pontryagin en el cual se trata este caso.

Cabe mencionar que en la Programación Dinámica en cambio, el problema de Control óptimo se facilitaba cuando existen suficientes limitantes a la función Control.

En todo caso, cualquiera de los dos métodos son aplicables analíticamente para sistemas sencillos únicamente, siendo creciente la dificultad de solución con la complejidad de las ecuaciones. De aquí nace la necesidad de implementar métodos numéricos que permitan me-

diante el uso de un Computador, solucionar cualquier sistema no lineal de orden superior.

C A P I T U L O I I I

APLICACION DE METODOS NUMERICOS

En el capítulo anterior se estudió la formulación del problema de Control óptimo y los posibles métodos de solución. El tema central fue la técnica del cálculo Variacional, como la mejor alternativa para enfrentar este problema, y se dieron los lineamientos necesarios, más adelante, para definir un modelo matemático mediante esta técnica.

Una vez que se ha determinado que el problema del Control óptimo es un conjunto de ecuaciones diferenciales, de primer orden, no lineales y de condiciones de borde separadas, se ha visto que la solución no es simple, a pesar de que las técnicas variacionales se conocen desde hace mucho tiempo. Esto se debe a que, recién con el surgimiento de los computadores digitales de alta velocidad se hace posible introducir métodos numéricos, para resolver complejos sistemas físicos.

En este capítulo se desarrollan tres métodos iterativos, que utilizando las condiciones matemáticas del capítulo II permiten encontrar la ley de Control óptimo y las trayectorias óptimas de estado: el método de la pendiente más pronunciada, el método variación de extremales y el método de cuasilinealización.

Estas técnicas se han codificado en lenguaje BASIC para el computador A.D.D.S. sistema DOS, por estar el equipo disponible para la rea

lización de este trabajo.

3.1. METODO DE LA PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

En general, los métodos que se estudian en este capítulo, están diseñados para resolver problemas del tipo No lineales, de dos puntos de valores de contorno.

Dichos problemas resultan de la aproximación variacional, en el caso de que no se consideran limitados por ningún contorno: las variables de estado y control, y que el estado final es libre y el tiempo final es fijo. Las ecuaciones que describen este tipo de problemas son:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = a(x^*(t), u^*(t), t) \quad (3.1)$$

$$\dot{p}^*(t) = - \frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = - \left[\frac{\partial a}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) - \frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), t) \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial a}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) + \frac{\partial g}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), t) \quad (3.3)$$

$$x^*(t_0) = x_0 \quad (3.4)$$

$$p^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t_f)) \quad (3.5)$$

Cabe mencionar que el principio común en que se basan los tres métodos a estudiarse, está en que se emplea una suposición inicial para

obtener la solución al problema, la cual no satisface alguna de las cinco ecuaciones-3.1 hasta 3.5-, esta solución es entonces válida para obtener un ajuste a la suposición inicial, tal que, la próxima solución esté más cercana a satisfacer las cinco condiciones anotadas. Si es que eventualmente, este proceso iterativo converge, entonces las condiciones se satisfacen y las soluciones encontradas será: estado y Control óptimos.

Por ahora se supone conocido $u^i(t)$ y se resuelven el conjunto de ecuaciones diferenciales 3.1 y 3.2 tal que las trayectorias nominales de estado-coestado satisfagan las condiciones de contorno 3.4 y 3.5.

Si la solución encontrada satisface la condición 3.3.:

$$\frac{\partial H^i}{\partial u} = 0$$

entonces $x(t)$, $u(t)$ y $p(t)$ son extremales, por lo tanto son trayectorias y controles óptimos.

Si no es ese el caso, entonces se busca una fórmula para reajustar el valor supuesto de $u(t)$, mediante el siguiente análisis:

3.1.1. DESCRIPCION MATEMATICA.-

En el capítulo II, cuando se estudió la condición fundamental del cálculo variacional, que debía cumplir el control óptimo, se llegó a determinar que la variación del Funcional aumentado J_a es:

$$\delta J_a = \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^i(t_f) - p^i(t_f)) \right]^T \delta x(t_f)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\dot{p}^i(t) + \frac{\partial H}{\partial x} (x^i(t), u^i(t), p^i(t), t) \right]^T \delta x(t) \right. \\
 & + \left[\frac{\partial H}{\partial u} (x^i(t), u^i(t), p^i(t), t) \right]^T \delta u(t) \\
 & \left. + \left[a(x^i(t), u^i(t), t) - \dot{x}^i(t) \right]^T \delta p(t) \right\} dt \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

donde: $\delta x(t) \triangleq x^{i+1}(t) - x^i(t)$, (3.7)

$$\delta u(t) \triangleq u^{i+1}(t) - u^i(t) \quad (3.8)$$

y

$$\delta p(t) \triangleq p^{i+1}(t) - p^i(t) \quad (3.9)$$

i = índice de iteración.

Si se satisfacen 3.1, 3.2, 3.4 y 3.5, entonces resulta:

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u} (x^i(t), u^i(t), p^i(t), t) \right]^T \delta u(t) dt \quad (3.10)$$

Se tiene que:

δJ_a es la parte lineal del incremento ΔJ_a , donde:

$$\Delta J_a = J(u^{i+1}) - J(u^i), \text{ y} \quad (3.11)$$

si la norma de δu , es decir: $\|u^{i+1} - u^i\|$, es pequeña, el signo de ΔJ_a estará determinado por el signo de δJ_a . Puesto que el objetivo es minimizar J_a , se quiere hacer que ΔJ_a sea negativo. Si se selecciona como $\delta u(t)$:

$$\delta u(t) = u^{i+1}(t) - u^i(t) = -\tau \frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \quad (3.12)$$

$$t \in [t_0, t_f]$$

τ : Medida de paso > 0 en la dirección de la gradiente de H .

$$\text{Entonces: } \delta J_a = -\tau \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \right] dt \leq 0 \quad (3.13)$$

puesto que el integrando es nonegativo para todo $t \in [t_0, t_f]$. δJ_a será cero sólomente cuando:

$$\frac{\partial H^i}{\partial u}(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_f]$$

la dirección de la pendiente más pronunciada está en la gradiente de H , por lo tanto el reajuste de u^{i+1} se realiza en base del anterior valor u^i y una medida (τ) de paso en esta dirección (más corta hacia el valor mínimo del funcional J_a).

$$u^{i+1}(t) = u^i(t) - \tau \frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \quad (3.14)$$

gráficamente se tiene:

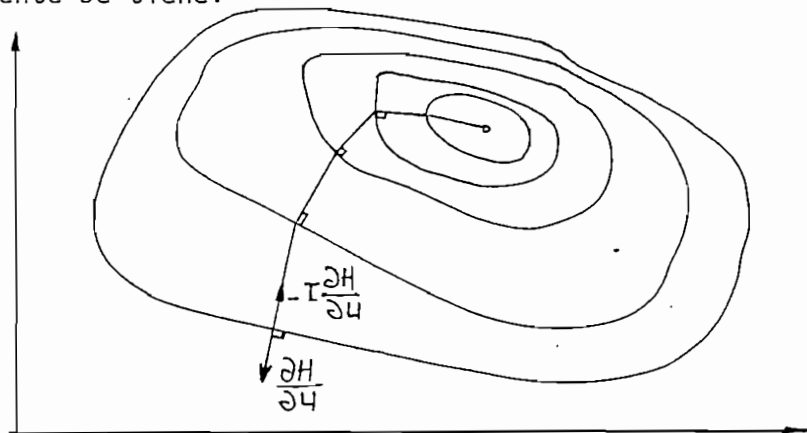


Figura N° 3.1.1.

Pendiente más pronunciada para encontrar el mínimo de un funcional J .

Un aspecto importante de este método está en determinar un valor adecuado de la medida de paso τ . De la figura 3.1.1. se deduce que si el valor escogido es muy grande, se puede sobrepasar el campo del funcional, y por lo tanto llegar a una divergencia. Por otro lado, si el valor de τ es demasiado pequeño, el tiempo utilizado en encontrar el extremo será muy grande, puesto que se estaría recorriendo en pasos muy reducidos.

El algoritmo desarrollado permite determinar el valor más adecuado para τ entre 0,25 y 1,00, tal que, siempre se tenga el mayor decrecimiento de $\frac{\partial H}{\partial u}$ hasta llegar a cero.

La integración de las ecuaciones diferenciales se realiza con el método de RUNGE-KUTTA-SIMPSON DE CUARTO ORDEN, por ser uno de los más precisos que existen, mientras que la integración numérica de funciones se efectúa con la técnica de SIMPSON, métodos muy bien descritos en la obra: MODERN METHODS OF ENGINEERING COMPUTATION de Robert L. Ketter y Sherwood P. Prawel Jr.

Esta técnica es ejecutada en el computador, mediante el siguiente algoritmo.

3.1.2. ALGORITMO Y FLUJOGRAMA

Para usarse un computador digital, todas las variables serán discretizadas en intervalos de tiempo adecuados, tal que, no hagan de la solución ni muy imprecisa ni demasiado larga. Con este antecedente, a continuación se dan los pasos necesarios para resolver los problemas de Control óptimo mediante la técnica de la pendiente más pronuncia-

da.

- 1.- Seleccionar una aproximación a la historia de Control $u^i(t)$ $t \in [t_0, t_f]$. Donde, este intervalo se divide en NI subintervalos de ancho igual a E -exactitud-:

$$NI = \frac{t_f - t_0}{E} \quad (3.15)$$

generalmente, de algún conocimiento previo del problema se obtiene un valor constante de $u^i(t)$, donde $i = 0$, como suposición inicial.

- 2.- Empleando este valor supuesto, se integran la ecuación de estado dada por 3.1 bajo la condición inicial $x(t_0) = x_0$, desde t_0 hasta t_f . Se almacena el vector resultante $x^i(t)$ en la memoria del computador.

- 3.- Substituyendo el valor de $x^i(t_f)$ encontrado en el paso 2, en la ecuación 3.5, se obtiene la condición de borde $p^i(t_f)$. Utilizando esta condición de borde y el vector $x^i(t)$ obtenido, se integra la ecuación de coestado 3.6 desde t_f hasta t_0 . Con los vectores $x^i(t)$ y $p^i(t)$ obtenidos y $u(t)$ supuesto, se evalúa $\partial H^i / \partial u$ desde t hasta t_f y se almacena esta función en memoria.

- 4.- Se evalúa, la norma $\partial H^i / \partial u$, a fines de comparación, con la siguiente fórmula:

$$\| \frac{\partial H^i}{\partial u} \| = \left[\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial H^i}{\partial u}(t) \right] dt \right]^{0.5} \quad (3.16)$$

$$\text{Si } \left| \frac{\partial H^i}{\partial u} \right| \leq \text{ALFA}, \text{ se cumple} \quad (3.17)$$

donde ALFA es una constante de error, preestablecida de acuerdo a la precisión que se desea, entonces termina el proceso iterativo y la salida es el control y trayectorias extremales.

Si 3.17 no se cumple, se procede a reajustar la entrada de control mediante la relación:

$$u^{i+1}(t_k) = u^i(t_k) - \tau \frac{\partial H^i}{\partial u}(t_k) \quad k = 0, 1, \dots, NI-1 \quad (3.18)$$

Se reemplaza $u^i(t_k)$ por $u^{i+1}(t_k)$, y retorna al paso N° 2 para calcular nuevas trayectorias de estado.

Este método, puede alternativamente utilizar como criterio de parada, el valor que se obtiene del rendimiento, cálculo que se realiza en cada iteración, a fin de tener la historia del rendimiento en función de las iteraciones que se realicen, mediante la comparación:

$$J^{i+1} - J^i < \text{ALFA} \quad (3.19)$$

pero con la desventaja de que el proceso termina en cuanto se encuentre un extremal, que bien podría ser relativo o absoluto, siendo el objetivo alcanzar extremales absolutos.

El programa codificado como "CONTROL.BAS" está diseñado en doble precisión, para determinar: trayectoria óptima de estado, trayectoria de coestado e historia de control óptimo en función del tiempo; Re

dimiento y Norma en función del número de iteraciones, mediante el método de la Pendiente más pronunciada.

FLUJOGRAMA

La figura 3.1.2. indica un diagrama de bloques general de esta técnica, en el cual se anota también el método numérico seguido en los cálculos.

Nomenclatura de los datos que se introducen por teclado

N : orden de estado

M : orden de coestado

E : exactitud

ALFA : Constante de error

X_0 : estado inicial

u_0 : control inicial

NMX : número máximo de iteraciones

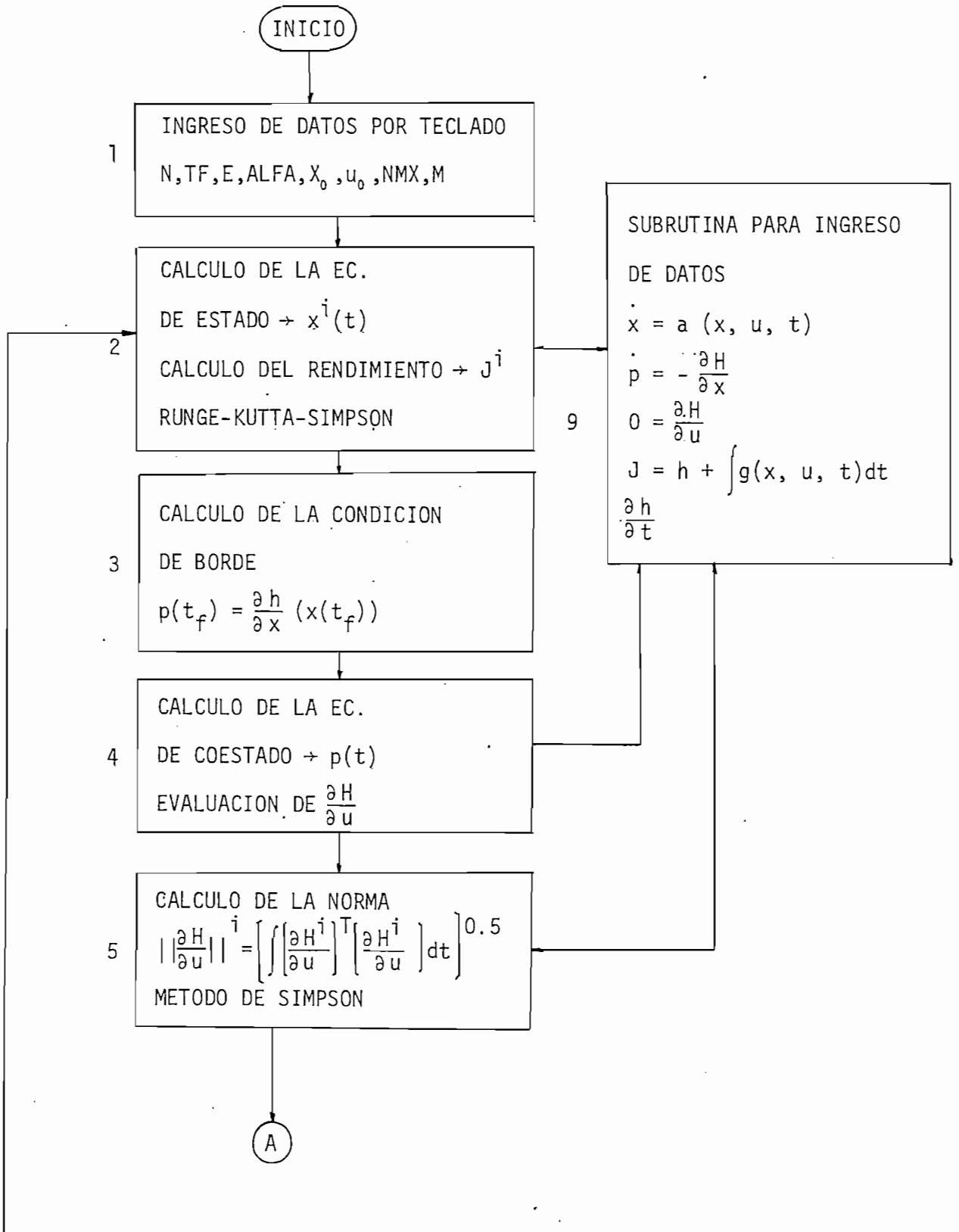
El bloque N° 7 comprende la determinación del valor adecuado para $TAO(\tau)$, como medida del paso, y puede variar desde 0,25 hasta 1.00 tal que siempre se cumpla que:

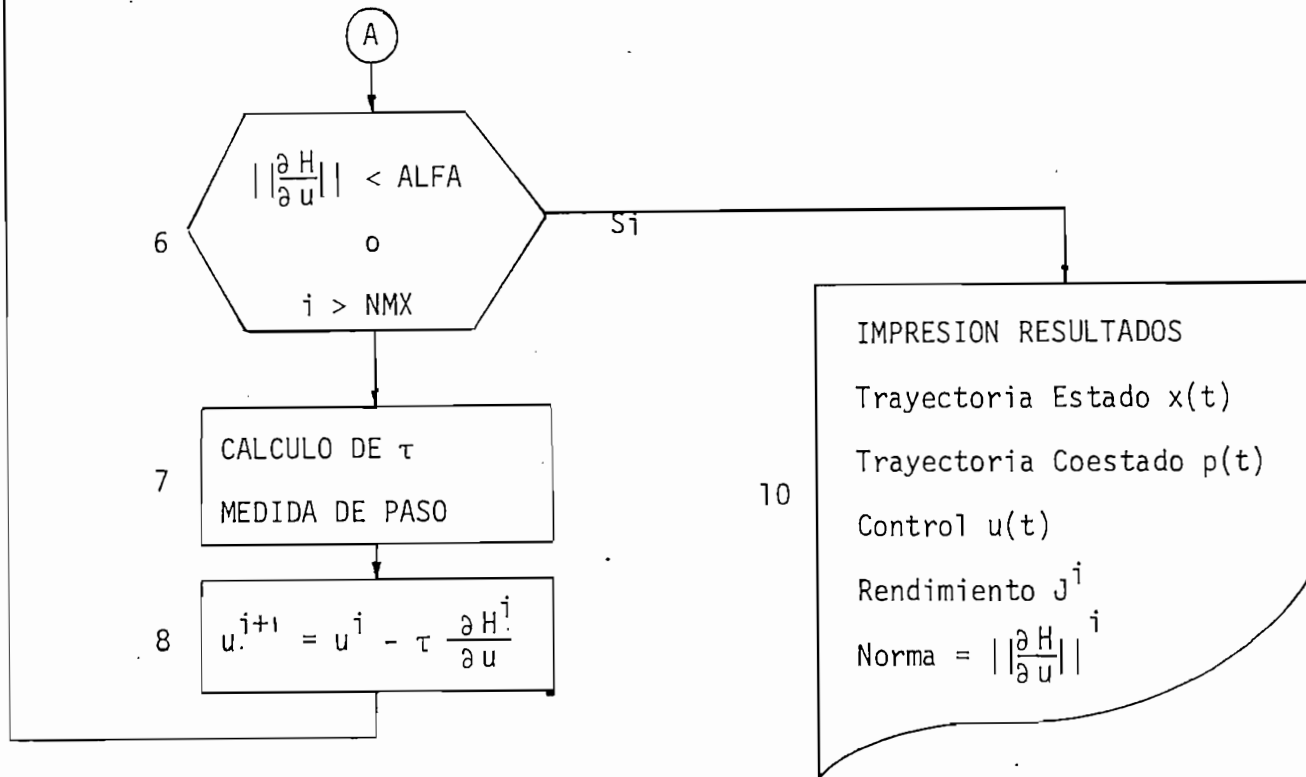
$$J^i > J^{i+1} \quad (3.20)$$

Cuando se cubren todos los valores y sin embargo no se cumple 3.20, se utiliza el último valor de $TAO(\tau)$ probado y se da en la pantalla del computador una indicación de inestabilidad.

DIAGRAMA GENERAL DE BLOQUES
 METODO DE LA PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

Figura N° 3.1.2.





NOTAS

- En la impresión de los resultados, $x(t)$, $p(t)$ y $u(t)$, se emplea el tiempo discreto en intervalos iguales a E .
- El rendimiento y la Norma se dan en función del # de iteración.
- Se considera que el tiempo inicial T_I es = 0.

3.1.3. EJEMPLOS.-

A fines de comparación de resultados, se resuelven tres ejemplos con los tres métodos estudiados en este trabajo.

En el planteamiento de un problema se emplea un subprograma creado - exclusivamente para introducir las ecuaciones necesarias. El espa-

cio de memoria que ocupa, depende de cada método y se indica en el planteamiento de los ejemplos.

Es importante la instrucción CHAIN MERGE, puesto que permite enlazar el subprograma de datos con el programa principal. A continuación - se indica la distribución del subprograma de datos:

Nº de INSTRUCCION	DATOS DEL PROBLEMA
5000 "EJEMPLO A"
5010	A(1) Ecuaciones de estado
5020	A(2)
.	⋮
.	A(N)
.	G(J) Función $g(x(t), u(t), t)$
.	DHU(J) Función $\partial H / \partial u$
.	B(1) Ecuaciones de coestado
.	⋮
.	B(N)
.	H Función $h(x(t_f))$
.	DHX(N) Función $\partial h / \partial x$
6000	CHAIN MERGE "CONTROL"

EJ. 3.1.A.

Determinar la trayectoria óptima de estado del siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 4$$

y la medida de rendimiento:

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

Entonces se tiene:

ec. de estado: $A(1) = -x(1,J) + u(1,J)$

integrando del rendimiento: $G(J) = .5*(u(1,J))^2$

además el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} u^2(t) + p(t)(-x(t) + u(t))$$

-derivando respecto al control, resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + p(t) : \quad DHU = u(1,J) + p(1,J)$$

-derivando H respecto a x(t), queda:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t) = -\dot{p}(t) : \quad B(1) = p(1,J)$$

-la función $h(x(t_f))$ es : $H = x(1, NI-1)^2$

y derivando $\partial h / \partial x$: $DHX(1) = 2 * x(1, NI-1)$

Con estos datos se forma el subprograma denominado "EJEMPLO A. CON",
y los resultados obtenidos son los siguientes.

```

6010 LPRINT "EJEMPLO 6.23 D. KIRK"
6020 ' EJERCICIO 6.23 D. KIRK . METODO PENDIENTE + PRONUNCIADA
6030 '
6040 A(I)=-X(I,J)+U(I,J)
6050 B(J)=.5*(U(I,J))^2
6060 DHU(J)=U(I,J)+B(I,J)
6070 B(I)=B(I,J)
6080 H= Y(I,NI) ^2
6090 DHX(I)=2*Y(I,NI)
6100 '
6110 CHAIN MERGE "CONTROL"

```

PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

```

EJEMPLO 6.23 D. KIRK
ORDEN DE ESTADO= 1
ORDEN DE CONTROL= 1
TIEMPO FINAL= 1
EXACTITUD= .1
ESTADO INICIAL X 1 (0)= 4
PASO INICIAL= 1
CONTROL INICIAL U 1 (t)=1

```

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	estado x 1 (t)
0	4
.1	3.562758922576904
.2	3.161175012588501
.3	2.791229009628296
.4	2.449218511581421
.5	2.131720542907715
.6	1.835557579994202
.7000001	1.557765493856201
.8000001	1.29556405544281
.9000001	1.046329021453857
1	.8075659275054932

* COESTADOS OPTIMOS *

t	coestado p 1 (t)
0	.5376312732696533
.1	.5941743850708008
.2	.6566641926765442
.3	.7257260680195669
.4	.8020512461662293
.5	.8864036202430725
.6	.9796274304389954
.7000001	1.082655662258667
.8000001	1.196519494056702
.9000001	1.322358369827271
1	1.4615131855010984

U 1 (t)

.....
0 -1.5380826
.1 -1.5946797
.2 -1.6572228
.3 -1.7263433
.4 -1.8027335
.5 -1.8871576
.6 -1.9804608
.7000001 -1.083577
.8000001 -1.197537
.9000001 -1.323483
1 -1.462675
.....

ITERACION RENDIMIENTO NORMA
.....
1 1.204591 .2778024
2 1.117007 2.501272E-02
3 1.114637 2.17388E-04
.....

