

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

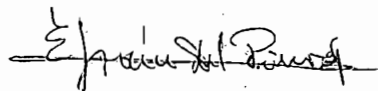
"ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO Y  
BASES PARA EL CONTROL OPTIMO"

por  
JULIO CESAR PROANO ROSADO

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN ELEC  
TRONICA Y TELECOMUNICACIONES EN LA ESCUELA POLITECNICA NA-  
CIONAL.

Quito, Julio de 1982

Certifico que el presente trabajo ha sido elaborado en su totalidad por el señor Julio Proaño R.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Efraín del Pino". The signature is written in a cursive style with a horizontal line underneath.

ING. EFRAIN DEL PINO  
Director de Tesis.

DEDICATORIA

A mis padres

A la memoria de mi a  
buelito.

## C O N T E N I D O

	Pág.
CAPITULO I:	
FORMAS CANONICAS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO.	
1.1	Introducción ..... 1
1.2	Forma canónica de Jordan ..... 7
1.3	Controlabilidad y Observabilidad ..... 16
1.4	Forma canónica controlable ..... 39
1.5	Forma canónica observable ..... 51
CAPITULO II	
ANALISIS EN EL ESPACIO DE ESTADO MEDIANTE PROGRA MAS PARA COMPUTADORA DIGITAL.	
2.1	Estructura de la biblioteca de programas .. 61
2.2	Matriz de transición - Propiedades ..... 69
2.3	Métodos para calcular la matriz de transición 102
2.4	Cálculo de la matriz de transición ..... 129
	Desarrollo del programa ..... 129
2.5	Estados y Salidas. Métodos de cálculo ..... 156
2.6	Cálculo de estados y salidas.- Desarrollo del programa ..... 173
2.7	Programa para la determinación de controlabi lidad, observabilidad y estabilidad..... 192

CAPITULO III

INTRODUCCION AL CONTROL OPTIMO.

3.1	Introducción.- Criterio Funcional .....	195
3.2	Optimización Estática .....	202
3.3	Optimización Dinámica.- El Principio del Máximo. Control lineal óptimo realimentado y deducción de la ley de control óptimo....	220

CAPITULO IV

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1	Resultados .....	248
4.2	Conclusiones .....	249
4.3	Metodología de uso de los programas .....	252

APENDICE: Listado de los programas

BIBLIOGRAFIA

## P R E F A C I O

Los prefacios invariablemente son escritos al último. El caso presente no es la excepción, esto parece apropiado, ya que el tema de esta tesis es el análisis de sistemas lineales de control, pero el tema del prefacio es la tesis.

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es el desarrollo de una biblioteca de programas en lenguaje BASIC para el minicomputador Tektronix existente en la facultad de Ingeniería Eléctrica. Esta biblioteca está orientada al análisis de sistemas lineales, dinámicos e invariantes en el tiempo.

En el capítulo primero se hace un estudio sobre las formas canónicas de un sistema de control poniendo énfasis en aspectos de controlabilidad y observabilidad.

Luego, en el capítulo segundo se estudian las propiedades y métodos de cálculo de la matriz de transición y de los estados y salidas de un sistema. Con las bases teóricas y algoritmos descritos en los dos capítulos se procede al desarrollo e implementación de los programas correspondientes para el análisis.

En el capítulo tercero se dan las bases para el estudio del diseño de un sistema de control en base a criterios de optimización.

En el cuarto y último capítulo se exponen algunos ejemplos que muestran la bondad de los programas realizados.

Para finalizar esta exposición deseo expresar mi profunda gratitud a quienes de una u otra manera han hecho posible la realización del presente trabajo. A la Escuela Politécnica Nacional, a mis maestros, de una manera particularmente especial a los Ingenieros Efraín Del Pino y Patricio Burbano por su acertada dirección y apoyo. También extender mi agradecimiento a la Srta. Judith Aguirre por su esmerada colaboración en la transcripción del manuscrito.

Julio Proaño R.

## CAPITULO I

### FORMAS CANONICAS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

- 1.1 Introducción
- 1.2 Forma canónica de Jordán.
- 1.3 Controlabilidad y Observabilidad.
- 1.4 Forma canónica controlable.
- 1.5 Forma canónica observable.



## CAPITULO I

FORMAS CANONICAS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

## 1.1. INTRODUCCION.-

La ingeniería involucrada en el campo de sistemas dinámicos y control ha sufrido ultimamente grandes transformaciones ; de lo que no hace mucho tiempo eran típicamente teoremas matemáticos abstractos., estos, día a día se vuelven más y más útiles y su aplicación abarca prácticamente todas las áreas de la ciencia humana; ya que la ingeniería de control no es tá limitada a ninguna disciplina de la ingeniería sino que es igualmente aplicable a las ingenierías aeronáutica, quí mica, mecánica, del medio ambiente, civil, eléctrica, etc.

Con el rápido desarrollo de la teoría de control y sus apli caciones en la última mitad de este siglo, acelerado después del período de la Segunda Guerra Mundial por la mayor utili zación de computadoras analógicas y la introducción de com putadoras digitales de propósito general, un número enorme de cambios han tomado lugar en cuanto a los métodos de con trol fundamental y sus aplicaciones a problemas de diseño. Hoy en día la ingeniería de control además de ser de funda mental importancia en vehículos espaciales, guiado de proyec

tiles, sistema de pilotaje de aviones, etc., la ingeniería de control se ha convertido en parte importante en todo proceso de manufactura e industrial modernos; el grado de sofisticación de los sistemas físicos han obligado a buscar nuevos procedimientos para el tratamiento de aquellos sistemas, es así como con la ayuda de computadoras digitales se hace práctico hoy en día el uso de la teoría de espacio de estado (la cual fue desarrollada mucho tiempo atrás).

En el presente trabajo se estudian los sistemas dinámicos, lineales e invariantes en el tiempo descritos a variables de estado y su análisis cualitativo y cuantitativo.

El estudio y diseño de un sistema físico a menudo consiste de cuatro etapas:

- 1) Modelamiento.
- 2) Planeamiento y descripción matemática de dicho modelo.
- 3) Análisis.
- 4) Diseño.

El primer paso es el modelamiento que involucra la búsqueda de un modelo que refleje al sistema físico en sus características fundamentales y que a la vez se presente en forma más fácil para su estudio.

El sistema (objeto) físico es aquel objeto percibido por nuestros sentidos cuyo comportamiento en el tiempo se desea describir; también se conoce con este nombre a cualquier propiedad del objeto que relaciona la señal de entrada con la señal de salida; este objeto existente en el mundo real a menudo posee características cuya descripción precisa se desconoce; sin embargo es posible aplicar algunas señales de prueba y medir la respuesta del sistema físico a estas señales, determinando así sus características.

Al hablar de establecer un modelo, implícitamente se entiende a este como un ente matemático o físico que simula las condiciones (más importantes y determinantes) del sistema físico. Este ente matemático se asocia a la idea de un objeto abstracto.

Se conoce como objeto abstracto a la totalidad de pares entrada-salida que describen el comportamiento del sistema físico que usualmente es caracterizado como una clase de funciones del tiempo que cumplen un conjunto de relaciones matemáticas.

En el presente trabajo cuando se hable de sistemas se está refiriendo a modelos de sistemas físicos.

Después que el modelo ha sido hallado para el sistema físico en consideración, el próximo paso en el estudio será encontrar las ecuaciones matemáticas para describirlo.

Una vez que la descripción matemática es obtenida, el siguiente paso será el análisis cualitativo y/o cuantitativo del sistema. Esta es la parte en la cual se concentra la atención de este trabajo, es decir comenzar dicho análisis de manera restringida a sistemas dinámicos, lineales, invariantes en el tiempo y multivariados (con múltiples entradas y múltiples salidas).

Las técnicas matriciales y conceptos de variables de estado son indispensables para abordar este tipo de análisis de sistemas multivariados.

Desde el punto de vista matemático, abordar la técnica de variables de estado es el uso de métodos matriciales y vectoriales para manejar un gran número de variables que entran en los sistemas multivariados.

A nivel práctico de ingeniería, la técnica de variables de estado se la puede entender considerando a un estado como una colección de números que junto con la entrada  $\vec{u}(t)$  para todo  $t \geq t_0$  (sea  $t_0$  el instante inicial de consideración del sistema) determina de manera única la salida  $\vec{y}(t)$  para todo  $t \geq t_0$ ; consecuentemente variable de estado denotada por  $\vec{x}(t)$  es la función del tiempo cuyo valor en cualquier instante

particular constituye el estado del sistema en dicho instante, por consiguiente el espacio de estado (denotado por  $\Sigma$ ) será el conjunto de todos los  $\vec{x}(t)$ :

El estado contiene toda la relevante información acerca del pasado del sistema requerida para determinar la respuesta (presente o futura) para cualquier entrada.

El vector de estado  $\vec{x}(t)$  está definido en términos de un espacio de estado  $n_1$ -dimensional cuyas coordenadas son:  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ . El movimiento de la punta del vector de estado es llamada la trayectoria del vector de estado, que no es otra cosa que la representación de la dependencia funcional de la variable vectorial  $\vec{X}$  respecto a  $t, t_0$ , las condiciones iniciales y la señal de entrada. La notación de trayectoria es  $\emptyset$ , de manera que:

$$\vec{X}(t) = \emptyset \{t, t_0, \vec{x}_0, \vec{u}(\tau)\}$$

donde  $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$  y  $\vec{u}(\tau)$  constituye la señal de entrada para  $t_0 \leq \tau \leq t$ .

Los sistemas a considerarse en este trabajo pueden ser descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias; la ecuación matricial de estado puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) + \underline{B}\vec{u}(t) \quad (1.1)$$

a su vez la ecuación de salida será escrita como:

$$\vec{y}(t) = \underline{C} \vec{x}(t) + \underline{D} \vec{u}(t) \quad (1.2)$$

donde A es la matriz esencial del sistema, esta en su estructura decide la naturaleza de la matriz de transición (como se verá en el próximo capítulo); B es la matriz de acoplamiento entre la entrada y las variables de estado; C es la matriz de acoplamiento de las variables de estado a la salida y por último D es la matriz de acoplamiento que acopla directamente el vector de entrada al vector de salida.

Un diagrama general de estas ecuaciones es mostrado en la figura 1.1.

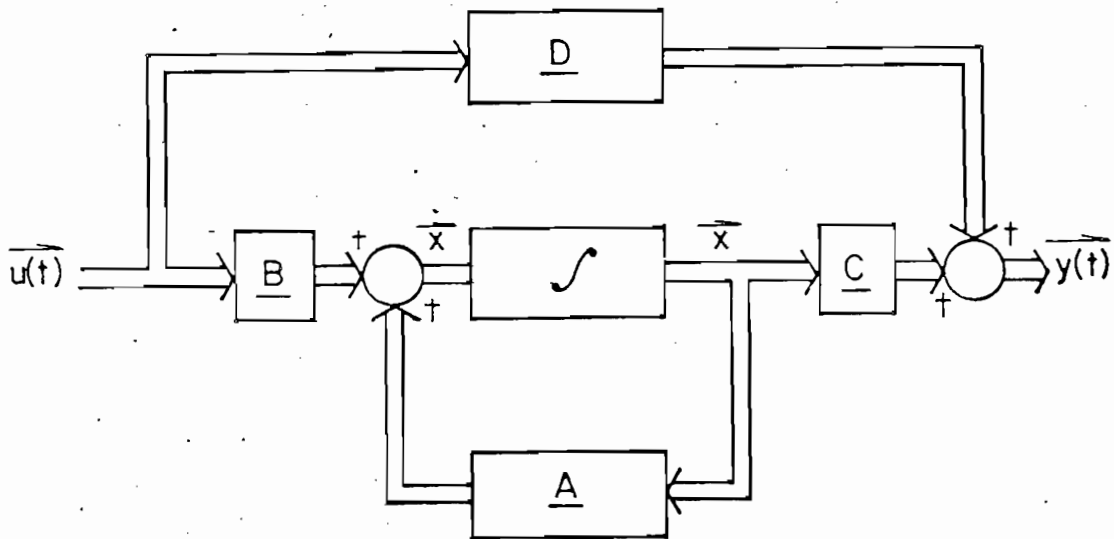


Figura 1.1.

Regresando a las etapas del estudio y diseño de un sistema físico, sólo restaría describir la última de ellas que consiste en el diseño mismo. Una vez hecho el análisis del sistema <sup>^</sup>(si el próximo paso consiste en mejorar las características del mismo en el análisis resultaron insatisfactorias), sea bien mediante variación de parámetros o utilizando diseños parciales o totales del sistema para lo cual se hacen necesarios criterios de optimización, tópico que se tratará al final del presente trabajo a nivel introductorio.

Cabe anotarse que la tercera etapa (análisis del sistema) deberá volver a realizarse después de cada diseño (o rediseño) hasta lograr las características deseadas de funcionamiento del sistema.

## 1.2. FORMA CANONICA DE JORDAN.-

El análisis de los sistemas dinámicos, lineales, invariantes en el tiempo considerados en el presente trabajo y descritos matemáticamente por las ecuaciones (1.1) y (1.2) son sistemas continuos en el tiempo, es decir todos sus parámetros son funciones continuas en el tiempo (sistemas no sometidos a procesos de discretización o muestreo).

A continuación se presenta un breve estudio de la forma canónica de Jordan cuya aplicación práctica se la apreciará en

el capítulo siguiente.

Como preámbulo se presenta a continuación una descripción de lo que se conoce en matemáticas como transformación de semejanza (o de equivalencia) en el tratamiento de matrices.

Este concepto en el caso de sistemas invariantes en el tiempo es idéntico al concepto de cambio de bases.

Sea el sistema dinámico, lineal e invariante en el tiempo dado por las ecuaciones (1.1) y (1.2) que se las reescribe a continuación:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \underline{A} \vec{x}(t) + \underline{B} \vec{u}(t) \quad (1.1)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C} \vec{x}(t) + \underline{D} \vec{u}(t) \quad (1.2)$$

siendo:

- $n_1$  número de estados
- $n_2$  número de entradas
- $n_3$  número de salidas

entonces:



A matriz  $n_1 \times n_1$

B matriz  $n_1 \times n$

C matriz  $n_0 \times n_1$

D matriz  $n_0 \times n$

y

$\vec{x}$  vector  $n_1 \times 1$

$\vec{y}$  vector  $n_0 \times 1$

$\vec{u}$  vector  $n \times 1$

El espacio de estado  $\Sigma$  del sistema estará formado por vectores reales  $n_1$ -dimensionales y la matriz A mapea a  $\Sigma$  en si misma.

A menudo al resolver ecuaciones diferenciales se ve la necesidad de un cambio efectivo de las variables de interés a otro sistema de coordenadas. Este cambio de variables a menudo llevan a una clasificación de la solución de las ecuaciones.

En el sistema analizado ( $n_1$ -dimensional) se escoge la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n_1}\}$  cuyos vectores son ortonormales tal que el vector  $\vec{e}_i$  tenga un 1 (uno) en la  $i$ -ésima componente y los demás son 0 (cero) para  $i = 1, 2, \dots, n_1$ .

Extendiendo el campo de números reales al campo de números complejos para considerar el espacio de estado como un espacio  $n_1$ -dimensional de vectores complejos se tendrá mediante la definición de una nueva variable  $\vec{x}_1(t)$  la siguiente ecuación:

$$\vec{x}(t) = \underline{T} \vec{x}_1(t)$$

donde  $\underline{T}$  es una matriz ( $n_1 \times n_1$ ) no singular con coeficientes en el campo de los números complejos.

Las ecuaciones resultantes del cambio de base del espacio, de estado  $\Sigma$  son llamadas ecuaciones dinámicas equivalentes y estarán dadas por:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_1(t) = \underline{A}_1 \vec{x}_1(t) + \underline{B}_1 \vec{u}(t)$$

$$y(t) = \underline{C}_1 \vec{x}_1(t) + \underline{D}_1 \vec{u}(t)$$

donde

$$\underline{A}_1 = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$$

$$\underline{B}_1 = \underline{T}^{-1} \underline{B}$$

$$\underline{C}_1 = \underline{C} \underline{T}$$

$$\underline{D}_1 = \underline{D}$$

Por lo tanto las ecuaciones dinámicas equivalentes serán:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_1(t) = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \vec{x}_1(t) + \underline{T}^{-1} \underline{B} \vec{u}(t) \quad (1.3)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C} \underline{T} \vec{x}_1(t) + \underline{D} \vec{u}(t) \quad (1.4)$$

De manera que, mediante esta substitución se ha cambiado la base del espacio de estado de los vectores ortonormales (definidos anteriormente) a la base formada por los vectores columna de  $\underline{T}$ .

Las matrices  $\underline{A}$  y  $\underline{A}_1$  son diferentes representaciones (o la misma representación en diferentes bases) del mismo operador lineal.

$$\text{Sea } \underline{T} = (\vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \dots \mid \vec{b}_{n_1})$$

donde la  $i$ -ésima columna de  $\underline{A}_1$  es la representación de  $\underline{A} \vec{b}_i$  respecto a la base  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n_1})$ .

De lo anterior se ve claramente que esto se cumple siempre que las columnas de  $\underline{T}$  sean vectores linealmente independientes de manera que formen una base del espacio de estado en consideración.



de  $\underline{L}_{ij}$  son matrices particionadas llamadas bloques (o células) de Jordan, las cuales son de la forma siguiente:

$$\underline{L}_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar los  $\lambda_i$  están en la diagonal y hay unos inmediatamente arriba y a la derecha de la diagonal.

Otra característica importante que posee la matriz de Jordan está dada por el teorema siguiente:

Toda matriz cuadrada sobre el cuerpo de los números complejos, así como sobre cualquier otro cuerpo conmutativo algebraicamente cerrado, es semejante a una matriz de la forma de Jordan.

Lo que da a entender que dadas las ecuaciones (1.1) y (1.2) siempre se podrá obtener una matriz  $\underline{A}_1$  tal que:

$$\underline{A}_1 = \underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$$

donde  $\underline{T}$  está formada por valores propios y vectores propios generalizados de la matriz  $\underline{A}$ .

A manera de comentario se esbosa brevemente un método práctico para encontrar la representación de la forma canónica de Jordan (semejante a la matriz  $\underline{A}(n_1 \times n_1)$ ) a base de hallar los vectores columna que forman la matriz  $\underline{T}$  (o matriz de cambio de base) calculados en el campo de los números complejos.

- 1) Calcular los valores propios de  $\underline{A}$  resolviendo  $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$  (para resolverlo se pueden aplicar varios métodos entre ellos están: algoritmo de Leverrier, método de Jacobi, método de Householder, etc). Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  valores propios distintos con multiplicidades  $l_1, l_2, \dots, l_m$  respectivamente.
- 2) Calcular los  $l_1$  vectores propios generalizados linealmente independientes de  $\underline{A}$  asociados a  $\lambda_1$  de la siguiente manera: calcular  $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^i$ , para  $i = 1, 2, \dots$ , hasta que el rango de  $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^k$  sea igual al rango de  $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^{k+1}$ . Encontrar un vector propio generalizado de rango  $k$ , sea  $\vec{t}$  ( $\vec{t}$  es de rango  $k$  si cumple que  $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^k \vec{t} = 0$ , este es el vector propio asociado a  $\lambda_1$  y los  $(k-1)$  vectores propios que se obtienen a partir de este son los vectores pro

pios generalizados). Se define  $\vec{t}_i \triangleq (\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^{k-i} \vec{t}$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Si  $k = l_1$  proceder con el paso 3. Si  $k < l_1$ , es necesario encontrar otro vector propio generalizado - con rango  $k$  y encontrar  $\vec{t}_{i+k}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , si esto no es posible, tratar con  $k-1$  y así sucesivamente hasta que sean encontrados los  $l_1$  vectores propios linealmente independientes. Observar que si el rango de  $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})$  es  $k_1$  entonces hay un total de  $(n_1 - k_1)$  vectores propios - generalizados asociados a  $\lambda_1$ .

