ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

EL PROBLEMA DEL REGULADOR CUADRATICO LINEAL

Tesis previa a la obtención del título
de Ingeniero en la especialidad de
Electrónica y Control

JAIME GONGORA GRADOS

QUITO, JULIO DE 1991

DIRECTOR DE TESIS

Certifico que el presente trabajo
ha sido realizado por el
Sr. Jaime Góngora Grados,
bajo mi dirección.

Ing. Marco Barragán

A G R A D E C I M I E N T O

Mi agradecimiento sincero al Ing. Marco Barragán por la ayuda que me ha brindado para realizar la presente tesis.

D E D I C A T O R I A

Para mis padres y mi familia,
ya que de una u otra forma
han sabido darme el apoyo
y colaboración en mi
formación profesional.

C O N T E N I D O

Págs.

CAPITULO I: INTRODUCCION

1.1 Introducción 2

1.2 Objetivos 3

1.3 Importancia del control óptimo

y de la ecuación de Ricatti 4

1.4 Descripción de los capítulos 4

CAPITULO II: INTRODUCCION AL PROBLEMA DE CONTROL

OPTIMO

2.1 Formulación del problema de control 7

2.1.1 Introducción 7

2.1.2 Formulación del problema del

seguimiento y del regulador 7

2.1.3 Formas de control óptimo 16

2.2 Problema del regulador óptimo, lineal

determinístico 20

2.2.1 Introducción 20

2.2.2 Solución analítica al problema

del regulador óptimo lineal

determinístico 23

2.2.3 Derivación de la ecuaciones de

Ricatti 32

Págs.

2.3 Solución en estado estable al problema del regulador optimo lineal determinístico ... 37

2.3.1 Introducción 37

2.3.2 Propiedades en estado estable de los reguladores óptimos 39

2.3.3 Propiedades en estado estable del regulador óptimo invariante en el tiempo 45

2.4 Problema del regulador óptimo lineal estocástico 55

2.4.1 Introducción 55

2.4.2 Solución analítica al problema del regulador óptimo lineal estocástico 59

2.5 Problema del regulador óptimo lineal determinístico discreto 65

2.5.1 Introducción 65

2.5.2 Solución en estado estable al problema del regulador en tiempo discreto 70

2.6 Comentarios 73

CAPITULO III: SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL MATRICIAL DE RICATTI EN EL COMPUTADOR

3.1 Introducción 75

Págs.

3.2 Solución por el método de Integración Directa 75

3.3 Solución por el método de Kalman-Englar .. 76

3.4 Ejercicios de aplicación 78

3.5 Subrutinas de los programas implementados 80

3.6 Comentarios 80

CAPITULO IV: SOLUCION DE LA ECUACION MATRICIAL ALGEBRAICA DE RICATTI EN EL COMPUTADOR

4.1 Introducción 84

4.2 Solución por el método de Diagonalización 84

4.3 Ejercicios de aplicación 87

4.4 Subrutinas de los programas implementados 89

4.5 Comentarios 89

CAPITULO V: CONCLUSIONES

5.1 Análisis del trabajo terminado 92

5.2 Realización de los objetivos 93

5.3 Conclusiones 94

ANEXOS

APENDICES

APENDICE A   Notación y símbolos

APENDICE B   Conceptos básicos de los sistemas de control óptimo

APENDICE C   Matemáticas: teoremas y definiciones

APENDICE D Explicación de los subprogramas implementados en el computador. Manual de utilización.

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 INTRODUCCIÓN

La Teoría de Control Optimo es muy importante dentro del diseño de sistemas modernos, esto ha permitido avances tecnológicos en todos los campos. Su objetivo es la maximización o minimización de los costos de operación de procesos físicos, económicos y sociales.

Es muy difícil abarcar todo el desarrollo del Control Optimo; sin embargo, es necesario estudiar al menos sus bases, y qué mejor hacerlo trazándonos un objetivo, como el de encontrar una solución al problema del Regulador mediante la ecuación de Ricatti.

Este trabajo es una introducción al estudio de la Teoría del Control Optimo y sus aplicaciones. Un estudio en esta área proporcionará tanto al estudiante como al ingeniero, una herramienta útil para entender los avances en la teoría y práctica del diseño de sistemas de control.

Del campo del Control Optimo y de las innumerables inquietudes que existen aún por esclarecer, se han escogido: El Problema del Regulador Optimo Lineal, y del análisis de este problema se obtiene la ecuación diferencial matricial de Ricatti. De la misma manera, de la definición del problema invariante en el tiempo se llega a la ecuación matricial algebraica de Ricatti, que es la solución del Problema del

Regulador Optimo Lineal en estado estable.

Si bien en ciertos casos, se puede obtener la solución de estas ecuaciones en forma matemática, resulta prácticamente difícil en otras; por lo que se dan métodos computacionales para obtener la solución de las ecuaciones mencionadas anteriormente.

1.2 OBJETIVOS

Se desea proporcionar al lector interesado un trabajo que reúne muchos conceptos, ejercicios, programas, conclusiones y generalización de fórmulas.

Otros de los objetivos que se desea llevar a cabo con este trabajo son: El primero, realizar un estudio al problema del regulador y resolverlo con herramientas que proporciona la Teoría de Control Lineal; el segundo, analizar en detalle el problema del regulador óptimo lineal tanto el determinístico como el estocástico; el tercero, aplicar el Control Optimo para obtener las ecuaciones de Ricatti; y el cuarto, solucionar las ecuaciones de Ricatti en el computador digital.

Además, se pretende dejar las bases teóricas necesarias para que en un trabajo futuro se utilice el control óptimo para el diseño de algún sistema en tiempo real; pues, toda la teoría que se desarrolla es aplicable para el caso de control de procesos por computador.

1.3 IMPORTANCIA DEL CONTROL OPTIMO Y DE LA ECUACIÓN DE RICATTI

La importancia del estudio del control óptimo se puede observar en los adelantos tecnológicos que se han logrado con la aplicación de su teoría. La aplicación del control óptimo es grande, tanto en el aspecto civil como en el militar.

Puesto que uno de los principales problemas del control óptimo es el de regulación (problema del regulador lineal continuo), del cual se deducen las ecuaciones de Ricatti, entonces la importancia del estudio de estas ecuaciones es evidente. Realmente, la solución de un problema mediante las ecuaciones de Ricatti representa un método muy usado en la optimización de un sistema.

1.4 DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

En el capítulo 1 se hace un análisis del problema que se pretende resolver.

En el capítulo 2 se da mayor atención al problema del regulador como también la forma de resolverlo; además se estudia con detenimiento las versiones determinísticas y estocásticas del problema del regulador óptimo lineal. Luego se realiza un estudio del set-point del regulador y del pro-

CAPITULO 2

INTRODUCCION AL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO

2.1 FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTROL

2.1.1 Introducción

En esta primera parte se estudiarán los siguientes tipos de problemas de control: el problema que se tiene en el seguimiento y en el regulador, cuando en la planta se presentan perturbaciones, lo que nos conduce al análisis de parámetros en la planta, condiciones iniciales, variables que van hacer observadas y que nos darán información acerca del estado de la planta. Para una mejor comprensión se citan varios ejemplos.

Este capítulo finaliza con un análisis de las diferentes formas de control óptimo que existen; de esta manera se pretende dar una imagen más clara, de las diferencias entre ellos y de estas elegir el mejor control deseable dentro de un sistema.

2.1.2 Formulación del Problema del Seguimiento y del Regulador

A continuación se describirá en términos generales una clase importante de los problemas de control, el cual es el problema de seguimiento..

Dada una planta (ver fig. 2.1), la cual no puede ser modificada por el diseñador, las siguientes variables son asociadas a ella:

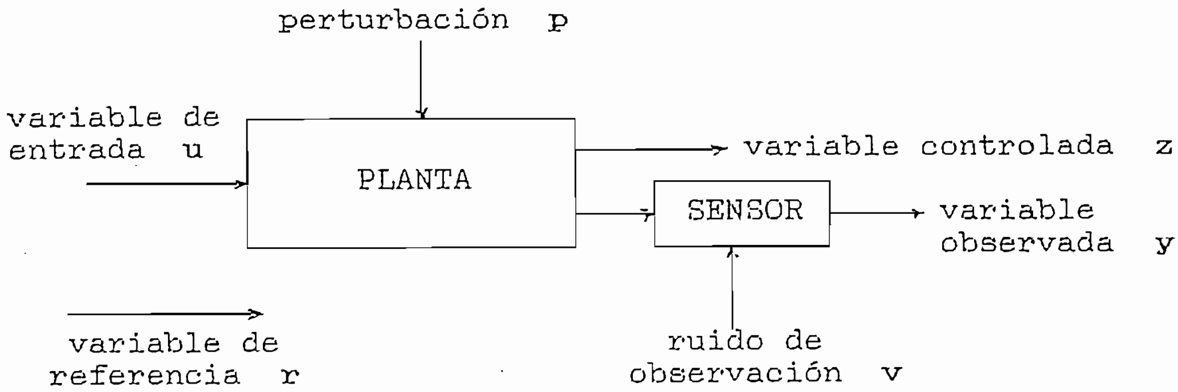


fig. 2.1

a.- Una variable de entrada u(t), la cual influye en la planta y puede ser manipulada.

b.- Una variable de perturbación p(t), la cual influye en la planta pero no puede ser manipulada.

c.- Una variable observada y(t), la cual es medida por medio de sensores y es utilizada para obtener información acerca del estado de la planta; esta variable observada es usualmente afectada de un ruido de observación v(t).

d.- Una variable controlada z(t), la cual es la variable que deseamos controlar.

e.- Una variable de referencia r(t), la cual representa el valor al que debe llegar la variable controlada z(t).

Además, la planta puede ser descrita por un set de ecuaciones diferenciales, de la forma:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad 2\text{-}0$$

donde: t, es la variable de tiempo.

$x(t)$, denota el estado de la planta.

$u(t)$, es la variable de entrada o variable de control.

El Problema del Seguimiento en términos generales es el siguiente:

"Dada una variable de referencia, encontrar una variable de entrada apropiada; tal que, la variable controlada siga a la variable de referencia"; es decir,

$$z(t) \approx r(t), \qquad t \geq t_o \qquad 2\text{-}1$$

donde: t_o, es el tiempo en el cual el control se inicia.

Cabe señalar que el rango de valores, de la variable de entrada $u(t)$, en el que está permitido variar se encuentra limitado por los elementos que componen la planta.

Los Sistemas de Seguimiento diseñados deben cumplir el requerimiento básico 2-1, para lo cual se necesita tomar en cuenta los siguientes aspectos.

1.- La influencia de perturbaciones, originando trayectorias imprevistas para la planta.

2.- Los parámetros de la planta que podrían no ser conocidos y que pueden variar.

3.- El estado inicial de la planta que podría no ser conocido.

4.- La variable observada no podría dar directamente la información acerca del estado de la planta y además estaría afectada con ruido de observación debido al sensor.

La variable de entrada a la planta es generada por un "Controlador", por lo que es necesario distinguir los dos tipos de controladores: controladores en lazo abierto y controladores en lazo cerrado.

Los primeros generan la señal de entrada u(t) basándose en valores pasados y presentes, solamente de la variable de referencia (ver fig. 2.2); es decir,

$$u(t) = f_{1a}\,[r(\tau),\quad t_o \leq \tau \leq t\,],\qquad t \geq t_o \qquad 2\text{-}2$$

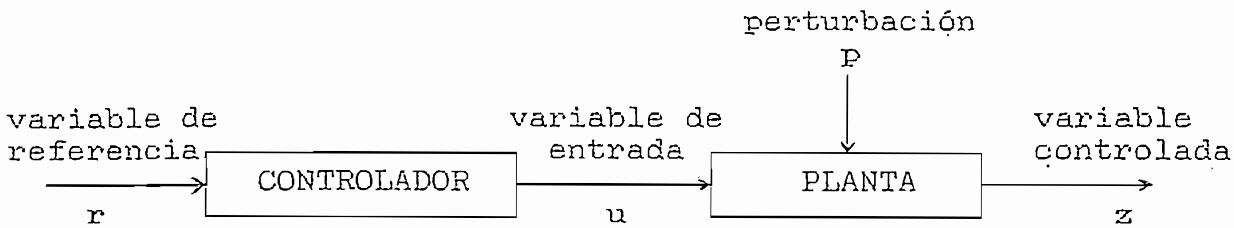


fig. 2.2

Los controladores en lazo cerrado tienen la ventaja de obtener información acerca de la planta por medio de la variable observada, ya que esta variable es la que se realimenta; esta operación puede ser representada por (ver fig. 2.3):

$$u(t) = f_{1c}\,[r(\tau),\ y(\tau),\ t_o \leq \tau \leq t], \qquad t \geq t_o. \qquad 2\text{-}3$$

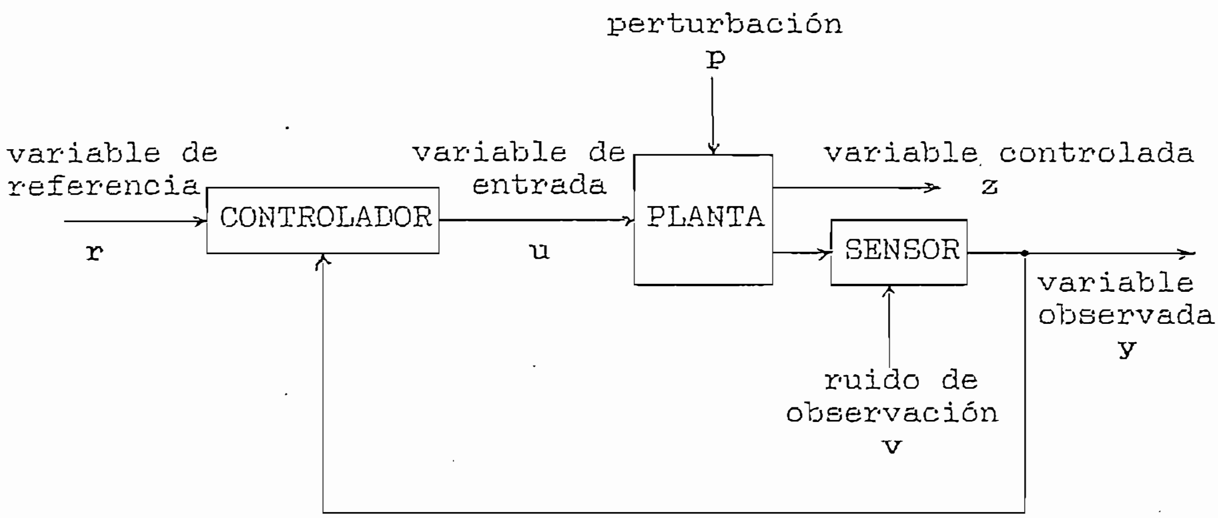


fig. 2.3

Cabe destacar que ninguno de los controladores toma en cuenta valores futuros de la variable de referencia o de la variable observada. El conjunto de la planta y controlador serán referidos como un "Sistema de control".

Las características que destacan a un controlador en lazo cerrado se citarán a continuación:

- Pueden acumular información acerca de la planta durante la operación, de esta manera son capaces de reunir información acerca del estado inicial de la planta.
- Reduce los efectos de perturbaciones.
- Compensa los parámetros variables e inciertos que tiene la planta.

En cambio los controladores en lazo abierto.

- No tienen acceso a ninguna información acerca de la planta excepto antes de iniciar el control.
- No son afectados por ruido de observación puesto que ellos no utilizan la variable observada.

Una clase importante al problema del seguimiento consiste en tener una variable de referencia constante en largos períodos de tiempo; en tal caso, es usual referirse a la variable de referencia como el set point del sistema y es entonces cuando se habla del "problema del regulador". En este caso el problema principal es:

"Mantener la variable controlada en el set point a pesar de la presencia de perturbaciones que actúen sobre la planta."

Para tener una mejor visión de los problemas mencionados, se citarán a continuación dos ejemplos.

2.1.2.1 Ejemplo 1

En este ejemplo se describirá el problema de control.

Imagínese un objeto moviéndose en un plano, en el origen del plano está una antena, la cual se encuentra en la dirección del objeto en todo tiempo. La antena está manejada por un motor eléctrico; el problema de control es comandar al motor de tal manera que se cumpla:

$$\theta(t) \approx \theta r(t), \qquad t \geq to \qquad 2\text{-}4$$

donde: $\theta(t)$ es la posición angular de la antena.

$\theta r(t)$ es la posición angular del objeto, y se dispone de este valor ya que es un ángulo mecánico que siempre se encuentra en la dirección del objeto.

Nuestro sistema se encuentra formado por:

- La planta, consiste de la antena y el motor.
- La perturbación, es el torque ejercido por el viento sobre la antena.
- La variable observada, es la salida de un potenciómetro (sensor) montado en la base de la antena.

En este ejemplo: $\theta(t)$ es la variable controlada, $\theta r(t)$ es la variable de referencia y,entrada a la planta es un voltaje de entrada al motor. Tanto $\theta(t)$ como $\theta r(t)$, ángulos mecánicos son convertidos a variables eléctricas por medio de transductores (pueden ser potenciómetros). Entonces, la diferencia entre $\theta r(t)$ y $\theta(t)$ es amplificada y utilizada como voltaje de entrada al motor, lo que mueve a la antena; es así que, la diferencia entre $\theta r(t)$ y $\theta(t)$ se reduce.

Una representación a este esquema de control se da en la figura 2.4.

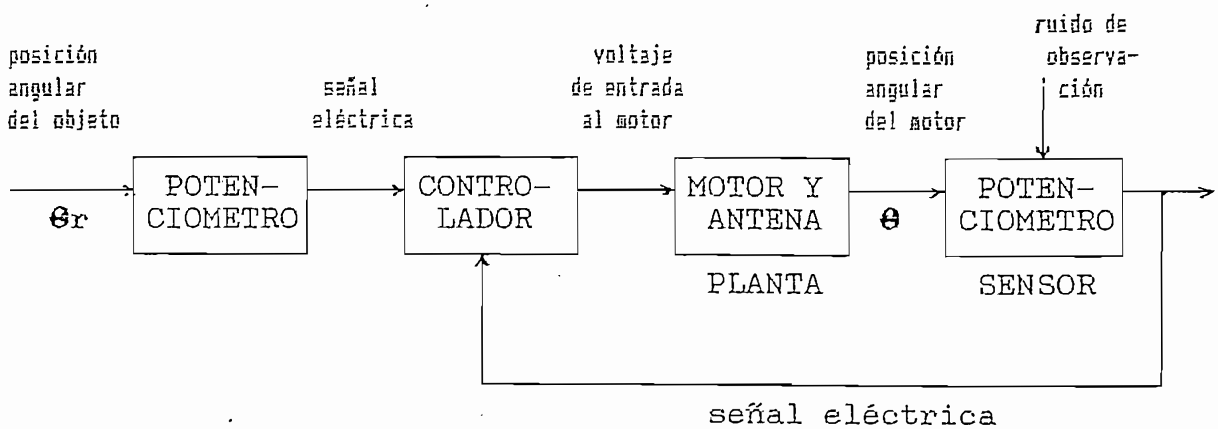


fig. 2.4

El esquema representa un controlador en lazo cerrado, ya que es necesario compensar las perturbaciones externas; tales como, torques del viento, o variaciones de los parámetros de la planta; tales como, coeficiente de rozamiento diferentes a temperaturas diferentes. Este es un ejemplo típico al problema de seguimiento.

2.1.2.2 Ejemplo 2

Problemas de control multivariable, donde la planta tiene varias entradas y varias variables controladas, son usualmente más difíciles de analizar. Considérese un tanque de agitación, este tanque tiene dos alimentaciones; sus flujos pueden ser ajustados por válvulas.

La concentración del material en cada alimentación no puede ser manipulada. El tanque tiene una salida y el problema de control es diseñar un sistema que ajuste automáticamente las válvulas de alimentación, así como mantener constante la concentración y el flujo de salida en valores de referencia dados.

La forma gráfica se puede apreciar en la figura 2.5.

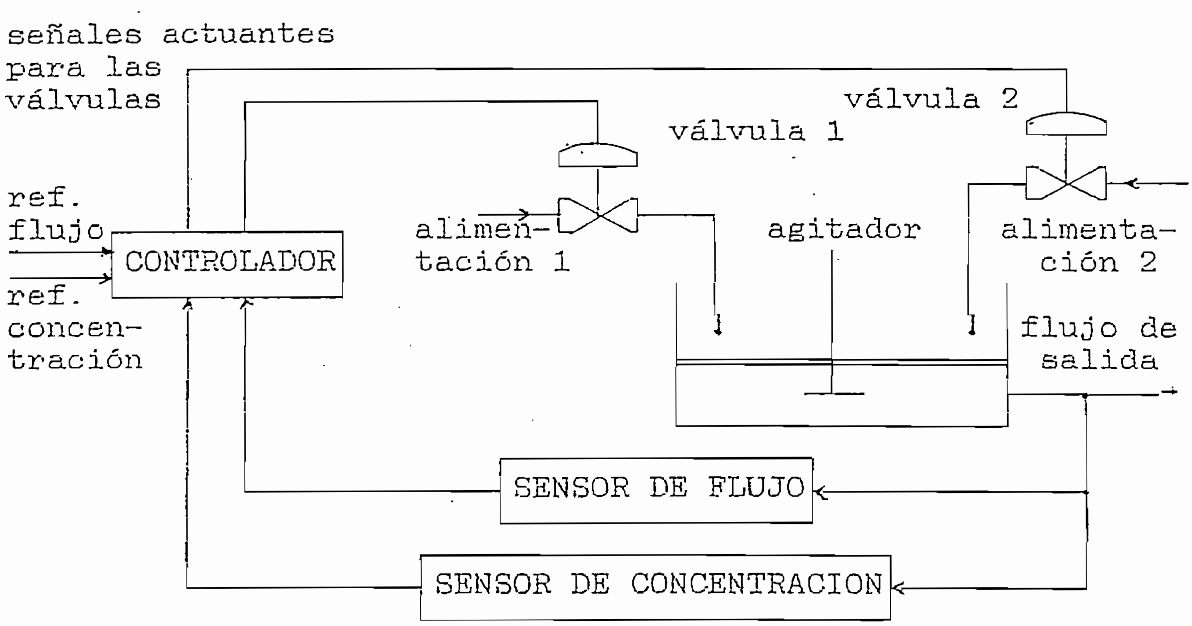


fig. 2.5

Este es un típico problema del regulador.

Las variables de entrada son los flujos de alimentación.

Las variables controladas son el flujo y la concentración de salida.

El set-point o las variables de referencia tienen dos componentes: El flujo y la concentración de salidas deseadas.

Las perturbaciones que pueden ocurrir son: variaciones en la concentración, variaciones en los flujos resultantes de las variaciones de presión antes de llegar a las válvulas, pérdida de fluido debido a evaporaciones y fugas. Tanto la concentración como el flujo pueden ser medidos y se convierten en las variables observadas. El controlador en lazo cerrado utiliza estas medidas, así como los set-points para producir señales eléctricas o neumáticas para ajustar las válvulas.

2.1.3 Formas de Control Optimo

Se empezará analizando la estructura de los sistemas reguladores y de Control Optimo.

2.1.3.1 Definición 1

Si se cumple la relación funcional:

$$\underline{u}^*(t) = \underline{f}\ [\underline{x}(t),\ t] \qquad 2\text{-}5$$

Para el Control Optimo al tiempo t, entonces la función $\underline{f}$ se llama ley de control óptimo o control óptimo de realimentación o también control óptimo de lazo cerrado.

La estructura de la ley de control óptimo es:

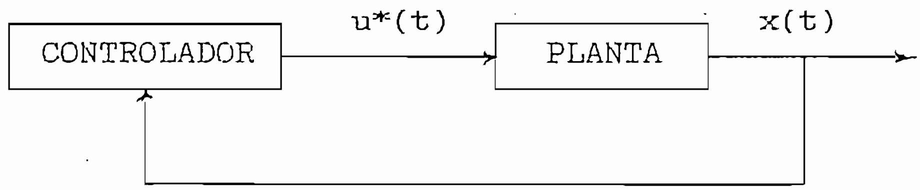


fig. 2.6

2.1.3.2 <u>Definición 2</u>

Si el control óptimo está determinado como una función del tiempo para un estado inicial especificado; es decir,

$$\underline{u}^*(t) = \underline{g}\,[\underline{x}(t_o),\, t] \qquad 2\text{-}6$$

el control óptimo se dice de lazo abierto. Y su estructura es:

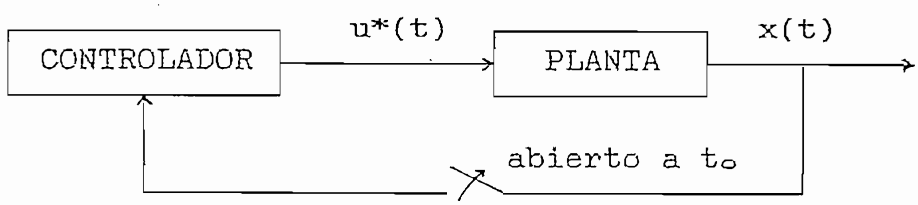


fig. 2.7

2.1.3.3 <u>Estructura de los Sistemas Lineales</u>

Las ecuaciones para sistemas lineales e invariantes en el tiempo son:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \\ \underline{z}(t) &= \underline{D}\,\underline{x}(t) + \underline{C}\,\underline{u}(t) \end{aligned} \qquad 2\text{-}7$$

Y para una entrada de referencia $\underline{r}(t)$, se tiene la siguiente representación de los sistemas lineales.

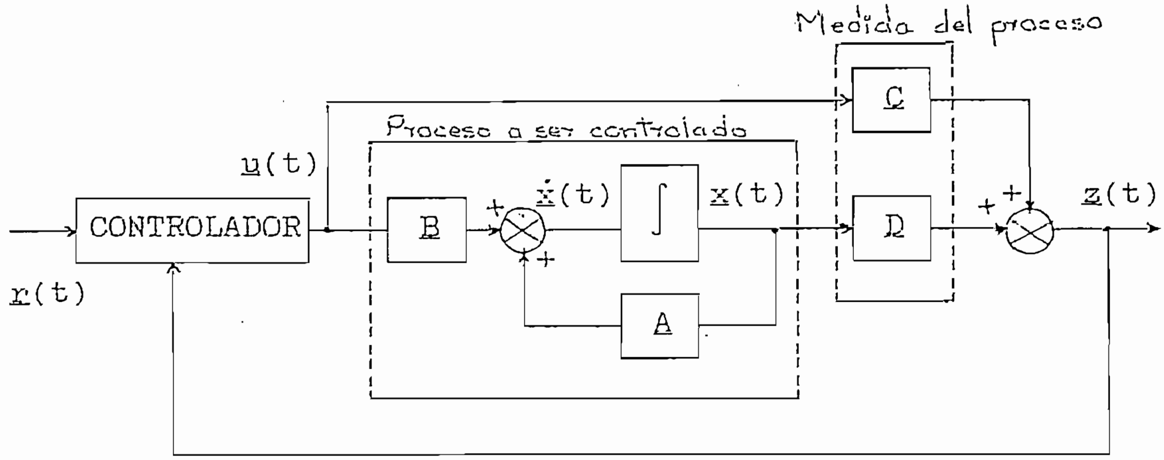


fig. 2.8

2.1.3.4 <u>Estructura de los problemas del regulador lineal.</u>

Las ecuaciones para el regulador lineal son:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{u}^{*}(t) = \underline{F}(t)\,\underline{x}(t) \qquad 2\text{-}8$$

Y se obtiene la siguiente estructura para los reguladores lineales:

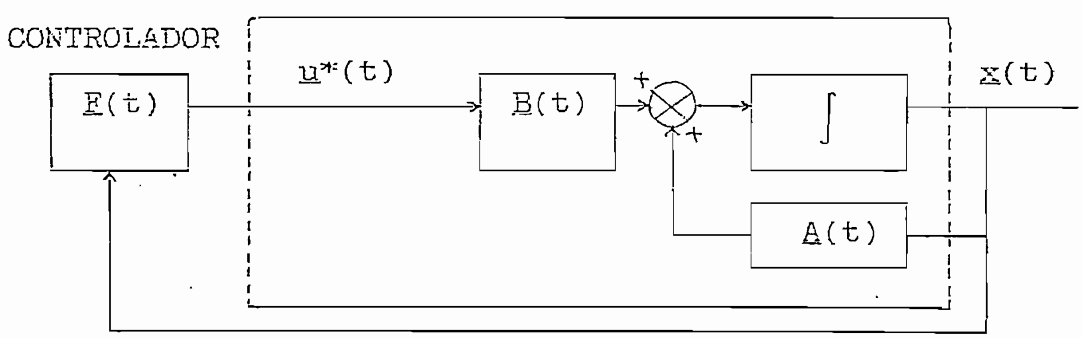


fig. 2.9

2.1.3.5 <u>Estructura de los problemas del regulador lineal en la que interviene la matriz de Ricatti</u>.

Las ecuaciones del problema del regulador en este caso son:

$$\begin{aligned} \underline{u}^*(t) &= -\underline{R}^{-1}(t)\underline{B}^T(t)\underline{P}(t)\underline{x}^*(t) \\ \dot{\underline{x}}^*(t) &= \underline{A}(t)\underline{x}^*(t) + \underline{B}(t)\underline{u}^*(t) \end{aligned} \qquad 2\text{-}9$$

Y la estructura:

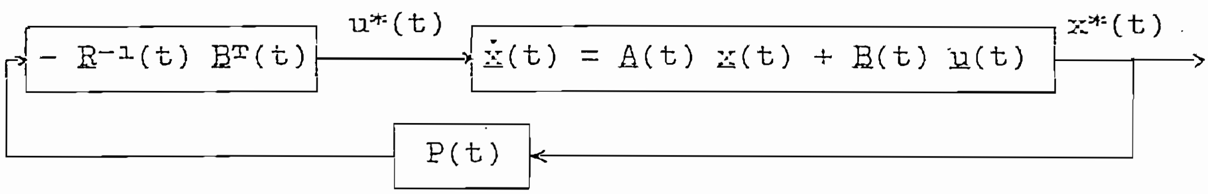


fig. 2.10

2.1.3.6 <u>Estructura de los problemas del regulador de salida.</u>

Las ecuaciones del problema del regulador de salida son:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{z}(t) &= \underline{D}(t)\underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) &= -\underline{R}^{-1}(t)\underline{B}^T(t)\underline{P}(t)\underline{x}(t) \end{aligned} \qquad 2\text{-}10$$

Y la estructura del regulador de salida es:

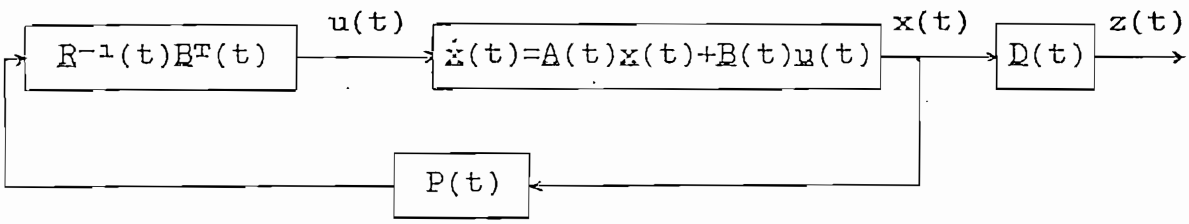


fig. 2.11

Después de haber formulado los problemas que existen en control, a continuación se estudiará en detalle el problema del regulador lineal óptimo.

2.2 PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO LINEAL DETERMINISTICO

2.2.1 Introducción.

Considérese un sistema lineal variante en el tiempo definido por la siguiente ecuación diferencial de estado.

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t)$$

Estudiaremos el problema desde el momento en que se trae al sistema, desde un estado inicial arbitrario hacia el estado cero tan rápido como sea posible. Existen muchos criterios que expresan la rapidez con q'un estado inicial es reducido al estado cero; el más utilizado es el criterio de la integral cuadrático.

$$\int_{to}^{t1} x^{T}(t) R_1(t) x(t)\, dt \qquad 2\text{-}11$$

donde: R1(t) es una matriz simétrica definida positiva.

El factor $[x^T(t)\ R1(t)\ x(t)]$ es una medida de la cantidad que el estado se ha desviado del estado cero en un tiempo t; R1(t) es la matriz de ponderación; es decir, determina cuál es el peso asociado a cada una de las variables de estado.

La integral [2-11] es el criterio para la desviación acumulativa de x(t), respecto al estado cero durante un intervalo de tiempo [to,t1].

Como se vio anteriormente, en muchos problemas de control es posible identificar una variable controlada z(t). En el modelo lineal se tiene:

$$z(t) = D(t)\ x(t) \qquad 2\text{-}12$$

Como el problema nos pide reducir la variable controlada z(t) a cero tan rápido como sea posible; entonces, el criterio [2-11] será modificado a:

$$\int_{t0}^{t1} z^{T}(t) R_3(t)\, z(t)\, dt \qquad 2\text{-}13$$

donde: $R_3(t)$ es una matriz simétrica definida positiva y matriz de ponderación.

Las ecuaciones [2-11] y [2-13] son equivalentes, entonces:

$$\int_{t0}^{t1} x^T(t) R_1(t) x(t)\, dt = \int_{t0}^{t1} z^T(t) R_3(t) z(t)\, dt$$

Ahora insertamos [2-12] en esta ecuación:

$$\int_{t0}^{t1} x^T(t) D^T(t) R_3(t) D(t) x(t)\, dt = \int_{t0}^{t1} x^T(t) R_1(t) x(t)\, dt$$

Entonces: $R_1(t) = D^T(t)\ R_3(t)\ D(t)$ 2-14

Ahora es necesario incluir la variable de entrada en el criterio para de esta manera, limitar las amplitudes de la entrada y que no crezcan indefinidamente.

$$\int_{t0}^{t1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt \qquad 2\text{-}15$$

Igualmente $R_2(t)$ como $R_3(t)$ son matrices simétricas definida y semidefinida positivas, y de ponderación, la importancia relativa de estos dos términos en el criterio [2-15] están determinadas por estas matrices.

Además es necesario incluir un tercer término; el estado final $x(t1)$, cuando debe estar lo más cercano posible al estado cero.

$$\int_{t0}^{t1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt + x^T(t1) P_1 x(t1) \qquad 2\text{-}16$$

donde: P1 es una matriz simétrica semidefinida positiva.

Ahora se está en posición de introducir el problema del regulador lineal óptimo determinístico.

2.2.1.1 <u>Definición 3</u>

Consideremos el sistema lineal variante en el tiempo.

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \qquad 2\text{-}17$$

$$\text{donde: } x(t_o) = x_o \qquad 2\text{-}18$$

con la variable controlada: $z(t) = D(t)\, x(t)$ 2-19

Considerando el criterio:

$$2\text{-}20 \quad \int_{t0}^{t1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt + x^T(t1) P_1 x(t1)$$

donde: P1 y R3 son matrices simétricas semidefinidas positivas, y R2 matriz simétricas definida positiva para el intervalo $t_o \le t \le t_1$.

Entonces, " el problema está en determinar una entrada $u^*(t)$, $t_o \le t \le t_1$, para la cual el criterio es mínimo " y se le denomina <u>problema del regulador óptimo lineal determinístico.</u>

A continuación se obtendrá la solución analítica a este problema.

2.2.2 Solución analítica al Problema del Regulador Optimo Lineal Determinístico.

Para resolver el problema del regulador óptimo lineal determinístico es conveniente re-escribir el criterio [2-20].

$$\int_{t0}^{t1} [x^T(t)R_1(t)x(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt+x^T(t1)P_1x(t_1) \qquad 2\text{-}26$$

donde: $R_1(t)$ es una matriz simétrica semidefinida positiva.

$$R_1(t) = D^T(t)\ R_3(t)\ D(t) \qquad 2\text{-}27$$

Supóngase que la entrada buscada que minimiza este criterio existe y se lo denota como $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Considérese una entrada:

$$u(t) = u^*(t) + \epsilon\tilde{u}(t),\ t_0 \leq t \leq t_1 \qquad 2\text{-}28$$

donde: $\tilde{u}(t)$ es una función arbitraria de tiempo y ϵ es un número arbitrario.

Revisemos cuánto afecta al criterio [2-26] esta entrada $u(t)$.

Debido al cambio en la entrada, cambiará el estado:

$$x(t) = x^*(t) + \epsilon\tilde{x}(t),\ t_0 \leq t \leq t_1 \qquad 2\text{-}29$$

donde: $x^*(t)$ es el estado óptimo.

$\tilde{x}(t)$ se debe determinar.

La solución $x(t)$ en [2-29] satisface la ecuación diferencial [2-17] junto a $u(t)$ escogido en [2-28], dándonos:

$$\dot{x}^*(t)+\epsilon\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)x^*(t) + \epsilon A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u^*(t) + \epsilon B(t)\tilde{u}(t) \qquad 2\text{-}30a$$

Además se sabe que la solución óptima también satisface la ecuación de estado:

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \qquad 2\text{-}31a$$

Restando las ecuaciones [2-30a] y [2-31a], se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \qquad 2\text{-}32a$$

Con la condición inicial:

$\tilde{x}(to) = 0$, la solución de [2-32a] es:

$$\tilde{x}(t) = \int_{t0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\tilde{u}(\tau)\,d\tau \qquad 2\text{-}33a$$

donde: $\Phi(t,to)$ es la matriz de transición de estado.

Efectivamente se observa que $\tilde{x}(t)$ no depende de ϵ.

Considérese el criterio [2-26] con la entrada [2-28] y con la variable de estado [2-29]. Entonces:

$$\int_{t0}^{t1} [x^T(t)R_1(t)x(t) + u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt + x^T(t1)P_1x(t_1)$$

$$= \int_{t0}^{t1} [x^{*T}(t) + \epsilon\tilde{x}.^T(t)]R_1(t)[x^*(t) + \epsilon\tilde{x}(t)] + [u^{*T}(t) + \epsilon\tilde{u}.^T(t)]R_2(t).$$

$$[u^*(t) + \epsilon\tilde{u}(t)]\,dt + [x^{*T}(t_1) + \epsilon\tilde{x}.^T(t)]P_1[x^*(t_1) + \epsilon\tilde{x}(t_1)]$$

$$= \int_{t0}^{t1} [x^{*T}(t)R_1(t)x^*(t) + \epsilon\tilde{x}.^T(t)R_1(t)x^*(t) + \epsilon x^{*T}(t)R_1(t)\tilde{x}(t) +$$

$$+e^2\tilde{x}.^T(t)R_1(t)\tilde{x}(t)+u^{*T}(t)R_2(t)u^*(t)+u^{*T}(t)R_2(t)e\tilde{u}(t)+$$

$$+e\tilde{u}.^T(t)R_2(t)u^*(t)+e^2\tilde{u}.^T(t)R^2(t)\tilde{u}(t)]dt+x^{*T}(t_1)P_1x^*(t_1)+$$

$$+e\tilde{x}.^T(t)P_1x^*(t_1)+ex^{*T}(t_1)P_1\tilde{x}(t_1)+e^2\tilde{x}.^T(t)P_1\tilde{x}(t_1)$$

$$=\int_{t0}^{t1}[x^{*T}(t)R_1(t)x^*(t)+u^{*T}(t)R_2(t)u^*(t)]dt+x^{*T}(t_1)P_1x^*(t_1)$$

$$+2e\int_{t0}^{t1}[\tilde{x}.^T(t)R_1(t)x^*(t)+\tilde{u}'^T(t)R_2(t)\hat{\tilde{u}}(t)]dt+\tilde{x}.^T(t)P_1x^*(t_1)$$

$$+e^2\int_{t0}^{t1}[\tilde{x}.^T(t)R_1(t)\tilde{x}(t)+\tilde{u}.^T(t)R_2(t)\tilde{u}(t)]dt+\tilde{x}.^T(t)P_1\tilde{x}(t_1) \qquad 2\text{-}30$$

Este criterio se minimiza cuando $\epsilon=0$, pero se tiene una expresión cuadrática en ϵ, por lo que el mínimo se tiene: cuando la primera derivada con respecto a ϵ es cero evaluado en $\epsilon=0$.