PASO FINAL TAO= .5
=====

```

4010 LPRINT "EJEMPLO REACTOR QUIMICO D. KIRK"
5000 ' EJERCICIO "REACTOR QUIMICO . KIRK", PENDIENTE MAS PRONUNCIADA.
5010 '
5020 C=EXP(.25*Y(1,J)/(Y(1,J)+2))
5030 A(1)=-2*(Y(1,J)+.25)+(Y(2,J)+.5)*C-(Y(1,J)+.25)*U(1,J)
5040 A(2)=.5-Y(2,J)-(Y(2,J)+.5)*C
5050 B(1)=-2*X(1,J)+2*P(1,J)-P(1,J)*(Y(2,J)+.5)*(50/(Y(1,J)+2)^2)*C+P(1,J)*U(1,J)
5060 B(2)=-2*X(2,J)-P(1,J)*C+P(2,J)*(1+C)
5070 G(J)=X(1,J)^2+X(2,J)^2+.1*(U(1,J)^2)
5080 DHU(J)=.2*U(1,J)-P(1,J)*(X(1,J)+.25)
5090 H=0
5100 DHX(1)=0
5110 DHX(2)=0
5490 '
5500 RETURN
6000 CHAIN MERGE "CONTROL"
    
```

PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

EJEMPLO REACTOR QUIMICO D. KIRK
 ORDEN DE ESTADO= 2
 ORDEN DE CONTROL= 1
 TIEMPO FINAL= .8
 EXACTITUD= .08
 ESTADO INICIAL X 1 (0)= .05
 ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0
 PASO INICIAL= 1
 CONTROL INICIAL U 1 (t) 1

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *		
t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	.05	0
0 .08	4.190878197550774D-02	-.0275033563375473
0 .16	3.596880286931992D-02	-4.464183002710342D-02
0 .24	3.147045522928238D-02	-5.525246635079384D-02
0 .32	2.787932194769383D-02	-6.156203895807266D-02
0 .4	2.475751936435699D-02	-6.489463150501251D-02
0 .48	2.171885967254439D-02	-6.601821631193161D-02
0 .56	1.840494014322758D-02	-6.533189117908478D-02
0 .64	1.447678357362747D-02	-6.297923624515534D-02
0 .72	9.618890471756458D-03	-5.892857536673546D-02
0 .7999999	3.553675953298907D-03	-.053040761500597

* COESTADOS OPTIMOS *		
t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0	1.053738170051575	7.1985457539558411
0 .08	.9057426710128784	.1480073779821396
0 .16	.607560396194458	7.595691084861755D-02
0 .24	.4085187613964081	.0311980377882719
0 .32	.2705762684345245	3.709038719534874D-03
0 .4	.1738924384117126	-1.217380352318287D-02
0 .48	.1064507216215174	-1.993611827492714D-02
0 .56	6.039128080010414D-02	-2.189198722594166D-02
0 .64	3.024674765765667D-02	-1.969667053750992D-02
0 .72	1.202755700796843D-02	-1.462809834629297D-02
0 .7999999	2.719949232414365D-03	-7.749112788587809D-03

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	1.231585
0 .08	1.235206
0 .16	.8517613
0 .24	.6029707
0 .32	.4385322
0 .4	.3299144
0 .48	.2595741
0 .56	.2159641
0 .64	.191019
0 .72	.1788666
0 .7999999	.1751732

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	7.144853E-02	.1973829
2	5.452032E-02	.1577955
3	.0452491	8.182046E-02
4	4.247487E-02	7.650188E-02
5	4.0648224E-02	.0655406
6	3.890331E-02	6.656943E-02
7	3.814499E-02	5.961072E-02
8	3.673104E-02	4.424192E-02
9	3.627877E-02	3.905637E-02
10	3.603773E-02	3.633547E-02
11	.0358103	3.422644E-02
12	.0356183	3.216089E-02
13	3.545144E-02	3.023885E-02
14	3.530792E-02	.0284265
15	3.518441E-02	2.672361E-02
16	3.507843E-02	2.512234E-02
17	3.498766E-02	2.361721E-02
18	3.491015E-02	2.220248E-02
19	3.484415E-02	2.087287E-02
20	3.478813E-02	1.962328E-02

PASO FINAL TAD= .25

TAO = 0.5

u₀ = 1.5

FENDIENTE MAS PRONUNCIADA

EJEMPLO REACTOR QUIMICO D. KIRK

ORDEN DE ESTADO= 2

ORDEN DE CONTROL= 1

TIEMPO FINAL= .8

EXACTITUD= .08

ESTADO INICIAL X 1 (0) = .05

ESTADO INICIAL Y 2 (0) = 0

PASO INICIAL= .5

CONTROL INICIAL U 1 (t) 1.5

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1 (t)	ESTADO x2 (t)
0	.05	0
0 .08	.0431799553334713	-2.794284373521805D-02
0 .16	3.816056624054909D-02	-4.612788185477257D-02
0 .24	3.421388939023018D-02	-.0579589307308197
0 .32	3.074459172785282D-02	-6.538448482751844D-02
0 .4	2.722927459263802D-02	-6.950121372938156D-02
0 .48	2.316932752728462D-02	-7.086418569087982D-02
0 .56	1.812934502959251D-02	-6.967255473136902D-02
0 .64	1.171464007347822D-02	-6.590360403060913D-02
0 .72	3.623437136411667D-03	-5.942728742957115D-02
0 .7999999	-6.316777318716049D-03	-5.011130124330521D-02

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1 (t)	COESTADO P2 (t)
0 0	1.06369936466217	.1972802430391312
0 .08	.908525288105011	.1458688378334045
0 .16	.6015611886978149	7.206883281469345D-02
0 .24	.3965778946876526	2.631065063178539D-02
0 .32	.256177693605423	-1.407341100275517D-03
0 .4	.159447193145752	-1.684993132948875D-02
0 .48	9.354157745838165D-02	-2.366497181355953D-02
0 .56	4.994695633649826D-02	-2.437842823565006D-02
0 .64	2.267267927527426D-02	-2.090157754719257D-02
0 .72	7.321231532841921D-03	-1.479981478540897D-02
0 .7999999	5.901279509998858D-04	-7.429098000208139D-03

HISTORIA DEL CONTROL

t	u i (t)
0 0	1.194619
0 .08	1.194316
0 .16	.843586
0 .24	.6170444
0 .32	.4698076
0 .4	.3755986
0 .48	.3176164
0 .56	.2843568
0 .64	.2676314
0 .72	.261574
0 .7999999	.2620551

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	.19471	.2946436
2	.1541379	.2675572
3	.1209855	.2410246
4	9.455753E-02	.2098225
5	7.535465E-02	.1617917
6	6.460504E-02	.1351859
7	5.774117E-02	.1148753
8	5.207868E-02	.1073937
9	4.807285E-02	9.128991E-02
10	4.459146E-02	8.856583E-02
11	4.244786E-02	.0759631
12	4.019945E-02	8.205587E-02
13	3.944443E-02	7.466186E-02
14	.0375006	5.224857E-02
15	3.686921E-02	4.294731E-02
16	3.655476E-02	.0400952
17	3.626626E-02	.0377569
18	3.601926E-02	3.549366E-02
19	3.580423E-02	3.337895E-02
20	.0356182	3.138595E-02

PASO FINAL TAD= .25

Ejemplo # 3

```

4125 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 1 D. KIRK"
5000 EJEMPLO #3 D. KIRK PENDIENTE MAS PRONUNCIADA
5010 A(1)=X(2,J)
5020 A(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)+U(1,J)
5030 B(1)=-2*X(1,J)+P(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))
5040 B(2)=-X(2,J)-P(1,J)-P(2,J)*(1-X(1,J)^2)
5220 H=0
5230 DHX(1)=0
5240 DHX(2)=0
5290 DHU(J)=U(1,J)+P(2,J)
5300 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2
5490
6000 CHAIN MERGE "CONTROL"

```

```

4125 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 2 D. KIRK"
5000 EJEMPLO #32, KIRK PENDIENTE MAS PRONUNCIADA
5010 A(1)=X(2,J)
5020 A(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)+U(1,J)
5030 B(1)=-2*X(1,J)+P(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))
5040 B(2)=-X(2,J)-P(1,J)-P(2,J)*(1-X(1,J)^2)
5220 H=X(1,NI)^2
5230 DHX(1)=2*X(1,NI)
5240 DHX(2)=0
5290 DHU(J)=U(1,J)+P(2,J)
5300 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2
5490
6000 CHAIN MERGE "CONTROL"

```

```

4125 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 3 D. KIRK"
5000 EJEMPLO #33, KIRK PENDIENTE MAS PRONUNCIADA
5010 A(1)=X(2,J)
5020 A(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)+U(1,J)
5030 B(1)=-2*X(1,J)+P(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))
5040 B(2)=-X(2,J)-P(1,J)-P(2,J)*(1-X(1,J)^2)
5220 H=10*X(1,NI)^2
5230 DHX(1)=20*X(1,NI)
5240 DHX(2)=0
5290 DHU(J)=U(1,J)+P(2,J)
5300 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2
5490
6000 CHAIN MERGE "CONTROL"

```


PENDIENTE MAS FRONUNCIADA

EJEMPLO #3 CASO 1 D. KIRK

ORDEN DE ESTADO= 2

ORDEN DE CONTROL= 1

TIEMPO_FINAL= 1

EXACTITUD= .1

ESTADO_INICIAL_X_1 (0)= 1

ESTADO_INICIAL_X_2 (0)= 0

PASO_INICIAL= 1

CONTROL_INICIAL_U_1 (t)= 1

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t ESTADO x1 (t) ESTADO x2 (t)

t	ESTADO x1 (t)	ESTADO x2 (t)
0	1	0
0.1	.9941226243972778	-.1174725219607353
0.2	.9772434830665589	-.2199712097644806
0.3	.9507185816764832	-.3104171454906464
0.4	.9155889749526978	-.3921490609645844
0.5	.8725504875183106	-.4687111973762512
0.6	.821940004825592	-.5437304377555847
0.7000001	.7637305855751038	-.6208594441413879
0.8000001	.6975299715995789	-.7037601470947266
0.9000001	.6225795149803162	-.7961026430130005
0.1	.5377540588378906	-.901547906782959

* COESTADOS OPTIMOS *

+ COESTADO F1 (t) COESTADO F2 (t)

t	COESTADO F1 (t)	COESTADO F2 (t)
0.0	1.613353610038757	.3759690821170807
0.1	1.641274333000183	.1851579248905182
0.2	1.451035022735596	4.206708073616028D-02
0.3	1.254660248756409	-7.120126485824585D-02
0.4	1.059816718101501	-.1548093259334564
0.5	.8715217113494873	-.2092045694589615
0.6	.6929381489753723	-.2352204173803329
0.7000001	.5260437726974487	-.2341380119323731
0.8000001	.3721502125263214	-.2077048718929291
0.9000001	.2323093414306641	-.1581106930971146
0.1	.1076855063438416	-8.792445063591003D-02

HISTORIA DEL CONTROL

t u_1(t)

0.0	-.3701501
0.1	-.1800127
0.2	-.0371607
0.3	7.576228E-02
0.4	.1589282
0.5	.2127987
0.6	.2382265
0.7000001	.236516
0.8000001	.2094411
0.9000001	.1592193
0.1	8.844631E-02

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	.8594797	.2998328
2	.8476248	.1165707
3	.8469403	9.750549E-02
4	.8459828	4.738529E-02
5	.8456235	2.469594E-02
6	.8453615	1.249355E-02
7	.8438528	1.787335E-02
8	.8449828	9.278836E-03
9	.8439446	1.195273E-02
10	.8447427	6.785813E-03
11	.8440273	8.039815E-03
12	.8445881	4.906177E-03
13	.8440941	5.435305E-03
14	.8444867	3.516644E-03
15	.8441454	3.690616E-03

PASO FINAL IAO= .25

=====

FENDIENTE MAS FRONUNCIADA

EJEMPLO #3 CASO 2 D. KIRK

ORDEN DE ESTADO= 2

ORDEN DE CONTROL= 1

TIEMPO FINAL= 1

EXACTITUD= .1

ESTADO INICIAL X 1 (0)= 1

ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0

PASO INICIAL= 1

CONTROL INICIAL U 1 (t)-1

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1 (t)	ESTADO x2 (t)
0	1	0
0 .1	.9918469190597534	-.1629702597856522
0 .2	.9683887362480164	-.306075930595398
0 .3	.9314509630203247	-.4327011406421661
0 .4	.8824792504310608	-.546978771686554
0 .5	.8224866390228272	-.6533797383308411
0 .6	.7520335912704468	-.7564611434936524
0 .7000001	.6712274551391602	-.8607200980186462
0 .8000001	.5797335505485535	-.9704896211624146
0 .9000001	.4767979085445404	-1.089803576469421
0 1	.36128830909729	-1.222140312194824

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1 (t)	COESTADO P2 (t)
0 0	2.074437379837036	.9219790697097778
0 .1	2.152002811431885	.6328507661819458
0 .2	1.989877462387085	.4410758912563324
0 .3	1.810803651809692	.2793629765510559
0 .4	1.628623366355896	.1478344649076462
0 .5	1.452457785606384	4.636384546756744D-02
0 .6	1.287894487380981	-2.559658139944077D-02
0 .7000001	1.1381596326828	-6.912942975759506D-02
0 .8000001	1.00513768196105	-8.589598536491394D-02
0 .9000001	.8902294635772705	-7.811114937067032D-02
0 1	.7951205372810364	-4.846278950572014D-02

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	-.9200191
0 .1	-.6317596
0 .2	-.4405241
0 .3	-.2792505
0 .4	-.1480756
0 .5	-4.687789E-02
0 .6	2.489062E-02
0 .7000001	6.831404E-02
0 .8000001	8.505166E-02
0 .9000001	7.730893E-02
0 1	.0477551

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	1.886034	2.124061
2	1.17206	.9331255
3	1.069688	.3119779
4	1.049478	4.237345E-02
5	1.05006	1.477427E-02
6	1.050384	6.631734E-03
7	1.050561	3.993285E-03
8	1.05067	2.767766E-03
9	1.050745	1.999434E-03
10	1.050798	1.461103E-03
11	1.050837	1.071828E-03
12	1.050866	7.872654E-04

PASO FINAL TAO= .25

PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

EJEMPLO #3 CASO 3 D. KIRK

ORDEN DE ESTADO= 2

ORDEN DE CONTROL= 1

TIEMPO FINAL= 1

EXACTITUD= .1

ESTADO INICIAL X 1 (0)= 1

ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0

FASO INICIAL= .1

CONTROL INICIAL U 1 (t) 5

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	1	0
0 .1	1.004504084587097	8.999267965555191D-02
0 .2	1.016339421272278	.1464491039514542
0 .3	1.031926155090332	.1649270504713058
0 .4	1.047349452972412	.1432281732559204
0 .5	1.058638811111145	8.243626356124876D-02
0 .6	1.062123775482176	-1.260262727737427D-02
0 .7000001	1.0548015832901	-.1334965080022812
0 .8000001	1.034651041030884	-.2691128253936768
0 .9000001	1.000849843025208	-.4066532254219055
0 1	.9538866877555847	-.5326380133628845

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0 0	9.478830337524414	19.43240928649902
0 .1	11.27917575836182	16.591796875
0 .2	12.9677734375	15.38371086120605
0 .3	14.67514038085938	14.03396987915039
0 .4	16.25264739990234	12.5557746887207
0 .5	17.57348823547363	10.96253395080566
0 .6	18.55103302001953	9.268637657165527
0 .7000001	19.15481185913086	7.490602493286133
0 .8000001	19.41606521606445	5.648326396942139
0 .9000001	19.4177229309082	3.766045808792114
0 1	19.27001953125	1.872507214546204

HISTORIA DEL CONTROL

t u 1 (t)

0 0	2.407975
0 .1	1.901633
0 .2	1.576997
0 .3	1.216375
0 .4	.8353021
0 .5	.4578653
0 .6	.1151193
0 .7000001	-.1582828
0 .8000001	-.3287447
0 .9000001	-.3686489
0 1	-.2605018

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	117.6567	18.41705
2	93.21523	15.87407
3	78.85161	15.51112
4	22.23831	14.62512
5	8.625317	14.14202
6	20.83714	14.61088
7	9.766002	15.42206
8	23.50414	14.92992
9	8.192516	14.01393
10	20.63288	14.69215
11	10.18243	15.90004
12	24.53094	15.05434
13	7.643627	13.50752
14	19.60935	14.59754
15	10.94104	16.53824
16	25.84679	15.1491
17	6.833895	12.60814
18	17.77365	14.34349
19	12.11486	17.40992
20	27.60264	15.24204
21	5.782541	11.27443
22	15.09906	13.84106
23	13.53674	18.35014
24	29.44431	15.31954
25	4.780189	9.800839
26	12.26419	13.08843
27	14.45245	18.90795
28	30.51319	15.36435
29	4.263325	8.958122
30	10.72171	12.55325

PASO FINAL TAO=

.25

3.2. METODO DE LA VARIACION DE EXTREMALES

Este procedimiento, para calcular el Control óptimo de un sistema, se basa en la resolución del conjunto de ecuaciones diferenciales reducidas de Estado-Coestado, utilizando las condiciones iniciales formadas por x_0 (dato del problema) y p_0 supuesto inicialmente. Resuelto el sistema de ecuaciones, se calculan los valores de coestado finales $-p(t_f)$ y se prueba si cumple la condición de control óptimo dada por la expresión.

$$\|p^i(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x}(x^i(t_f), t_f)\| < \text{ALFA} \quad (3.21)$$

3.2.1. DESCRIPCION MATEMATICA

Dado el conjunto de ecuaciones diferenciales reducidas de estado-coestado:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (3.22)$$

$$\dot{p}(t) = d(x(t), p(t), t) \quad (3.23)$$

con las condiciones de borde siguientes:

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.24)$$

$$p(t_f) = 0; \quad h((t_f), t_f) = 0 \quad (3.25)$$

A fin de resolver el sistema formado por las ecuaciones 3.22 y 3.23, se supone una condición de borde: $p^i(t_0) = p_0$, donde $i=0$ -inicial-.

Las soluciones encontradas serán $x^0(t)$ y $p^0(t)$. Si se cumple que $p^0(t_f) = 0$, entonces si está con la solución, es decir, que p_0 supuesto es correcto. Si no sucede así, se debe modificar el valor es cogido para $p(t_0)$ y volver a calcular el sistema 3.22 y 3.23.

El método de Newton permite ajustar el valor de $p(t_0)$ en función de los valores determinados de $p(t_f)$. Gráficamente, este ajuste se observa en la Figura 3.2.1:

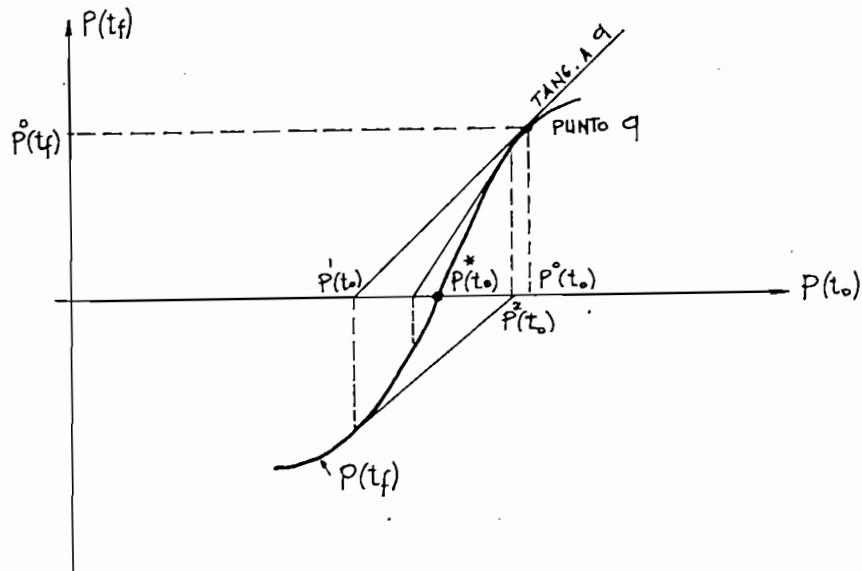


Figura 3.2.1.

Ajuste de $p(t_0)$ en función de $p(t_f)$

Inicialmente se tiene el punto q, de coordenadas $p^0(t_0)$ y $p^0(t_f)$ (este último valor se obtiene al calcular el sistema de ecuaciones 3.22 y 3.23). Se calcula la tangente al punto q y extrapolando hasta el eje de las abscisas se encuentra la primera aproximación: $p^1(t_0)$. Ahora se calcula $p^1(t_f)$ de igual forma que $p^0(t_f)$, y se encuentra la tangente al punto que determina estas coordenadas. La extrapolación de la tangente determina una nueva aproximación $p^2(t_0)$.

Si la suposición inicial $p^0(t_0)$ ha sido bastante buena, el proceso -

converge rápidamente hacia la solución.

CALCULO DE LA TANGENTE a g.-

Se puede determinar, realizando una perturbación del valor inicial $p^0(t_0)$ en $\delta p^0(t)$ y calculando las ecuaciones diferenciales de estado coestado, para hallar $p^0(t_f)$ y $\delta p^0(t_f)$. De la figura 3.2.2 se obtiene la relación de la tangente para las perturbaciones:

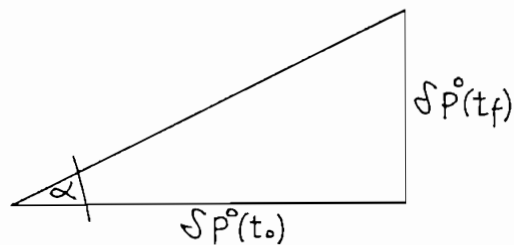


Figura N° 3.2.2.

Relación entre $\delta p^0(t_0)$ y $\delta p^0(t_f)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta p^0(t_f)}{\delta p^0(t_0)} \quad (3.26)$$

la ecuación de la tangente viene a ser la recta:

$$p^0(t_f) = \operatorname{tg} \alpha p^0(t_0) + b \quad (3.27)$$

de donde:

$$b = p^0(t_f) - \operatorname{tg} \alpha p^0(t_0) \quad (3.28)$$

substituyendo 3.28 en 3.27 resulta:

$$p(t_f) = \operatorname{tg} \alpha p(t_0) + \left[p^0(t_f) - \operatorname{tg} \alpha p^0(t_0) \right] \quad (3.29)$$

se determina $p'(t_0)$, donde $p'(t_f) = 0$

$$0 = \text{tg}\alpha p'(t_0) + \left[p^0(t_f) - \text{tg}\alpha p^0(t_0) \right] \quad (3.30)$$

despejando $p'(t_0)$, resulta:

$$p'(t_0) = p^0(t_0) - \left[\frac{\delta p(t_f)}{\delta p(t_0)} \left|_{p^0(t_0)} \right. \right]^{-1} p^0(t_f) \quad (3.31)$$

generalizando:

$$p^{i+1}(t_0) = p^i(t_0) - \left[\frac{\delta p(t_f)}{\delta p(t_0)} \left|_{p^i(t_0)} \right. \right]^{-1} p^i(t_f) \quad (3.32)$$

Esta relación permite calcular el $i+1$ -ésimo valor de $p^*(t_0)$, en base al i -ésimo valor encontrado.

GENERALIZACION PARA SISTEMAS DE N-ESIMO ORDEN.-

Sean, el conjunto de $2N$ ecuaciones vectoriales, diferenciales de estado-coestado:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (3.33)$$

$$\dot{p}(t) = b(x(t), p(t), t) \quad (3.34)$$

cuyo criterio de rendimiento es:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (3.35)$$

la relación 3.32 se convierte en:

$$p^{i+1}(t_0) = p^i(t_0) + \left\{ \left[\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x(t_f)) \right] P_x(p(t_0), t_f) - P_p(p(t_0), t_f) \right]_i \right\}^{-1} \cdot \left[p(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \right]_i \quad (3.36)$$

El término $P_R(p(t_0), t_f)_i$, es una matriz evaluada en $t = t_f$, que indica la influencia del cambio del Coestado i , sobre la trayectoria de coestado, al tiempo t .

$P_x(p(t_0), t_f)$, da el cambio del coestado i , sobre la trayectoria de estado, al tiempo t . Matricialmente se expresan:

$$P_p(p^i(t_0), t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1(t)}{\partial p_1(t_0)} & \dots & \frac{\partial p_1(t)}{\partial p_N(t_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_N(t)}{\partial p_1(t_0)} & \dots & \frac{\partial p_N(t)}{\partial p_N(t_0)} \end{bmatrix} p^{(i)}(t_0) \quad (3.37)$$

$$P_x(p^i(t_0), t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial p_1(t_0)} & \dots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial p_N(t_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_N(t)}{\partial p_1(t_0)} & \dots & \frac{\partial x_N(t)}{\partial p_N(t_0)} \end{bmatrix} p^i(t_0) \quad (3.38)$$

CALCULO DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA: P_p y P_x .-

Sean las ecuaciones reducidas de estado-coestado dadas por:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), t) \quad (3.39)$$

$$-\dot{p}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), t) \quad (3.40)$$

Derivando parcialmente respecto del valor inicial de coestado, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial p(t_0)} \left[\dot{x}(t) \right] = \frac{\partial}{\partial p(t_0)} \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right] \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial p(t_0)} \left[\dot{p}(t) \right] = \frac{\partial}{\partial p(t_0)} \left[-\frac{\partial H}{\partial x} \right] \quad (3.42)$$

Si las derivadas del lado izquierdo son contínuas, se puede intercambiar, el orden de derivación y utilizando la regla de derivación compuesta, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)} \right] = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x} \right] \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)} + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \right] \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)} \quad (3.43)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)} \right] = \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)} - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)} \quad (3.44)$$

Utilizando las definiciones dadas en las expresiones 3.37 y 3.38, se pueden reescribir las ecuaciones 3.43 y 3.44.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[P_x(p^i(t_0), t) \right] &= \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(t) \right]_i P_x(p^i(t_0), t) \\ &+ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t) \right]_i P_p(p^i(t_0), t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt} \left[P_p(p^i(t_0), t) \right] = \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t) \right]_i P_x(p^i(t_0), t)$$

$$+ \left[- \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} (t) \right]_i Pp(p^i(t_0), t) \quad (3.46)$$

Estas expresiones representan $2N^2$ ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución vienen a ser 3.37 y 3.38. Y para resolverse se utiliza el método de Runge-Simpson de Cuarto Orden, con las siguientes condiciones de borde:

$$Px(p^i(t_0), t_0) = \frac{\partial x(t_0)}{\partial p(t_0)} \Big|_{p^i(t_0)} = 0, \text{ (Matriz nula } n \times n) \quad (3.47)$$

$$Pp(p^i(t_0), t_0) = \frac{\partial p(t_0)}{\partial p(t_0)} \Big|_{p^i(t_0)} = I, \text{ (Matriz identidad } nxn) \quad (3.48)$$

Las condiciones dadas en 3.47 son cero, ya que un cambio en cualquiera de los componentes de $p(t_0)$, no altera a $x(t_0)$ (que son condiciones iniciales).