3) Repetir el paso 2 para los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

4) Se tiene

$$\underline{T} = (\vec{t}_1 \mid \vec{t}_2 \mid \dots \mid \vec{t}_k \mid \dots \mid \vec{t}_{n_1})$$

5) Se calcula  $\underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$

Esta rápida descripción de la forma canónica de Jordan está dada a manera de Introducción para más adelante utilizarla en forma práctica.

Un análisis más profundo del origen, propiedades y aplicaciones de la matriz de Jordan se encuentra en algunos textos de Algebra Lineal, por cuya razón no se hace necesario ahondar en el tema.

### 1.3. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD.-

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales fueron introducidos por Kalman y luego estudiados por Luenberger, conceptos que dieron como resultado un gran avance en la teoría de control moderno y particularmente útiles en la teoría de control óptimo.

Estos conceptos surgieron de los siguientes cuestionamientos dado un sistema dinámico, lineal e invariante en el tiempo: ¿pueden existir señales de entrada que no influyen en el estado del sistema?, ¿puede el estado del sistema ser controlado por completo por una señal de entrada particular  $u_i$ ?, ¿pueden existir señales de salida que no son influenciadas por el estado?, ¿puede ser notada la influencia del estado en la señal de salida  $y_i$ ?, etc.

Para ciertos sistemas de estructura simple, la formalización de los conceptos de controlabilidad y observabilidad no es necesaria ya que las preguntas anteriores pueden ser contestadas por simple inspección.

Para sistemas más complejos no siempre es obvio que las señales de entrada puedan controlar el estado de un sistema o que una salida particular dependa de la trayectoria de estado.





A partir de las figuras 1.2 y 1.3 se plantean las siguientes ecuaciones:

$$C_1 \frac{dx_1}{dt} = u_1 - u_{12} - u_{11}$$

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} = u_2 + u_{12} - u_{23} - u_{22}$$

$$C_3 \frac{dx_3}{dt} = u_3 + u_{23} - u_{33}$$

$$R_1 = \frac{x_1 - x_2}{u_{12}}$$

$$R_2 = \frac{x_2 - x_3}{u_{23}}$$

$$r_1 = \frac{x_1}{u_{11}}$$

$$r_2 = \frac{x_2}{u_{22}}$$

$$r_3 = \frac{x_3}{u_{33}}$$

obteniéndose la ecuación de estado siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1}) & \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_2}) & \frac{1}{R_2 C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_3} & -\frac{1}{C_3}(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

para

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1 \quad ; \quad R_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad R_2 = 1$$

$$r_1 = 1 \quad ; \quad r_2 = \infty \quad ; \quad r_3 = \frac{1}{2}$$

se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Como trabajo de ingeniería de control de sistemas los requerimientos de diseño exigen encontrar cual (o cuales) de las posibles entradas  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y de las variables de estado pueden ser usadas en el diseño del control del sistema.

Al resolver la ecuación característica de este sistema

$\{(A - \lambda I) = 0\}$  se obtienen los valores propios de A que son:

$$\lambda_1 = - 0.7639$$

$$\lambda_2 = - 3$$

$$\lambda_3 = - 5.2361$$

y sus correspondientes vectores propios

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.118 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.118 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Los valores propios dan la respuesta característica del sistema (forma exponencial). Los vectores propios constituyen el eslabón que relaciona aquella respuesta característica a los cambios particulares en el estado del sistema como medido por las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Los vectores pro

pios son tres vectores no paralelos en el espacio (de estado) tridimensional como se muestra en la Fig. 1.4.

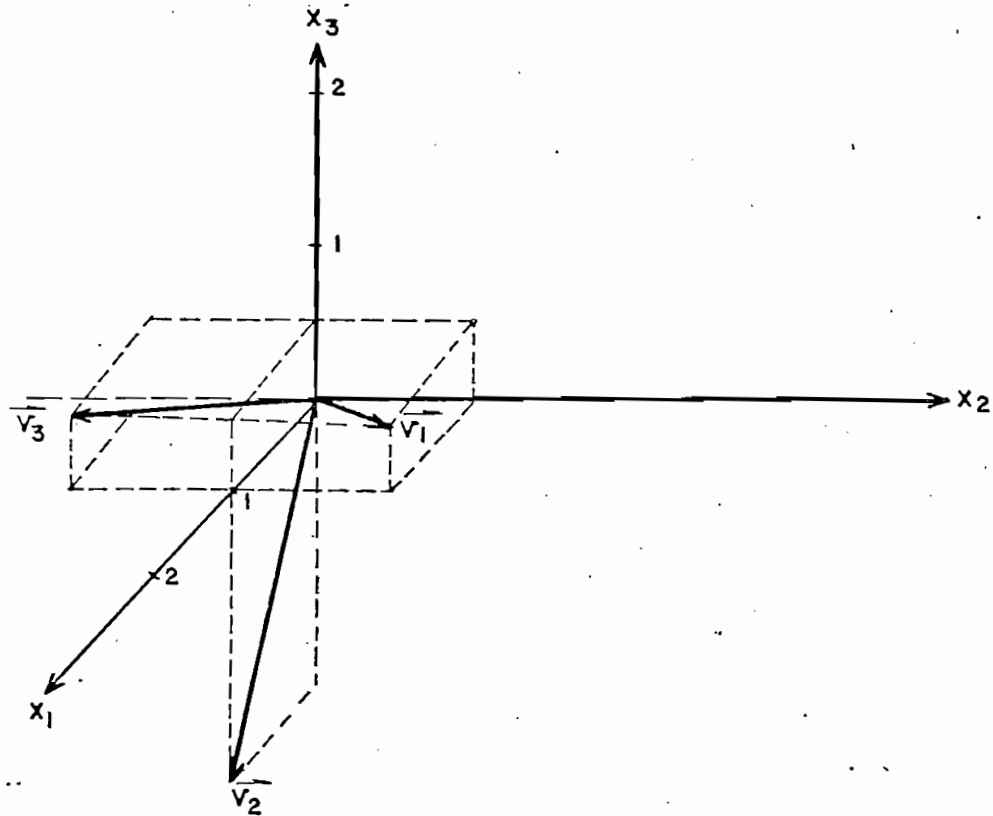
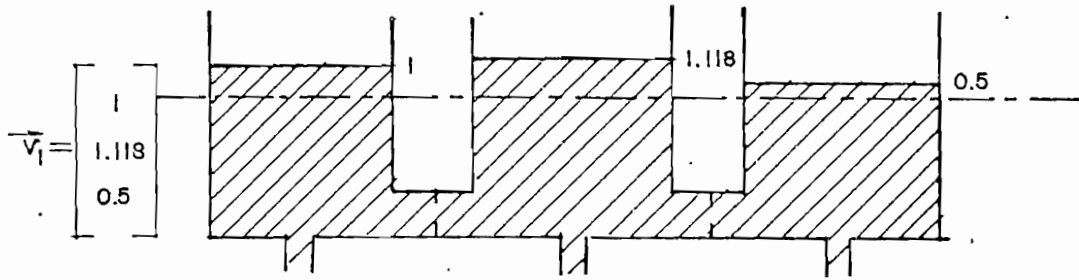


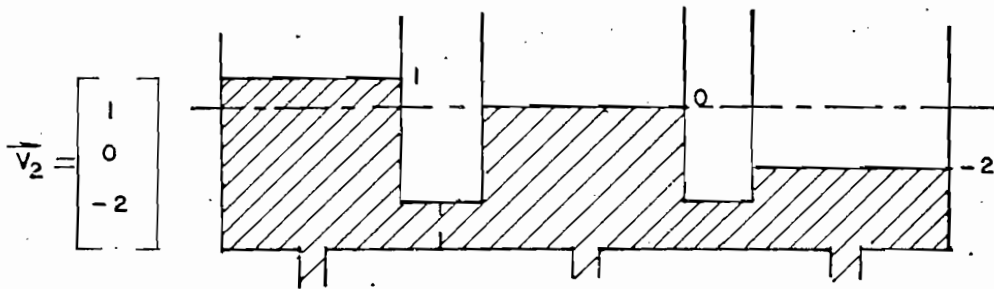
Figura 1.4.

Para cada respuesta característica dada por un valor propio está asociado un vector propio (como se muestra en la figura), modo característico del sistema que describe en sí las diferentes velocidades del movimiento de dicho modo característico.

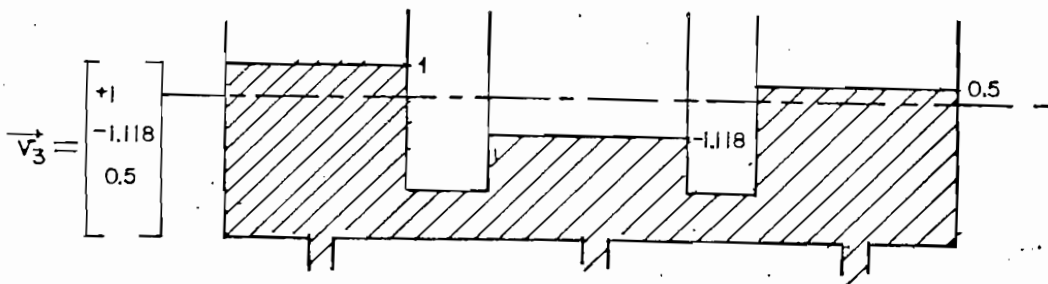
Una representación del significado físico de estos modos se puede ver en las figuras 1.5.a., 1.5.b. y 1.5.c.



(a)



(b)



(c)

Fig. 1.5

El primer modo (Fig. 1.5.a.) correspondiente a  $\bar{v}_1$ , describe un estado de movimiento en el cual los niveles simultáneamente suben o bajan en todos los tanques. El segundo modo describe un estado en el cual los niveles del primer y tercer tanques se están moviendo en dirección opuesta y el segundo no se mueve. En el tercer modo los niveles de los tanques primero y tercero se están moviendo en dirección opuesta al movimiento del nivel del segundo tanque. La velocidad de cada modo esta dada por el término exponencial  $e^{\lambda_i t}$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Ahora bien cambiando el sistema de coordenadas a la base dada por los vectores propios se tiene:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_1 = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \bar{x}_1 + \underline{T}^{-1} \underline{B} \bar{u}$$

haciendo las operaciones correspondientes se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1_1} \\ x_{1_2} \\ x_{1_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.76 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_1} \\ x_{1_2} \\ x_{1_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.45 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0.4 & -0.45 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Es posible establecer la capacidad de que las entradas  $u_1$ ,  $u_2$  o  $u_3$  puedan controlar el sistema examinando la ecuación (1.6).

Para que una entrada sea capaz de controlar el sistema, es ta debe estar en posibilidad de afectar todos los modos del sistema. El sistema tratado en el presente ejemplo es con trolable por la primera y tercera entradas, como se puede no tar, la matriz  $\underline{T}^{-1}\underline{B}$  no tiene ceros en la primera y tercera columnas; pero no es controlable por la segunda entrada.

Las salidas pueden ser chequeadas de manera similar; en el presente ejemplo se considera que el vector de salida  $\vec{y}$  es ta dado por:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{C} \vec{x} + \underline{D} \vec{u}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

efectuando el mismo cambio de base anterior se obtiene:



$$\vec{y} = \underline{C} \underline{T} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.118 & 0 & -1.118 \\ 0.52 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} \vec{x}_1$$

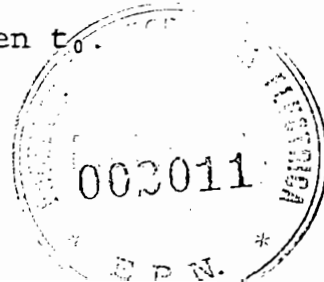
El cero que aparece en la segunda fila y segunda columna de la matriz  $\underline{C}\underline{T}$  muestra que el segundo modo característico del sistema no es observable mediante la salida  $y_2$ .

A continuación se definen de manera algo más formal los conceptos que se están tratando en esta sección.

Un estado  $\vec{x}_1$  de un sistema es controlable si toda condición inicial  $\vec{x}_0$  para cualquier tiempo anterior  $t_0$  se puede transferir a  $\vec{x}_1$  en un tiempo finito por alguna función de control  $\vec{u}(t)$ .

Si todos los estados  $\vec{x}_1$  posibles son controlables el sistema se llama completamente controlable (o simplemente controlable).

Si la controlabilidad es restringida a depender de  $t_0$  se habla de que el estado es controlable en  $t_0$ .



Si el estado se puede transferir de  $\vec{x}_0$  a  $\vec{x}_1$  tan rápidamente como se quiera se habla de que tal estado es totalmente controlable. El sistema es totalmente controlable si todos los estados son totalmente controlables.

Un estado  $\vec{x}(t)$  en algún tiempo dado  $t$ , es observable si al conocer la entrada  $\vec{u}(\tau)$  y la salida  $\vec{y}(\tau)$  sobre un intervalo finito de tiempo  $t_0 \leq \tau \leq t$ , estas determinan completamente a  $\vec{x}(t)$ . Si todos los estados son observables, el sistema se llama completamente observable.

Si la observabilidad depende de  $t_0$ , el estado se dice observable en  $t_0$ .

Se procede a continuación a dejar enunciados dos teoremas que sintetizan la parte estrictamente matemática de los conceptos estudiados.

#### TEOREMA 1.3.1.

Acerca de la controlabilidad de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo cuya representación matemática está dada por las ecuaciones (1.1) y (1.2) las siguientes declaraciones son equivalentes:

- 1) El sistema es controlable para todo  $t_0$  que pertenece al intervalo  $[0, \infty)$
- 2) Las filas de  $e^{-At} \underline{B}$  (y consecuentemente de  $e^{-At} \underline{B}$ ) son linealmente independientes en el intervalo  $[0, \infty)$  (sobre el campo de los números complejos).
- 3) La matriz dada por:

$$\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \underline{B}^* e^{\underline{A}^*(t-\tau)} d\tau$$

es no singular para cualquier  $t_0 > 0$  y cualquier  $t > t_0$ .

- 4) La matriz de orden  $n_1 \times (n_1 * n)$

$$\underline{Q} = \left[ \underline{B} \mid \underline{AB} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \underline{B} \right]$$

conocida como matriz de controlabilidad, tiene rango  $n_1$ .

- 5) Las filas de  $(S \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$  son linealmente independientes sobre el campo de los números complejos.

La demostración total de este teorema es obviada ya que esta conlleva muchos conceptos y artificios de algebra lineal y su estudio no es ni remotamente el propósito de este tra

bajo. Para el lector que tenga interés en ella puede consultar referencias.

Un teorema similar al anterior se enuncia a continuación:

TEOREMA 1.3.2.

Respecto a la observabilidad del sistema representado por las ecuaciones (1.1) y (1.2) las siguientes declaraciones son equivalentes.

1) El sistema es observable para cada  $t_0$  en el intervalo  $[0, \infty)$

2) Las columnas de  $\underline{C} e^{\underline{A}t}$  son linealmente independientes en el intervalo  $[0, \infty)$  (en el campo de los números complejos)

3) La matriz dada por:

$$\int_{t_0}^t e^{\underline{A}^*(\tau-t_0)} \underline{C}^* \underline{C} e^{\underline{A}(\tau-t_0)} d\tau$$

es no singular para cualquier  $t_0 > 0$  y cualquier  $t > t_0$ .

4) La matriz de orden  $(n_1 * n_0) \times n_1$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

conocida como matriz de observabilidad tiene rango  $n_1$ .

- 5) Las columnas de  $\underline{C}(s \underline{I} - \underline{A})^{-1}$  son linealmente independientes sobre el campo de los números complejos.

Igual que para el teorema 1.3.1. la demostración total de es teorema se la obviará.

Para conocer si un sistema es o no controlable y observable se utilizarán los literales 4) de los dos teoremas anteriores implementándolos numéricamente en el computador, a continuación se desarrollan las demostraciones correspondientes.

### TEOREMA 1.3.3.

El sistema descrito por las ecuaciones (1.1) y (1.2) es totalmente controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad Q de orden  $n_1 \times (n_1 * n)$  tiene rango  $n_1$ , donde

$$\underline{Q} = (\underline{B} \mid \underline{AB} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \underline{B}) \quad (1.6)$$

Demostración:

Para lograr un  $\vec{x}(t_1)$  arbitrario del estado inicial cero (sin pérdida de generalidad), con una entrada vector  $\vec{u}(\tau)$  tal que:

$$\vec{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\underline{A}(t_1-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

aplicando el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que:

$$e^{\underline{A}(t_1-\tau)} = \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i(\tau) \underline{A}^{n_1-i}$$

sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (1.7) se tiene:

$$\vec{x}(t_1) = \sum_{i=1}^{n_1} \underline{A}^{n_1-i} \underline{B} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(\tau) \vec{u}(\tau) d\tau \right]$$

o

$$\vec{x}(t_1) = \sum_{i=1}^{n_1} \underline{A}^{n_1-i} \underline{B} \vec{\omega}_{n_1+1-i}$$

entonces

$$\vec{x}(t_1) = (\underline{B}\vec{\omega}_1 + \underline{A}\underline{B}\vec{\omega}_2 + \dots + \underline{A}^{n_1-1} \underline{B} \omega_{n_1})$$

o

$$\vec{x}(t) = (\underline{B} \mid \underline{AB} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \underline{B}) \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 \\ \vdots \\ \vec{\omega}_{n_1} \end{bmatrix}$$

Así,  $\vec{x}(t_1)$  pertenece al espacio recorrido por  $\underline{Q}$  de donde  $\underline{Q}$  debe tener rango  $n_1$  para lograr un vector arbitrario en  $\Sigma$ . Por lo tanto el sistema es totalmente controlable, implica que  $\underline{Q}$  tiene rango  $n_1$ .

A continuación se supone que  $\underline{Q}$  tiene rango  $n_1$  y se demostrará que el sistema es totalmente controlable. Utilizando un artificio algebraico se construye  $\vec{u}(\tau)$  tal que

$$\vec{u}(\tau) = \vec{\mu}_1 \delta(\tau-t_0) + \vec{\mu}_2 \delta^{(1)}(\tau-t_0) + \dots + \vec{\mu}_{n_1} \delta^{(n_1-1)}(\tau-t_0)$$

donde  $\mu_k$  son vectores (de orden  $n$ ) constantes por calcular y  $\delta^{(k)}(\tau-t_0)$  es la  $k$ -ésima derivada de la función impulso unitario. Sustituyendo esta construcción en la ecuación (1.7) se tiene:

$$\vec{x}(t_1) = e^{\underline{A}(t_1-t_0)} \underline{B} \vec{\mu}_1 + \dots + e^{\underline{A}(t_1-t_0)} \underline{A}^{n_1-1} \underline{B} \vec{\mu}_{n_1-1}$$

debido a que se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t - \xi) f(\xi) d\xi = \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t = \xi}$$

entonces

$$e^{\underline{A}(t_0 - t_1)} \vec{x}(t_1) = \underline{Q} \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mu}_{n_1} \end{bmatrix}$$

Por último, de la teoría de ecuaciones simultáneas lineales se concluye de la ecuación anterior que si  $\underline{Q}$  tiene rango  $n_1$  entonces existe al menos un  $\vec{\mu}_i$  que cumple con dicha ecuación.