Entonces se tiene que:

$$\int_{t0}^{t1}[\tilde{x}.^T(t)R_1(t)x^*(t)+\tilde{u}^{*T}(t)R_2(t)\tilde{u}(t)]dt+\tilde{x}.^T(t_1)P_1x^*(t_1)=0 \qquad 2\text{-}31$$

Sustituyendo [2-33] en [2-31], se llega a:

$$\int_{t0}^{t1}[\int_{t0}^{t}\tilde{u}.^{T}(\tau)B^{T}(\tau)\Phi(t,\tau)^{T}d\tau]R_1(t)x^{*}(t)\,dt+\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)R_2(t)u^{*}(t)\,dt+$$

$$+[\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(\tau)B^{T}(\tau)\Phi(t_1,\tau)^{T}d\tau]P_1x^{*}(t_1)=0$$

Realizando cambios de variable, y reordenando las integrales, se tiene:

$$\int_{t0}^{t1}[\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)B^{T}(t)\Phi^{T}(\tau,t)\,dt]R_1(\tau)x^{*}(\tau)\,d\tau+\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)R_2(t)u^{*}(t)\,dt+$$

$$+[\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)B^{T}(t)\Phi^{T}(t_1,t)\,dt]P_1x^{*}(t_1)=0$$

$$\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)\,[B^{T}(t)\int_{t0}^{t1}\Phi^{T}(\tau,t)R_1(\tau)x^{*}(\tau)\,d\tau+R_2(t)u^{*}(t)+B^{T}(t)\Phi^{T}(t_1,t)P_1x^{*}(t_1)]dt=0$$

2-32

Definimos:

$$p(t)=\int_{t}^{t1}\Phi^{T}(\tau,t)R_1(\tau)x^{*}(\tau)\,d\tau+\Phi^{T}(t_1,t)P_1x^{*}(t_1) \qquad 2\text{-}33$$

Por lo que la integral [2-32], queda:

$$\int_{t0}^{t1}\tilde{u}.^{T}(t)\,[B^{T}(t)p(t)+R_2(t)u^{*}(t)]\,dt=0 \qquad 2\text{-}34$$

Donde: $\tilde{u}^T(t) \neq 0$ para todo $t_0 \leq t \leq t_1$; luego, para que la igualdad se cumpla, es necesario:

$$B^T(t)\ p(t) + R_2(t)\ u^*(t) = 0 \qquad 2\text{-}35$$

donde: $R_2(t)$ es no singular para $t_0 \leq t \leq t_1$

Entonces: $$u^*(t) = - R_2^{-1}(t)\ B^T(t)\ p(t) \qquad 2\text{-}36$$

Es necesario conocer p(t) para obtener la entrada óptima. Para encontrar p(t), es necesario convertir [2-33] en una ecuación diferencial, para lo cual: primero, igualamos $t=t_1$, dándonos la condición final $p(t_1) = P_1\ x^*(t_1)$ 2-37

$\beta\,\Phi(t_1,T_1)$

Luego, derivamos [2-33] con respecto a t:

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_t^{t_1} e^{A^T(\tau-t)} R_1(\tau)\, x^*(\tau)\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{A^T(t_1-t)} P_1 x^*(t_1)\right]$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = \left\{\int_t^{t_1} e^{A^T(\tau-t)} (-A^T) R_1(\tau)\, x^*(\tau)\, d\tau - \lim_{\tau=t}\left[e^{A^T(\tau-t)} R_1(\tau)\, x^*(\tau)\right]\right\} +$$

$$+ e^{A^T(t_1-t)} (-A^T) P_1 x^*(t_1)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -A^T\left[\int_t^{t_1} e^{A^T(\tau-t)} R_1(\tau)\, x^*(\tau)\, d\tau + e^{A^T(t_1-t)} P_1 x^*(t_1)\right] - R_1(t)\, x^*(t)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -A^T(t)\, p(t) - R_1(t)\, x^*(t) \qquad 2\text{-}38$$

Ahora, sustituyendo [2-36] en la ecuación diferencial [2-31d]:

$$\frac{\partial x^*(t)}{\partial t} = A(t)x^*(t) - B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)p(t) \qquad 2\text{-}39$$

Cuyas condiciones de borde son:

$$x^*(t_0) = x_0 \quad \wedge \quad p(t_1) = P_1 x^*(t_1) \qquad 2\text{-}40$$

β^T

Las ecuaciones diferenciales [2-38] y [2-39] pueden colocarse en forma de matrices, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} x^*(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t) \\ -R_1(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}41$$

Considerando este conjunto de ecuaciones diferenciales de estado de un sistema lineal con dimensión 2n, con la matriz de transición Θ(t,to). Y particionando la matriz de transición correspondiente a [2-41] de la siguiente manera:

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}42$$

Se puede expresar el estado, al tiempo t, en términos del estado y la variable p(t) en el tiempo final t_1; es decir,

$$x^*(t) = \Theta_{11}(t,t_1)x^*(t_1) + \Theta_{12}(t,t_1)p(t_1)$$

Introduciendo las condiciones de borde [2-40], se tiene:

$$x^*(t) = \Theta_{11}(t,t_1)x^*(t_1) + \Theta_{12}(t,t_1)P_1x^*(t_1)$$
$$x^*(t) = [\Theta_{11}(t,t_1) + \Theta_{12}(t,t_1)P_1]x^*(t_1) \qquad 2\text{-}43$$

En forma similar, se obtiene p(t):

$$p(t) = \Theta_{21}(t,t_1)x^*(t_1) + \Theta_{22}(t,t_1)p(t_1)$$
$$p(t) = \Theta_{21}(t,t_1)x^*(t_1) + \Theta_{22}(t,t_1)P_1x^*(t_1)$$
$$p(t) = [\Theta_{21}(t,t_1) + \Theta_{22}(t,t_1)P_1]x^*(t_1) \qquad 2\text{-}44$$

Despejando $x^*(t_1)$ de [2-43] y colocando en [2-44], se obtiene:

$$p(t) = [\Theta_{21}(t,t_1) + \Theta_{22}(t,t_1)P_1]\,[\Theta_{11}(t,t_1) + \Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}x^*(t) \qquad 2\text{-}45$$

Lo que se demuestra, que p(t) tiene relación lineal con $x^*(t)$, así:

$$p(t) = P(t)\ x^*(t) \qquad 2\text{-}46$$

donde: $P(t) = [\Theta_{21}(t,t_1) + \Theta_{22}(t,t_1)P_1]\,[\Theta_{11}(t,t_1) + \Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}$

Luego de encontrar p(t), se puede obtener la entrada óptima [2-36].

$$u^*(t) = -R_2^{-1}(t) B^T(t) p(t)$$
$$u^*(t) = -R_2^{-1}(t) B^T(t) P(t) x^*(t)$$
$$u^*(t) = -F(t) x^*(t) \qquad 2\text{-}47$$

Esta es la solución del problema del regulador, el cual ha sido obtenido bajo la consideración que exista una solución óptima. A continuación se resumirá lo que se ha obtenido:

TEOREMA 2-1:

Considerando el problema del regulador óptimo lineal determinístico, entonces la entrada óptima es generada por medio de una ley de control lineal de la forma:

$$u^*(t) = -F(t)\ x^*(t)$$

donde: $F(t) = + R_2^{-1}(t)\ B^T(t)\ P(t)$

La matriz P(t) está dado por:

$$P(t) = [\Theta_{21}(t, t_1) + \Theta_{22}(t, t_1) P_1]\ [\Theta_{11}(t, t_1) + \Theta_{12}(t, t_1) P_1]^{-1}$$

donde:

Θ_{11}, Θ_{12}, Θ_{21}, Θ_{22} son obtenidos particionando la matriz de transición $\Theta(t, t_o)$ de la ecuación diferencial de estado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) R_2^{-1}(t) B^T(t) \\ -R_1(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}41$$

donde: $R_1(t) = D^T(t)\ R_3(t)\ D(t)$

Este teorema nos da la solución al problema del regulador en la forma de una ley de control lineal. Esta ley de control genera la entrada óptima para cualquier estado inicial.

Una interpretación gráfica se encuentra dada en la figura 2-12:

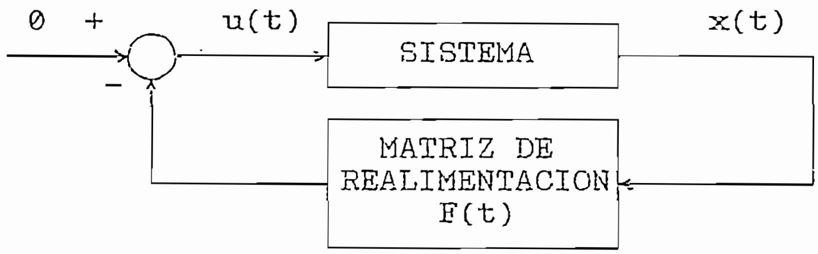


fig. 2-12

Después de haber formulado y solucionado el problema del regulador óptimo lineal determinístico, se está en capacidad de deducir las ecuaciones de Ricatti, tema que a continuación se estudiará.

2.2.3 DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE RICATTI

En nuestro siguiente análisis, P(t) tiene un papel principal, para la cual se va a derivar la ecuación [2-46], aplicando la regla de la derivada de una matriz inversa.

$$\frac{\partial}{\partial t}M^{-1}(t) = -M^{-1}(t)\,\frac{\partial M(t)}{\partial t}\,M^{-1}(t) \qquad 2\text{-}48$$

Entonces:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t}=[\frac{\partial\Theta_{21}(t,t_1)}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_{22}(t,t_1)}{\partial t}P_1][\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}$$
$$-[\Theta_{21}(t,t_1)+\Theta_{22}(t,t_1)P_1][\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}*$$
$$*[\frac{\partial\Theta_{11}(t,t_1)}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_{12}(t,t_1)}{\partial t}P_1][\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1} \quad 2\text{-}49$$

Puesto que $\Theta(t,to)$ es la matriz de transición de [2-41], se deduce:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\Theta_{11}(t,t_1)}{\partial t} & \frac{\partial\Theta_{12}(t,t_1)}{\partial t}\\ \frac{\partial\Theta_{21}(t,t_1)}{\partial t} & \frac{\partial\Theta_{22}(t,t_1)}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)\\ -R_1(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_{11}(t,t_1) & \Theta_{12}(t,t_1)\\ \Theta_{21}(t,t_1) & \Theta_{22}(t,t_1)\end{bmatrix}$$

2-50

Sustituyendo [2-50] y [2-46] en [2-49], se obtiene:

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t}=[-R_1(t)\Theta_{11}(t,t_1)-A^T(t)\Theta_{21}(t,t_1)-R_1(t)\Theta_{12}(t,t_1)P_1-$$
$$-A^T(t)\Theta_{22}(t,t_1)P_1-P(t)A(t)\Theta_{11}(t,t_1)+$$
$$+P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)\Theta_{21}(t,t_1)-P(t)A(t)\Theta_{12}(t,t_1)P_1+$$
$$+P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)\Theta_{22}(t,t_1)P_1][\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t}=[-R_1(t)[\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]-A^T(t)[\Theta_{21}(t,t_1)+\Theta_{22}(t,t_1)P_1$$
$$-P(t)A(t)[\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]+$$
$$+P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)[\Theta_{21}(t,t_1)+\Theta_{22}(t,t_1)P_1]][\Theta_{11}(t,t_1)+\Theta_{12}(t,t_1)P_1]^{-1}$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t}=-R_1(t)-A^T(t)P(t)-P(t)A(t)+P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$$-\frac{\partial P(t)}{\partial t}=R_1(t)-P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t) \qquad 2\text{-}51$$

La condición de borde para esta ecuación diferencial es:

$$P(t_1) = P_1$$

Esta ecuación [2-51] es conocida como la ECUACION MATRICIAL DE RICATTI. Puesto que P_1 es simétrica para la condición final de P(t) y la ecuación matricial diferencial para P(t) es simétrica; entonces, la solución P(t) será simétrica para todo $t_0 \leq t \leq t_1$. Esta simetría será utilizada más adelante cuando se calcule P.

Ahora, determinemos la matriz P(t) a partir de un sistema óptimo en lazo cerrado descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\text{pero: } u(t) = -F(t)x(t)$$

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]x(t) \qquad 2\text{-}52$$

Y consideremos el criterio [2-26] a ser minimizado.

$$\int_{t}^{t1}[x^T(\tau)R_1(\tau)x(\tau)+u^T(\tau)R_2(\tau)u(\tau)]d\tau+x^T(t1)P_1x(t_1)=$$

$$=\int_{t}^{t_1}[x^T(\tau)R_1(\tau)x(\tau)+x^T(\tau)F^T(\tau)R_2(\tau)F(\tau)x(\tau)]d\tau+x^T(t_1)P_1x(t_1)$$

$$=\int_{t}^{t_1}x^T(\tau)[R_1(\tau)+F^T(\tau)R_2(\tau)F(\tau)]x(\tau)d\tau+x^T(t_1)P_1x(t_1)=\ x^T(t)\tilde{P}(t)x(t)$$

donde: $\tilde{P}(t)$ es la solución de la ecuación matricial diferencial.

$$-\frac{\partial\tilde{P}(t)}{\partial t}=[A(t)-B(t)F(t)]^T\tilde{P}(t)+\tilde{P}(t)[A(t)-B(t)F(t)]+ \\ +[R_1(t)+F^T(t)R_2(t)F(t)] \qquad \text{2-53}$$

con la condición final: $\tilde{P}(t_1) = P_1$

Esta solución es debido al teorema del criterio de la integral cuadrática, cuyo enunciado es:

Dado un sistema: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

y el criterio a minimizar: $\int_{t0}^{t1}x^T(t)R_1(t)x(t)dt+x^T(t_1)P_1x(t_1)$

la solución a la ecuación diferencial matricial es:

$$-\dot{P}(t) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + R_1(t)$$

Luego de esta explicación, continuaremos con la determinación de la matriz P(t):

se sabe que: $F(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)$, entonces: [2-53] queda:

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = [A(t) - B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)\,[A(t) - B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t) * P(t)] + [R_1(t) + P(t)B(t)R_2^{-1}(t)R_2(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)]$$

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = A^T(t)\tilde{P}(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A(t) - \tilde{P}(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + R_1(t) + P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)]$$

Reemplacemos $\tilde{\bar{P}}(t)$ por P(t)

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)$$

Y es la misma ecuación matricial de Ricatti, obtenida en [2-51]. Finalizamos este tema con un resumen de lo obtenido.

<u>TEOREMA 2-2</u>:

La entrada óptima para el règulador óptimo lineal determinístico es generado por una ley de control lineal:

$$u^*(t) = -F^*(t)x^*(t) \quad \text{con} \quad F^*(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

La matriz P(t) simétrica semidefinida positiva satisface la ecuación matricial de Ricatti.

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)$$

Con la condición final: $P(t_1) = P_1$

$$\int_{t}^{t1} [x^{*T}(\tau) R_1(\tau) x^*(\tau) + u^{*T}(\tau) R_2(\tau) u^*(\tau)]\, d\tau + x^{*T}(t1) P_1 x^*(t_1)$$

$$= x^{*T}(t) P(t) x^*(t)$$

Como se observa, la matriz P(t) no solamente nos da la ley de realimentación óptima, sino que además permite evaluar el criterio para un estado inicial dado.

Después de haber estudiado la solución del regulador deteminístico variante en el tiempo; es el momento de estudiar la solución en estado estable; es decir, invariante en el tiempo.

2.3 SOLUCION EN ESTADO ESTABLE AL PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO LINEAL DETERMINISTICO

2.3.1 Introducción.

Desde el punto de vista práctico, por lo general se consideran períodos de control largos $[t_o, t_1]$. Este es el punto de inicio, a partir del cual se realizará un estudio del comportamiento asintótico de la solución al problema del regulador determinístico cuando t_1 tiende a infinito.

Los principales resultados que se pueden resumir son:

1) Cuando el tiempo final t_1 se aproxima al infinito, la solución P(t) de la ecuación matricial de Ricatti.

$$-\dot{P}(t)=R_1(t)-P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t)$$

Con la condición final: $P(t_1) = P_1$

se aproxima a la solución en estado estable $\overline{P}(t)$ y es independiente de P_1.

En el caso invariante en el tiempo, las matrices A, B, R_1 y R_2 son constantes y la solución en estado estable $\overline{P}$ es también constante y es solución de la ecuación algebraica de Ricatti.

$$0=R_1-\overline{P}BR_2^{-1}B^T\overline{P}+\overline{P}A+A^T\overline{P} \qquad 2\text{-}54$$

La ley de control en estado estable es:

$$u(t) = -\overline{F}(t)x(t) \qquad 2\text{-}55$$

donde: $\overline{F}(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)$ 2-56

que minimiza el criterio

$$\int_{t_0}^{\infty}[z^T(t)R_3(t)z(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt \qquad 2\text{-}57$$

2) La ley de control en estado estable es estable asintóticamente.

Puesto que [2-51] existe para la ley de control [2-55], en el sistema de lazo cerrado $u(t)\rightarrow 0$ y $z(t)\rightarrow 0$ cuando $t\rightarrow\infty$; esto es verdad si $x(t)\rightarrow 0$ lo que significa que el sistema en lazo cerrado es estable asintóticamente.

Después de haber revisado los resultados de la solución en estado estable, se esta en posición de estudiar las propiedades de estos reguladores óptimos.

2.3.2 Propiedades en Estado Estable de los Reguladores Optimos

Las propiedades que se revisarán a continuación, estarán dedicados al caso variante en el tiempo. Primero se expresarán algunos resultados:

TEOREMA 2-3:

Considérese la ecuación matricial de Ricatti.

$$-\dot{P}(t)=D^T(t)R_3(t)D(t)-P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t) \qquad 2\text{-}58$$

Supóngase que $A(t)$ es continua y limitada, $B(t)$, $D(t)$, $R_3(t)$ y $R_2(t)$ son continuas y limitadas en el intervalo $[t_o,\infty]$, y además: $R_3(t) \geq \alpha I$ $R_2(t) \geq \beta I$ para todo t 2-59

donde α y β son constantes positivas.

1) Si el sistema: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ 2-60

$z(t) = D(t)x(t)$

es: a) completamente controlable, o

b) exponencialmente estable.

la solución $P(t)$ de la ecuación de Ricatti [2-58], con la condición terminal $P(t_1) = 0$, converge a una matriz $\overline{P}(t)$ simétrica semidefinida positiva cuando $t_1 \to \infty$. $\overline{P}(t)$ es la solución de la ecuación de Ricatti [2-58].

2) Además si el sistema [2-59] es:

c) completamente controlable y observable, o

d) exponencialmente estable.

la solución $P(t)$ de la ecuación de Ricatti [2-58] con la condición terminal $P(t_1) = P_1$, converge a $\overline{P}(t)$ cuando $t1 \to \infty$ para algún valor $P_1 \geq 0$.

A continuación se demostrarán estas propiedades.

La demostración de esta primera parte no es muy difícil. Se sabe que:

$$x^T(t)\,P(t)\,x(t) = \min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_1}} \int_t^{t1} [z^T(\tau)\,R_3(\tau)\,z(\tau) + u^T(\tau)\,R_2(\tau)\,u(\tau)]\,d\tau \qquad 2\text{-}61$$

Esta expresión es función del tiempo final t_1; es decir, tiene un límite alto. Ahora, si el sistema es completamente controlable (a), entonces existe una entrada que transfiere el estado $x(t)$ al estado cero en un tiempo t_1'. Para esta entrada se puede calcular el siguiente criterio

$$\int_{t}^{t_1'} [z^T(\tau) R_3(\tau) z(\tau) + u^T(\tau) R_2(\tau) u(\tau)]\, d\tau \qquad 2\text{-}62$$

Este número es un valor grande para [2-61], luego se puede tomar una entrada u(t) = 0 para $t \geq t_1'$.

Ahora si el sistema es exponencialmente estable (b), x(t) converge exponencialmente a cero si se deja u(t) = 0. Entonces

$$\int_{t}^{t_1} [z^T(\tau) R_3(\tau) z(\tau) + u^T(\tau) R_2(\tau) u(\tau)]\, d\tau = \int_{t}^{t_1} z^T(\tau) R_3(\tau) z(\tau)\, d\tau \qquad 2\text{-}63$$

converge a un número finito cuando $t_1 \to \infty$, puesto que D(t) y $R_3(t)$ son limitados.

La expresión que se presenta en [2-61], posee un límite superior bajo las condiciones (a) ó (b). Como esta expresión es función t_1, se dice que no decrece monotónicamente. Esto se demostrará a continuación.

Supóngase que lo anterior no es verdad, entonces pueden existir tiempos t_1' y t_1'' con $t_1'' > t_1'$; tal que, para $t_1 = t_1''$ el criterio es menor que para cuando $t_1 = t_1'$.

Ahora se aplicará la entrada óptima para t_1'' en el intervalo $[t_o, t_1']$. Puesto que el criterio de la integral es no negativa, el criterio para un intervalo pequeño da un valor menor o igual al criterio para un intervalo grande $[t_o, t_1'']$.

Esto es una contradicción, luego la expresión [2-61] es función de t_1 y no decrece monotónicamente; como la expresión [2-61] tiene límite superior, es función de t_1, y no decrece monotónicamente, entonces posee un límite cuando $t_1 \rightarrow \infty$.

Puesto que $x(t)$ es arbitrario, cada uno de los elementos de $P(t)$ tiene un límite, entonces $P(t)$ tiene un límite que se denotará como $\overline{P}(t)$; además se concluye que $P(t)$ es semidefinida positiva y simétrica.

A la solución en estado estable $\overline{P}(t)$, le corresponde una ley de control óptima en estado estable.

$$u(t) = -\overline{F}(t)x(t)$$

donde: $F(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)$

Con esto finaliza la demostración de la primera parte, ahora con relación a la estabilidad de la ley de control en estado estable se tiene los siguientes resultados:

Considérese el problema del regulador óptimo lineal determinístico y supóngase que las consideraciones que se tomaron con respecto a las matrices A, B, D, R_3 y R_2 se satisfacen.

Entonces, si el sistema [2-60] es:

a) uniforme y completamente controlable y observable, o

b) estable exponencialmente.

Se deduce que:

1) La ley de control óptimo en estado estable

$$u(t) = -R_2^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)x(t)$$

es estable exponencialmente.

2) La ley de control en estado estable minimiza el criterio

$$\lim_{t_1\to\infty}\int_{t0}^{t1}[z^T(t)R_3(t)z(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt+x^T(t_1)P_1x(t_1) \quad 2\text{-}64$$

para todo $P_1(i,j) \geq 0$. El valor mínimo del criterio [2-64], alcanzado por la ley de control en estado estable, está dado

por: $$x^T(to)\overline{P}(to)x(to) \quad 2\text{-}65$$

La solución de la ecuación de Ricatti [2-58] con $P(t_1)=0$

converge a $\overline{P}(t)$ cuando $t1\to\infty$. Y para la ley de control, se tiene:

$$\int_{t0}^{\infty}[z^T(t)R_3(t)z(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt= x^T(t_0)\overline{P}(t_0)x(t_0) \quad 2\text{-}66$$

Si el integral converge y, $R_3(t)$ y $R_2(t)$ satisfacen las condiciones [2-59]; entonces, tanto $z(t)$ como $u(t)$ convergen a cero cuando $t\to\infty$.

Bajo estas condiciones supóngase que el sistema en lazo cerrado no es asintóticamente estable, entonces existe un estado inicial tal que $x(t)$ no se aproxima a cero mientras que $z(t)\to 0$ y $u(t)\to 0$.

Esto es un problema con la completa reconstructibilidad del sistema (a), o con la estabilidad exponencial del sistema (b). De aquí que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Además por las leyes de uniformidad es estable exponencialmente.

Para la demostración de la parte (2), se supone que existe otra ley de control que produce un valor pequeño para [2-64], debido a que [2-64] produce un valor finito cuando es utilizada la ley de control; esta otra ley de control también produce un valor finito; entonces, por el mismo argumento, como para la ley de control, esta otra ley de control es asintóticamente estable. Esto significa que para esta ley de control.

$$\lim_{t_1\to\infty}\int_{t0}^{t1}[z^T(t)R_3(t)z(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt+x^T(t_1)P_1x(t_1)=$$

$$=\int_{t0}^{\infty}[z^T(t)R_3(t)z(t)+u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt$$

Puesto que la expresión derecha está minimizada por la ley de control en estado estable, no puede haber otra ley de control que produzca un valor más pequeño para la expresión izquierda.

Luego, la ley de realimentación en estado estable minimiza el criterio [2-64] para todo $P_1(i,j)\geq 0$, lo cual implica que la ecuación de Ricatti converge a $\overline{P}(t)$ para todo $P_1(i,j)\geq 0$.

A continuación se estudiarán las propiedades en estado estable del regulador óptimo lineal invariante en el tiempo.

2.3.3 Propiedades en Estado Estable del Regulador Optimo Invariante en el Tiempo.

Considere el problema del regulador invariante en el tiempo para el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad 2\text{-}67$$

$$z(t) = D(t)x(t)$$

y el criterio:

$$\int_{t0}^{t1} [z^T(t)R_3z(t) + u^T(t)R_2u(t)]\,dt + x^T(t_1)P_1x(t_1) \qquad 2\text{-}68$$

donde: $R_3 \geqslant 0$, $R_2 > 0$ y $P_1 \geq 0$.

La ecuación de Ricatti asociada, está dada por:

$$-\dot{P}(t) = D^TR_3D - P(t)BR_2^{-1}B^TP(t) + A^TP(t) + P(t)A \qquad 2\text{-}69$$

con la condición de borde: $P(t_1) = P_1$ 2-70

Con estas consideraciones, las propiedades de estos reguladores son:

a) Se asume que $P_1=0$, entonces cuando $t1\to\infty$, la solución de la ecuación de Ricatti se aproxima a un valor constante en estado estable $\overline{P}$, si y solo si, el sistema no posee polos que son al mismo tiempo inestables, incontrolables y reconstruibles.

b) Si el sistema [2-67] es estabilizable y detectable, entonces la solución de la ecuación de Ricatti [2-69] se aproxima al único valor $\overline{P}$ cuando $t_1\to\infty$ para todo $P_1\geq 0$.

c) Si $\overline{P}$ existe, esta matriz es una solución simétrica semidefinida positiva de la ecuación de Ricatti.

$$0= D^TR_3D-PBR_2^{-1}B^TP+A^TP+PA \qquad 2\text{-}71$$

d) Si $\overline{P}$ existe, esta matriz es estrictamente definida positiva si y solo si, el sistema [2-67] completamente reconstruible.

e) Si $\overline{P}$ existe, la ley de control en estado estable es:

$$u(t) = -\overline{F}x(t) \qquad \text{donde: } \overline{F} = R_2^{-1}B^T\overline{P} \qquad 2\text{-}72$$

y, es estable asintóticamente; si y solo si, el sistema [2-67] es estabilizable y detectable.

f) Si el sistema [2-67] es estabilizable y detectable, entonces la ley de control en estado estable minimiza el criterio.

$$\lim_{t_1\to\infty}\int_{t0}^{t1}[z^T(t)R_3z(t)+u^T(t)R_2u(t)]\,dt+x^T(t_1)P_1x(t_1) \qquad 2\text{-}73$$

para todo $P_1 \geq 0$. El valor al que llega este criterio es:

$$x^T(t_o)\bar{P}x(t_o) \qquad 2\text{-}74$$

A continuación se demostrarán estas propiedades.

Para la parte (a), supóngase que el sistema no es completamente reconstruible, entonces puede ser transformado a una forma canónica reconstruible de la siguiente manera:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \qquad 2\text{-}75$$

donde el par (A_{11}, D_1) es completamente reconstruible. Particionando la solución P(t) de la ecuación de Ricatti [2-69] de acuerdo al particionamiento en [2-75], se tiene:

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}76$$

Luego, la ecuación de Ricatti se reducen a las siguientes ecuaciones matriciales:

$$-\dot{P}_{11}(t) = D_1^T R_3 D_1 - [P_{11}(t)B_1 + P_{12}(t)B_2]R_2^{-1}[B_1^T P_{11}(t) + B_2^T P_{12}^T(t)] + \\ + [A_{11}^T P_{11}(t) + A_{21}^T P_{12}^T(t)] + [P_{11}(t)A_{11} + P_{12}(t)A_{21}] \qquad 2\text{-}7$$

$$-\dot{P}_{12}(t) = -[P_{11}(t)B_1 + P_{12}(t)B_2]R_2^{-1}[B_1^T P_{12}(t) + B_2^T P_{22}(t)] + \\ + [A_{11}^T P_{12}(t) + A_{21}^T P_{22}(t) + P_{12}(t)A_{22} \qquad 2\text{-}78$$

$$-\dot{P}_{22}(t) = -[P_{12}^T(t)B_1 + P_{22}(t)B_2]R_2^{-1}[B_1^T P_{12}(t) + B_2^T P_{22}(t)] + \\ + A_{22}^T P_{22}(t) + P_{22}(t)A_{22} \quad 2\text{-}79$$

Se puede observar que con las condiciones finales $P_{11}(t_1)=0$, $P_{12}(t_1)=0$ y $P_{22}(t_1)=0$, las ecuaciones [2-78] y [2-79] se satisfacen con $P_{12}(t)=0$, $P_{22}(t)=0$ para $t \leq t_1$.

Con estas identidades, la ecuación [2-77] se reduce a:

$$-\dot{P}_{11}(t) = D_1^T R_3 D_1 - P_{11}(t)B_1 R_2^{-1} B_1^T P_{11}(t) + A_{11}^T P_{11}(t) + P_{11}(t)A_{11} \\ y \qquad P_{11}(t_1) = 0 \quad 2\text{-}80$$

Esto significa que los valores característicos de A_{22} no afectan la convergencia de $P_{11}(t)$ cuando $t_1 \rightarrow \infty$, de aquí se deduce que la convergencia de P(t) no es afectada por los polos no reconstruibles; por lo tanto, el sistema [2-67] es completamente reconstruible.

Ahora, el sistema [2-67] se transformará a una forma canónica controlable, así:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad 2\text{-}81$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} x(t)$$

Donde el par (A_{11}, B_1) es completamente controlable.

A continuación se supone que el sistema no es estabilizable, luego A_{22} no es asintóticamente estable; entonces, existe un estado inicial de la forma col(0, x_{20}) tal que $x(t)\rightarrow\infty$ (no importa cómo es escogido u(t)).

Por la consideración asumida, completamente reconstruible, para tales estados iniciales, el criterio

$$\int_{t0}^{t1}[z^T(t)R_3z(t)+u^T(t)R_2u(t)]\,dt \qquad 2\text{-}82$$

nunca converge a un número finito cuando $t_1\rightarrow\infty$. Esto indica que P(t) no converge a un valor finito cuando $t_1\rightarrow\infty$ si el sistema [2-67] no es estabilizable. Sin embargo, si [2-67] es estabilizable, siempre se puede encontrar una ley de control que haga al sistema en lazo cerrado estable. Para esta ley de control, el criterio [2-82] converge a un número finito cuando $t_1\rightarrow\infty$; este número es un límite superior para el mínimo valor que toma el criterio.

Anteriormente se obtuvo que el mínimo valor que toma el criterio [2-82] es función de t1 que no decrece monotónicamente, esto demuestra que el mínimo valor del criterio [2-82] tiene un límite cuando $t_1\rightarrow\infty$; con lo que se concluye la demostración de la parte (a).

Ahora la demostración del literal (d) es fácil, así:
Supóngase que el sistema no es completamente reconstruible; entonces, si al sistema se lo transfiere a un sistema de forma

canónica reconstruible y con $P_1=0$, entonces P(t) se representa como:

$$P(t)=\begin{bmatrix} P_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}83$$

De esto se desprende la existencia de $\bar{P}$, y además es singular. Esto prueba que si $\bar{P}$ es estrictamente definida positiva, el sistema es completamente reconstruible.

Para probar que $\bar{P}$ es singular y que el sistema es reconstruible, se asume la siguiente consideración: la existencia de un estado inicial diferente de cero; tal que,

$$\int_{to}^{\infty} [z^T(t)R_3 z(t) + u^T(t)R_2 u(t)]\,dt = 0 \qquad 2\text{-}84$$

Puesto que $R_3>0$ y $R_2>0$, esto implica que

$$u(t)=0 \quad y \quad z(t)=0 \quad \text{para } t\geq to \qquad 2\text{-}85$$

Pero esto significaría que existe un estado inicial diferente de cero que causa una entrada cero y una respuesta z(t) que es cero para todo t. Esto es una contradicción a lo asumido, completamente controlable, y por lo tanto la asunción que P es singular es falsa, por lo que queda demostrado este literal.

Ahora demostremos el literal (e). Se asume que P existe, entonces se tiene un sistema que no tiene polos inestables, incontrolables y son reconstruibles.

Como se vio en el literal (a), en la representación canónica reconstruible del sistema, $\overline{P}$ está dado en la forma:

$$\overline{P}=\begin{bmatrix}\overline{P}_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad 2\text{-}86$$

Esto demuestra que la matriz ganancia de realimentación en estado estable tiene la forma:

$$\overline{F} = R_2^{-1}\left[B_1^T \quad B_2^T\right]\begin{bmatrix}\overline{P}_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\left[R_2^{-1}B_1^T\overline{P}_{11} \quad 0\right] \qquad 2\text{-}87$$

Esta expresión significa que la matriz ganancia de realimentación en estado estable abandona la parte irreconstruible del sistema, esto implica que si la ley de control en estado estable lleva al sistema en lazo cerrado a ser estable asintóticamente; es decir, el sistema en lazo abierto es detectable.

Además, si el sistema en lazo cerrado es estable asintóticamente, entonces el sistema en lazo abierto es estabilible.

Se observa que estabilidad y detectabilidad son condiciones necesarias para que la ley de control en estado estable estabilice asintóticamente.

Se vio antes que la ley de control en estado estable no afecta ni es afectada por la parte irreconstruible del sistema; por lo tanto, si el sistema es detectable, se omite la parte irreconstruible y se asume que el sistema es completamente reconstruible.

Ahora, si se convierte al sistema en una forma canónica controlable como en [2-81], y particionando la matriz P(t), se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_{11}^T(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22}(T) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}88$$

De la ecuación de Ricatti [2-69], $P_{11}(t)$ es la solución de:

$$-\dot{P}_{11}(t) = D_1^T R_3 D_1 - P_{11}(t) B_1 R_2^{-1} B_1^T P_{11}(t) + A_{11}^T P_{11}(t) + P_{11}(t) A_{11}$$
$$y \qquad P_{11}(t_1) = 0 \qquad 2\text{-}89$$

Puesto que el par $\{A_{11}, B_1\}$ es completamente controlable y además $P_{11}(t)$ tiene una solución asintótica $\overline{P}_{11}$ cuando $t_1 \to \infty$, tal que $(A_{11} - B_1\overline{F}_1)$, con $\overline{F}_1 = R_2^{-1}B_1^T\overline{P}_{11}$, es estable asintóticamente.

La ley de control para todo el sistema [2-81] es:

$$\overline{F} = [\overline{F}_1 \quad \overline{F}_2]$$
$$\overline{F} = R_2^{-1} \; [B_1^T \quad 0] \begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$\overline{F} = [R_2^{-1}B_1^T\overline{P}_{11} \quad R_2^{-1}B_1^T\overline{P}_{12}] \qquad 2\text{-}90$$

Con esta ley de control, el sistema en lazo cerrado está descrito por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} A_{11}-B_1\overline{F}_1 & A_{12}-B_1\overline{F}_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}91$$

Para terminar la demostración del literal (e), se concluye que si el sistema en lazo abierto es asintóticamente estable tanto $A_{11}-B_1F_1$ como A_{22} son asintóticamente estables. Esto indica que detectabilidad y estabilidad son condiciones suficientes para garantizar que en lazo cerrado, la ley de control en estado estable será asintóticamente estable.

Ahora demostremos la parte (f).

La ley de control en estado estable minimiza el criterio

$$\int_{to}^{\infty} [z^T(t)R_3z(t)+u^T(t)R_2u(t)]\,dt \qquad 2\text{-}92$$

y el valor mínimo de este criterio se encuentra dado por $x^T(to)\overline{P}x(to)$. Ahora considérese el siguiente criterio

$$\lim_{t_1\to\infty}\int_{to}^{t_1} [z^T(t)R_3z(t)+u^T(t)R_2u(t)]\,dt+x^T(t_1)P_1x(t_1) \qquad 2\text{-}93$$

con $P_1 \geq 0$. Si el sistema es estabilizable y detectable, el criterio se reduce a

$$\int_{to}^{\infty} [\overline{z}^T(t)R_3\overline{z}(t)+\overline{u}^T(t)R_2\overline{u}(t)]\,dt = x^T(t_0)\overline{P}x(t_0) \qquad 2\text{-}94$$

donde $\overline{z}$ y $\overline{u}$ son la variable controlada y la entrada generada por la ley de control en estado estable. Esta ley de control en estado estable no sólo minimiza [2-92], sino también [2-93] Suponiendo que existe otra ley de control que da un valor pequeño en [2-93], entonces esta ley de control se convierte en

$$\int_{t0}^{\infty} [z^T(t) R_3 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)]\, dt + \lim_{t_1 \to \infty} x^T(t_1) P_1 x(t_1) < x^T(t_0) \overline{P} x(t_0)$$

2-95

si $P_1 \geq 0$, entonces:

$$\int_{t0}^{\infty} [z^T(t) R_3 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)]\, dt < x^T(t_0) \overline{P} x(t_0)$$

Pero se sabe que el lado izquierdo de esta expresión es minimizado por la ley de control en estado estable y no existe un valor menor a $x^T(to)Px(to)$; luego, esto es una contradicción, lo que significa que [2-93] es minimizado por la ley de control en estado estable; de aquí queda demostrado este literal.

El literal (b), se demuestra inmediatamente del literal (f).

Por último demostremos el literal (c). Supóngase que el sistema [2-67] es estabilizable y detectable, y P´ es alguna matriz simétrica semidefinida positiva y solución de la ecuación algebraica de Ricatti.

Considérese la ecuación diferencial de Ricatti [2-69] con la condición final $P_1 = P'$.

La solución de la ecuación de Ricatti es $P(t) = P'$; entonces, la solución en estado estable P está dada por P', esto indica que alguna matriz P' de la ecuación algebraica de Ricatti es la solución en estado estable $\overline{P}$, de aquí que el valor en estado estable $\overline{P}$ es única solución semidefinida positiva de la ecuación algebraica de Ricatti, con esto queda demostrado este literal.

Resumiendo estos resultados, se tiene:

Los literales (b) y (c) indican que los estados de esta bilidad y detectabilidad son condiciones suficientes para que la ecuación de Ricatti converja al único valor $\overline{P}$ para todo $P1(i,j)=0$, y que la ecuación algebraica de Ricatti tiene una única solución semidefinida positiva.

Después de haber analizado el problema del regulador determinístico, a continuación se estudiará el problema del regulador estocástico.

2.4 PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO LINEAL ESTOCASTICO

2.4.1 Introducción.

Este problema permite obtener la solución transitoria para el caso de un sistema lineal que tiene perturbado el estado inicial y debe regresar al estado cero lo más rápido que sea posible, limitando a la vez la amplitud de la entrada.

El problema es entonces diseñar una configuración realimentada, la cual reduce los desajustes (offset) iniciales rápidamente y contrarresta los efectos de perturbaciones en estado estable.

Así, considérese la planta representado por el sistema que se describe a continuación:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t)$$
$$z(t) = D(t)x(t) \qquad 2\text{-}96$$

donde: $u(t)$ es la variable de entrada.

$z(t)$ es la variable controlada.

$v(t)$ representa las perturbaciones que actúan sobre el sistema.

Matemáticamente, representamos las perturbaciones como procesos estocásticos, al que le modelamos como la salida de un sistema lineal excitado por ruido blanco; entonces, se asume que $v(t)$ está dada por:

$$v(t) = D_a(t)x_a(t) \qquad 2\text{-}97$$

Aquí $x_a(t)$ es la solución de:

$$\dot{x}_a(t) = A_a(t)x_a(t) + w(t) \qquad 2\text{-}98$$

en la cual $w(t)$ es el ruido blanco. Además se asume que tanto $x(t_o)$ como $x_a(t_o)$ son variables estocásticas.

Combinando el sistema con las perturbaciones, se tiene:

$$\frac{\partial\tilde{x}(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} A(t) & Dd(t) \\ 0 & Ad(t) \end{bmatrix}\tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} D(t) & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}(t) \qquad 2\text{-}99$$

donde: $\tilde{x}(t)$ es el vector aumentado e igual a col[x(t),xd(t)].

Se observa que [2-99] no es un sistema completamente controlable. Ahora, tomando el criterio cuadrático integral del problema del regulador determinístico; en el cual, se incluye la presencia de una perturbación, se tiene

$$E \int_{t0}^{t1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt + \overline{x}^T(t_1)\overline{P}_1\overline{x}(t_1) \qquad 2\text{-}100$$

donde: E es el valor esperado o esperanza matemática

Entonces, el problema general es minimizar

$$E \int_{t0}^{t1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt + x^T(t_1) P_1 x(t_1)$$

para el sistema: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t)$

Este problema se denomina "problema del regulador óptimo lineal estocástico". Todo lo anteriormente indicado se resume en la siguiente definición:

2.4.1.1 Definición 4

Considérese el sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \qquad 2\text{-}102$$

con la condición inicial $x(t_o) = x_o$ 2-103

y la variable controlada $z(t) = D(t)x(t)$ 2-104

En la expresión [2-102], $w(t)$ es el ruido blanco con intensidad $v(t)$. El estado inicial x_o es una variable estocástica, independiente del ruido blanco $w(t)$, con:

$$E\,\{x_o x_o^T\} = Q_o \qquad 2\text{-}105$$

donde Q_o es la matriz de varianza.

Además considérese el criterio

$$E\{\int_{t0}^{t1}[z^T(t)R_3(t)z(t) + u^T(t)R_2(t)u(t)]\,dt + x^T(t_1)P_1x(t_1)\} \qquad 2\text{-}106$$

donde R_2 es una matriz simétrica definida positiva para $t_o \leq t \leq t_1$; y, R_3 y P_1 son matrices simétricas semidefinidas positivas. Entonces, el problema es "determinar para cada instante t, en el intervalo $[t_o,t_1]$, una entrada $u(t)$ como función de toda la información del pasado y para el cual el criterio se ha minimizado", a este problema se le denomina "problema del regulador óptimo lineal estocástico".

Si todas las matrices en el problema formulado son constantes, entonces se refiere al problema del regulador óptimo lineal estocástico invariante en el tiempo.

La solución a este problema se analizará en el siguiente subtema.

2.4.2 SOLUCION ANALITICA AL PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO LINEAL ESTOCASTICO

Este problema exhibe una diferencia esencial respecto al problema del regulador determinístico, y se debe a que el ruido blanco hace imposible predecir exactamente cómo el sistema va a comportarse. Entonces, a priori, lo mejor es no determinar $u(t)$, en el período de control $[t_0, t_1]$, pero si reconsiderar la situación en cada instante t, en base a toda la información disponible.

En este instante t el comportamiento futuro del sistema está enteramente determinado por: el estado presente $x(t)$, la entrada $u(\tau)$ para $\tau \geq t$, y por ruido blanco $w(\tau)$ para $\tau \geq t$. Toda la información del pasado que es relevante para el futuro está contenido en el estado $x(t)$. Por lo tanto, considérese la siguiente ley de control

$$u(t) = g\,[x(t),\, t] \qquad \text{2-107}$$

donde la entrada corresponde a cada posible valor del estado en el tiempo t.

Esta ley de control presupone que cada componente de estado puede ser medido con precisión en cada instante. Como se señaló antes, esta es una consideración irrealista, más aún en el caso estocástico, donde el estado incluye componentes que describen las perturbaciones o las variables de referencia; pero es improbable que estas componentes puedan ser medidas fácilmente.

La solución a esta dificultad queda planteada y no se resolverá en el presente trabajo.

Volviendo al problema de la versión estocástica, se tiene que la presencia del ruido blanco w(t) no altera la solución del sistema [2-102] excepto, para incrementar el valor mínimo del criterio. A continuación su discusión y demostración:

La solución lineal óptima al problema del regulador óptimo lineal estocástico es escoger la entrada de acuerdo a la ley de control lineal

$$u(t) = -F^*(t)x(t) \qquad 2\text{-}108$$

$$\text{donde} \quad F^*(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

en el cual P(t) es la solución de la ecuación matricial de Ricatti

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t)$$

con la condición final $P(t_1) = P_1$ 2-110

y el valor mínimo del criterio está dado por

$$tr\ [P(t_0)Q_0 + \int_{t0}^{t1} P(t)V(t)\,dt] \qquad 2\text{-}111$$

Como se observa, se da la mejor solución lineal al problema del regulador estocástico.