Sin embargo, un cambio en un j -elemento de $p(t_0)$, sólo afecta a $p_j(t_0)$, de aquí que las condiciones dadas en 3.48 resulten en una matriz identidad.

Ahora que se ha descrito matemáticamente el método "Variación de extremales", se puede desarrollar el algoritmo, que, computacionalmente permite resolver el problema del Control óptimo.

3.2.2. ALGORITMO Y FLUJOGRAMA.-

Este método ha sido estructurado en un algoritmo que consta de los siguientes pasos.

- 1.- Formar la función Hamiltoniano mediante los datos del problema. Derivar H respecto al control $u(t)$ e igualar a cero, cumpliendo con una de las condiciones del Control óptimo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.49)$$

A partir de 3.49 se despeja $u(t)$ y se reemplaza en el conjunto de ecuaciones de estado-coestado, resultando el conjunto de ecuaciones diferenciales reducidas de estado-coestado.

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (3.50)$$

$$\dot{p}(t) = b(x(t), p(t), t) \quad (3.51)$$

- 2.- De acuerdo a la naturaleza del problema, se realiza una suposición del valor inicial de $p^i(t_0)$, índice de iteración $i = 0$.

Estos 2 primeros pasos se realizarán para cualquier problema, en forma manual. A partir del tercero, se resuelve en el computador.

- 3.- Utilizando $p(t_0) = p^i(t_0)$ y $x(t_0) = x_0$ como condiciones iniciales se integran el conjunto de ecuaciones dadas por 3.50 y 3.51 y las ecuaciones de influencia 3.45 y 3.46, con las condiciones iniciales 3.47 y 3.48.

Para los siguientes cálculos se vió que es necesario contar con las matrices P_p y P_x evaluadas en $t = t_f$, por lo que se almace-

nan solamente esos valores, al igual que $p^i(t_f)$ y $x^i(t_f)$.

4.- Verificar si el criterio de parada se cumple:

$$\|p^i(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x}(x^i(t_f))\| < \text{ALFA} \quad (3.52)$$

Si se cumple, se puede emplear el valor de $p^i(t_0)$ para reintegrar el conjunto de ecuaciones reducidas de estado-coestado y así, obtener las trayectorias óptimas de estado del sistema.

Si no se cumple el criterio 3.52 -ALFA es constante dada en el problema- se calcula un nuevo valor de $p^{i+1}(t_0)$ mediante la ecuación 3.36, para volver al paso N° 3.

En la integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales se emplea el método numérico de RUNGE-SIMPSON DE CUARTO ORDEN, tanto para las ecuaciones reducidas de estado-coestado, como para las de influencia.

También se requiere un método para invertir matrices $N \times N$ -en la ecuación 3.36- y siendo la inversión de la matriz, parte fundamental del algoritmo, se estudió el mejor método para esta aplicación. Existen métodos iterativos y de eliminación, los primeros, tienen la ventaja de ser programas muy simples y la gran desventaja de ser altamente sensibles a los errores computacionales acumulativos, y la posibilidad de divergencia de la solución. Los métodos de eliminación, en cambio, a parte de ser complejos en programar, garantizan encontrar la solución, si es que esta existe. Con este antecedente, se empleará la subrutina de Cholesky para invertir matrices.

En el cálculo del criterio de parada, se empleará la siguiente fórmula:

$$\text{NORMA} = \sum_{i=1}^N \left| P_i(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_i(t_f)) \right| < \text{ALFA} \quad (3.53)$$

i = orden de estado

N = orden del sistema

El valor del rendimiento será determinado en cada interacción, en tanto que el Control se calculará al final, cuando se tengan las trayectorias óptimas de estado.

FLUJOGRAMA.-

La figura 3.2.3 describe en bloques la secuencia de los pasos de programación que se tiene en el método "Variación de extremales", en la Determinación de Trayectorias óptimas de Estado.

Nomenclatura:

N : orden de estado

M : orden de control

TF : tiempo final del intervalo

TI : tiempo inicial (se considera $TI = 0$)

E : exactitud

$ALFA$: criterio de error (terminación)

x_0 : estado inicial

P_0 : coestado inicial

NMX : número máximo de iteraciones

En el bloque 5 aparece COE, como coeficiente del factor de modificación para el nuevo valor de $p^i(t_0)$. Esto se hizo con la finalidad de inicializar el programa con pequeñas modificaciones y sucesivamente aumentarlas, variando COE desde 0.1 hasta 1. Esto es necesario - debido a la inestabilidad que se tiene en el inicio del método.

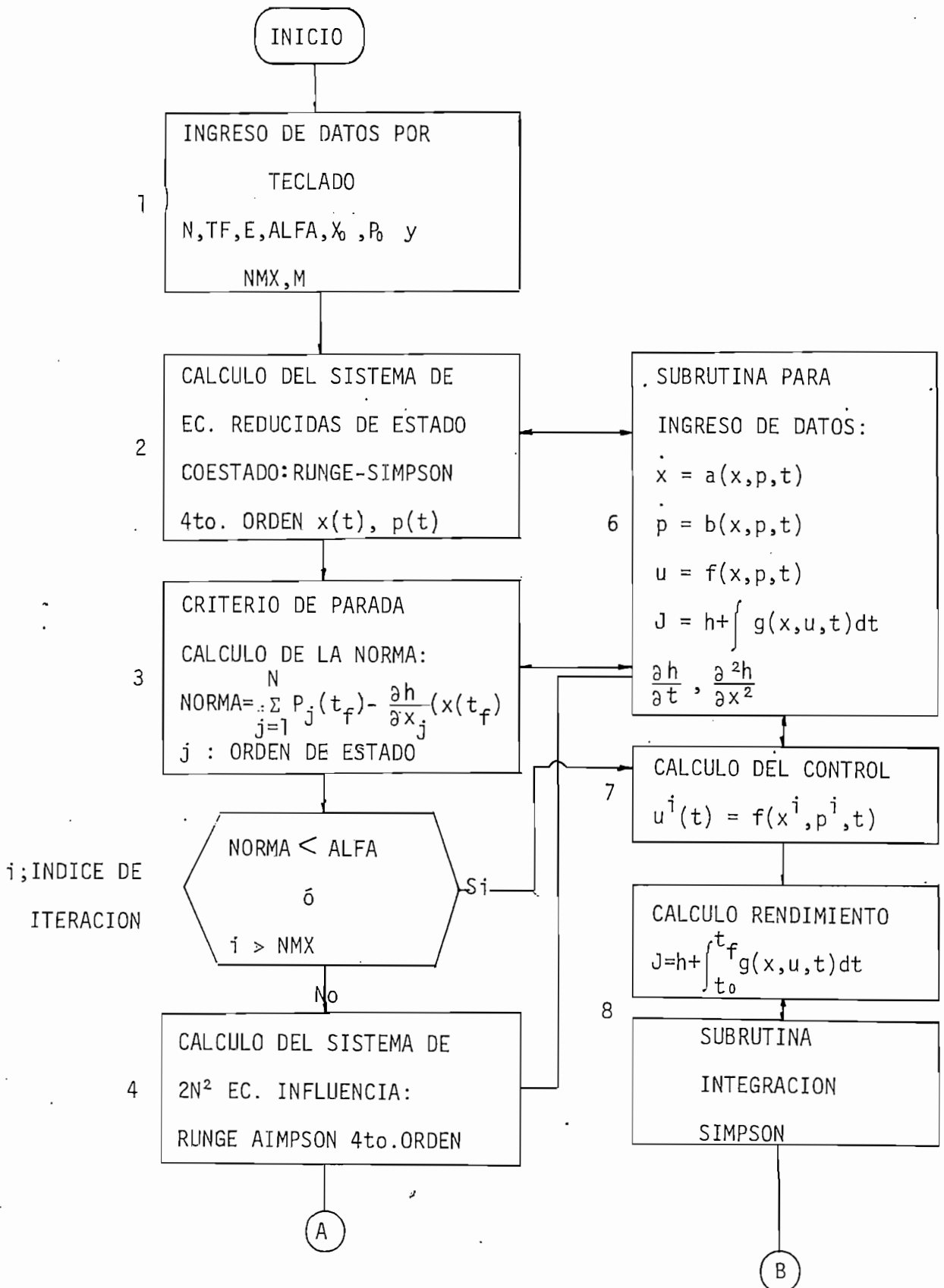
3.2.3. EJEMPLOS.-

En el planteamiento de un problema se utiliza un subprograma creado para introducir todas las ecuaciones necesarias. Este subprograma - se enlaza con el programa principal "VAREX.BAS" mediante la instrucción CHAIN MERGE "VAREX".

DIAGRAMA GENERAL DE BLOQUES

VARIACION DE EXTREMALES

Figura N° 3.2.3.



A

B

5

CALCULO DE NUEVA CONDICION
 INICIAL DE COESTATO

$$p^{i+1}(t_0) = p^i(t_0) + COE * \left\{ \left[\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] p_x - p_p \right]_i \right\}^{-1} * \left[p(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

SUBROUTINA INVERSION
 DE MATRICES
 CHOLESKY

9

IMPRESION RESULTADOS:
 TRAYECTORIAS ESTADOS x(t)
 TRAYECTORIAS COESTADOS p(t)
 CONTROL u(t)
 RENDIMIENTO: J(i)
 NORMA N(i)

NOTAS

- En la impresión de los resultados, x(t), p(t) y u(t) se utiliza el tiempo discreto en intervalos iguales a E.
- El rendimiento y la Norma se dan en función del # de iteración.
- Se considera que el tiempo inicial TI = 0.

El programa está diseñado para que las ecuaciones del problema ocupen los siguientes espacios de memoria:

Nº de INSTRUCCION	DATOS DEL PROBLEMA
4720 REM	"EJEMPLO A"
4730 A(1)	Ecuaciones reducidas de
4740 A(2)	Estado-coestado

Nº de INSTRUCCION

DATOS DEL PROBLEMA

```

.
.
.
4970 A(2N)      .....
5010 PA        Valores de las ecuaciones
5020 PB        de influencia
.
.
.
5990 PD        .
6700 DHX(I)    Datos de la medida de
6710 u(I,J)    rendimiento, control.
.
.
.
6980 N(I,NI)
10000 CHAIN MERGE "VAREX"
```

A fin de aclarar este procedimiento, se desarrollan los siguientes e j e m p l o s:

EJEMPLO Nº 3.2.A.

Determinar la trayectoria óptima del siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 4.0$$

y la medida de rendimiento:

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} u^2(t) + p(t) (-x(t) + u(t))$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$0 = u(t) + p(t)$$

entonces: $u(t) = -p(t) \rightarrow u(1,J) = -P(1,J)$

reemplazando en la ecuación del sistema, resulta:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}(t)$$

$$\dot{p}(t) = p(t)$$

Se tiene el conjunto de ecuaciones de estado-coestado:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t) \rightarrow A(1) = -x(1,J) - x(2,J)$$

$$\dot{p}(t) = p(t) \rightarrow A(2) = x(2,J)$$

La matriz función de influencia es:

$$\dot{P}_x(t) = P_A(1,1) P_x(t) + P_B(1,1) P_p(t)$$

$$\dot{P}_p(t) = P_C(1,1) P_x(t) + P_D(1,1) P_p(t)$$

donde:

$$P_A(1,1) = 0 \quad P_B(1,1) = 0$$

$$P_C(1,1) = 0 \quad P_D(1,1) = 1$$

La función $\frac{\partial h}{\partial x}$ es necesaria también en este algoritmo, por lo tanto

$$DHX(1) = 2 \cdot X(i, NI),$$

NI equivale a t_f en términos discretos.

La función $g(x(t), u(t), t)$, queda:

$$G(J) = 0,5 \cdot (u(1,J))^2$$

Finalmente, el subprograma formado se denomina "EJEMPLO A.VAR" y pro
duce los resultados que siguen..

```

4730 ' ejemplo 6.23 , d. kirk
4730 A(1)=-X(1,J)-X(2,J)
4740 A(2)=X(2,J)
4910 '
5010 PA(1,1)=0
5020 PB(1,1)=0
5030 PC(1,1)=0
5040 PD(1,1)=1
5990 '
6700 DHY(1)=2*X(1,NI)
6710 D2HY(1,1)=2
6720 U(1,J)=-P(1,J)
6730 R(J)=.5*(U(1,J)^2)
6740 H=X(1,NI)^2
6750 '
6980 '
7560 LPRINT "EJEMPLO 6.23 D. KIRK"
10000 CHAIN MERGE "VAREX"

```

VARIACION DE EXTREMALES

EJEMPLO 6.23 D. KIRK
ORDEN DE ESTADO N= 1
ORDEN DE CONTROL M= 1
TIEMPO FINAL= 1
EXACTITUD= .1
ESTADO INICIAL X 1 (0)= 4
SUPOSICION INICIAL DE PD(1)= .5
* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	estado x 1 (t)
0	4
0 .1	3.561187505722046
0 .2	3.158016681671143
0 .3	2.786452054977417
0 .4	2.442775249481201
0 .5	2.123546600341797
0 .6	1.825570940971375
0 .7000001	1.545866250991821
0 .8000001	1.281633019447327
0 .9000001	1.030226826667786
0 1	.7891314029693604

* COESTADOS OPTIMOS *

t	coestado p 1 (t)
0 0	.5806566519876934
0 .1	.6417248249053955
0 .2	.7092155814170837
0 .3	.7838043570518494
0 .4	.8662376999865042
0 .5	.9573406577110291
0 .6	1.058925002479553
0 .7000001	1.169298410415649
0 .8000001	1.292274475097656
0 .9000001	1.428184072440186
0 1	1.578327379446301

HISTORIA DEL CONTROL

t	u (t)
0 0	-.5806566
0 .1	-.6417248
0 .2	-.7090156
0 .3	-.7838044
0 .4	-.8662377
0 .5	-.9573407
0 .6	-1.058025
0 .7000001	-1.169298
0 .8000001	-1.292275
0 .9000001	-1.428184
0 1	-1.578387

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	1.180632	.4086987
2	1.174085	.3324901
3	1.159751	.2704919
4	1.166882	.2200538
5	1.163477	.1879881
6	1.161698	6.079805E-02
7	1.161297	1.545048E-02
8	1.16127	1.046062E-03
9	1.16127	1.245737E-04

numero de iteraciones = 9

=====


```
4720 ' ejemplo del stirred tank reactor :cap 6 d. kirk
4725 '
4726 '           METODO : VARIACION DE EXTREMALES
4727 '
4730 ES=EXP(25*X(1,J)/(X(1,J)+2))
4740 A(1)=-X(1,J)+.25+(2+5*X(3,J)*(X(1,J)+.25))+(X(2,J)+.5)*ES
4750 A(2)=.5-X(2,J)-(X(2,J)+.5)*ES
4760 FX=5*X(3,J)^2*(X(1,J)+.25)
4770 A(3)=-2*(X(1,J)-X(3,J))+50*(X(4,J)-X(3,J))*((X(2,J)+.5)/X(1,J)+
4780 A(4)=-2*X(2,J)+X(4,J)+(X(4,J)-X(3,J))*ES
4970 '
5010 ES=EXP(25*Y(1,J)/(X(1,J)+2))
5020 PA(1,1)=-2+50*(X(2,J)+.5)*ES/((X(1,J)+2)^2)-(X(1,J)+.25)*Y(3,J)/
5030 PA(1,2)=ES
5040 PA(2,1)=-50*(X(2,J)+.5)*ES/((X(1,J)+2)^2)
5050 PA(2,2)=-1-ES
5060 PB(1,1)=-X(1,J)+.25)^2/.2
5070 PB(1,2)=0
5080 PB(2,1)=0
5090 PB(2,2)=0
5100 TX=X(3,J)^2/.2
5110 PC(1,1)=-2+(X(4,J)-X(3,J))*100*(23-X(1,J))*(X(2,J)+.5)*ES/(X(1,
5120 PC(1,2)=50*(X(4,J)-X(3,J))*ES/((X(1,J)+2)^2)
5130 PC(2,1)=PC(1,2)
5140 PC(2,2)=-2
5150 PD(1,1)=-PA(1,1)
5160 PD(1,2)=-PA(2,1)
5170 PD(2,1)=-ES
5180 PD(2,2)=1+ES
5990 '
6700 DHX(1)=0
6710 DHX(2)=0
6720 FOR I=1 TO N
6730 FOR L=1 TO N
6740 D2HX(I,L)=0
6750 NEXT L,I
6760 '
6770 B(J)=X(1,J)^2+X(2,J)^2+.1*(U(1,J)^2)
6780 H=0
6790 '
6800 U(1,J)=(1/.2)*B(1,J)*(X(1,J)+.25)
6980 '
7560 LPRINT "EJEMPLO: REACTOR QUIMICO D. KIRK"
10000 CHAIN MERGE "VAREX"
```

VARIACION DE EXTREMOS

EJEMPLO: REACTOR QUIMICO D. KIRK

ORDEN DE ESTADO N= 2

ORDEN DE CONTROL M= 1

TIEMPO FINAL= .8

EXACTITUD= .02

ESTADO INICIAL Y 1 (0)= .05

ESTADO INICIAL Y 2 (0)= 0

SUPOSICION INICIAL DE PO(1)= 1

SUPOSICION INICIAL DE PO(2)= .5

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	.05	0
0 .08	3.915070742368698D-02	-2.570638991892338D-02
0 .16	3.173471614718437D-02	-4.051699489355087D-02
0 .24	2.455297792486191D-02	-4.892837903431997D-02
0 .32	2.302216973636627D-02	-5.347681045532277D-02
0 .4	.02083152346313	-5.575135722756386D-02
0 .48	1.981649175286293D-02	-5.683068186044693D-02
0 .56	1.990888640284538D-02	-.0575048066675663
0 .64	2.111884951591492D-02	-5.840436369180679D-02
0 .72	2.353538386523724D-02	-6.008922308683795D-02
0 .7999999	.0273426491767168	-.0631236732006073

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0 0	1.080620205029845	.1926247181836516
0 .08	.7148985130882263	.1046627461910248
0 .16	.4853634536266327	5.241464450955391D-02
0 .24	.3305345773696899	2.026879042387009D-02
0 .32	.2219632565975189	6.463062018156052D-04
0 .4	.1444724202156067	-1.060753967612982D-02
0 .48	8.910685777664185D-02	-1.593763194978237D-02
0 .56	5.012598213791847D-02	-1.682779006659985D-02
0 .64	2.392398752272129D-02	-1.416344102472067D-02
0 .72	7.731813937425613D-03	-8.416692726314068D-03
0 .7999999	-1.513240858912468D-04	2.622753381729126D-04

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	1.62093
0 .08	1.033553
0 .16	.6837187
0 .24	.4570514
0 .32	.3030045
0 .4	.1956384
0 .48	.1202125
0 .56	4.772821E-02
0 .64	3.243122E-02
0 .72	1.057462E-02
0 .7999999	-2.098431E-04

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	8.583624E-03	.6395631
2	.1021759	.5770342
3	9.483834E-02	.5207663
4	8.815189E-02	.4701331
5	8.155215E-02	.3791385
6	7.014703E-02	.2704136
7	5.652644E-02	.1698136
8	4.382659E-02	9.505024E-02
9	3.464857E-02	4.883014E-02
10	2.970007E-02	2.200592E-02
11	.0276251	6.67542E-03
12	2.694305E-02	2.622754E-04

numero de iteraciones = 12

VARIACION DE EXTREMOS

EJEMPLO: REACTOR QUIMICO D. KIRK

ORDEN DE ESTADO N= 2

ORDEN DE CONTROL M= 1

TIEMPO FINAL= .8

EXACTITUD= .08

ESTADO INICIAL Y 1 (0)= .05

ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0

SUPOSICION INICIAL DE PO(1)= .3

SUPOSICION INICIAL DE PO(2)= .2

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	.05	0
0 .08	.0391380675137043	-2.570213377475739D-02
0 .16	3.170366585254669D-02	-4.050007835030554D-02
0 .24	2.649609558264283D-02	-4.888945817947388D-02
0 .32	2.293014153838158D-02	-5.340462923049927D-02
0 .4	2.069212682545185D-02	-5.563138052821159D-02
0 .48	.0196138396859169	-5.664383620023727D-02
0 .56	1.962177269160748D-02	-5.722542852163315D-02
0 .64	2.071843296289444D-02	-.0579972006390558
0 .72	2.292150025308132D-02	-5.950477346777916D-02
0 .7999999	2.657773345708847D-02	-6.229056417842047D-02

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0 0	1.080905506340787	.1927861833130009
0 .08	.7152060866355896	.1048245057463646
0 .16	.4857335686683655	5.258184298872948D-02
0 .24	.3309608995914459	2.044087275862694D-02
0 .32	.222441166639328	8.184220641851425D-04
0 .4	.1449912041425705	-1.044468395411968D-02
0 .48	8.964981138706207D-02	-1.579867117106915D-02
0 .56	5.072951689362526D-02	-1.673425361514092D-02
0 .64	2.443572320044041D-02	-1.414612866938114D-02
0 .72	8.167371153831482D-03	-8.519271388649941D-03
0 .7999999	1.464476808905602D-04	-2.228748053312302D-05

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	1.621358
0 .08	1.053967
0 .16	.6841646
0 .24	.457547
0 .32	.3035545
0 .4	.1962399
0 .48	.1208542
0 .56	6.878891E-02
0 .64	.033076
0 .72	1.114771E-02
0 .7999999	2.025209E-04

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	.5398786	3.756976
2	.3805182	2.304091
3	.3366258	1.846169
4	.3181137	1.636961
5	.3026374	1.433861
6	.2817154	1.127623
7	.2672852	.8910151
8	.2459035	1.864642
9	1.289246	9.008498
10	9.578282E-02	1.90817
11	6.973458E-02	.4170875
12	4.225577E-02	4.337435E-02
13	2.756722E-02	4.277419E-02
14	2.684867E-02	5.343182E-03
15	2.684841E-02	2.226748E-05

numero de iteraciones = 15

=====

4720 EJEMPLO #3 D: KIRK; VARIACION DE EXTREMALES

4721 A(1)=X(2;J)

4722 A(2)=-X(1;J)+(1-X(1;J)^2)*X(2;J)-X(4;J)

4723 A(3)=-2*X(1;J)+X(4;J)*(1+2*X(1;J)*X(2;J))

4724 A(4)=-X(2;J)-X(3;J)-X(4;J)*(1-X(1;J)^2)

4730 FA(1,1)=0

4740 FA(1,2)=1

4750 FA(2,1)=-1-2*X(1;J)*X(2;J)

4760 FA(2,2)=1-X(1;J)^2

4770 FB(1,1)=0

4780 FB(1,2)=0

4790 FB(2,1)=0

4800 FB(2,2)=-1

4810 FC(1,1)=-2+2*F(2;J)*X(2;J)

4820 FC(1,2)=2*X(1;J)*F(2;J)

4830 FC(2,1)=FC(1,2)

4840 FC(2,2)=-1

4850 FD(1,1)=0

4860 FD(1,2)=1+2*X(1;J)*X(2;J)

4870 FD(2,1)=-1

4880 FD(2,2)=-1+X(1;J)^2

4890

5990

6700 H=0

6710 DHX(1)=0

6720 DHX(2)=0

6730 D2HX(1,1)=0

6740 D2HX(1,2)=0

6750 D2HX(2,2)=0

6760 D2HX(2,1)=0

6770 U(1;J)=-F(2;J)

6780 G(J)=X(1;J)^2+.5*X(2;J)^2+.5*U(1;J)^2

6980

7560 LPRINT "EJEMPLO #3-CASO 1-D. KIRK"

10000 CHAIN MERGE "varex"

VARIACION DE EXTREMALES

EJEMPLO #3 CASO 1 D. KIRK

ORDEN DE ESTADO N= 2

ORDEN DE CONTROL M= 1

TIEMPO FINAL= 1

EXACTITUD=.1

ESTADO INICIAL X-1 (0)= 1

ESTADO INICIAL X-2 (0)= 0

SUPOSICION INICIAL DE PO(-1)= 1.6

SUPOSICION INICIAL DE PO(-2)= .4

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

ESTADO x1(t)