El teorema dual del anterior es aquel que se refiere a la observabilidad del sistema tratado.

TEOREMA 1.3.4.

El sistema descrito por las ecuaciones (1.1) y (1.2) es totalmente observable si y sólo si la matriz de observabilidad  $\underline{P}$  de orden  $(n_0 * n_1) \times n_1$  tiene rango  $n_1$ , donde

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n_1 - 1} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$



Demostración:

Basta que el sistema sea representado por las ecuaciones siguientes para constituir un sistema observable o no.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \underline{A} \vec{x} \\ \vec{y} &= \underline{C} \vec{x}\end{aligned}$$

El vector de salida  $\vec{y}(t)$  está dado por:

$$\vec{y}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{x}(t_0)$$

haciendo uso del teorema de Cayley-Hamilton

$$e^{\underline{A}(t-t_0)} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(t) \underline{A}^{n_1-i}$$

reemplazando esta última expresión en la ecuación anterior se tiene:

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(t) \underline{C} \underline{A}^{n_1-i} \vec{x}(t_0)$$

entonces

$$\vec{y}(t) = \left| \alpha_{n_1}(t) \underline{C} + \alpha_{n_1-1}(t) \underline{C} \underline{A} + \dots + \alpha_1(t) \underline{C} \underline{A}^{n_1-1} \right| \vec{x}(t_0)$$

Si el sistema es totalmente observable, dada la salida  $\vec{y}(t)$

en un intervalo de tiempo  $t \leq t \leq t_1$ ,  $x(t_0)$  queda determinada en forma única a partir de la ecuación anterior, así:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{n_1}(t) & \dots & \alpha_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n_1-1} \end{bmatrix} \vec{x}(t_0)$$

La segunda parte de la demostración de este teorema es similar a la desarrollada en el teorema anterior razón por la cual no se la incluye.

En esta parte se hace necesaria la introducción del concepto de controlabilidad de salida; generalmente al hablar de controlabilidad de un sistema se entiende que los estados del sistema son controlables, ahora bien al hablar de controlabilidad de salida se debe entender que una salida particular  $\vec{y}$  se puede lograr comenzando en un estado  $\vec{x}(t_0)$  arbitrario en  $t_0$ . De manera que se puede hablar de salidas  $\vec{y}$  en lugar de estados  $\vec{x}$  con definiciones similares a las de controlabilidad como controlabilidad de las salidas.

Es posible probar al igual que los dos teoremas anteriores que la controlabilidad de salida completa para el sistema representado por las ecuaciones (1.1) y (1.2) (donde los órdenes de las matrices constitutivas están dadas en la sec-

ción 1.2) se cumple si y sólo si la matriz de orden  $n_0 \times ((n_1+1) \cdot n)$  siguiente:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{C} & \underline{B} & & & \\ \hline \underline{C} & \underline{A} & \underline{B} & & \\ \hline & & & \dots & \\ \hline \underline{C} & \underline{A}^{m_1-1} & \underline{B} & & \\ \hline & & & & \underline{D} \end{array} \right] \quad (1.9)$$

es de rango igual a  $n_0$ .

Por último a manera de comentario a fin de que el lector interesado en los métodos de análisis de controlabilidad y observabilidad de sistemas conozca un poco más, se menciona seguidamente un método tratado solamente en algunos libros especializados; este consiste en llegar al conocimiento de si el sistema es controlable y/u observable o no a partir de las matrices  $\underline{J}$ ,  $\underline{T}$  y  $\underline{T}^{-1}$ .

Considerando que las ecuaciones (1.1) y (1.2) se convierten en las ecuaciones (1.3) y (1.4) mediante la transformación de semejanza descrita en el numeral anterior: si el sistema dado por las ecuaciones (1.1) y (1.2) es controlable, dicha controlabilidad se manifiesta en las ecuaciones dinámicas equivalentes ((1.3) y (1.4)), lo mismo se puede afirmar respecto a la observabilidad de dicho sistema.

Reescribiendo las ecuaciones dinámicas equivalentes del sistema:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_1(t) = \underline{J} \vec{x}_1(t) + \underline{B}_1 \vec{u}(t) \quad (1.10)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C}_1 \vec{x}_1(t) + \underline{D} \vec{u}(t) \quad (1.11)$$

donde  $\underline{J}$ ,  $\underline{B}_1$ ,  $\underline{C}_1$  y  $\underline{D}$  están dadas en el literal 1.2 en el presente capítulo.

Por facilidad de uso se expresa  $\underline{B}_1$  en forma particionada, así:

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} \underline{B}_{1_1} \\ \vdots \\ \underline{B}_{1_l} \end{bmatrix}$$

donde  $l$  el número de bloques de Jordan que aparecen en la matriz  $\underline{J}$ ;  $\underline{B}_{1_i}$  es la matriz cuyo número de filas es igual al orden de  $i$ -ésimo bloque de Jordan y cuyo número de columnas es igual a  $n$  (número de entradas). De manera similar se expresa la matriz  $\underline{C}_1$  en forma particionada, así:

$$\underline{C}_1 = \left[ \underline{C}_{1_1} \mid \dots \mid \underline{C}_{1_l} \right]$$

donde  $\underline{C}_{1_i}$  es aquella matriz particionada asociada al  $i$ -ésimo bloque de Jordan, siendo el número de filas de la matriz  $\underline{C}_{1_i}$  igual a  $n_0$  (número de salidas del sistema) y su número

de columnas coincidirá con el orden del  $i$ -ésimo bloque de Jordan de la matriz  $\underline{J}$ .

Adicionalmente se define  $\vec{b}_{iu}$  como aquel vector fila que constituye el último de la matriz particionada  $\underline{B}_{li}$ , y  $\vec{c}_{io}$  aquel vector columna el cual es el primero de la matriz particionada  $\underline{C}_{li}$ , para  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Ahora bien el sistema en cuestión cuyas ecuaciones dinámicas de la forma de Jordan vienen dadas por las ecuaciones (1.10) y (1.11), es controlable si y sólo si para cada valor propio  $\lambda_q$  (para  $q = 1, 2, \dots, p$ ) de la matriz  $\underline{J}$ , cuyos bloques de Jordan son  $\underline{L}_{1q}, \underline{L}_{2q}, \dots, \underline{L}_{kq}$  (ver sección 1.2 del capítulo presente) las matrices particionadas de  $\underline{B}_l$  asociadas a los mismos son  $\underline{B}_{lj}, \dots, \underline{B}_{l(j+k)}$  los vectores fila  $\vec{b}_{ju}, \vec{b}_{(j+1)u}, \dots, \vec{b}_{(j+k)u}$  son linealmente independientes (sobre el campo de los números complejos). Del mismo modo, se dice que el suso dicho sistema es observable si los vectores columna  $\vec{c}_{j0}, \dots, \vec{c}_{(j+k)0}$  (para cada  $\lambda_q$ ) son linealmente independientes.

A través de un ejemplo se logrará llegar a una mayor comprensión de lo expuesto arriba.

Ejemplo:

Dado el sistema siguiente:

$$\dot{\vec{x}}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \vec{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{u}$$

$\vec{b}_{1u}$  Bl<sub>1</sub>  
 $\vec{b}_{2u}$  Bl<sub>2</sub>  
 $\vec{b}_{3u}$  Bl<sub>3</sub>  
 $\vec{b}_{4u}$  Bl<sub>4</sub>

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \text{Cl}_1 & \text{Cl}_2 & \text{Cl}_3 & & \text{Cl}_4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$\vec{c}_{10}$        $\vec{c}_{20}$     $\vec{c}_{30}$     $\vec{c}_{40}$

Al analizar controlabilidad, siendo el número de valores propios igual a dos, se tiene dos conjuntos de vectores a analizar:

$$1^{\text{er)}} \quad \{ \vec{b}_{1u}^T, \vec{b}_{2u}^T, \vec{b}_{3u}^T \} = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$2^{\text{da)}} \quad \{ \vec{b}_{4u}^T \} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el primer caso claramente se nota que son linealmente in dependientes, el segundo al ser el vector constitutivo único y distinto de  $\vec{0}$  es linealmente independiente. De lo que se concluye que el sistema es controlable.

Analizando observabilidad se tiene igualmente dos grupos de vectores:

$$1^{\text{er}}) \{ \vec{c}_{10}, \vec{c}_{20}, \vec{c}_{30} \} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right]$$

$$2^{\text{do}}) \{ \vec{c}_{40} \} = \{ \vec{0} \}$$

El primer grupo constituye un conjunto de vectores linealmente independientes, pero el segundo grupo esta formado por el vector nulo por lo tanto este es un conjunto linealmente de pendiente. De lo anteriormente expuesto se concluye que el sistema no es observable.

#### 1.4. FORMA CANONICA CONTROLABLE.-

En la presente sección se hará un breve estudio de la forma canónica controlable, sus aplicaciones e importancia como base para el diseño de sistemas controlables.

En la sección anterior se estudio la matriz de controlabilidad  $\underline{Q}$ .

$$\underline{Q} = \left[ \underline{B} \mid \underline{AB} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \underline{B} \right]$$

que para el caso en que el sistema descrito por las ecuaciones (1.1) y (1.2) es controlable, este tiene rango  $n_1$ , es decir tiene  $n_1$  columnas linealmente independientes. Usando columnas linealmente independientes de  $\underline{Q}$  o sus combinaciones lineales como una nueva base del espacio de estado de dimensión  $n_1$  se pueden obtener varias formas canónicas. Aquí se introducirá quizás la más importante, conocida como la forma canónica controlable.

Las ecuaciones fundamentales que describen un sistema dinámico, lineal e invariante en el tiempo con una sola entrada y una sola salida, se escriben a continuación:

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \underline{A} \vec{x} + \vec{b} u \quad (1.12)$$

(a)

$$\vec{y} = \vec{c} \vec{x} + d u \quad (1.13)$$

donde a diferencia de las ecuaciones generales (1.1) y (1.2)  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $d$  son matrices reales constantes de ordenes  $n_1 \times 1$ ,  $1 \times n_1$  y  $1 \times 1$  respectivamente.



Seguidamente se definen las ecuaciones siguientes.

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_2 = \underline{A}_2 \vec{x}_2 + \vec{b}_2 u \quad (1.14)$$

(b)

$$y = \vec{c}_2 \vec{x}_2 + d u \quad (1.15)$$

obtenidas mediante la transformación de semejanza siguiente:

$$\vec{x} = \underline{T}_c \vec{x}_2 \quad (1.16)$$

por lo tanto las matrices constantes de las ecuaciones (1.14) y (1.15) estarán dadas por:

$$\underline{A}_2 = \underline{T}_c^{-1} \underline{A} \underline{T}_c$$

$$\vec{b}_2 = \underline{T}_c^{-1} \vec{b}$$

$$\vec{c}_2 = \vec{c} \underline{T}_c$$

Las matrices de controlabilidad para las dos representaciones matemáticas del sistema (a) y (b) son respectivamente:

$$\underline{Q} = \left[ \vec{b} \mid \underline{A} \vec{b} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \vec{b} \right]$$

$$\underline{Q}_2 = \left[ \vec{b}_2 \mid \underline{A}_2 \vec{b}_2 \mid \dots \mid \underline{A}_2^{n_1-1} \vec{b}_2 \right]$$

además se cumple:

$$\underline{Q2} = \underline{Tc}^{-1} \left[ \begin{array}{c|c|c} \vec{b} & \underline{A}\vec{b} & \dots & \underline{A}^{n_1-1}\vec{b} \end{array} \right]$$

$$\underline{Q2} = \underline{Tc}^{-1} \underline{Q} \quad (1.17)$$

Ahora bien si el sistema es controlable las matrices  $\underline{Q}$  y  $\underline{Q2}$  serán no singulares, por lo tanto de la ecuación (1.17) se tiene:

$$\underline{Tc} = \underline{Q} \underline{Q2}^{-1}$$

$$\underline{Tc}^{-1} = \underline{Q2} \underline{Q}^{-1}$$

En base al desarrollo anterior se presenta a continuación un teorema que tiene referencia a la estructura del sistema con la forma canónica controlable.

TEOREMA 1.4.1.

Si un sistema  $n_1$  dimensional, lineal, invariante en el tiempo y cuyas ecuaciones (de estado y de salida) tiene una sola entrada y una sola salida es controlable, entonces este puede ser convertido mediante una transformación de semejanza a la forma siguiente:

$$\dot{\vec{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -\alpha_{n_1} & -\alpha_{n_1-1} & -\alpha_{n_1-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \vec{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[ \beta_{n_1} \quad \beta_{n_1-1} \quad \dots \quad \beta_1 \right] \vec{x}_2 + d u$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}$  son los coeficientes del polinomio característico de  $\underline{A}$  y los  $\beta_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n_1$  son calculados a partir de las ecuaciones (1.12) y (1.13). Estas ecuaciones representan la forma canónica controlable. La función de transferencia del sistema es:

$$g(s) = \frac{\beta_1 s^{n_1-1} + \beta_2 s^{n_1-2} + \dots + \beta_{n_1}}{s^{n_1} + \alpha_1 s^{n_1-1} + \alpha_2 s^{n_1-2} + \dots + \alpha_{n_1}} + d$$

Demostración:

Asumiendo que el sistema descrito por las ecuaciones (1.12) y (1.13) es controlable, por lo tanto el conjunto de vectores columna de orden  $n_1$ :  $\vec{b}, \underline{A}\vec{b}, \dots, \underline{A}^{n_1-1}\vec{b}$  es linealmente independiente. En consecuencia el conjunto de vectores siguientes:

$$\vec{t}_{c_{n_1}} \triangleq \vec{b}$$

$$\vec{t}_{c_{n_1-1}} \triangleq \underline{A}\vec{b} + \alpha_1 \vec{b}$$

$$\vec{t}_{c_{n_1-2}} \triangleq \underline{A}^2 \vec{b} + \alpha_1 \underline{A}\vec{b} + \alpha_2 \vec{b}$$

$$\vdots$$

$$\vec{t}_{c_1} \triangleq \underline{A}^{n_1-1} \vec{b} + \alpha_1 \underline{A}^{n_1-2} \vec{b} + \dots + \alpha_{n_1-1} \vec{b}$$

son linealmente independientes y forma una base del espacio de estado del sistema que será  $\left[ \vec{t}_{c_1}, \vec{t}_{c_2}, \dots, \vec{t}_{c_{n_1}} \right]$ ; pasando la matriz  $\underline{A}$  (ecuación 1.12) a la nueva base la  $i$ -ésima columna de  $\underline{A}2$  (ecuación 1.14) es la representación de  $\underline{A} \cdot \vec{t}_{c_i}$ . Observando que:

$$\underline{A}\vec{t}_c = (\underline{A}^{n_1} + \alpha_1 \underline{A}^{n_1-1} + \dots + \alpha_{n_1} \underline{I}) \vec{b} - \alpha_{n_1} \vec{b}$$

aplicando el teorema de Cayley-Hamilton

$$\underline{A}\vec{t}_{c_1} = -\alpha_{n_1} \vec{b} = -\alpha_{n_1} \vec{t}_{c_{n_1}}$$

entonces

$$\underline{A}\vec{t}_{c_2} = \vec{t}_{c_1} - \alpha_{n_1-1} \vec{t}_{c_{n_1}}$$

$$\underline{A}\vec{t}_{c_{n_1}} = \vec{t}_{c_{n_1-1}} - \alpha_1 \vec{t}_{c_{n_1}}$$

por lo tanto si se escoge  $\{\vec{t}_{c_1}, \vec{t}_{c_2}, \dots, \vec{t}_{c_{n_1}}\}$  como una nueva base en el espacio de estado, entonces  $\underline{A}$  y  $\vec{b}$  tendrán nuevas formas de ser representadas, así:

$$\underline{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{n_1-1} & -\alpha_{n_1-2} \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices  $\underline{A_2}$  y  $\vec{b}_2$  también pueden ser obtenidas usando la transformación de semejanza dada por la ecuación (1.16). Sea

$$\underline{T_c} = \left[ \vec{t}_{c_1} \mid \vec{t}_{c_2} \mid \dots \mid \vec{t}_{c_{n_1}} \right] \quad (1.18)$$

verificandose las ecuaciones (1.14) y (1.15) al cumplirse:

$$\underline{T_c}^{-1} \underline{A} \underline{T_c} = \underline{A_2}$$

o

$$\underline{A} \underline{T_c} = \underline{T_c} \underline{A_2}$$

y

$$\underline{T_c}^{-1} \vec{b} = \vec{b_2}$$

El vector  $\vec{c_2}$  es calculado de  $\vec{c} \underline{T_c}$

$$\vec{c_2} = \vec{c} \underline{T_c} = \left[ \beta_{n_1} \mid \beta_{n_1-1} \mid \dots \mid \beta_1 \right]$$

Con la definición de la matriz de cambio de base (de transformación de semejanza) se tiene por tanto que las descripciones matemáticas (a) y (b) del sistema son equivalentes, consecuentemente tienen la misma función de transferencia, con lo que queda demostrado el teorema.

Una forma de obtener el conjunto de vectores que forman la matriz de cambio de base es la siguiente. Dada la matriz de controlabilidad  $\underline{Q_2}$ :

$$\underline{Q_2} = \left[ \vec{b_2} \mid \underline{A_2} \vec{b_2} \mid \dots \mid \underline{A_2}^{n_1-1} \vec{b_2} \right]$$

tal que:

$$\underline{Q2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & e_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & e_{n_1-3} \\ 0 & 1 & e_1 & \dots & e_{n_1-2} \\ 1 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n_1-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$e_i = - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i+1} e^{(i-1)-j}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n_1-1$ ;  $e_0 = 1$

Siendo la matriz de controlabilidad  $\underline{Q2}$  no singular para cualquier  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}$ . Por lo tanto la matriz inversa de  $\underline{Q2}$  tendrá la forma siguiente:

$$\underline{Q2}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n_1-1} & \alpha_{n_1-2} \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n_1-2} & \alpha_{n_1-3} \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 1 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esto puede ser directamente verificado que  $\underline{Q} \underline{Q}^{-1} = \underline{I}$  calculando  $\underline{Q} \underline{Q}^{-1}$ , se puede corroborar que las columnas de  $\underline{T}_c$  están dadas como en la ecuación (1.18), así

$$\underline{T}_c = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \vec{t}_{c_1} & \vec{t}_{c_2} & \dots & \vec{t}_{c_{n_1}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \vec{b} & \underline{A}\vec{b} & \dots & \underline{A}^{n_1-1}\vec{b} \end{array} \right] \underline{Q}^{-1}$$

Ejemplo 1.4.1.

Dado un sistema controlable representado por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.19)$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad (1.20)$$

se busca transformarlas a la forma canónica controlable.