Para demostrar, se supone que el sistema está controlado por medio de una ley de control lineal.

$$u(t) = -F(t)x(t)$$

El sistema en lazo cerrado está descrito por la siguiente ecuación diferencial.

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]x(t) + w(t)$$

y el criterio, por

$$E\{\int_{t0}^{t1} x^T(t)\,[R_1(t) + F^T(t)R_2(t)F(t)]x(t)\,dt + x^T(t_1)P_1x(t_1)\}$$

Pero este criterio puede ser expresado como

$$tr\ [\tilde{P}(t_0)Q_0 + \int_{t0}^{t1} \tilde{P}(t)V(t)\,dt] \qquad 2\text{-}112$$

donde $\tilde{P}(t)$ es la solución de la ecuación matricial diferencial.

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]^T\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)[A(t) - B(t)F(t)] + \\ + R_1(t) + F^T(t)R_2(t)F(t)$$

con la condición final $\tilde{P}(t1) = P1$

Ahora, $\tilde{P}(t)$ satisface la desigualdad $\tilde{P}(t) \geq P(t)$ 2-114

para todo: $t_0 \leq t \leq t_1$, donde P(t) es la solución de la ecuación de Ricatti [2-109], con la condición final [2-110].

Si: $F^*(\tau) = R_2^{-1}(\tau)B^T(\tau)P(\tau)$ $t \leq \tau \leq t_1$ 2-115

la desigualdad se convierte en:

$$tr\ [\tilde{P}(t)\sigma] \geq tr\ [P(t)\sigma] \qquad 2\text{-}116$$

donde σ es una matriz simétrica semidefinida positiva. Esto demuestra que [2-112] es minimizado por F de acuerdo a [2-115] Luego, el criterio [2-112] está por [2-111], con lo que se concluye: que la ley de control [2-108] es la ley de control lineal óptimo.

A continuación se analizará algunas propiedades de la solución al problema del regulador con perturbaciones.

Ahora, se supondrá que la partición de la solución P(t) de la ecuación de Ricatti [2-109], de acuerdo a la partición $\bar{x}(t) = col[x(t), x_d(t)]$ es

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}117$$

Si la matriz ganancia de realimentación óptima está particionado como

$$F^*(t) = [F_1(t) \quad F_2(t)]$$

Entonces, se obtiene

$$F_1(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P_{11}(t) \qquad 2\text{-}118$$

$$F_2(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P_{12}(t)$$

Además, de la ecuación matricial diferencial se obtiene

$$-\dot{P}_{11}(t) = R_1(t) - P_{11}(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P_{11}(t) + A^T(t)P_{11}(t) + P_{11}(t)A(t)$$

$$\text{con} \quad P_{11}(t) = P_1$$

$$-\dot{P}_{12}(t) = P_{11}(t)D_d(t) + [A(t) - B(t)F_1(t)]^T P_{12}(t) + P_{12}(t)A_d(t)$$

$$\text{con} \quad P_{12}(t) = 0$$

$$-\dot{P}_{22}(t) = -P_{12}^T(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P_{12}(t) + D_d^T(t)P_{12}(t) + P_{12}^T(t)D_d(t) + A_d^T(t)P_{22}(t) + P_{22}(t)A_d(t)$$

$$\text{con} \quad P_{22}(t_1) = 0$$

Se observa que P_{11} y F_1, son independientes de las propiedades de las perturbaciones. Luego, la estructura del sistema de control está dado por la figura 2-13

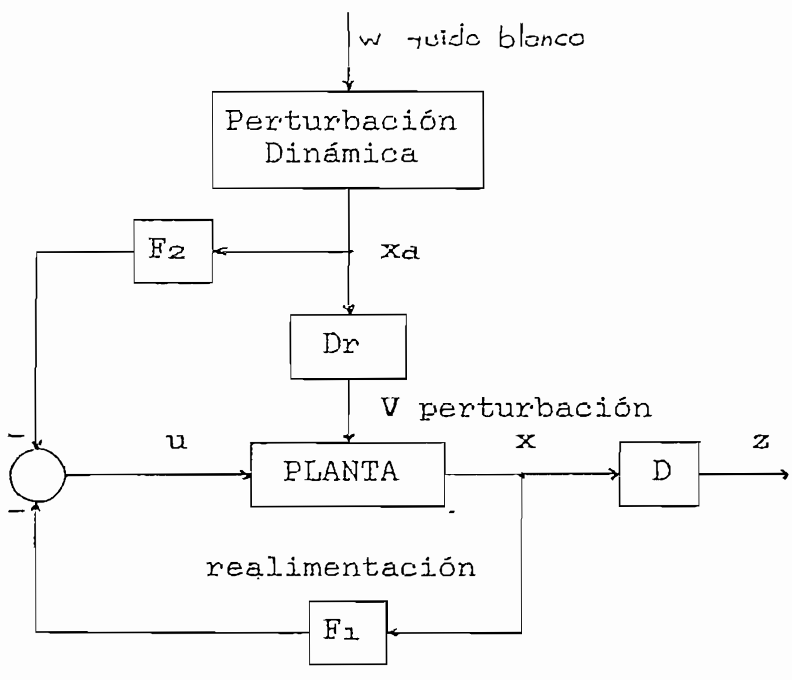


fig. 2-13

Volviendo al problema general del regulador óptimo. En la práctica se presentan períodos de control largos, lo que significa el interés para cuando $t_1 \to \infty$, obteniéndose la ley de control óptimo en estado estable para el regulador estocástico en la medida que minimice

$$\lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{(t_1 - T_0)} E \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)]\, dt \qquad 2\text{-}119$$

Para esta ley de control óptimo en estado estable, el criterio [2-119] está dado por

$$\lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} tr[\bar{P}(t)\, V(t)]\, dt \qquad 2\text{-}120$$

Además, para el problema del regulador estocástico y una ley de control invariantes en el tiempo estable asintóticamente, la expresión [2-119] queda

$$\lim_{t \to \infty} E\, [z^T(t) R_3(t) z(t) + u^T(t) R_2(t) u(t)] \qquad 2\text{-}121$$

Luego, la ley de control óptimo en estado estable minimiza [2-121] con respecto a las otras leyes de control invariantes en el tiempo.

Se observa que desde [2-119], el valor mínimo [2-121] está dado por

$$tr\, (\bar{P}V) \qquad 2\text{-}122$$

Hasta el momento se ha considerado la teoría de control lineal para sistemas de tiempo continuo, en el siguiente subtema se revisará la misma teoría para sistemas de tiempo discreto.

2.5 PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO LINEAL DETERMINISTICO DISCRETO

2.5.1 Introducción

Análogamente al problema de tiempo continuo, se define al problema del regulador discreto de la siguiente manera:

Considérese el sistema lineal discreto

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i) \qquad 2\text{-}123$$

con:

$$x(i_0) = x_0 \qquad 2\text{-}124$$

y la variable controlada

$$z(i) = D(i)x(i) \qquad 2\text{-}125$$

Además considérese el criterio

$$\sum_{i=i_0}^{i_1-1} [z^T(i+1)R_3(i+1)z(i+1) + u^T(i)R_2(i)u(i)] + x^T(i_1)P_1x(i_1) \qquad 2\text{-}126$$

donde $R_2(i+1) > 0$ para $i = i_0, i_0+1, \ldots\ldots, i_1-1$, y, $R3 \geq 0$ y $P_1 \geq 0$. Entonces el problema para "determinar la entrada $u(i)$ para $i = i_0, i_0+1, \ldots\ldots, i_1-1$", se lo denomina problema del regulador óptimo lineal determinístico de tiempo discreto.

Si todas las matrices son constantes, se referirá al problema del regulador óptimo lineal discreto invariante en el tiempo.

Los dos términos del sumatorio no tienen el mismo argumento [z(i+1), u(i)]. Esto se debe a que el valor inicial de la variable controlada z(io) depende del estado inicial x(io) y no puede cambiar, es por eso que no hay término que incluya z(io) en el criterio. Así mismo, el valor final de la entrada $u(i_1)$ afecta al comportamiento del sistema después del instante final i_1; por lo tanto, el término que involucra $u(i_1)$ puede ser excluido.

El método que se va a utilizar para derivar la ley de control óptimo es diferente a la del caso en tiempo continuo; en el cual, se usaron cálculos de variaciones elementales, en este caso se utilizará la programación dinámica. Así:

Definimos la siguiente función escalar:

$$\Gamma[x(i),i] \begin{cases} = \dfrac{\min}{u(i)\ldots u(i_1-1)} \displaystyle\sum_{j=i}^{i_1-1} [z^T(j+1)R_3(j+1)z(j+1)+u^T(j)R_2(j)u(j)] \\ \qquad + x^T(i_1)P_1x(i_1) \qquad para\ i=i_0,i_0+1,\ldots,i_1-1 \\ \\ = x^T(i_1)P_1x(i_1) \qquad para\ todo \quad i=i_1 \end{cases} \qquad 2\text{-}127$$

Se observa que Γ[x(i), i] representa el mínimo valor del criterio, calculado en el período {i, i+1, ..., i_1}; cuando en el instante "i", el sistema se encuentra en el estado x(i).

A continuación se obtendrá una ecuación iterativa para esta función.

Considérese el instante (i-1) y la entrada u(i-1) es arbitrariamente seleccionado, pero u(i), u(i+1), ...,u(i_1-1) son escogidos óptimamente con respecto al estado del sistema en el tiempo "i"; entonces, se puede escribir el criterio en el período {i-1, i, ..., i_1}

$$\sum_{j=i-1}^{i_1-1} [z^T(j+1)R_3(j+1)z(j+1)+u^T(j)R_2(j)u(j)] + x^T(i_1)P_1x(i_1)$$

$$= [z^T(i)R_3(i)z(i)+u^T(i-1)R_2(i-1)u(i-1)] + \Gamma[x(i),i]$$

Para determinar u*(i-1), [la entrada óptima en el tiempo (i-1)], se escoge u(i-1) de tal modo que la expresión

$$z^T(i)R_3z(i)+u^T(i-1)R_2u(i-1) + \Gamma[x(i),i] \qquad 2\text{-}128$$

sea minimizada.

El valor mínimo de [2-128] es el valor mínimo del criterio evaluado en el período de control {i-1, i, ..., i_1-1}. Luego, se tiene la igualdad

$$\Gamma[x(i-1),i-1] = \min_{u(i-1)} [z^T(i)R_3(i)z(i) + u^T(i-1)R_2(i-1)u(i-1)] + $$
$$+ \Gamma[x(i),i] \qquad 2\text{-}129$$

Utilizando las ecuaciones [2-123] y [2-125], y racionalizando la notación, esta expresión toma la forma

$$\Gamma[x, i-1] = \min_{u} [A(i-1)x+B(i-1)u]^T R_1(i) [A(i-1)x + B(i-1)u] +$$

$$+ u^T R_2(i-1)u + \Gamma([A(i-1)x+B(i-1)u], i) \qquad 2\text{-}130$$

donde $$R_1(i) = D^T(i) R_3(i) D(i)$$

Esta es una ecuación iterativa de la función Γ(x, i). Pero, se desea encontrar una solución de la forma

$$\Gamma(x, i) = x^T P(i) x \qquad 2\text{-}131$$

donde P(i), $i=i_0$, i_0+1, ..., i_1, es una secuencia de matrices a determinarse.

De [2-127] se desprende que: $P(i_1) = P_1$

Sustituyendo [2-131] en [2-130], se obtiene la entrada óptima y está denotado por

$$u(i-1) = -F(i-1)x(i-1) \qquad para\ i = i_0+1, \ldots, i_1 \qquad 2\text{-}132$$

donde

$$F(i-1) = [R_2(i-1) + B^T(i-1)[R_1(i)+P(i)]B(i-1)]^{-1} B^T(i-1) *$$

$$* [R_1(i)+P(i)]A(i-1) \qquad 2\text{-}133$$

La inversa de esta matriz existe, puesto que $R_2(i-1) > 0$ (definida positiva) y $B^T(i-1)[R_1(i)+P(i)]B(i-1)$ es una matriz semidefinida positiva, cuya suma da como resultado una matriz definida positiva.

Entonces, si se sustituye [2-132] en [2-130], se llega a obtener la siguiente ecuación de diferencias de P(i)

$$P(i-1) = A^T(i-1)[R_1(i)+P(i)][A(i-1)-B(i-1)F(i-1)] \qquad 2\text{-}134$$

$$para \quad i = i_0+1, \ldots i_1$$

Estos resultados se resumirán de mejor manera, en el siguiente teorema.

TEOREMA 2-3

La entrada óptima del problema del regulador óptimo lineal determinístico en tiempo discreto, está dada por la siguiente función

$$u(i) = -F(i)x(i) \qquad para \;\; i = i_0, i_0+1, \ldots, i_1-1$$

donde

$$F(i) = [R_2(i)+B^T(i)[R_1(i+1)+P(i+1)]B(i)]^{-1} B^T(i) * \qquad 2\text{-}135$$

$$* [R_1(i+1)+P(i+1)]A(i)$$

además $R_1(i) = D^T(i)R_3(i)D(i) \quad para \;\; i=i_0+1, i_0+2, \ldots, i_1$

La secuencia de matrices P(i) para $i=i_0, i_0+1, \ldots, i_1-1$ satisface la ecuación matricial de diferencias

$$P(i) = A^T(i)\,[R_1(i+1)+P(i+1)]\,[A(i)-B(i)F(i)] \quad , \quad para \quad i = i_0, i_0+1, \ldots i_1-1 \qquad 2\text{-}136$$

con la condición final $P(i_1) = P1$

El valor del criterio [2-126] que se logra con esta ley de control es

$$x^T(i_0)\,P(i_0)\,x(i_0)$$

Se puede observar que la ecuación de diferencias debe ser resuelta con el tiempo hacia atrás, de la siguiente manera: primero calcular F(i) y luego calcular P(i).

Cabe señalar que la ecuación de diferencias es la equivalente a la ecuación de Ricatti en tiempo continuo.

Después de haber analizado el problema del regulador óptimo lineal deteminístico en forma discreta, a continuación se procede a dar solución a este problema.

2.5.2 SOLUCION EN ESTADO ESTABLE AL PROBLEMA DEL REGULADOR EN TIEMPO DISCRETO

En el presente estudio se analizará el caso donde los periodos de control son largos, desde i_0 al infinito. Los resultados que se obtienen serán idénticos al del caso continuo, como se observará en el siguiente teorema.

TEOREMA 2-4

Considérese el problema del regulador y su solución dada por el teorema 2-3. Asumir que $A(i)$, $B(i)$, $R_1(i+1)$ y $R_2(i)$ están limitados para $i \geq i_o$, y que $R_3(i+1) \geq \alpha I$, $R_2(i) \geq \beta I$ para $i \geq i_o$. Donde α y β son constantes positivas.

1) Si el sistema [2-123] es:

a) completamente controlable, o

b) exponencialmente estable.

Entonces, la solución $P(i)$ con la condición final $P(i_1)=0$ converge a una secuencia de matrices semidefinidas positivas $P(i)$ cuando $i_1 \rightarrow \infty$ y es la solución de la ecuación diferencias [2-135] y [2-136].

2) Si además el sistema es:

a) completamente controlable y reconstruible, o

b) exponencialmente estable.

Entonces, la solución $P(i)$ con la condición final $P(i_1)=P_1$ converge a la matriz $P(i)$ cuando $i_1 \rightarrow \infty$, para alguna matriz $P_1(i,j) \geq 0$.

En el siguiente teorema se analizará la estabilidad de la ley de control en estado estable que corresponde a la solución P en estado estable.

TEOREMA 2-5.

Considere el problema del regulador y suponer las consideraciones que se mencionaron en el teorema 2-4 respecto a las matrices A, B, R_1, R_3 y R_2.

Ahora si el sistema [2-123] es;

a) completamente controlable y reconstruible, o

b) exponencialmente estable.

Entonces se llega a las siguientes conclusiones:

1) La ley de control óptimo en estado estable es $u(i)=-\overline{F}(i)x(i)$ donde $\overline{F}(i)$ se obtiene sustituyendo $\overline{P}(i)$ por $P(i)$ en la ecuación [2-135] y además es exponencialmente estable; y

2) La ley de control óptimo minimiza el criterio

$$\lim_{i_1 \to \infty} \sum_{i=i_0}^{i_1} [z^T(i+1)R_3(i+1)z(i+1)+u^T(i)R_2(i)u(i)]+x^T(i_1)P_1x(i_1)$$

$$\textit{para todo} \quad P_1(i,j) \geq 0$$

El mínimo valor que toma el criterio es $x^T(i_o)\overline{P}(i_o)x(i_o)$
La demostración de este teorema es la misma demostración que se realizó en el caso continuo.
En los siguientes teoremas se analizará el caso invariante en el tiempo.

TEOREMA 2-6.

Considere el problema del regulador óptimo lineal discreto invariante en el tiempo; además considérese al sistema tanto estabilizable y detectable. Luego, se llega a las siguientes conclusiones:

1) La solución de la ecuación de diferencias $P(i)$ y la condición final $P(i_1)=P_1$ converge a la solución $\overline{P}$ constante en estado estable, cuando $i_1 \to \infty$ para alguna matriz $P_1(i,j) \geq 0$

2) La ley de control óptimo en estado estable es invariante en el tiempo y asintóticamente estable; y,

3) La ley de control óptimo en estado estable minimiza el criterio [2-137] para todo $P_1(i,j) \geq 0$, y el mínimo valor de este criterio es: $x^T(io)\overline{P}x(io)$

2.6 COMENTARIOS

En este capítulo se ha tratado con sistemas de control con realimentación de estado donde los componentes de estado pueden ser medidos en cualquier instante de tiempo.

Además se ha analizado, cómo los sistemas de control lineales con realimentación de estado pueden ser diseñados de manera óptima al ser sensados mediante el criterio integral cuadrático.

También se ha estudiado las características de estabilidad y la sensibilidad a perturbaciones.

No hace falta decir que ya se está en capacidad de aplicar algunos métodos numéricos para encontrar la solución de la ecuación algebraica y diferencial de Ricatti, y esto es justamente lo que se hará en el capítulo siguiente.

CAPITULO III

SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL MATRICIAL DE RICATTI EN EL COMPUTADOR

3.1 INTRODUCCION

Una vez realizado el estudio analítico de las ecuaciones algebraica y diferencial de Ricatti, a continuación se procederá a obtener estas mismas ecuaciones en el computador digital y se le aplicará a varios ejercicios de interés.

Se ha escogido dos métodos para resolver numéricamente la ecuación diferencial matricial de Ricatti, estos son: el Método de Integración Directa (Runge-Kutta) y el método de Kalman-Englar. En la siguiente sección se revisarán estos métodos que son importantes para el problema del regulador.

3.2 SOLUCIÓN POR EL METODO DE INTEGRACIÓN DIRECTA

La ecuación matricial de Ricatti está dada por

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t)$$

con la condición final $P(t_1) = P_1$

Una aproximación directa, es la de considerar la ecuación diferencial como un sistema de n^2 ecuaciones simultáneas diferenciales de primer orden no lineales (asumiendo que P(t) es una matriz nxn) y utilizar una técnica numérica para integrar estas ecuaciones desde t_1 hasta t en intervalos de tiempo $-\delta t$

El método que se utilizará es el de Kutta-Simpson (regla de 3 a 1) cuyo proceso es el siguiente:

La ecuación diferencial puede ser escrita como

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{f}[\underline{P}(t)]$$

Este método utilizado para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden escalares, se ha generalizado para resolver ecuaciones matriciales, obteniéndose los siguientes resultados:

Se denotará la variación negativa de tiempo con el siguiente símbolo δt. Entonces, se obtiene:

$$\underline{P}(t-\delta t) = \underline{P}(t) - \delta t[P0 + 2P1 + 2P2 + P3]/6$$

donde:

$$\underline{P0} = \underline{f}[\underline{P}(t)]$$

$$\underline{P1} = \underline{f}[\underline{P}(t) - 0.5\ \delta t\ \underline{P0}]$$

$$\underline{P2} = \underline{f}[\underline{P}(t) - 0.5\ \delta t\ \underline{P1}]$$

$$\underline{P3} = \underline{f}[\underline{P}(t) - \delta t\ \underline{P2}]$$

El error que se obtiene está dado en el orden de "δ^5".

Se debe ir calculando $\underline{P}(t)$ para $t=t_1-\delta t$, $t_1-2\delta t$, $t_1-3\delta t$, ...

Además, se debe tomar en cuenta las condiciones que debe cumplir δt con relación a las constantes de tiempo del sistema y a la exactitud deseada de la solución.

Es conveniente simetrizar la matriz después de cada paso.

A continuación se revisará el método de Kalman-Englar.

3.3 SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE KALMAN-ENGLAR

Este método es aplicable a la solución de la ecuación de

Ricatti invariante en el tiempo, y se basa en las siguientes expresiones:

De la ecuación [2-46], se tiene:

$$P(t_{i+1}) = [\Theta_{21}(t_{i+1}, t_i) + \Theta_{22}(t_{i+1}, t_i) P(t_i)] [\Theta_{11}(t_{i+1}, t_i) + \Theta_{12}(t_{i+1}, t_i) P(t_i)]^{-1} \qquad 2\text{-}138$$

donde: $t_{i+1} = t_i - \delta t$

Las matrices $\Theta_{ij}(t,to)$ se obtienen de la partición de la matriz de transición $\Theta(t,to)$, en el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

donde:
$$Z = \begin{bmatrix} A & -BR_2^{-1}B^T \\ -D^TR_3D & -A^T \end{bmatrix}$$

Como $\Theta(t_{i+1},t_i) = e(-Z\delta t)$, se puede evaluar mediante una serie de potencias, así:

$$e^M = I + M + M^2/2! + M^3/3! + \ldots\ldots$$

Para llegar a la solución de la ecuación de Ricatti es necesario aplicar repetidamente la ecuación [2-138]. De igual forma al caso anterior es necesario simetrizar la matriz en cada paso.

Para la mayoría de los problemas existe un δt bastante pequeño con lo que se obtiene resultados precisos. Los cálculos pueden ser largos cuando el principal interés es calcular la solución en estado estable.

Esto es en esencia el método.

Con la finalidad de demostrar la validez de estos métodos, a continuación se procederá a realizar ejercicios prácticos, de manera que se pueda observar la utilidad que presentan estos métodos para obtener la solución de la ecuación de Ricatti.

3.4 EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los ejercicios que se plantearán a continuación se resolverán por ambos métodos.

<u>Ejemplo 1.</u>

Es deseable determinar la ley de control que causa la planta

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$

para minimizar el criterio

$$20x_1^2(T) + \int_0^T [z_1^2(t) + 2z_2^3(t) + u^2(t)]\, dt$$

El tiempo final "T" es 10. Encontrar la ley de control óptimo integrando la ecuación de Ricatti.

Solución.

Puesto que los programas implementados se trabajan con matrices, entonces el primer paso es expresar el problema en forma matricial. Luego

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 1 \qquad P(T) = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además cabe anotar que el orden del sistema es n=2 y el número de entradas es m=1.

Estos datos se introducen en el computador y se obtienen los siguientes resultados.

(ver anexo A1).

Ejemplo 2.

Considérese la siguiente planta

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + u(t)$$

Determinar la ley de control que minimiza el criterio

$$\int_0^1 [z_1^2(t) + 0.1z_2^2(t) + 0.1u^2(t)]\ dt$$

Solución.

De igual forma, es necesario obtener las matrices del sistema y de ponderación, así:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 0.1 \qquad P(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El orden del sistema es n=3 y el número de entradas es m=1.

Introduciendo estos datos en el computador se obtienen los siguientes resultados.

(ver anexo A2)

3.5 SUBRUTINAS PARA LOS PROGRAMAS IMPLEMENTADOS

Debido a que las subrutinas son un poco grandes, y con la finalidad de dar mayor continuidad al trabajo; se ha visto conveniente, exponer las subrutinas en el anexo B1.

3.6 COMENTARIOS

En este capítulo se ha obtenido, a más de la solución de la ecuación de Ricatti, la entrada óptima y los vectores de estado óptimos, por medio del computador digital, y con ayuda de los métodos anteriormente mencionados.

Realizando una comparación entre los métodos Runge-Kutta y el de Kalman-Englar, se puede indicar que el primero de ellos tiene mejor precisión y sus resultados son más exactos; además la integración se realiza en los límites de integración deseados.

Esto no ocurre, con el segundo método, ya que en este se debe ingresar el número total de pasos discretos que desea el usuario, contados desde el tiempo final hacia atrás. Luego, este número total de pasos, puede o no incluir el intervalo de integración que requiere el primer método.

Los dos métodos tienen el mismo objetivo, el cual es determinar la matriz solución de la ecuación diferencial de Ricatti; estos métodos son rápidos comparados con los de otros métodos existentes.

Los resultados obtenidos con estos métodos son satisfactorios, con lo que se demuestra la precisión y validez de ellos.

En resumen, para los dos métodos se obtuvieron tablas y gráficos de las siguientes matrices:

- matriz solución de la ecuación diferencial de Ricatti.
- matriz ganancia de realimentación en lazo cerrado.
- vectores de estado óptimos, y
- vector de entrada óptima.

Con respecto a los gráficos, estos indican el comportamiento de la planta para minimizar un cierto criterio. Estos gráficos varían a medida que los valores de P y F se alejan del valor en estado estable. Además, se observa que los vectores de estado y la entrada óptimos tienden a cero; esto se debe a que nuestra referencia es cero. Esta tendencia nos indica que el sistema es estable alrededor del origen.

A continuación se revisará un método para obtener la solución de la ecuación de Ricatti en estado estable.

CAPITULO IV

SOLUCION DE LA ECUACION MATRICIAL ALGEBRAICA DE RICATTI EN EL COMPUTADOR

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se obtendrá la solución de la ecuación matricial algebraica de Ricatti en el computador digital y se aplicará a varios ejercicios.

Se ha escogido un método para resolver la ecuación algebraica de Ricatti; este es, el método de Diagonalización que da la solución numérica, a partir de la ecuación diferencial matricial de Ricatti.

Los ejercicios que se proponen servirán de ayuda para comprobar la validez del programa que se va a implementar, a continuación se revisará el método.

4.2 SOLUCION POR EL METODO DE DIAGONALIZACION

Como se vio anteriormente, la solución en estado estable asintótica se expresa como:

$$\overline{P} = W_{22} W_{12}^{-1}$$

donde: W_{22} y W_{12} se obtienen particionando la matriz W, así:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

Esta matriz consiste de los vectores característicos de la matriz Z donde:

$$Z = \begin{bmatrix} A & -BR_2^{-1}B^T \\ -R_1 & -A^T \end{bmatrix}$$

Las n primeras columnas de W corresponden a los valores característicos de Z con parte real positiva, y las últimas n columnas de W corresponden a los valores característicos de Z con parte real negativa.

Generalmente, algunos o todos los vectores característicos de Z podrían ser complejos, así que las matrices W_{22} y W_{12} serían complejos.

Pero, la aritmética compleja puede evitarse de la siguiente manera:

Si e es un vector característico de Z que corresponde al valor característico Γ con parte real negativa; entonces, su complejo conjugado $\bar{e}$ es también un vector característico que corresponde al valor característico Γ con parte real negativa. Luego, las últimas n columnas de W contienen pares de vectores columna complejos conjugado. Esto siempre se cumple cuando se logra una transformación lineal no singular; así:

$$\begin{bmatrix} W_{12}' \\ W_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} U$$

En cuyo caso, todos los pares de vectores columna complejos conjugados que se encuentran en la col(W_{12} y W_{22}) son reemplazados por dos vectores: real Re(e) e imaginario Im(e)

en la col(W'_{12} y W'_{22}).

Entonces se llega a la siguiente igualdad

$$W'_{22}\ W'^{-1}_{12} = (W_{22}U)\ (W_{12}U)^{-1} = W_{22}\ W^{-1}_{12}$$

lo cual demuestra que W'_{22} y W'_{12} puede ser usada para calcular P, en vez de utilizar W_{22} y W_{12}.

Para finalizar, se darán los pasos para calcular $\overline{P}$:

a) Formar la matriz Z y utilizar alguna técnica numérica para calcular los vectores característicos que corresponden a los valores característicos con parte real negativa.

b) De los n vectores característicos formar la matriz 2n x n

$$\begin{bmatrix} W'_{12} \\ W'_{22} \end{bmatrix}$$

donde W'_{12} y W'_{22} son nxn submatrices, que están formadas de la siguiente manera:

Si e es un vector característico real, entonces forma una de las columnas.

Si e y ë forman un par complejo conjugado, entonces el Re(e) será una columna y el Im(e) será otra columna.

c) Calcular $\overline{P}$:

$$\overline{P} = W'_{22} W'^{-1}_{12}$$

A continuación se aplicará este método en algunos ejercicios.

4.3 EJERCICIOS DE APLICACION

Utilizando los mismos ejemplos anteriores se comprobará que con los tres métodos se obtienen los mismos valores para la parte estable.

Ejemplo 1.

Considere la planta

$$x_1(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$

que minimiza el criterio

$$20x_1^2(T) + \int_0^T [z_1^2(t) + 2z_2^2(t) + u^2(t)]\,dt$$

Encontrar la ley de control óptimo en estado estable.

Solución.

Puesto que los programas implementados se trabajan con matrices, entonces el primer paso es expresar el problema en forma matricial. Luego

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 1$$

Además cabe anotar que el orden del sistema es n=2 y el número de entradas es m=1.

Estos datos se introducen en el computador y se obtienen los siguientes resultados.

(ver anexo A3).

Ejemplo 2.

Considérese la siguiente planta

$$x_1(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = x_3(t)$$

$$x_3(t) = -2x_3(t) + u(t)$$

Determinar la ley de control en estado estable que minimiza el criterio

$$\int_0^1 [z_1^2(t) + 0.1z_2^2(t) + 0.1u^2(t)]\ dt$$

Solución.

De igual forma, es necesario obtener las matrices del sistema y de ponderación, así:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 0.1$$

El orden del sistema es n=3 y el número de entradas es m=1.

Introduciendo estos datos en el computador se obtienen los siguientes resultados.

(ver anexo A4).

4.4 SUBRUTINAS PARA LOS PROGRAMAS IMPLEMENTADOS

Debido a que las subrutinas son un poco grandes, y con la finalidad de dar mayor continuidad al trabajo; se ha visto conveniente, exponer las subrutinas en el anexo B2.

4.5 COMENTARIOS

Como se puede observar la eficiencia de este método es aceptable, debido a que los subprogramas para calcular los vectores característicos es un poco largo, sin embargo sus resultados son satisfactorios.

sistema y de ponderación, así:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 0.1$$

El orden del sistema es n=3 y el número de entradas es m=1.

Introduciendo estos datos en el computador se obtienen los siguientes resultados.

(ver anexo A4).

4.4 SUBRUTINAS PARA LOS PROGRAMAS IMPLEMENTADOS

Debido a que las subrutinas son un poco grandes, y con la finalidad de dar mayor continuidad al trabajo; se ha visto conveniente, exponer las subrutinas en el anexo B2.

4.5 COMENTARIOS

Como se puede observar la eficiencia de este método es aceptable, debido a que los subprogramas para calcular los vectores característicos es un poco largo, sin embargo sus resultados son satisfactorios.

Debido a la configuración de la matriz Z , los valores característicos de esta matriz no tiene parte real cero, y los valores característicos en lazo cerrado y en estado estable son precisamente los valores característicos de Z que tienen parte real negativa.

Además como se observó, en los gráficos de los vectores de estado y entrada óptimos; al variar el valor de la matriz de realimentación en estado estable, la respuesta del sistema cambia en la misma medida en que estos valores se alejen del valor verdadero en estado estable, obteniéndose diferentes tipos de respuestas, entre ellos: oscilatorio, subamortiguado y sobreamortiguado.

Es así que de acuerdo a las características que se desea tener en la señal de salida, se puede variar la matriz de realimentación.

Por último, se puede indicar que la precisión de este programa es menor a los dos métodos anteriores.

En el último capítulo se darán las conclusiones finales.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

5.1 ANALISIS DEL TRABAJO TERMINADO

- Términos como: "control óptimo", "ecuación de Rica-tti", "criterio de rendimiento", etc., son términos que se han considerado durante el desarrollo del tema; el cual, que se cree que al finalizar el presente estudio se consigue dar una visión más clara sobre cada uno de ellos.
- El análisis que se realizó en la ecuación diferencial matricial de Ricatti, no se queda solo en la base de un conocimiento matemático, sino que a la vez relaciona esta ecuación a la solución de un problema particular del control óptimo, "El Problema del Regulador Cuadrático Lineal".

  Es por esto, que fue necesario estudiar la Teoría de Control Optimo, y así buscar un camino adecuado que permita obtener la ecuación diferencial de Ricatti. Esta inquietud se originó al realizar el análisis del Problema del Regulador Lineal Determinístico.
- Para un completo estudio de la ecuación de Ricatti, en el dominio del tiempo, fue necesario analizar el Problema del Regulador en estado estable, y llegar a su solución; ello condujo a obtener la ecuación algebraica de Ricatti.
- Es aquí donde se demuestra que la ecuación diferencial escalar de Ricatti es un caso particular de la ecuación diferencial matricial de Ricatti.

- La ecuación algebraica de Ricatti nos indica, que si la matriz de Ricatti $\underline{P}$ es constante; entonces, el sistema óptimo resultante es lineal e invariante en el tiempo.
- A manera de introducción, el siguiente subtema que se analizó, fue el comportamiento del sistema cuando se presentan perturbaciones, y la solución a este problema; es por eso que el subtema lleva como título: "El Problema del Regulador Lineal Optimo Estocástico".
- El último subtema del Capítulo 2 fue, el Problema del Regulador Optimo Lineal Deteminístico Discreto. Después de analizarlo se concluye que el Problema del Regulador Continuo y el Discreto son duales; esto es, que las propiedades y las soluciones tienen la misma estructura.
- En los capítulos 3 y 4, se obtienen las soluciones de las ecuaciones de Ricatti (diferencial y algebraica) por medio de métodos computacionales. En estos capítulos se utilizaron técnicas iterativas para hallar sus soluciones.

5.2 REALIZACION DE LOS OBJETIVOS

- El alcanzar los objetivos fueron la meta de este trabajo.
- Los objetivos que se plantearon en el Capítulo I se han logrado, y de esto puede dar testimonio un lector neutral que lea el presente trabajo.

5.3 CONCLUSIONES

- La importancia de la Teoría de Control Optimo; se debe, a que la teoría moderna de control está basada en: técnicas variacionales, teoría convencional de servomecanismos y el empleo de computadores de alta velocidad; es por esto, que los campos de aplicación de los Sistemas de Control Optimo son numerosos.
- Debido a que es muy importante el estudio del Control Optimo se deduce que, también son de gran importancia los factores que intervienen en un problema de Control Optimo, como es el caso de la entrada óptima u^*.
- En los problemas reguladores, $\underline{u}^*$ se obtiene de la matriz de Ricatti $\underline{P}$, y siendo los sistemas reguladores de gran interés en el Control Optimo, es evidente que obtener la matriz de Ricatti juega un papel muy importante.
- Por lo mencionado anteriormente, se deduce que la parte fundamental de un problema de regulación de Control Optimo es obtener la entrada óptima $\underline{u}^*$.
- Después de encontrar la entrada óptima; entonces, se está en la posibilidad de diseñar un controlador adecuado, para mantener una salida deseada.
- En estas conclusiones no se especifican las ecuaciones de Ricatti (algebraica y diferencial), ya que las dos ecuaciones persiguen el mismo objetivo, el cual es encontrar

el control óptimo; es por esto, que se habla en forma general.

- Además se llega a deducir que, la teoría de control lineal con realimentación de estado puede ser integrado a la teoría de reconstrucción de estado, para así lograr una sola teoría denominada "Teoría de Control Optimo Lineal Realimentada".
- Con respecto a las técnicas de programación utilizadas en este trabajo, se mencionarán las ventajas y desventajas encontradas:

  Programa Runge-Kutta.- Es un programa que tiene la mejor precisión, la ejecución del programa es rápida, se obtienen valores de P y F, que se encuentran dentro del rango de integración, pero esto no asegura tener la solución en estado estable; como se observó anteriormente, estos valores se utilizan para calcular los vectores óptimos; además se puede obtener el valor en estado estable si el rango de integración es grande, caso contrario los gráficos que se obtienen no serán los reales.

  Programa Kalman-Englar.- Este método tiene menor precisión al programa anterior, su velocidad de operación es parecida al programa de Runge-Kutta, tiene la desventaja de llegar o no a la solución en estado estable, ya que depende del número de pasos discretos que se ingresaron durante la ejecución del programa. Este número debe estar en el orden de las centenas para lograr la solución en estado estable, y poder calcular los vectores óptimos.

Programa de Diagonalización.- Este programa es grande, y el tiempo de ejecución se hace más largo a medida que la dimensión del sistema se incrementa. Con esta técnica se obtiene la solución en estado estable con una precisión aceptable. Cabe señalar, que por ser este programa muy grande, puede ser sustituido por otra técnica de programación mas simple.

- Estos métodos son de gran utilidad por su rapidez, confiabilidad y precisión; es por esto que los resultados son satisfactorios.
- A pesar de que los programas implementados pueden trabajar con cualquier orden del sistema, se recomienda utilizar sistemas de hasta orden tercero y en computadores de alta velocidad, caso contrario el trabajo se vuelve largo y tedioso.
- Cabe mencionar que los programas se realizaron en el lenguaje de programación Quick Basic V4.5, debido a que este paquete es muy versátil y fácil de entender su programación, se pueden utilizar computadores IBM o computadores compatibles con IBM, permitiendo de esta manera llegar a la mayor parte de usuarios.

- De los gráficos que se obtuvieron; se puede indicar que, estos muestran el comportamiento de un sistema en el dominio del tiempo, y debido a que nuestra referencia es cero, tanto los gráficos de los vectores de estado óptimos y el gráfico de la entrada óptima tienden al valor de nuestra referencia. Además se observó que, si se varía el valor de la matriz de realimentación óptima, también variará la salida del sistema, de esta manera su pueden variar las diferentes especificaciones que se tienen en un sistema como maximo sobreimpulso, tiempo de establecimiento, estabilidad, etc..
- Resulta difícil enumerar todas las conclusiones que se ha obtenido en este trabajo; sin embargo, quienes tengan la oportunidad de seguir paso a paso el contenido de este trabajo, notarán que se obtienen a lo largo de todos los capítulos, otras conclusiones; de tal importancia, dependiendo de la manera de como se lo enfoque.

A N E X O S

ANEXO A1

En este anexo se encuentran las siguientes tablas correspondientes al método de Runge-Kutta:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Tabla de valores del vector *X*

4.- Tabla de valores del vector *U*

Cabe señalar, que al presentar un grupo de seis columnas de valores en una sola hoja, ha sido necesario presentar ciertos datos que son de interés como son: valores iniciales, valores finales, valores donde se presentan los máximos.

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1)	=	20.00000	19.73735	18.09296	14.70459	10.68249	7.447940
P(1 2)	=	0.00000	2.15754	4.26996	5.47315	5.31644	4.311787
P(2 1)	=	0.00000	2.15754	4.26996	5.47315	5.31644	4.311787
P(2 2)	=	0.00000	0.40140	1.61933	3.17944	4.50703	5.222804
t	=	10.00000	9.90000	9.80000	9.70000	9.60000	9.50000

PRESIONE {C} PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1) =	5.68311	5.68486	5.68636	5.68765	5.68876	5.689723
P(1 2) =	0.40753	0.40847	0.40928	0.40997	0.41057	0.411085
P(2 1) =	0.40753	0.40847	0.40928	0.40997	0.41057	0.411085
P(2 2) =	4.60952	4.61003	4.61046	4.61084	4.61116	4.611439
t =	4.60000	4.50000	4.40000	4.30000	4.20000	4.10000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

==

P(1 1)	=	5.69549	5.69550	5.69550	5.69550	5.695507
P(1 2)	=	0.41420	0.41420	0.41420	0.41420	0.414208
P(2 1)	=	0.41420	0.41420	0.41420	0.41420	0.414208
P(2 2)	=	4.61312	4.61312	4.61312	4.61312	4.613122
t	=	0.40000	0.30000	0.20000	0.10000	0.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
F( 1  1 ) =  0.00000  2.15754  4.26996  5.47315  5.31644  4.31797
F( 1  2 ) =  0.00000  0.49148  1.51933  3.17944  4.59783  5.22504
    t     = 10.00000  9.90000  9.80000  9.70000  9.60000  9.50000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

F(1 1)	=	0.40753	0.40847	0.40928	0.40997	0.41057	0.41108
F(1 2)	=	4.60952	4.61003	4.61046	4.61084	4.61116	4.61143
t	=	4.60000	4.50000	4.40000	4.30000	4.20000	4.10000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
F( 1  1 ) = 0.41420  0.41420  0.41420  0.41420  0.414208
F( 1  2 ) = 4.61312  4.61312  4.61312  4.61312  4.613122
     t    = 0.40000  0.30000  0.20000  0.10000  0.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

X(1 1)	=	1.00000	0.99247	0.97153	0.94132	0.90496	0.864792
X(2 1)	=	0.00000	-0.15623	-0.26544	-0.33931	-0.38679	-0.414649
t	=	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI

RUNGE-KUTTA

X(1 1)	=	0.04858	0.04534	0.04231	0.03948	0.03685	0.034396
X(2 1)	=	-0.03341	-0.03116	-0.02907	-0.02711	-0.02528	-0.023578
t	=	4.80000	4.90000	5.00000	5.10000	5.20000	5.30000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
X( 1  1 ) =  0.00245  0.00206  0.00159  0.00103  0.000337
X( 2  1 ) = -0.00351 -0.00423 -0.00513 -0.00625 -0.007636
    t     =  9.60000  9.70000  9.80000  9.90000 10.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
u( 1  1 ) = -0.41420  0.30965  0.82210  1.17542  1.40947  1.55629
t         =  0.00000  0.10000  0.20000  0.30000  0.40000  0.50000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

u(1 1) = 1.63397 1.66504 1.66113 1.63227 1.58605 1.528134
t = 0.60000 0.70000 0.80000 0.90000 1.00000 1.10000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
u( 1  1 ) =  0.00280  0.00215  0.00149  0.00079  0.00000
    t     =  9.60000  9.70000  9.80000  9.90000 10.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

En este anexo se encuentran las siguientes tablas correspondientes al método de Kalman-Englar:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

Cabe señalar, que al presentar un grupo de seis columnas de valores en una sola hoja, ha sido necesario presentar ciertos datos que son de interés como son: valores iniciales, valores finales, valores donde se presentan los máximos.