ESTADO x2(t)

t	0	1	0
0.1	.9939960837364197		-.1174713894724846
0.2	.9769870042800903		-.2205377668142319
0.3	.9502717256546021		-.3121239840964345
0.4	.9148334860801697		-.395576536655426
0.5	.8713087439537048		-.4744584858417511
0.6	.8199719786643982		-.5524318814277649
0.7000001	.7607290148735046		-.6332045197486878
0.8000001	.6931131482124329		-.7205164432525635
0.9000001	.6162821054458618		-.8181387782096863
0-1	.5290157198905945		-.9298506379127503

* COESTADOS OPTIMOS *

COESTADO P1(t)

COESTADO P2(t)

t	0	1	0	02	03
0.0	1.671418281062506		.2553867896698648		
0.1	1.48580813407898		.1029045283794403		
0.2	1.291360974311829		-1.906532049179077D-02		
0.3	1.095329403877258		-.1111578121781349		
0.4	.9038370251655579		-.1737193614244461		
0.5	.7208262085914612		-.2074439227581024		
0.6	.5487700700759888		-.2134526818990707		
0.7000001	.3892499208450317		-.1933319717645645		
0.8000001	.2434131056070328		.1491271257400513		
0.9000001	.1123763918876648		-8.329398185014725D-02		
0-1	-2.324610948562622D-03		-1.386575400829315D-03		

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	.2548643
0 .1	.1029045
0 .2	1.906532E-02
0 .3	.1111578
0 .4	.1737194
0 .5	.2074439
0 .6	.2134527
0 .7000001	.193332
0 .8000001	.1491271
0 .9000001	8.329398E-02
0 1	1.386575E-03

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	.8985714	.2055513
2	.8928239	.1915386
3	.8883376	.1600944
4	.8849548	.1413735
5	.8801982	.1086013
6	.8765652	7.132223E-02
7	.8748746	3.915364E-02
8	.8744009	1.736028E-02
9	.8743259	5.882643E-03
10	.8743198	1.386575E-03

numero de iteraciones = 10

4720 EJEMPLO #32... KIRK, VARIACION DE EXTREMALES

4721 $A(1) = X(2, J)$

4722 $A(2) = -X(1, J) + (1 - X(1, J)^2) * X(2, J) - X(4, J)$

4723 $A(3) = -2 * X(1, J) + X(4, J) * (1 + 2 * X(1, J) * X(2, J))$

4724 $A(4) = -X(2, J) - X(3, J) - X(4, J) * (1 - X(1, J)^2)$

4730 $FA(1, 1) = 0$

4740 $FA(1, 2) = 1$

4750 $FA(2, 1) = -1 - 2 * X(1, J) * X(2, J)$

4760 $FA(2, 2) = 1 - X(1, J)^2$

4770 $FB(1, 1) = 0$

4780 $FB(1, 2) = 0$

4790 $FB(2, 1) = 0$

4800 $FB(2, 2) = -1$

4810 $FC(1, 1) = -2 + 2 * F(2, J) * X(2, J)$

4820 $FC(1, 2) = 2 * X(1, J) * F(2, J)$

4830 $FC(2, 1) = FC(1, 2)$

4840 $FC(2, 2) = -1$

4850 $FD(1, 1) = 0$

4860 $FD(1, 2) = 1 + 2 * X(1, J) * X(2, J)$

4870 $FD(2, 1) = -1$

4880 $FD(2, 2) = -1 + X(1, J)^2$

4890

5990

6700 $H = X(1, NI)^2$

6710 $DHX(1) = 2 * X(1, NI)$

6720 $DHX(2) = 0$

6730 $D2HX(1, 1) = 2$

6740 $D2HX(1, 2) = 0$

6750 $D2HX(2, 2) = 0$

6760 $D2HX(2, 1) = 0$

6770 $U(1, J) = -F(2, J)$

6780 $G(J) = X(1, J)^2 + .5 * X(2, J)^2 + .5 * U(1, J)^2$

6980

7560 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 2 D. KIRK"

10000 CHAIN MERGE "varex"

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	- .7290241
0 .1	- .5261877
0 .2	- .3534439
0 .3	- .2109112
0 .4	-9.855243E-02
0 .5	- .0159897
0 .6	3.763618E-02
0 .7000001	.0637413
0 .8000001	6.430461E-02
0 .9000001	.041811
0 1	-8.496046E-04

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	1.068383	.1348502
2	1.067634	.1195189
3	1.067048	.105923
4	1.066591	9.388621E-02
5	1.065921	7.256833E-02
6	1.065368	4.789849E-02
7	1.065077	2.625275E-02
8	1.06498	1.148699E-02
9	1.06496	3.782004E-03
10	1.064958	8.496046E-04

numero de iteraciones = 10

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

4720 EJEMPLO #33 KIRK ; VARIACION DE EXTREMALES

4721 A(1)=X(2,J)

4722 A(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)-X(4,J)

4723 A(3)=-2*X(1,J)+X(4,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))

4724 A(4)=-X(2,J)-X(3,J)-X(4,J)*(1-X(1,J)^2)

4730 PA(1,1)=0

4740 PA(1,2)=1

4750 PA(2,1)=-1-2*X(1,J)*X(2,J)

4760 PA(2,2)=1-X(1,J)^2

4770 PB(1,1)=0

4780 PB(1,2)=0

4790 PB(2,1)=0

4800 PB(2,2)=-1

4810 PC(1,1)=-2+2*P(2,J)*X(2,J)

4820 PC(1,2)=2*X(1,J)*P(2,J)

4830 PC(2,1)=PC(1,2)

4840 PC(2,2)=-1

4850 PD(1,1)=0

4860 PD(1,2)=1+2*X(1,J)*X(2,J)

4870 PD(2,1)=-1

4880 PD(2,2)=-1+X(1,J)^2

4890

5990

6700 H=10*X(1,NI)^2

6710 DHX(1)=20*X(1,NI)

6720 DHX(2)=0

6730 D2HX(1,1)=20

6740 D2HX(1,2)=0

6750 D2HX(2,2)=0

6760 D2HX(2,1)=0

6770 U(1,J)=-P(2,J)

6780 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2

6980

7560 EPRINT "EJEMPLO #3 CASO 3-D, KIRK"

10000 CHAIN MERGE "varex"

VARIACION DE EXTREMALES

EJEMPLO #3 CASO 3 D. KIRK

ORDEN DE ESTADO N= 2

ORDEN DE CONTROL M= 1

TIEMPO FINAL= 1

EXACTITUD= .1

ESTADO INICIAL X-1 (0)= 1

ESTADO INICIAL X-2 (0)= 0

SUPOSICION INICIAL DE PD(-1)= 3

SUPOSICION INICIAL DE PD(-2)= 1.5

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t ESTADO x1(t) ESTADO x2(t)

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	1	0
0.1	.9881819486618042	-.231468990445137
0.2	.9546347260475159	-.4351837635040283
0.3	.9019156098365784	-.6158211827278137
0.4	.8320391774177551	-.7793890833854675
0.5	.7463895678520203	-.9323708415031433
0.6	.6457030177116394	-1.081164717674255
0.7000001	.5300978422164917	-1.231661081314087
0.8000001	.3991478681564331	-1.388761520385742
0.9000001	.2520160973072052	-1.555617332458496
0.1	8.768835663795471D-02	-1.73235023021698

* COESTADOS OPTIMOS *

t COESTADO P1(t) COESTADO P2(t)

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0	3.022859877441078	-1.463453154545277
0.1	2.92552924156189	-1.176192164421082
0.2	2.768107175827026	-.9193117618560791
0.3	2.584388732910156	-.6936087012290955
0.4	2.398451805114746	-.5000046491622925
0.5	2.225814819335938	-.3391662836074829
0.6	2.075421571731567	-.2111743092536926
0.7000001	1.951749324798584	-.152945831418037
0.8000001	1.85671854019165	-.0498686283826828
0.9000001	1.791344165802002	1.230430230498314D-02
0.1	1.757196187973022	-8.895648643374443D-04

3.3. METODO DE CUASILINEALIZACION

Los métodos hasta aquí estudiados están diseñados para resolver el problema no lineal de condiciones de borde separadas. El método de cuasilinealización en cambio, va a resolver el problema lineal, de condiciones de borde separadas, por lo que, un aspecto importante de este algoritmo constituye la linealización de las ecuaciones diferenciales. Los siguientes párrafos describen analíticamente este método:

3.3.1. DESCRIPCION MATEMATICA.-

Fundamentalmente son dos pasos para llegar a la solución: el primero es linealizar el problema, supuesto no lineal de condiciones de borde separadas y el segundo es resolver el conjunto de ecuaciones - reducidas diferenciales de estado - coestado linealizadas.

LINEALIZACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO-COESTADO

Sean las siguientes ecuaciones diferenciales reducidas de estado-coestado, que representan un sistema de control no lineal:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (3.54)$$

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} (x(t), p(t), t) \quad (3.55)$$

Las cuales han sido obtenidas al resolver la ecuación $\partial H / \partial u = 0$, despejar $u(t)$ y reemplazar en el conjunto de ecuaciones de estado-coestado originales.

Las condiciones de contorno especificadas son $x(t_0) = x_0$ y $p(t_f) = p_f$. t_f es fijo y $x(t_f)$ es libre.

Realizando la expansión en series de Taylor de las ecuaciones 3.54 y 3.55, alrededor de las trayectorias conocidas $x^i(t)$ y $p^i(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ y reteniendo solamente los términos hasta de primer orden, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{i+1}(t) &= a(x^i(t), p^i(t), t) \\ &+ \left[\frac{\partial a}{\partial x} (x^i(t), p^i(t), t) \right] [x^{i+1}(t) - x^i(t)] \\ &+ \left[\frac{\partial a}{\partial p} (x^i(t), p^i(t), t) \right] [p^{i+1}(t) - p^i(t)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^{i+1}(t) &= - \left[\frac{\partial H}{\partial x} (x^i(t), p^i(t), t) \right] \\ &- \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (x^i(t), p^i(t), t) \right] [x^{i+1}(t) - x^i(t)] \\ &- \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} (x^i(t), p^i(t), t) \right] [p^{i+1}(t) - p^i(t)] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Donde los jk -ésimos elementos de las matrices indicadas son:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial a}{\partial x} \right]_{jk} &= \frac{\partial a_j}{\partial a_k}, \quad \left[\frac{\partial a}{\partial p} \right]_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial p_k}, \quad \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right]_{jk} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} \\ \text{y} \quad \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right]_{jk} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_k} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Es conveniente reescribir las ecuaciones 3.56 y 3.57 de la siguiente forma, a fin de resaltar su presentación como un sistema cuasilineal.

$$\dot{x}^{i+1}(t) = A_{11}(t) x^{i+1}(t) + A_{12}(t) p^{i+1}(t) + e_1(t) \quad (3.59)$$

$$\dot{p}^{i+1}(t) = A_{21}(t) x^{i+1}(t) + A_{22}(t) p^{i+1}(t) + e_2(t) \quad (3.60)$$

o matricialmente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}^{i+1}(t) \\ \dot{p}^{i+1}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{i+1}(t) \\ p^{i+1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \\ &= A(t) \begin{pmatrix} x^{i+1}(t) \\ p^{i+1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Donde la Matriz $A(t)$ tiene los siguientes componentes:

$$\begin{aligned} A_{11}(t) &= \frac{\partial a}{\partial x} & A_{12}(t) &= \frac{\partial a}{\partial p} \\ A_{21}(t) &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & A_{22}(t) &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \end{aligned}$$

$$e_1(t) = -A_{11}(t) x(t) - A_{12}(t) p(t) + a$$

$$e_2(t) = -A_{21}(t) x(t) - A_{22}(t) p(t) - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.62)$$

evaluados en las trayectorias $x^i(t)$, $p^i(t)$, conocidas.

INTEGRACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE ESTADO-COESTADO LINEALIZADAS

Se hace necesario contar con una suposición inicial de las trayecto-

rias de estado y coestado: $x^0(t)$, $p^0(t)$, $t \in t_0, t_f$, a fin de poder evaluar el sistema de ecuaciones 3.61.

Primero se resuelve el sistema de $2N$ ecuaciones homogéneas:

$$\dot{x}^{i+1}(t) = A_{11}(t) x^{i+1}(t) + A_{12}(t) p^{i+1}(t) \quad (3.63)$$

$$\dot{p}^{i+1}(t) = A_{21}(t) x^{i+1}(t) + A_{22}(t) p^{i+1}(t) \quad (3.64)$$

Utilizando N conjuntos de condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} x^{H1}(t_0) = 0, \quad p^{H1}(t_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \\ x^{H2}(t_0) = 0, \quad p^{H2}(t_0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \\ \dots & \\ x^{HN}(t_0) = 0, \quad p^{HN}(t_0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.65)$$

De aquí se obtiene N soluciones que se almacenan en la memoria del computador: $x^{H1}(t)$, $x^{H2}(t)$, ... $x^{HN}(t)$ y $p^{H1}(t)$, $p^{H2}(t)$, ... $p^{HN}(t)$.

Ahora se debe generar una solución particular $x^P(t)$ y $p^P(t)$, integrando el sistema 3.61 bajo las condiciones iniciales $x^P(t_0) = x_0$ y $p^P(t_0) = 0$.

Por el principio de superposición, la solución global del sistema 3.61. es:

$$x^{i+1}(t) = c_1 x^{H1}(t) + c_2 x^{H2}(t) + \dots + c_N x^{HN}(t) + x^P(t) \quad (3.66)$$

$$p^{i+1}(t) = c_1 p^{H1}(t) + c_2 p^{H2}(t) + \dots + c_N p^{HN}(t) + p^P(t) \quad (3.67)$$

Los valores de c_1, c_2, \dots, c_N que hacen:

$$p^{i+1}(t_f) = p_f$$

deben ser determinados. Evaluando la ecuación 3.67 en $t = t_f$ y despejando c se obtiene:

$$p_f = \left[p^{H1}(t_f) \quad p^{H2}(t_f) \quad \dots \quad p^{HN}(t_f) \right] c + p^P(t_f) \quad (3.68)$$

$$c = \left[p^{H1}(t_f) \quad p^{H2}(t_f) \quad \dots \quad p^{HN}(t_f) \right]^{-1} \left[p_f - p^P(t_f) \right] \quad (3.69)$$

Cumpliendo con una de las condiciones del Control óptimo se tiene:

$$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \quad (3.70)$$

Con lo cual, la expresión de c se modifica a la siguiente:

$$c = \left[p^{H1}(t_f) - M x^{H1}(t_f) \quad p^{H2}(t_f) - M x^{H2}(t_f) \quad \dots \quad p^{HN}(t_f) - M x^{HN}(t_f) \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^i(t_f)) - M x^i(t_f) + M x^P(t_f) - p^P(t_f) \right] \quad (3.71)$$

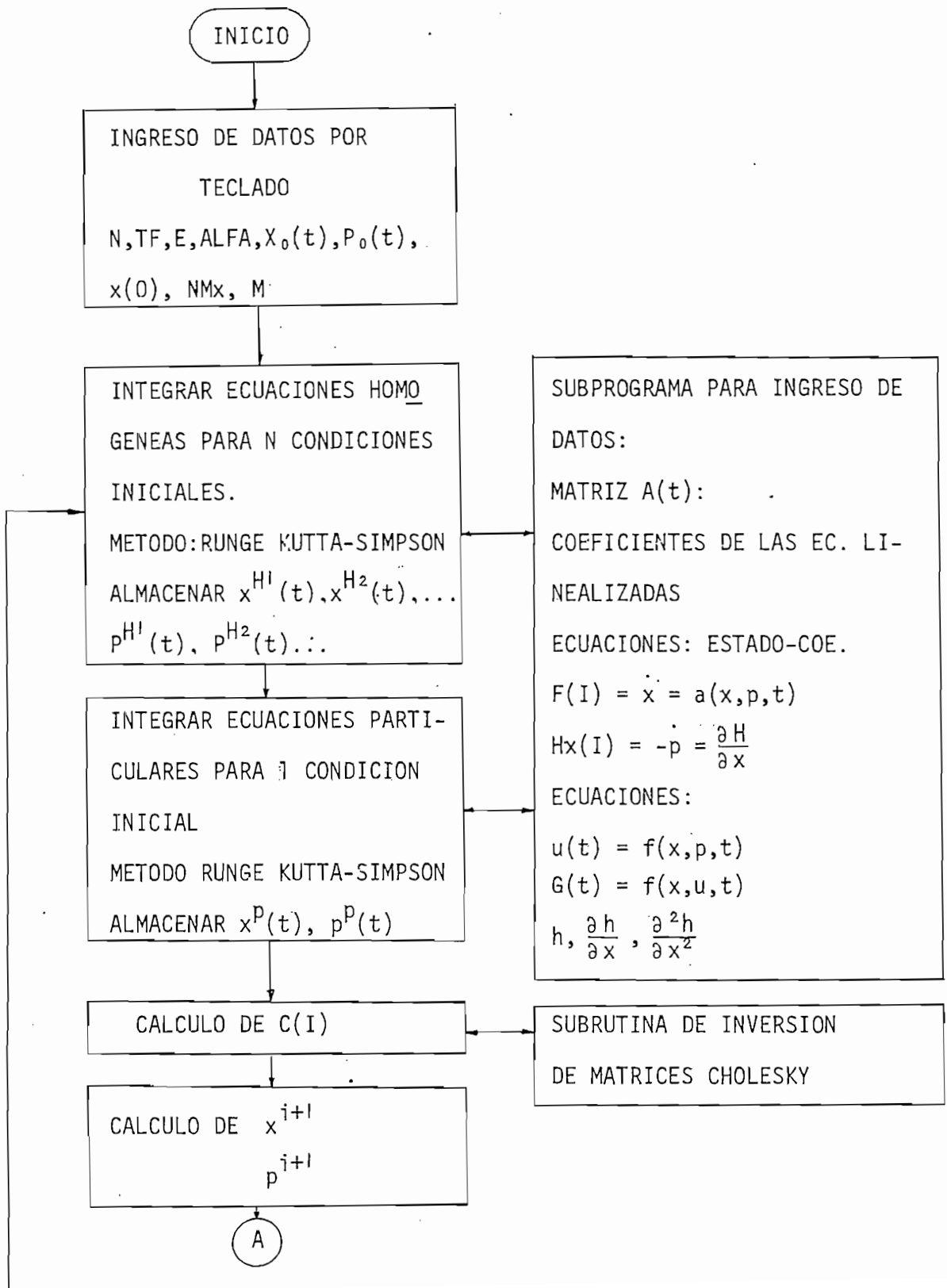
donde:

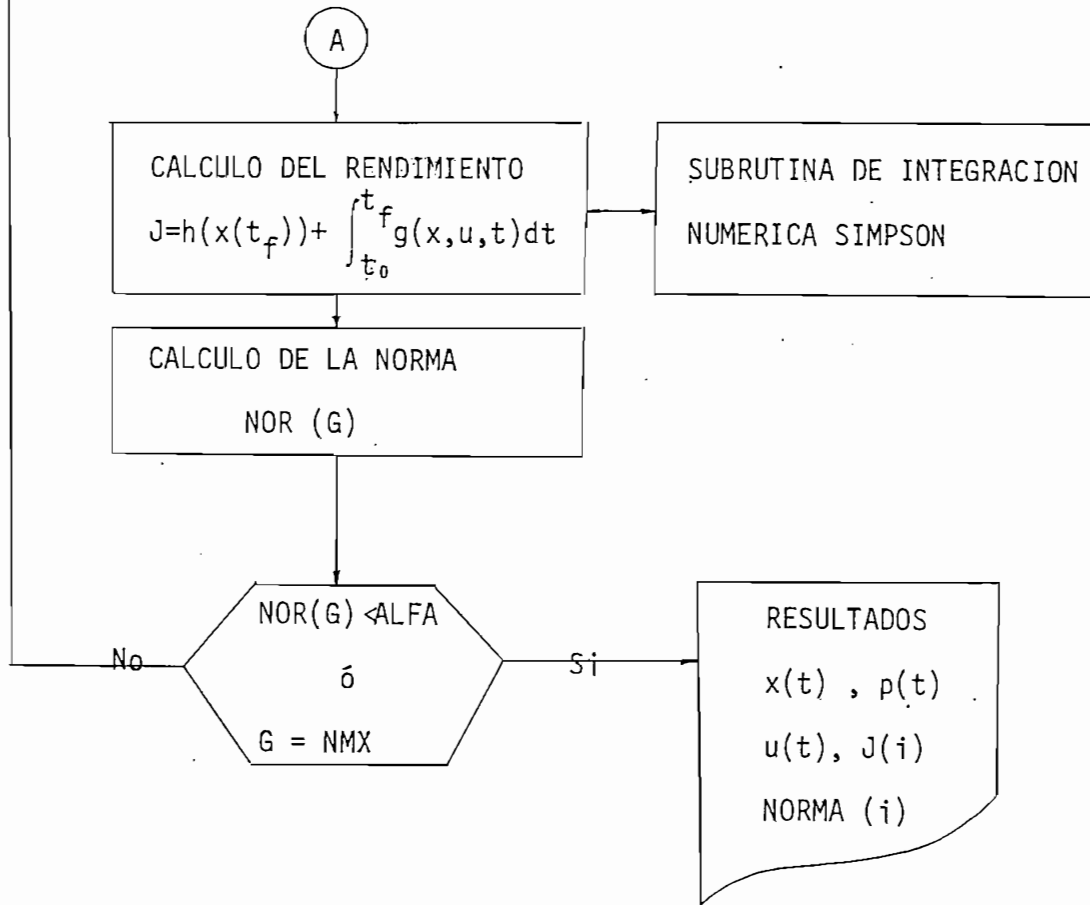
$$M = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^i(t_f))$$

DIAGRAMA GENERAL DE BLOQUES

CUASILINEALIZACION

Figura 3.3.1.





El valor de c obtenido en la ecuación 3.71 es válido para reemplazar en las expresiones 3.66 y 3.67 a fin de obtener las trayectorias de estado y de coestado que satisfacen el sistema 3.61.

3.3.2. ALGORITMO Y FLUJOGRAMA

Una vez que se ha visto el fundamento matemático del método de cuasi linealización, se puede describir un algoritmo que permita resolver el problema del control óptimo no lineal de condiciones de borde separadas.

- 1.- Se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales reducidas de estado-coestado, al resolver la ecuación $\partial H / \partial u = 0$ y reemplazar $u(t)$ en las ecuaciones originales.
- 2.- Utilizando las expresiones 3.56 y 3.57; determinar las ecuaciones linealizadas en términos de $x^i(t)$ y $p^i(t)$.
- 3.- Realizar la suposición inicial de $x^i(t)$ y $p^i(t)$ para $t \in [t_0, t_f]$ con $i = 0$.
- 4.- En base a $x^i(t)$ y $p^i(t)$ se evalúa la matriz $A(t)$.
- 5.- Se integra el conjunto de ecuaciones diferenciales homogéneas - desde t hasta t_f , utilizando los N conjuntos de condiciones iniciales dadas en 3.65.

Calcular la solución particular de 3.61 por integración numérica desde t_0 hasta t_f , utilizando las condiciones iniciales,

$x^p(t_0) = x_0$ y $p^p(t_0) = 0$. Se almacenan estos resultados.

6.- Se determinan los valores de c utilizando la expresión 3.71, y se calculan las $i+1$ -ésimas trayectorias en base a 3.66 y 3.67, además se calcula el rendimiento J para estos valores.

7.- Calcular la Norma, como criterio de parada, en base a la comparación de las i -ésimas y las $i+1$ -ésimas trayectorias.

$$\begin{aligned} \text{NORMA} &= \left\| \begin{bmatrix} x^{i+1} \\ p^{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^i \\ p^i \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{aligned} &\text{Max}_t \left| x_j^{i+1}(t) - x_j^i(t) \right| \\ &+ \text{Max}_t \left| p_j^{i+1}(t) - p_j^i(t) \right| \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Si NORMA < ALFA

Donde ALFA es una constante de error preestablecida.

Entonces el proceso iterativo converge a la solución y se obtiene las trayectorias óptimas de estado-coestado que satisfacen las ecuaciones reducidas de estado-coestado.

8.- Si NORMA > ALFA, se utilizan las $i+1$ -ésimas trayectorias obtenidas para ir al paso 4 y repetir el proceso iterativo, hasta que se satisfaga el criterio de parada.

Es necesario aclarar, que los métodos numéricos utilizados en este algoritmo son los mismos que se emplearon en los anteriores métodos de Pendiente más pronunciada y variación de extremales. Es decir:

- Integración numérica de Ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante el método de Runge-Kutta Simpson de 4to. orden.
- Integración numérica de funciones, con el método de SIMPSON.
- Inversión de Matrices, mediante la subrutina de Cholesky.

3.3.3. EJEMPLOS

Por razones de comparación, con los métodos de variación de Extremales y Pendiente más pronunciada se exponen en esta sección los mismos ejemplos anteriores resueltos en las secciones 3.1.3 y 3.2.3.

Así mismo el criterio para exponer los ejemplo- es el siguiente: el primer ejemplo es el 6.23 de la obra OPTIMAL CONTROL, D. Kirk, con fines de aclaración del planteamiento de las ecuaciones. El segundo ejemplo es el problema del Reactor Químico, no lineal, que se conocen las respuestas, con la finalidad de comparar los resultados obtenidos. El tercer ejemplo es el 6.27 de la misma obra, y que no se conocen las respuestas se lo resuelve bajo diferentes factores de ponderación de las variables. De esta manera el método de cuasilinealización tiene la ocasión de demostrar sus bondades para varios tipos de problemas y con diferentes condiciones iniciales.