El polinomio característico de la matriz  $\underline{A}$  en (1.19) es:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -3 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 2$$

$$= \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$$



es decir:

$$-\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -9$$

$$\alpha_3 = 2$$

La matriz de controlabilidad  $\underline{Q}$  se calcula a continuación,

$$\underline{Q} = \left[ \vec{b} \mid \underline{A}\vec{b} \mid \underline{A}^2\vec{b} \right]$$

donde

$$\underline{A}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{A}^2\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de cambio de base

$$\underline{T_C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

además

$$[\beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1] = \vec{c} \underline{T_C} = [3 \quad 2 \quad 1]$$

consiguiendo así la forma canónica controlable la que estará dada por las ecuaciones:

$$\dot{\vec{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 2 \quad 1] \vec{x}_2$$

con la correspondiente función de transferencia

$$g(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2}$$

La aplicación de este concepto se puede ver claramente en el

estudio de realimentación de estados. El breve estudio de este subcapítulo servirá de introducción para el estudio de realimentación de estados y diseño de los mismos.

### 1.5. FORMA CANONICA OBSERVABLE.-

Asociando este tema a la observabilidad de sistemas descrita en el numeral 1.3 de este capítulo se pasa inmediatamente a la descripción matemática en que se fundamenta la construcción de las ecuaciones (de estado y de salida) en la forma conocida como canónica observable.

Dado el sistema representado por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \underline{A} \vec{x} + \underline{B} u$$

$$y = \underline{c} \vec{x} + d u$$

las mismas introducidas en el subcapítulo anterior (ecuaciones (1.12) y (1.13) ).

#### TEOREMA 1.5.1.

Sea el sistema  $n_1$  dimensional, lineal, invariante en el tiempo con una sola entrada y una sola salida descritas por las

ecuaciones (1.12) y (1.13), si este es observable entonces puede ser convertido, mediante una transformación de semejanza, en la forma

$$\dot{\vec{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n_1} \\ 1 & 0 & & 0 & -\alpha_{n_1-1} \\ 0 & 1 & & 0 & -\alpha_{n_1-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \vec{x}_2 + \begin{bmatrix} \beta_{n_1} \\ \beta_{n_1-1} \\ \beta_{n_1-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_2 + du$$

y la función de transferencia del sistema estará dada por:

$$g(S) = \frac{\beta_1 S^{n_1-1} + \beta_2 S^{n_1-2} + \dots + \beta_{n_1}}{S^{n_1} + \alpha_1 S^{n_1-1} + \dots + \alpha_{n_1}} + d$$

La demostración de este teorema es similar a la del teorema 1.4.1., más aún se puede decir que el presente teorema queda demostrado al aplicar el teorema de dualidad.

La transformación de semejanza utilizada es

$$\vec{x} = \underline{T}_0 \vec{x}_2$$

por lo tanto la representación canónica observable estará da  
da por

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_2 = \underline{A}_2 \vec{x}_2 + \underline{B}_2 u \quad (1.21)$$

$$y = \vec{c}_2 \vec{x}_2 + d u \quad (1.22)$$

consecuentemente las matrices constantes de las ecuaciones  
(1.21) y (1.22) están dadas por:

$$\underline{A}_2 = \underline{T}_0^{-1} \underline{A} \underline{T}_0$$

$$\underline{B}_2 = \underline{T}_0^{-1} \underline{B}$$

$$\vec{c}_2 = \underline{\vec{c}} \underline{T}_0$$

y la matriz de observabilidad del sistema representado por  
(1.21) y (1.22) es:

$$\underline{P}_2 = \begin{bmatrix} \vec{c}_2 \\ \vec{c}_2 \underline{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{c}_2 \underline{A}_2^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

Dada la matriz de observabilidad del sistema (forma original no canónica),  $\underline{P}$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c} \underline{A} \\ \vdots \\ \vec{c} \underline{A}^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\underline{P2} = \underline{T0}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c} \underline{A} \\ \vdots \\ \vec{c} \underline{A}^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{P2} = \underline{T0}^{-1} \underline{P}$$

Siendo el sistema observable las matrices son no singulares, en consecuencia se cumplen las siguientes igualdades:

$$\underline{T0} = \underline{P} \underline{P2}^{-1}$$

$$\underline{T0}^{-1} = \underline{P2} \underline{P}^{-1}$$

De manera similar que en el subcapítulo anterior se puede de-  
mostrar que

$$\underline{T}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{n_1-1} & \alpha_{n_1-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n_1-2} & \alpha_{n_1-3} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c} \underline{A} \\ \vdots \\ \vec{c} \underline{A}^{n_1-2} \\ \vec{c} \underline{A}^{n_1-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_0 = \underline{P} \underline{P}^{-1} \underline{P}$$

$$y \quad \vec{b}_2 = \underline{T}_0^{-1} \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n_1-1} \\ \vdots \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.5.1.

Del ejemplo 1.4.1., siendo el sistema observable y cuya re-  
presentación matemática es:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

se busca transformarlas a la forma canónica observable.

El polinomio característico al igual que en el ejemplo 1.4.1 está dado por:

$$\lambda^3 - 9\lambda + 2 = \lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$$

Se calcula la matriz de observabilidad

$$P = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}\underline{A} \\ \vec{c}\underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\vec{c}\underline{A} = [0 \quad 0 \quad 1] \quad \underline{A} = [0 \quad 2 \quad 0]$$

y  $\vec{c}\underline{A}^2 = [0 \quad 0 \quad 1]\underline{A}^2 = [6 \quad -2 \quad 2]$

entonces

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



y la matriz de cambio de base será:

$$\underline{T}_0 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\vec{b}_2 = T_0^{-1} \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obteniéndose de esta manera la forma canónica observable.

$$\dot{\vec{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_2$$

la última ecuación se obtuvo directamente como:

$$\vec{c}_2 = \vec{c} \underline{T}_0$$

Una de sus aplicaciones más importantes esta en el estudio de estimadores de estado.

#### FORMA CANONICA MULTIVARIABLE.-

Se considera un sistema  $n_1$ -dimensional, lineal, invariante en el tiempo y generalizado, es decir con múltiples entradas y salidas cuya representación matemática esta dada por las ecuaciones (1.1) y (1.2). Si el sistema es controlable, la matriz de controlabilidad  $\underline{Q}$  estará dada por:

$$\underline{Q} = \left[ \underline{B} \mid \underline{A} \underline{B} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \underline{B} \right]$$

$$\underline{Q} = \left[ \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \dots \mid \vec{b}_{n_1} \mid \underline{A} \vec{b}_1 \mid \dots \mid \underline{A} \vec{b}_{n_1} \mid \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \vec{b}_1 \mid \underline{A}^{n_1-1} \vec{b}_2 \mid \dots \dots \dots \mid \underline{A}^{n_1-1} \vec{b}_{n_1} \right] \quad (1.23)$$

cuyo rango es  $n_1$ . Por lo tanto, hay  $n_1$  vectores columna linealmente independientes. Existen varias formas de escoger  $n_1$  vectores columnas linealmente independientes de los  $n_1 \cdot n$  vectores que tiene la matriz  $\underline{Q}$ . A continuación se presentan dos formas de escoger estos  $n_1$  vectores columna linealmente independientes:

## PRIMERA FORMA:

Se comienza con el vector  $\vec{b}_1$  y entonces se procede a calcular  $\underline{A}\vec{b}_1$ ,  $\underline{A}^2\vec{b}_1$ , .. hasta que  $\underline{A}^{i_1-1}\vec{b}_1$  sea una combinación lineal de  $\{\vec{b}_1, \underline{A}\vec{b}_1, \dots, \underline{A}^{i_1-1}\vec{b}_1\}$ . Si  $i_1 = n_1$ , la ecuación puede ser controlada por la primera columna de  $\underline{B}$ . Si  $i < n_1$ , se calcula  $\vec{b}_2$ ,  $\underline{A}\vec{b}_2$ , ..., hasta que  $\underline{A}^{i_2-1}\vec{b}_2$  sea una combinación lineal de  $\{\vec{b}_1, \underline{A}\vec{b}_1, \dots, \underline{A}^{i_1-1}\vec{b}_1, \vec{b}_2, \underline{A}\vec{b}_2, \dots, \underline{A}^{i_2-1}\vec{b}_2\}$ . Si  $i_1 + i_2 < n_1$  se procede a calcular  $\vec{b}_3, \underline{A}\vec{b}_3, \dots$ , así sucesivamente. Asumiendo que  $i_1 + i_2 + i_3 = n_1$  entonces los  $n_1$ -vectores

$$\{\vec{b}_1, \underline{A}\vec{b}_1, \dots, \underline{A}^{i_1-1}\vec{b}_1, \vec{b}_2, \underline{A}\vec{b}_2, \dots, \underline{A}^{i_2-1}\vec{b}_2, \vec{b}_3, \underline{A}\vec{b}_3, \dots, \underline{A}^{i_3-1}\vec{b}_3\}$$

(1.24)

son linealmente independientes. Una propiedad que tiene esta forma es que el vector  $\underline{A}^{ij}\vec{b}_j$  puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores precedentes.

## SEGUNDA FORMA:

Los vectores son seleccionados de acuerdo al orden de la ecuación (1.23), comenzando desde  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{n_1}$  y entonces  $\underline{A}\vec{b}_1, \underline{A}\vec{b}_2, \dots, \underline{A}\vec{b}_{n_1}$ , continuando con  $\underline{A}^2\vec{b}_1, \underline{A}^2\vec{b}_2, \dots, \underline{A}^2\vec{b}_{n_1}$  y así sucesivamente hasta obtener los  $n_1$  vectores linealmente independien

tes. Estosse los reordena para que tengan el orden establecido en (1.24).

Definiendo la una nueva forma canónica mediante la transformación de semejanza siguiente:

$$\vec{x}_2 = \underline{T}_c^{-1} \vec{X}_2$$

y

$$\underline{T}_c \underline{\Delta} \left[ \begin{array}{c} \vec{b}_1 \\ \dots \\ \underline{A}^{i_1-1} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \dots \\ \underline{A}^{i_2-1} \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \dots \\ \underline{A}^{i_3-1} \vec{b}_3 \end{array} \right] \quad (1.25)$$

~~donde las X denotan elementos que son posibles  
tintos de cero.~~

$$\circ \quad \underline{T}_c \underline{\Delta} \left[ b_1 \dots \underline{A}^{i_1-1} b_1 \dots \underline{A}^{i_p-1} b_p \right] \quad (1.26)$$

La utilidad de las formas canónicas anteriores no es conocida hasta la presente. El propósito al ser introducidas es mostrar que no existen conceptos adicionales difíciles para desarrollar formas canónicas para ecuaciones dinámicas multivariadas. Reordenando los vectores de (1.25) y de (1.26) pueden ser obtenidas otras formas canónicas.

## CAPITULO II

### ANALISIS EN EL ESPACIO DE-ESTADO MEDIANTE PROGRAMAS PARA COMPUTADOR DIGITAL

- 2.1 Estructura de la biblioteca de programas.
- 2.2 Matriz de transición.- Propiedades.
- 2.3 Métodos para calcular la matriz de transición.
- 2.4 Cálculo de la matriz de Transición.- Desarrollo del programa.
- 2.5 Estados y Salidas.- Métodos de cálculo.
- 2.6 Cálculo de Estados y Salidas.- Desarrollo del programa.
- 2.7 Programa para la determinación de controlabilidad, observabilidad y estabilidad.

## CAPITULO II

ANALISIS EN EL ESPACIO DE-ESTADO MEDIANTE PROGRAMAS PARA -  
COMPUTADORA DIGITAL

## 2.1 ESTRUCTURA DE LA BIBLIOTECA DE PROGRAMAS.

Antes de abordar el tema del desarrollo del programa que calcula la matriz de transición se presenta una breve descripción de la estructura general de la biblioteca de programas, programas que sirven de apoyo a la parte descriptiva y analítica del presente trabajo.

El equipo de computación utilizado para el desarrollo y comprobación de los diferentes algoritmos de cálculo y manejo de datos es "4051 GRAPHIC SYSTEM" de la firma Tektrcnix; el mismo que está diseñado para trabajar con el lenguaje de alto nivel "BASIC", además de una serie de instrucciones propias de este sistema computacional que en su mayoría sirven para manejar los periféricos disponibles de los cuales se usarán: el grafizador, las unidades de discos, el impresor y el teclado.

La unidad central de proceso de este sistema tiene un área de memoria real de 30 kBytes (de 8 bits). Con el fin de a

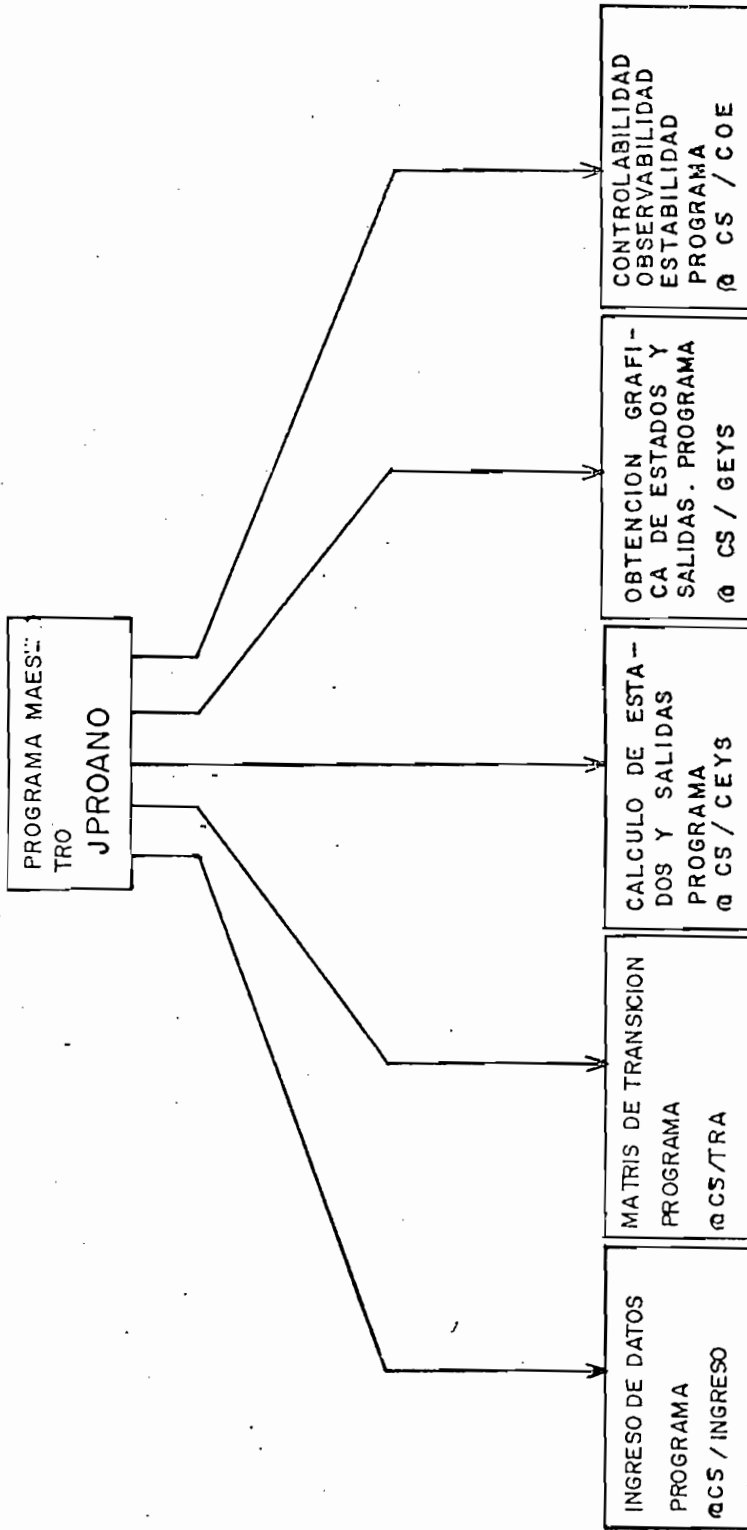


Fig. 2.1

provechar en mejor forma el área de memoria disponible para procesar y analizar sistemas de control de órdenes relativamente altos se hace necesario que, solamente el programa que se este ejecutando esté presente en la memoria real (además de un corto programa de control permanente en ella), los demás deben estar almacenados en la unidad de discos hasta que su uso sea requerido por el proceso establecido de antemano; el momento que un programa termine de ejecutarse éste deberá ser borrado de la memoria real y en su lugar deberá cargarse el programa siguiente a ser corrido. Este proceso de reemplazar un programa por otro es el fundamental objetivo del uso de un programa controlador llamado programa maestro.

La estructura general de la biblioteca de programas se presenta en la Fig. 2.1

La biblioteca de programas ha sido elaborada de manera tal que permita la comunicación entre el computador y el usuario en una manera conversacional.

Además se debe tomar en cuenta el hecho de que el sistema computacional utilizado requiere que la nomenclatura de las variables a usarse sea consistente para todos los programas en que estas variables aparezcan.



A continuación se presentan las características más importantes del programa maestro y del programa de ingreso de datos (ver Fig. 2.1). A medida que se describan los tópicos a tratarse que requieran el uso del computador para su aplicación se delinearán las características fundamentales del programa correspondiente entre las que anotamos las siguientes: en primer término la lista de variables utilizadas con su respectivo significado y en segundo lugar un diagrama de flujo razonablemente sintetizado. En caso de que el lector requiera información adicional refiérase al APENDICE en el que se encuentran los listados de cada uno de los programas tratados en este trabajo.

#### Programa Maestro: JPROANO

Este constituye el control de ejecución, reemplazo y borrado de programas que permite que el conjunto de estos se corra siguiendo la lógica predefinida.

Su ejecución involucra:

- 1.- Verificar si está o no en memoria el programa requerido.
- 2.- Si se encuentra en memoria dar paso a su ejecución.
- 3.- Si no se encuentra en memoria entonces:
  - a) limpiar la memoria

- b) cargar el programa deseado
- c) ejecutarlo

El programa maestro contiene el índice de programas a disposición del usuario y se mostrará en la pantalla cada vez que este lo desee.

Los nombres de las variables utilizadas y su contenido (en valores numéricos o caracteres literales) son:

NOMBRE	CONTENIDO
00	Número de la unidad de discos del programa
01	Número del programa que se desea ejecutar.
02	Número del programa presente en memoria.
P6	Número auxiliar dentro de algunos de los programas.
09	Número de la unidad de disco en que se encuentran los datos iniciales (precautelados).
X\$	Nombre del programa en memoria.

El diagrama de flujo para el programa maestro se muestra en la Fig. 2.2.