En este caso no se presentan las tablas corespondientes a los vectores *X* y *U*; debido a que son las mismas tablas obtenidas con el método de Runge-Kutta, esto se determina ya que todos los valores que tienen estos dos métodos (de *P* y *F*) son iguales.

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	20.00000	19.73706	18.09321	14.79266	10.68212	7.451704
P(1 2)	=	0.00000	2.15705	4.27045	5.47242	5.31431	4.310687
P(2 1)	=	0.00000	2.15705	4.27045	5.47242	5.31430	4.310585
P(2 2)	=	0.00000	0.48207	1.62073	3.10115	4.50058	5.223212
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE {C} PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	5.68315	5.68489	5.68639	5.68768	5.68879	5.689744
P(1 2)	=	0.40755	0.40848	0.40929	0.40998	0.41058	0.411095
P(2 1)	=	0.40755	0.40848	0.40929	0.40998	0.41058	0.411095
P(2 2)	=	4.60953	4.61004	4.61047	4.61084	4.61116	4.611445
t	=	54.00000	55.00000	56.00000	57.00000	58.00000	59.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
P( 1  1 ) =  5.69550  5.69550  5.69550  5.69551  5.695512
P( 1  2 ) =  0.41420  0.41420  0.41420  0.41420  0.414209
P( 2  1 ) =  0.41420  0.41420  0.41420  0.41420  0.414209
P( 2  2 ) =  4.61312  4.61312  4.61312  4.61312  4.613125
     t    = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE {C} PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	0.00000	2.15785	4.27845	5.47242	5.31438	4.318585
P(1 2)	=	0.00000	0.48287	1.62873	3.19115	4.59958	5.222212
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
F( 1  1 ) =  0.40755  0.40840  0.40929  0.40998  0.41058  0.41095
F( 1  2 ) =  4.60953  4.61004  4.61047  4.61084  4.61116  4.61145
    t     = 54.00000 55.00000 56.00000 57.00000 58.00000 59.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
P( 1  1 ) =  0.41420  0.41420  0.41420  0.41420  0.414209
P( 1  2 ) =  4.61312  4.61312  4.61312  4.61312  4.613125
    t     = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

A continuación se presentan los gráficos correspondientes a los dos métodos anteriores:

1.- Gráficos de la matriz *P*

2.- Gráficos de la matriz *F*

3.- Gráficos del vector *X*

4.- Gráficos del vector *U*

Los dos primeros gráficos se obtienen con los valores de *P* y *F* calculadas con los dos métodos, los gráficos siguientes son calculados con variaciones de la matriz *F*. así:

a) gráfico 1 y 2 corresponden a los valores de *P* y *F* calculadas con cualquiera de los métodos.

b) gráfico 3 corresponde a los valores de *F* siguientes:

$$F = [\ 0 \quad 6\ ]$$

c) gráfico 4 corresponde a los valores de *F* siguientes:

$$F = [\ 4 \quad 7\ ]$$

d) gráfico 3 corresponde a los valores de *F* siguientes:

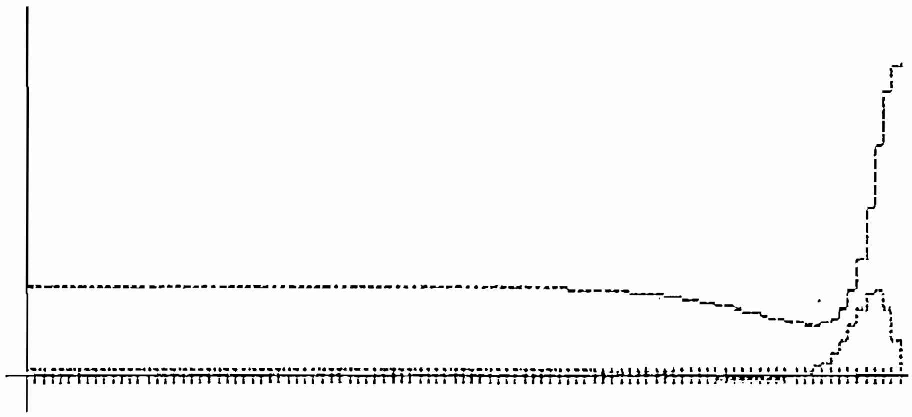
$$F = [\ 5 \quad 2\ ]$$

e) gráfico 4 corresponde a los valores de *F* siguientes:

$$F = [\ 3 \quad 3\ ]$$

GRAFICO DE P(11) Y P(12)

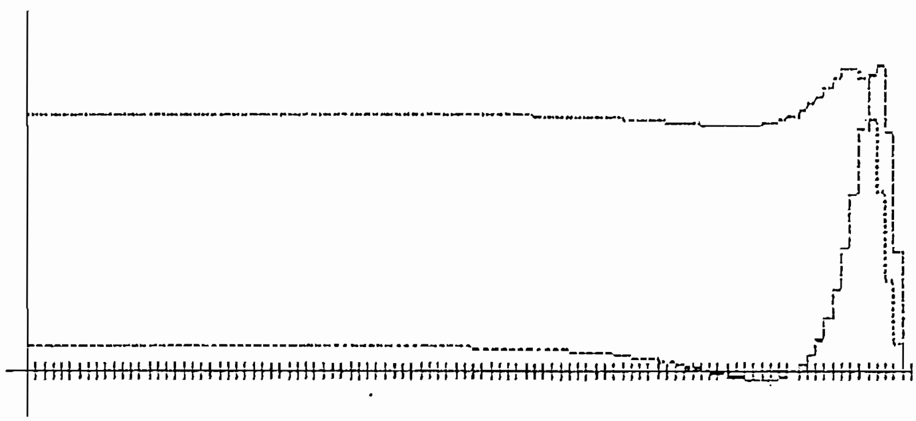
P(11) ------
P(12) ——
Pmax = 20.000



t = 0.

GRAFICO DE F(11) Y F(12)

F(11) ——
F(12) ——
Fmax = 5.473



t = 0.

PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

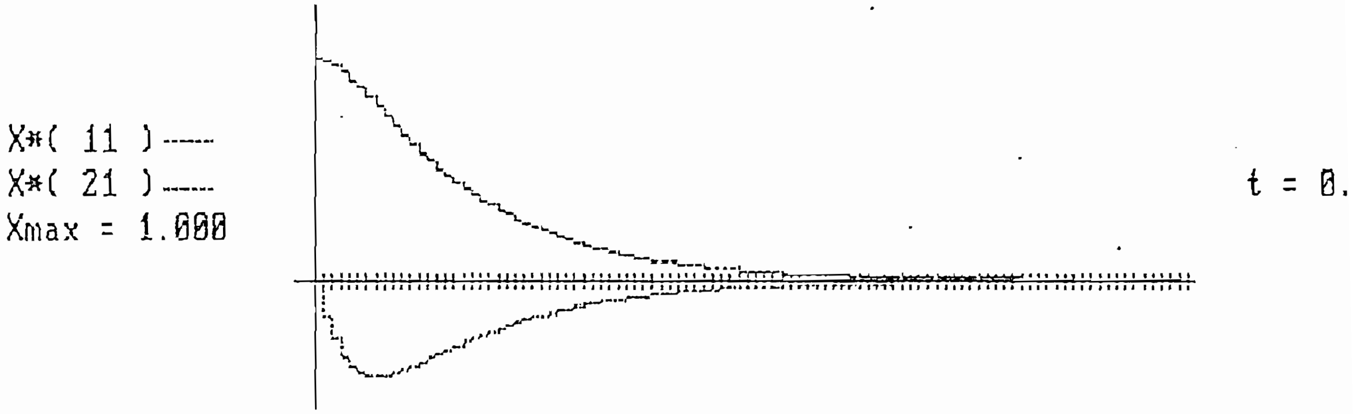
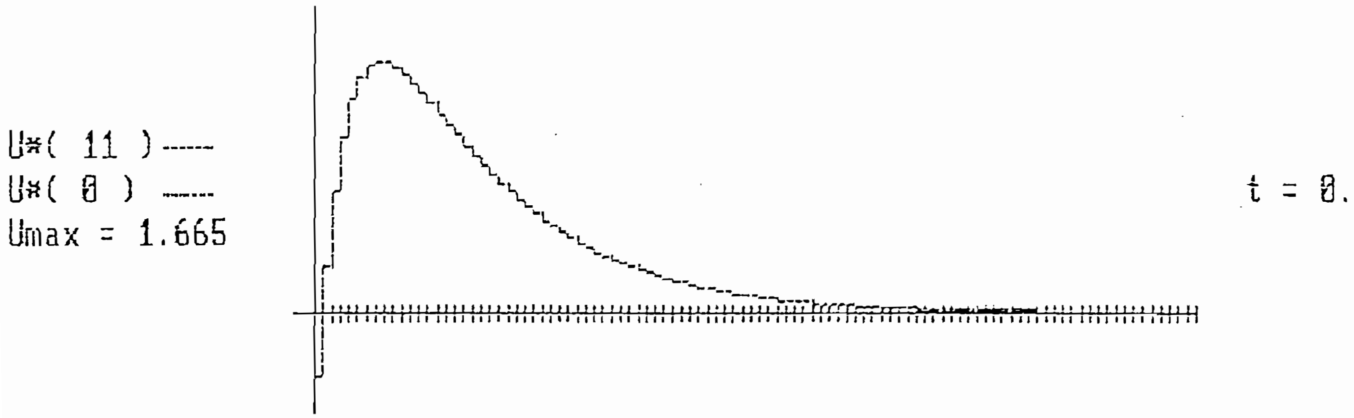


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

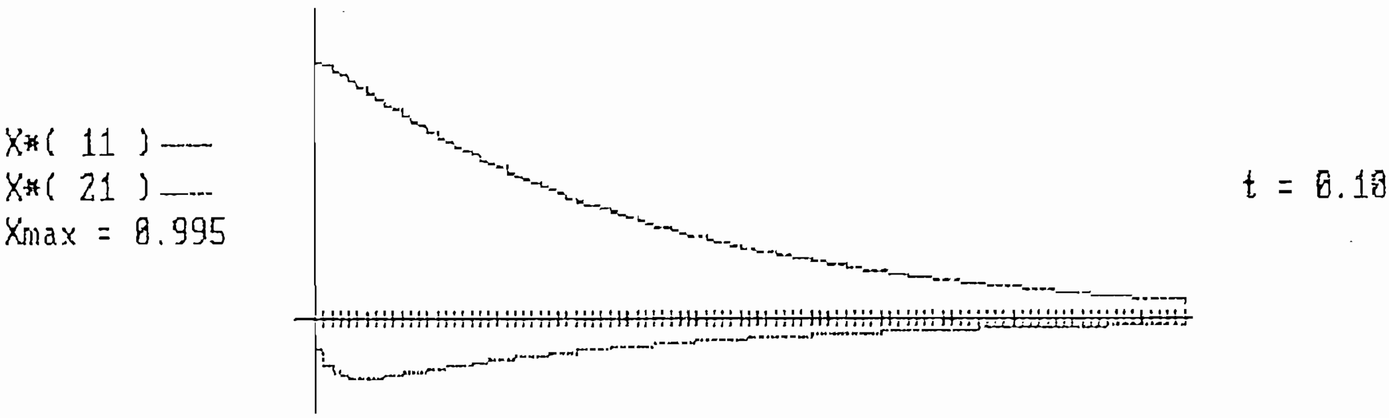
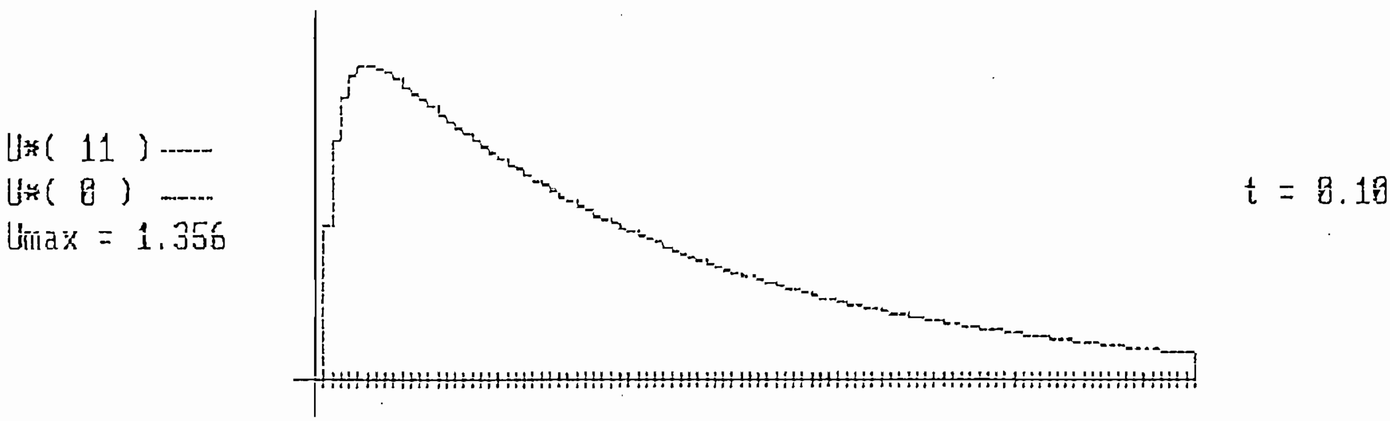


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

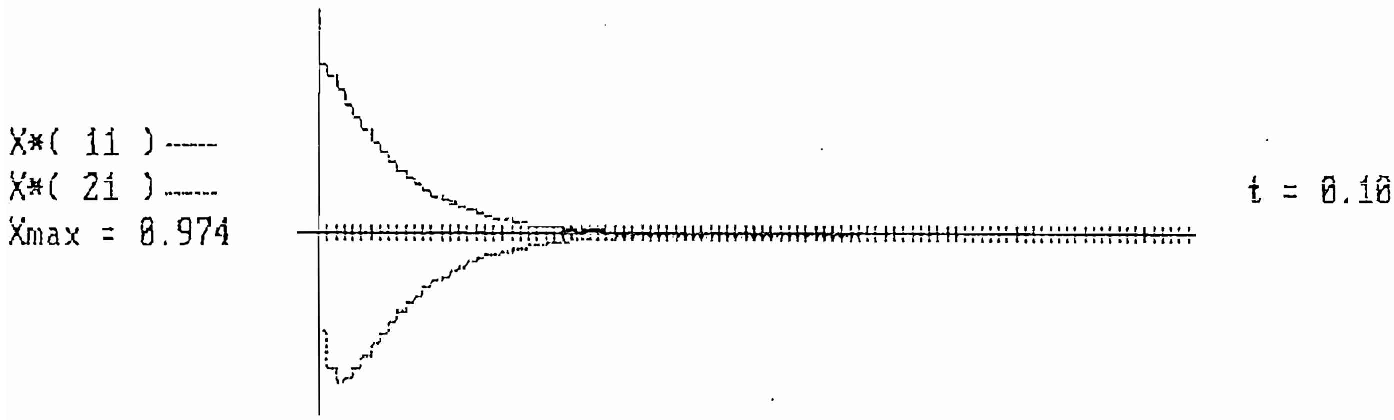
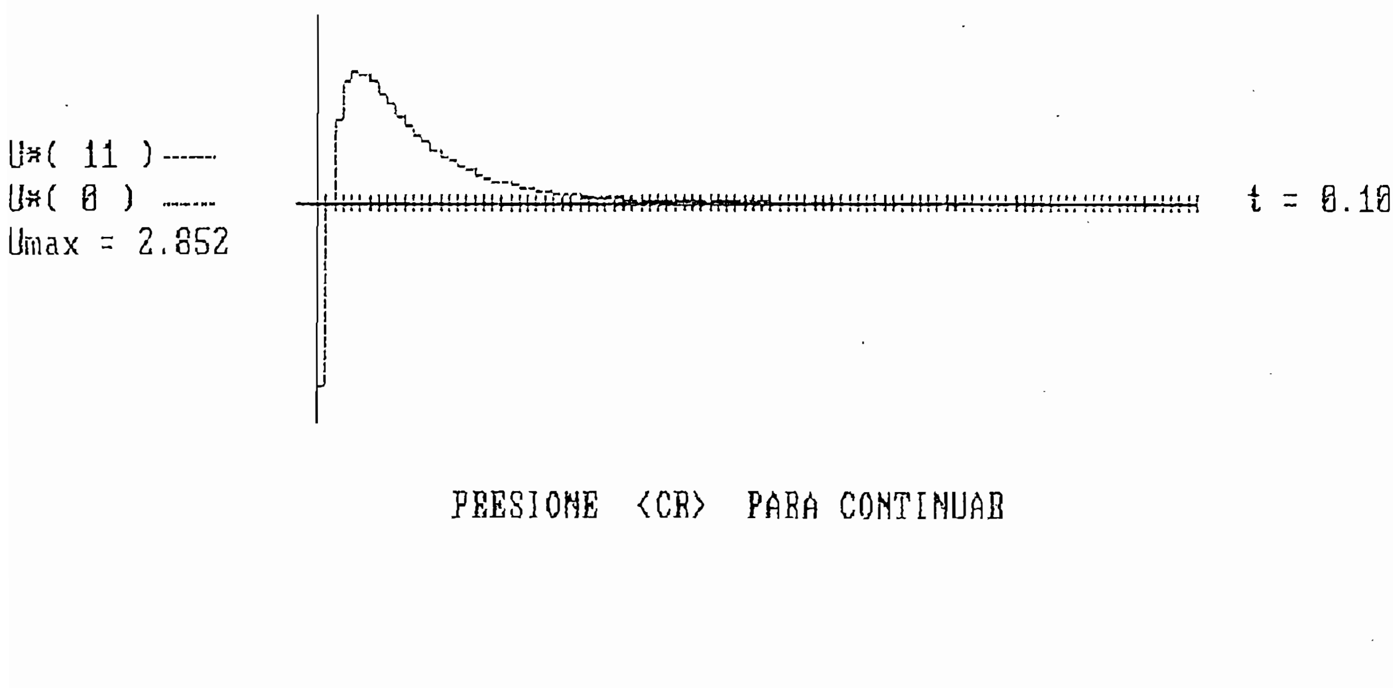


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

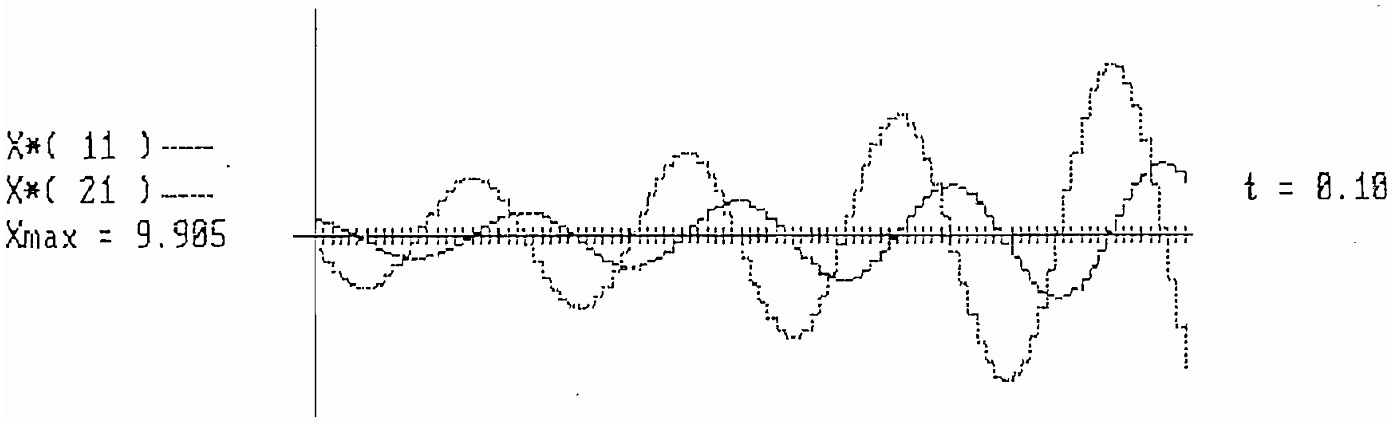
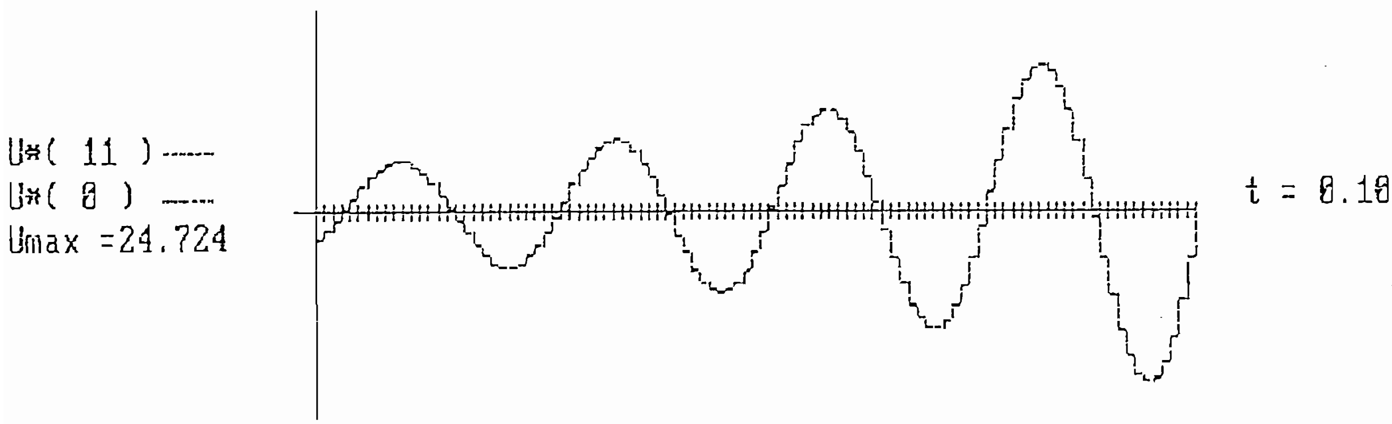


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

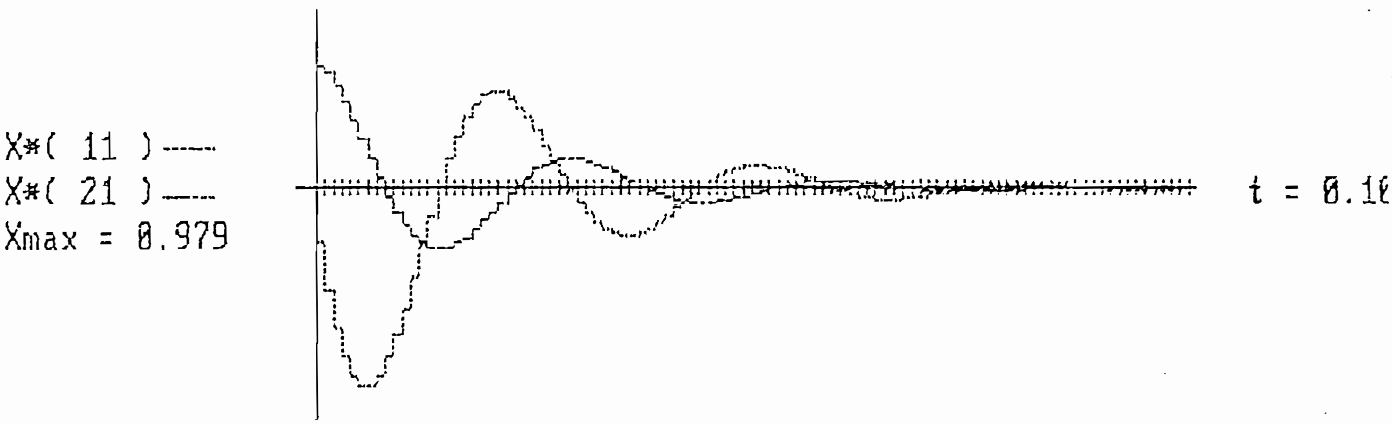
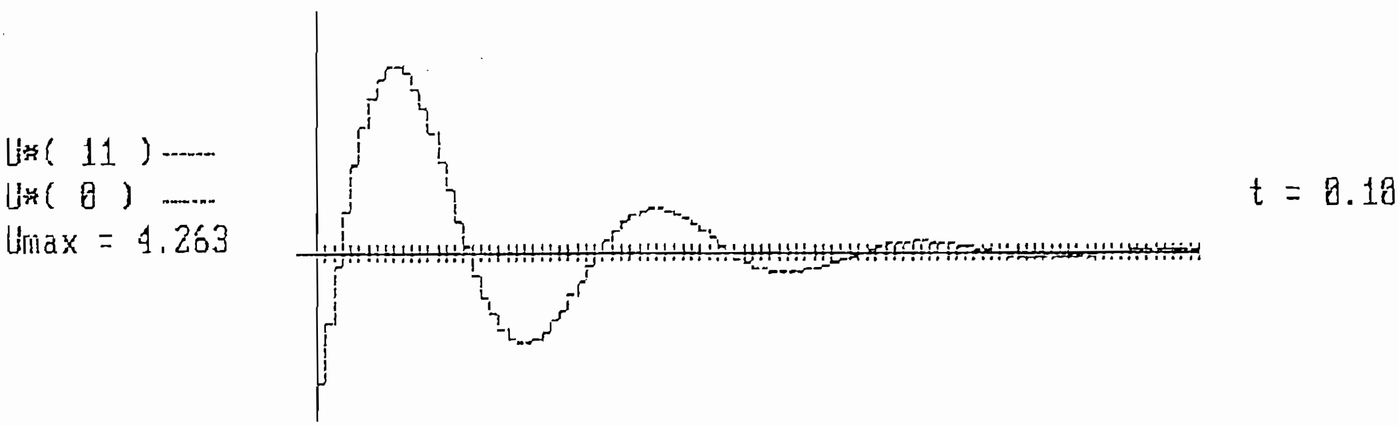


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

A continuación se encuentran las siguientes tablas correspondientes al método de Runge-Kutta:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

Estas tablas de valores corresponden a variaciones de la matriz de ponderación *R_2*, así:

$$R_2 = 10$$

El resto de valores son los mismos

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1)	=	20.00000	19.87188	19.16613	17.73576	15.45577	12.417076
P(1 2)	=	0.00000	2.18832	4.66564	7.26391	9.48272	10.739738
P(2 1)	=	0.00000	2.18832	4.66564	7.26391	9.48272	10.739738
P(2 2)	=	0.00000	0.49861	1.78026	[illegible]	8.10434	13.558322
t	=	10.00000	9.90000	9.80000	9.70000	9.60000	9.50000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1)	=	29.65284	30.69416	31.69990	32.66252	33.57552	34.433727
P(1 2)	=	-7.91174	-7.25889	-6.61413	-5.98489	-5.37777	-4.798378
P(2 1)	=	-7.91174	-7.25889	-6.61413	-5.98489	-5.37777	-4.798378
P(2 2)	=	34.89292	35.29737	35.70700	36.11549	36.51704	36.936559
t	=	6.39999	6.29999	6.19999	6.09999	5.99999	5.89999

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1) =	41.74144	41.74161	41.74176	41.74188	41.741989
P(1 2) =	0.48719	0.48733	0.48745	0.48755	0.487637
P(2 1) =	0.48719	0.48733	0.48745	0.48755	0.487637
P(2 2) =	40.72996	40.73007	40.73017	40.73025	40.730324
t =	0.40000	0.30000	0.20000	0.10000	0.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

===

F(1 1) =	0.00000	0.21883	0.46856	0.72639	0.94927	1.073974
F(1 2) =	0.00000	0.04896	0.17092	0.42476	0.81943	1.355832
t =	10.00000	9.90000	9.80000	9.70000	9.60000	9.50000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
P( 1  1 ) = -0.79117 -0.72588 -0.66141 -0.59849 -0.53777 -0.479839
P( 1  2 ) =  3.48929  3.52973  3.57070  3.61154  3.65170  3.690656
    t     =  6.39999  6.29999  6.19999  6.09999  5.99999  5.89999
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1)	=	0.04871	0.04873	0.04874	0.04875	0.048764
P(1 2)	=	4.07299	4.07300	4.07301	4.07302	4.073032
t	=	0.40000	0.30000	0.20000	0.10000	0.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

A continuación se presentan las siguientes tablas correspondientes al método de Kalman-Englar:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Tabla de valores del vector *X*

4.- Tabla de valores del vector *U*

Estas tablas de valores corresponden a variaciones de la matriz de ponderación *R_2*, así:

$$R_2 = 10$$

El resto de valores son los mismos

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	20.00000	19.87199	19.16646	17.78656	15.40710	12.419080
P(1 2)	=	0.00000	2.18821	4.68530	7.26320	9.48155	10.738150
P(2 1)	=	0.00000	2.18821	4.68530	7.26320	9.48155	10.730153
P(2 2)	=	0.00000	0.49894	1.70111	4.24912	8.18545	13.552059
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
P( 1  1 ) = 29.66978 30.70184 31.70726 32.66951 33.58210 34.439061
P( 1  2 ) = -7.98626 -7.25353 -6.60896 -5.97994 -5.37308 -4.793972
P( 2  1 ) = -7.98628 -7.25355 -6.60897 -5.97595 -5.37309 -4.793984
P( 2  2 ) = 34.89671 35.30111 35.71054 36.11990 36.52070 36.989740
    t     = 36.00000 37.00000 38.00000 39.00000 40.00000 41.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	41.74147	41.74164	41.74179	41.74191	41.742016
P(1 2)	=	0.48720	0.48734	0.48746	0.48756	0.487648
P(2 1)	=	0.48720	0.48734	0.48746	0.48756	0.487644
P(2 2)	=	40.72996	40.73009	40.73018	40.73026	40.730335
t	=	96.00000	97.00000	98.00000	99.00000	100.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1) =	0.00000	0.21882	0.46353	0.72632	0.94915	1.073815
P(1 2) =	0.00000	0.04859	0.17911	0.42491	0.81964	1.355281
t =	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
F( 1  1 ) = -0.79862 -0.72535 -0.66089 -0.59799 -0.53731 -0.479398
F( 1  2 ) =  3.48967  3.53011  3.57196  3.61199  3.65204  3.690974
    t     = 36.00000 37.00000 38.00000 39.00000 40.00000 41.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
F( 1  1 ) =  0.04872  0.04873  0.04874  0.04875  0.048764
F( 1  2 ) =  4.07299  4.07300  4.07301  4.07302  4.073034
    t     = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

X(1 1)	=	1.00000	0.99439	0.97849	0.95483	0.92544	0.891989
X(2 1)	=	0.00000	-0.11598	-0.20404	-0.25973	-0.31730	-0.358351
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
X( 1  1 ) =  0.00189  0.00176  0.00164  0.00153  0.001432
X( 2  1 ) = -0.00132 -0.00123 -0.00115 -0.00107 -0.000999
    t     = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

U(1 1) = 1.47253 1.52417 1.54630 1.54539 1.52671 1.49512
t = 6.00000 7.00000 8.00000 9.00000 10.00000 11.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
u( 1  1 ) =  0.00529  0.00493  0.00460  0.00429  0.004000
     t     = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

A continuación se presentan los gráficos correspondientes a los dos métodos anteriores:

1.- Gráficos de la matriz *P*

2.- Gráficos de la matriz *F*

3.- Gráficos del vector *X*

4.- Gráficos del vector *U*

Los gráficos se obtienen con los valores de *P* y *F* calculadas con los dos métodos anteriores y con la variación de la matriz de ponderación $*R_2*$.

GRAFICO DE P(11) Y P(12)

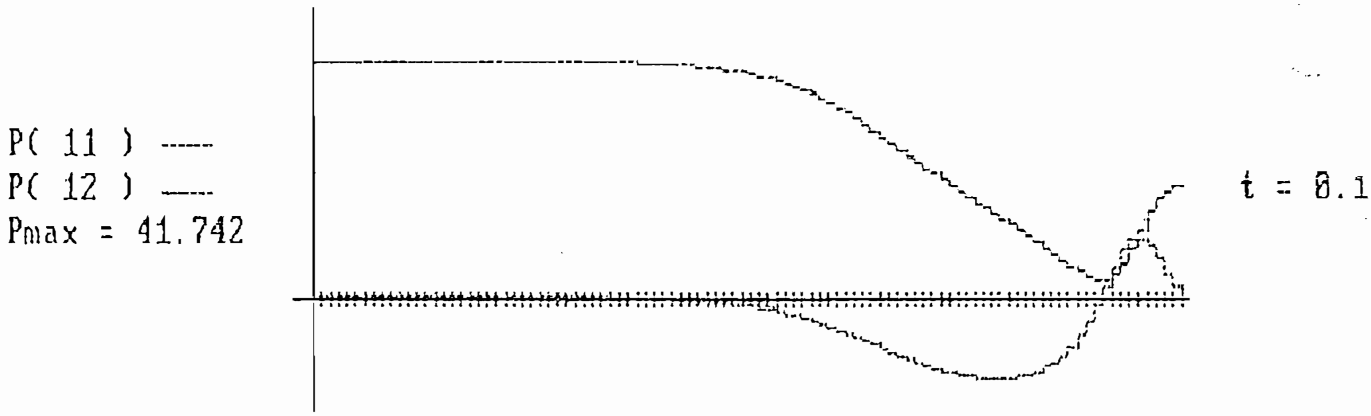
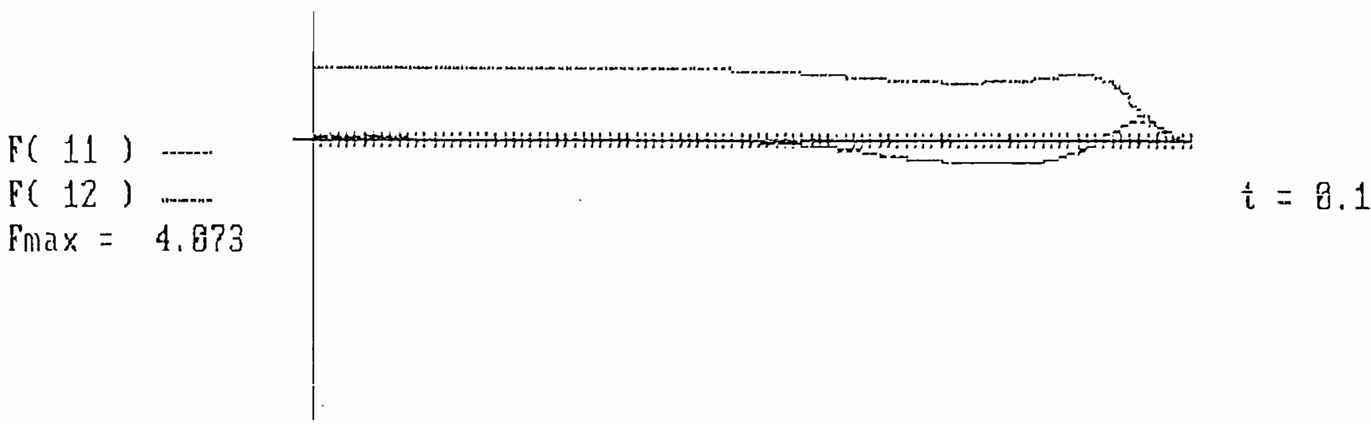


GRAFICO DE F(11) Y F(12)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

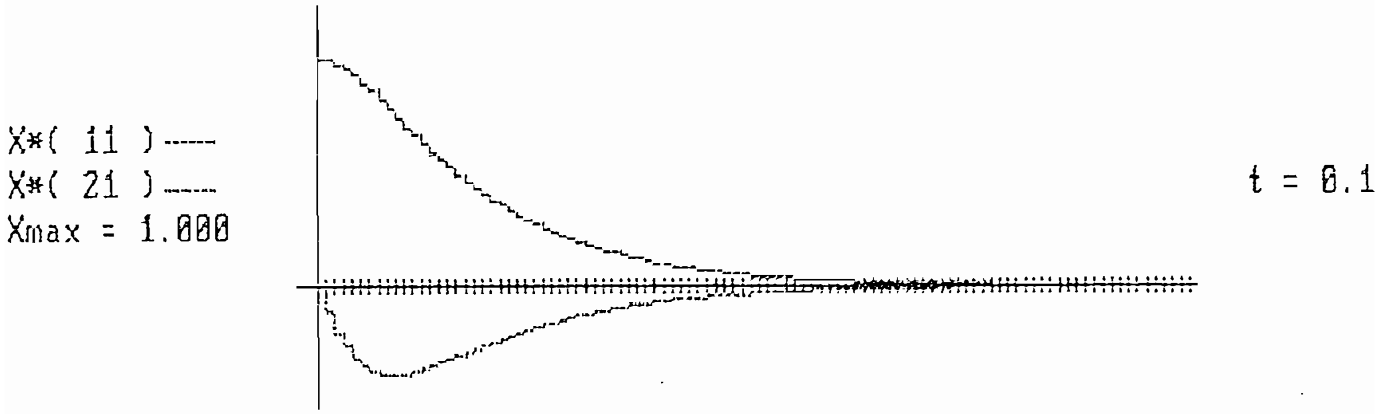
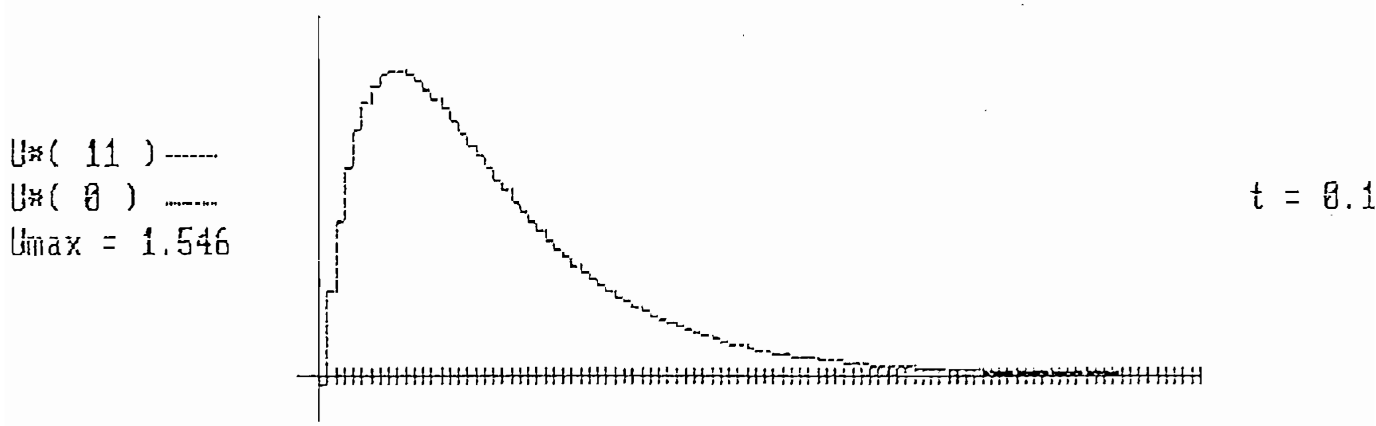


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

ANEXO A2

En este anexo se encuentran las siguientes tablas correspondientes al método de Runge-Kutta:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Tabla de valores del vector *X*

4.- Tabla de valores del vector *U*

Cabe señalar, que al presentar un grupo de seis columnas de valores en una sola hoja, ha sido necesario presentar ciertos datos que son de interés como son: valores iniciales, valores finales, valores donde se presentan los máximos.