Ejercicio 6.23 tomado de D. Kirk. "OPTIMAL CONTROL".

Encontrar la trayectoria y control óptimos del sistema:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad , \quad x(0) = 4$$

y la medida de rendimiento:

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

se calcula el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} u^2(t) + p(t) (-x(t) - u(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = u(t) + p(t)$$

$$\text{de donde: } u(t) = -p(t) \quad : \quad u(1, J) = -p(1, J)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t) = -\dot{p}(t)$$

entonces las ecuaciones diferenciales-reducidas de estado-coestado son:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t) \quad : \quad F(1) = -x(1, J) - p(1, J)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t) = -p(t) \quad : \quad H_x(1) = -p(1, J)$$

se determina la matriz $A(t)$:

$$A_{11}(1,1) = \frac{\partial a}{\partial x} = -1$$

$$A_{12}(1,1) = \frac{\partial a}{\partial p} = -1$$

$$A_{21}(1,1) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$$

$$A_{22}(1,1) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} = 1$$

La función G(J) del rendimiento es:

$$G(J) = (u(1,J) \wedge 2)/2$$

La función h(x(t_f)):

$$H = x(1, NI) \wedge 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x(1) \quad : \quad DH x(1) = 2 * x(1, NI)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2 \quad : \quad DH x(1,1) = 2$$

Está claro que el intervalo t₀, t_f está dividido en NI subintervalos, tal que:

$$NI = \frac{t_f - t_0}{E}$$

donde E es la exactitud o ancho de subintervalo deseado.

Se forma el subprograma para la introducción de las ecuaciones, den

tro de los números de instrucción señalados

```
4800      EJEMPLO No. 1
4810      MATRIZ A (t)
.
.
.
5800      .
6100      F (I) .....
6110      Hx ( I
6400
6700      u (t)
6710      G (J)
6720      H
6730      .. ∂h/ ∂x
        .. ∂2h/ ∂x2
.
6900
8030      LPRINT "EJEMPLO No. 1"
10000     CHAIN MERGE "CUASI"
```

4800 EJEMPLO-6.23-DE D. KIRK, METODO DE CUASILINEALIZACION

4810

4820 A11(1,1)=-1

4830 A12(1,1)=-1

4840 A21(1,1)=0

4850 A22(1,1)=1

5800

6100 F(1)=-X(1,J)-F(1,J)

6110 HX(1)=-F(1,J)

6400

6700 U(1,J)=-F(1,J)

6710 H=X(1,NI)^2

6720 G(J)=.5*(U(1,J)^2)

6730 DHX(1)=2*X(1,NI)

6740 D2HX(1,1)=2

6900

8030 LPRINT "EJEMPLO-6.23-DE D. KIRK "

10000 CHAIN MERGE "CUASI"

CUASILINEALIZACION

EJEMPLO-6.23-DE D. KIRK

N=1

ORDEN DE CONTROL=2

TIEMPO FINAL=1

EXACTITUD=.1

ESTADO INICIAL X-1(0)=-4

TRAYECTORIA X(t)-DE INICIO= 0

TRAYECTORIA P(t)-DE INICIO= 0

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t estado-x-1(t)

0 4

0.1 3.561189971864224

0.2 3.158021494746208

0.3 2.786459624767303

0.4 2.442785486578941

0.5 2.123559415340424

0.6 1.825586646795273

0.7000001 1.545884937047958

0.8000001 1.281654953956604

0.9000001 1.03025209903717

0-1 .7891603708267212

* COESTADOS OPTIMOS *

coestado p 1 (t)

0 0	.580632209777832
0 .1	.6416977643966675
0 .2	.7091857194900513
0 .3	.7837713360786438
0 .4	.8662012219429016
0 .5	.9573003053665161
0 .6	1.057980298995972
0 .7000001	1.169248938560486
0 .8000001	1.292219877243042
0 .9000001	1.428123831748962
0 1	1.578320860862732

HISTORIA DEL CONTROL

u 1 (t)

0 0	-.5806322
0 .1	-.6416978
0 .2	-.7091858
0 .3	-.7837713
0 .4	-.8662012
0 .5	-.9573003
0 .6	-1.05798
0 .7000001	-1.169249
0 .8000001	-1.29222
0 .9000001	-1.428124
0 1	-1.578321

ITERACION RENDIMIENTO NORMA

1	1.16127	5.578321
2	1.16127	8.195639E-08

número de iteraciones = 2

EJEMPLO N° 2

```
4800 ejercicio :STIRRED TANK, d. kirk ** CUASILINEALIZACION **
4810
4820 AL(1)=EXP(25*X(1,J)/(X(1,J)+2))
4830 AL(2)=100*(X(2,J)+.5)*(23-X(1,J))*AL(1)/(X(1,J)+2)^2
4840 AL(3)=50*AL(1)/(X(1,J)+2)^2
4850 AL(4)=AL(3)*(X(2,J)+.5)
4860 AL(5)=X(1,J)+.25
4870 AL(6)=F(2,J)-P(1,J)
4880 AL(7)=5*P(1,J)^2*AL(5)
4890 A11(1,1)=-2-10*P(1,J)*AL(5)+AL(4)
4900 A11(1,2)=AL(1)
4910 A11(2,1)=-AL(4)
4920 A11(2,2)=-1-AL(1)
4930 A12(1,1)=-5*AL(5)^2
4940 A12(1,2)=0
4950 A12(2,1)=0
4960 A12(2,2)=0
4970 A21(1,1)=-2+AL(2)*AL(5)+5*P(1,J)^2
4980 A21(2,1)=AL(3)*AL(6)
4990 A21(1,2)=A21(2,1)
5000 A21(2,2)=-2
5010 A22(1,1)=2+10*P(1,J)*AL(5)-AL(4)
5020 A22(1,2)=AL(4)
5030 A22(2,1)=-AL(1)
5040 A22(2,2)=1+AL(1)
5800
6100 F(1)=-X(1,J)+.25*(2+5*P(1,J)*AL(5))+(X(2,J)+.5)*AL(1)
6110 F(2)=.5-X(2,J)-(X(2,J)+.5)*AL(1)
6120 AL(7)=5*P(1,J)^2*AL(5)
6130 HX(1)=2*(X(1,J)-P(1,J))-50*(AL(6)*(X(2,J)+.5)/(X(1,J)+2)^2)*AL(1)
6140 HX(2)=2*X(2,J)-P(2,J)-AL(6)*AL(1)
6400
6700 U(1,J)=5*P(1,J)*(X(1,J)+.25)
6720 G(J)=X(1,J)^2+X(2,J)^2+.1*(U(1,J))^2)
6730 DHX(1)=0
6740 DHX(2)=0
6750 H=0
6760 FOR I=1 TO N
6770 FOR L=1 TO N
6780 D2HX(I,L)=0
6790 NEXT L,I
6900
8030 LPRINT "EJEMPLO :REACTOR QUIMICO DE D. KIRK"
10000 CHAIN MERGE "CUASI"
```

CLASILINEALIZACION

EJEMPLO : REACTOR QUIMICO DE D. KIRK
 N= 2
 ORDEN DE CONTROL= 2
 TIEMPO FINAL= .8
 EXACTITUD= .05
 ESTADO INICIAL X : (0)= .05
 ESTADO INICIAL Y : (0)= 0
 TRAYECTORIA X(t) DE INICIO= 0
 TRAYECTORIA P(t) DE INICIO= 0

* t	TRAYECTORIAS OPTIMAS	* ESTADO x2(t)
0	.05	0
0 .08	3.739494830369949D-02	-2.456634398549795D-02
0 .16	.0296323373913765	-3.823292215866089D-02
0 .24	2.453643083572388D-02	-4.582202434539795D-02
0 .32	.0211962719959259	-4.985371232032776D-02
0 .4	1.917725801467896D-02	-5.193294415473939D-02
0 .48	1.526030015945435D-02	-5.275088548660278D-02
0 .56	1.635334300994873D-02	-5.331933492382568D-02
0 .64	1.945161819458008D-02	-5.409955978393558D-02
0 .72	2.162933349609375D-02	-5.568586120605469D-02
0 .7999999	2.504992485046387D-02	-5.058272838592529

* t	COESTADOS OPTIMOS	* COESTADO P2(t)
0 0	1.188818335533142	.1892739832401276
0 .08	.7290557155609171	.0980575424419019
0 .16	.4724853038787842	4.736350476741791D-02
0 .24	.3126760721206665	1.736344397068024D-02
0 .32	.206106424331665	-4.968805409477783D-04
0 .4	.132657527923584	-1.051799522171021D-02
0 .48	8.144736289978027D-02	-1.514673233032227D-02
0 .56	4.601550102233887D-02	-1.578474044799805D-02
0 .64	2.227354049682617D-02	-1.324748992919920D-02
0 .72	7.532119750974563D-03	-7.949352264404297D-03
0 .7999999	1.192092295507813D-07	-4.76837158203125D-07

HISTORIA DEL CONTROL

t	u 1 (t)
0 0	1.783298
0 .08	1.046198
0 .16	.6606109
0 .24	.4292049
0 .32	.2794771
0 .4	.1785419
0 .48	.1092455
0 .56	6.174207E-02
0 .64	3.000821E-02
0 .72	1.022972E-02
0 .7999999	1.639425E-07

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	3.357971E-02	2.186947
2	2.777246E-02	.1299644
3	2.752544E-02	7.844949E-02
4	2.752787E-02	.0527885
5	2.756056E-02	3.337789E-02
6	2.759348E-02	.0212462
7	2.761845E-02	1.337099E-02
8	2.763517E-02	8.24833E-03
9	2.764567E-02	4.980803E-03
10	2.765203E-02	2.953291E-03
11	2.765575E-02	1.729727E-03
12	2.765793E-02	9.999275E-04

numero de iteraciones = 12

=====

4800 EJEMPLO #3 D. KIRK CUASILINEALIZACION

4802 F(1)=X(2,J)

4803 F(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)-F(2,J)

4804 HX(1)=+2*X(1,J)-F(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))

4805 HX(2)=+X(2,J)+F(1,J)+F(2,J)*(1-X(1,J)^2)

4810 A11(1,1)=0

4820 A11(1,2)=1

4830 A11(2,1)=-1-2*X(1,J)*X(2,J)

4840 A11(2,2)=1-X(1,J)^2

4850 A12(1,1)=0

4860 A12(1,2)=0

4870 A12(2,1)=0

4880 A12(2,2)=-1

4890 A21(1,1)=-2+2*F(2,J)*X(2,J)

4900 A21(1,2)=2*X(1,J)*F(2,J)

4910 A21(2,1)=F(2,J)

4920 A21(2,2)=-1

4930 A22(1,1)=0

4940 A22(1,2)=1+2*X(1,J)*X(2,J)

4950 A22(2,1)=-1

4960 A22(2,2)=-1+X(1,J)^2

5800

6700 H=0

6710 DHX(1)=0

6720 DHX(2)=0

6730 D2HX(1,1)=0

6740 D2HX(1,2)=0

6750 D2HX(2,2)=0

6760 D2HX(2,1)=0

6770 U(1,J)=-F(2,J)

6780 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2

6980

7560 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 1 D. KIRK"

10000 CHAIN MERGE "CUASI"

CUASILINEALIZACION

N= 2

ORDEN DE CONTROL= 3

TIEMPO FINAL= 1

EXACTITUD= .1

ESTADO INICIAL X-1 (0)= 1

ESTADO INICIAL X-2 (0)= 0

TRAYECTORIA X(t) DE INICIO= 1

TRAYECTORIA P(t) DE INICIO= 1

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO-x1(t)	ESTADO-x2(t)
0	1	0
0.1	.9940063868416473	-.1172755211591721
0.2	.9770354733336717	-.2200164571404457
0.3	.9503959589637816	-.3111963612179756
0.4	.9150762688368559	-.3942123129963875
0.5	.8717144504189491	-.4726521968841553
0.6	.8205844052135944	-.5501941740512848
0.7000001	.7615907937288284	-.630543977022171
0.8000001	.694266639649868	-.7174258530139923
0.9000001	.6177713796496391	-.81458780169487
0.1	.5308881849050522	-.9257898330688477

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0-0	1.676314234733582	.2538672089576721
0.1	1.491280093789101	.1011645710095763
0.2	1.295931041240692	2.142135053873062D-02
0.3	1.099302291870117	-.1138376593589783
0.4	.9074392914772034	-.1763938665390015
0.5	.724206268787384	-.2098393142223358
0.6	.5520094633102417	-.2154090404510498
0.7000001	.3923743963241577	-.1948323249816895
0.8000001	.2463960647583008	-.1503021121025085
0.9000001	.1151260137557983	-8.440279960632324D-02
0.1	0	-1.192092895507813D-07

HISTORIA DEL CONTROL

t	u ⁻¹ (t)
0 0	.2538672
0 .1	.1011646
0 .2	2.142135E-02
0 .3	.1138377
0 .4	.1763939
0 .5	.2098393
0 .6	.2154091
0 .7000001	.1948323
0 .8000001	.1503021
0 .9000001	.0844028
0 1	1.192093E-07

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	.09552	5.761236
2	.870043	.6286376
3	.8743019	.4016392
4	.8741725	3.812969E-03
5	.8741781	5.114079E-05

numero de iteraciones = 5

4800 EJEMPLO #32 . KIRK CUASILINEALIZACION

4802 F(1)=X(2,J)

4803 F(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)-F(2,J)

4804 HX(1)=+2*X(1,J)-F(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))

4805 HX(2)=+X(2,J)+F(1,J)+F(2,J)*(1-X(1,J)^2)

4810 A11(1,1)=0

4820 A11(1,2)=1

4830 A11(2,1)=-1-2*X(1,J)*X(2,J)

4840 A11(2,2)=1-X(1,J)^2

4850 A12(1,1)=0

4860 A12(1,2)=0

4870 A12(2,1)=0

4880 A12(2,2)=-1

4890 A21(1,1)=-2+2*P(2,J)*X(2,J)

4900 A21(1,2)=2*X(1,J)*P(2,J)

4910 A21(2,1)=FC(1,2)

4920 A21(2,2)=-1

4930 A22(1,1)=0

4940 A22(1,2)=1+2*X(1,J)*X(2,J)

4950 A22(2,1)=-1

4960 A22(2,2)=-1+X(1,J)^2

5800

6700 H=X(1,NI)^2

6710 DHX(1)=2*X(1,NI)

6720 DHX(2)=0

6730 D2HX(1,1)=2

6740 D2HX(1,2)=0

6750 D2HX(2,2)=0

6760 D2HX(2,1)=0

6770 U(1,J)=-F(2,J)

6780 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2

6980

7560 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 2 D. KIRK"

10000 CHAIN MERGE "CUASI"

CUASILINEALIZACION

N= 2
 ORDEN DE CONTROL= 3
 TIEMPO FINAL= 1
 EXACTITUD= .1 EJEMPLO #3. CASO. 2
 ESTADO INICIAL X 1 (0)= 1
 ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0
 TRAYECTORIA X(t) DE INICIO= 0
 TRAYECTORIA F(t) DE INICIO= 0

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	1	0
0 .1	.991693913936615	-.1526741737127304
0 .2	.9681367892771959	-.3055516704916954
0 .3	.9311418980360031	-.4321046024560928
0 .4	.8821340575814247	-.5465537130634995
0 .5	.8220970630645752	-.6534496247768402
0 .6	.7515543699264526	-.757421225309372
0 .7000001	.6705687940120697	-.8630354404449463
0 .8000001	.5787532031536102	-.9747012853622437
0 .9000001	.4752918183803558	-1.096546947956085
0 1	.3589783906936646	-1.232175707817078

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0 0	2.186003684997559	.7346357107162476
0 .1	2.037514105439186	.5304805980995297
0 .2	1.86382731795311	.3561094030737877
0 .3	1.681280255317688	.2121091783046722
0 .4	1.501015901565552	9.867994487285614D-02
0 .5	1.330081284046173	1.549777388572693D-02
0 .6	1.172643780708313	-3.836935758590698D-02
0 .7000001	1.031099796295166	-6.448221206665039D-02
0 .8000001	.9070043563842774	-6.498527526855469D-02
0 .9000001	.801872730255127	-4.250431060791016D-02
0 1	.7179567813873291	-1.192092895507813D-07

HISTORIA DEL CONTROL

t	$u_1(t)$
0 0	-0.7346357
0 .1	-0.5304806
0 .2	-0.3561094
0 .3	-0.2121092
0 .4	-9.867994E-02
0 .5	-1.549777E-02
0 .6	3.836936E-02
0 .7000001	6.448221E-02
0 .8000001	6.498528E-02
0 .9000001	4.250431E-02
0 1	1.192093E-07

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	1.065464	6.261692
2	1.065145	7.6654588
3	1.065338	1.372874E-03
4	1.065332	9.946525E-05

número de iteraciones = 4

4800 EJEMPLO #33 . KIRK . CUASILINEALIZACION

4802 F(1)=X(2,J)

4803 F(2)=-X(1,J)+(1-X(1,J)^2)*X(2,J)-P(2,J)

4804 HX(1)=+2*X(1,J)-P(2,J)*(1+2*X(1,J)*X(2,J))

4805 HX(2)=+X(2,J)+P(1,J)+P(2,J)*(1-X(1,J)^2)

4810 A11(1,1)=0

4820 A11(1,2)=1

4830 A11(2,1)=-1-2*X(1,J)*X(2,J)

4840 A11(2,2)=1-X(1,J)^2

4850 A12(1,1)=0

4860 A12(1,2)=0

4870 A12(2,1)=0

4880 A12(2,2)=-1

4890 A21(1,1)=-2+2*P(2,J)*X(2,J)

4900 A21(1,2)=2*X(1,J)*P(2,J)

4910 A21(2,1)=P(1,2)

4920 A21(2,2)=-1

4930 A22(1,1)=0

4940 A22(1,2)=1+2*X(1,J)*X(2,J)

4950 A22(2,1)=-1

4960 A22(2,2)=-1+X(1,J)^2

5800

6700 H=10*X(1,NI)^2

6710 DHX(1)=20*X(1,NI)

6720 DHX(2)=0

6730 D2HX(1,1)=20

6740 D2HX(1,2)=0

6750 D2HX(2,2)=0

6760 D2HX(2,1)=0

6770 U(1,J)=-P(2,J)

6780 G(J)=X(1,J)^2+.5*X(2,J)^2+.5*U(1,J)^2

6980

7560 LPRINT "EJEMPLO #3 CASO 3 D. KIRK"

10000 CHAIN MERGE "CUASI"

CUASILINEALIZACION

N= 2
 ORDEN DE CONTROL= 3
 TIEMPO FINAL= 1
 EXACTITUD= .1
 ESTADO INICIAL X 1 (0)= 1
 ESTADO INICIAL X 2 (0)= 0
 TRAYECTORIA X(t) DE INICIO= 0
 TRAYECTORIA F(t) DE INICIO= 0

* TRAYECTORIAS OPTIMAS *

t	ESTADO x1(t)	ESTADO x2(t)
0	1	0
0 .1	.9881423548795283	-.2323287576436996
0 .2	.9545002654194832	-.4363886415958405
0 .3	.9016755372285843	-.6169468462467194
0 .4	.8317160829901695	-.7801509499549866
0 .5	.746025413274765	-.9326330423355103
0 .6	.6453447341918945	-1.080935776233673
0 .7000001	.5297823697328568	-1.231097459793091
0 .8000001	.3988855481147766	-1.388192534446716
0 .9000001	.2517692446708679	-1.55560290813446
0 1	8.734250068664551D-02	-1.733762741086867

* COESTADOS OPTIMOS *

t	COESTADO P1(t)	COESTADO P2(t)
0 0	3.023041963577271	1.475461483001709
0 .1	2.921907857060432	1.186381127685308
0 .2	2.761061728000641	.926250658929348
0 .3	2.5747931599617	.6971266493201256
0 .4	2.387321710586548	.5007213950157166
0 .5	2.214039623737335	.3380697369575501
0 .6	2.063632249832153	.2092931568622589
0 .7000001	1.940300703048706	.1134840846061707
0 .8000001	1.845732569694519	4.870843887329102D-02
0 .9000001	1.780767679214478	1.210230588912964D-02
0 1	1.746850967407227	2.384185791015625D-07

HISTORIA DEL CONTROL

t	U ⁻¹ (t)
0 0	-1.475462
0 .1	-1.186381
0 .2	-.9262506
0 .3	-.6971266
0 .4	-.5007214
0 .5	-.3380697
0 .6	-.2092932
0 .7000001	-.1134841
0 .8000001	-4.870844E-02
0 .9000001	-1.210231E-02
0 1	-2.384186E-07

ITERACION	RENDIMIENTO	NORMA
1	1.241145	6.964345
2	1.352062	1.240776
3	1.352521	1.948745E-03
4	1.352519	2.899021E-05

numero de iteraciones = 4

C A P I T U L O I V

CONCLUSIONES

Se ha visto hasta aquí, la formación y el funcionamiento de tres métodos numéricos que resuelven el problema, del control óptimo: el método de la Pendiente más Pronunciada, el de variación de Extremales y el de Cuasilinealización.

Claramente se vió que la estrategia fundamental de estos métodos, es tá en considerar que alguna de las condiciones del control óptimo que se determinaron en el capítulo segundo, no se estaba cumpliendo. Entonces se buscó formar un proceso iterativo, tendiente a hacer cum plir aquella condición no satisfecha, en base a un valor inicial dado.

En el método de la Pendiente mas Pronunciada se considera que no se cumple la condición:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4.1)$$

Por lo tanto, el proceso iterativo, tiende a determinar el Control $u(t)$, que haga cumplir esta condición, en base a un valor dado inicialmente $u_0(t)$.

Así mismo, en el método variación de extremales se considera que la condición no satisfecha es:

$$\dot{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \quad (4.2)$$

Entonces, los valores supuestos inicialmente son de $\dot{p}(t_0)$, tal que, conjuntamente con $x(t_0)$ se pueda resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales reducidas de estado-coestado. Con estos resultados se forma un proceso iterativo que permite ajustar $\dot{p}(t_0)$, hasta que los resultados cumplan con la condición 4.2.

En el método cuasilinealización, se supone que las condiciones insatisfechas son las ecuaciones de estado y coestado:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (4.3)$$

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.4)$$

Por lo tanto, el algoritmo tiende a reajustar los valores supuestos de $\dot{x}(t)$ y $\dot{p}(t)$, tal que cumple con las condiciones 4.3 y 4.4.

4.1. CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LAS TECNICAS ITERATIVAS

Con el objeto de comparar las ventajas y desventajas que poseen los métodos estudiados, a continuación se analizan cada uno de ellos, en base a los criterios: suposición inicial, requerimiento de memoria, convergencia, cálculos necesarios y criterios de parada.

4.1.1. METODO DE LA PENDIENTE MAS PRONUNCIADA

Como se puede ver en los tres ejemplos resueltos en el capítulo ter-

cero, la forma de plantear los problemas es muy simple para este método, requiriéndose muy poca elaboración por parte del usuario. Esto se compensa con la baja precisión de sus respuestas, según lo obtenido en el ejemplo N° 2 del Reactor Químico cuyas respuestas son conocidas. Las siguientes son las características propias de este método:

SUPOSICION INICIAL

Este método necesita de un dato inicial de Control $u_0(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ el cual se obtiene de algún conocimiento previo del problema..

En el ejemplo N° 2 se observa que al variar este valor inicial se va ría la velocidad de convergencia.

También es importante el valor inicial de la medida de paso (TAO), puesto que influyen en la convergencia y en la velocidad.

MEMORIA

Consecuentemente con la simplicidad del método, la necesidad de memo ría es la menor de los tres métodos. Se almacenan en cada iteración $x(t)$, $p(t)$, $u(t)$, rendimiento y norma.

CONVERGENCIA

Una de las características de este método es su facilidad de conver gencia para un rango de condiciones iniciales; hecho que lo hace uti

bién, el planteamiento de los datos. Sin embargo esto no es un obstáculo para su utilización. Sus características son:

SUPOSICION INICIAL

La condición $p(0)$ es requerida al inicio del algoritmo y cabe decir que es importante realizar una buena condición de arranque para garantizar la convergencia.

MEMORIA

Se almacenan los valores de las ecuaciones de influencia en $t = t_f$, $p(t_0)$ y las condiciones iniciales de estado. Además de criterio de parada, historia de Control y rendimiento en cada iteración.

CONVERGENCIA

Se ha visto que es más sensible a las condiciones iniciales propuestas, pero cuando converge, lo hace visiblemente. Se utiliza un factor llamado COE, el cual atenúa las modificaciones iniciales al $p(t_0)$ con el objeto de ayudar a la convergencia.

CALCULOS

Se requiere integrar $2N(N+1)$ ecuaciones diferenciales de primer orden, para lo cual se utiliza el método de RUNGE-KUTTA-SIMPSON. Además se invierte una matriz $N \times N$ en cada iteración, mediante la subrutina de Cholesky. Se calcula el rendimiento y el criterio de para da.