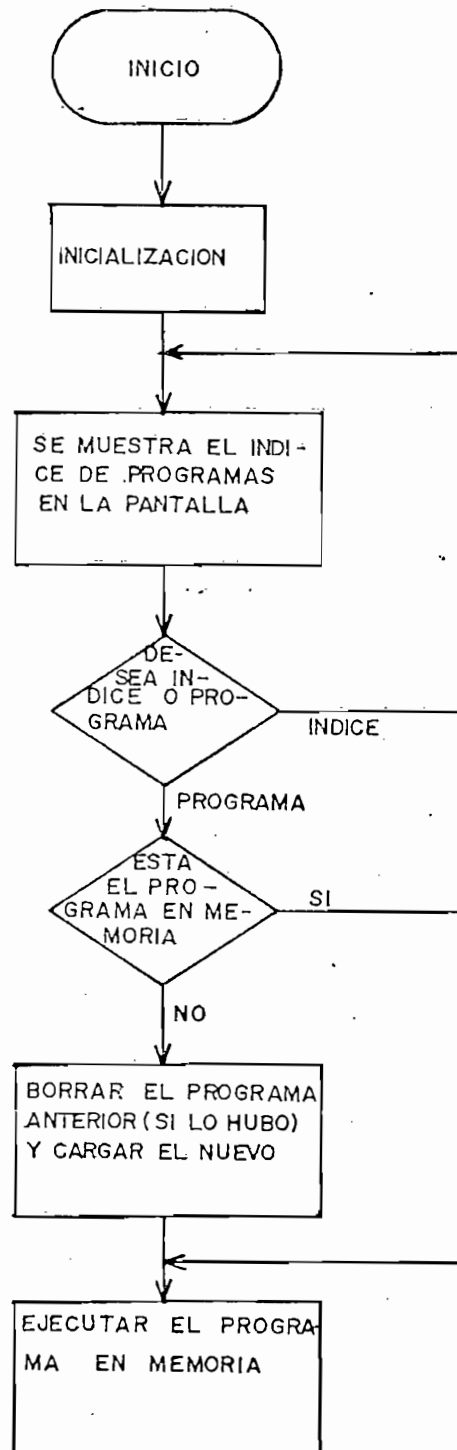


Fig. 2.2

Programa de Ingreso de Datos: C5/INGRESO

Este permite el ingreso básico de los datos que requiere el conjunto de programas para su normal funcionamiento. Tiene este programa algunas opciones que lo hacen versatil en cuanto al ingreso de datos iniciales y estas opciones son:

- 1.- Ingreso de coeficientes de las matrices A, B, C, D, J, T, y T<sup>-1</sup> (por teclado)
- 2.- Lectura de datos de un archivo propio.
- 3.- Lectura de datos de archivo ajeno
- 4.- Listado de datos
- 5.- Corrección de datos
- 6.- Fin de ingreso

Observar que las tres últimas opciones no podrán ser ejecutadas sin haberlo sido alguna de las tres primeras.

Se almacenan los datos en un archivo auxiliar y luego se borran los datos de memoria para volver a tener el índice de programas en la pantalla. Así cada programa en parti

cular deberá posteriormente, cuando su ejecución sea requerida, leer de el archivo auxiliar los datos que únicamente necesite.

Los nombres de las variables utilizadas y su contenido son las siguientes:

NOMBRE	CONTENIDO
N1	Orden del sistema
N	Número de entradas
Nø	Número de salidas
A	Matriz de orden N1xN1
B	Matriz de orden N1xN
C	Matriz de orden NøxN1
D	Matriz de orden NøxN
I9	Número de opción deseada
Z\$	Nombre del problema
Bø	Vectores propios con complejos
J	Matriz de orden N1*N1. Parte real de la forma de Jordan.
Gø	Matriz de orden N1xN1. Parte imaginaria de la forma de Jordan.
T	Matriz de orden N1xN1. Parte real de la matriz de semejanza

T1	Matriz de orden $N \times N$ . Parte imaginaria de la matriz de semejanza
T $\phi$	Matriz de orden $N \times N$ . Parte real de la matriz inversa de semejanza
T2	Matriz de orden $N \times N$ . Parte imaginaria de la matriz inversa de semejanza
V\$	Nombre del archivo donde almacenar
O7	Dirección de la unidad de impresión.
O8	Número que sirve para la lógica del programa.

En la Fig. 2.3 se tiene el diagrama de flujo correspondiente con el fin de aclarar su funcionamiento.

## 2.2. MATRIZ DE TRANSICION.- PROPIEDADES.

El estudio del presente capítulo tiene por finalidad enfocar en primer lugar el análisis y descripción de los métodos más utilizados para obtener la solución homogénea y la solución total de la ecuación matricial de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo; y, en segundo lugar, el desarrollo de un programa digital que haga factible el manejo de los parámetros inherentes al sistema de control a analizarse y obtener la matriz de transición del mismo y sus

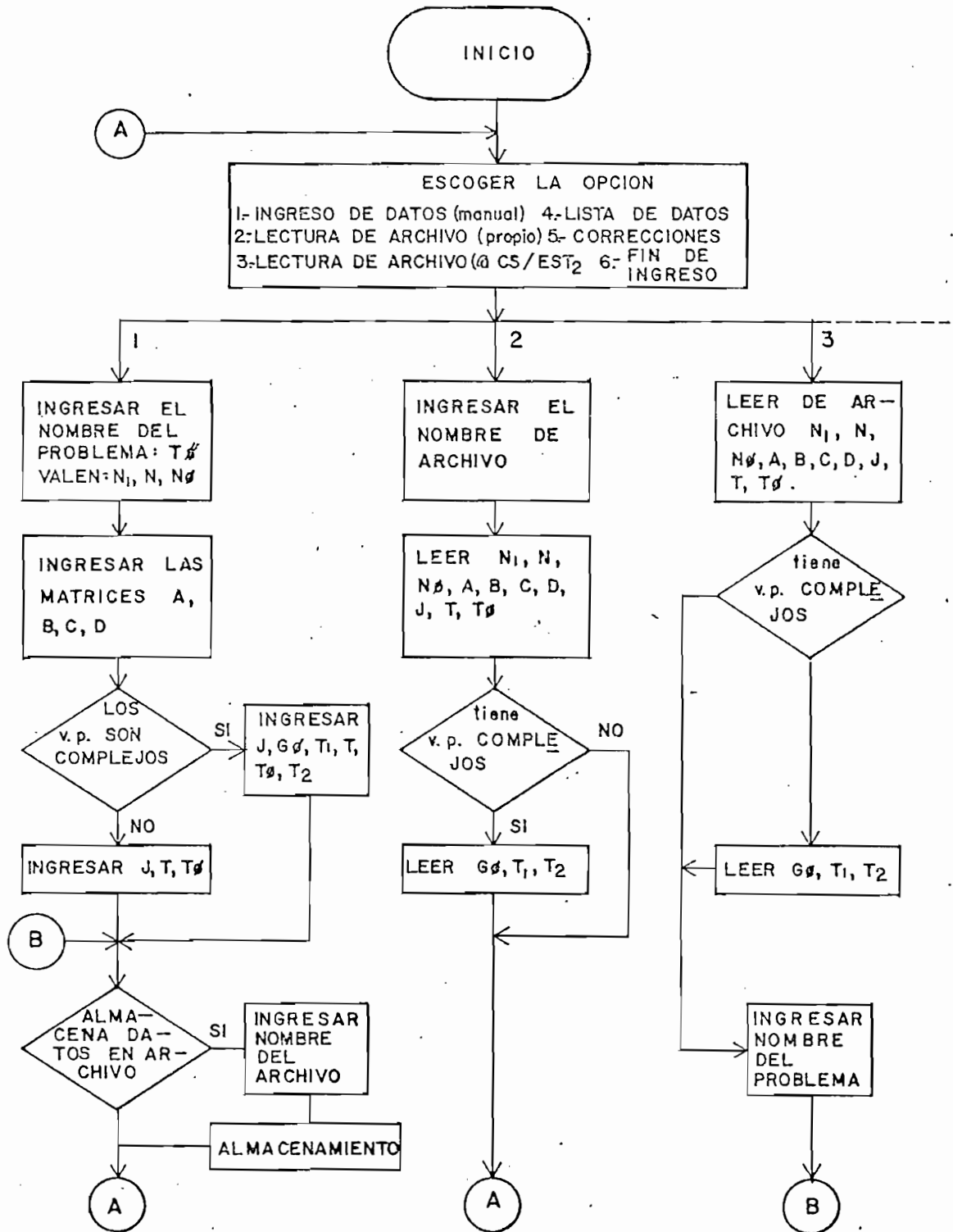


Fig. 2.3.a

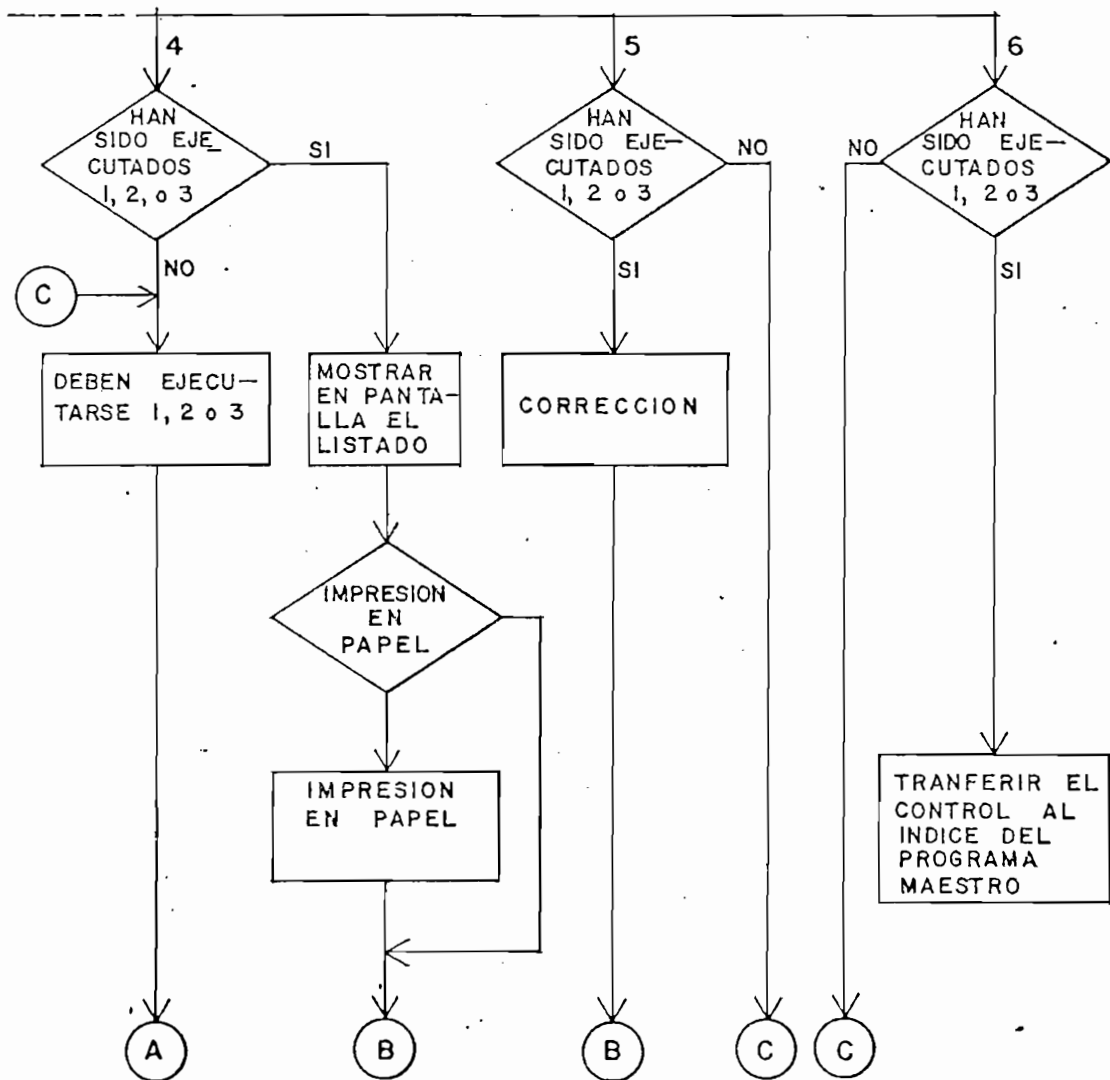


Fig. 2.3.b



estados y salidas aprovechando las ventajas que en cuanto a velocidad y precisión ofrecen los métodos numéricos manejados adecuadamente e implementados en una computadora.

Previamente se hará una exposición de las ecuaciones que describen un sistema dinámico y sus propiedades.

De manera general las ecuaciones dinámicas lineales que describen a un sistema variante en el tiempo, en el espacio de estado son:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underline{A}(t)\vec{x}(t) + \underline{B}(t)\vec{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C}(t)\vec{x}(t) + \underline{D}(t)\vec{u}(t) \quad (2.2)$$

En efecto las ecuaciones anteriores representan la forma general, el objeto abstracto de un sistema diferencial lineal de orden  $n$ , descrito en el espacio de estado con  $n$  entradas y  $n_0$  salidas.

donde:

$\vec{x}(t)$  es un  $n$ -vector

$\vec{u}(t)$  es un  $n$ -vector

$\vec{y}(t)$  es un  $n_0$ -vector

$\underline{A}(t)$  es una matriz  $n_1 \times n_1$

$\underline{B}(t)$  es una matriz  $n_1 \times n$

$\underline{C}(t)$  es una matriz  $n \times n_1$

$\underline{D}(t)$  es una matriz  $n \times n$

Cabe anotar que la ecuación (2.1) es conocida como "ecuación de estado" y la ecuación (2.2) es conocida como "ecuación de salida."

Lo primero que interesa es encontrar la solución homogénea a la ecuación de estado es decir cuando la entrada  $\vec{u}(t)$  es nula, por tanto la ecuación de estado se reducirá a:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}(t)\vec{x}(t) \quad (2.3)$$

A continuación se presentan algunos teoremas y definiciones referentes a la ecuación (2.3) que darán una clara visión acerca de las características de la misma, que a su vez serán útiles para el desarrollo de los correspondientes métodos de cálculo de la matriz de transición.

#### Teorema 2.1

El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2.3) forma un espacio vectorial de dimensión  $n_1$  sobre el campo de los números complejos.

Demostración:

Sean  $\vec{\psi}_1$  y  $\vec{\psi}_2$  dos soluciones arbitrarias de la ecuación (2.3), además  $\alpha_1\vec{\psi}_1 + \alpha_2\vec{\psi}_2$  es también una solución de la ecuación (2.3) para cualquiera  $\alpha_1, \alpha_2$ ; como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_1\vec{\psi}_1 + \alpha_2\vec{\psi}_2) &= \alpha_1 \frac{d}{dt}\vec{\psi}_1 + \alpha_2 \frac{d}{dt}\vec{\psi}_2 \\ &= \alpha_1 \underline{A}(t)\vec{\psi}_1 + \alpha_2 \underline{A}(t)\vec{\psi}_2 \\ &= \underline{A}(t)[\alpha_1\vec{\psi}_1 + \alpha_2\vec{\psi}_2] \end{aligned}$$

por lo tanto el conjunto de soluciones forman un espacio lineal sobre  $\mathbb{C}$ , que también es conocido como la solución de espacio de estado (solución espacial) de la ecuación (2.3)

A continuación se verificará que la solución de espacio de estado tiene dimensión  $n_t$ .

Sean  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n_t}$  vectores cualesquiera linealmente independientes de dimensión  $n_t$ , y  $\vec{\psi}_i$  soluciones a (2.3) con la condición inicial  $\vec{\psi}_i(t_0) = \vec{e}_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n_t$ .

Si se prueba que  $\vec{\psi}_i$ , para  $i=1, 2, \dots, n_t$  son linealmente inde-

pendientes y que cada solución de (2.3) puede ser escrita como una combinación de  $\vec{\psi}_i$ , para  $i=1,2,\dots,n$ ; el teorema que dará completamente demostrado.

Aplicando el método de demostración por contradicción se hace la suposición de que  $\vec{\psi}_i$ , para  $i=1,2,\dots,n$  son linealmente dependientes, entonces por de definición de dependencia lineal existe un vector  $\vec{\alpha}$  ( $n \times 1$ ) distinto de cero tal que:

$$[\vec{\psi}_1 \ \vec{\psi}_2 \ \dots \ \vec{\psi}_n] \vec{\alpha} = \vec{0} \quad (2.4)$$

lo que puede escribirse de una forma más descriptiva como:

$$[\vec{\psi}_1(t) \ \vec{\psi}_2(t) \ \dots \ \vec{\psi}_n(t)] \vec{\alpha} = \vec{0} \quad (2.5)$$

para todo  $t$  en  $(-\infty, \infty)$

En particular se tiene:

$$\begin{aligned} & [\vec{\psi}_1(t_0) \ \vec{\psi}_2(t_0) \ \dots \ \vec{\psi}_n(t_0)] \vec{\alpha} = \\ & = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n] \vec{\alpha} = \vec{0} \end{aligned}$$

lo que implicaría que  $\vec{e}_i$ , para  $i=1,2,\dots,n$  son linealmente dependientes, contradiciendo por consiguiente la hipótesis.

Por lo tanto queda demostrado que  $\vec{\psi}_i$ , para  $i=1,2,\dots,n_1$  son linealmente independientes sobre  $(-\infty,\infty)$

Por otra parte haciendo la asunción de que  $\vec{\psi}$  es una solución de la ecuación (2.3) y que  $\vec{\psi}(t_0)=\vec{e}$ ; sean  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n_1}$  vectores linealmente independientes, entonces  $\vec{e}$  puede ser expresado como una única combinación lineal de  $\vec{e}_i$ , para  $i = 1,2,\dots, n_1$ ; por ejemplo como:

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{e}_i$$

por lo tanto es evidente que  $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i$  es una solución de la ecuación (2.3) con la condición inicial siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i(t_0) = \vec{e}$$

Por consiguiente se concluye que:

$$\vec{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i(t)$$

lo que prueba que la solución a la ecuación (2.3) es un vector  $n_1$  dimensional.

Definición 2.1,

Se define una matriz  $\underline{\Psi}$   $n_1 \times n_1$  de la cual se afirma que es una matriz fundamental de la ecuación (2.3) si y solamente si las  $n_1$  columnas de  $\underline{\Psi}$  consisten en  $n_1$  soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.3).

Ejemplo (2.1).-

Se considera la ecuación dinámica

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

que puede ser representada por dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = t x_1(t) \quad (2.2.3)$$

cuyas soluciones son las siguientes:

$$x_1(t) = x_1(0) \quad (2.2.4)$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{2} x_1(0) + x_2(0) \quad (2.2.5)$$

Para hallar una matriz fundamental es necesario hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.2.1) para lo cual es necesario establecer las condiciones iniciales siguientes:

$$a) \quad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1$$

$$x_1(t) = 1 \quad x_2(t) = \frac{t^2}{2} + 1$$

$$b) \quad x_1(t_0) = 1 \quad x_2(t_0) = 0$$

$$x_1(t) = 1 \quad x_2(t) = \frac{t^2}{2}$$

Se comprueba que las soluciones son linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\alpha_1 \frac{t^2}{2} + \alpha_1 + \alpha_1 \frac{t^2}{2} = 0$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\alpha_1 = 0$$

de donde se concluye que son linealmente independientes por lo tanto una matriz fundamental  $\underline{\Psi}_1$  será:

$$\underline{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

De la misma forma se puede hallar otra matriz fundamental

$\underline{\Psi}_2$ :

a)  $x_1(t_0) = 0$

$x_2(t_0) = 1$

$x_1(t) = 0$

$x_2(t) = 1$

b)  $x_1(t_0) = 2$

$x_2(t_0) = 0$

$x_1(t) = 2$

$x_2(t) = t^2$

de donde

$$\underline{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

Cada columna de  $\underline{\Psi}$  por definición satisface la ecuación diferencial:



$$\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$$

por lo tanto es evidente que  $\underline{\Psi}$  satisface la ecuación matricial siguiente:

$$\dot{\underline{\Psi}} = \underline{A}(t) \underline{\Psi} \quad (2.6)$$

con  $\underline{\Psi}(t_0) = \underline{E}$ , donde  $\underline{E}$  es alguna matriz constante no singular.