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI

RUNGE-KUTTA

P(1 1) =	0.00000	0.05000	0.10000	0.15000	0.20000	0.249998
P(1 2) =	0.00000	0.00125	0.00500	0.01125	0.01999	0.031247
P(1 3) =	0.00000	0.00002	0.00015	0.00052	0.00121	0.002308
P(2 1) =	0.00000	0.00125	0.00500	0.01125	0.01999	0.031247
P(2 2) =	0.00000	0.00504	0.01033	0.01612	0.02266	0.030203
P(2 3) =	0.00000	0.00012	0.00048	0.00107	0.00193	0.003092
P(3 1) =	0.00000	0.00002	0.00015	0.00052	0.00121	0.002308
P(3 2) =	0.00000	0.00012	0.00048	0.00107	0.00193	0.003092
P(3 3) =	0.00000	0.00000	0.00002	0.00009	0.00021	0.000401
t =	1.00000	0.95000	0.90000	0.85000	0.80000	0.75000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1)	=	0.89091	0.93730	0.982619
P(1 2)	=	0.39549	0.43774	0.481176
P(1 3)	=	0.07926	0.09069	0.102784
P(2 1)	=	0.39549	0.43774	0.481176
P(2 2)	=	0.32295	0.36630	0.412775
P(2 3)	=	0.07522	0.08769	0.101363
P(3 1)	=	0.07926	0.09069	0.102784
P(3 2)	=	0.07522	0.08769	0.101363
P(3 3)	=	0.01931	0.02348	0.027132
t	=	0.10000	0.05000	0.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

F(1 1)	=	0.00000	0.00028	0.00158	0.00522	0.01205	0.022032
F(1 2)	=	0.00000	0.00121	0.00480	0.01079	0.01938	0.030921
F(1 3)	=	0.00000	0.00003	0.00029	0.00093	0.00212	0.004913
t	=	1.00000	0.95000	0.90000	0.85000	0.80000	0.75000

PRESIONE {C} PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

F(1 1)	=	0.79262	0.90696	1.027842
F(1 2)	=	0.75223	0.87691	1.013629
F(1 3)	=	0.19317	0.23044	0.271276
(	=	0.10000	0.05000	0.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

X(1 1)	=	1.00000	0.99877	0.99520	0.98942	0.98158	0.971832
X(2 1)	=	0.00000	-0.04850	-0.09405	-0.13669	-0.17646	-0.213452
X(3 1)	=	-1.00000	-0.94082	-0.88205	-0.82416	-0.76754	-0.712528
t	=	0.00000	0.05000	0.10000	0.15000	0.20000	0.25000

PRESIONE <C> PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
X( 1  1 ) =  0.72519  0.70035  0.675015
X( 2  1 ) = -0.49166 -0.50196 -0.511277
X( 3  1 ) = -0.21640 -0.19575 -0.177102
     t    =  0.90000  0.95000  1.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

P(1 1) = -0.75656 -0.64689 -0.54767 -0.45851 -0.37899 -0.30565
t = 0.00000 0.05000 0.10000 0.15000 0.20000 0.25000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
RUNGE-KUTTA

```
U( 1  1 ) = 0.00127  0.00047  0.000000
 t        = 0.90000  0.95000  1.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

A continuación se presentan los gráficos correspondientes al método de Runge-Kutta:

1.- Gráficos de la matriz *P*

2.- Gráficos de la matriz *F*

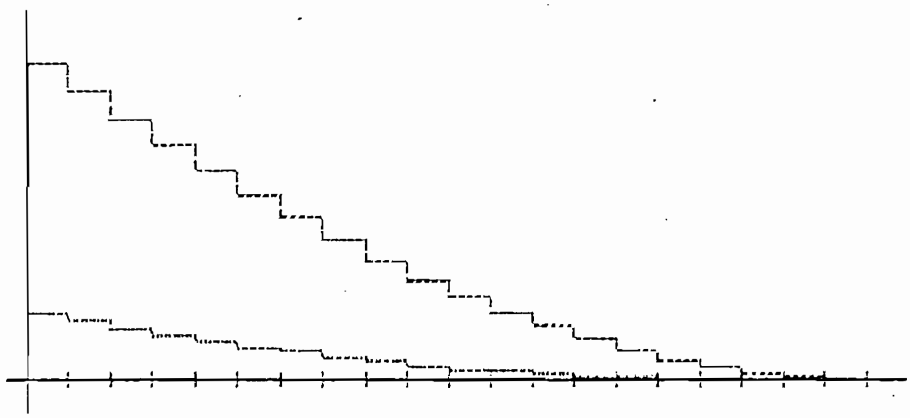
3.- Gráficos del vector *X*

4.- Gráficos del vector *U*

Los gráficos se obtienen con los valores de *P* y *F* calculadas con el método mencionado anteriormente.

GRAFICO DE P(12) Y P(13)

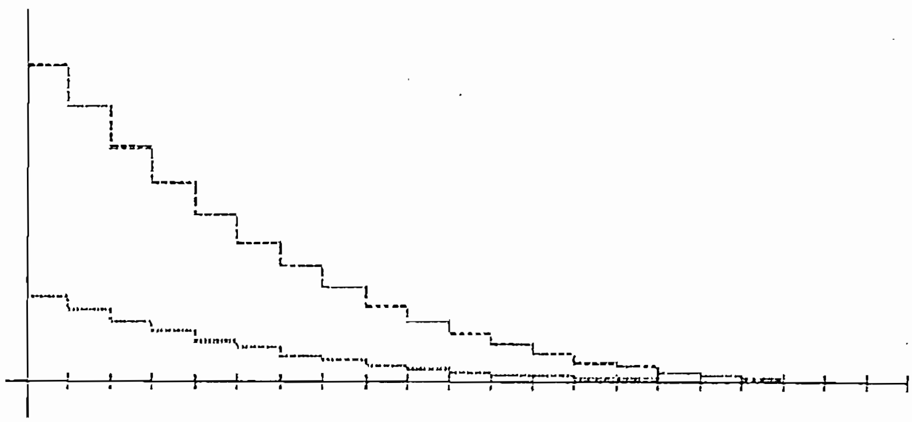
P(12) ——
P(13) ······
Pmax = 0.481



t = 0.05

GRAFICO DE F(12) Y F(13)

F(12) ——
F(13) ······
Fmax = 1.014

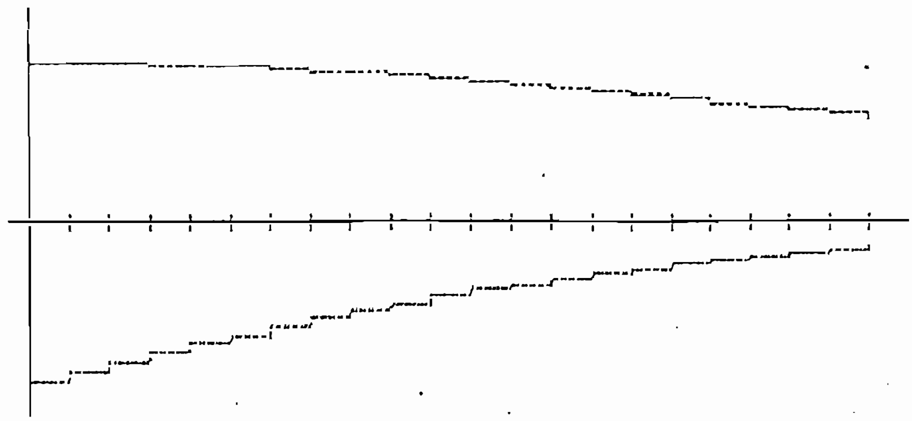


t = 0.05

PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(31)

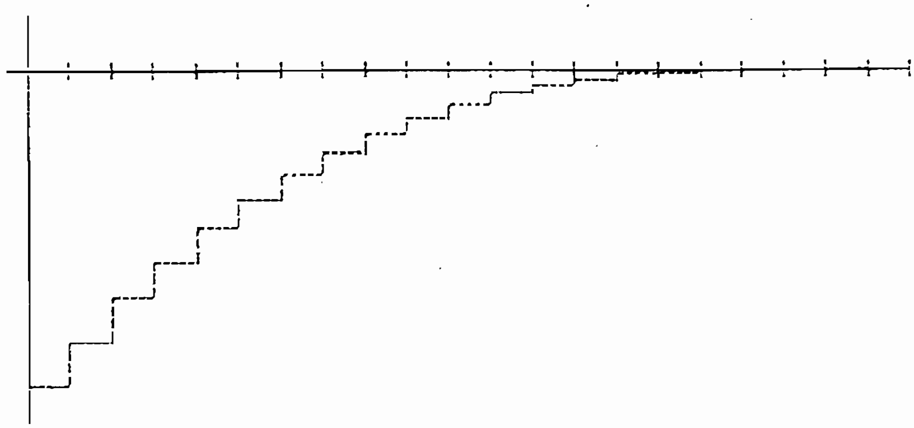
X*(11) ——
X*(31) ------
Xmax = 1.000



t = 0.05

GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)

U*(11) ——
U*(0) ------
Umax = 0.001



t = 0.05

PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

A continuación se presentan las tablas correspondientes al método de Kalman-Englar:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Tabla de valores del vector *X*

4.- Tabla de valores del vector *U*

Cabe señalar, que al presentar un grupo de seis columnas de valores en una sola hoja, ha sido necesario presentar ciertos datos que son de interés como son: valores iniciales, valores finales, valores donde se presentan los máximos.

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(1 1)	=	0.00000	0.05000	0.10000	0.15000	0.20000	0.249998
P(1 2)	=	0.00000	0.00125	0.00500	0.01125	0.01999	0.031247
P(1 3)	=	0.00000	0.00002	0.00015	0.00052	0.00121	0.002368
P(2 1)	=	0.00000	0.00125	0.00500	0.01125	0.01999	0.031247
P(2 2)	=	0.00000	0.00504	0.01033	0.01612	0.02266	0.039203
P(2 3)	=	0.00000	0.00012	0.00048	0.00107	0.00193	0.003092
P(3 1)	=	0.00000	0.00002	0.00015	0.00052	0.00121	0.002368
P(3 2)	=	0.00000	0.00012	0.00048	0.00107	0.00193	0.003092
P(3 3)	=	0.00000	0.00000	0.00002	0.00009	0.00021	0.000401
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

P(	1	1)	=	1.56695	1.56713	1.56727	1.56739	1.567496
P(	1	2)	=	1.17792	1.17818	1.17841	1.17861	1.178788
P(	1	3)	=	0.31564	0.31573	0.31581	0.31587	0.315936
P(	2	1)	=	1.17792	1.17818	1.17841	1.17861	1.178790
P(	2	2)	=	1.53038	1.53083	1.53122	1.53157	1.531891
P(	2	3)	=	0.49462	0.49477	0.49491	0.49503	0.495145
P(	3	1)	=	0.31564	0.31573	0.31581	0.31587	0.315937
P(	3	2)	=	0.49462	0.49477	0.49491	0.49503	0.495145
P(	3	3)	=	0.17250	0.17263	0.17268	0.17272	0.172764
	t		=	96.00000	97.00000	98.00000	99.00000	100.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

F(1 1) =	0.00000	0.00020	0.00158	0.00522	0.01209	0.023082
F(1 2) =	0.00000	0.00121	0.00480	0.01078	0.01938	0.030925
F(1 3) =	0.00000	0.00003	0.00029	0.00093	0.00212	0.004913
t =	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
F( 1  1 ) =  3.15643  3.15732  3.15810  3.15878  3.159371
F( 1  2 ) =  4.94623  4.94773  4.94910  4.95034  4.951454
F( 1  3 ) =  1.72580  1.72632  1.72680  1.72724  1.727640
     t    = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI

KALMAN-ENGLAR

X(1 1)	=	1.00000	0.99876	0.99510	0.98909	0.98084	0.970457
X(2 1)	=	0.00000	-0.04932	-0.09712	-0.14306	-0.18689	-0.228298
X(3 1)	=	-1.00000	-0.97293	-0.93885	-0.89981	-0.85451	-0.806337
t	=	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
X( 1  1 ) = -0.01938 -0.01720 -0.01500 -0.01278 -0.010547
X( 2  1 ) =  0.04329  0.04378  0.04422  0.04462  0.044978
X( 3  1 ) =  0.01023  0.00922  0.00833  0.00752  0.006810
     t    = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

---

u(1 1) = -1.43173 -1.23022 -1.04077 -0.86308 -0.69685 -0.541747
t(= 0.00000 1.00000 2.00000 3.00000 4.00000 5.00000

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
u( 1  1 ) =  0.77439  0.78302  0.78802  0.78958  0.78799  0.783502
   t      = 24.00000 25.00000 26.00000 27.00000 28.00000 29.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION DE LA ECUACION DE RICATTI
KALMAN-ENGLAR

```
u( 1  1 ) = -0.00062 -0.00039 -0.00019 -0.00005  0.00000
   t      = 96.00000 97.00000 98.00000 99.00000100.00000
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

A continuación se presentan los gráficos correspondientes al método de Kalman-Englar:

1.- Gráficos de la matriz *P*

2.- Gráficos de la matriz *F*

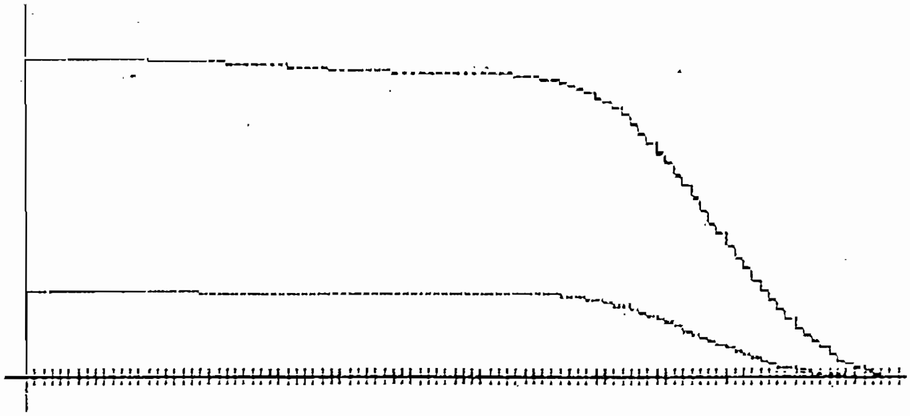
3.- Gráficos del vector *X*

4.- Gráficos del vector *U*

Los gráficos se obtienen con los valores de *P* y *F* calculadas con el método mencionado anteriormente.

GRAFICO DE P(12) Y P(13)

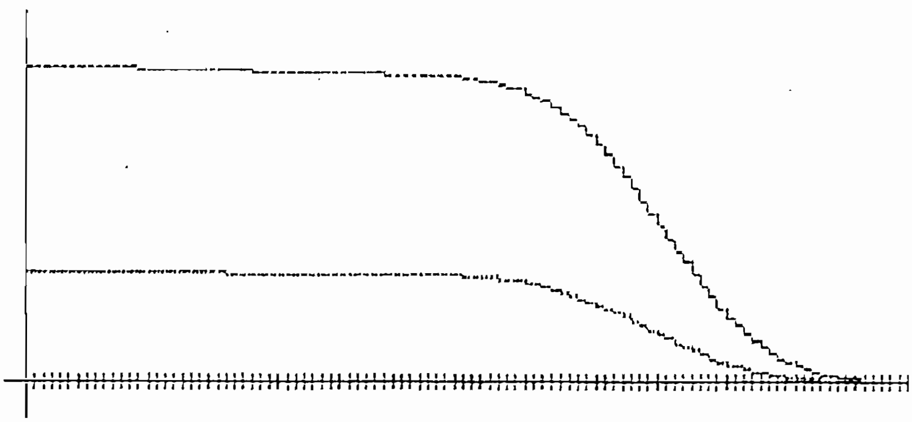
P(12) ——
P(13) ------
Pmax = 1.179



t = 0.05

GRAFICO DE F(12) Y F(13)

F(12) ------
F(13) ------
Fmax = 4.951



t = 0.05

PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(31)

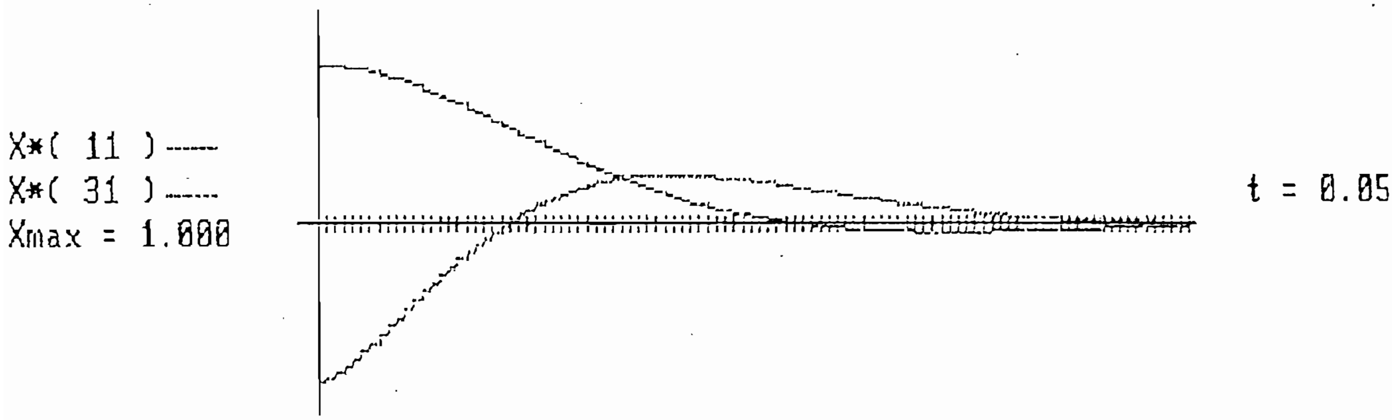
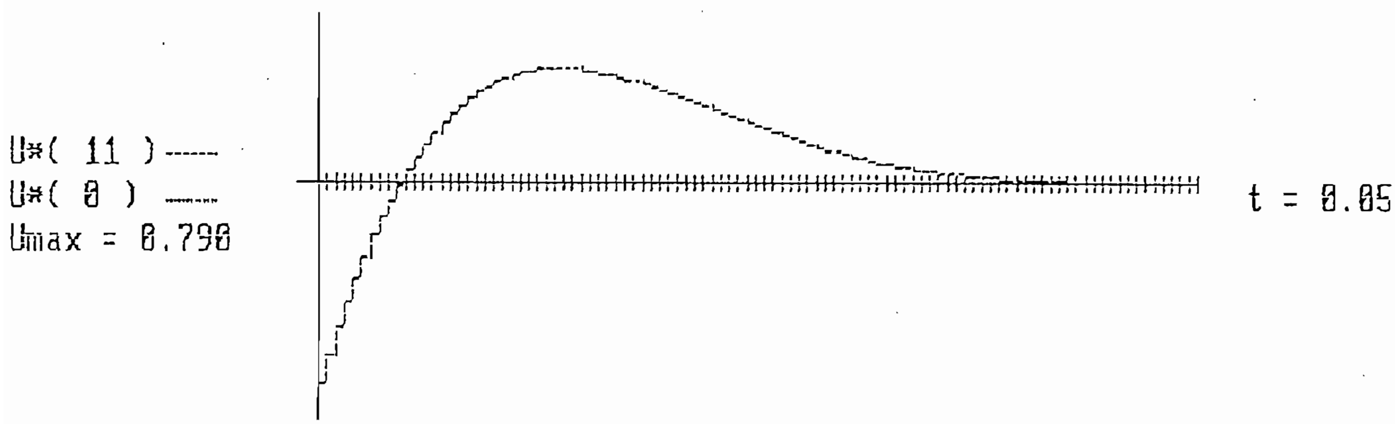


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

ANEXO A3

En este anexo se encuentran las siguientes tablas y gráfico correspondientes al método de Diagonalización:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Gráfico del vector *X*

4.- Gráfico del vector *U*

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATTI

METODO DE DIAGONALIZACION

===
===

```
P( 1  1 ) =      5.69552
P( 1  2 ) =      0.41422
P( 2  1 ) =      0.41422
P( 2  2 ) =      4.61313
```

PRESIONE {C} PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATTI

METODO DE DIAGONALIZACION

T(1 1) = 0.41422
T(1 2) = 4.61313

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

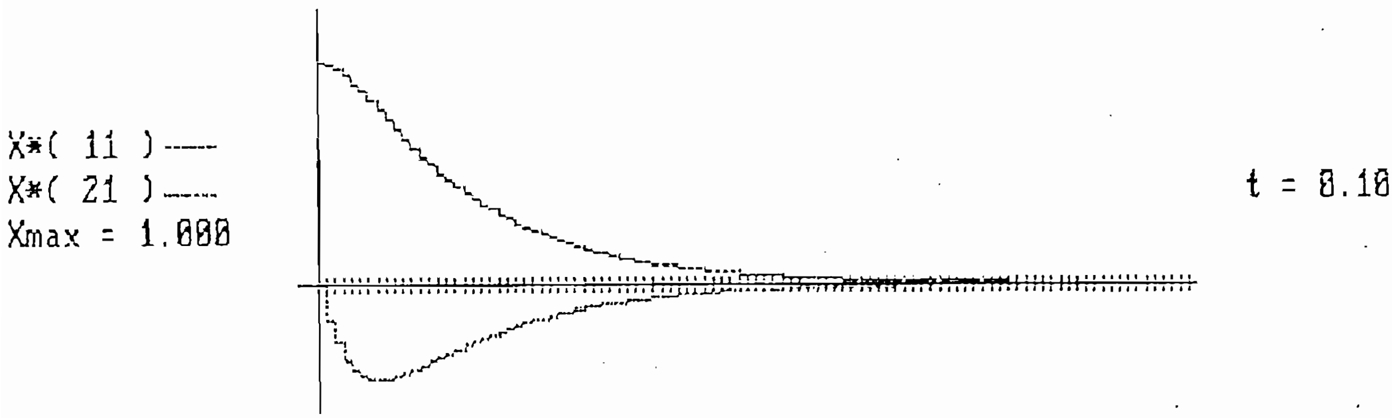
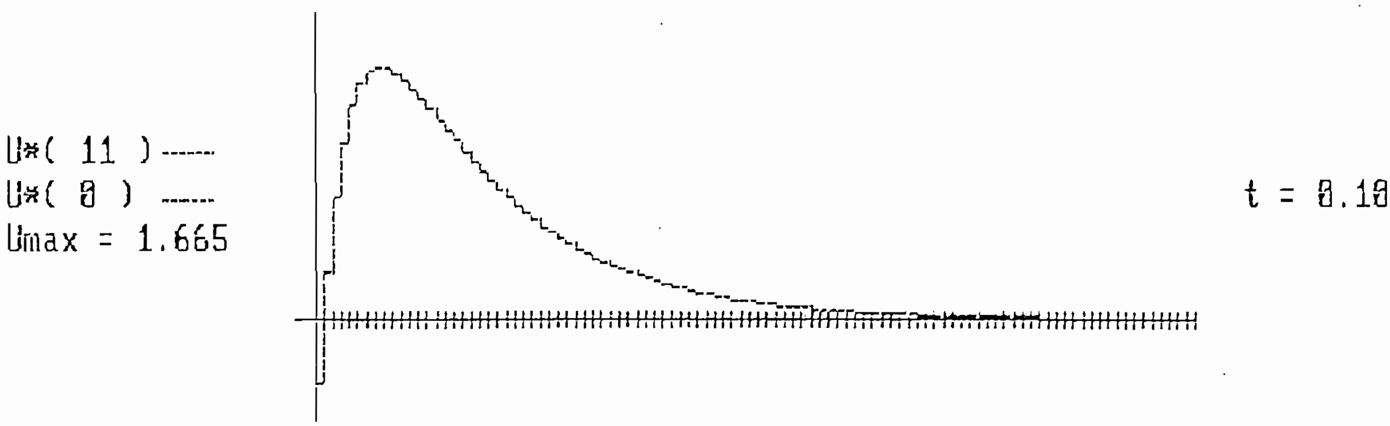


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

A continuación se presentan las siguientes tablas y gráfico correspondientes al método de Diagonalización:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Gráfico del vector *X*

4.- Gráfico del vector *U*

Estos datos obtenidos son producto de variar la matriz de ponderación *R_2*, cuyo valor se cambió a:

$$R_2 = 10$$

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATTI

METODO DE DIAGONALIZACION

```
P( 1  1 ) =     41.74251
P( 1  2 ) =      0.49809
P( 2  1 ) =      0.49811
P( 2  2 ) =     40.73871
```

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATTI

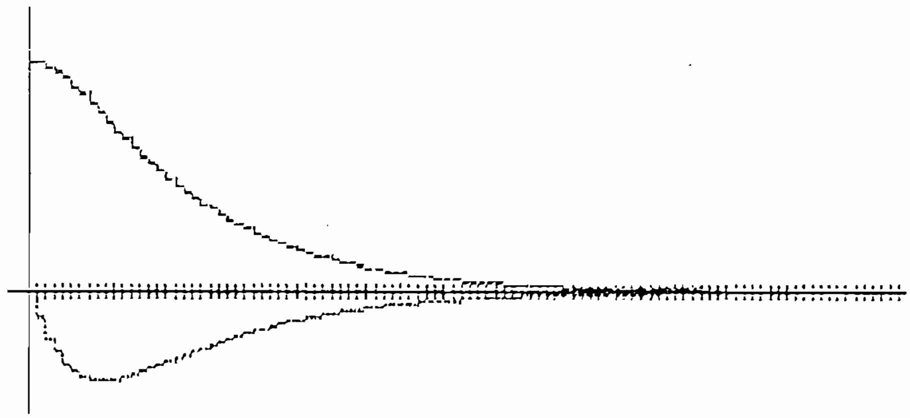
METODO DE DIAGONALIZACION

F(1 1) = 0.04881
F(1 2) = 4.07397

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

GRAFICO DE X*(11) Y X*(21)

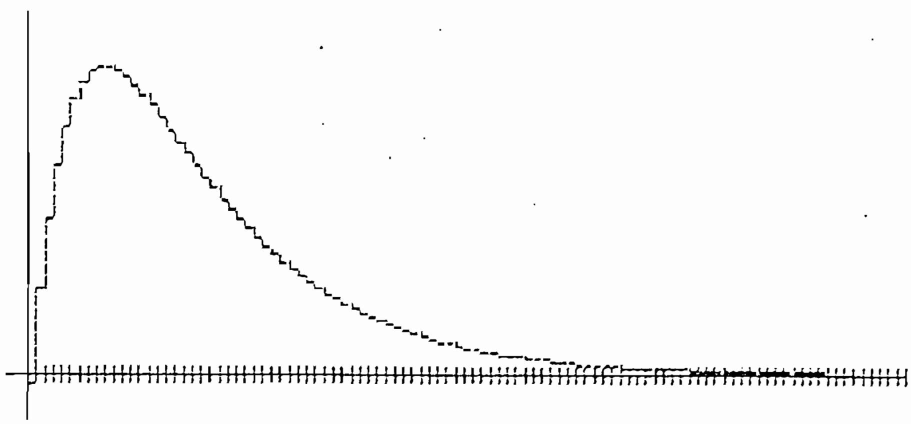
X*(11) ------
X*(21) ------
Xmax = 1.000



t = 0.10

GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)

U*(11) ------
U*(0) ------
Umax = 1.546



t = 0.10

PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

ANEXO A4

En este anexo se encuentran las siguientes tablas y gráficos correspondientes al método de Diagonalización:

1.- Tabla de valores de la matriz *P*

2.- Tabla de valores de la matriz *F*

3.- Gráficos del vector *X* y *U* con intervalo de tiempo del Método de Runge-Kutta.

3.- Gráficos del vector *X* y *U* con intervalo de tiempo del Método de Kalman-Englar.

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATTI

METODO DE DIAGONALIZACION

P(1 1) =	1.56830
P(1 2) =	1.17978
P(1 3) =	0.31623
P(2 1) =	1.17978
P(2 2) =	1.53402
P(2 3) =	0.49594
P(3 1) =	0.31623
P(3 2) =	0.49594
P(3 3) =	0.17308

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

MATRIZ SOLUCION EN ESTADO ESTABLE DE LA ECUACION DE RICATT

METODO DE DIAGONALIZACION

P(1 1) = 3.16228
P(1 2) = 4.95939
P(1 3) = 1.73079

PRESIONE (C) PARA CONTINUAR [ ]

GRAFICO DE X*(11) Y X*(31)

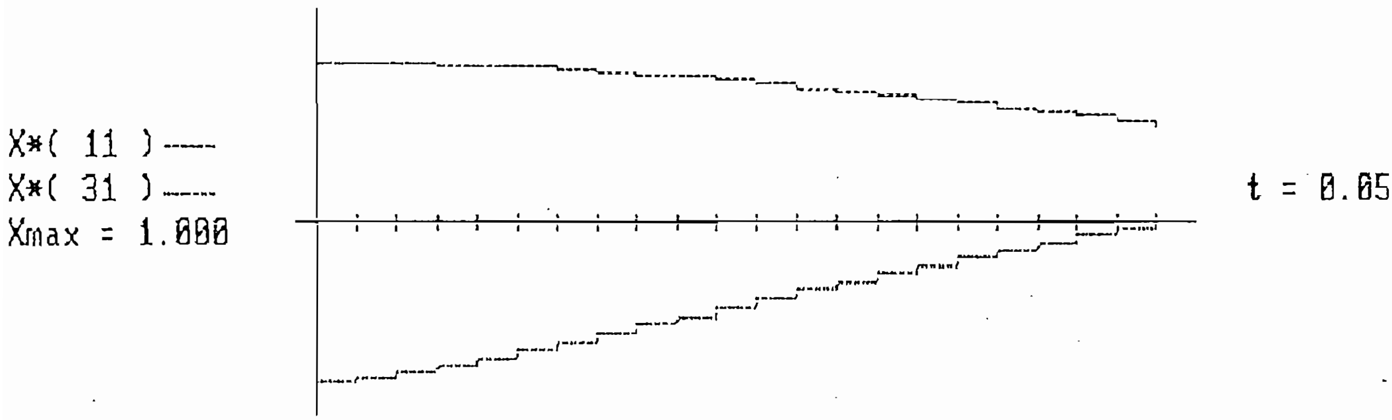
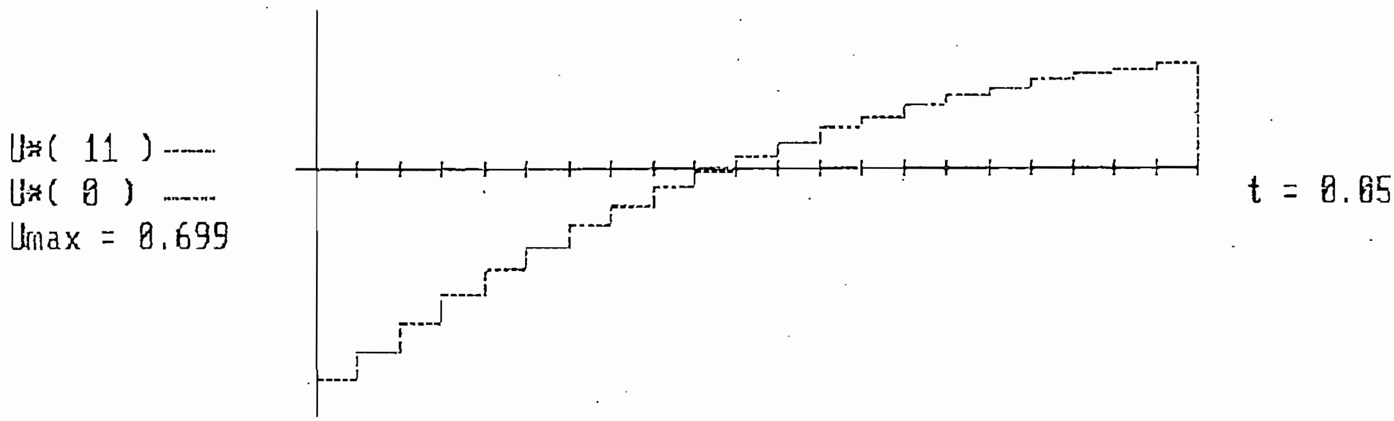


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

GRAFICO DE X*(11) Y X*(31)

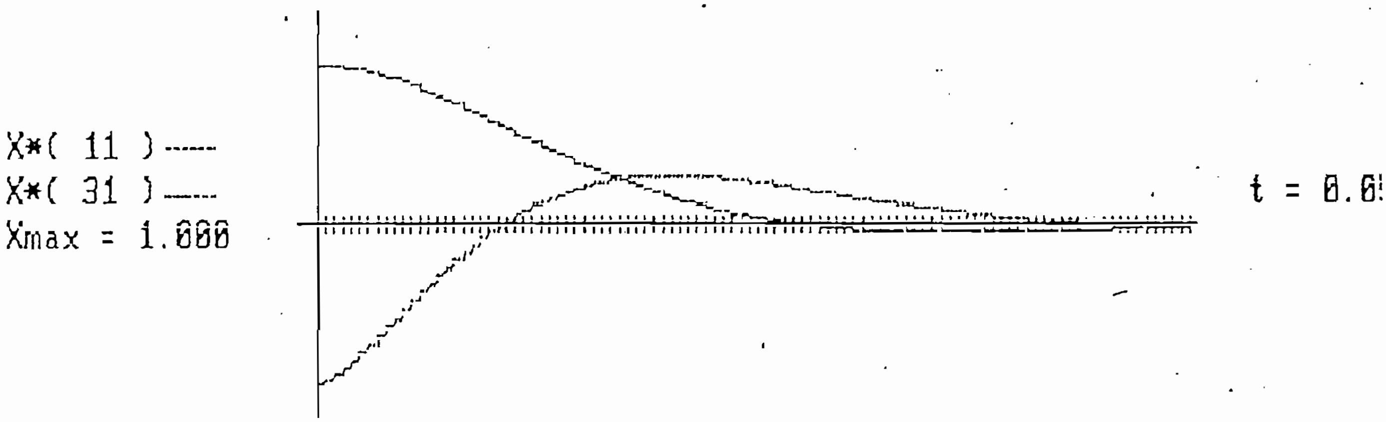
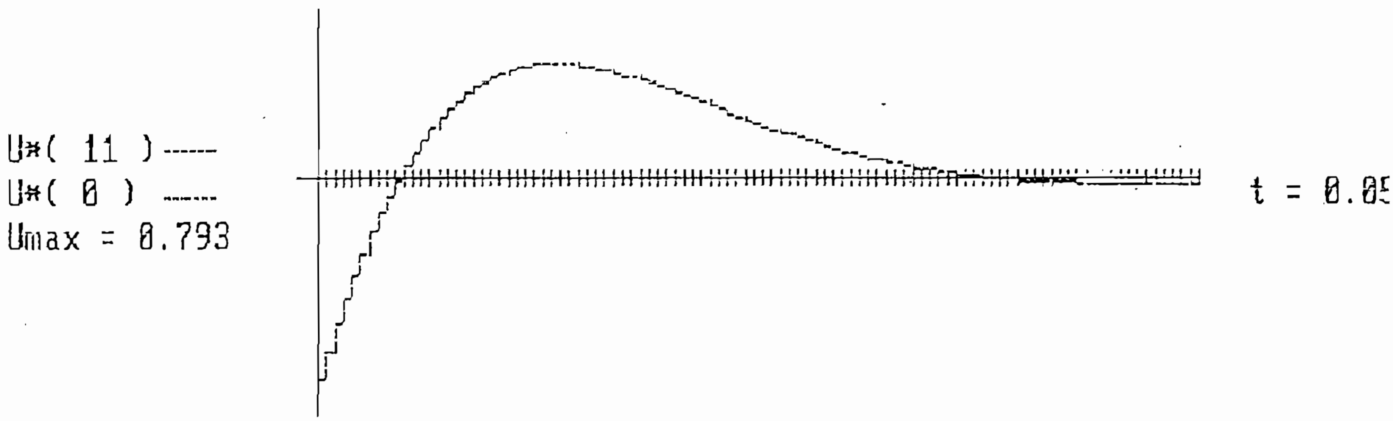


GRAFICO DE U*(11) Y U*(0)