CRITERIO DE PARADA

El proceso iterativo termina cuando se cumple la condición

$$||p^i(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x}(x^i(t_f))|| < \text{ALFA}$$

donde ALFA es una constante predeterminada.

ó cuando se ha llegado a un número límite de iteraciones (predeterminado). Esto es para prevenir divergencias.

4.1.3. METODO DE CUASILINEALIZACION

Como se vió en el planteamiento de los ejemplos, este método presenta una similitud al método variación de extremales, sin embargo es más eficiente y rápido para las aplicaciones. Sus principales características son:

SUPOSICION INICIAL

Se requiere proveer al programa de trayectorias de estado y coestado, que pueden ser valores constantes para el intervalo $[t_0, t_f]$. Son datos propuestos de acuerdo a algún conocimiento previo del problema.

Cabe decir que estas suposiciones iniciales, no necesariamente deben satisfacer las condiciones de borde, pero si lo hacen aquellas generadas a partir de éstas.

MEMORIA

Se requiere almacenar las soluciones homogéneas de estado y coestado para las N condiciones iniciales y las soluciones particulares de estado-coestado. Además se almacenan las trayectorias linealizadas x^i , x^{i+1} , p^i y p^{i+1} , a fin de calcular la desviación máxima como criterio de parada.

CONVERGENCIA

Se deduce de los ejemplos resueltos que: este método no tiene dificultad de convergencia cuando se utiliza un conjunto de trayectorias iniciales razonable; y de hecho es más rápido que el método de variación de extremales para hallar la solución.

CALCULOS

Se integran $2 \times N \times N$ ecuaciones homogéneas diferenciales de primer orden, y $2N$ ecuaciones particulares mediante el método de RÚNGE-KUTTA-SIMPSON. En el cálculo del rendimiento se utiliza el método de integración numérica de funciones de SIMPSON. También se utiliza la Subrutina de Cholesky como método de inversión de matrices $N \times N$, en el cálculo del coeficiente $c(I)$.

CRITERIO DE PARADA

Se ha utilizado el cálculo de la desviación máxima entre dos trayectorias consecutivas, con la siguiente fórmula:

$$\text{NORMA} = \sum_{j=1}^N \left\{ \max |x_j^{i+1}(t) - x_j^i(t)| + \max |p_j^{i+1}(t) - p_j^i(t)| \right\}$$

donde: j = índice de estado

i = índice de iteración

Si $NORMA < ALFA$, o si se ha llegado al máximo de iteraciones preestablecido, se termina el proceso y se puede disponer de resultados impresos.

4.2. CONCLUSIONES

En el siguiente cuadro se resumen las principales características de cada método analizado, con el objeto de comparación:

CARACTERISTICA	PENDIENTE MAS PRONUNCIADA	VARIACION DE EXTREMALES	CUASILINEALIZACION
Suposición Inicial	$u_0(t)$ $t \in [t_0, t_f]$	$p_0(t_0)$	$x_0(t), p_0(t)$ $t \in [t_0, t_f]$
Importancia de la Suposición Inicial.	Generalmente existe un rango dentro del cual hay convergencia.	Con mala suposición inicial puede haber <u>d</u> ivergencia.	Es menos crítico que en variación de extremales.
Criterio de Parada.	$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$	$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}$	Se cumplen las <u>e</u> cuaciones de estado-coestado.
Memoria	Requiere: $u(t), x(t), p(t)$ $\frac{\partial H}{\partial u}, J$	Requiere $2(N \times N)$ matrices de influencia $u(t), x(t), p(t)$ $J, p(t_f)$	Requiere $u(t), x^i(t), p^i(t)$ $x^{i-1}(t), p^{i-1}(t), J$ $(N \times N)$ matrix de linealización.

CARACTERISTICA	PENDIENTE MAS PRONUNCIADA	VARIACION DE ESTREMALES	CUASILINEALIZACION
Convergencia	Generalmente es rápido con una buena suposición inicial.	Una vez que se inicia la convergencia lo hace rápidamente.	Converge muy rápidamente.
Calculo	Se requiere integrar 2N ecuaciones diferenciales. Se calcula $\frac{\partial H}{\partial u}$, Rendimiento, <u>pa</u> so.	Se integran 2N(N+1) ecuaciones diferenciales. Se calcula la inversión de <u>u</u> na matriz NxN, se calcula <u>pa</u> so Rendimien <u>to</u> .	Se integran 2N(N+1) ec. diferenciales. Se calcula Rendimiento, <u>inver</u> sión de una <u>ma</u> triz, Desvia <u>ci</u> ón de trayec <u>to</u> rias.

Se obtienen las siguientes conclusiones:

- 1.- Queda en claro que no siempre los tres métodos convergen a la solución, y aún si esto sucede, puede ocurrir en algún extremo relativo.
- 2.- Una solución global o absoluta puede considerarse cuando: se prueban los métodos con varias condiciones iniciales y se obtiene el mismo resultado.

- 3.- Para empezar a resolver, un problema se debe iniciar con el método cuasilinealización o pendiente más pronunciada. Una vez obtenida la solución con varias condiciones iniciales, se debe probar con los otros dos métodos, tomando como condiciones iniciales los resultados obtenidos en el primer método.
- 4.- En el ejemplo # 3 se consideró tres casos el primero con $h(x(t_f)) = 0$, el segundo con $h = x_1^2(t_f)$ y el tercero con $h = 10x_1^2(t_f)$ y efectivamente, como se anticipó en la sección 2.2.3, la presencia de los factores de ponderación en el estado final producen que la solución ajuste su estado final a cero, con la intensidad que da el factor, significa que en el tercer caso la trayectoria de estado tiende a cero en $t = t_f$ con mayor aproximación que en los otros casos, como sucede realmente.
- 5.- El método de la Pendiente más pronunciada es generalmente lento una vez que se aproxima a un extremoal.
- 6.- El método de variación de extremales en cambio avanza rápidamente a partir de la quinta iteración, si es que la convergencia se da.
- 7.- En cuasilinealización se ha encontrado un método idóneo para estas aplicaciones, puesto que es rápido una vez que hay convergencia, y no es muy sensible a las condiciones supuestas por lo que generalmente converge y los resultados son bastante aproximados en vista de que se está integrando directamente las ecuaciones de estado-coestado y se comprueban las trayectorias en

todo el intervalo t_0, t_f .

- 8.- Se considera que el aporte de este trabajo ha sido positivo, en la consecución del problema del Control óptimo. Pues si bien se conocía la solución del Regulador lineal, ahora se posee una herramienta útil para enfrentar el problema no lineal.

- 9.- Cabe anotar como conclusiones, las facilidades que se ha tenido en cuanto a la utilización del computador ADDS PC/2 de 64 Kbytes de propiedad del Cuerpo de Ingenieros del Ejército, sin cuyo equipo no hubiese sido posible que este trabajo se culmine a tiempo. Además la facilidad de contar con una buena bibliografía en la Escuela Politécnica Nacional ayudaron a la documentación del mismo.

4.3. RECOMENDACIONES

Es inevitable y necesario que avance la ciencia, y como tal no existe trabajo científico concluido, por lo tanto se espera que este trabajo de tesis se continúe. Fundamentalmente son dos los objetivos - que al momento se pueden ver:

- 1.- Desarrollar métodos numéricos que resuelvan el problema del Control óptimo para cuando las trayectorias y el Control estén limitados por algún contorno, es decir no linealidades del tipo:

$$b < u(t) < a$$

$$d < x^2(t) < c$$

- 2.- El más ambicioso, que considera: tomar en cuenta perturbaciones determinísticas sobre la señal de salida del sistema de Control, para aplicarlas como señal de error al sistema que calcula la ley de Control óptimo (computador), de esta manera corregir las desviaciones de las trayectorias reales respecto de las trayectorias óptimas, causadas por las mencionadas perturbaciones.

COMENTARIOS FINALES

Ahora, que se ha llegado a vencer el desafío propuesto hace algunos meses, cuando nació la idea de llevar a tesis de grado la solución de un problema de Ingeniería de Control, se puede, con gran satisfacción ver cumplidos los objetivos. Esta ha sido una gran experiencia, no solo en el aspecto técnico sino en el humano, puesto que, para lograr la consecución de los resultados fué necesario trabajar con ahínco y

sólo gracias a la colaboración desinteresada por parte de profesores y amigos se alcanzó el éxito en la empresa. Si bien es cierto que en esta obra no estan vertidos todos los conocimientos, sin embargo refleja la experiencia adquirida por el autor a lo largo de su carrera estudiantil.

B I B L I O G R A F I A

- ARAUJO MARCO. "Solución de las Ecuaciones de Ricatti mediante métodos computacionales" Tesis de grado F.I.E. E.P.N 1980, Quito, Ecuador.
- BARRAGAN MARCO. "Identificación y Control" Poligrafiado editado en Escuela Politécnica Nacional, Mayo de 1986.
- BRYSON Jr. ARTHUR. "Applied Optimal Control"
YU-CHI-HO
- DORF RICHARD. "Sistemas Automáticos de Control", Fondo Educativo Interamericano, 1977. EUA.
- KIRK DONALD. "Optimal Control Theory: An Introduction", Prentice Hall, 1970. EUA.
- M.L. KRASNOV, G.I. MAKARENKO. "Cálculo Variacional: Ejemplos y Problemas" 1976. Editorial MIR. URSS.
A.I. KISELIOV
- R. KETTER, SHERWOOD. PRAWEL, "Modern Methods of Engineering Computation", Mc. Graw-Hill 1969. EUA.
- MICROSOFT. "Manual de Uso de Computador ADDS-PC/II" Subsidiaria de la NCR. 1983.
- STANLEY M. SHINNERS. "Control System Design" Wiley International Editios, 1966. EUA.

A N E X O A

MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

En general, para utilizar uno de los tres métodos establecidos se sugiere el siguiente procedimiento:

METODO	NOMBRE DEL PROGRAMA PRINCIPAL
PENDIENTE MAS PRONUNCIADA	"CONTROL"
VARIACION DE EXTREMALES	"VAREX"
CUASILEALIZACION	"CUASI"

- 1.- Elegir el método a utilizarse
(Se recomienda iniciar con cuasilinealización, pendiente más pronunciada).
- 2.- Según el método escogido, preparar el subprograma de Datos, de acuerdo al planteamiento de los ejemplos.
- 3.- Encender el computador e inicializar Fecha y hora.
- 4.- Disponer del dyskette que contiene los programas principales.
- 5.- Teclar C > A :, ENTER
- 6.- Correr el sistema:
A > GW BASIC, ENTER
- 7.- Tipear el subprograma y cargarlo en el Diskete.

Sale "Ejemplo .CON"

.CON" significa que se va a trabajar con el método de la Pendiente mas pronunciada.

.VAR" con variación de extremales, y

.LI" Con cuasilinealización

Incluir la instrucción de cadena

* 10000 CHAIN MERGE "Nombre del Prog. Principal"

8.- Correr el subprograma a partir de:

RUN 10000 para variación y cuasilealización.

RUN 6000 para control

* 6000 para pendiente más pronunciada

9.- Ingresar los datos solicitados en la pantalla.

10.- Finalizada la entrega de datos, el programa corre, indicando en cada iteración los valores calculados de: medida de rendimiento y criterio de parada, como control para saber si los resultados convergen.

En cuanto se cumple el criterio de paradaóse llega al límite del Número de iteraciones, el programa se detiene y se puede disponer de los resultados impresos.

A N E X O B

LISTADO DE VARIABLES UTILIZADAS

VARIABLE	NOMBRE	FORMATO
$u(t)$	Ley de control	$u(I,J)$
$x(t)$	Vector de estado	$x(I,J)$
$p(t)$	Vector de coestado	$p(I,J)$
$h(x(t_f))$	Función del rendimiento	h
$\partial h / \partial x$	Derivada parcial de h respecto de x	$DHX(I)$
$\dot{x}(t)$	Ecuación diferencial de estado	$A(I), F(I)$
$\dot{p}(t)$	Ecuación diferencial de coestado	$B(I), -HX(I)$
J	Función del rendimiento	$y(G)$
Norma (G)	Criterio de parada	$z(G)$
$u_0(I)$	Función control de inicio	$u0(I,J)$
$\partial H / \partial u$	Derivada parcial del Hamiltoniano respecto del control $u(t)$	$DHU(J)$
$g(x,u,t)$	Integrando del rendimiento	$G(J)$
TA0	Medida del paso de iteración	TA0
t	Tiempo discreto	T

A N E X O C

CONTIENE:

- 1.- LISTADO DEL PROGRAMA "CONTROL.BAS"
- 2.- LISTADO DEL PROGRAMA "VAREX.BAS"
- 3.- LISTADO DEL PROGRAMA "CUASI.BAS"

10 ESCUELA POLITECNICA NACIONAL - QUITO ECUADOR
20 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
30
40 DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL
50 TESIS DE GRADO
60 EDGAR RENE JARAMILLO PARRALES
70 JULIO DE 1.986
80 TRAYECTORIAS OPTIMAS DE ESTADO MEDIANTE METODOS NUMERICOS
90

100 METODO: PENDIENTE MAS PRONUNCIADA
110 ESTE METODO ESTA DISENIADO PARA RESOLVER EL PROBLEMA
120 DEL CONTROL OPTIMO DEL TIPO NO LINEAL CON CONDICIONES
130 DE BORDE SEPARADAS. LA FILOSOFIA DE ESTA TECNICA ESTA
140 EN CONSIDERAR QUE NO SE SATISFACE LA CONDICION DE:
150 $dH/dU = 0$. POR TANTO EL METODO ITERATIVO TIENDE A HACER
160 CUMPLIR TAL ECUACION.

170
180 LENGUAJE UTILIZADO : BASIC
190 TIPO: GWBASIC
200 COMPUTADOR: A.D.D.S: PC/2 ., 64 Kbytes
210

220 CLS
230 CLEAR

240
250 LPRINT
260 L=1

270 AA=0
280 BB=0
290 DEFDBL X,P

300 ENTRADA DE DATOS

310 INPUT "ORDEN DE ESTADO, N=", N

320 TI=0

330 INPUT "TIEMPO FINAL TF = ", TF

340 INPUT "EXACTITUD E=", E

350 INPUT "CONSTANTE DE ERROR, ALFA =", ALFA

360 INPUT "MEDIDA DE PASO, TAO =", TAO

370 INPUT "# MAXIMO DE ITERACIONES PROG. PR., NMX=", NMX

380 INPUT "ORDEN SISTEMA DE CONTROL, M=", M

390 MUM=M

400 DIM X(N,100); U(M,100); A(N); J(NMX); Y(NMX); WZT(NMX); V(M,100)

410 DIM UO(M,100); DX(N); Q(N); CI(N); Z(NMX); N(NMX); M(100); DHU(100)

420 DIM P(N,100); B(N); DHX(100); G(100); S(N); DP(N); PI(N); PF(N)

430 DIM W(N,100); C(N,100)

440 TAU=TAO

450 REM * CONDISION INICIAL DE ESTADO *

460 FOR I=1 TO N

470 INPUT " XO =", XO(I)

480 NEXT I

490 NI=INT((TF-TI)/E)

500 REM * CONTROL INICIAL Uo(t) *

510 FOR I=1 TO M

520 INPUT " UO =", CI(I)

530 FOR J=0 TO NI

540 UO(I,J)=CI(I)

550 NEXT J, I

```

560
570
580 FOR I=1 TO M
590 FOR J=0 TO NI
600 U(I,J)=U0(I,J)
610 NEXT J,I
620 J=0
630 TIN=TI
640 FOR I=1 TO N
650 XI(I)=X0(I)
660 NEXT
670 J=1
680 FOR I=1 TO N
690 X(I,J)=XI(I)
700 NEXT
710 T=TIN
720
730
740
750
760
770
780
790 FOR I=1 TO N
800 GOSUB 5000
810 K1(I)=A(I)*E
820 NEXT
830 T=TIN+E/2
840 FOR I=1 TO N
850 X(I,J)=XI(I)+K1(I)/2
860 NEXT
870 FOR I=1 TO N
880 GOSUB 5000
890 K2(I)=A(I)*E
900 NEXT
910 FOR I=1 TO N
920 X(I,J)=XI(I)+K2(I)/2
930 NEXT
940 FOR I=1 TO N
950 GOSUB 5000
960 K3(I)=A(I)*E
970 NEXT
980 T=TIN+E
990 FOR I=1 TO N
1000 X(I,J)=XI(I)+K3(I)
1010 NEXT
1020 FOR I=1 TO N
1030 GOSUB 5000
1040 K4(I)=A(I)*E
1050 NEXT
1060 FOR I=1 TO N
1070 DX(I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/6
1080 NEXT
1090 FOR I=1 TO N
1100 Q(I)=XI(I)+DX(I)

```

CALCULO DE ESTADOS

ESTA SECCION DEL PROGRAMA SE ENCARGA DE RESOLVER
LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ESTADO UTILIZANDO
LA CONDICION INICIAL $x_0(t)$, Y EL CONTROL INICIAL
EL METODO EMPLEADO ES EL ALGORITMO DE RUNGE-KUTTA
SIMPSON DE CUARTO ORDEN

```

1
2
3
4
5 1110 X(I,J)=Q(I)
6 1120 NEXT
7 1130 J=J+1
8 1140 FOR I=1 TO N
9 1150 XI(I)=Q(I)
10 1160 NEXT
11 1170 TIN=T
12 1180 IF J>NI THEN 1260 ELSE 680
13 1190
14 1200          CALCULO DE COESTADOS
15 1210          SE PROCEDE A CALCULAR EL SISTEMA DE ECUACIONES
16 1220          EMPLEANDO EL METODO DE INTEGRACION NUMERICA AN
17 1230          TERIORMENTE UTILIZADO.
18 1240
19 1250
20 1260 GOSUB 5000
21 1270 FOR I=1 TO N
22 1280 PF(I)=DHX(I)
23 1290 NEXT
24 1300 J=NI
25 1310 TIN=TF
26 1320 FOR I=1 TO N
27 1330 PI(I)=PF(I)
28 1340 NEXT
29 1350 FOR I=1 TO N
30 1360 P(I,J)=PI(I)
31 1370 NEXT
32 1380 T=TIN
33 1390 FOR I=1 TO N.
34 1400 GOSUB 5000
35 1410 K1(I)=B(I)*E
36 1420 NEXT
37 1430 T=TIN-E/2
38 1440 FOR I=1 TO N
39 1450 P(I,J)=PI(I)-K1(I)/2
40 1460 NEXT
41 1470 FOR I=1 TO N
42 1480 GOSUB 5000
43 1490 K2(I)=B(I)*E
44 1500 NEXT
45 1510 FOR I=1 TO N
46 1520 P(I,J)=PI(I)-K2(I)/2
47 1530 NEXT
48 1540 FOR I=1 TO N
49 1550 GOSUB 5000
50 1560 K3(I)=B(I)*E
51 1570 NEXT
52 1580 T=TIN-E
53 1590 FOR I=1 TO N
54 1600 P(I,J)=PI(I)-K3(I)
55 1610 NEXT
56 1620 FOR I=1 TO N
57 1630 GOSUB 5000
58 1640 K4(I)=B(I)*E
59 1650 NEXT
60
61
62

```

```

UU
QA
3
4
5 1660 FOR I=1 TO N
6 1670 DP(I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/6
7 1680 NEXT
8 1690 FOR I=1 TO N
9 1700 S(I)=PI(I)-DP(I)
10 1710 F(I,J)=S(I)
11 1720 NEXT
12 1730 J=J+1
13 1740 FOR I=1 TO N
14 1750 PI(I)=S(I)
15 1760 NEXT
16 1770 TIN=T
17 1780 IF JKTI THEN 1850 ELSE 1350
18 1790
19 1800
20 1810
21 1820
22 1830
23 1840
24 1850 K=1
25 1860 T=TI
26 1870 J=TI
27 1880 GOSUB 5000
28 1890 GO=G(J)
29 1900 T=TF
30 1910 J=NI
31 1920 GOSUB 5000
32 1930 GF=G(J)
33 1940 WZT(L)=GO+GF
34 1950 R=1
35 1960 J=TI
36 1970 T=TI+R*E
37 1980 J=J+1
38 1990 IF J=NI OR T=TF THEN 2000 ELSE 2020
39 2000 WZT(L)=WZT(L)*E/3
40 2010 GOTO 2120
41 2020 IF K=1 THEN 2080 ELSE 2030
42 2030 GOSUB 5000
43 2040 WZT(L)=WZT(L)+2*G(J)
44 2050 K=1
45 2060 R=R+1
46 2070 GOTO 1970
47 2080 GOSUB 5000
48 2090 WZT(L)=WZT(L)+4*G(J)
49 2100 K=0
50 2110 GOTO 2060
51 2120 GOSUB 5000
52 2130 Y(0)=9999999!
53 2140 Y(L)=H+WZT(L)
54 2150 IF Y(L)<Y(L-1) THEN 2180 ELSE 3400
55 2160
56 2170
57 2180
58 2190
59 2200
60
61
62

```

CALCULO DEL RENDIMIENTO

SE CALCULA EL FUNCIONAL MEDIDA DE RENDIMIENTO
EN BASE A INTEGRACION NUMERICA DE FUNCIONES
DE SIMPSON.

CALCULO DE LA NORMA

AQUI SE DETERMINA EL CRITERIO DE PARADA
EN BASE A LA ECUACION pH/pU.

```

4 2210 K=1
5 2220 T=TI
6 2230 J=TI
7 2240 GOSUB 3370
8 2250 MO=M(J)
9 2260 T=TF
10 2270 J=NI
11 2280 GOSUB 3370
12 2290 MF=M(J)
13 2300 N(L)=MO+MF
14 2310 R=1
15 2320 J=TI
16 2330 T=TI+R*E
17 2340 J=J+1
18 2350 IF J=NI OR T=TF THEN 2360 ELSE 2390
19 2360 N(L)=N(L)*E/3
20 2370 GOTO 2480
21 2380 IF K=1 THEN 2440 ELSE 2390
22 2390 GOSUB 3370
23 2400 N(L)=N(L)+2*M(J)
24 2410 K=1
25 2420 R=R+1
26 2430 GOTO 2330
27 2440 GOSUB 3370
28 2450 N(L)=N(L)+4*M(J)
29 2460 K=0
30 2470 GOTO 2420
31 2480 Z(L)=SQR(N(L))
32 2490 IF Z(L)<ALFA THEN 2500 ELSE 2530
33 2500 GOTO 2790
34 2510
35 2520
36 2530 CALCULAR NUEVO CONTROL
37 2540 PRINT "ITERACION=",L
38 2550 PRINT "RENDIMIENTO="Y(L)
39 2560 FOR I=1 TO M
40 2570 FOR J=0 TO NI
41 2580 V(I,J)=U(I,J)
42 2590 NEXT J,I
43 2600 FOR I=1 TO N
44 2610 FOR J=TI TO NI
45 2620 W(I,J)=X(I,J)
46 2630 C(I,J)=P(I,J)
47 2640 NEXT J,I
48 2650 IF L=NMX THEN 2780
49 2660 PRINT "ERROR="Z(L)
50 2670 L=L+1
51 2680 PRINT
52 2690 SOUND 200,2
53 2700 SOUND 100,3
54 2710 SOUND 500,2
55 2720 FOR I=1 TO M
56 2730 FOR J=0 TO NI
57 2740 GOSUB 5000
58 2750 U(I,J)=V(I,J)-TAD*DHU(J)
59
60
61
62