Si una matriz  $\underline{M}$  satisface la ecuación (2.6) y si  $\underline{M}$  es regular para algún  $t$ , entonces por la demostración del teorema anterior conocemos que todas las columnas de  $\underline{M}$  son linealmente independientes, por lo tanto la matriz  $\underline{M}$  es una matriz fundamental de la ecuación  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$ .

De lo que podemos concluir que la matriz  $\underline{\Psi}$  es una matriz fundamental de la ecuación  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  si y solamente si  $\underline{\Psi}$  satisface la ecuación (2.6) y  $\underline{\Psi}$  no es singular para algún  $t$ .

Ejemplo 2.2.

Del ejemplo (2.1) se verifica a continuación que  $\underline{\Psi}_1$  y  $\underline{\Psi}_2$  son solución de la ecuación (2.6)

$$a) \quad \dot{\underline{\psi}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \underline{\psi}_1$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & t \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \dot{\underline{\psi}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \underline{\psi}_2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$$

Una importante propiedad de la matriz fundamental  $\underline{\Psi}$  es que inversa ( $\underline{\Psi}^{-1}$ ) existe para cada  $t$  en  $(-\infty, \infty)$  esto se concluye del siguiente teorema:

Teorema 2.2.

Cada matriz fundamental  $\underline{\Psi}$  es regular para todo  $t$  en  $(-\infty, \infty)$

Demostración:

Si  $\vec{\psi}(t)$  es una solución de la ecuación  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  y si  $\vec{\psi}(t_0) = \vec{0}$  para algún  $t_0$ , entonces la solución es idéntica a cero esto es:

$$\vec{\psi}(t) \equiv \vec{0} \quad (2.7)$$

Obviamente la identidad (2.7) es una solución de  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  con  $\vec{\psi}(t_0) = \vec{0}$ ; además considerando la unicidad de la solución, se concluye que (2.7) es solamente solución con  $\vec{\psi}(t_0) = \vec{0}$ .

Demostración por contradicción:

Se hace la suposición en primer lugar que se cumple:

$$\det \underline{\Psi}(t_0) = \det |\vec{\psi}_1(f_0) \vec{\psi}_2(f_0) \dots \vec{\psi}_{n_1}(f_0)| = 0$$

para algún  $t_0$ , entonces el conjunto de  $n_1$  vectores columna (constantes)  $\vec{\psi}_1(t_0), \vec{\psi}_2(t_0), \dots, \vec{\psi}_{n_1}(t_0)$  son linealmente de pendientes, por lo tanto esto significa que existen constan tes  $\alpha_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n_1$  al menos una distinta de cero tal que se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i(t_0) = 0$$

justamente con el hecho de que  $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i$  es una solución de  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  implica que:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \vec{\psi}_i(t) = 0$$

Esto contradice la asunción de que  $\vec{\psi}_i(t)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n_1$  son linealmente independientes; de lo que se concluye - que  $\det \underline{\Psi}(t) \neq 0$  para todo  $t$  que pertenece al intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

Ejemplo (2.3)

Del ejemplo (2.1) se verifica el teorema anterior para las dos matrices fundamentales de la ecuación (2.2.1).

a)

$$\underline{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\det \underline{\Psi}_1 = 1 \cdot \frac{t^2}{2} - 1 \cdot \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) = -1$$

b)

$$\underline{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\det \underline{\Psi}_2 = 0 \cdot t^2 - 2 \cdot 1 = -2$$

con lo que se comprueba el teorema anterior.

## Definición 2.2

Sea  $\underline{\Psi}(t)$  alguna matriz fundamental de  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}$  entonces  $\underline{\Phi}(t, t_0) \triangleq \underline{\Psi}(t)\underline{\Psi}^{-1}(t_0)$  para todo  $t$  y  $t_0$  en  $(-\infty, \infty)$ . Se define  $\underline{\Phi}(t, t_0)$ , como la matriz de transición de  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}$ .

Nótese que la matriz de transición  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  está determinada únicamente por  $\underline{A}(t)$  de la ecuación (2.3) y es independiente de la matriz fundamental particularmente escogida; lo cual se demuestra a continuación.

Sean  $\underline{\Psi}_1$  y  $\underline{\Psi}_2$  dos diferentes matrices fundamentales de la ecuación  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}$ , por tanto las columnas de  $\underline{\Psi}_1$  como las columnas de  $\underline{\Psi}_2$  tienen la cualidad de ser vectores que forman una base del espacio vectorial de dimensión  $n$ , por consiguiente existe una matriz constante  $\underline{P}$  conocida como matriz de cambio de base, de tal forma que:

$$\underline{\Psi}_2 = \underline{\Psi}_1 \underline{P}$$

en efecto la  $i$ -ésima columna de  $\underline{P}$  es la representación de la  $i$ -ésima columna de  $\underline{\Psi}_2$  con respecto a la base que consiste de las columnas de  $\underline{\Psi}_1$ .

Por definición, se tiene

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(t, t_0) &= \underline{\Psi}_2(t) (\underline{\Psi}_2(t_0))^{-1} = \underline{\Psi}_1(t) \underline{P} \underline{P}^{-1} \underline{\Psi}_1^{-1}(t_0) \\ &= \underline{\Psi}_1(t) \underline{\Psi}_1^{-1}(t_0)\end{aligned}$$

con lo que queda probada la unicidad de  $\underline{\phi}(t, t_0)$ .

Ejemplo (2.4)

Haciendo uso de las matrices fundamentales del ejemplo (2.1) se hallará la matriz de transición

a) Sea

$$\underline{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

de donde

$$\underline{\Psi}_1^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\Psi}_1} \cdot \text{Adj } \underline{\Psi}_1$$

del ejemplo (2.3) se tiene:

$$\det \underline{\Psi}_1 = -1$$

además calculando el adjunto de  $\underline{\Psi}_1$

$$\text{Adj } \underline{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & -1 \\ -\frac{t^2}{2} - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\underline{\Psi}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por definición de matriz de transición se tiene:

$$\underline{\Phi} = \underline{\Psi}_1 \underline{\Psi}_1^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\underline{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$



de donde

$$\underline{\Psi}_2^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\Psi}_2} \text{Adj } \underline{\Psi}_2$$

del ejemplo (2.2) se tiene:

$$\det \underline{\Psi}_2 = -2$$

además calculando el adjunto de  $\underline{\Psi}_2$

$$\text{Adj } \underline{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} t^2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\underline{\Psi}_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Por definición de matriz de transición se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} &= \underline{\Psi}_2 \underline{\Psi}_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (2.6), se concluye que  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  es la solución única de la ecuación matricial.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t, t_0) \quad (2.8)$$

con la condición inicial  $\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$

A partir del concepto de matriz de transición, la solución de  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  se presenta a continuación.

En general una solución a una ecuación de estado no lineal con una entrada  $\vec{u}(t)$  y una condición inicial  $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$  se puede escribir en términos de su trayectoria en el espacio de estado como  $\vec{x}(t) = \vec{\Phi}(t; \vec{u}(t); \vec{x}_0, t_0)$ . Como el estado de un sistema de entrada cero no depende de  $\vec{u}(t)$ , se puede escribir  $\vec{x}(t) = \vec{\Phi}(t; \vec{x}_0, t_0)$ . Además si el sistema es lineal, entonces es lineal respecto a la condición inicial, por lo tanto la solución de la ecuación  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}(t)\vec{x}$  con  $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$  esta dada por:

$$\vec{x}(t) \stackrel{\Delta}{=} \underline{\phi}(t, \vec{x}_0, t_0) = \underline{\phi}(t, t_0) \vec{x}_0 \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Propiedades de -la- matriz -de- transición.

Considerando que el sistema descrito por las ecuaciones (2.1) y (2.2) es dinámico, posee las siguientes características:

a.- Existe un valor real de salida  $\vec{y}(t)$  para todo  $t > t_0$  siendo la entrada  $\vec{u}(t)$  una función real para todo  $t$ .

b.- La salida  $\vec{y}(t)$  no depende de la entrada  $\vec{u}(\tau)$  para  $\tau > t$ .

características que sirven de base para la demostración de las propiedades de la matriz de transición.

#### I. Propiedad de transición

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{\phi}(t, t_1) \underline{\phi}(t_1, t_0) \quad (2.10)$$

Demostración:

Por definición de la trayectoria para un sistema

ma dinámico se tiene:

$$\underline{\Phi}(t; \vec{u}(t), \vec{x}(t_0), t_0) = \underline{\Phi}(t; \vec{u}(t), \vec{x}(t_1), t_1)$$

para todo  $t, t_1, t_0$  que cumplen con:  $t_0 < t_1 < t$ ; de donde se verifica:

$$\vec{x}(t_1) = \underline{\Phi}(t_1; \vec{u}(t), \vec{x}(t_0), t_0)$$

a partir de lo cual se tienen las siguientes igualdades:

$$\underline{\Phi}(t, t_0) \vec{x}(t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \vec{x}(t_1) \quad (2.11)$$

$$\vec{x}(t_1) = \underline{\Phi}(t_1, t_0) \vec{x}(t_0) \quad (2.12)$$

reemplazando la ecuación (2.12) en la ecuación (2.11) se obtiene:

$$\underline{\Phi}(t, t_0) \vec{x}(t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0) \vec{x}(t_0)$$

como  $\vec{x}(t_0)$  es arbitraria, queda demostrado que

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0)$$

## II. Propiedad de inversión.

$$\underline{\Phi}(t_0, t_1) = \underline{\Phi}^{-1}(t_1, t_0) \quad (2.13)$$

Demostración:

Ya que se cumple que  $\vec{x}(t_0) = \underline{\Phi}(t_0, t_0) \vec{x}(t_0)$ , la condición inicial sobre  $\underline{\Phi}$  es  $\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$ ; y utilizando la ecuación (2.10) se verifica lo siguiente:

$$\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{\Phi}(t_0, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0) = \underline{I}$$

$$\underline{\Phi}(t_1, t_1) = \underline{\Phi}(t_1, t_0) \underline{\Phi}(t_0, t_1) = \underline{I}$$

por consiguiente:

$$\underline{\Phi}(t_0, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0) = \underline{\Phi}(t_1, t_0) \underline{\Phi}(t_0, t_1) = \underline{I}$$

la ecuación anterior corresponde a la definición de matriz inversa, de donde se ~~se~~  $\det \underline{\Phi}(t_0, t_1) \neq 0$  se concluye:

$$\underline{\Phi}(t_0, t_1) = \underline{\Phi}^{-1}(t_1, t_0)$$

## III. Propiedad de separación

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{\theta}(t)\underline{\theta}^{-1}(t_0) \quad (2.14)$$

Demostración:

Se define  $\underline{\theta}(t) = \underline{\phi}(t, 0)$ ; reemplazando arbitrariamente en la propiedad de transición  $t_1 = 0$ ; se tiene:

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{\phi}(t, 0)\underline{\phi}(0, t_0)$$

entonces:

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{\theta}(t)\underline{\phi}(0, t_0)$$

y si  $\det \underline{\phi}(0, t_0) \neq 0$  y haciendo uso de la propiedad de inversión se llega a demostrar:

$$\underline{\phi}(t, t_0) = \underline{\theta}(t)\underline{\theta}^{-1}(t_0)$$

#### IV. Propiedad del determinante

$$\det \underline{\phi}(t_1, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_1} |\operatorname{tr} \underline{A}(\tau)| d\tau} \quad (2.15)$$

donde  $\operatorname{tr} \underline{A}(\tau)$  se define como la traza de  $\underline{A}(\tau)$  y constituye la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz  $\underline{A}(\tau)$

Demostración:

Para efectos de demostración partimos a  $\Phi$  en sus vectores fila  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_{n_1}$ . Entonces

$$\det \underline{\Phi} = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n_1}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \frac{d}{dt}(\det \underline{\Phi}) &= \frac{d}{dt} P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n_1} + \\ &+ P_1 \wedge \frac{d}{dt} P_2 \wedge \dots \wedge P_{n_1} + \\ &\dots + P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge \frac{d}{dt} P_{n_1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

De la ecuación (2.8) para  $\underline{\Phi}$ , los vectores fila están relacionados por:

$$\frac{d}{dt} P_i = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}(t) P_k$$

para  $i=1, 2, \dots, n_1$

Ya que este es un sistema dinámico, lineal y que varía con el tiempo, cada elemento  $a_{ik}(t)$  es continuo y de un solo valor, así que este representa de manera única a  $\frac{d}{dt} P_i$  para cada  $t$ .

$$\begin{aligned}
 P_1 \wedge \dots \wedge \frac{d}{dt} P_i \wedge \dots \wedge P_{n_1} &= P_1 \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} P_k \wedge \dots \wedge P_{n_1} \\
 &= a_{ii} (P_1 \wedge \dots \wedge P_i \wedge \dots \wedge P_{n_1})
 \end{aligned}$$

Entonces de la ecuación (2.16)

$$\frac{d}{dt}(\det \underline{\Phi}) = |\operatorname{tr} \underline{A}(t)| P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n_1}$$

separando las variables se obtiene:

$$\frac{d(\det \underline{\Phi})}{\det \underline{\Phi}} = \operatorname{tr} \underline{A}(t) dt$$

Integrando y tomando el antilogaritmo resulta:

$$\det \Phi(t, t_0) = \gamma e^{\int_{t_0}^t |\operatorname{tr} \underline{A}(t)| dt}$$

donde  $\gamma$  es la constante de integración; tomando  $t=t_0$  se obtiene  $\det \Phi(t_0, t_0) = \det \underline{I} = 1 = \gamma$ . Con lo cual la propiedad del determinante queda demostrada.



### 2.2.3. Obtención -de-la- matriz -de- transición.

A partir de las ecuaciones (2.6), (2.8) y haciendo uso de las propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales se puede afirmar lo siguiente: si  $\underline{A}(t)$  es una función continua de  $t$ , entonces  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  y  $\underline{\Psi}(t)$  son continuamente diferenciables (su primera derivada existe y es continua); más generalmente si  $\underline{A}(t)$  es  $n_1$  veces continuamente diferenciable en  $t$ , entonces  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  y  $\underline{\Psi}(t)$  son  $(n_1+1)$  veces continuamente diferenciables en  $t$ .

Si  $\underline{A}(t)$  y  $\int_{t_0}^t \underline{A}(\tau) d\tau$  conmutan para todo  $t$ , entonces la única solución de la ecuación (2.8) esta dada por:

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \underline{A}(\tau) d\tau} \quad (2.17)$$

Además si  $\underline{A}(t)$  es una matriz diagonal o una matriz constante, entonces se tiene:

$$\underline{A}(t) \left( \int_t^t \underline{A}(\tau) d\tau \right) = \left( \int_t^t \underline{A}(\tau) d\tau \right) \underline{A}(t)$$

Sin embargo la mayor parte de las matrices que varían con el tiempo, no poseen la propiedad conmutativa y por lo tan-

to no se cumple la ecuación (2.17); en estos casos no hay una relación simple entre  $\underline{A}(t)$  y  $\underline{\Phi}(t, t_0)$ , y hallar la solución para  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  es generalmente una tarea muy difícil.

De aquí en adelante se tratará únicamente la solución homogénea a la ecuación de estado de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo que no es más que un caso particular del caso variante en el tiempo, anteriormente estudiado.

Para este caso particular las ecuaciones (2.1) y (2.2) se mantienen, con la única diferencia que las matrices  $\underline{A}(t)$ ,  $\underline{B}(t)$ ,  $\underline{C}(t)$  y  $\underline{D}(t)$  deben consistir únicamente de elementos constantes; así pues de aquí en adelante se trabajará con las siguientes ecuaciones de estado y salida respectivamente:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) + \underline{B}\vec{u}(t) \quad (2.18)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C}\vec{x}(t) + \underline{D}\vec{u}(t) \quad (2.19)$$

Por lo tanto la ecuación de estado homogénea tendrá la siguiente forma:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) \quad (2.20)$$

De la ecuación (2.17) se concluye que la matriz de transición será:

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t \underline{A} dt} \\ &= e^{\underline{A}(t-t_0)}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Por consiguiente la solución de la ecuación (2.20), de acuerdo a la ecuación (2.9) será:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{x}_0 \\ &= e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{x}(t_0)\end{aligned}$$

donde  $e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\underline{A}^3}{3!}t^3 + \dots$

y esta última ecuación reemplazada en la ecuación (2.20) satisface la igualdad:

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\underline{A}^k}{(k-1)!} t^{k-1} = \underline{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k}{k!} t^k$$

Adicionalmente en la ecuación (2.21) si  $t=t_0$  entonces

$e^{\underline{A}(t-t_0)} = \underline{I}$  por lo tanto las condiciones de contorno son satisfechas; es decir:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0) &= e^{\underline{A}(t_0-t_0)}\vec{x}(t_0) \\ &= \underline{I}\vec{x}(t_0) \\ &= \vec{x}(t_0)\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que la solución única de la ecuación de estado homogénea

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t)$$

será:  $\vec{x}(t) = \underline{\Phi}(t, t_0)\vec{x}(t_0)$

donde  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  es la matriz de transición y es la que gobierna el movimiento del vector de estado (en el espacio  $n_1$ -dimensional) en el intervalo en el cual la entrada es idéntica a cero; es decir  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  es una transformación lineal que traza la trayectoria desde el estado  $\vec{x}_0$  en el tiempo  $t_0$  hasta el estado  $\vec{x}$  en el tiempo  $t$ .

siendo:

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = e^{\underline{A}(t-t_0)}$$

Necesariamente el cálculo de la matriz de transición de estado es mucho más laborioso y complicado que encontrar la solución para una variable (vector) dependiente en una ecuación (matricial) diferencial lineal. Sin embargo la información adicional suministrada por la matriz de transición permite al diseñador de sistemas de control utilizar técnicas más sofisticadas de diseño.

Una forma práctica de hallar los elementos de la matriz de transición en un sistema real es la siguiente:

De la ecuación (2.9) y con la condición de  $t = 0$  se tiene:

$$\vec{X}(t) = \underline{\Phi}(t, 0)\vec{X}(0)$$

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \dots & \phi_{1n_1}(t) \\ \phi_{21}(t) & \dots & \dots & \phi_{2n_1}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{n_11}(t) & \dots & \dots & \phi_{n_1n_1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n_1}(0) \end{bmatrix}$$

Nótese que para determinar la matriz de transición se hacen todas las condiciones iniciales cero exepcto una variable de estado; la salida de los estados es evaluada con respecto al tiempo. Por ejemplo si  $X_1(0)=1$  y  $X_2(0)=X_3(0) = \dots = X_{n_1}(0) = 0$ ; entonces se tiene  $X_1(t) = \phi_{11}(t)$ ;  $X_2(t) = \phi_{21}(t)$  y asi sucesivamente. Asi pues en general al término  $\phi_{ij}(t)$  - es la respuesta transitoria de la  $i$ -ésima variable de estado debido a una condición inicial en el  $j$ -ésimo estado cuando todos los demás estados tienen por condición inicial cero.

### 2.3. METODOS -PARA- CALCULAR -LA- MATRIZ -DE- TRANSICION..

Partiendo del hecho de que la solución homogénea de la ecuación lineal de estado invariante en el tiempo está dada por:

$$\vec{x}(t) = \underline{\phi}(t, t_0)\vec{x}(t_0)$$

donde  $\underline{\phi}(t, t_0)$  es la matriz de transición dada por la ecuación (2.21)

$$\underline{\phi}(t, t_0) = e^{\underline{A}(t-t_0)}$$

A continuación se presentan algunos de los métodos numéricos más utilizados para el cálculo de la función matricial  $e^{\underline{A}t}$ .