PRESIONE <CR> PARA CONTINUAR

ANEXO B1

A continuación se presenta el listado de programas de los métodos Runge-Kutta y Kalman-Englar, junto a ellos se añadió el programa principal.

```
DECLARE SUB MATRIXTC (MA!(), T1!(), M!, N!, E0!(), E1!(), T2!(), L!)
DECLARE SUB MATRIXT (MA!(), T1!(), M!, N!, E0!(), M0!, I!)
DECLARE SUB GRAPHICS (N!, M!, B!(), T!, OPT!(), OPT1!(), CKA1!, FR!(), XOP!(), UOP!(), LH!, LH1!, FDI!())
'$DYNAMIC
DECLARE SUB ENTRADA (N!, A!(), T!, OPT!(), OPT1!(), OPA!(), OPB!(), IOP!(), CP!(), CPL!(), AUXP!(), AUXP1!())
DECLARE SUB GRAFIC (T!, N!, M!, W!, W1!, LOAD!(), GAUX!())
DECLARE SUB TABDIA (N!, DIA!(), A$, M!, JG!)
DECLARE SUB CUADRO ()
DECLARE SUB TABKU (N!, KUTTA1!(), CKA!, A!, T!, S!, M!, A$, TH!, JG!)
DECLARE SUB FACT (L!, L1!)
DECLARE SUB INVERSA (R2!(), M!, N!)
DECLARE SUB D (R2!(), B!(), DD!(), N!, M!, CC!())
DECLARE SUB At (N!, A!(), A1!())
DECLARE SUB TIEMPO (NP!, T!, A!(), E0!(), E1!())
DECLARE SUB TRANSFERENCIA (NP!, E0!(), MA!(), R!)
DECLARE SUB RAICES (NP!, E0!(), E1!(), R!)
DECLARE SUB ECUACION (E0!(), E1!(), u!, V!, R!, NP!)
DECLARE SUB MULTIPLICACION (N!, D0!(), D1!(), D2!(), D3!(), P!(), DD!(), A!(), A1!())
DECLARE SUB MODIFICAR (M1!, I!, N!, A1!(), A2!(), T1!(), T2!(), I1!, E9!, T9!(), VEL!(), AX!)
DECLARE SUB RANGOC (N!, O4!, NO!, T9!(), A1!(), VEL!(), E9!, R!, A2!(), M1!, I1!)
DECLARE SUB NORMALIZADOC (Q!, I!, M1!, I1!, T9!(), A1!(), N!, T1!(), A2!(), T2!())
DECLARE SUB NORMC1 (N!, T1!(), T2!(), U8!)
DECLARE SUB ORDENACION (N!, E0!(), E1!(), L!, M!, IM!(), IM0!(), RE!())
DECLARE SUB RANGO (N!, O4!, NO!, T9!(), A1!(), VEL!(), E9!, R!, M1!, I1!)
DECLARE SUB NORMALIZADO (Q!, I!, M1!, I1!, T9!(), A1!(), N!, T1!())
DECLARE SUB NORM1 (N!, T1!(), U8!)
Y = 0
6 : CLS : CALL CUADRO
LOCATE 3, 24: COLOR 11: PRINT "<<  M E N U    P R I N C I P A L  >>": COLOR 5
LOCATE 6, 16: PRINT "(": LOCATE 6, 17: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 6, 20: COLOR 5: PRINT ") Ingreso de datos de las matrices
LOCATE 9, 22: COLOR 11: PRINT "    *SOLUCION EN ESTADO TRANSITORIO*": COLOR 5
LOCATE 11, 16: PRINT "(": LOCATE 11, 17: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 11, 20: COLOR 5: PRINT ") Metodo de RUNGE-KUTTA"
LOCATE 13, 16: PRINT "(": LOCATE 13, 17: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 13, 20: COLOR 5: PRINT ") Metodo de KALMAN-ENGLAR"
LOCATE 16, 23: COLOR 11: PRINT "    *SOLUCION EN ESTADO ESTABLE*": COLOR 5
LOCATE 18, 16: PRINT "(": LOCATE 18, 17: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 18, 20: COLOR 5: PRINT ") Metodo por DIAGONALIZACION"
LOCATE 20, 16: PRINT "(": LOCATE 20, 17: COLOR 11: PRINT 5: LOCATE 20, 20: COLOR 5: PRINT ") Salir"
10 : LOCATE 22, 31: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : LOCATE 22, 51: COLOR 11: INPUT "", R: COLOR 5
IF Y = 1 OR S5 = 4 OR S = 5 THEN GOTO 15
IF R = 5 THEN END
IF R <> 1 THEN 6 ELSE 20
15 : IF R = 2 THEN 17
IF R = 3 THEN 19
IF R = 4 THEN 22
IF R = 5 THEN END
GOTO 6
20 : CLS : CLEAR , , 40000
CALL CUADRO
LOCATE 2, 28: COLOR 11: PRINT "<<  INGRESO DE DATOS  >>": COLOR 5
LOCATE 4, 6: PRINT "ORDEN DEL SISTEMA N = "; : COLOR 11: INPUT "", N: COLOR 5
LOCATE 4, 40: PRINT "ORDEN DEL VECTOR DE CONTROL M = "; : COLOR 11: INPUT "", M: COLOR 5
IF Y = 1 THEN 1
DIM A(2 * N, 2 * N), B(N, M), BY(N, M), R1(2 * N, 2 * N), R2(2 * N, 2 * N)
DIM P(2 * N, 2 * N), H(N, N), Q(N, N), D1(2 * N, 2 * N), D2(2 * N, 2 * N)
DIM D3(2 * N, 2 * N), P1(5), D0(2 * N, 2 * N), T(1000), DELP(1000), MDI(2 * N, 2 * N), FDI(M, N)
DIM T0(2 * N, 2 * N), A1(2 * N, 2 * N + 1), T2(2 * N, 2 * N), AUX(2 * N, 2 * N)
DIM C(2 * N, 2 * N), ID(2 * N, 2 * N), TT(2 * N, 2 * N), CC(M, N), FK1(M, N)
```

```
DIM TT1(2 * N, 2 * N), MA(2 * N, 2 * N), RE(2 * N), REP(2 * N), REN(2 * N)
DIM AY(2 * N, 2 * N), E0(2 * N), E1(2 * N), IM0(2 * N), IM(2 * N), W12(N, N)
DIM W22(N, N), RY(2 * N, 2 * N), W(2 * N, 2 * N), T1(2 * N, 2 * N), LOAD(2000)
DIM DD(2 * N, 2 * N), KUTTA(2000), KALMAN(2000), FR(2000), FK(2000), GAUX(2000)
DIM OPT(N, N), OPT1(N, N), XOP(2000), UOP(2000), XOPR(2000), XOPK(2000), UOPR(2000), UOPK(2000)
DIM OPA(N, N), OPB(N, N), IDP(N, N), CP(N, N)
DIM CPL(N, N), AUXP(N, N), AUXP1(N, N)
REM-----------INGRESO DE DATOS----------
1 : IF N >= 5 THEN 2
LOCATE 6, 7: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *A*": COLOR 5
LA = 7: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: LOCATE LA, 5: PRINT "A("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", A(I, J)
COLOR 5: AY(I, J) = A(I, J): LA = LA + 1: NEXT J: NEXT I
LOCATE 6, 26: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *B*": COLOR 5
TA = 7: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: LOCATE TA, 24: PRINT "B("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", B(I, J)
COLOR 5: BY(I, J) = B(I, J): TA = TA + 1: NEXT J: NEXT I
LOCATE 6, 45: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *R3*": COLOR 5
TA = 7: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: LOCATE TA, 43: PRINT "R3("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", R1(I, J)
COLOR 5: R1Y(I, J) = R1(I, J): TA = TA + 1: NEXT J: NEXT I
LOCATE 6, 64: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *R2*": COLOR 5
QA = 7: FOR I = 1 TO M: FOR J = 1 TO M: LOCATE QA, 62: PRINT "R2("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", R2(I, J)
COLOR 5: RY(I, J) = R2(I, J): QA = QA + 1: NEXT J: NEXT I
X = 3 * N ^ 2 + N * M + M ^ M + 8: IF X >= 25 THEN X = 25
21 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : LOCATE 23, 58: COLOR 11: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "S" OR V$ = "s" THEN Y = 1: GOTO 6
IF V$ = "N" OR V$ = "n" THEN 20
GOTO 21
2 : LOCATE 6, 34: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *A*": COLOR 5
LA = 8: TA = 0
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
LOCATE LA, 20 * TA + 3: PRINT "A("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", A(I, J): COLOR 5: AY(I, J) = A(I, J)
TA = TA + 1: IF TA = 4 THEN LA = LA + 1: TA = 0
NEXT J: NEXT I
8 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : LOCATE 23, 58: COLOR 11: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "S" OR V$ = "s" THEN 3
IF V$ = "N" OR V$ = "n" THEN 20 ELSE 8
3 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 2, 28: COLOR 11: PRINT "<<  INGRESO DE DATOS  >>": COLOR 5
LOCATE 4, 6: PRINT "ORDEN DEL SISTEMA N ="; : COLOR 11: PRINT N: COLOR 5
LOCATE 4, 40: PRINT "ORDEN DEL VECTOR DE CONTROL M ="; : COLOR 11: PRINT M: COLOR 5
LOCATE 6, 34: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *B*": COLOR 5
LA = 8: TA = 0
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M
LOCATE LA, 20 * TA + 3: PRINT "B("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", B(I, J): COLOR 5: BY(I, J) = B(I, J)
TA = TA + 1: IF TA = 4 THEN LA = LA + 1: TA = 0
NEXT J: NEXT I
9 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : LOCATE 23, 58: COLOR 11: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "S" OR V$ = "s" THEN 4
IF V$ = "N" OR V$ = "n" THEN 3 ELSE 9
4 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 2, 28: COLOR 11: PRINT "<<  INGRESO DE DATOS  >>": COLOR 5
LOCATE 4, 6: PRINT "ORDEN DEL SISTEMA N ="; : COLOR 11: PRINT N: COLOR 5
LOCATE 4, 40: PRINT "ORDEN DEL VECTOR DE CONTROL M ="; : COLOR 11: PRINT M: COLOR 5
LOCATE 6, 34: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *R3*": COLOR 5
LA = 8: TA = 0
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
LOCATE LA, 20 * TA + 3: PRINT "R3("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", R1(I, J): COLOR 5: R1Y(I, J) = R1(I, J)
TA = TA + 1: IF TA = 4 THEN LA = LA + 1: TA = 0
NEXT J: NEXT I
```

```
41 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : LOCATE 23, 58: COLOR 11: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "S" OR V$ = "s" THEN 5
IF V$ = "N" OR V$ = "n" THEN 4 ELSE 41
5 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 2, 28: COLOR 11: PRINT "<<  INGRESO DE DATOS  >>": COLOR 5
LOCATE 4, 6: PRINT "ORDEN DEL SISTEMA N ="; : COLOR 11: PRINT N: COLOR 5
LOCATE 4, 40: PRINT "ORDEN DEL VECTOR DE CONTROL M ="; : COLOR 11: PRINT M: COLOR 5
LOCATE 6, 34: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  *R2*": COLOR 5
LA = 8: TA = 0
FOR I = 1 TO M: FOR J = 1 TO M
LOCATE LA, 20 * TA + 3: PRINT "R2("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", R2(I, J): COLOR 5: RY(I, J) = R2(I, J)
TA = TA + 1: IF TA = 4 THEN LA = LA + 1: TA = 0
NEXT J: NEXT I
42 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : LOCATE 23, 58: COLOR 11: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "S" OR V$ = "s" THEN Y = 1: GOTO 6
IF V$ = "N" OR V$ = "n" THEN 5 ELSE 42
REM------------METODO DE RUNGE-KUTTA------------
17 : CLS : CALL CUADRO: CKA = 1: TH = .1
FOR I = 1 TO M: FOR J = 1 TO M: R2(I, J) = RY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: B(I, J) = BY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: R1(I, J) = R1Y(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A(I, J) = AY(I, J): H(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
LOCATE 3, 14: COLOR 11: PRINT "*INGRESO DE LIMITES DE INTEGRACION DEL CRITERIO*": COLOR 5
LOCATE 5, 21: PRINT "LIMITE SUPERIOR DE INTEGRACION = "; : COLOR 11: INPUT "", A: COLOR 5
LOCATE 6, 21: PRINT "LIMITE INFERIOR DE INTEGRACION = "; : COLOR 11: INPUT "", B: COLOR 5
LOCATE 8, 19: COLOR 11: PRINT "*CONDICIONES INICIALES DE LA MATRIZ  P* ": COLOR 5
LOCATE 9, 28: COLOR 11: PRINT "* AL TIEMPO FINAL "; A; "*": COLOR 5
L = 10: TA = 0
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
LOCATE L, 20 * TA + 3: PRINT "P("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11
INPUT "", H(I, J): COLOR 5: TA = TA + 1: IF TA = 4 THEN L = L + 1: TA = 0
MA(I, J) = A(I, J): KUTTA(CKA) = H(I, J): CKA = CKA + 1
NEXT J: NEXT I
26 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 58: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 27
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 17
GOTO 26
27 : CALL INVERSA(R2(), M, N)
CALL D(R2(), B(), DD(), N, M, CC())
CALL At(N, A(), A1())
CALL TIEMPO(N, T, A(), E0(), E1())
C = 0: H = -T: CKA1 = 1
29 : FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO M: FR(CKA1) = 0: FOR Z = 1 TO N
UN = CC(Y, Z) * H(Z, X): FR(CKA1) = FR(CKA1) + UN: NEXT Z: CKA1 = CKA1 + 1
NEXT Y: NEXT X
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: P(I, J) = H(I, J): NEXT J: NEXT I
ZA = 1: L = 1
30 : CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: Q(I, J) = -R1(I, J) + D1(I, J) - D2(I, J) - D3(I, J)
T(ZA) = H * Q(I, J): P(I, J) = H(I, J) + .5 * T(ZA): ZA = ZA + 1
NEXT J: NEXT I
IF L = 2 THEN GOTO 35
L = L + 1: GOTO 30
35 : CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: Q(I, J) = -R1(I, J) + D1(I, J) - D2(I, J) - D3(I, J)
T(ZA) = H * Q(I, J): P(I, J) = H(I, J) + T(ZA): ZA = ZA + 1
NEXT J: NEXT I
```

```
IF L = 3 THEN GOTO 40
L = L + 1: GOTO 35
40 : FOR I = 1 TO N ^ 2: DELP(I) = (T(I) + 2 * T(I + N ^ 2) + 2 * T(I + 2 * N ^ 2) + T(I + 3 * N ^ 2)) / 6
NEXT I: L = 1
CLS : LOCATE 15, 40: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.....": COLOR 5
IF C > (A - B) / T THEN GOTO 31 ELSE C = C + 1: GOTO 32
31 : CALL ENTRADA(N, A(), T, OPT(), OPT1(), OPA(), OPB(), IDP(), CP(), CPL(), AUXP(), AUXP1()): GOTO 23
32 : FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: H(I, J) = H(I, J) + DELP(L): L = L + 1: KUTTA(CKA) = H(I, J): CKA = CKA + 1
NEXT J: NEXT I:
GOTO 29
REM-------------METODO DE KALMAN-ENGLAR-------------
19 : CLS : N3 = 2 * N: CALL CUADRO: CEN1 = 1: CEN = 1: TWK = .1
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: R2(I, J) = RY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: B(I, J) = BY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: R1(I, J) = R1Y(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A(I, J) = AY(I, J): P(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N3: FOR J = 1 TO N3: T0(I, J) = 0: TT(I, J) = 0: AUX(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
LOCATE 4, 25: COLOR 11: PRINT "<< CONDICIONES INICIALES DE P >>": COLOR 5
L = 1: TA = 0
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
LOCATE L + 6, 20 * TA + 3: PRINT "P("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", H(I, J): COLOR 5: TA = TA + 1
IF TA = 4 THEN L = L + 1: TA = 0
MA(I, J) = A(I, J): P(I, J) = H(I, J): KALMAN(CEN) = H(I, J): CEN = CEN + 1
NEXT J: NEXT I
K = 0
43 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 58: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 44
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 19
GOTO 43
44 : CALL INVERSA(R2(), M, M)
CALL D(R2(), B(), DD(), N, M, CC())
CALL At(N, A(), A1())
CALL TIEMPO(N, T, A(), E0(), E1())
CLS : CALL CUADRO: LOCATE 11, 15: PRINT "No. TOTAL DE VALORES PARA LA MATRIZ P : [    ]": LOCATE 11, 56: COLOR 11
INPUT "", K1: COLOR 5
CLS : LOCATE 15, 40: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.....": COLOR 5
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: T0(I, J) = A(I, J) * (-T): T0(I + N, J + N) = -A1(I, J) * (-T)
T0(I, J + N) = -DD(I, J) * (-T): T0(I + N, J) = -R1(I, J) * (-T): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N3: FOR J = 1 TO N3: AUX(I, J) = T0(I, J): C(I, J) = 0
IF I = J THEN ID(I, J) = 1
TT(I, J) = ID(I, J) + T0(I, J): NEXT J: NEXT I
L = 2
45 : FOR X = 1 TO N3: FOR Y = 1 TO N3: C(X, Y) = 0: FOR Z = 1 TO N3
C(X, Y) = C(X, Y) + AUX(X, Z) * T0(Z, Y): NEXT Z
CALL FACT(L, L1)
C(X, Y) = C(X, Y) / L1
NEXT Y: NEXT X
IF L > 10 THEN 51
FOR I = 1 TO N3: FOR J = 1 TO N3: TT(I, J) = TT(I, J) + C(I, J)
AUX(I, J) = C(I, J) * L1: C(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
L = L + 1: GOTO 45
51 : FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO M: FK(CEN1) = 0: FOR Z = 1 TO N
UK = CC(Y, Z) * P(Z, X): FK(CEN1) = FK(CEN1) + UK: NEXT Z: CEN1 = CEN1 + 1
NEXT Y: NEXT X
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A1(I, J) = TT(I + N, J + N): NEXT J: NEXT I
CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
```

```
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: TT1(I, J) = TT(I + N, J) + D3(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A1(I, J) = TT(I, J + N): NEXT J: NEXT I
CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: R2(I, J) = D3(I, J) + TT(I, J): NEXT J: NEXT I
CALL INVERSA(R2(), N, N)
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: P(I, J) = TT1(I, J): DD(I, J) = R2(I, J)
NEXT J: NEXT I
CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
CLS : LOCATE 15, 40: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.....": COLOR 5
IF K = X1 THEN GOTO 39 ELSE K = K + 1: GOTO 46
39 : CALL ENTRADA(N, A(), T, OPT(), OPT1(), OPA(), OPB(), IOP(), CP(), CPL(), AUXP(), AUXP1()): GOTO 23
46 : FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: P(I, J) = D0(I, J): KALMAN(CEN) = P(I, J): CEN = CEN + 1: NEXT J: NEXT I
GOTO 51

REM-------------SUBMENU DE TABLAS------------
23 : CLS : CALL CUADRO
LOCATE 2, 17: COLOR 11: PRINT "<<    S U B M E N U   D E   T A B L A S    >>": COLOR 5
LOCATE 6, 20: COLOR 11: PRINT "    *SOLUCION EN ESTADO TRANSITORIO*": COLOR 5
LOCATE 8, 12: PRINT "(": LOCATE 8, 13: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 8, 16: COLOR 5
PRINT ") Tabla de Valores del Metodo de RUNGE-KUTTA"
LOCATE 10, 12: PRINT "(": LOCATE 10, 13: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 10, 16: COLOR 5
PRINT ") Tabla de Valores del Metodo de KALMAN-ENGLAR"
LOCATE 13, 22: COLOR 11: PRINT "    *SOLUCION EN ESTADO ESTABLE*": COLOR 5
LOCATE 15, 12: PRINT "(": LOCATE 15, 13: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 15, 16: COLOR 5
PRINT ") Tabla de Valores del Metodo por DIAGONALIZACION"
LOCATE 17, 12: PRINT "(": LOCATE 17, 13: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 17, 16: COLOR 5
PRINT ") Ir al Submenu de Graficos"
LOCATE 19, 12: PRINT "(": LOCATE 19, 13: COLOR 11: PRINT 5: LOCATE 19, 16: COLOR 5
PRINT ") Salir al Menu Principal"
LOCATE 23, 28: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 48: INPUT "", S: COLOR 5
IF S = 1 THEN 11
IF S = 2 THEN 12
IF S = 3 THEN 13
IF S = 4 THEN 14
IF S = 5 THEN 6 ELSE 23
11 : CLS : CALL CUADRO
LOCATE 3, 16: COLOR 11: PRINT "<<    T A B L A S  -  R U N G E   K U T T A    >>": COLOR 5
LOCATE 7, 14: PRINT "(": LOCATE 7, 15: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 7, 18: COLOR 5
PRINT ") Solucion de la Ecuacion de Ricatti  *P(i,j)*"
LOCATE 9, 14: PRINT "(": LOCATE 9, 15: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 9, 18: COLOR 5
PRINT ") Matriz Ganancia de Realimentacion   *F(i,j)*"
LOCATE 11, 14: PRINT "(": LOCATE 11, 15: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 11, 18: COLOR 5
PRINT ") Vector de Estado Optimo  *X(i,j)*"
LOCATE 13, 14: PRINT "(": LOCATE 13, 15: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 13, 18: COLOR 5
PRINT ") Vector de Entrada Optima  *u(i,j)*"
LOCATE 15, 14: PRINT "(": LOCATE 15, 15: COLOR 11: PRINT 5: LOCATE 15, 18: COLOR 5
PRINT ") Regresar al submenu de Tablas"
LOCATE 23, 28: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 48: INPUT "", ST: COLOR 5
J6 = N
IF ST = 1 THEN 73
IF ST = 2 THEN 74
IF ST = 3 THEN 76
IF ST = 4 THEN 77
IF ST = 5 THEN 23 ELSE 11
73 : IF TW = 1 OR TW = .1 THEN A$ = "P": CALL TABKU(N, KUTTA(), CKA, A, T, S, N, A$, TW - 1, J6): GOTO 11
74 : IF TW = 1 OR TW = .1 THEN A$ = "F": CALL TABKU(N, FR(), CKA1, A, T, S, M, A$, TW - 1, J6): GOTO 11
76 : IF TW = 1 THEN A$ = "X": A0 = 0: CALL TABKU(N, XOPR(), LWR - N * M, A0, T, S, M, A$, TW, J6): GOTO 11
```

```
77 : IF TW = 1 THEN A$ = "u": AQ = 0: CALL TABKU(N, UOPR(), LW1R, AQ, T, S, M, A$, TW, JG)
GOTO 11
12 : CLS : CALL CUADRO
LOCATE 3, 13: COLOR 11: PRINT "<<    T A B L A S  -  K A L M A N   E N G L A R    >>": COLOR 5
LOCATE 7, 14: PRINT "(": LOCATE 7, 15: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 7, 18: COLOR 5
PRINT ") Solucion de la Ecuacion de Ricatti  * P(i,j) *"
LOCATE 9, 14: PRINT "(": LOCATE 9, 15: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 9, 18: COLOR 5
PRINT ") Matriz Ganancia de Realimentacion   * F(i,j) *"
LOCATE 11, 14: PRINT "(": LOCATE 11, 15: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 11, 18: COLOR 5
PRINT ") Vector de Estado Optimo  * X(i,j) *"
LOCATE 13, 14: PRINT "(": LOCATE 13, 15: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 13, 18: COLOR 5
PRINT ") Vector de Entrada Optima * u(i, j) * "
LOCATE 15, 14: PRINT "(": LOCATE 15, 15: COLOR 11: PRINT 5: LOCATE 15, 18: COLOR 5
PRINT ") Regresar al submenu de Tablas"
LOCATE 23, 28: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 48: INPUT "", ST1: COLOR 5
AZ = 0: TZ = -1: JG = N
IF ST1 = 1 THEN 78
IF ST1 = 2 THEN 79
IF ST1 = 3 THEN 81
IF ST1 = 4 THEN 82
IF ST1 = 5 THEN 23 ELSE 12
78 : IF TWK = 2 OR TWK = .1 THEN A$ = "P": CALL TABKU(N, KALMAN(), CEN, AZ, TZ, S, N, A$, TW - 1, JG): GOTO 12
79 : IF TWK = 2 OR TWK = .1 THEN A$ = "F": CALL TABKU(N, FK(), CEN1, AZ, TZ, S, M, A$, TW - 1, JG): GOTO 12
81 : IF TWK = 2 THEN A$ = "X": CALL TABKU(N, XOPK(), LWK - N * M, AZ, TZ, S, N, A$, TWK, JG): GOTO 12
82 : IF TWK = 2 THEN A$ = "u": CALL TABKU(M, UOPK(), LW1K, AZ, TZ, S, M, A$, TWK, JG)
GOTO 12
13 : JG = N: A$ = "P": CALL TABDIA(N, MDI(), A$, N, JG)
A$ = "F": CALL TABDIA(N, FDI(), A$, M, JG): GOTO 23
REM---------------SUBMENU DE GRAFICOS--------------
14 : CLS : CALL CUADRO
LOCATE 3, 15: COLOR 11: PRINT "<<    S U B M E N U   D E   G R A F I C O S    >>": COLOR 5
LOCATE 7, 20: COLOR 11: PRINT "    *SOLUCION EN ESTADO TRANSITORIO*": COLOR 5
LOCATE 9, 16: PRINT "(": LOCATE 9, 17: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 9, 20: COLOR 5
PRINT ") Graficos para el Metodo de RUNGE-KUTTA"
LOCATE 11, 16: PRINT "(": LOCATE 11, 17: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 11, 20: COLOR 5
PRINT ") Graficos para el Metodo de KALMAN-ENGLAR"
LOCATE 13, 16: PRINT "(": LOCATE 13, 17: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 13, 20: COLOR 5
PRINT ") Salir al Submenu de Tablas"
LOCATE 15, 16: PRINT "(": LOCATE 15, 17: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 15, 20: COLOR 5
PRINT ") Salir al Menu Principal"
LOCATE 17, 16: PRINT "(": LOCATE 17, 17: COLOR 11: PRINT 5: LOCATE 17, 20: COLOR 5
PRINT ") Ingresar nuevos datos de las Matrices del Sistema"
LOCATE 23, 28: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 48: INPUT "", S5: COLOR 5
IF S5 = 1 THEN 16
IF S5 = 2 THEN 18
IF S5 = 3 THEN 23
IF S5 = 4 THEN 6
IF S5 = 5 THEN Y = 0: GOTO 6 ELSE 14
16 : IF TW = .1 OR TW = 1 THEN TW = 1: CALL GRAFIC(T, N, M, CKA, CKA1, KUTTA(), FR())
CALL GRAPHICS(N, M, B(), T, OPT(), OPT1(), CKA1, FR(), XOPR(), UOPR(), LWR, LW1R, FDI()): GOTO 14
18 : IF TWK = .1 OR TWK = 2 THEN TWK = 2: CALL GRAFIC(T, N, M, CEN, CEN1, KALMAN(), FK())
CALL GRAPHICS(N, M, B(), T, OPT(), OPT1(), CEN1, FK(), XOPK(), UOPK(), LWK, LW1K, FDI())
GOTO 14
```

```
SUB At (N, A(), A1())
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
A1(J, I) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
A1(J, I) = A(I, J): NEXT J: NEXT I
END SUB


SUB CUADRO
LOCATE 1, 1: FOR I = 1 TO 40: PRINT "*"; " "; : NEXT I
FOR I = 2 TO 23: LOCATE I, 1: PRINT "*": LOCATE I, 80: PRINT "*": NEXT I
LOCATE 24, 1: FOR I = 1 TO 40: PRINT "*"; " "; : NEXT I
END SUB


SUB D (R2(), B(), DD(), N, M, CC())
DIM B1(M, N)
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: CC(J, I) = 0: B1(J, I) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: DD(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: B1(J, I) = B(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO M: FOR Z = 1 TO M
UO = R2(Y, Z) * B1(Z, X): CC(Y, X) = CC(Y, X) + UO: NEXT Z: NEXT Y: NEXT X
FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO N: FOR Z = 1 TO M
UY = B(Y, Z) * CC(Z, X): DD(Y, X) = DD(Y, X) + UY: NEXT Z: NEXT Y: NEXT X
END SUB


SUB ECUACION (E0(), E1(), UU, V, R, NP)
D7 = UU ^ 2 + 4 * V: IF D7 < 0 THEN 582 ELSE 585
582 : R = R + 1: E0(R) = UU / 2: E1(R) = (ABS(D7) ^ .5) / 2: R = R + 1
E0(R) = UU / 2: E1(R) = -E1(R - 1): GOTO 590
585 : R = R + 1: E0(R) = (UU - (D7 ^ .5)) / 2: R = R + 1: E0(R) = (UU + (D7 ^ .5)) / 2
590 : END SUB


SUB ENTRADA (N, A(), T, OPT(), OPT1(), OPA(), OPB(), IDP(), CP(), CPL(), AUXP(), AUXP1())
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: OPA(I, J) = 0: OPB(I, J) = 0: IDP(I, J) = 0
CP(I, J) = 0: CPL(I, J) = 0: AUXP(I, J) = 0: AUXP1(I, J) = 0: OPT(I, J) = 0: OPT1(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
IF I = J THEN IDP(I, J) = 1
OPA(I, J) = A(I, J) * T: OPB(I, J) = A(I, J) * T / 2: CP(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
AUXP(I, J) = OPA(I, J): AUXP1(I, J) = OPB(I, J)
OPT(I, J) = IDP(I, J) + OPA(I, J): OPT1(I, J) = IDP(I, J) + OPB(I, J)
NEXT J: NEXT I: L = 2
FOR L = 2 TO 10: FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO N: FOR Z = 1 TO N
CP(X, Y) = CP(X, Y) + AUXP(X, Z) * OPA(Z, Y): CPL(X, Y) = CPL(X, Y) + AUXP1(X, Z) * OPB(Z, Y)
NEXT Z: CALL FACT(L, L1): CP(X, Y) = CP(X, Y) / L1: CPL(X, Y) = CPL(X, Y) / L1
NEXT Y: NEXT X
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
OPT(I, J) = OPT(I, J) + CP(I, J): AUXP(I, J) = CP(I, J) * L1: CP(I, J) = 0
OPT1(I, J) = OPT1(I, J) + CPL(I, J): AUXP1(I, J) = CPL(I, J) * L1: CPL(I, J) = 0
NEXT J: NEXT I: NEXT L
END SUB
```

```
SUB GRAFIC (T, N, M, W, W1, LOAD(), GAUX())
50 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 4, 10: COLOR 11: PRINT "INGRESE DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ |P(nxn)| A GRAFICARSE": COLOR 5
LOCATE 5, 37: COLOR 11: PRINT "n="; N: COLOR 5
LOCATE 7, 22: PRINT "1er. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT PT: COLOR 5
LOCATE 9, 22: PRINT "2do. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT PT1: COLOR 5
LOCATE 14, 10: COLOR 11: PRINT "INGRESE DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ  |F(mxn)|  A GRAFICARSE": COLOR 5
LOCATE 15, 37: COLOR 11: PRINT "m="; M: COLOR 5
LOCATE 17, 22: PRINT "1er. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT FT: COLOR 5
LOCATE 19, 22: PRINT "2do. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT FT1: COLOR 5
47 : LOCATE 23, 20: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 56: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 48
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 50
GOTO 47
48 : SCREEN 3: LOCATE 1, 25: PRINT "GRAFICO DE P("; PT; ")  Y  P("; PT1; ")"
LOCATE 5, 1: PRINT "P("; PT; ")": LINE (75, 63)-(100, 63), , , &H7777
LOCATE 6, 1: PRINT "P("; PT1; ")": LINE (75, 78)-(100, 78), , , &H5555
LOCATE 13, 25: PRINT "GRAFICO DE F("; FT; ")  Y  F("; FT1; ")"
LOCATE 17, 1: PRINT "F("; FT; ")": LINE (75, 231)-(100, 231), , , &H7777
LOCATE 18, 1: PRINT "F("; FT1; ")": LINE (75, 246)-(100, 246), , , &H5555
LOCATE 6, 69: PRINT "St ="; T: LOCATE 18, 69: PRINT "St ="; T
RT = INT(PT / 10): RT1 = INT(PT1 / 10): PT = PT - 10 * RT + N * (RT - 1): PT1 = PT1 - 10 * RT1 + N * (RT1 - 1)
RFT = INT(FT / 10): RFT1 = INT(FT1 / 10): FT = FT - 10 * RFT + N * (RFT - 1): FT1 = FT1 - 10 * RFT1 + N * (RFT1 - 1)
VIEW SCREEN (140, 20)-(580, 315): LINE (150, 20)-(150, 147): STYLE% = &H7777
MAX = 0: AR = PT: MIN = 0: FOR JX = PT TO W - N * N + PT - 1 STEP N * N
IF MAX < LOAD(JX) THEN MAX = LOAD(JX)
IF MIN > LOAD(JX) THEN MIN = LOAD(JX)
NEXT JX: PT = PT1: FOR JX = PT TO W - N * N + PT - 1 STEP N * N
IF MAX < LOAD(JX) THEN MAX = LOAD(JX)
IF MIN > LOAD(JX) THEN MIN = LOAD(JX)
NEXT JX: PT = AR: MAX1 = MAX - MIN: FOR IX = 1 TO 2: CAL = 150
LINE (140, 37 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(579, 37 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
FOR IY = (W - N ^ 2 + PT - 1) TO N ^ 2 STEP -N ^ 2
ML = INT((W - 1) / N ^ 2: JA = IY - N ^ 2
LINE (CAL, 37 + 100 * (MAX - LOAD(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / ML), 37 + 100 * (MAX - LOAD(IY)) / MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / ML), 37 + 100 * (MAX - LOAD(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / ML), 37 + 100 * (MAX - LOAD(JA)) / MAX1),,, STYLE
LINE (CAL + 430 / ML), 35 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(CAL + 430 / ML), 39 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
CAL = CAL + 430 / ML: NEXT IY: PT = PT1: STYLE% = &H5555: NEXT IX: LINE (150, 187)-(150, 315)
MAX = 0: AR = FT: MIN = 0: STYLE% = &H7777: FOR JX = FT TO W1 - N * M + FT - 1 STEP N * M
IF MAX < GAUX(JX) THEN MAX = GAUX(JX)
IF MIN > LOAD(JX) THEN MIN = LOAD(JX)
NEXT JX: FT = FT1: FOR JX = FT TO W1 - N * M + FT - 1 STEP N * M
IF MAX < GAUX(JX) THEN MAX = GAUX(JX)
IF MIN > LOAD(JX) THEN MIN = LOAD(JX)
NEXT JX: FT = AR: MAX1 = MAX - MIN: FOR IX = 1 TO 2: CAL = 150
LINE (140, 204 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(579, 204 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
FOR IY = (W1 - N * M + FT - 1) TO N * M STEP -N * M
MO = INT((W1 - 1) / N * M: TO = IY - N * M
LINE (CAL, 204 + 100 * (MAX - GAUX(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / MO), 204 + 100 * (MAX - GAUX(IY)) / MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / MO), 204 + 100 * (MAX - GAUX(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / MO), 204 + 100 * (MAX - GAUX(TO)) / MAX1),,, ST
LINE (CAL + 430 / MO), 206 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(CAL + 430 / MO), 202 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
CAL = CAL + 430 / MO
NEXT IY: FT = FT1: STYLE% = &H5555: NEXT IX: LOCATE 25, 25: PRINT "PRESIONE  <CR>  PARA CONTINUAR";
62 : IF INKEY$ = CHR$(13) THEN SCREEN 0: GOTO 63 ELSE 62
63 : END SUB
```

```
SUB GRAPHICS (N, M, B(), T, OPT(), OPT1(), CKA1, FR(), XOP(), UOP(), LW, LW1, FDI())
DIM UO(M, M), XW(N, M), XW1(N, M), XW2(N, M), X0(N, M), FR1(M, N), XAUX(N, M)
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: XW(I, J) = 0: XW1(I, J) = 0: XW2(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO M: FOR J = 1 TO M: UO(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
69 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 4, 27: COLOR 11: PRINT "INGRESE LA CONDICION INICIAL"
LOCATE 6, 21: PRINT "PARA EL VECTOR DE ESTADO OPTIMO     X*(0)"
LOCATE 8, 17: PRINT "ESTA CONDICION INICIAL DEBE SER DIFERENTE DE CERO"
LOCATE 10, 35: PRINT "MATRIZ   X*(0)": COLOR 5
L = 0: TA = 1
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M
LOCATE L + 12, 20 * TA + 3: PRINT "X*("; I; ","; J; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", X0(I, J): XAUX(I, J) = X0(I, J)
COLOR 5: TA = TA + 1
IF TA = 3 THEN L = L + 1: TA = 1
NEXT J: NEXT I
49 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 58: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 57
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 69
GOTO 49
57 : CLS : CALL CUADRO: OM = 0
LOCATE 3, 10: COLOR 11: PRINT "<<  S U B M E N U   D E   G R A F I C O S   P A R A   * F *  >>": COLOR 5
LOCATE 5, 5: COLOR 11: PRINT "<<  M A T R I Z   G A N A N C I A   D E   R E A L I M E N T A C I O N  >>": COLOR 5
LOCATE 9, 16: PRINT "(": LOCATE 9, 17: COLOR 11: PRINT 1: LOCATE 9, 20: COLOR 5
PRINT ") Graficos para  * F *  calculada"
LOCATE 11, 16: PRINT "(": LOCATE 11, 17: COLOR 11: PRINT 2: LOCATE 11, 20: COLOR 5
PRINT ") Graficos para  * F *  en estado estable"
LOCATE 13, 16: PRINT "(": LOCATE 13, 17: COLOR 11: PRINT 3: LOCATE 13, 20: COLOR 5
PRINT ") Graficos para nuevos datos de  * F *  en estado estable"
LOCATE 15, 16: PRINT "(": LOCATE 15, 17: COLOR 11: PRINT 4: LOCATE 15, 20: COLOR 5
PRINT ") Regresar al submenu de graficos"
LOCATE 23, 28: PRINT "INGRESE LA OPCION  [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 48: INPUT "", O5: COLOR 5
IF O5 = 1 THEN X = CKA1 - N * M: LW1 = 1: LW = 1: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: X0(I, J) = XAUX(I, J)
XOP(LW) = X0(I, J): LW = LW + 1: NEXT J: NEXT I: GOTO 127
IF O5 = 2 THEN X = CKA1 - N * M: LW1 = 1: LW = 1: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: X0(I, J) = XAUX(I, J)
XOP(LW) = X0(I, J): LW = LW + 1: NEXT J: NEXT I: GOTO 127
IF O5 = 3 THEN X = CKA1 - N * M: LW1 = 1: LW = 1: FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: X0(I, J) = XAUX(I, J)
XOP(LW) = X0(I, J): LW = LW + 1: NEXT J: NEXT I: GOTO 126
IF O5 = 4 THEN OM = 1: GOTO 94 ELSE 57
126 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 4, 29: COLOR 11: PRINT "INGRESE LOS VALORES PARA"
LOCATE 6, 15: PRINT "LA MATRIZ GANANCIA DE REALIMENTACION EN ESTADO ESTABLE"
LOCATE 9, 31: PRINT "MATRIZ  * F *  (mxn)": COLOR 5
LOCATE 10, 34: PRINT "n ="; N, " m ="; M
L = 0: TA = 1: LW = 1
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M
LOCATE L + 12, 20 * TA + 3: PRINT "F("; J; ","; I; ") = "; : COLOR 11: INPUT "", FR1(J, I): COLOR 5: TA = TA + 1
IF TA = 3 THEN L = L + 1: TA = 1
NEXT J: NEXT I
128 : LOCATE 23, 22: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 58: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 127
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 126
GOTO 128
127 : IF O5 = 1 THEN FOR J = 1 TO M: FOR I = 1 TO N: FR1(J, I) = FR(X): X = X + 1: NEXT I: NEXT J: GOTO 130
IF O5 = 2 THEN FOR J = 1 TO M: FOR I = 1 TO N: FR1(J, I) = FDI(J, I): X = X + 1: NEXT I: NEXT J: GOTO 130
IF O5 = 3 THEN FOR J = 1 TO M: FOR I = 1 TO N: X = X + 1: NEXT I: NEXT J
130 : FOR X1 = 1 TO M: FOR Y = 1 TO M: UO(Y, X1) = 0: FOR Z = 1 TO N
UA = -FR1(Y, Z) * X0(Z, X1): UO(Y, X1) = UO(Y, X1) + UA: NEXT Z: UOP(LW1) = 0: UOP(LW1) = UO(Y, X1)
```

```
LW1 = LW1 + 1: NEXT Y: NEXT X1
FOR X1 = 1 TO M: FOR Y = 1 TO N: XW(Y, X1) = 0: XW1(Y, X1) = 0: FOR Z = 1 TO N
UP = OPT(Y, Z) * X0(Z, X1): XW(Y, X1) = XW(Y, X1) + UP
UP1 = OPT1(Y, Z) * B(Z, X1): XW1(Y, X1) = XW1(Y, X1) + UP1
NEXT Z: XW1(Y, X1) = XW1(Y, X1) * T: NEXT Y: NEXT X1
FOR X1 = 1 TO M: FOR Y = 1 TO N: XW2(Y, X1) = 0: FOR Z = 1 TO M
UD = XW1(Y, Z) * UO(Z, X1): XW2(Y, X1) = XW2(Y, X1) + UD: NEXT Z: NEXT Y: NEXT X1
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M
X0(I, J) = XW(I, J) + XW2(I, J): XOP(LW) = 0: XOP(LW) = X0(I, J)
LW = LW + 1: NEXT J: NEXT I
IF X = N * M + 1 THEN 68
X = X - 2 * N * M: GOTO 127
68 : FT = 0: FT1 = 0: PT = 0: PT1 = 0
CLS : CALL CUADRO: LOCATE 4, 8: COLOR 11: PRINT "INGRESE DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ  < X*(nxm) >  A GRAFICARSE": COLOR 5
LOCATE 5, 32: COLOR 11: PRINT "n="; N: LOCATE 5, 42: PRINT "m="; M: COLOR 5
LOCATE 7, 22: PRINT "1er. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT PT: COLOR 5
LOCATE 9, 22: PRINT "2do. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT PT1: COLOR 5
LOCATE 14, 8: COLOR 11: PRINT "INGRESE DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ  < U*(mxm) >  A GRAFICARSE": COLOR 5
LOCATE 16, 22: PRINT "1er. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT FT: COLOR 5
IF M = 1 THEN 54
LOCATE 18, 22: PRINT "2do. ELEMENTO A GRAFICARSE  "; : COLOR 11: INPUT FT1: COLOR 5
54 : LOCATE 23, 20: PRINT "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS  [S/N] : [ ]"; : COLOR 11: LOCATE 23, 56: INPUT "", A$: COLOR 5
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 53
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN 68
GOTO 54
53 : SCREEN 3
LOCATE 1, 23: PRINT "GRAFICO DE X*("; PT; ")  Y  X*("; PT1; ")"
LOCATE 13, 23: PRINT "GRAFICO DE U*("; FT; ")  Y  U*("; FT1; ")"
LOCATE 5, 1: PRINT "X*("; PT; ")": LINE (75, 63)-(100, 63), , , &H7777
LOCATE 6, 1: PRINT "X*("; PT1; ")": LINE (75, 78)-(100, 78), , , &H5555
LOCATE 17, 1: PRINT "U*("; FT; ")": LINE (75, 231)-(100, 231), , , &H7777
LOCATE 18, 1: PRINT "U*("; FT1; ")": LINE (75, 246)-(100, 246), , , &H5555
LOCATE 6, 69: PRINT "δt ="; T: LOCATE 18, 69: PRINT "δt ="; T
RT = INT(PT / 10): RT1 = INT(PT1 / 10): PT = PT - 10 * RT + M * (RT - 1): PT1 = PT1 - 10 * RT1 + M * (RT1 - 1)
RFT = INT(FT / 10): RFT1 = INT(FT1 / 10): FT = FT - 10 * RFT + M * (RFT - 1): FT1 = FT1 - 10 * RFT1 + M * (RFT1 - 1)
VIEW SCREEN (140, 20)-(580, 315)
LINE (150, 20)-(150, 147)
STYLE% = &H7777: MAX = 0: AR = PT: MIN = 0
FOR JX = PT TO LW - N * M + PT - 1 STEP N * M
IF MAX < XOP(JX) THEN MAX = XOP(JX)
IF MIN > XOP(JX) THEN MIN = XOP(JX)
NEXT JX: PT = PT1: FOR JX = PT TO LW - N * N + PT - 1 STEP N * M
IF MAX < XOP(JX) THEN MAX = XOP(JX)
IF MIN > XOP(JX) THEN MIN = XOP(JX)
NEXT JX: PT = AR: MAX1 = MAX - MIN
FOR IX = 1 TO 2: CAL = 150
LINE (140, 37 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(579, 37 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
FOR IY = PT TO LW - 2 * N * M + PT - 1 STEP N * M
AQ = INT((LW - 1) / N * M
LINE (CAL, 37 + 100 * (MAX - XOP(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / AQ), 37 + 100 * (MAX - XOP(IY)) / MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / AQ), 37 + 100*(MAX-XOP(IY))/MAX1)-(CAL+430/AQ), 37+100*(MAX - XOP(IY + N * M)) / MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / AQ), 35 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(CAL + 430 / AQ), 39 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
CAL = CAL + 430 / AQ): NEXT IY: PT = PT1: STYLE% = &H5555: NEXT IX
MAX = 0: AR = FT: MIN = 0: STYLE% = &H7777: FOR JX = FT TO LW1 - M * M + FT - 1 STEP M * M
IF MAX < UOP(JX) THEN MAX = UOP(JX)
```

```
IF MIN > UOP(JX) THEN MIN = UOP(JX)
NEXT JX: IF M = 1 THEN 140
FT = FT1
FOR JX = FT TO LW1 - 2 * M * M + FT - 1 STEP M * M
IF MAX < UOP(JX) THEN MAX = UOP(JX)
IF MIN > UOP(JX) THEN MIN = UOP(JX)
NEXT JX
140 : FT = AR: MAX1 = MAX - MIN
FOR IX = 1 TO 2: CAL = 150
LINE (150, 187)-(150, 315)
LINE (140, 204 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(579, 204 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
FOR IY = FT TO LW1 - M * M + FT - 1 STEP M * M
W0 = INT((LW1 - 1) / M * M
LINE (CAL, 204 + 100 * (MAX - UOP(IY)) / MAX1)-(CAL + 430 / W0), 204 + 100 * (MAX - UOP(IY)) / MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / W0), 204 + 100 * (MAX - UOP(IY)) / MAX1)-(CAL+430/W0), 204+100*(MAX-UOP(IY+M*M))/MAX1), , , STYLE%
LINE (CAL + 430 / W0), 202 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)-(CAL + 430 / W0), 206 + 100 * (MAX1 + MIN) / MAX1)
CAL = CAL + 430 / W0
NEXT IY: IF M = 1 THEN 157
FT = FT1: STYLE% = &H5555: NEXT IX
157 : LOCATE 25, 25: PRINT "PRESIONE  <CR>  PARA CONTINUAR";
96 : IF INKEY$ = CHR$(13) THEN 94 ELSE 96
94 : IF OM = 1 THEN 125
SCREEN 0: GOTO 57
125 : SCREEN 0
END SUB


SUB FACT (L, L1)
IF L = 0 THEN L = 1: GOTO 7
L1 = 1
FOR I = 1 TO L
L1 = L1 * I
NEXT I
7 : END SUB


SUB INVERSA (R2(), MZ, N)
DIM K(N), H1(N)
FOR I = 1 TO N: K(I) = 0: H1(I) = 0: NEXT I
FOR KA = 1 TO MZ: IF R2(KA, KA) = 0 THEN GOTO 80
85 : G = 1 / R2(KA, KA): FOR I = 1 TO N: IF R2(I, KA) <> 0 THEN R2(I, KA) = R2(I, KA) * G
NEXT I: R2(KA, KA) = G: FOR J = 1 TO N: IF J = KA THEN 90
G = R2(KA, J): R2(KA, J) = 0: FOR I = 1 TO N: IF G = 0 THEN 95
R2(I, J) = R2(I, J) - G * R2(I, KA)
95 : NEXT I
90 : NEXT J
NEXT KA: IF C$ = "S" THEN GOTO 99
GOTO 67
80 : L = L + 1: FOR J = KA TO N
IF R2(KA, J) <> 0 THEN 105
NEXT J: PRINT "M ES SINGULAR": GOTO 67
105 : H1(L) = J: K(L) = KA: C$ = "S": FOR I = 1 TO N
X = R2(I, KA): R2(I, KA) = R2(I, J): R2(I, J) = X: NEXT I: GOTO 85
99 : FOR I = L TO 1 STEP -1: FOR J = 1 TO N: X = R2(H1(I), J)
R2(H1(I), J) = R2(K(I), J): R2(K(I), J) = X: NEXT J: NEXT I
67 : END SUB
```

```
SUB MULTIPLICACION (N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
FOR I = 1 TO N: FOR j = 1 TO N: D0(I, j) = 0: D1(I, j) = 0: D2(I, j) = 0
D3(I, j) = 0: NEXT j: NEXT I
FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO N: FOR Z = 1 TO N
D0(Y, X) = D0(Y, X) + P(Y, Z) * DD(Z, X)
D2(Y, X) = D2(Y, X) + P(Y, Z) * A(Z, X)
D3(Y, X) = D3(Y, X) + A1(Y, Z) * P(Z, X)
NEXT Z: NEXT Y: NEXT X
FOR X = 1 TO N: FOR Y = 1 TO N: FOR Z = 1 TO N
D1(Y, X) = D1(Y, X) + D0(Y, Z) * P(Z, X)
NEXT Z: NEXT Y: NEXT X
END SUB


SUB ORDENACION (N, E0(), E1(), L, M, IM(), IM0(), RE())
E9 = .0001: j = 0
32 : j = j + 1: FOR J1 = j + 1 TO N
IF ABS(E0(j) - E0(J1)) > E9 OR ABS(E1(j) - E1(J1)) > E9 THEN 70
T8 = E0(j + 1): E0(j + 1) = E0(J1): E0(J1) = T8: T8 = E1(j + 1)
E1(j + 1) = E1(J1): E1(J1) = T8: j = j + 1
70 : NEXT J1
IF j < N - 1 THEN 32
j = 0
72 : j = j + 1: FOR J1 = j + 1 TO N
IF ABS(E1(J1)) < E9 THEN 71
T8 = E0(j + 1): E0(j + 1) = E0(J1): E0(J1) = T8: T8 = E1(j + 1)
E1(j + 1) = E1(J1): E1(J1) = T8: j = j + 1
71 : NEXT J1
IF j < N - 1 THEN 72
FOR j = 1 TO N: IF E0(j) = 0 THEN 110
IF ABS(E1(j) / E0(j)) > E9 THEN 110
E1(j) = 0
110 : NEXT j
L = 1: M = 1
FOR j = 1 TO N
IF ABS(E1(j)) > 0 THEN 112
RE(M) = E0(j): M = M + 1
112 : NEXT j
FOR j = 1 TO N
IF E1(j) > 0 THEN IM(L) = E1(j): IM0(L) = E0(j): L = L + 1
NEXT j
FOR j = 1 TO N
IF E1(j) < 0 THEN IM(L) = E1(j): IM0(L) = E0(j): L = L + 1
NEXT j
END SUB
```

```
SUB RAICES (NP, E0(), E1(), R)
DIM C1(20), AP(NP + 1), MB(20)
FOR I = 1 TO 20: C1(I) = 0: MB(I) = 0: NEXT I
FOR I = 1 TO NP + 1: AP(I) = 0: NEXT I
FOR I = 0 TO NP: AP(I) = E0(I): NEXT I: UU = 1: V = -1: N = NP
505 : IF NP <= 2 THEN 1000
MB(0) = AP(0): C1(0) = AP(0): K = 0
524 : MB(1) = AP(1) + UU * MB(0): C1(1) = MB(1) + UU * C1(0)
FOR I = 2 TO (NP - 1): MB(I) = AP(I) + UU * MB(I - 1) + V * MB(I - 2)
C1(I) = MB(I) + UU * C1(I - 1) + V * C1(I - 2): NEXT I
MB(NP) = AP(NP) + UU * MB(NP - 1) + V * MB(NP - 2)
j = C1(NP - 2) ^ 2 - C1(NP - 3) * C1(NP - 1): IF j = 0 THEN 572
P = UU: Q = V
UU = UU - (MB(NP - 1) * C1(NP - 2) - MB(NP) * C1(NP - 3)) / j
V = V - (MB(NP) * C1(NP - 2) - MB(NP - 1) * C1(NP - 1)) / j
IF ABS(UU - P) <= .0000001 THEN IF ABS(V - Q) <= .0000001 THEN 574
IF K = 30 THEN UU = UU - 1: V = V + 1: GOTO 505
572 : K = K + 1: GOTO 524
574 : CALL ECUACION(E0(), E1(), UU, V, R, NP)
NP = NP - 2: FOR H = 0 TO NP: AP(H) = MB(H): NEXT H
GOTO 505
1000 : IF NP = 1 THEN R = R + 1: E0(R) = -AP(1) / AP(0): GOTO 588
UU = -AP(1) / AP(0): V = -AP(2) / AP(0)
CALL ECUACION(E0(), E1(), UU, V, R, NP)
588 : NP = N: END SUB


SUB TABDIA (N, DIA(), A$, M, JG)
RX = 5: ZX = 1
CLS : LOCATE 1, 8: COLOR 11
PRINT "MATRIZ  SOLUCION  EN  ESTADO  ESTABLE  DE  LA  ECUACION  DE  RICATTI": COLOR 5
LOCATE 3, 27: COLOR 11: PRINT "METODO  DE  DIAGONALIZACION": COLOR 5
LOCATE 4, 8: COLOR 11: PRINT STRING$(68, "="): COLOR 5: PRINT
LOCATE 5 - M + INT(18 / JG), 1
FOR IX = 1 TO M: FOR JX = 1 TO N
COLOR 11: PRINT "                              "; A$; "("; IX; JX; ") =": COLOR 5
NEXT JX: NEXT IX
FOR JX = 1 TO M: FOR ZX = 1 TO N
LOCATE RX - M + INT(18 / JG), 43
PRINT USING "###.#####"; DIA(JX, ZX)
RX = RX + 1: NEXT ZX: NEXT JX
97 : LOCATE 24, 25: PRINT "PRESIONE <"; : COLOR 11: PRINT "C"; : COLOR 5
PRINT "> PARA CONTINUAR  [ ]"; : LOCATE 24, 55: COLOR 11: INPUT "", C$: COLOR 5
IF C$ = "C" OR C$ = "c" THEN 98 ELSE 97
98 :
END SUB
```

```
SUB TABKU (N, KUTTA1(), CKA, A, T, S, M, A$, TW, JG)
RX = 5: ZX = 1: AX = A
28 : CLS : LOCATE 1, 17: COLOR 11: PRINT "MATRIZ  SOLUCION  DE  LA  ECUACION  DE  RICATTI": COLOR 5
IF S = 1 THEN LOCATE 2, 34: COLOR 11: PRINT "RUNGE-KUTTA": COLOR 5
IF S = 2 THEN LOCATE 2, 33: COLOR 11: PRINT "KALMAN-ENGLAR": COLOR 5
LOCATE 3, 17: COLOR 11: PRINT "==============================================": COLOR 5: PRINT
LOCATE 5 - M + INT(18 / JG), 1
IF TW = 1 OR TW = 2 THEN HK = M: M = N: N = HK
FOR IX = 1 TO M: FOR JX = 1 TO N
COLOR 11: PRINT "     "; A$; "("; IX; JX; ") =": COLOR 5
NEXT JX: NEXT IX: COLOR 11: PRINT "          t    =": COLOR 5:
IF TW = 1 OR TW = 2 THEN HK = M: M = N: N = HK
FOR LX = 1 TO 6
FOR JX = 1 TO N * M
IF ZX >= CKA THEN 31
LOCATE RX - M + INT(18 / JG), 9 * LX + 7
PRINT USING "###.###### "; KUTTA1(ZX)
ZX = ZX + 1: RX = RX + 1: NEXT JX
LOCATE RX - M + INT(18 / JG), 9 * LX + 7: PRINT USING "###.##### "; ABS(AX)
RX = 5: AX = AX - T: NEXT LX
34 : LOCATE 24, 25: PRINT "PRESIONE <"; : COLOR 11: PRINT "C"; : COLOR 5: PRINT "> PARA CONTINUAR  [ ]"; : COLOR 11
LOCATE 24, 55: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "C" OR V$ = "c" THEN 28 ELSE 34
31 : LOCATE 24, 25: PRINT "PRESIONE <"; : COLOR 11: PRINT "C"; : COLOR 5: PRINT "> PARA CONTINUAR  [ ]"; : COLOR 11
LOCATE 24, 55: INPUT "", V$: COLOR 5
IF V$ = "C" OR V$ = "c" THEN 33 ELSE 31
33 : END SUB


SUB TIEMPO (NP, T, A(), E0(), E1())
R = 0
CALL TRANSFERENCIA(NP, E0(), A(), R)
CALL RAICES(NP, E0(), E1(), R)
L = 1
60 : FOR KM = L + 1 TO NP: IF ABS(E1(L)) < ABS(E1(KM)) THEN L = KM: GOTO 60
NEXT KM
MI = ABS(E1(L)): L = 1
100 : FOR KM = L + 1 TO NP
IF ABS(E0(L)) < ABS(E0(KM)) THEN L = KM: GOTO 100
NEXT KM
MR = ABS(E0(L))
IF MI < MR THEN MI = MR
IF MI = 0 THEN 107
T = 1 / (10 * MI): GOTO 101
107 : CLS : CALL CUADRO: LOCATE 9, 13: COLOR 11: PRINT "POLO EN EL ORIGEN, ESCOGER CUALQUIER CONSTANTE DE TIEMPO"
LOCATE 11, 23: PRINT "SE RECOMIENDA UTILIZAR  * T = 0.1 *": COLOR 5
LOCATE 14, 35: PRINT "TIME =  "; : COLOR 11: INPUT "", T: COLOR 5
101 : END SUB
```

```
SUB TRANSFERENCIA (NP, E0(), MA(), R)
DIM XU(NP, NP), AU(NP, NP)
FOR I = 1 TO NP: FOR j = 1 TO NP
IF I = j THEN XU(I, j) = 1 ELSE XU(I, j) = 0: AU(I, j) = 0: E0(I) = 0
NEXT j: NEXT I: E0(0) = 1
FOR K = 1 TO NP: FOR I = 1 TO NP: FOR j = 1 TO NP
AU(I, j) = 0: FOR L = 1 TO NP: AU(I, j) = AU(I, j) + MA(I, L) * XU(L, j)
NEXT L: NEXT j: NEXT I
TR = 0
FOR I = 1 TO NP: FOR j = 1 TO NP: IF I = j THEN TR = TR + AU(I, j)
NEXT j: NEXT I
E0(K) = -TR / K
FOR I = 1 TO NP: FOR j = 1 TO NP
IF I = j THEN XU(I, j) = AU(I, j) + E0(K) ELSE XU(I, j) = AU(I, j)
NEXT j: NEXT I: NEXT K
END SUB
```