```

```
1
2
3
4
5 2760 NEXT J,I
6 2770 GOTO 620
7 2780 PRINT "LIMITE DE ITERACIONES,..POSIBLE DIVERGENCIA"
8 2790 PRINT "ERROR="Z(L)
9 2800                                RESULTADOS FINALES
10 2810 VV=L
11 2820 INPUT "IMPRESION DE RESULTADOS SI/NO ?:" ,Q$
12 2830 IF Q$="SI" THEN 2840 ELSE 3360
13 2840 GOSUB 4120
14 2850 ON N GOTO 2860,3630,3880
15 2860 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS *"
16 2870 LPRINT
17 2880 FOR I=1 TO N
18 2890 LPRINT "t estado x"N"(t) "
19 2900 LPRINT "....."
20 2910 LPRINT " 0 " ; X0(N)
21 2920 L=E
22 2930 FOR J=TI+1 TO NI
23 2940 LPRINT "0"L ; X(N,J)
24 2950 L=E+L
25 2960 NEXT J
26 2970 LPRINT "....."
27 2980 NEXT I
28 2990 LPRINT "....."
29 3000 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS *"
30 3010 LPRINT
31 3020 FOR I=1 TO N
32 3030 LPRINT "t coestado p"N"(t) "
33 3040 LPRINT "....."
34 3050 L=0
35 3060 FOR J=TI TO NI-1
36 3070 LPRINT "0"L ; F(N,J)
37 3080 L=L+E
38 3090 NEXT J
39 3100 LPRINT "F(I) "
40 3110 LPRINT "....."
41 3120 NEXT I
42 3130 LPRINT "....."
43 3140 LPRINT
44 3150 LPRINT " HISTORIA DEL CONTROL"
45 3160 LPRINT
46 3170 M=MUM
47 3180 FOR I=1 TO M
48 3190 EX=0
49 3200 LPRINT "t u"I"(t) "
50 3210 LPRINT "....."
51 3220 FOR J=TI TO NI
52 3230 LPRINT "0"EX ; U(I,J)
53 3240 EX=EX+E
54 3250 NEXT J,I
55 3260 LPRINT "....."
56 3270 LPRINT
57 3280 LPRINT "ITERACION RENDIMIENTO NORMA"
58 3290 LPRINT "....."
59 3300 FOR I=1 TO VV
60
61
62
63
```

```

1
2
3
4
5 3310 LPRINT I, Y(I), Z(I)
6 3320 NEXT
7 3330 LPRINT "
8 3340 LPRINT "PASO FINAL TAO=",TAO
9 3350 LPRINT "=====
10 3360 END
11 3370 GOSUB 5000
12 3380 M(J)=DHU(J)^2
13 3390 RETURN
14 3400 IF TAO>.25 THEN 3410 ELSE 3550
15 3410 BB=1
16 3420 IF AA=1 THEN 3590 ELSE 3430
17 3430 TAO=TAO-.25
18 3440 L=L-1
19 3450 FOR I=1 TO M
20 3460 FOR J=0 TO NI
21 3470 U(I,J)=V(I,J)
22 3480 NEXT J,I
23 3490 FOR I=1 TO N
24 3500 FOR J=TI TO NI
25 3510 X(I,J)=W(I,J)
26 3520 F(I,J)=C(I,J)
27 3530 NEXT J,I
28 3540 GOTO 2720
29 3550 IF BB=1 THEN 3560 ELSE 3580
30 3560 PRINT "INESTABILIDAD"
31 3570 GOTO 2180
32 3580 AA=1
33 3590 TAO=TAO+.25
34 3600 IF TAO>1 THEN 3610 ELSE 3440
35 3610 AA=0
36 3620 GOTO 3440
37 3630 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS *"
38 3640 LPRINT
39 3650 LPRINT "t ESTADO x1(t) ESTADO x2(t)
40 3660 LPRINT "
41 3670 LPRINT "0", , XO(1) , , XO(2)
42 3680 L=E
43 3690 FOR J=TI+1 TO NI
44 3700 LPRINT "0"L, X(1,J), , X(2,J)
45 3710 L=E+L
46 3720 NEXT J
47 3730 LPRINT "
48 3740 LPRINT
49 3750 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS *"
50 3760 LPRINT
51 3770 LPRINT "t COESTADO F1(t) COESTADO F2(t)
52 3780 LPRINT "
53 3790 L=0
54 3800 FOR J=TI TO NI
55 3810 LPRINT "0"L, F(1,J), , F(2,J)
56 3820 L=E+L
57 3830 NEXT J
58 3840 LPRINT "
59 3850 LPRINT
60
61
62
63

```



```

3
4
5 3860 GOTO 3140
6 3870
7 3880 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS * "
8 3890 LPRINT
9 3900 LPRINT "t ESTADO x1(t) ESTADO x2(t)
10 ESTADO x3(t) "
11 3910 LPRINT "
12 "
13 3920 LPRINT "O! , , X0(1) , , X0(2)
14 (3)
15 3930 L=E
16 3940 FOR J=TI+1 TO NI
17 3950 LPRINT "O"L , , X(1,J) , , X(2,J)
18 (3,J)
19 3960 L=E+L
20 3970 NEXT J
21 3980 LPRINT "
22 "
23 3990 LPRINT
24 4000 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS * "
25 4010 LPRINT
26 4020 LPRINT "t COESTADO P1(t) COESTADO P2(t)
27 COESTADO P3(t) "
28 4030 LPRINT "
29 "
30 4040 L=0
31 4050 FOR J=TI TO NI
32 4060 LPRINT "O"L , , P(1,J) , , P(2,J)
33 P(3,J)
34 4070 L=E+L
35 4080 NEXT J
36 4090 LPRINT "
37 "
38 4100 LPRINT
39 4110 GOTO 3140
40 4120 LPRINT CHR$(14) "PENDIENTE MAS PRONUNCIADA"
41 4130 LPRINT "ORDEN DE ESTADO="N
42 4140 LPRINT "ORDEN DE CONTROL="M
43 4150 LPRINT "TIEMPO FINAL="TF
44 4160 LPRINT "EXACTITUD="E
45 4170 FOR I=1 TO N
46 4180 LPRINT "ESTADO INICIAL X"I"(0)="X0(I)
47 4190 NEXT
48 4200 LPRINT "PASO INICIAL="TAU
49 4210 FOR I=1 TO M
50 4220 LPRINT "CONTROL INICIAL U"I"(t)"CI(I)
51 4230 NEXT
52 4240 LPRINT
53 4250 RETURN
54 4270
55 4990 INGRESO DE DATOS EN BASE A SUBPROGRAMA ENCADENADO
56 5500 RETURN

```

1 ESCUELA POLITECNICA NACIONAL - QUITO ECUADOR
2 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
3
4 DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL
5 TESIS DE GRADO
6 EDGAR RENE JARAMILLO PARRALES
7 JULIO DE 1.986
8 TRAYECTORIAS OPTIMAS DE ESTADO MEDIANTE METODOS NUMERICOS
9

10 METODO : VARIACION DE EXTREMALS, "VAREX.BAS"
15 METODO ITERATIVO TENDIENTE A ENCONTRAR LA
20 SOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA DEL CONTROL
25 OPTIMO DEL TIPO NO LINEAL CON CONDICIONES
30 DE CONTORNO SEPARADAS, EN BASE A HACER
35 CUMPLIR LA ECUACION $F(t_f) = dh(x(t_f)) / dx.$
40
45

100
110 LPRINT

120 CLEAR

130 CLE

140 DEFDBL X,P

150 ENTRADA DE DATOS

160 INPUT "ORDEN DE ESTADO, N=",N

170 NUM=N

180 TI=0

190 INPUT "TIEMPO FINAL TF = ",TF

200 INPUT "EXACTITUD E=",E

210 INPUT "CONSTANTE DE ERROR, ALFA =",ALFA

220 INPUT "# MAXIMO DE ITERACIONES PROG. PR., NMX=",NMX

225 INPUT "ORDEN DEL CONTROL=",M

230

235 G=1

240 DIM X(10,100),U(M,100),A(10),J(NMX),YI(10),WZT(NMX),V(M,100)

250 DIM NOR(NMX),REND(NMX)

260 DIM F(9,100),DX(9),Q(9),CI(9),PC(10,10)

270 DIM PX(10,10),G(100),PF(10,10),FF(10)

280 DIM PD(10,10),W(10,100),C(10,100),Y(10,100),PA(10,10),PB(10,10)

290

300 CONDISION INICIAL DE ESTADO

310 FOR I=1 TO N

320 INPUT " X0 =",X0(I)

330 NEXT

340 NI=INT((TF-TI)/E)

350 CONDISION INICIAL DE COESTADO

360 FOR I=N+1 TO 2*N

370 INPUT "P0 =",X0(I)

380 NEXT I

390 REM

520

530 FOR I=N+1 TO 2*N

540 XI(I)=X0(I)

550 NEXT

560

570 SE RESUELVEN LAS 2*N ECUACIONES DE ESTADO Y COESTADO

580 SIMULTANEAMENTE CON LAS CONDICIONES DE BORDE $X_0(0)$ Y

582 $P_0(0)$ INICIALES, MEDIANTE EL METODO DE INTEGRACION

DA DE RUNGE-KUTTA SMPSON DE CUARTO ORDEN.

NUMERICA DE RUNGE-KUTTA SMPSON DE CUARTO ORDEN.

```

584
590 TIN=TI
600 J=0
610 FOR I=1 TO N
620 XI(I)=X0(I)
630 X(I,J)=XI(I)
640 NEXT
650 FOR I=N+1 TO 2*N
660 X(I,J)=XI(I)
670 NEXT
680 ZE=0
690 N=N*2
700 J=1
710
720 FOR I=1 TO N
730 X(I,J)=XI(I)
740 NEXT
750 T=TIN
760
770 GOSUB 4690
780 FOR I=1 TO N
790 K1(I)=A(I)*E
800 NEXT
810 T=TIN+E/2
820 FOR I=1 TO N
830 X(I,J)=XI(I)+K1(I)/2
840 NEXT
850 GOSUB 4690
860 FOR I=1 TO N
870 K2(I)=A(I)*E
880 NEXT
890 FOR I=1 TO N
900 X(I,J)=XI(I)+K2(I)/2
910 NEXT
920 GOSUB 4690
930 FOR I=1 TO N
940 K3(I)=A(I)*E
950 NEXT
960 T=TIN+E
970 FOR I=1 TO N
980 X(I,J)=XI(I)+K3(I)
990 NEXT
1000 GOSUB 4690
1010 FOR I=1 TO N
1020 K4(I)=A(I)*E
1030 NEXT
1040 FOR I=1 TO N
1050 DX(I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/5
1060 NEXT
1070 FOR I=1 TO N
1080 Q(I)=XI(I)+DX(I)
1090 X(I,J)=Q(I)
1100 NEXT
1110 J=J+1
1120 FOR I=1 TO N
1130 XI(I)=Q(I)

```

CALCULO DE ESTADOS

4690

```

1
2
3
4
5 1140 NEXT
6 1150 TIN=T
7 1160 IF J>NI THEN 1170 ELSE 710
8 1170 N=NUM
9 1180 FOR I=N+1 TO 2*N
10 1190 FOR J=TI TO NI
11 1200 P(I,J)=X(I,J)
12 1210 NEXT J,I
13 1220 FOR I=N+1 TO 2*N
14 1230 FOR J=TI TO NI
15 1240 P(I-N,J)=P(I,J)
16 1250 NEXT J,I
17 1260
18 1261          CALCULO DEL RENDIMIENTO
19 1262          SE CALCULA EL FUNCIONAL Y MEDIDA DE RENDIMIENTO
20 1263          EN BASE A INTEGRACION NUMERICA DE FUNCIONES DE
21 1270          SIMPSON.
22 1270 K=1
23 1280 T=TI
24 1290 J=TI
25 1300 GOSUB 6700
26 1310 GO=G(J)
27 1320 T=TF
28 1330 J=NI
29 1340 GOSUB 6700
30 1350 GF=G(J)
31 1360 WZT(G)=GO+GF
32 1370 R=1
33 1380 J=TI
34 1390 T=TI+R*E
35 1400 J=J+1
36 1410 IF J=NI OR T=TF THEN 1420 ELSE 1440
37 1420 WZT(G)=WZT(G)*E/3
38 1430 GOTO 1540
39 1440 IF K=1 THEN 1500 ELSE 1450
40 1450 GOSUB 6700
41 1460 WZT(G)=WZT(G)+2*G(J)
42 1470 K=1
43 1480 R=R+1
44 1490 GOTO 1390
45 1500 GOSUB 6700
46 1510 WZT(G)=WZT(G)+4*G(J)
47 1520 K=0
48 1530 GOTO 1480
49 1540 GOSUB 6700
50 1550 REND(O)=999999999#
51 1560 REND(G)=H+WZT(G)
52 1570
53 1571          CRITERIO DE PARADA
54 1572          SE CALCULA LA NORMA RESPECTO A LA ECUACION P(tf)=dh/d
55 1580 GOSUB 6700
56 1590 FOR I=1 TO N
57 1600 NORM=0
58 1610 NORM=NORM+ABS(P(I,NI)-DHX(I))
59 1620 NEXT I
60 1630 NOR(G)=NORM
61 1640 IF NOR(G)<ALFA THEN 4280
62 1650
63 1660

```

UN
NA
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63

FASO 2

CALCULO MATRIZ DE INFLUENCIA

```
1660  
1670  
1680  
1690 TIN=TI  
1700 FOR I=1 TO 2*N*N  
1710 J=0  
1720 Y(I,J)=0  
1730 YI(I)=0  
1740 NEXT  
1750 I=N*N+1  
1760 J=0  
1770 Y(I,J)=1  
1780 YI(I)=1  
1790 IF I=2*N*N THEN 1820  
1800 I=I+(N+1)  
1810 GOTO 1760  
1820 ZE=1
```

SUBROUTINA ESTADO CON Y(I,J), FI(I)

SE INTEGRA EL SISTEMA DE ECUACIONES DE INFLUENCIA
MEDIANTE EL METODO DE RUNGE-KUTTA SIMPSON DE CUAR
TO ORDEN Y CON LAS CONDICIONES DE BORDE DADAS.

SUBROUTINA ESTADO

```
1830  
1835  
1836  
1838  
1840  
1850  
1860 N=2*N*N  
1870 J=I  
1880 FOR I=1 TO N  
1890 Y(I,J)=YI(I)  
1900 NEXT  
1910 T=TIN  
1920  
1930 GOSUB 4690  
1940 FOR I=1 TO N  
1950 K1(I)=FI(I)*E  
1960 NEXT  
1970 T=TIN+E/2  
1980 FOR I=1 TO N  
1990 Y(I,J)=YI(I)+K1(I)/2  
2000 NEXT  
2010 GOSUB 4690  
2020 FOR I=1 TO N  
2030 K2(I)=FI(I)*E  
2040 NEXT  
2050 FOR I=1 TO N  
2060 Y(I,J)=YI(I)+K2(I)/2  
2070 NEXT  
2080 GOSUB 4690  
2090 FOR I=1 TO N  
2100 K3(I)=FI(I)*E  
2110 NEXT  
2120 T=TIN+E  
2130 FOR I=1 TO N  
2140 Y(I,J)=YI(I)+K3(I)  
2150 NEXT  
2160 GOSUB 4690  
2170 FOR I=1 TO N  
2180 K4(I)=FI(I)*E  
2190 NEXT
```

CALCULO DE ESTADOS

```

2
3
4
5 2200 FOR I=1 TO N
6 2210 DY (I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/6
7 2220 NEXT
8 2230 FOR I=1 TO N
9 2240 Q(I)=YI(I) +DY (I)
10 2250 Y(I,J)=Q(I)
11 2260 NEXT
12 2270 J=J+1
13 2280 FOR I=1 TO N
14 2290 YI(I) =Q(I)
15 2300 NEXT
16 2310 TIN=T
17 2320 IF J>NI THEN 2330 ELSE 1880
18 2330 N=NUM
19 2340
20 2350 K=1
21 2360 FOR I=1 TO N
22 2370 FOR L=1 TO N
23 2380 J=NI
24 2390 PX(I,L)=Y(K,J)
25 2400 K=K+1
26 2410 NEXT L,I
27 2420 K=N*N+1
28 2430 FOR I=1 TO N
29 2440 FOR L=1 TO N
30 2450 J=NI
31 2460 PP(I,L)=Y(K,J)
32 2470 K=K+1
33 2480 NEXT L,I
34 2490 SE ACABA DE RESOLVER LA MATRIZ DE INFLUENCIA
35 2500
36 2510 MULTIPPLICAR D2HX(I,L)*PX(I,L)
37 2520 GOSUB 6700
38 2530 FOR I=1 TO N
39 2540 FOR J=1 TO N
40 2550 SG=0
41 2560 FOR K=1 TO N
42 2570 SG=SG+D2HX(I,K)*PX(K,J)
43 2580 NEXT K
44 2590 HP(I,J)=SG
45 2600 NEXT J,I
46 2610 OBTENGO HP(I,L)
47 2620
48 2630 SUMAR HP(I,L) = PP(I,L)
49 2640 FOR I=1 TO N
50 2650 FOR L=1 TO N
51 2660 MA(I,L)=HP(I,L)-PP(I,L)
52 2670 NEXT L,I
53 2680 OBTENGO MA(I,L)
54 2690 IF N=1 THEN 2700 ELSE 2740
55 2700 I=1
56 2710 L=1
57 2720 MAI(I,L)=1/MA(I,L)
58 2730 GOTO 3990
59 2740 SE INVIERTE LA MATRIZ MA(I,L) MEDIANTE LA
60
61
62

```

```

1
2
3
4
5 2750 SUBROUTINA DE CHOLESKY, COMO METODO ELEGIDO
6 2800
7 2810
8 2820
9 2830 FOR I=1 TO N
10 2840 FOR J=1 TO N
11 2850 B(I,J)=MA(I,J)
12 2860 NEXT J,I
13 2870
14 2880 MC=I
15 2890 I=1
16 2900 IF I=MC THEN 2950
17 2910 CE(I)=0
18 2920 IF I=N THEN 2970
19 2930 I=I+1
20 2940 GOTO 2900
21 2950 CE(I)=I
22 2960 GOTO 2920
23 2970 SOBRT. CHOLESKY
24 2980 FOR I=1 TO N
25 2990 B(I,N+1)=CE(I)
26 3000 NEXT
27 3010 I=1
28 3020 IF B(I,1)=0 THEN 3030 ELSE 3080
29 3030 IF I=N THEN 3040 ELSE 3060
30 3040 PRINT "matriz de influencia no invertible"
31 3050 STOP
32 3060 I=I+1
33 3070 GOTO 3020
34 3080 IF I=1 THEN 3180
35 3090 J=I
36 3100 SAVEB=B(I,J)
37 3110 B(I,J)=B(I,J)
38 3120 B(I,J)=SAVEB
39 3130
40 3140 IF J=N+1 THEN 3170
41 3150 J=J+1
42 3160 GOTO 3100
43 3170 Y=1
44 3180 L(I,I)=B(I,I)
45 3190 T(I,I)=1
46 3200 IF I=N THEN 3230
47 3210 I=I+1
48 3220 GOTO 3180
49 3230 I=2
50 3240 J=2
51 3250 T(I,J)=B(I,J)/B(I,I)
52 3260 IF J=N+1 THEN 3290
53 3270 J=J+1
54 3280 GOTO 3250
55 3290 IK=2
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

```

```

1
2
3
4 3300- J=2
5 3310- SUML=0
6 3320 FOR MD=1 TO J-1
7 3330- SUML=SUML+L(I, MD)*T(MD, J)
8 3340 NEXT MD
9 3350- L(I, J)=B(I, J)-SUML
10 3360- IF J=I THEN 3390
11 3370- J=J+1
12 3380- GOTO 3310
13 3390- IF L(I, I)=0 THEN 3680
14 3400
15 3410- FOR J=J+1 TO N+1
16 3420- SUMT=0
17 3430- FOR K=1 TO I-1
18 3440- SUMT=SUMT+L(I, K)*T(K, J)
19 3450- NEXT K
20 3460- T(I, J)=(B(I, J)-SUMT)/L(I, I)
21 3470
22 3480- NEXT J
23 3490
24 3500- IF I=N THEN 3540
25 3510- I=I+1
26 3520- IK=I
27 3530- GOTO 3300
28 3540- FOR I=1 TO N
29 3550- K(I)=T(I, N+1)
30 3560
31 3570- NEXT I
32 3580- N(N)=K(N)
33 3590- FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
34 3600- SUM=0
35 3610- FOR J=I+1 TO N
36 3620- SUM=SUM+T(I, J)*N(J)
37 3630
38 3640- NEXT J
39 3650- N(I)=K(I)-SUM
40 3660- NEXT I
41 3670- GOTO 3890
42 3680- TEMP=I
43 3690- IF IK=N THEN 3040
44 3700- FOR J=1 TO N+1
45 3710- SAVEJ=B(I, J)
46 3720- NEXT J
47 3730- SAVEL=L(I, 1)
48 3740- FOR J=1 TO N+1
49 3750- B(I, J)=B(I+1, J)
50 3760- NEXT J
51 3770- L(I, 1)=L(I+1, 1)
52 3780- IF I=N-1 THEN 3810
53 3790- I=I+1
54 3800- GOTO 3740
55 3810- FOR J=1 TO N+1
56 3820- B(N, J)=SAVEJ
57 3830- NEXT J
58 3840- L(N, 1)=SAVEL
59
60
61

```



```

1
2
3
4
5 3850 IK=IK+1
6 3860 I=TEMP
7 3870 GOTO 3300
8 3880
9 3890 FOR I=1 TO N
0 3900 MAI(I,MC)=N(I)
1 3910 NEXT
2 3920 IF MC=N THEN 3950
3 3930 MC=MC+1
4 3940 GOTO 2890
5 3950 RESULTADOS
6 3960 FOR I=1 TO N
7 3970 FOR J=1 TO N
8 3980 NEXT J,I
9 3990
0 4000 GOSUB 6700
1 4010 FOR I=1 TO N
2 4020 PH(I)=F(I,NI)-DHX(I)
3 4030 NEXT I
4 4040
5 4050 MULTIPLICAR MAIM(I)=MAI(I,K)*PH(K)
6 4060 FOR I=1 TO N
7 4070 SR=0
8 4080 FOR K=1 TO N
9 4090 SR=SR+MAI(I,K)*PH(K)
0 4100 NEXT K
1 4110 MAIM(I)=SR
2 4120 NEXT I
3 4130 GOSUB 6560
4 4135
5 4140 FOR I=1 TO N
6 4150 P(I,TI)=P(I,TI)+MAIM(I)*COE
7 4160 NEXT I
8 4170
9 4180 FOR I=1 TO N
0 4190 XI(I+N)=P(I,TI)
1 4200 NEXT I
2 4220 IF G=NMN THEN 4270
3 4230 PRINT "ITERACION "G
4 4232 PRINT "RENDIMIENTO "REND(G)
5 4234 PRINT "ERROR "NOR(G)
6 4235 G=G+1
7 4240 PRINT
8 4245 SOUND 300,5
9 4250 GOTO 590
0 4260 RESULTADOS FINALES
1 4270 PRINT "LIMITE DE ITERACIONES ,..POSIBLE DIVERGENCIA"
2 4280 INPUT "IMPRESION DE RESULTADOS SI/NO ?:"Q$
3 4285 IF Q$="SI" THEN 7550 ELSE 4655
4 4290 ON N GOTO 4300,7010,7300
5 4300 CPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS *"
6 4305 LPRINT

```

```

4310 FOR I=1 TO N
4320 LPRINT " t estado x"N"(t)"
4325 LPRINT " "
4327 LPRINT " 0 " XO(N)
4328 L=E
4330 FOR J=TI+1 TO NI
4335 LPRINT "0"L , X(N,J)
4340 L=L+E
4345 NEXT J
4350 LPRINT " "
4360 NEXT I
4370 LPRINT " "
4380 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS * "
4385 LPRINT " "
4390 FOR I=1 TO N
4400 LPRINT " t coestado p"N"(t)"
4405 LPRINT " "
4408 L=0
4410 FOR J=TI TO NI
4420 LPRINT "0"L , P(N,J)
4425 L=L+E
4430 NEXT J
4435 LPRINT " "
4440 NEXT I
4450 LPRINT " "
4460 LPRINT " "
4470 LPRINT " HISTORIA DEL CONTROL "
4480 LPRINT " "
4490 FOR I=1 TO M
4500 EX=0
4510 LPRINT " t u"I"(t)"
4520 LPRINT " "
4530 FOR J=TI TO NI
4540 LPRINT "0"EX , U(I,J)
4550 EX=EX+E
4560 NEXT J,I
4570 LPRINT " "
4580 LPRINT " "
4590 LPRINT " ITERACION RENDIMIENTO NORMA "
4595 LPRINT " "
4600 FOR I=1 TO G
4610 LPRINT " I, REND(I) , NOR(I) "
4620 NEXT I
4630 LPRINT " "
4640 LPRINT " numero de iteraciones ="G"
4650 LPRINT " ===== "
4655 END
4660
4670
4680
4690 " AQUI INGRESAN LAS EC. DE ESTADO Y COESTADO
4700 N=NUM
4710 IF ZE=1 THEN 5000

```

```

1
2
3
4
5 4980 N=2*N
6 4990 RETURN
7 5000 DATOS MATRIZ INFLUENCIA
8 5000 DATOS MATRIZ INFLUENCIA
9 5000 cambio de nombre las variables de las ec. diferenciales.
10 5010 K=1
11 5020 FOR I=1 TO N
12 5030 FOR L=1 TO N
13 5040 PX(I,L)=Y(K,J)
14 5050 K=K+1
15 5060 NEXT L,I
16 5070 K=N^2 + 1
17 5080 FOR I=1 TO N
18 5090 FOR L=1 TO N
19 5100 PP(I,L)=Y(K,J)
20 5110 K=K+1
21 5120 NEXT L,I
22 5130
23 5140 FOR I=1 TO N
24 5150 FOR L=1 TO N
25 5160 SX=0
26 5170 SF=0
27 5180 FOR K=1 TO N
28 5190 SX=SX+PA(I,K)*PX(K,L)
29 5200 SP=SP+PB(I,K)*PP(K,L)
30 5210 NEXT K
31 5220 C(I,L)=SX+SF
32 5230 NEXT L,I
33 5240 K=1
34 5250 FOR I=1 TO N
35 5260 FOR L=1 TO N
36 5270 FI(K)=C(I,L)
37 5280 K=K+1
38 5290 NEXT L,I
39 5300
40 5310 SIGUIENTES N^2 ECUACIONES EN FI(K)
41 5320
42 5330 FOR I=1 TO N
43 5340 FOR L=1 TO N
44 5350 SX=0
45 5360 SP=0
46 5370 FOR K=1 TO N
47 5380 SX=SX+FC(I,K)*PX(K,L)
48 5390 SP=SP+PD(I,K)*PP(K,L)
49 5400 NEXT K
50 5410 D(I,L)=SX+SP
51 5420 NEXT L,I
52 5430 K=N^2+1
53 5440 FOR I=1 TO N
54 5450 FOR L=1 TO N
55 5460 FI(K)=D(I,L)
56 5470 K=K+1
57 5480 NEXT L,I
58 5490 N=2*N*N
59 5500 TENGO LISTAS LAS 2*N^2 EG. DE LA MATRIZ DE INFLUENCIA
60 5510 PARA RESOLVER MEDIANTE LA SUBROUTINA ESTADO
61
62