#### I. Método -con- series.

Mediante este método la función  $e^{\underline{A}t}$  puede ser calculada, expresándola como una serie de Maclaurin:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k}{k!} t^k$$

De acuerdo a la teoría de funciones: si una función  $f(\alpha)$  es función analítica de  $\alpha$ , la función matricial de una matriz  $\underline{A}$  ( $n_1 \times n_1$ ) está expresada por:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{d\alpha^k} f(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \frac{\underline{A}^k}{k!} \quad (2.22)$$

donde  $f(\alpha)$  es analítica de  $\alpha$  si y solo si:

- i) Existen derivadas de todos los órdenes para todo  $\alpha$
- ii) Todas sus derivadas son continuas para todo  $\alpha$
- iii) Para un  $\alpha = \alpha_0$  cualquiera, existe un número real positivo  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $\alpha$  en el intervalo  $(\alpha_0 - \varepsilon_0, \alpha_0 + \varepsilon_0)$ ,  $f(\alpha)$  sea representable por una serie de Taylor alrededor de  $\alpha_0$ , es decir:

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha_0)$$

Para el presente caso,  $f(\alpha) = e^\alpha$  es una función analítica, ya que obviamente cumple con las condiciones anteriormente expuestas y por lo tanto es posible expresar la función matricial  $e^{\underline{A}t}$  como lo indica la ecuación (2.22) cuyo desarrollo es:



$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k}{k!} t^k$$

$$= \underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3 t^3}{3!} + \dots +$$

Cabe anotar que a menos que  $\underline{A}^k$  desaparezca o su influencia en la serie sea despreciable para algún valor pequeño de  $k$ , este método resulta ser el más laborioso.

Una vez que la sumatoria haya sido ejecutada, se hace necesario encontrar la expresión de la serie de cada elemento de la matriz  $e^{\underline{A}t}$ ; esto generalmente no es una tarea fácil, y a menos que el orden de  $e^{\underline{A}t}$  sea suficientemente bajo la tarea puede resultar insuperable.

Ejemplo (2.5)

Se considera la ecuación:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

y se desea encontrar la matriz de transición  $\underline{\Phi}(t,0)$ .

Ya que la matriz  $\underline{A}$  viene dada por:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{A}^2 = \underline{A} \underline{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

además:

$$\begin{aligned} \underline{A}^3 = \underline{A}^2 \underline{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{A}^3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 48 \\ 0 & -12 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

conociendo que la matriz de transición está dada por:

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(t,0) &= e^{\underline{A}(t-0)} = e^{\underline{A}t} \\ &= \underline{I} + \frac{\underline{A}t}{1!} + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3 t^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(t,0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -4t & 4t \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6t^2 & -8t^2 \\ 0 & 2t^2 & -4t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16t^3}{3} & 8t^3 \\ 0 & -\frac{8t^3}{3} & \frac{8t^3}{3} \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-4t+6t^2-\frac{16t^3}{3}+\dots & 4t-8t^2+8t^3+\dots \\ 0 & -t+2t^2-\frac{8t^3}{3} + \dots & 1-4t^2+\frac{8t^3}{3} + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Reordenando la serie para  $e^{-t}$  y  $e^{-2t}$ :

$$e^{-\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -t\bar{e}^{2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix} = \underline{\phi}(t,0)$$

El reconocimiento de las expresiones sintetizadas de las series infinitas para cada elemento es el principal problema de este método, como se puede ver del ejemplo anterior.

En ocasiones, muy contadas por cierto, este método resulta ser el más fácil como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo (2.6)

Se quiere hallar la matriz de transición  $\underline{\phi}(t,0) = e^{\underline{A}t}$  de la ecuación siguiente:

$$\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \underline{A}^2 &= \underline{A} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \underline{A}^3 &= \underline{A}^2 \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0} \end{aligned}$$

de lo que se deduce que  $\underline{A}^i = \underline{0}$ , para  $i = 3, 4, \dots$  por consiguiente:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \frac{\underline{A}t}{1!} + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\phi}(t, 0)$$

## II. Método -de- Cayley - Hamilton.

Utilizando este método, la matriz de transición se la obtiene de la siguiente manera:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{i=0}^{n_1-1} \gamma_i \underline{A}^i \quad (2.23)$$

Para el caso que nos ocupa, es decir sistemas lineales invariantes en el tiempo, los coeficientes dependerán del tiempo.

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i(t) \underline{A}^{n_1-i}$$

Para efectos de explicación del método, a continuación se presentan dos teoremas muy importantes.

"Teorema de Cayley-Hamilton"

Si  $\underline{A}$  es una matriz arbitraria  $n_1 \times n_1$  con polinomio característico  $\phi(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$  se cumple que:

$$\phi(\underline{A}) = \underline{0}$$

Ejemplo (2.7)

Sea:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

por lo tanto su polinomio característico será:

$$\phi(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

resolviendo se tiene:

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

por lo tanto:

$$\underline{\phi}(\underline{A}) = \underline{A}^2 - 5\underline{A} - 2\underline{I}$$

donde

$$\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\underline{\phi}(\underline{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obteniéndose como resultado:

$$\underline{\phi}(\underline{A}) = \underline{0}$$

es decir:

$$\underline{A}^2 - 5\underline{A} - 2\underline{I} = \underline{0}$$

por consiguiente la matriz  $\underline{A}^2$  puede expresarse como una combinación lineal de  $\underline{A}$  y  $\underline{I}$ ;



$$\underline{A}^2 = 5\underline{A} - 2\underline{I}$$

además:

$$\underline{A}^3 = \underline{A}(5\underline{A} - 2\underline{I})$$

$$\underline{A}^3 = 5(5\underline{A} - 2\underline{I}) - 2\underline{A}$$

$$\underline{A}^3 = 25\underline{A} - 2\underline{A} - 10\underline{I}$$

$$\underline{A}^3 = 23\underline{A} - 10\underline{I}$$

Del ejemplo anterior se puede ver claramente que es posible expresar cualquier potencia de una matriz  $\underline{A}$  en términos de una combinación lineal de  $\underline{A}^m$  para  $m=0,1,2,\dots,n_1-1$ ; donde  $n_1$  es el orden de la matriz cuadrada real  $\underline{A}$ . Precisamente en esta propiedad se basa el método de Cayley-Hamilton, que se fundamenta en el siguiente teorema:

Teorema:

Para una matriz  $\underline{A}$ ,  $n_1 \times n_1$  y una función analítica  $f(\alpha)$ ; la correspondiente función matricial  $\underline{f}(\underline{A})$  puede ser expresada como:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \gamma_1 \underline{A}^{n_1-1} + \gamma_2 \underline{A}^{n_1-2} + \dots + \gamma_{n_1} \underline{I} \quad (2.24)$$

donde los escalares  $\gamma_i$  para  $i=1,2,\dots,n_1$  se calculan de:

$$\underline{f}(\underline{J}) = \gamma_1 \underline{J}^{n_1-1} + \gamma_2 \underline{J}^{n_1-2} + \dots + \gamma_{n_1} \underline{I} \quad (2.25)$$

Demostración:

De la ecuación (2.22)

$$\underline{f}(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{d^k}{d\alpha^k} f(\alpha) \right|_{\alpha=0} \frac{\underline{A}^k}{k!}$$

y del teorema de Cayley-Hamilton se tiene:

$$\underline{A}^k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{ki} \underline{A}^{n_1-i}$$

por lo tanto  $\underline{f}(\underline{A})$  se puede expresar como:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{ki} \underline{A}^{n_1-i} \cdot \frac{1}{k!}$$

donde

$$f_k = \left. \frac{d^k}{d\alpha^k} f(\alpha) \right|_{\alpha=0}$$

$$y \quad \underline{f}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n_1} \underline{A}^{n_1-i} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k \alpha_{ki} \cdot \frac{1}{k!} \right]$$

$$\gamma_i = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad k_i \cdot \frac{1}{k!}$$

además utilizando el teorema referente a la transformación de semejanza se tiene:

$$\underline{f}(\underline{J}) = \underline{T}^{-1} \underline{f}(\underline{A}) \underline{T}$$

usando los resultados anteriores obtenemos

$$\underline{f}(\underline{J}) = \underline{T}^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i \underline{A}^{n_1-i} \underline{T}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i \underline{T}^{-1} \underline{A}^{n_1-i} \underline{T}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i \underline{J}^{n_1-i}$$

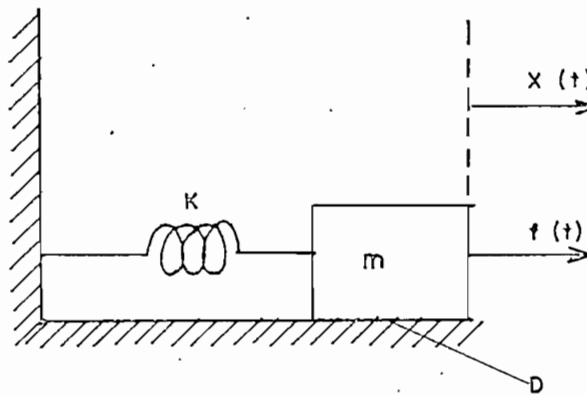
con lo cual se ha demostrado por completo este teorema.

Observación: Este método evita el cálculo de  $\underline{T}$  y  $\underline{T}^{-1}$  a costa de resolver  $\underline{f}(\underline{J}) = \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i \underline{J}^{n_1-i}$  (ver IV método)

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar el uso de este método de obtención de la matriz de transición

### Ejemplo (2.8)

Se desea encontrar la solución homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales que es la abstracción matemática del funcionamiento del siguiente sistema físico:



donde:

$k$  = constante de elasticidad del resorte

$m$  = masa del cuerpo (rígido)

$D$  = coeficiente de razonamiento dinámico (constante)

$f(t)$  = fuerza externa

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento del cuerpo es la siguiente:

$$m \frac{d^2}{dt^2} X(t) = f(t) - KX(t) - D \frac{d}{dt} X(t)$$

entonces

$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) + \frac{D}{m} \frac{d}{dt} X(t) + \frac{K}{m} X(t) = f(t) \cdot \frac{1}{m}$$

sea  $X_1 = X(t)$  (la posición del cuerpo)

y  $X_2 = \frac{d}{dt} X(t)$  (la velocidad del mismo)

se tiene:

$$\frac{d}{dt} \vec{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)$$

ahora si asignamos valores a los parámetros del sistema:

$$K = 299.4 \frac{N}{m}$$

$$m = 1.8 \text{ kg.}$$

$$D = 99.8 \frac{\text{N. seg}}{\text{m}}$$

por consiguiente:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -166.3 & -55.4 \end{bmatrix}$$

a continuación es necesario calcular los valores propios de  $\underline{A}$  y encontrar la forma canónica de Jordan (que se explicará en el subcapítulo siguiente):

$$\det (\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -166.3 & (-55.4 - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

obteniéndose:

$$\lambda^2 + 55.4\lambda + 166.3 = 0$$

por lo tanto los valores propios son su solución:

$$\lambda_1 = -52.2617$$

$$\lambda_2 = -3.1827$$

y directamente se encuentra la forma canónica de Jordan:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -52.2617 & 0 \\ 0 & -3.1827 \end{bmatrix}$$

Entonces la función matricial  $e^{\underline{J}t}$  se obtiene directamente de la matriz anterior, así:

$$e^{\underline{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-52.2617t} & 0 \\ 0 & e^{-3.1827t} \end{bmatrix}$$

a continuación se evalúa la ecuación (2.25), así:

$$e^{\underline{J}t} = \gamma_1 \underline{J} + \gamma_2 \underline{I}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-52.2617t} & 0 \\ 0 & e^{-3.1827t} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} -52.26 & 0 \\ 0 & -3.18 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$e^{-52.2617t} = \gamma_1(-52.26) + \gamma_2$$

$$e^{-3.1827t} = \gamma_1(-3.18) + \gamma_2$$

Resolviendo  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ,

$$\gamma_1 = \frac{e^{-52.2617t} - e^{-3.1827t}}{-49.079}$$

$$\gamma_2 = \frac{52.2617 e^{-3.1827t} - 3.1827 e^{-52.26t}}{49.079}$$

Usando la ecuación (2.24),

$$e^{\underline{A}t} = \gamma_1 \underline{A} + \gamma_2 \underline{I}$$

$$e^{\underline{A}t} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -166.3 & -55.4 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se encuentra:

$$e^{\underline{A}t}_{1,1} = 1.064 e^{-3.18t} - 0.064 e^{-52.26t}$$

$$e^{\underline{A}t}_{1,2} = 0.0204 e^{-3.18t} - 0.0204 e^{-52.26t}$$



$$e^{\underline{A}t}_{2,1} = 3.388 e^{-52.26t} - 3.388 e^{-3.18t}$$

$$e^{\underline{A}t}_{2,2} = 1.065 e^{-52.26t} - 0.066 e^{-3.18t}$$

### III Método Matriz Resolvente.

Este método hace uso de la transformación de Laplace extendida a sistemas multivariantes de donde se tiene que la matriz de transición se la obtiene como:

$$e^{\underline{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \underline{R}(s)$$

donde:

$\mathcal{L}^{-1} \underline{R}(s)$  representa la transformada inversa de  $\underline{R}(s)$

y:

$$\underline{R}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$$

siendo:

S = variable de transformación de Laplace.

A simple vista se puede notar que la mayor dificultad de es

te método radica en la obtención de  $(S\underline{I}-\underline{A})^{-1}$ , ya que esta es una matriz polinomial en  $S$ ; para lo cual es necesario utilizar en cada caso aquel método que amerite su uso, debido al grado de dificultad que presente la matriz  $\underline{A}$ ; así pues, si la matriz tiene bastantes elementos iguales a cero un método rápido de obtener  $(S\underline{I}-\underline{A})^{-1}$  es usando sustitución y eliminación. Para casos generales de órdenes bajos (segundo o tercero) se hace más efectiva la utilización de la regla de Cramer. Para matrices de orden cuarto o algo mayor se puede usar un diagrama de flujo del sistema transformado de Laplace. Un método general y versátil para el caso de matrices de órdenes superiores es el uso del algoritmo de Leverrier, el cual se describe a continuación.

#### Algoritmo de Leverrier

Se definen las matrices reales  $\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots, \underline{B}_{n_1}$ ,  $n_1 \times n_1$  y los escalares  $P_1, P_2, \dots, P_{n_1}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 &= \underline{I} & P_1 &= -\text{tr } \underline{A} \underline{B} \\ \underline{B}_2 &= \underline{A} \underline{B}_1 + P_1 \underline{I} & P_2 &= -\text{tr } \underline{A} \underline{B}_2 \\ \underline{B}_3 &= \underline{A} \underline{B}_2 + P_2 \underline{I} & P_3 &= -\text{tr } \underline{A} \underline{B}_3 \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

$$\underline{B}n_1 = \underline{A} \underline{B}(n_1-1) + P_{n_1-1} \underline{I} \quad P_{n_1} = -\text{tr} \underline{A} \underline{B} n_1/n_1$$

y

$$(\underline{S}\underline{I}-\underline{A})^{-1} = \frac{S^{n_1-1}\underline{B}_1+S^{n_2-2}\underline{B}_2+\dots+S\underline{B}(n_1-1)+\underline{B}n_1}{S^{n_1+P} S^{n_1-1}+\dots+P_{n_1-1}S+P_{n_1}}$$

donde

tr significa traza

Luego se hace el correspondiente desarrollo de fracciones matriciales parciales para, seguidamente obtener la transformada inversa de Laplace.

A continuación se presenta un ejemplo como complemento a la explicación precedente del uso de este método.

Ejemplo (2.9)

Se considera el sistema que tiene como ecuación de estado:

$$\dot{\vec{X}} = \underline{A} \vec{X}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

En primer lugar se usará el procedimiento de sustitución y eliminación para lo cual es necesario obtener la transformación de Laplace de las ecuaciones originales:

$$s \mathcal{L}(x_1) - x_{1_0} = -\frac{3}{2} \mathcal{L}(x_1) + \frac{3}{2} \mathcal{L}(x_2)$$

$$s \mathcal{L}(x_2) - x_{2_0} = \frac{1}{6} \mathcal{L}(x_1) - \frac{3}{2} \mathcal{L}(x_2)$$

Se resuelven las ecuaciones usando el método susodicho;

$$\mathcal{L}(x_1) = \frac{s+3/2}{(s+1)(s+2)} x_{1_0} + \frac{\frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} x_{2_0}$$

$$\mathcal{L}(x_2) = \frac{1/6}{(s+1)(s+2)} x_{1_0} + \frac{s+3/2}{(s+1)(s+2)} x_{2_0}$$

tomando esto en forma matricial

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \underline{R}(s) \vec{x}_0$$

por lo tanto:

$$\underline{R}(S) = \begin{bmatrix} \frac{S+3/2}{(S+1)(S+2)} & \frac{3/2}{(S+1)(S+2)} \\ \frac{1/6}{(S+1)(S+2)} & \frac{S+3/2}{(S+1)(S+2)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

de aquí se obtiene la transformación inversa de Laplace:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \underline{R}(S)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{S+3/2}{(S+1)(S+2)} = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{3/2}{(S+1)(S+2)} = \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1/6}{(S+1)(S+2)} = \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t})$$

por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) & \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

A continuación se repetirá el ejercicio utilizando la regla de Cramer.

En primer lugar se tiene:

$$(\underline{S}\underline{I}-\underline{A}) = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \underline{R}^{-1}(s)$$

seguidamente se aplica la regla de Cramer:

$$(\underline{S}\underline{I}-\underline{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\underline{C}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{C}} \cdot \text{Adj } \underline{C}$$

con lo cual se ha llegado al mismo resultado anterior (ecuación (2.26)).

Por último se solucionaría este ejemplo haciendo uso del algoritmo de Leverrier.

$$\underline{B}1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = -\text{tr } \underline{A} \underline{B}1$$

de donde:

$$P_1 = -\text{tr} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = -\text{tr} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = -\left(-\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

por lo tanto:

$$P_1 = 3$$

de igual modo:

$$\underline{B2} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \underline{I} + 3\underline{I}$$

$$\underline{B2} = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

y:

$$P_2 = -\text{tr} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$P_2 = -\text{tr} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}(-2+(-2))$$

por lo tanto:

$$P_2 = 2$$

de modo que:

$$(\underline{SI}-\underline{A})^{-1} = \frac{S \underline{B1} + \underline{B2}}{S^2 + P_1 S + P_2}$$

reemplazando en la ecuación anterior las matrices y los valores calculados previamente se tiene lo siguiente

$$(\underline{SI}-\underline{A})^{-1} = \frac{S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}{S^2 + 3S + 2}$$



$$(\underline{SI}-\underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} & \frac{\frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{\frac{1}{6}}{(s+1)(s+2)} & \frac{s + \frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

que es idéntica a la ecuación (2.26), lo que resta para encontrar la matriz de transición es idéntica a lo desarrollado en la primera parte de este ejemplo; es esta la razón de haberlo obviado en las dos últimas.

De lo expuesto en este subcapítulo se puede concluir que, si bien los métodos descritos son eficaces para el cálculo de la matriz de transición, estos conllevan dificultades de orden operativo es decir estos métodos se vuelven muy laboriosos al tratar sistemas de orden relativamente alto; - por lo cual en el presente trabajo se ha visto la conveniencia de usar un cuarto método llamado "Método con valores y vectores propios" cuya descripción e implementación en el computador digital serán tratadas en el subcapítulo siguiente.