ANEXO B2

A continuación se presenta el listado de programas del método de Diagonalización con todas las subrutinas empleadas por este método.

```
REM---------------METODO DE DIAGONALIZACION-------------
22 : CLS : FOR I = 1 TO M: FOR J = 1 TO M: R2(I, J) = RY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO M: B(I, J) = BY(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: R1(I, J) = R1Y(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A(I, J) = AY(I, J): P(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
CALL INVERSA(R2(), M, N): MM = M
CALL D(R2(), B(), DD(), N, M, CC()): CALL At(N, A(), A1()): CALL TIEMPO(N, T, A(), E0(), E1())
CLS : LOCATE 15, 35: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.......": COLOR 5
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N
MA(I, J) = A(I, J) * (-T): MA(I + N, J + N) = -A1(I, J) * (-T)
MA(I, J + N) = -DD(I, J) * (-T): MA(I + N, J) = -R1(I, J) * (-T)
NEXT J: NEXT I: N = N * 2
CALL TIEMPO(N, T1, MA(), E0(), E1())
CLS : LOCATE 15, 35: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.......": COLOR 5
CALL ORDENACION(N, E0(), E1(), L, M, IM(), IM0(), RE()): M0 = 1: N0 = 1
FOR I = 1 TO M - 1: IF RE(I) >= 0 THEN REP(M0) = RE(I): M0 = M0 + 1: GOTO 55
REN(N0) = RE(I): N0 = N0 + 1
55 : NEXT I
IF M = 1 THEN 56
FOR I = 1 TO M0 - 1: E0(I) = REP(I): E1(I) = 0: NEXT I
FOR I = 1 TO N0 - 1: E0(I + M0 - 1) = REN(I): E1(I + M0 - 1) = 0: NEXT I
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: A(I, J) = MA(I, J): NEXT J: NEXT I
CALL MATRIXT(MA(), T1(), M, N, E0(), M0, I)
IF I >= N / 2 THEN 59
56 : FOR I = 1 TO L - 1: E0(M - 1 + I) = IM0(I): E1(M - 1 + I) = IM(I): NEXT I
CALL MATRIXTC(MA(), T1(), M, N, E0(), E1(), T2(), L)
GOTO 65
59 : FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 + N / 2 TO N
W12(I, J - N + 2) = T1(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 TO N / 2: R2(I, J) = W12(I, J): NEXT J: NEXT I
M = N / 2: FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 TO N / 2: NEXT J: NEXT I
CALL INVERSA(R2(), M, N)
FOR I = 1 + N / 2 TO N: FOR J = 1 + N / 2 TO N
W22(I - N + 2, J - N + 2) = T1(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 TO N / 2: DD(I, J) = R2(I, J)
P(I, J) = W22(I, J): NEXT J: NEXT I: N = M / 2
CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
GOTO 75
65 : FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO (M - 1) / 2
W(I, J) = T1(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N: JX = 1
FOR J = 1 TO L - 1 STEP 2: W(I, J + (M - 1) / 2) = T1(I, JX + M - 1): W(I, J + (M + 1) / 2) = T2(I, JX + M - 1)
JX = JX + 1: NEXT J: NEXT I: IF M > 1 THEN 66 ELSE 72
66 : FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 TO N / 2: R2(I, J) = W(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 + N / 2 TO N: FOR J = 1 TO N / 2:  P(I - N / 2, J) = W(I, J): NEXT J: NEXT I: GOTO 86
72 : FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 + N / 2 TO N: W12(I, J - N / 2) = W(I, J)
NEXT J: NEXT I: FOR I = 1 + N / 2 TO N: FOR J = 1 + N / 2 TO N
W22(I - N / 2, J - N / 2) = W(I, J): NEXT J: NEXT I
FOR I = 1 TO N / 2: FOR J = 1 TO N / 2: R2(I, J) = W12(I, J): P(I, J) = W22(I, J): NEXT J: NEXT I
86 : M = N / 2: CALL INVERSA(R2(), M, N): N = N / 2
FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: DD(I, J) = R2(I, J): NEXT J: NEXT I
CALL MULTIPLICACION(N, D0(), D1(), D2(), D3(), P(), DD(), A(), A1())
75 : FOR I = 1 TO N: FOR J = 1 TO N: MDI(I, J) = ABS(D0(I, J))
NEXT J: NEXT I: M = MM: FOR X0 = 1 TO N: FOR Y0 = 1 TO M: FOR Z0 = 1 TO N
UX = CC(Y0, Z0) * MDI(Z0, X0): FDI(Y0, X0) = FDI(Y0, X0) + UX: NEXT Z0: NEXT Y0: NEXT X0: GOTO 23
```

```
SUB MATRIXT (MA(), T1(), M, N, E0(), M0, I)
DIM T9(N), VEL(2 * N + 30, 4), F1(N, N + 1), A12(N, N + 1), F1R(N, N), A1(2 * N, 2 * N), P1(5)
M1 = 1: FOR I = 1 TO M0 - 1: IF I = M0 - 1 THEN 159
E9 = .001
IF ABS(E0(I) - E0(I + 1)) < E9 THEN 156
GOTO 159
156 : M1 = M1 + 1
GOTO 643
159 : E9 = .001
FOR II = 1 TO N: FOR JI = 1 TO N + 1: A1(II, JI) = 0: NEXT JI: NEXT II
FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO N
IF j = J1 THEN A1(j, J1) = MA(j, J1) - E0(I) ELSE A1(j, J1) = MA(j, J1)
F1(j, J1) = A1(j, J1): A12(j, J1) = F1(j, J1): NEXT J1: NEXT j
04 = 1: CALL RANGO(N, 04, N0, T9(), A1(), VEL(), E9, R, M1, I1)
CLS : LOCATE 15, 35: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.......": COLOR 5
IF R = N THEN 178
GOTO 281
178 : PRINT "LA MATRIZ A1 TIENE VECTORES COLUMNA L.I.": GOTO 111
281 : Q = N - R: IF Q = M1 THEN 554
IF Q = 1 THEN 589
Q1 = Q: K9 = 2
DIM X1(N, M1 + 1), V0(Q1), V1(N, Q1), VV(M1)
307 : FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO N: T8 = 0
FOR J2 = 1 TO N: T8 = T8 + F1(j, J2) * A12(J2, J1): NEXT J2
F1R(j, J1) = T8: A1(j, J1) = F1R(j, J1): NEXT J1: NEXT j
04 = 0: CALL RANGO(N, 04, N0, T9(), A1(), VEL(), E9, R, M1, I1)
IF R = N - M1 THEN 338
IF R > N - M1 THEN 333
PRINT "EL RANGO DE LA MATRIZ F1=[A-IT] NO DEBE SER MENOR DE (N-M1)"
PRINT "PARA QUE EL PROBLEMA TENGA SOLUCION": GOTO 111
333 : K9 = K9 + 1: FOR L3 = 1 TO N: FOR L4 = 1 TO N: F1(L3, L4) = F1R(L3, L4)
NEXT L4: NEXT L3: GOTO 307
338 : Q = M1: CALL NORMALIZADO(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1())
M3 = M1 + 1
M9 = 0: M6 = 0: M7 = 0: M8 = 0: j = 1
355 : M2 = 0: T8 = I + j - M1
FOR J1 = 1 TO N
F1(J1, N + 1) = 0
FOR J2 = 1 TO N: F1(J1, N + 1) = F1(J1, N + 1) + F1(J1, J2) * T1(J2, T8)
NEXT J2
IF ABS(F1(J1, N + 1)) < E9 THEN 366
M2 = 1: GOTO 367
366 : F1(J1, N + 1) = 0
367 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 372
GOTO 384
372 : IF K9 = 2 THEN 377
M7 = M7 + 1: VV(M7) = T8: GOTO 435
377 : M9 = M9 + 1: FOR J1 = 1 TO N: V1(J1, M9) = T1(J1, T8): NEXT J1: GOTO 435
384 : IF M3 = 2 THEN 435
386 : FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = T1(J1, T8): NEXT J1: M3 = M3 - 1
IF K9 = 2 THEN 393 ELSE 398
393 : FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = F1(J1, N + 1): NEXT J1
GOTO 407
398 : FOR LI = 1 TO N: FOR LJ = 1 TO N: A1(LI, LJ) = A12(LI, LJ): NEXT LJ: NEXT LI
```

```
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N: X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + A12(J1, J2) * T1(J2, T8)
NEXT J2: NEXT J1
407 : M4 = 2
409 : M3 = M3 - 1: M2 = 0
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N: X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + A1(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1)
NEXT J2: IF ABS(X1(J1, M3)) < E9 THEN 419
M2 = 1: GOTO 420
419 : X1(J1, M3) = 0
420 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 432
IF M3 = 1 THEN 429
M4 = M4 + 1: IF M4 <= K9 THEN 409
M4 = M4 - 1
429 : M3 = M3 + M4: M9 = 0: GOTO 435
432 : M9 = 1: M6 = M6 + 1: V0(M6) = M3 + 1
435 : IF M8 = 0 THEN 438
IF M9 = 1 THEN 519
GOTO 446
438 : IF M3 = 1 THEN 532
IF j = M1 THEN 443
j = j + 1: GOTO 355
443 : J4 = 0: M8 = 1: IF M7 = 0 THEN 488
446 : J4 = J4 + 1: IF J4 > M7 THEN 487
T8 = VV(J4): IF M3 = 2 THEN 451 ELSE 386
451 : FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = T1(J1, T8): NEXT J1: M3 = M3 - 1: M2 = 0
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N: X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + A12(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1)
NEXT J2: IF ABS(X1(J1, M3)) < E9 THEN 466
M2 = 1: GOTO 467
466 : X1(J1, M3) = 0
467 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 472
469 : M3 = M3 + 1: GOTO 446
472 : FOR J1 = 1 TO M1 - M3 + 1: FOR J2 = 1 TO N: A1(J2, J1) = X1(J2, M3 + J1)
NEXT J2: NEXT J1: O4 = 0: N = M1 - M3 + 1
CALL RANGO(N, O4, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, M1, I1)
IF M2 = 5 THEN 521
IF M2 = 10 THEN 535
IF R = N1 THEN 484 ELSE 469
484 : M6 = M6 + 1: V0(M6) = M3 + 1: GOTO 532
487 : J4 = 0
488 : IF M9 = 0 THEN 528
489 : J4 = J4 + 1
FOR J2 = 1 TO N: A1(J2, 1) = V1(J2, J4): NEXT J2
FOR J2 = 2 TO M1 + 2 - M3: T8 = M3 + J2 - 1
FOR J1 = 1 TO N: A1(J1, J2) = X1(J1, T8): NEXT J1: NEXT J2
O4 = 0: N = M1 - M3 + 2: CALL RANGO(N, O4, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, M1, I1)
IF R = N1 THEN 510 ELSE 517
510 : FOR J2 = 1 TO N: X1(J2, M3) = V1(J2, J4): NEXT J2
M6 = M6 + 1: V0(M6) = M3: M3 = M3 - 1
IF M3 = 1 THEN 532
517 : IF J4 = M9 THEN 528 ELSE 489
519 : M2 = 5: GOTO 472
```

```
521 : M2 = 0: IF R = N1 THEN 525 ELSE M3 = M3 + M4: GOTO 446
525 : IF M3 = 1 THEN 532 ELSE 446
528 : PRINT "NO SE PUEDE ENCONTRAR TODOS LOS VP Y VPG, CORRESPONDIENTE"
PRINT "AL VALOR PROPIO LAMBDA("; I; ") = "; E0(I): GOTO 111
532 : IF M8 = 1 THEN 538 ELSE M2 = 10: GOTO 472
535 : M2 = 0: IF R = N1 THEN 538 ELSE 528
538 : IF M6 = Q1 THEN 545
PRINT "ERROR:EL NO. DE VP. DE LA MATRIZ X1 DEBE SER IGUAL A LA DEGENERACION"
PRINT "       Q1 DE LA MATRIZ A1, PARA EL VALOR PROPIO LAMBDA("; I; ")="; E0(I)
GOTO 111
545 : T8 = I - M1
FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO M1: T1(j, T8 + J1) = X1(j, J1 + 1): NEXT J1: NEXT j
GOTO 642
554 : CALL NORMALIZADO(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1())
GOTO 642
589 : CALL NORMALIZADO(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1())
FOR J4 = 1 TO M1 - 1: T8 = I + J4 - M1
FOR J1 = 1 TO N: A1(J1, N + 1) = T1(J1, T8): NEXT J1
NE = 1
FOR J1 = 1 TO NO
P1(1) = VEL(J1, NE): P1(2) = VEL(J1, NE + 1): P1(3) = VEL(J1, NE + 2)
P1(4) = VEL(J1, NE + 3)
ON P1(1) GOTO 609, 614, 618
609 : T8 = A1(P1(2), N + 1): A1(P1(2), N + 1) = A1(P1(3), N + 1)
A1(P1(3), N + 1) = T8: GOTO 623
614 : A1(P1(2), N + 1) = A1(P1(2), N + 1) / P1(3): GOTO 623
618 : T8 = A1(P1(2), N + 1): T8 = T8 + A1(P1(3), N + 1) * P1(4)
IF ABS(T8) > E9 THEN 622
T8 = 0
622 : A1(P1(2), N + 1) = T8
623 : NEXT J1
FOR IX = 1 TO 4: P1(IX) = 0: NEXT IX
J1 = I1: T8 = I + J4 - M1 + 1
627 : IF ABS(A1(J1, N + 1)) < E9 THEN 632
PRINT "LA ECUACION PARA HALLAR EL VPG."; T8; "DE T1 CORRESPONDIENTE"
PRINT "AL VALOR PROPIO LAMBDA ("; I; ")  NO TIENE SOLUCION"
GOTO 111
632 : IF J1 = N THEN 637 ELSE J1 = J1 + 1: GOTO 627
637 : FOR J1 = 1 TO I1 - 1: T1(T9(J1), T8) = A1(J1, I1) + A1(J1, I1 + 1): NEXT J1
T1(T9(I1), T8) = -1: NEXT J4
642 : M1 = 1
643 : NEXT I
111 : FOR IX = M0 TO M - 1: FOR JX = 1 TO N
T1(JX, IX) = -T1(JX, IX - M0 + 1): NEXT JX: NEXT IX
END SUB
```

```
SUB MATRIXTC (MA(), T1(), M, N, E0(), E1(), T2(), L)
DIM F2(N, N + 1), A22(N, N + 1), VEL(2 * N + 30, 5), T9(N), F1(N, N + 1), A12(N, N + 1)
DIM F1R(N, N + 1), F2R(N, N + 1), F1M(N, N + 1), A2(N, N + 1), A1(N, N + 1), P1(5)
M1 = 1: TAUX = M - 1 + (L - 1) / 2
FOR I = M TO TAUX
IF I = N THEN 1360
E9 = .001
IF ABS(E0(I) - E0(I + 1)) < E9 THEN 1320 ELSE 1360
1320 : IF ABS(E1(I) - E1(I + 1)) < E9 THEN M1 = M1 + 1: GOTO 5970
1360 : E9 = .001
FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO N
A1(j, J1) = 0: A2(j, J1) = 0: A1(j, J1) = MA(j, J1): F1(j, J1) = A1(j, J1): A12(j, J1) = F1(j, J1): NEXT J1
A1(j, j) = MA(j, j) - E0(I): A2(j, j) = -E1(I): F2(j, j) = A2(j, j): A22(j, j) = F2(j, j): NEXT j
04 = 1: CALL RANGOC(N, 04, N0, T9(), A1(), VEL(), E9, R, A2(), M1, I1)
CLS : LOCATE 15, 35: COLOR 11: PRINT "CALCULANDO.......": COLOR 5
IF R = N THEN 1530
GOTO 2440
1530 : PRINT "LA MATRIZ Z TIENE VECTORES COLUMNA L.I.": GOTO 1110
2440 : Q = N - R: IF Q = M1 THEN 5090
IF Q = 1 THEN 5410
Q1 = Q: K9 = 2
DIM X1(N, M1 + 1), V0(Q1), V1(N, Q1), V2(N, Q1), X2(N, M1 + 1), V3(M1)
2640 : FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO N: T8 = 0: U8 = 0
FOR J2 = 1 TO N
T8 = T8 + F1(j, J2) * A12(J2, J1) - F2(j, J2) * A22(J2, J1)
U8 = U8 + F1(j, J2) * A22(J2, J1) + F2(j, J2) * A12(J2, J1): NEXT J2
F1R(j, J1) = T8: A1(j, J1) = F1R(j, J1): F1M(j, J1) = U8: A2(j, J1) = F1M(j, J1): NEXT J1: NEXT j
04 = 0: CALL RANGOC(N, 04, N0, T9(), A1(), VEL(), E9, R, A2(), M1, I1)
IF R = N - M1 THEN 2970
IF R > N - M1 THEN 2950
PRINT "EL RANGO DE LA MATRIZ F1+jF2=[A-IT]^K9 NO DEBE SER MENOR DE (N-M1)"
PRINT "PARA QUE EL PROBLEMA TENGA SOLUCION": GOTO 1110
2950 : K9 = K9 + 1: FOR L3 = 1 TO N: FOR L4 = 1 TO N: F1(L3, L4) = F1R(L3, L4)
F2(L3, L4) = F1M(L3, L4): NEXT L4: NEXT L3: GOTO 2640
2970 : Q = M1: CALL NORMALIZADOC(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1(), A2(), T2())
M3 = M1 + 1
M9 = 0: M6 = 0: M7 = 0: M8 = 0: j = 1
3070 : M2 = 0: T8 = I + j - M1
FOR J1 = 1 TO N
F1(J1, N + 1) = 0: F2(J1, N + 1) = 0
FOR J2 = 1 TO N:  U9 = F1(J1, J2) * T1(J2, T8) - F2(J1, J2) * T2(J2, T8)
U7 = F1(J1, J2) * T2(J2, T8) + F2(J1, J2) * T1(J2, T8)
F1(J1, N + 1) = F1(J1, N + 1) + U9: F2(J1, N + 1) = F2(J1, N + 1) + U7: NEXT J2
AUX8 = SQR(F1(J1, N + 1) ^ 2 + F2(J1, N + 1) ^ 2)
IF AUX8 < E9 THEN F1(J1, N + 1) = 0: F2(J1, N + 1) = 0: GOTO 3230
M2 = 1
3230 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 3260
GOTO 3360
3260 : IF K9 = 2 THEN 3300
M7 = M7 + 1: V3(M7) = T8: GOTO 3910
3300 : M9 = M9 + 1: FOR J1 = 1 TO N: V1(J1, M9) = T1(J1, T8): V2(J1, M9) = T2(J1, T8)
NEXT J1: GOTO 3910
3360 : IF M3 = 2 THEN 3910
3370 : FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = T1(J1, T8): X2(J1, M3) = T2(J1, T8): NEXT J1: M3 = M3 - 1
```

```
IF K9 = 2 THEN FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = F1(J1, N + 1): X2(J1, M3) = F2(J1, N + 1): NEXT J1: GOTO 3620
FOR LI = 1 TO N: FOR LJ = 1 TO N:  A1(LI, LJ) = A12(LI, LJ): A2(LI, LJ) = A22(LI, LJ): NEXT LJ: NEXT LI
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0: X2(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N:  U9 = A12(J1, J2) * T1(J2, T8) - A22(J1, J2) * T2(J2, T8)
U7 = A12(J1, J2) * T2(J2, T8) + A22(J1, J2) * T1(J2, T8): X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + U9: X2(J1, M3) = X2(J1, M3) + U7
NEXT J2: NEXT J1
3620 : M4 = 2
3630 : M3 = M3 - 1: M2 = 0
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0: X2(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N: U9 = A1(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1) - A2(J1, J2) * X2(J2, M3 + 1)
U7 = A1(J1, J2) * X2(J2, M3 + 1) + A2(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1): X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + U9
X2(J1, M3) = X2(J1, M3) + U7
NEXT J2: AUX8 = SQR(X1(J1, M3) ^ 2 + X2(J1, M3) ^ 2)
IF AUX8 < E9 THEN 3770
M2 = 1: GOTO 3790
3770 : X1(J1, M3) = 0: X2(J1, M3) = 0
3790 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 3880
IF M3 = 1 THEN 3850
M4 = M4 + 1: IF M4 <= K9 THEN 3910
M4 = M4 - 1
3850 : M3 = M3 + M4: M9 = 0: GOTO 3910
3880 : M9 = 1: M6 = M6 + 1: V0(M6) = M3 + 1
3910 : IF M8 = 0 THEN 3940
IF M9 = 1 THEN M2 = 5: GOTO 4320 ELSE 4010
3940 : IF M3 = 1 THEN 4880
IF j <> M1 THEN j = j + 1: GOTO 3370
J4 = 0: M8 = 1: IF M7 = 0 THEN 4490
4010 : J4 = J4 + 1: IF J4 > M7 THEN 4480
T8 = V3(J4): IF M3 <> 2 THEN 3370
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = T1(J1, T8): X2(J1, M3) = T2(J1, T8): NEXT J1: M3 = M3 - 1: M2 = 0
FOR J1 = 1 TO N: X1(J1, M3) = 0: X2(J1, M3) = 0
FOR J2 = 1 TO N: U9 = A12(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1) - A22(J1, J2) * X2(J2, M3 + 1)
U7 = A12(J1, J2) * X2(J2, M3 + 1) + A22(J1, J2) * X1(J2, M3 + 1): X1(J1, M3) = X1(J1, M3) + U9
X2(J1, M3) = X2(J1, M3) + U7
NEXT J2: AUX8 = ABS(X1(J1, M3) ^ 2 + X2(J1, M3) ^ 2)
IF AUX8 < E9 THEN X1(J1, M3) = 0: X2(J1, M3) = 0: GOTO 4280
M2 = 1
4280 : NEXT J1
IF M2 = 0 THEN 4320
4300 : M3 = M3 + 1: GOTO 4010
4320 : FOR J1 = 1 TO M1 - M3 + 1: FOR J2 = 1 TO N: A1(J2, J1) = X1(J2, M3 + J1)
A2(J2, J1) = X2(J2, M3 + J1): NEXT J2: NEXT J1: 04 = 0: N = M1 - M3 + 1
CALL RANGOC(N, 04, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, A2(), M1, I1)
IF M2 = 5 THEN 4790
IF M2 = 10 THEN 4910
IF R = N1 THEN M6 = M6 + 1: V0(M6) = M3 + 1: GOTO 4880 ELSE 4300
4480 : J4 = 0
4490 : IF M9 = 0 THEN 4850
4500 : J4 = J4 + 1
FOR J2 = 1 TO N: A1(J2, 1) = V1(J2, J4): A2(J2, 1) = V2(J2, J4): NEXT J2
FOR J2 = 2 TO M1 + 2 - M3: T8 = M3 + J2 - 1
FOR J1 = 1 TO N: A1(J1, J2) = X1(J1, T8): A2(J1, J2) = X2(J1, T8): NEXT J1
NEXT J2: 04 = 0: N = M1 - M3 + 2
CALL RANGOC(N, 04, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, A2(), M1, I1)
```

```
IF R <> N1 THEN 4750
FOR J2 = 1 TO N: X1(J2, M3) = V1(J2, J4): X2(J2, M3) = V2(J2, J4): NEXT J2: M6 = M6 + 1: V3(M6) = M3
M3 = M3 - 1
IF M3 = 1 THEN 4880
4750 : IF J4 = M9 THEN 4850 ELSE 4500
4790 : M2 = 0: IF R <> N1 THEN M3 = M3 + M4: GOTO 4010
IF M3 = 1 THEN 4880 ELSE 4010
4850 : PRINT "NO SE PUEDE ENCONTRAR TODOS LOS VP Y VPG, CORRESPONDIENTE"
PRINT "AL VALOR PROPIO LAMBDA("; I; ") = "; E0(I); " "; E1(I): GOTO 1110
4880 : IF M8 = 1 THEN 4940 ELSE M2 = 10: GOTO 4320
4910 : M2 = 0: IF R <> N1 THEN 4850
4940 : IF M6 = Q1 THEN 4990
PRINT "ERROR:EL NO. DE VP. DE LA MATRIZ X1+jX2 DEBE SER IGUAL A LA DEGENERACION"
PRINT "      Q1 DE LA MATRIZ A1, PARA EL VALOR PROPIO LAMBDA("; I; ")="; E0(I)
GOTO 1110
4990 : T8 = I - M1
FOR j = 1 TO N: FOR J1 = 1 TO M1: T1(j, T8 + J1) = X1(j, J1 + 1): T2(j, T8 + J1) = X2(j, J1 + 1)
NEXT J1: NEXT j
GOTO 5980
5090 : CALL NORMALIZADOC(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1(), A2(), T2())
GOTO 5980
5410 : CALL NORMALIZADOC(Q, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1(), A2(), T2())
NE = 1
FOR J4 = 1 TO M1 - 1: T8 = I + J4 - M1
FOR J1 = 1 TO N: A1(J1, N + 1) = T1(J1, T8): A2(J1, N + 1) = T2(J1, T8): NEXT J1: NE = 1
FOR J1 = 1 TO NO: P1(1) = VEL(J1, NE): P1(2) = VEL(J1, NE + 1): P1(3) = VEL(J1, NE + 2)
P1(4) = VEL(J1, NE + 3): P1(5) = VEL(J1, NE + 4)
ON P1(1) GOTO 5560, 5640, 5700
5560 : T8 = A1(P1(2), N + 1): A1(P1(2), N + 1) = A1(P1(3), N + 1): A1(P1(3), N + 1) = T8: T8 = A2(P1(2), N + 1)
A2(P1(2), N + 1) = A2(P1(3), N + 1): A2(P1(3), N + 1) = T8: GOTO 5780
5640 : U9 = A1(P1(2), N + 1) * P1(3) - A2(P1(2), N + 1) * P1(4)
A2(P1(2), N + 1) = A1(P1(2), N + 1) * P1(4) + A2(P1(2), N + 1) * P1(3)
A1(P1(2), N + 1) = U9: GOTO 5780
5700 : U9 = A1(P1(3), N + 1) * P1(4) - A2(P1(3), N + 1) * P1(5)
U7 = A1(P1(3), N + 1) * P1(5) + A2(P1(3), N + 1) * P1(4)
A1(P1(2), N + 1) = A1(P1(2), N + 1) + U9: A2(P1(2), N + 1) = A2(P1(2), N + 1) + U7
IF ABS(A1(P1(2), N + 1)) > E9 THEN 5760
A1(P1(2), N + 1) = 0
5760 : IF ABS(A2(P1(2), N + 1)) > E9 THEN 5780
A2(P1(2), N + 1) = 0
5780 : NEXT J1
FOR IX = 1 TO 5: P1(IX) = 0: NEXT IX
J1 = I1: T8 = I + J4 - M1 + 1
5820 : AUX8 = SQR(A1(J1, N + 1) ^ 2 + A2(J1, N + 1) ^ 2)
IF AUX8 < E9 THEN 5870
PRINT "LA ECUACION PARA HALLAR EL VPG."; T8; "DE T1,T2 CORRESPONDIENTE"
PRINT "AL VALOR PROPIO LAMBDA ("; I; ")  NO TIENE SOLUCION"
GOTO 1110
5870 : IF J1 = N THEN 5910 ELSE J1 = J1 + 1: GOTO 5820
5910 : FOR J1 = 1 TO I1 - 1: T1(T9(J1), T8) = A1(J1, I1) + A1(J1, I1 + 1)
T2(T9(J1), T8) = A2(J1, I1) + A2(J1, I1 + 1): NEXT J1
T1(T9(I1), T8) = -1: T2(T9(I1), T8) = 0: NEXT J4
IF AX = 1 THEN 1110
5980 : M1 = 1
5990 : NEXT I
1110 : END SUB
```

```
SUB RANGO (N, O4, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, N1, I1)
N1 = N: IF O4 = 0 THEN 1960
NO = 0
1960 : FOR I1 = 1 TO N: T9(I1) = I1: NEXT I1
FOR I1 = 1 TO N1: IF I1 = N1 THEN 2700
I2 = I1: J2 = I1: T8 = ABS(A1(I1, I1))
FOR I3 = I1 TO N: FOR J3 = I1 TO N1: IF T8 >= ABS(A1(I3, J3)) THEN 2110
I2 = I3: J2 = J3: T8 = ABS(A1(I3, J3))
2110 : NEXT J3: NEXT I3
IF T8 < E9 THEN 2740
IF I1 = I2 THEN 2270
IF O4 = 0 THEN 2220
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 1: VEL(NO, NE + 1) = I1: VEL(NO, NE + 2) = I2: VEL(NO, NE + 3) = 0
2220 : FOR j = I1 TO N1: T8 = A1(I1, j): A1(I1, j) = A1(I2, j): A1(I2, j) = T8: NEXT j
2270 : IF I1 = J2 THEN 2390
FOR j = 1 TO N: T8 = A1(j, I1): A1(j, I1) = A1(j, J2): A1(j, J2) = T8: NEXT j
T8 = T9(I1): T9(I1) = T9(J2): T9(J2) = T8
2390 : T8 = A1(I1, I1): IF O4 = 0 THEN 2460
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 2: VEL(NO, NE + 1) = I1: VEL(NO, NE + 2) = T8: VEL(NO, NE + 3) = 0
2460 : FOR j = I1 TO N1: A1(I1, j) = A1(I1, j) / T8: NEXT j
FOR K2 = 1 TO N: IF K2 = I1 THEN 2650
T8 = -A1(K2, I1): IF O4 = 0 THEN 2600
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 3: VEL(NO, NE + 1) = K2: VEL(NO, NE + 2) = I1: VEL(NO, NE + 3) = T8
2600 : FOR j = I1 TO N1: A1(K2, j) = A1(K2, j) + A1(I1, j) * T8
IF ABS(A1(K2, j)) > E9 THEN 2641
A1(K2, j) = 0
2641 : NEXT j
2650 : NEXT K2: NEXT I1: R = N1: GOTO 2780
2700 : IF ABS(A1(N1, N1)) < E9 THEN 2740
GOTO 2390
2740 : R = I1 - 1
2780 : END SUB


SUB NORMALIZADO (O, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1())
FOR j = 1 TO O: U8 = I + j - M1: T8 = I1 + j - 1
FOR J1 = 1 TO I1 - 1: T1(T9(J1), U8) = A1(J1, T8): NEXT J1
FOR J1 = I1 TO N: IF J1 = T8 THEN 5690
T1(T9(J1), U8) = 0: GOTO 5701
5690 : T1(T9(J1), U8) = -1
5701 : NEXT J1
FOR J1 = 1 TO N: T1(J1, U8) = T1(J1, U8) / T8: NEXT J1
CALL NORM1(N, T1(), U8): NEXT j
END SUB


SUB NORMALIZADOC (O, I, M1, I1, T9(), A1(), N, T1(), A2(), T2())
FOR j = 1 TO O: U8 = I + j - M1: T8 = I1 + j - 1
FOR J1 = 1 TO I1 - 1: T1(T9(J1), U8) = A1(J1, T8): T2(T9(J1), U8) = A2(J1, T8): NEXT J1
FOR J1 = I1 TO N: IF J1 = T8 THEN 5230
T1(T9(J1), U8) = 0: T2(T9(J1), U8) = 0: GOTO 5250
5230 : T1(T9(J1), U8) = -1: T2(T9(J1), U8) = 0
5250 : NEXT J1: CALL NORMC1(N, T1(), T2(), U8): NEXT j
END SUB
```

```
SUB RANGOC (N, O4, NO, T9(), A1(), VEL(), E9, R, A2(), N1, I1)
N1 = N: IF O4 = 0 THEN 1630
NO = 0
1630 : FOR I1 = 1 TO N: T9(I1) = I1: NEXT I1: FOR I1 = 1 TO N1: IF I1 = N1 THEN 2370
I2 = I1: J2 = I1: T8 = SQR(A1(I1, I1) ^ 2 + A2(I1, I1) ^ 2): FOR I3 = I1 TO N: FOR J3 = I1 TO N1
AUX8 = SQR(((A1(I3, J3)) ^ 2) + (A2(I3, J3)) ^ 2): IF T8 >= AUX8 THEN 1770
I2 = I3: J2 = J3: T8 = SQR(A1(I3, J3) ^ 2 + A2(I3, J3) ^ 2)
1770 : NEXT J3: NEXT I3
IF T8 < E9 THEN 2391
IF I1 = I2 THEN 1920
IF O4 = 0 THEN 1840
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 1: VEL(NO, NE + 1) = I1: VEL(NO, NE + 2) = I2: VEL(NO, NE + 3) = 0: VEL(NO, NE + 4)=0
1840 : FOR j = I1 TO N1: T8 = A1(I1, j): A1(I1, j) = A1(I2, j): A1(I2, j) = T8
T8 = A2(I1, j): A2(I1, j) = A2(I2, j): A2(I2, j) = T8: NEXT j
1920 : IF I1 = J2 THEN 2050
FOR j = 1 TO N: T8 = A1(j, I1): A1(j, I1) = A1(j, J2): A1(j, J2) = T8: T8 = A2(j, I1): A2(j, I1) = A2(j, J2)
A2(j, J2) = T8: NEXT j: T8 = T9(I1): T9(I1) = T9(J2): T9(J2) = T8
2050 : U8 = A1(I1, I1) ^ 2 + A2(I1, I1) ^ 2: T8 = A1(I1, I1) / U8: U8 = -A2(I1, I1) / U8
IF O4 = 0 THEN 2111
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 2: VEL(NO, NE + 1) = I1: VEL(NO, NE + 2) = T8: VEL(NO, NE + 3) = U8: VEL(NO, NE + 4)=
2111 : FOR j = I1 TO N1: U9 = A1(I1, j) * T8 - A2(I1, j) * U8: A2(I1, j) = A1(I1, j) * U8 + A2(I1, j) * T8
A1(I1, j) = U9: NEXT j: FOR K2 = 1 TO N: IF K2 = I1 THEN 2330
T8 = -A1(K2, I1): U8 = -A2(K2, I1): IF O4 = 0 THEN 2230
NO = NO + 1: NE = 1: VEL(NO, NE) = 3: VEL(NO, NE + 1) = K2: VEL(NO, NE + 2) = I1: VEL(NO, NE + 3) = T8
VEL(NO, NE + 4) = U8
2230 : FOR j = I1 TO N1: U7 = T8 * A1(I1, j) - A2(I1, j) * U8: U9 = T8 * A2(I1, j) + U8 * A1(I1, j)
A1(K2, j) = A1(K2, j) + U7: A2(K2, j) = A2(K2, j) + U9: IF ABS(A1(K2, j)) > E9 THEN 2300
A1(K2, j) = 0
2300 : IF ABS(A2(K2, j)) > E9 THEN 2320
A2(K2, j) = 0
2320 : NEXT j
2330 : NEXT K2
REM FOR IM = 1 TO N: FOR JM = 1 TO N: PRINT "A1"; A1(IM, JM), "A2"; A2(IM, JM): NEXT JM: NEXT IM
NEXT I1: R = N1: GOTO 2400
2370 : AUX8 = SQR(A1(N1, N1) ^ 2 + A2(N1, N1) ^ 2): IF AUX8 < E9 THEN 2391 ELSE 2350
2391 : R = I1 - 1
2400 : END SUB


SUB NORM1 (N, T1(), U8)
T8 = 0: FOR J1 = 1 TO N: T8 = T8 + T1(J1, U8) ^ 2: NEXT J1
T8 = SQR(T8): FOR J1 = 1 TO N: T1(J1, U8) = T1(J1, U8) / T8: NEXT J1
END SUB


SUB NORMC1 (N, T1(), T2(), U8)
T8 = 0: FOR J1 = 1 TO N: T8 = T8 + T1(J1, U8) ^ 2 + T2(J1, U8) ^ 2: NEXT J1
T8 = SQR(T8): FOR J1 = 1 TO N: T1(J1, U8) = T1(J1, U8) / T8: T2(J1, U8) = T2(J1, U8) / T8: NEXT J1
END SUB
```

APENDICES

APENDICE A.