```

```

1
2
3
4
5 6520 RETURN
6 6530
7 6540 SUBROUTINA DE CALCULO DEL COE
8 6550 DE ACUERDO A LA ITERACION G
9 6560 IF G>3 THEN 6590
10 6570 COE=:1
11 6580 RETURN
12 6590 IF G>10 THEN 6620
13 6600 COE=COE+.1
14 6610 RETURN
15 6620 COE=1!
16 6630 RETURN
17 6990 RETURN
18 7000
19 7010 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS * "
20 7020 LPRINT
21 7030 LPRINT "t ESTADO-x1(t) ESTADO-x2(t)
22 7040 LPRINT ".....
23 7050 LPRINT "O! , XO(1) , XO(2)
24 7060 L=E
25 7070 FOR J=TI+1 TO NI
26 7080 LPRINT "O"L , X(1,J) , X(2,J)
27 7090 L=E+L
28 7100 NEXT J
29 7110 LPRINT "
30 7120 LPRINT
31 7130 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS * "
32 7140 LPRINT
33 7150 LPRINT "t COESTADO P1(t) COESTADO P2(t)
34 7160 LPRINT ".....
35 7170 L=O
36 7180 FOR J=TI TO NI
37 7190 LPRINT "O"L , P(1,J) , P(2,J)
38 7200 L=E+L
39 7210 NEXT J
40 7230 LPRINT "
41 7240 LPRINT
42 7250 GOTO 4460
43 7260
44 7300 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS * "
45 7310 LPRINT
46 7320 LPRINT "t ESTADO-x1(t) ESTADO-x2(t)
47 ESTADO-x3(t)"
48 7330 LPRINT ".....
49 7340 LPRINT "O! , XO(1) , XO(2)
50 3)
51 7350 L=E
52 7360 FOR J=TI+1 TO NI
53 7370 LPRINT "O"L , X(1,J) , X(2,J)
54 (3,J)
55 7380 L=E+L
56 7390 NEXT J
57 7400 LPRINT "
58 "
59 7410 LPRINT
60
61

```

```

1
2
3
4
5 7410 LPRINT
6 7420 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS *"
7 7430 LPRINT
8 7440 LPRINT "t COESTADO P1(t) COESTADO P2(t)
9 COESTADO P3(t)"
10 7450 LPRINT"....."
11 .....
12 7460 L=0
13 7470 FOR J=TI TI NI
14 7480 LPRINT "0"L, F(1,J) P(2,J)
15 P(3,J)
16 7490 L=E+L
17 7500 NEXT J
18 7520 LPRINT "....."
19 .....
20 7530 LPRINT
21 7540 GOTO 4460
22 7550 LPRINT CHR$(14) "VARIACION DE EXTREMALES
23 7570 LPRINT "ORDEN DE ESTADO N="N
24 7580 LPRINT "ORDEN DE CONTROL M="M
25 7590 LPRINT "TIEMPO FINAL="TF
26 7600 LPRINT "EXACTITUD="E
27 7610 FOR I=1 TO N
28 7620 LPRINT "ESTADO INICIAL X"I"(0)="X0(I)
29 7630 NEXT
30 7640 FOR I= N+1 TO 2*N
31 7650 LPRINT "SUFOSICION INICIAL DE PO("I-N")="X0(I)
32 7660 NEXT
33 7670 GOTO 4290
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

```

- 3 -

P R O G R A M A

"C U A S I . B A S"

METODO DE CUASILINEALIZACION

```

1  ESCUELA POLITECNICA NACIONAL - QUITO ECUADOR
2  FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
3
4  DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL
5  TESIS DE GRADO
6  EDGAR RENE JARAMILLO PARRALES
7  JULIO DE 1.986
8  TRAYECTORIAS OPTIMAS DE ESTADO MEDIANTE METODOS NUMERICOS
9
10 METODO.: CUASILINEALIZACION, "CUASI.BAS"
11 ESTE METODO ESTA PROYECTADO PARA OBTENER
12 LA SOLUCION DEL PROBLEMA GENERAL DE CONTROL
13 OPTIMO DEL TIPO NO LINEAL CON CONDICIONES
14 DE CONTORNO SEPARADAS, MEDIANTE LA LINEALI
15 ZACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE ESTADO
16 REDUCIDAS Y SU INTEGRACION NUMERI
17 CA CON EL METODO DE RUNGE-KUTTA SIMPSON
18 DE CUARTO ORDEN.
19
20 CLEAR
21 CLS
22 DEFDBL X,F
23 TI=0
24 INGRESO DE DATOS
25 INPUT "ORDEN DE ESTADO, N=", N
26 INPUT "TIEMPO FINAL TE =", TF
27 INPUT "EXACTITUD E=", E
28 NI=INT((TF-TI)/E)
29 INPUT "ORDEN DE CONTROL=", M
30 MUM=M
31 DIM Z(10, NI), XI(10), XC(10, N), Y(10, NI), XP(N, NI), DHU(NI+1)
32 NUM=N
33 INPUT "CONSTANTE DE ERROR, ALFA =", ALFA
34 INPUT "# MAXIMO DE ITERACIONES. PROG. FR., NMX=", NMX
35 DIM WZI(NMX), REND(NMX), G(NI+1), U(M, NI+1), X(N, NI+1), P(N, NI+1), N(NMX)
36 DIM PE(N, NI), SU(N, NI), XW(N, NI), PV(N, NI), NOR(NMX), M(NI)
37 FOR I=1 TO N
38 INPUT "X(0) =", XO(I)
39 NEXT I
40 G=1
41
42 INPUT "X(t)=", XT
43 INPUT "P(t)=", PT
44
45 FOR I=1 TO N
46 FOR J=TI TO NI
47 X(I, J)=XT
48 P(I, J)=PT
49 NEXT J, I
50 FOR L=1 TO N
51 FOR I=1 TO 2*N
52 XI(I)=0
53 NEXT I
54 XI(L+N)=1
55 FOR I=1 TO 2*N
56 XC(I, L)=XI(I)
57 NEXT I, L
58
59 TENGO ALMACENADO LA MATRIZ DE CONDISIONES INIC
60 PARA LAS ECUACIONES HOMOGENEAS.
61
62

```

```

1187
10
3
4
5 560
6 570 COMENSAR A RESOLVER LAS EC, HOMOGENEAS
7 580 FOR L=1 TO N
8 590 FOR I=1 TO 2*N
9 600 XI(I)=XC(I,L)
10 610 NEXT I
11 620 ZE=0
12 630 GOSUB 680
13 640 GOTO 1250
14 650
15 660 SOLUCION DE LAS ECUACIONES HOMOGENEAS
16 670 METODO :RUNGE-KUTTA SIMPSON 4 ORDEN
17 680 TIN=TI
18 690 J=0
19 705 FOR I=1 TO 2*N
20 710 Z(I,J)=XI(I)
21 720 NEXT J
22 730 N=N*2
23 740 J=1
24 750
18 760 FOR I=1 TO N
19 770 Z(I,J)=XI(I)
17 790 NEXT J
25 800 T=TIN
26 820 GOSUB 4710
30 830 FOR I=1 TO N
31 840 K1(I)=A(I)*E
32 850 NEXT I
33 860 T=TIN+E/2
34 870 FOR I=1 TO N
35 880 Z(I,J)=XI(I)+K1(I)/2
36 890 NEXT J
37 900 GOSUB 4710
38 910 FOR I=1 TO N
39 920 K2(I)=A(I)*E
40 930 NEXT I
41 940 FOR I=1 TO N
42 950 Z(I,J)=XI(I)+K2(I)/2
43 960 NEXT J
44 970 GOSUB 4710
45 980 FOR I=1 TO N
46 990 K3(I)=A(I)*E
47 1000 NEXT I
48 1010 T=TIN+E
49 1020 FOR I=1 TO N
50 1030 Z(I,J)=XI(I)+K3(I)
51 1040 NEXT J
52 1050 GOSUB 4710
53 1060 FOR I=1 TO N
54 1070 K4(I)=A(I)*E
55 1080 NEXT I
56 1090 FOR I=1 TO N
57 1100 DX(I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/6
58
59
60
61
62

```



```

1
2
3
4
5
6 1110 NEXT
7 1120 FOR I=1 TO N
8 1130 Q(I)=XI(I)+DX(I)
9 1140 Z(I,J)=Q(I)
10 1150 NEXT
11 1160 J=J+1
12 1170 FOR I=1 TO N
13 1180 XI(I)=Q(I)
14 1190 NEXT
15 1200 TIN=T
16 1210 IF J>NI THEN 1220 ELSE 750
17 1220 N=NUM
18 1230 RETURN
19 1240 IDENTIFICAR LOS XH, PH, Y ALMACENAR
20 1245
21 1250 FOR I=1 TO 2*N
22 1255 M=L-I
23 1270 FOR J=TI TO NI
24 1280 Y(I+M*2*N,J)=Z(I,J)
25 1295
26 1300 NEXT J,I
27 1310 FOR I=1 TO N
28 1320 XH(I,L)=Z(I,NI)
29 1330 PH(I,L)=Z(I+N,NI)
30 1350 NEXT I
31 1360 NEXT L
32 1370
33 1380 RESOLVER LAS ECUACIONES PARTICULARES
34 1390 METODO DE RUNGE-KUTTA SIMPSON DE CUARTO ORDEN
35 1400 FOR I=1 TO N
36 1410 XI(I)=XD(I)
37 1420 NEXT I
38 1430 FOR I=N+1 TO 2*N
39 1440 XI(I)=0
40 1450 NEXT I
41 1460
42 1470 ZE=1
43 1480 GOSUB 680
44 1490 FOR I=1 TO N
45 1500 FOR J=TI TO NI
46 1510 XP(I,J)=Z(I,J)
47 1520 PP(I,J)=Z(I+N,J)
48 1530 NEXT J,I
49 1540 MULTIPLICAR XH(I,L) X D2HX(I,L)
50 1550
51 1555 GOSUB 6700
52 1560 FOR I=1 TO N
53 1570 FOR J=1 TO N
54 1580 SG=0
55 1590 FOR K=1 TO N
56 1600 SG=SG + D2HX(I,K)*XH(K,J)
57 1610 NEXT K
58 1620 MXH(I,J)=SG
59 1630 NEXT J,I
60 1640
61 1650 RESTAR PH(I,J) - MXH(I,J)
62

```

```

1
2
3
4
5 1660 FOR I=1 TO N
6 1670 FOR J=1 TO N
7 1680 PM(I,J)=PH(I,J)-MXH(I,J)
8 1685 NEXT J,I
9 1690          INVERTIR PM(I,J)
10 1700 IF N=1 THEN 1702 ELSE 1720
11 1702 I=1
12 1704 L=1
13 1706 IPM(I,L)=1/PM(I,L)
14 1710 GOTO 2890
15 1720 FOR I=1 TO N
16 1730 FOR J=1 TO N
17 1740 B(I,J)=PM(I,J)
18 1750 NEXT J,I
19 1760
20 1770 MC=1
21 1780 I=1
22 1790 IF I=MC THEN 1840
23 1800 CE(I)=0
24 1810 IF I=N THEN 1860
25 1820 I=I+1
26 1830 GOTO 1790
27 1840 CE(I)=1
28 1850 GOTO 1810
29 1860          SUBROUTINA DE CHOLESKY PARA INVERSION
30 1870 FOR I=1 TO N
31 1880 B(I,N+I)=CE(I)
32 1890 NEXT
33 1900 I=1
34 1910 IF B(I,1)=0 THEN 1920 ELSE 1970
35 1920 IF I=N THEN 1930 ELSE 1950
36 1930 PRINT "MATRIZ PM(I,J) NO INVERTIBLE"
37 1940 STOP
38 1950 I=I+1
39 1960 GOTO 1910
40 1970 IF I=1 THEN 2070
41 1980 J=1
42 1990 SAVEB=B(1,J)
43 2000 B(1,J)=B(I,J)
44 2010 B(I,J)=SAVEB
45 2020
46 2030 IF J=N+1 THEN 2060
47 2040 J=J+1
48 2050 GOTO 1990
49 2060 I=1
50 2070 L(I,1)=B(I,1)
51 2080 T(I,1)=1
52 2090 IF I=N THEN 2120
53 2100 I=I+1
54 2110 GOTO 2070
55 2120 I=2
56 2130 J=2
57 2140 T(1,J)=B(1,J)/B(1,1)
58 2150 IF J=N+1 THEN 2180
59 2160 J=J+1
60 2170 GOTO 2140
61 2180 IK=2
62 2190 J=2
63 2200 SUML=0

```

```

1
2
3
4
5 2210 FOR MD=1 TO J-1
6 2220 SUML=SUML+L(I,MD)*T(MD,J)
7 2230 NEXT
8 2240 L(I,J)=B(I,J)-SUML
9 2250 IF J=I THEN 2280
10 2260 J=J+1
11 2270 GOTO 2200
12 2280 IF L(I,I)=0 THEN 2570
13 2290
14 2300 FOR J=J+1 TO N+1
15 2310 SUMT=0
16 2320 FOR K=1 TO I-1
17 2330 SUMT=SUMT+L(I,K)*T(K,J)
18 2340 NEXT K
19 2350 T(I,J)=(B(I,J)-SUMT)/L(I,I)
20 2360
21 2370 NEXT J
22 2380
23 2390 IF I=N THEN 2430
24 2400 I=I+1
25 2410 IK=I
26 2420 GOTO 2190
27 2430 FOR I=1 TO N
28 2440 K(I)=T(I,N+1)
29 2450
30 2460 NEXT I
31 2470 N(N)=K(N)
32 2480 FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
33 2490 SUM=0
34 2500 FOR J=I+1 TO N
35 2510 SUM=SUM+T(I,J)*N(J)
36 2520
37 2530 NEXT J
38 2540 N(I)=K(I)-SUM
39 2550 NEXT I
40 2560 GOTO 2780
41 2570 TEMP=I
42 2580 IF IK=N THEN 1930
43 2590 FOR J=1 TO N+1
44 2600 SAVEJ=B(I,J)
45 2610 NEXT
46 2620 SAVEL=L(I,1)
47 2630 FOR J=1 TO N+1
48 2640 B(I,J)=B(I+1,J)
49 2650 NEXT J
50 2660 L(I,1)=L(I+1,1)
51 2670 IF I=N-1 THEN 2700
52 2680 I=I+1
53 2690 GOTO 2630
54 2700 FOR J=1 TO N+1
55 2710 B(N,J)=SAVEJ
56 2720 NEXT
57 2730 L(N,1)=SAVEL
58 2740 IK=IK+1
59 2750 I=TEMP
60
61
62

```

```

1 2760 GOTO 2190
2 2770
3
4
5 2780 FOR I=1 TO N
6 2790 MAI(I,MC)=N(I)
7 2800 NEXT
8
9 2810 IF MC=N THEN 2840
10 2820 MC=MC+1
11 2830 GOTO 1780
12 2840 RESULTADOS
13
14 2850 FOR I=1 TO N
15 2860 FOR J=1 TO N
16 2870 IFM(I,J)=MAI(I,J)
17 2880 NEXT J,I
18 2890 FORMACION DE MX(tf)
19 2900 FOR I=1 TO N
20 2910 SG=0
21 2920 FOR K=1 TO N
22 2930 SG=SG + D2HX(I,K)*X(K,NI)
23 2940 NEXT K
24 2950 MX(I)=SG
25 2960 NEXT I
26 2970 FORMACION DE MXF(tf)
27 2980 FOR I=1 TO N
28 2990 SG=0
29 3000 FOR K=1 TO N
30 3010 SG=SG + D2HX(I,K)*XF(K,NI)
31 3020 NEXT K
32 3030 MXF(I)=SG
33 3040 NEXT I
34 3050
35 3060 FORMACION DE MULT(I)
36 3070 FOR I=1 TO N
37 3080 MULT(I)=DHX(I)-MX(I)+MXF(I)-PP(I,NI)
38 3090 NEXT
39 3100 CALCULO DE C(I)
40 3110 FOR I=1 TO N
41 3120 SG=0
42 3130 FOR K=1 TO N
43 3140 SG=SG +IFM(I,K)*MULT(K)
44 3150 NEXT K
45 3160 C(I)=SG
46 3170 NEXT I
47 3180 FOR I=1 TO N
48 3190 FOR J=TI TO NI
49 3200 W(I,J)=X(I,J)
50 3210 V(I,J)=P(I,J)
51 3220 NEXT J,I
52 3230
53 3240 SE EVALUAN LAS TRAYECTORIAS i+1
54 3250
55 3260 BEEP
56 3300 BEEP
57
58
59
60
61
62

```

UU
AA
UU
AA
UU
AA

```
3310 N=NUM
3320 FOR M=1 TO N
3330 I=1
3340 FOR L=1 TO N
3350 FOR J=TI TO NI
3360 SU(L,J)=0
3370 NEXT J,L
3380 FOR K=0 TO N*(2*N-1) STEP 4
3390 FOR J=TI TO NI
3400 SU(M,J)=SU(M,J)+C(I)*Y(M+K,J)
3410 NEXT J
3420 I=I+1
3430 NEXT K
3440 FOR J=TI TO NI
3450 X(M,J)=SU(M,J)+XP(M,J)
3470 NEXT J
3480 NEXT M
3500 FOR M=1 TO N
3510 I=1
3520 FOR L=1 TO N
3530 FOR J=TI TO NI
3540 SU(L,J)=0
3550 NEXT J,L
3560 FOR K=N TO 2*N*N STEP 4
3570 FOR J=TI TO NI
3580 SU(M,J)=SU(M,J)+C(I)*Y(K+M,J)
3590 NEXT J
3600 I=I+1
3610 NEXT K
3620 FOR J=TI TO NI
3630 P(M,J)=SU(M,J)+PP(M,J)
3650 NEXT J
3660 NEXT M
```

3670 CALCULO DEL RENDIMIENTO
3671 SE CALCULA EL FUNCIONAL MEDIDA DE RENDIMIENTO
3672 MEDIANTE INTEGRACION NUMERICA DE SIMPSON.

```
3675 N=NUM
3680 K=1
3685 TI=0
3690 T=TI
3700 J=TI
3710 GOSUB 6700
3720 GO=G(J)
3730 T=TF
3740 J=NI
3750 GOSUB 6700
3760 GF=G(J)
3770 WZT(G)=GO+GF
3780 R=1
3790 J=TI
3800 T=TI+R*E
3810 J=J+1
3820 IF J=NI OR T=TF THEN 3830 ELSE 3850
3830 WZT(G)=WZT(G)*E/3
3840 GOTO 3950
3850 IF K=1 THEN 3910 ELSE 3860
```

```

1
2
3
4
5 3860 GOSUB 6700
6 3870 WZT(G)=WZT(G)+2*G(J)
7 3880 K=1
8 3890 R=R+1
9 3900 GOTO 3800
10 3910 GOSUB 6700
11 3920 WZT(G)=WZT(G)+4*G(J)
12 3930 K=0
13 3940 GOTO 3890
14 3950 GOSUB 6700
15 3960
16 3970 REND(G)=H+WZT(G)
17 3975 PRINT "ITERACION "G
18 3980 PRINT "RENDIMIENTO="REND(G)
19 3990
20 4000
21 4005
22 4006
23 4010 GOSUB 7600
24 4020
25 4060 IF NOR(G)<ALFA THEN 4155 THEN 4070
26 4070
27 4080 IF G=NMX THEN 4150
28 4090 PRINT "ERROR="NOR(G)
29 4100 G=G+1
30 4110
31 4120 PRINT
32 4130 GOTO 580
33 4140
34 4150 PRINT "LIMITE DE ITERACIONES,...POSIBLE DIVERGENCIA"
35 4155 PRINT "ERROR="NOR(G)
36 4160 GOSUB 8000
37 4260
38 4270
39 4280
40 4290 ON N GOTO 4300,7000,7260
41 4300 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS *"
42 4305 LPRINT
43 4310 FOR I=1 TO N
44 4320 LPRINT " t estado x"N"(E)"
45 4325 LPRINT "
46 4327 LPRINT "O , , X0(N)
47 4328 L=E
48 4330 FOR J=TI+1 TO NI
49 4335 LPRINT "O"L , X(N,J)
50 4340 L=E+L
51 4345 NEXT J
52 4350 LPRINT "
53 4355 NEXT I
54 4370 LPRINT "
55 4380 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS *"
56 4385 LPRINT
57 4390 FOR I=1 TO N
58 4400 LPRINT " t coestado p"N"(t)"
59
60
61

```

```

1
2
3
4
5 4405 LPRINT "....."
6 4408 L=0
7 4410 FOR J=TI TO NI
8 4420 LPRINT "O" L , P(N,J)
9 4425 L=L+E
10 4430 NEXT J
11 4435 LPRINT "....."
12 4440 NEXT I
13 4450 LPRINT "....."
14 4460 LPRINT
15 4470 LPRINT "----- HISTORIA DEL CONTROL"
16 4480 LPRINT
17 4485 M=MUM
18 4490 FOR I=1 TO M
19 4500 EX=0
20 4510 LPRINT "t-----u" I "(t)"
21 4520 LPRINT "....."
22 4530 FOR J=TI TO NI
23 4540 LPRINT "O" EX , U(I,J)
24 4550 EX=EX+E
25 4560 NEXT J;I
26 4570 LPRINT "....."
27 4580 LPRINT
28 4590 LPRINT "ITERACION-----RENDIMIENTO-----NORMA"
29 4595 LPRINT "....."
30 4600 FOR I=1 TO G
31 4610 LPRINT I, REND(I) , NOR(I)
32 4620 NEXT I
33 4630 LPRINT "....."
34 4640 LPRINT "numero de iteraciones =" G
35 4650 LPRINT "=====
36 4660 END
37 4700 ----- ENTRADA DE DATOS -----
38 4710
39 4720 N=NUM
40 4730
41 4740 ----- LISTA DE DATOS DE LA MATRIZ A -----
42 5810 FOR I=1 TO N
43 5820 SX=0
44 5830 SP=0
45 5840 FOR K=1 TO N
46 5850 SX=SX+A11(I,K)*Z(K,J)
47 5860 SP=SP+A12(I,K)*Z(K+N,J)
48 5870 NEXT K
49 5880 A(I)=SX+SP
50 5890 NEXT I
51 5900
52 5910 FOR I=1 TO N
53 5920 SX=0
54 5930 SP=0
55 5940 FOR K=1 TO N
56 5950 SX=SX+A21(I,K)*Z(K,J)
57
58
59
60
61
62

```

```

3
4
5 5960 SP=SP+A22(I,K)*Z(K+N,J)
6 5970 NEXT K
7 5980 A(I+N)=SX+SP
8 5990 NEXT I
9 6000 IF ZE=1 THEN 6030 ELSE 6010
10 6010 N=2*N
11 6020 RETURN
12 6030 FORMACION DE LAS EC. PARTICULARES
13 6040 FUNCIONES A(x(t),p(t),t)
14 6050 funciones DERIVADA DEL HAMILTONIANO dh/dx
15 6410 FOR I=1 TO N
16 6420 SX=0
17 6430 SP=0
18 6440 FOR K=1 TO N
19 6450 SX=SX-A11(I,K)*X(K,J)
20 6460 SP=SP-A12(I,K)*P(K,J)
21 6470 NEXT K
22 6480 E(I)=SX+SP+F(I)
23 6490 NEXT I
24 6500
25 6510 FOR I=1 TO N
26 6520 SX=0
27 6530 SP=0
28 6540 FOR K=1 TO N
29 6550 SX=SX-A21(I,K)*X(K,J)
30 6560 SP=SP-A22(I,K)*P(K,J)
31 6570 NEXT K
32 6580 E(I+N)=SX+SP-HX(I)
33 6590 NEXT I
34 6600
35 6610 FOR I=1 TO 2*N
36 6620 A(I)=A(I)+E(I)
37 6630 NEXT I
38 6640 N=N*2
39 6650 RETURN
40 6660
41 6690 ENTRAN EC. CONTROL, RENDIMIENTO, ETC.
42 6920 RETURN
43 6950
44 7000 LPRINT " * TRAYECTORIAS OPTIMAS * "
45 7010 LPRINT
46 7020 LPRINT "t ESTADO x1(t) ESTADO x2(t)
47 7030 LPRINT"
48 7040 LPRINT " 0L , , X0(1) , , X0(2)
49 7050 L=E
50 7060 FOR J=TI+1 TO NI
51 7070 LPRINT "0"L , , X(1,J) , , X(2,J)
52 7080 L=E+L
53 7090 NEXT J
54 7100 LPRINT"
55 7110 LPRINT
56 7120 LPRINT " * COESTADOS OPTIMOS * "
57 7130 LPRINT
58 7140 LPRINT "t COESTADO P1(t) COESTADO P2(t)
59 7150 LPRINT"
60
61
62

```