NOTACION Y SIMBOLOS

- Los capítulos se han dividido en secciones, las cuales se han enumerado como 1.1, 1.2, 1.3, y así sucesivamente. La secciones se han subdividido en subsecciones, las cuales se han enumerado como 2.1.1, 2.1.2, etc. Los teoremas, los ejemplos, las figuras se han enumerado de acuerdo al capítulo y sección en que constan.
- Los vectores se han denotado con letras minúsculas con una raya abajo (tal como $\underline{x}$ y $\underline{u}$), las matrices por letras mayúsculas con la misma raya (tal como $\underline{A}$ y $\underline{B}$), y los escalares con letra sin raya (tal como A y B). Los componentes de vectores o matrices se han designado con uno o dos subíndices de acuerdo a sus dimensiones (tal como x_1 y P_{12}).
- Los siguientes símbolos y operaciones se han utilizado a lo largo del trabajo de investigación:

A1 OPERACIONES

1.	$\underline{x}^T$	transpuesta del vector $\underline{x}$.
2.	$\underline{A}^T$	transpuesta de la matriz $\underline{A}$.
3.	$\underline{A}^{-1}$	inversa de la matriz cuadrada $\underline{A}$.
4.	$\Phi(x,y)$	función escalar de dos variables.
5.	$\underline{a}(\underline{x},\underline{y})$	función vectorial de dos variables.

6.	$\det(\underline{A})$	determinante de una matriz cuadrada $\underline{A}$
7.	tr $\underline{A}$	traza de la matriz cuadrada $\underline{A}$
8.	$\dot{\underline{x}}$	primera derivada de la función vectorial $\underline{x}$.
9.	$\begin{array}{c\|c} \underline{A} & \underline{C} \\ \hline \underline{B} & \underline{D} \end{array}$	partición de una matriz en bloques: $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, y $\underline{D}$.
10.	$\min\limits_{\beta}$	mínimo respecto a β.

A2 SIMBOLOS COMUNMENTE UTILIZADOS

1.	0, $\underline{0}$	cero, cero vector, cero matriz.
2.	$\int$	integrales.
3.	$\lim\limits_{t\to\infty}$	límite cuando t tiende a infinito.
4.	$\underline{I}$	matriz identidad.
5.	n	dimensión del estado $\underline{x}$.
6.	m	dimensión del control $\underline{u}$.
7.	t	tiempo.
8.	$\underline{P}(t)$	matriz de Ricatti.
9.	$\underline{P}$	matriz de Ricatti en estado estable.
10.	$\underline{\Phi}(t,t_o)$	matriz de transición.
11.	$\underline{z}(t)$	vector de salida.
12.	$\underline{x}(t)$	vector de estado.
13.	$\underline{u}(t)$	vector de control.
14.	$\underline{f}$	transformación lineal.
15.	a_{ij}	elementos de la matriz $\underline{A}$.
16.	t_o	tiempo inicial.

17. t_f tiempo final.

18. Σ sumatorio.

19. ∞ infinito.

APENDICE B.

CONCEPTOS BASICOS DE LOS SISTEMAS DE CONTROL OPTIMO.

B1 Definición de estado de un sistema.

Estado de un sistema a $t=t_0$ es el conjunto:

$x_i(t)$; $i=1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

que siendo conocido se utiliza para determinar sus valores futuros y los de las salidas del sistema, conocidas las entradas del mismo para $t \geq t_0$. El vector de estado es $\underline{x}(t)$.

B2 Clasificación de los sistemas.

Los sistemas pueden clasificarse de acuerdo a la forma de sus ecuaciones de estado. Dependiendo del tipo de sistema, la ecuación de estado puede tomar las siguientes formas:

a) no lineal, variante en el tiempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{a}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t]$$

b) no lineal, invariante en el tiempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{a}[\underline{x}(t), \underline{u}(t)]$$

c) lineal, variante en el tiempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$$

d) lineal, invariante en el tiempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

B3 Definición de la salida de un sistema.

Las cantidades físicas que pueden ser medidas se llaman medidas de un sistema y se denotan por:

$$z_i(t); \quad i=1, 2, 3, \ldots\ldots m.$$

y el vector de salida se denota por $\underline{z}(t)$.

B4 Ecuaciones de salida.

a) Si la salida está relacionada con los estados y el control por una relación no lineal y variante en el tiempo, las ecuaciones de salida serán:

$$\underline{z}(t) = \underline{d}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t]$$

b) Si la relación es lineal e invariante en el tiempo:

$$\underline{z}(t) = \underline{D}\ \underline{x}(t) + \underline{C}\ \underline{u}(t)$$

B5 Definición de proceso de control.

El conjunto $[\underline{x}(t), z(t)]$ se llama proceso de control.

B6 Solución de la ecuación diferencial de estado para sistemas lineales.

B6.1 Ecuación de estado homogénea. Matriz de transición.

Considérese la ecuación homogénea: $\underline{x}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t)$. Si $\underline{A}(t)$ es continua para todo t, entonces siempre tiene una solución que puede ser considerada como:

$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t,t0)$; en donde $\underline{\Phi}(t,t_0)$ es la <u>matriz de</u>

transición que es solución de la ecuación diferencial matricial:
$$\frac{d}{dt}\,\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

B6.2 Ecuación de estado lineal no homogénea.

Considérese la ecuación de estado lineal:

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Si $A(t)$, $B(t)$ y $u(t)$ son continuas para todo t, se tiene la siguiente solución:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \text{ para todo } t$$

B6.3 Sistemas invariantes en el tiempo.

Para los sistemas invariantes en el tiempo:

$$x(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

valen las soluciones anteriores con la siguiente matriz de transición:

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

en donde la exponencial de la matriz cuadrada P está definida como:

$$e^{P} = I + P + P^2/2! + P^3/3! + \ldots..$$

B7 Definiciones de Controlabilidad.

Sea el sistema cuya ecuación de estado es:

$$x(t) = a[x(t),\ u(t),\ t]$$

y para $t \geq t_0$, $x(t_0) = x_0$

Si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ y un control:

$$\underline{u}(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

que transfiere el estado $\underline{x}_0$ al origen en el tiempo t_1, se dice que el estado $\underline{x}_0$ es controlable a t_0. Si todos los valores de $\underline{x}_0$ son controlables para cualquier $t0$, se dice que el sistema es <u>completamente controlable</u> o simplemente <u>controlable</u>.

Kalman demostró que un sistema lineal fijo es controlable, si la matriz:

$$[\ \underline{B} \mid \underline{A}\ \underline{B} \mid \underline{A}^2\underline{B} \mid \ldots\ldots\mid \underline{A}^{n-1}\underline{B}\ ]$$

tiene característica n.

B8 Definición de Observabilidad.

Si observando la salida $\underline{z}(t)$ durante un intervalo finito de tiempo $[t_0, t_1]$, puede determinarse el estado $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, se dice que el estado $\underline{x}_0$ son observables para cualquier t_0; entonces, se dice que el sistema es <u>completamente observable</u> o simplemente <u>observable</u>.

Para sistemas lineales fijos, la observabilidad se prueba si la matriz:

$$[\ \underline{D}^T \mid \underline{A}^T\underline{D}^T \mid (\underline{A}^T)^2\underline{D}^T \mid \ldots\ldots \mid (\underline{A}^T)^{n-1}\underline{D}^T\ ]$$

tiene característica n.

B9 Definiciones de Estabilidad.

B9.1 Estabilidad en el sentido de Liapunov.

Considérese la ecuación de estado:

$$\underline{x}(t) = \underline{a}[\underline{x}(t), t]$$

con la solución $\underline{x}_0(t)$. Entonces, la solución es estable en el sentido de Liapunov si para cualquier t_0 y cualquier $\epsilon>0$ existe un $\delta(\epsilon,t_0)>0$ tal que:

$$\|\underline{x}(t_0)-\underline{x}_0(t_0)\| \leq \delta \quad \text{implica que:} \quad \|\underline{x}(t)-\underline{x}_0(t)\| < \epsilon$$

para todo $t\geq t_0$.

B9.2 Estabilidad asintótica.

La solución $\underline{x}_0(t)$ de la ecuación de estado:

$$\underline{x}(t) = \underline{a}[\underline{x}(t), t]$$

es asintóticamente estable si:

a) es estable en el sentido de Liapunov.

b) Para todo $t0$ existe un $\sigma(t0)>0$ tal que:

$$\|\underline{x}(t_0)-\underline{x}_0(t_0)\| \leq \sigma \quad \text{implica que:} \quad \|\underline{x}(t)-\underline{x}_0(t)\| \to 0$$

cuando $t\to\infty$.

B9.3 Teoremas relacionados con la estabilidad.

i) <u>Teorema 1.</u>

El sistema lineal fijo: $\underline{x}(t) = A\,\underline{x}(t)$

es estable en el sentido de Liapunov si y solo si:

a) Todos los vectores característicos de A tienen partes reales negativas, y

b) A cualquier valor característico en el eje imaginario con multiplicidad m corresponde exactamente m vectores característicos de la matriz $\underline{A}$.

ii) Teorema 2.

El sistema lineal fijo: $\underline{x}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t)$

es asintóticamente estable si y solo si los valores característicos de $\underline{A}$ tienen partes reales negativas.

iii) Teorema 3.

Un sistema es asintóticamente estable en la vecindad de un punto de equilibrio en el origen, si existe una función escalar $V(\underline{x})$ tal que:

a) $V(\underline{x})$ sea continua y sean continuas sus primeras derivadas parciales en la región alrededor del origen.

b) $V(\underline{x}) > 0$ para $\underline{x} \neq 0$.

c) $V(\underline{0}) = 0$.

d) $V(\underline{x}) < 0$ para $\underline{x} \neq 0$.

iv) Teorema 4.

Un sistema es asintóticamente estable globalmente si existe una función escalar $V(\underline{x})$ tal que:

a) $V(\underline{x})$ es continua y tiene las primeras derivadas también continuas en todo el espacio de estado.

b) $V(\underline{x}) > 0$ para $\underline{x} \neq 0$.

c) $V(\underline{0}) = 0$.

d) $V(\underline{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\underline{x} \rightarrow \infty$.

e) $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$.

f) Siempre que $V(\underline{x}) \neq 0$ excepto en $\underline{x} = 0$ o en cualquier lugar del espacio de estados en donde $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ no constituyen puntos de trayectoria del sistema.

v) Definición 1.

La matriz constante $\underline{A}$ nxn es asintóticamente estable si todos sus valores característicos tienen partes reales negativas.

B10 Relación entre la ecuación de Ricatti de tiempo continuo y la ecuación de Ricatti de tiempo discreto.

Considérese un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial.

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

donde $x(t)$ y $u(t)$ son las variables de estado y control respectivamente, A y B son constantes, y el criterio a ser minimizado es:

$$x^2(T) + \Gamma \int_0^T u^2(t)\, dt$$

donde T es el tiempo final, y Γ es el factor de ponderación.

$x(T)$ y $u(t)$ son cuadráticos porque tanto los valores positivos como los negativos son importantes. Esta característica de medir refleja el deseo de que el estado final $x(T)$ llegue a cero sin el excesivo esfuerzo de control.

Esta ecuación diferencial debe ser aproximado a una ecuación de diferencias, por lo que la integral se aproxima a un sumatorio.

Esta aproximación se realiza dividiendo el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$ en N incrementos iguales, δt. Entonces, se tiene

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \approx A\, x(t) + B\, u(t)$$

ó $$x(t + \delta t) = [1 + A.\delta t]x(t) + B.\delta t.u(t)$$

Se asume que δt es pequeño, de esta manera la señal de control puede ser aproximada a una función constante que cambia solamente en el instante $t=0, \delta t, \ldots\ldots, (N-1)\delta t$; es decir, para $t=k.\delta t$,

$$x\{[k+1].\delta t\} = [1 + a.\delta t]x(k.\delta t) + b.\delta t\, u(k.\delta t)$$

$$k = 0, 1, \ldots\ldots, N-1$$

$x(k\ \delta t)$ está referido al k-ésimo valor de x y está denotado por $x(k)$. Entonces, la ecuación de diferencias puede escribirse como:

$$x(k+1) = [1 + A.\delta t]x(k) + B.\delta t.u(k)$$

En forma similar, el criterio de rendimiento es:

$$x^2(N.\delta t) + \Gamma[\int_{0}^{\delta t} u^2(0)dt+\int_{\delta t}^{2\delta t} u^2(\delta t)dt+...+\int_{(N-1)\delta t}^{N\delta t} u^2([N-1]\delta t)dt\ ]$$

ó

$$x^2(N) + \Gamma.\delta t[u^2(0) + u^2(1) + ...+ u^2(n-1)]$$

$$x^2(N) + \Gamma.\delta t \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)$$

Ahora, si A y B son matrices; entonces, es necesario transformar de matrices continuas a matrices discretas de la siguiente manera:

Como se sabe la solución a la ecuación de diferencias del sistema discreto es:

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]}\ B\ u(\tau)\ d\tau$$

Luego:

$$Ad = e^{AT}$$

$$Bd = \int_{kT}^{(k+1)T} B\, e^{A[(k+1)T-\tau]}\ d\tau$$

Discretizando la salida del sistema: $z(t) = D\ x(t)$

Se tiene: $z(k+1) = D\ x(k+1)$

Luego:

$$Cd = C$$

APENDICE C.

MATEMATICAS: TEOREMAS Y DEFINICIONES BASICAS.

Se han utilizado muchos teoremas, definiciones, resultados y técnicas matemáticas a través de todo este trabajo de investigación, en este apéndice se verán algunos conceptos básicos.

PARTE I: ALGEBRA LINEAL.

1) Transformaciones lineales.

Definición 1.- Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una transformación lineal de V en W es una función $\underline{f}$ de V en W tal que:

$$\underline{f}(a\,\underline{x} + \underline{y}) = a\,\underline{f}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{y})$$

para todos los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de V y todos los escalares a de K.

Definición 2.- Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, un operador lineal $\underline{P}$ sobre V es una transformación lineal de V en V.

Definición 3.- Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, una transformación lineal J de V en el cuerpo de escalares K, se denomina funcional lineal sobre V.

2) Valores y vectores característicos.

Definición 1.- Si $\underline{P}$ es un operador lineal en V, los vectores $\underline{x}$ que cumplen:

$$\underline{P}(\underline{x}) = \tau\, \underline{x}\ ;\ (\tau \in K,\ \underline{x} \neq \underline{0})$$

se denominan autovectores o vectores característicos y los números τ se denominan autovalores o valores característicos del operador $\underline{P}$.

3) Matrices y operaciones elementales con matrices.

Definición 1.- La traza de una matriz cuadrada $\underline{A}$ es la suma de los elementos de su diagonal. Esto es:

$$\mathrm{tr}\ \underline{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Definición 2.- Para derivar o integrar una matriz, se derivan o se integran cada uno de sus elementos.

Definición 3.- Para hacer una partición a una matriz se trazan líneas horizontales y verticales entre dos filas o columnas y los subconjuntos formados se consideran como matrices.

Definición 4.- Una matriz cuadrada se llama singular si $|A| = 0$. Caso contrario se lo denomina no-singular.

Definición 5.- Una matriz diagonal es una matriz cuadrada tal que los elementos fuera de la diagonal son todos cero.

Definición 6.- Una matriz transpuesta A^T es la matriz que resulta al intercambiar las filas y las columnas de una matriz dada $\underline{A}$.

Definición 7.- Una matriz es simétrica si $\underline{A} = \underline{A}^T$.

Definición 8.- La norma de una matriz $\underline{A}$, denotada por $\|\underline{A}\|$, es el menor valor de K tal que: $\|\underline{A}\underline{x}\| \leq K \|\underline{x}\|$ para todo $\underline{x}$.

Definición 9.- Una forma cuadrática Q es un polinomio real homogéneo en las variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$; tal que:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

en las que todas las a_{ij} son reales. Y se expresa:

$$Q = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = \langle \underline{x}, \underline{A}\, \underline{x} \rangle$$

Definibilidad y semidefinibilidad.

Definición 10.- Una matriz $\underline{A}$ simétrica nxn se dice definida positiva si todos los valores característicos de $\underline{A}$ son positivos; es decir,

$$\Gamma_i > 0, \text{ para todo } i.$$

Definición 11.- Una matriz $\underline{A}$ simétrica nxn se dice semidefinida positiva si todos los valores característicos de $\underline{A}$ son positivos y al menos un valor característico de $\underline{A}$ es cero; es decir,

$$\Gamma_i \geq 0, \text{ para todo } i$$

$$\& \qquad \Gamma_{i_1} = 0, \text{ para algún } i_1 \in [1, 2, \ldots n]$$

Definición 12.- Una matriz $\underline{A}$ simétrica nxn es definida negativa si todos los valores característicos de $\underline{A}$

son negativos; es decir,

$$\Gamma_i < 0, \text{ para todo } i$$

<u>Definición 13</u>.- Una matriz $\underline{A}$ simétrica $n x n$ es semidefinida negativa si todos los valores característicos de $\underline{A}$ son negativos y al menos un valor característico de $\underline{A}$ es cero; es decir,

$$\Gamma_i \leq 0, \text{ para todo } i$$

$$\& \qquad \Gamma_{i1} = 0, \text{ para algún } i_1 \in [1, 2, \ldots n]$$

4) Propiedades importantes de las matrices.

1) $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$
2) $\underline{A}(\underline{B}\ \underline{C}) = (\underline{A}\ \underline{B})\underline{C}$
3) $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\underline{B} + \underline{A}\underline{C}$
4) $(\underline{B} + \underline{C})\underline{A} = \underline{B}\ \underline{A} + \underline{C}\ \underline{A}$
5) $(\underline{A}\ \underline{B})^T = \underline{B}^T\ \underline{A}^T$
6) $a^T = a$
7) $|\underline{A}^T| = |\underline{A}|$
8) $|\underline{A}\ \underline{B}| = |\underline{A}|\,|\underline{B}|$
9) $(\underline{A}\ \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
10) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
11) $(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}$
12) $|\underline{A}^{-1}| = |\underline{A}|^{-1}$
13) $(\underline{A}\ \underline{A}^{-\underline{1}})^T = \underline{A}\ \underline{A}^{-\underline{1}}$
14) $(\underline{A}^{-\underline{1}})^{-\underline{1}} = \underline{A}$
15) $(\underline{A}^{-\underline{1}}\ \underline{A})^T = \underline{A}^{-\underline{1}}\ \underline{A}$
16) $(\underline{A}^T)^{-\underline{1}} = (\underline{A}^{-\underline{1}})^T$

Definiciones, propiedades y teoremas útiles.

<u>Teorema 1.</u>

Si los valores característicos de una matriz $n x n$ son distintos, entonces los vectores propios son linealmente independientes.

Teorema 2.

Si A es una matriz cuadrada, entonces el escalar Γ es un valor característico o un autovalor de A si se satisface la ecuación:

$$|\Gamma I - A| = 0.$$

Definición 1.- P y S son matrices reales simétricas.

Si: $x^T P x > 0$, para todo $x \neq 0$, P es una matriz definida positiva.

Si: $x^T S x \geq 0$, para todo x; entonces, S es una matriz semidefinida positiva.

Propiedad 1.- Sea Q una forma cuadrática: $Q = x^T A x$, donde A es una matriz $n x n$ simétrica, entonces se cumple:

1) Q será definida positiva si A es diagonal y los elementos de la diagonal son mayores que cero.

2) Q será definida positiva si todos los n valores característicos de A son positivos.

3) Sea D cualquier matriz real no singular; entonces, $A \equiv D^T D$ genera una función definida positiva de forma cuadrática.

4) Si todos los menores principales guía de la matriz A son positivos, la forma cuadrática real Q es definida positiva.

Propiedad 2.- La forma cuadrática $Q = x^T A x$ será semidefinida positiva si:

1) Todos los valores característicos de $\underline{A}$ son no negativos.

2) Todos los menores principales de $\underline{A}$ son no negativos.

Teorema 3.

La suma de una matriz definida positiva y una matriz semidefinida positiva es una matriz definida positiva.

Teorema 4.

Si una matriz es definida positiva, entonces existe su inversa.

Propiedad 3.- Sea $\underline{Y}$ una matriz columna mx1, $\underline{z}$ una matriz columna mx1, y $\underline{M}$ una matriz mxm. Entonces:

$$\frac{\delta}{\delta \underline{Y}}[\underline{Y}^T \underline{M}\, \underline{z}] = \underline{M}\, \underline{z}$$

Propiedad 4.- El gradiente de la forma cuadrática $\underline{Y}^T \underline{M}\, \underline{Y}$ se obtiene como:

$$\frac{\delta}{\delta \underline{Y}}[\underline{Y}^T \underline{M}\, \underline{Y}] = \underline{M}\, \underline{Y} + \underline{M}^T \underline{Y}$$

Si $\underline{M}$ es una matriz simétrica, entonces:

$$\frac{\delta}{\delta \underline{Y}}[\underline{Y}^T \underline{M}\, \underline{Y}] = 2\, \underline{M}\, \underline{Y}$$

PARTE II: VARIABLES DE ESTADO

Ventajas de utilizar la descripción a variables de estado.

1) Las variables de estado son útiles para trabajar en el computador digital o analógico.

2) La descripción es válida para sistemas lineales y no-lineales.

3) Utilizados en investigaciones teóricas.

4) La definición de estado tiene una fuerte motivación física.

5) Se obtiene mayor información que con otras definiciones.

PARTE III: TECNICAS NUMERICAS.

Métodos de Runge-Kutta para las ecuaciones del tipo: $y'=f(x,y)$

$$y(x + h) = y(x) + \delta y$$

<u>Método 1</u>: Euler (error del orden de h^2)

$$\delta y = K1$$

$$K1 = h[f(x,y)]$$

<u>Método 2</u>: Euler-Cauchy (error del orden de h^3)

$$\delta y = \tfrac{1}{2} (K1 + K2)$$

$$K1 = h[f(x,y)]$$

$$K2 = h[f(x + h,\ y + K1)]$$

<u>Método 3</u>: Heun (error del orden h^4)

$$\delta y = \tfrac{1}{4} (K1 + 3\ K3)$$

$$K1 = h[f(x,y)]$$

$$K2 = h[f(x + h/3,\ y + K1/3)]$$

$$K3 = h[f(x + 2\ h/3,\ y + 2\ K2/3)]$$

Método 4: Kutta-Simpson (Regla del un tercio)

(error del orden de h^5)

$$\delta y = 1/6\ (K1 + 2\ K2 + 2\ K3 + K4)$$

$$K1 = h[f(x,y)]$$

$$K2 = h[f(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}K1)]$$

$$K3 = h[f(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}K2)]$$

$$K4 = h[f(x + h,\ y + K3)]$$

Método 5: Kutta-Simpson (Regla de los tres octavos)

(error del orden de h^5)

$$\delta y = 1/8\ (K1 + 3\ K2 + 3\ K3 + K4)$$

$$K1 = h[f(x,y)]$$

$$K2 = h[f(x + h/3,\ y + K1/3)]$$

$$K3 = h[f(x + 2h/3,\ y + K2 - K1/3)]$$

$$K4 = h[f(x + h,\ y + K4 - K2 + K1)]$$

APENDICE D.

EXPLICACION DE LOS SUBPROGRAMAS IMPLEMENTADOS EN EL COMPUTADOR

En todos los subprogramas que a continuación se van a detallar, trabajan con las dimensiones de la matrices involucradas en el sistema; es decir, el orden del sistema "n" y el orden de la entrada "m".

SUBPROGRAMA " At "

Esta subrutina calcula la transpuesta de la matriz "A", la cual es la matriz de entrada a esta subrutina es la misma matriz "A", y se utiliza una matriz "A1", para almacenar la matriz transpuesta.

SUBPROGRAMA " CUADRO "

Esta subrutina se utiliza para enmarcar la pantalla, para lograr una mejor presentación de los diferentes menús y tablas.

SUBPROGRAMA " D "

Esta subrutina realiza algunas operaciones útiles que facilitará obtener la ecuación diferencial de Ricatti.

La matriz R2 es la matriz inversa de R2; es decir, que en el subprograma "INVERSA" se obtiene (en la misma matriz), la matriz inversa de R2. En B1 se obtiene la transpuesta de la matriz B. Por último se asigna la matriz D para almacenar el resultado del producto de $B.R2^{-1}.B^{T}$.

SUBPROGRAMA " ECUACION "

En esta subrutina se obtienen las raíces del polinomio característico, estos valores se colocan en dos vectores. E0 es el vector que almacena la parte real de las raíces y E1 es el vector que almacena la parte imaginaria de estas raíces.

SUBPROGRAMA " ENTRADA "

El presente subprograma almacena en las matrices OPT y OPT1, las matrices de transición con la respectiva constante de tiempo calculado en el subprograma "TIEMPO". OPT es la matriz de transición al tiempo T, mientras que OPT1 es la matriz de transición al tiempo T/2, y estos serán utilizados en el cálculo del vector óptimo.

SUBPROGRAMA " FACT "

Este un subprograma pequeño que se incorporó para calcu lar el factorial de un número, este cálculo es utilizado en el programa anterior para obtener las diferentes matrices de transición. En el programa ingresa el número del que se va a encontrar el factorial, este número se almacena en la variable L y su factorial se obtiene en la variable L1.

SUBPROGRAMA " GRAFIC "

Este subprograma contiene las instrucciones para graficar dos elementos de la matriz solución de Ricatti P(i,j), y dos elementos de la matriz ganancia de realimentación F(i,j).

Ambos gráficos se presentan simultáneamente en la pantalla del computador, a la vez se muestran los pasos discretos de tiempo, y además se diferencian los gráficos de los elementos de la misma matriz, mediante la utilización de diferentes tipos de línea de graficación.

SUBPROGRAMA " INVERSA "

En este subprograma se obtiene la inversa de cualquier matriz, se utiliza la matriz R2, con la cual ingresa la matriz a ser invertida, y en la misma matriz R2 se obtiene la inversa. Inicialmente este subprograma se utiliza para obtener la inversa de la matriz de ponderación R2.

SUBPROGRAMA " MATRIXT "

Este subprograma, es uno de los mas largos y se lo utiliza para obtener los vectores característicos de los autovalores reales, como variables de entrada que se utilizan son: E0, el cual contiene los valores característicos reales; y la matriz A del sistema o la matriz compuesta MA (en las que se involucran las matrices A, B, R2, R1 y A^T); el vector que contiene dichos vectores característicos es T1.

SUBPROGRAMA " MATRIXTC "

De igual forma que el subprograma anterior, este se lo utiliza para obtener los vectores característicos de los autovalores complejos, como variables de entrada que se utilizan son: E0 y E1, los cuales contienen los valores característicos reales e imaginarios; y la matriz A del sistema o la matriz compuesta MA (en las que se involucran las matrices A, B, R2, R1 y A^T); las matrices que contienen dichos vectores característicos son T1 y T2.

SUBPROGRAMA " MULTIPLICACION "

Este subprograma se lo utiliza para obtener multiplicaciones entre matrices cuadradas, se realizan cuatro multipli caciones simultáneamente, los resultados se obtienen en las matrices cuadradas D0, D1, D2, y D3. Las matrices a multi plicarse se ingresan en las variables A, P, A^T y D. De acuerdo a estas operaciones se obtienen la matriz solución de la ecuación diferencial de Ricatti y se lo utiliza en el método iterativo Runge-Kutta.

SUBPROGRAMA " NORM1 "

En este subprograma se obtienen los vectores caracterís ticos normalizados reales, como vectores de entrada se tienen E0 y T8, en este último se encuentra la norma del vector característico T1, y el vector donde se obtienen los vectores característicos normalizados es T1; este es un subprograma que se encuentra dentro del subprograma " MATRIZT " en el que se obtiene dichos vectores.

SUBPROGRAMA " NORMALIZADO "

Este subprograma es el primer paso para obtener los vectores característicos normalizados reales, ya que el sub programa que lo complementa es el anterior " NORM1 ".

SUBPROGRAMA " NORMALIZADOC "

Este subprograma es el primer paso para obtener los vectores característicos normalizados complejos, ya que el subprograma que lo complementa es el " NORMC1 ".

SUBPROGRAMA " NORMC1 "

En este subprograma se obtienen los vectores característicos normalizados complejos, como vectores de entrada se tienen E0, E1, y T8, en este último se encuentra la norma del vector característico T1 y T2, y el vector donde se obtienen los vectores característicos normalizados es T1 y T2; este es un subprograma que se encuentra dentro del subprograma " MATRIZTC " en el que se obtienen dichos vectores.

SUBPROGRAMA " ORDENACION "

Este programa se lo utiliza para ordenar las raíces del sistema; es decir, se ordenan las raíces que son positivas y luego las negativas cuando se tratan de raíces reales; si se tratan de raíces complejas primero se ordenan las partes reales negativas y luego las positivas. Este trabajo se lo realiza con la ayuda de dos vectores auxiliares para realizar el cambio, la ordenación se encuentran en los mismos vectores E0 y E1.

SUBPROGRAMA " RAICES "

Este subprograma se lo denomina "BAIRSTOW", y tiene por objeto procesar la información y dejarlo listo para obtener las raíces del sistema, que se lo realiza en el subprograma "ECUACION".

SUBPROGRAMA " RANGO "

Este es un pequeño subprograma en el que se obtiene el rango de la matriz MA(como se dijo anteriormente, involucran las matrices A, B, R2, R1, A^T), esto se lo hace mediante el método de Gauss-Jordan para la solución de un sistema de n ecuaciones algebraicas; es decir, mediante operaciones entre filas y columnas de la matriz MA. De esta forma se conoce, si los vectores columna son linealmente independientes. Este valor se lo guarda en la variable "R".

SUBPROGRAMA " RANGOC "

Al igual que el subprograma anterior, este es un pequeño subprograma en el que se obtiene el rango de la matriz MA (si los valores característicos son complejos), esto se lo hace mediante el método de Gauss-Jordan; de esta manera se conoce, si los vectores columna son linealmente independientes. Este valor se lo guarda en la variable "R".

sistema en lazo cerrado; y está tomada diez veces menor al de los valores característicos. Esta constante de tiempo se encuentra almacenada en la variable "T".

SUBPROGRAMA " TRANSFERENCIA "

En este subprograma se obtiene el polinomio característico del sistema, estos valores se encuentran en el vector "E0" y la potencia del polinomio se lo guarda en el vector "NP". Después de obtener estos valores se pasan a obtener las raíces del sistema mediante el subprograma "RAICES".

SUBPROGRAMA " GRAPHICS "

Este subprograma contiene las instrucciones para graficar dos elementos del vector de estado óptimo $x^*(i,j)$, y dos elementos del vector de entrada óptima $u^*(i,j)$.

Ambos gráficos se presentan simultáneamente en la pantalla del computador, a la vez se muestran los pasos discretos de tiempo, y además se diferencian los gráficos de los elementos del mismo vector, mediante la utilización de diferentes tipos de línea de graficación.

Existe la posibilidad de variar la matriz ganancia de realimentación en estado estable, y observar la influencia que se tiene en el comportamiento del vector de estado óptimo y en el vector de entrada óptima.

MANUAL DE UTILIZACION.

Al ejecutar el programa "PROGRAMA.EXE", se ingresa a un menú llamado "MENU PRINCIPAL", en el cual se pueden seleccionar 5 opciones:

```
(1) Ingreso de datos de las matrices del sistema.
(2) Método de Runge-Kutta.
(3) Método de Kalman-Englar.
(4) Método de Diagonalización.
(5) Salir.
```

En este instante solo se pueden escoger las opciones (1) y (5). Entonces, si usted desea abandonar el programa, escoger la opción (5) y después <ENTER>. Caso contrario, escoger la opción (1) y después <ENTER>. Inmediatamente aparece otro submenú denominado "INGRESO DE DATOS", en el que se deben ingresar los siguientes datos:

- el orden del sistema "n".
- el orden del vector de entrada "m".
- los elementos de la matriz "A" del sistema por filas.
- los elementos de la matriz "B" del sistema por filas.
- los elementos de la matriz "R3" del criterio de rendimiento por filas, y
- los elementos de la matriz "R2" del criterio de rendimiento.

Se debe presionar <ENTER> después de cada elemento ingresado. A continuación aparece el siguiente mensaje "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS [S/N]"; si se ingresaron los datos erradamente escoger "N" y <ENTER> para realizar un nuevo ingreso de datos y continuar con el procedimiento anterior. Caso contrario, escoger la opción "S" y <ENTER>; de tal manera, que los datos ingresados se almacenan en las matrices previstas en el programa, luego aparece en la pantalla el "MENÚ PRINCIPAL".

En esta oportunidad la opción (1), no se puede escoger, ya que el programa espera trabajar con los elementos de las matrices ingresadas.

Si se escoge la opción (2), entonces quiere decir que se va a trabajar con el método de Runge-Kutta, al presionar <ENTER> aparece en la pantalla un nuevo submenú denominado "INGRESO DE LIMITES DE INTEGRACION DEL CRITERIO", en el cual se debe ingresar los siguientes datos:

- LÍMITE SUPERIOR DE INTEGRACIÓN.- en este paso se debe ingresar el valor máximo al cual va a llegar la integración directa.
- LÍMITE INFERIOR DE INTEGRACIÓN.- se debe ingresar el valor mínimo desde el cual se va a empezar la integración directa.
- CONDICIONES INICIALES DE LA MATRIZ *P* AL TIEMPO FINAL TF.- en este caso se debe ingresar las condiciones iniciales de la matriz solución de la ecuación de Ricatti

P al tiempo final de la integración.

Después de cada ingreso de datos presionar <ENTER>.

Luego, aparece un mensaje que dice; "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS [S/N]"; al escoger la opción "N" y <ENTER> se deben ingresar nuevamente los datos mencionados anteriormente; si se escoge la opción "S" y <ENTER>, entonces empieza el proceso de cálculo de los valores de las matrices "P" y "F"; matrices solución de la ecuación de Ricatti y matriz ganancia de realimentación respectivamente, es así que aparece en la pantalla la palabra "CALCULANDO".

Al finalizar este proceso de cálculo, aparece un nuevo submenú denominado "SUBMENU DE TABLAS", en este caso se tiene las siguientes opciones:

```
-(1) tabla de valores del método de Runge-Kutta.
-(2) tabla de valores del método de Kalman-Englar.
-(3) tabla de valores del método de Diagonalización.
-(4) ir al submenú de gráficos.
-(5) regresar al menú principal.
```

De acuerdo al método utilizado, se debe ingresar a la tabla de valores de dicho método. En este caso, las opciones permitidas son:

- OPCION (1) y <ENTER>: en este caso aparece el siguiente submenú denominado "TABLAS DE RUNGE-KUTTA", dentro del cual se tiene las siguientes opciones:

```
*(1) solución de la ecuación de Ricatti *P(i,j)*.
*(2) matriz ganancia de realimentación *F(i,j)*.
*(3) vector de estado óptimo *X(i,j)*.
*(4) vector de entrada óptima *u(i,j)*.
*(5) regresar al submenú de tablas.
```

* Las opciones (3) y (4) no se pueden escoger, en este instante, ya que se necesitan las condiciones iniciales del vector de estado óptimo, esto se lo hace posteriormente.

* Al escoger la opción (1) y <ENTER>, se pueden observar las tablas de valores de la matriz solución de la ecuación de Ricatti "P", aparece un mensaje "PRESIONAR <C> PARA CONTINUAR" entonces se debe digitar "C" para continuar observando los siguientes valores, hasta que el tiempo "t" señale el límite inferior de integración.

* Al escoger la opción (2) y <ENTER>, se pueden observar las tablas de valores de la matriz solución ganancia de realimentación "F", aparece un mensaje "PRESIONAR <C> PARA CONTINUAR" entonces se debe digitar "C" para continuar observando los siguientes valores, hasta que el tiempo "t" señale el límite inferior de integración.

Al escoger la opción (5) y <ENTER> se regresa al "SUBMENÚ DE TABLAS".

- OPCION (4) y <ENTER>: aparece en la pantalla el siguiente submenú denominado "SUBMENU DE GRAFICOS" en el que se observan las siguientes opciones:

+(1) gráficos para el método de Runge-Kutta.
+(2) gráficos para el método de Kalman-Englar.
+(3) salir al submenú de tablas.
+(4) salir al menú principal.
+(5) ingresar nuevos datos de las matrices del sistema

Puesto que se calcularon las matrices con el método Runge-Kutta; entonces, se muestran los gráficos que corresponden a este método.

+ Al escoger la opción (1) y <ENTER>, en la pantalla aparecen los siguientes mensajes:

-) INGRESAR DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ *P(NXN)* A GRAFICARSE: en este caso se debe ingresar un número de dos cifras, que corresponde: la primera cifra a las filas y la segunda cifra a las columnas, así por ejemplo; si se ingresa el número 12, quiere decir que el elemento a graficarse ocupa la primera fila y la segunda columna de la matriz *P*; para continuar se presiona <ENTER> y se procede a ingresar el número correspondiente al segundo elemento.

Además, en este caso y como ayuda, se muestra la dimensión de la matriz *P*, de tal forma, se ingresen los elementos correctamente.

A continuación aparece el siguiente mensaje:

-) INGRESAR DOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ *F(MXN)* A GRAFICARSE: De la misma forma que al caso anterior, se procede al ingreso de dos elementos de la matriz *F*.

Luego de este procedimiento, existe la posibilidad de corregir o modificar los elementos ingresados, esto se realiza mediante el último mensaje que dice "LOS DATOS ESTAN CORRECTOS [S/N]".

Si los datos son los correctos digitar "S" y empezará la ejecución automática de graficación de los elementos de las matrices *F* y *P*.

Para continuar con la etapa de graficación, se debe presionar <ENTER>; entonces, en la pantalla aparece el siguiente mensaje:

"INGRESAR LAS CONDICIONES INICIALES PARA EL VECTOR DE ESTADO OPTIMO X*(0), ESTA CONDICION INICIAL DEBE SER DIFERENTE DE CERO": en este instante se deben ingresar los datos, y mediante un <ENTER> avanza al siguiente elemento. El ingreso de datos se realiza por filas. De igual manera existe la posibilidad de modificar estos datos.

Cabe señalar que si el orden del vector de entrada es m=1, entonces el programa automáticamente le permite el ingreso del único elemento de la matriz *u*.

Si los datos son los correctos digitar la letra "S" y <ENTER>. En este momento se ingresa a un nuevo submenú denominado "GRAFICACION DE LA MATRIZ GANANCIA DE REALIMENTACION" en el que se indica:

```
=(1) con *F* calculado
=(2) con *F* en estado estable
=(3) con nuevos datos para *F* en estado estable
```

Al escoger cualquiera de las opciones mencionadas; entonces, se procede a calcular los elementos de los vectores de estado óptimo y de la entrada óptima. Al pasar esta etapa de cálculo, en la pantalla aparecen los mensajes de qué elementos desea graficarlos tal cual como se vio en la graficación de las matrices *P* y *F*.

El último mensaje se utiliza para modificar los datos ingresados, al digitar "S" se procede a la graficación de los elementos de los vectores tanto de *u* como de *x*.

Para salir de esta última etapa de graficación se debe presionar <ENTER> y en la pantalla aparece el "SUBMENU DE GRAFICOS", en este instante se puede escoger la opción (3) para regresar al "SUBMENU DE TABLAS" y observar los valores calculados en el vector entrada óptima y vector de estado óptimo.

También existe la posibilidad de escoger la opción (4), para regresar al "MENU PRINCIPAL" y trabajar con los dos métodos restantes: Kalman-Englar o Diagonalización, y utilizar el mismo procedimiento con el que se trabajó para el método de Runge-Kutta.

En este caso, se trabajan con los mismos datos de las matrices del sistema ingresado inicialmente.

Si se desea trabajar con otros datos diferentes se debe escoger la opción (5), y continuar con todo el procedimiento mencionado anteriormente.

Si se desea abandonar el programa se debe primero regresar al "MENU PRINCIPAL" y luego salir del programa escogiendo la opción (5) de este menú.

B I B L I O G R A F I A

- Donald E. Kirk, Optimal Control Theory An Introduction, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, 1970, New Jersey.

- Kwakernaak Sivan, Linear Optimal Control Systems, Jhon Wiley & Sons Inc., 1972, New York.

- Athens M. and Falb P.L., Optimal Control, Mc Graw Hill Book Company, 1966, New York.

- Robert L. Ketter y Sherwood Prawel Jr., Modern Methods of Engineering computation, Mc Graw Hill Book Company, 1969, New York.

- V. R. Karanam, Lower Bounds on the solution of Algebraic Ricatti Equations, IEEE, vol AC-26, Dec. 81.

- F. Incertis, On closed form solutions for the Differential Matrix Ricatti Equation Problem, IEEE vol AC-28, Aug. 83.

- P. D. Olivier, A constrained optimal control problem, IEEE vol AC-29, Jan. 84.

- D. F. Delchamps, Analytic feedback control and the Algebraic Ricatti Equation, IEEE vol AC-29, Nov. 84.

- S. Bialas, Eigenvalue bounds for the Algebraic Ricatti Equation, IEEE vol AC-30, March 85.

- H. Kano and T. Nishimura, Controllability, Stabilizability and Matrix Ricatti Equations for periodic System, IEEE vol AC-30, Nov. 85.

- Robert Howerton, A new computational solution of the Linear Optimal Regulator Problem, IEEE vol AC-16, Dec. 71.