## 2.4 CALCULO DE LA MATRIZ DE TRANSICION.- DESARROLLO DEL PROGRAMA.

En el presente subcapítulo se desarrolla el cuarto método para calcular la matriz de transición de un sistema lineal invariante en el tiempo el cual se basa en el uso de los valores y vectores propios de la matriz A en la ecuación de estado siguiente:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \underline{A} \vec{X}(t)$$

Este método ha sido escogido para implementarlo en el computador digital tomando en cuenta en primer término que existe un programa que calcula los valores y vectores propios de cualquier matriz cuadrada de coeficientes reales; en segundo lugar que nos permite obtener la solución homogénea del sistema lineal invariante en el tiempo en forma estrictamente matemática; además considerando que el número de cálculos iterativos es relativamente pequeño en comparación con aquellos que necesitan los métodos anteriormente descritos y por consiguiente un menor error de redondeo. Estas son las principales razones por las cuales se hará mayor énfasis en la explicación y aplicación de este método respecto a los precedentes.

Método de valores y vectores propios.

Dada la ecuación diferencial matricial:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \underline{A} \vec{X}(t) \quad (2.30)$$

que representa la abstracción matemática de un sistema lineal invariante en el tiempo, cuya matriz de transición es:

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = e^{\underline{A}(t-t_0)}$$

tiene como solución:

$$\vec{X}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{X}(t_0)$$

De la ecuación (2.30), siendo  $\underline{A}$  una matriz cuadrada real de orden  $n_1$ , teniendo por condición inicial (de borde):

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$$

se define por conveniencia un  $n_1$ -vector  $\vec{X}_1(t)$  tal que cumpla:

$$\vec{X}_1(t) = \underline{T}^{-1} \vec{X}(t) \quad (2.31)$$

donde  $\underline{T}$  es una matriz cuadrada de orden  $n_1$  no singular, por lo tanto:

$$\vec{X}(t) = \underline{T} \vec{X}_1(t) \quad (2.32)$$

entonces, derivando la ecuación (2.31) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_1(t) = \underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \vec{X}(t)$$

si se reemplaza en esta la ecuación (2.30) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_1(t) = \underline{T}^{-1} (\underline{A} \vec{X}(t))$$

nuevamente reemplazando la ecuación (2.32) en esta última se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_1(t) = (\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}) \vec{X}_1(t) \quad (2.33)$$

donde  $\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$  se conoce como transformación de semejanza, por que la ecuación (2.33) es similar a la original (ecuación 2.30) excepto por el cambio de variable de  $\vec{X}$  a  $\vec{X}_1$ . Comúnmente se conoce al producto  $\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$  como la transformada de  $\underline{A}$  por  $\underline{T}$ , donde  $\underline{T}$  es una matriz no singular arbitraria.

Ahora bien, se busca que  $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}$  sea diagonal para lo cual se calculan los valores propios  $\underline{A}$ , si estos son distinguidos (no repetidos) se calculan los vectores propios correspondientes que serán linealmente independientes, consiguiendo por lo tanto  $\underline{T}$  regular formada por los vectores propios (columna), como se demuestra a continuación.

Por definición de valores y vectores propios se tiene:

$$\underline{A}\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

o en forma desarrollada:

$$\underline{A}(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \dots | \vec{X}_{n_1}) = \lambda(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \dots | \vec{X}_{n_1}) \quad (2.34)$$

donde  $\vec{X}_i$  es el vector propio que corresponde al valor propio  $\lambda_i$  para  $i=1,2,\dots,n_1$ , por consiguiente se cumple:

$$\underline{A}\vec{X}_i = \lambda_i\vec{X}_i; \quad i = 1,2,\dots,n_1 \quad (2.35)$$

Desarrollando la multiplicación particionada a la derecha de la ecuación (2.34) se tiene:

$$\underline{A}(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \dots | \vec{X}_{n_1}) = (\underline{A}\vec{X}_1 | \underline{A}\vec{X}_2 | \dots | \underline{A}\vec{X}_{n_1})$$

aplicando la igualdad (2.35)

$$\begin{aligned}
 A(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \dots | \vec{X}_{n_1}) &= (\lambda_1 \vec{X}_1 | \lambda_2 \vec{X}_2 | \dots | \lambda_{n_1} \vec{X}_{n_1}) \\
 &= (\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \dots | \vec{X}_{n_1}) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n_1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\underline{A} \underline{T} = \underline{T} \underline{\Delta}$$

donde  $\underline{\Delta}$  es una matriz diagonal formada por los valores propios (distinguidos).

Premultiplicando a la ecuación (2.36) por  $\underline{T}^{-1}$  se obtiene

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{\Delta} \quad (2.36)$$

Regresando a la ecuación (2.33) y reemplazando en esta la última igualdad

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_{l_1}(t) \\ X_{l_2}(t) \\ \vdots \\ X_{l_{n_l}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{l_1}(t) \\ X_{l_2}(t) \\ \vdots \\ X_{l_{n_l}}(t) \end{bmatrix}$$

por consiguiente para cada variable  $i$

$$\frac{d}{dt} X_{l_i}(t) = \lambda_i X_{l_i}(t)$$

entonces:

$$X_{l_i}(t) = X_{l_i}(t_0) e^{\lambda_i(t-t_0)}$$

Para conseguir la solución de la ecuación (2.30) en forma más fácil a partir de la ecuación de transformación (2.32) con  $\vec{X}_l(t_0) = \underline{T}^{-1} \vec{X}(t_0)$  de la ecuación (2.31)

Pero no siempre es posible encontrar valores propios distinguidos por lo que, cuando se tienen valores propios repetidos la forma más próxima a la diagonal a la que la matriz A se puede transformar (por transformación de semejanza) es la llamada forma de Jordan denotada por J, donde

$$\underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$$

y  $\underline{T}$  esta formada por los vectores propios y los vectores propios generalizados de  $\underline{A}$ .

La matriz  $\underline{J}$  es la forma siguiente:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \underline{L}_{11}(\lambda_1) & & & & & \underline{0} \\ & \underline{L}_{21}(\lambda_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \underline{L}_{k1}(\lambda_1) & & \\ & & & & \underline{L}_{12}(\lambda_2) & \\ & & & & & \cdot \\ \underline{0} & & & & & & \underline{L}_{mp}(\lambda_p) \end{bmatrix}$$

(2.37)

y constituye una matriz triangular superior, donde cada  $\underline{L}_{ij}(\lambda_j)$  es una matriz triangular superior conocida como bloque de Jordan. Varios  $\underline{L}_{ij}(\lambda_i)$  se pueden asociar con cada valor de  $\lambda_j$  y uno del otro puede diferir en su dimensión. En general



$$\underline{L}_{ij}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_j & \end{bmatrix}$$

donde los  $\lambda_j$  están en la diagonal y hay unos inmediatamente arriba y a la derecha de la diagonal, con los demás elementos igual a cero.

Ahora pues, siendo:

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{J}$$

donde  $\underline{J}$  es la forma de Jordan (forma canónica de Jordan) y un caso particular de esta es la matriz diagonal  $\underline{\Delta}$  (ver ecuación 2.36). Si existen  $\underline{T}$  y  $\underline{T}^{-1}$  entonces premultiplicando a la ecuación anterior por  $\underline{T}$ :

$$\underline{T} \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{T} \underline{J}$$

seguidamente, posmultiplicando por  $\underline{T}^{-1}$ :

$$(\underline{T} \underline{T}^{-1}) \underline{A} (\underline{T} \underline{T}^{-1}) = \underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1}$$

$$\underline{A} = \underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1}$$

conociendo adicionalmente que:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\underline{A}^k}{k!}$$

entonces:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(\underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1})^k}{k!}$$

pero:

$$\begin{aligned} \underline{A}^k &= \underline{A} \cdot \underline{A} \cdot \dots \cdot \underline{A} \\ &= \underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1} \cdot \underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1} \cdot \dots \cdot \underline{T}^{-1} \cdot \underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1} \\ &= \underline{T} \underline{J} \underline{I} \cdot \dots \cdot \underline{I} \underline{J} \underline{T}^{-1} \end{aligned}$$

donde:

$\underline{I}$  es la matriz identidad

por lo tanto:

$$\underline{A}^k = \underline{T} \underline{J}^k \underline{T}^{-1}$$

entonces:

$$\underline{f}(\underline{A}) = \underline{T} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\underline{J}^k}{k!} \right] \underline{T}^{-1} \quad (2.38)$$

$$\underline{f}(\underline{A}) = \underline{T} \underline{f}(\underline{J}) \underline{T}^{-1}$$

Para el caso que nos ocupa

$$\underline{f}(\underline{A}t) = e^{\underline{A}t}$$

por lo tanto:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{T} e^{\underline{J}t} \underline{T}^{-1}$$

La ventaja de expresar la solución homogénea de la ecuación diferencial de estado es que la obtención de  $e^{\underline{J}t}$  resulta ser mucho más sencilla ya que  $\underline{J}$  es diagonal o casi diagonal.

Continuando con la forma generalizada de una función analítica matricial, de las ecuaciones (2.37) y (2.38)

$$\underline{J}^k = \begin{bmatrix} \underline{L}_{11}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \underline{L}_{m n_1}(\lambda_{n_1}) \end{bmatrix}^k$$

y haciendo uso de la propiedad de multiplicación de matrices particionadas

$$\underline{J}^k = \begin{bmatrix} \underline{L}_{11}^k(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \underline{L}_{m n_1}^k(\lambda_{n_1}) \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\underline{f}(\underline{J}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\underline{J}^k}{k!}$$

$$\underline{f}(\underline{J}) = \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{L}_{11}) & 0 \\ 0 & \underline{f}(\underline{L}_{m n_1}) \end{bmatrix}$$

Ahora el problema esta reducido a encontrar  $\underline{f}(\underline{L})$  para cada bloque de Jordan y luego formar la forma matricial anterior. Si  $\underline{L}(\lambda)$  es de orden 1 entonces:

$$\underline{f}(\underline{L}(\gamma)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\underline{L}^k(\gamma)}{k!} \quad (2.39)$$

donde:

$$\underline{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

haciendo el desarrollo de  $\underline{L}^k(\lambda)$ , esta se presenta de la siguiente manera:

$$\underline{L}^k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & \dots & (1_{-1}^k)\lambda^{k-(1-1)} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \dots & (1_{-2}^k)\lambda^{k-(1-2)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

(2.40)

su demostración es sumamente sencilla usando el método de inducción matemática.

Regresando a la ecuación (2.39) se puede expresar esta como:

$$\underline{f}(\underline{L}(\lambda)) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1l} \\ & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2l} \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & & \alpha_{ll} \end{bmatrix}$$

y utilizando la ecuación (2.40) se tiene:

$$\alpha_{1i} = \sum_{k=i-1}^{\infty} f_k \binom{k}{i-1} \frac{\lambda^{k-(i-1)}}{k!} \quad (2.41)$$

$$i=1, \dots, l$$

separadamente se calcula:

$$\frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} f(\lambda) = \frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} f(\lambda) = \sum_{k=i-1}^{\infty} f_k \lambda^{k-(i-1)} \frac{1}{(k-(i-1))!}$$

comparando esta última ecuación con la ecuación (2.41) se tiene lo siguiente:

$$\alpha_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} f(\lambda)$$

por consiguiente:

$$\underline{f}(\underline{L}(\lambda)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \dots & \dots & \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{d\lambda^{\ell-1}} f(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \dots & \dots & \frac{1}{(\ell-2)!} \frac{d^{\ell-2}}{d\lambda^{\ell-2}} f(\lambda) \\ \vdots & & & \\ 0 \dots & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

De manera particular interesa calcular la función matricial  $e^{\underline{A}t}$  siendo:

$$\begin{aligned} e^{\underline{A}t} &= \underline{T} e^{\underline{J}t} \underline{T}^{-1} \\ &= \underline{T} \begin{bmatrix} e^{\underline{L}_{11}(\lambda_1)t} \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots & e^{\underline{L}_{mn}(\lambda_n)t} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ahora bien, de manera general para uno de los bloques de Jordan de orden  $l$ . el cálculo de  $e^{\underline{L}(\lambda)t}$  se lo hace de forma similar a lo desarrollado anteriormente con una ligera variante a partir de la ecuación (2.39)

$$\underline{f}(\underline{L}(\lambda)t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\underline{L}^k(\lambda)}{k!} t^k$$

donde:

$$\underline{L}(\lambda)t = \begin{bmatrix} \lambda t & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda t & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda t \end{bmatrix}$$

debido a la presencia de los términos  $t$  inmediatamente sobre la diagonal y a la derecha en vez de unos, se producen factores adicionales de  $t$ , modificando ligeramente la estructura de la ecuación (2.40). Así se tiene:

$$(\underline{L}(\lambda)t)^k = \begin{bmatrix} (\lambda t)^k & kt(\lambda t)^{k-1} & \dots & (l_{-1}^k)t^{l-1}(\lambda t)^{k-(l-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\lambda t)^k & \dots & (l_{-2}^k)t^{-2}(\lambda t)^{k-(l-2)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & (\lambda t)^k \end{bmatrix}$$

De aquí directamente se llega a:

$$\underline{f}(\underline{L}(\lambda)t) = \begin{bmatrix} f(\lambda t) & t \frac{d}{d\lambda t} f(\lambda t) & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \frac{d^{l-1} f(\lambda t)}{d(\lambda t)^{l-1}} \\ 0 & f(\lambda t) & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \frac{d^{l-2} f(\lambda t)}{d(\lambda t)^{l-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & f(\lambda t) \end{bmatrix}$$



$$e^{\underline{L}(\lambda)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{1-2}}{(1-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Reemplazando esta última igualdad en la ecuación (2.42) se obtiene la solución buscada:

"Programa para calcular la matriz de transición: C5/TRA"

Haciendo uso de los resultados obtenidos en la primera parte de este subcapítulo se ha implementado en el computador un proceso de cálculo de la matriz de transición  $e^{\underline{A}t}$  y directamente se puede encontrar la solución homogénea de la ecuación diferencial disponiendo previamente de los estados (condiciones) iniciales; la solución homogénea a la ecuación de estado será:

$$\vec{X}_h(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \vec{X}(0)$$

donde:

$\vec{X}_h(t)$  es el vector solución homogénea.

$\vec{X}(0)$  es el estado inicial

Con el fin de aprovechar en mejor forma el área de memoria disponible este programa está dividido en dos partes completamente independientes, una de ellas sirve para analizar el caso en que los valores propios sean únicamente reales, y la otra parte ha sido elaborada para trabajar con valores propios complejos.

En primer lugar se ingresan los estados (condiciones) iniciales del sistema en caso de necesitarse la solución homogénea.

Considerando que la matriz de transición se la obtendrá en forma de funciones matemáticas es decir; cada elemento de dicha matriz será una función del tiempo y más aún esta función será estrictamente de la forma siguiente (cuando los valores propios son reales):

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_{ij} t^{n_3-i} e^{\lambda_i t} \quad (2.43)$$

para el caso cuando se tienen valores propios complejos cada elemento de la matriz de transición será de la forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_{ij} t^{n_3-i} \text{sen}(\beta_j t) e^{\lambda_i t} + \zeta_{ij} t^{n_3-i} \text{cos}(\beta_j t) e^{\lambda_i t} \quad (2.44)$$

donde:

$n_2^j$  es el número de valores propios

$n_3^j$  es el orden del bloque de Jordan de mayor orden.

$\gamma_{ij}, \zeta_{ij}$  son constantes reales

$\lambda_i$  son los valores propios (parte real)

$\beta_i$  son los valores propios (parte imag.)

Por lo tanto se hace necesario calcular cada coeficiente ( $\gamma_{ij}$  y/o  $\zeta_{ij}$ ) de acuerdo a la estructura de la forma de Jordan; para lo cual en el presente programa se trabaja en base a matrices de coordenadas es decir que para cada elemento de la matriz de transición se tiene una matriz asociada donde cada término de esta última tiene significado únicamente por su posición relativa (fila y columna relativas), posición que indica a que término de la sumatoria corresponde (ver ecuaciones (2.43) y (2.44))

En cuanto se refiere al cálculo mismo de la matriz de transición se procede de la siguiente forma:

- a) Dada la matriz canónica de Jordan (real o compleja) se genera una matriz  $E\phi$  que está asociada a la matriz  $e^{-Jt}$ , esta matriz asociada no es más que una matriz donde sus elementos son arreglos rectangulares, cuyo número de filas viene dado por el número de valores propios (no repetidos) de la matriz  $A$  y cuyo número de columnas viene dado por el orden del bloque de Jordan de mayor orden, así  $e^{-Jt}$  tendrá la forma:

$$E\phi = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \dots & \underline{K}_{1(N_1-1)} & \underline{K}_{1N_1} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & \dots & \underline{K}_{2(N_1-1)} & \underline{K}_{2N_1} \\ \underline{K}_{31} & \underline{K}_{32} & \dots & \underline{K}_{3(N_1-1)} & \underline{K}_{3N_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{K}_{(N_1-1)1} & \underline{K}_{(N_1-1)2} & \dots & \underline{K}_{(N_1-1)(N_1-1)} & \underline{K}_{(N_1-1)N_1} \\ \underline{K}_{N_11} & \underline{K}_{N_12} & \dots & \underline{K}_{(N_1-1)N_1} & \underline{K}_{N_1 N_1} \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{K}_{ij} = \begin{bmatrix} ij & ij & & ij \\ k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n_3} \\ \\ \\ \\ ij & ij & & ij \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n_3} \\ \\ \\ \\ ij & ij & & ij \\ k_{n_21} & k_{n_22} & \dots & k_{n_2n_3} \end{bmatrix}$$

donde  $n_2^i$ ,  $n_3^j$  corresponde a las variables cuyo contenido se descubrió en la pág. 146.

El término asociado a la matriz  $\underline{K}_{ij}$  será:

$$\sum_{\ell=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{n_3} k_{\ell m} t^{n_3-m} e^{\lambda \ell \cdot t}$$

donde  $\lambda \ell$  puede ser real o compleja.

b) A continuación se realiza la multiplicación  $\underline{T} e^{-\underline{J}t}$  donde cada partición de la matriz  $e^{-\underline{J}t}(\underline{E}\phi)$  se considera un elemento; este tipo de multiplicación no es válida desde el punto de vista estrictamente matemático, pero efectivamente para el proceso numérico de cálculo expuesto. El resulta-

do de la multiplicación se lo almacena en la matriz asociada  $\underline{E}_1$ .

c) Por último se realiza la multiplicación siguiente en forma similar a la anterior:

$$e^{\underline{A}t} = (\underline{T}e^{\underline{J}t})\underline{T}^{-1}$$

encontrándose la matriz de transición almacenada en su matriz asociada  $\underline{E}_2$

Para el cálculo de la solución homogénea de estados se multiplica esta matriz ( $\underline{E}_2$ ) asociada a la matriz de transición de manera similar a la anterior obteniéndose por lo tanto:

$$\vec{X}_h(t) = e^{\underline{A}t}\vec{X}(0)$$

Tanto para el desarrollo matemático como para la elaboración del programa se ha considerado el instante inicial de funcionamiento igual a  $t_0 = 0$  seg. Considerando que los sistemas a analizarse son invariantes respecto al tiempo, al trasladar el eje de tiempo resulta un sistema equivalente.

A continuación se presenta una lista de las variables utili

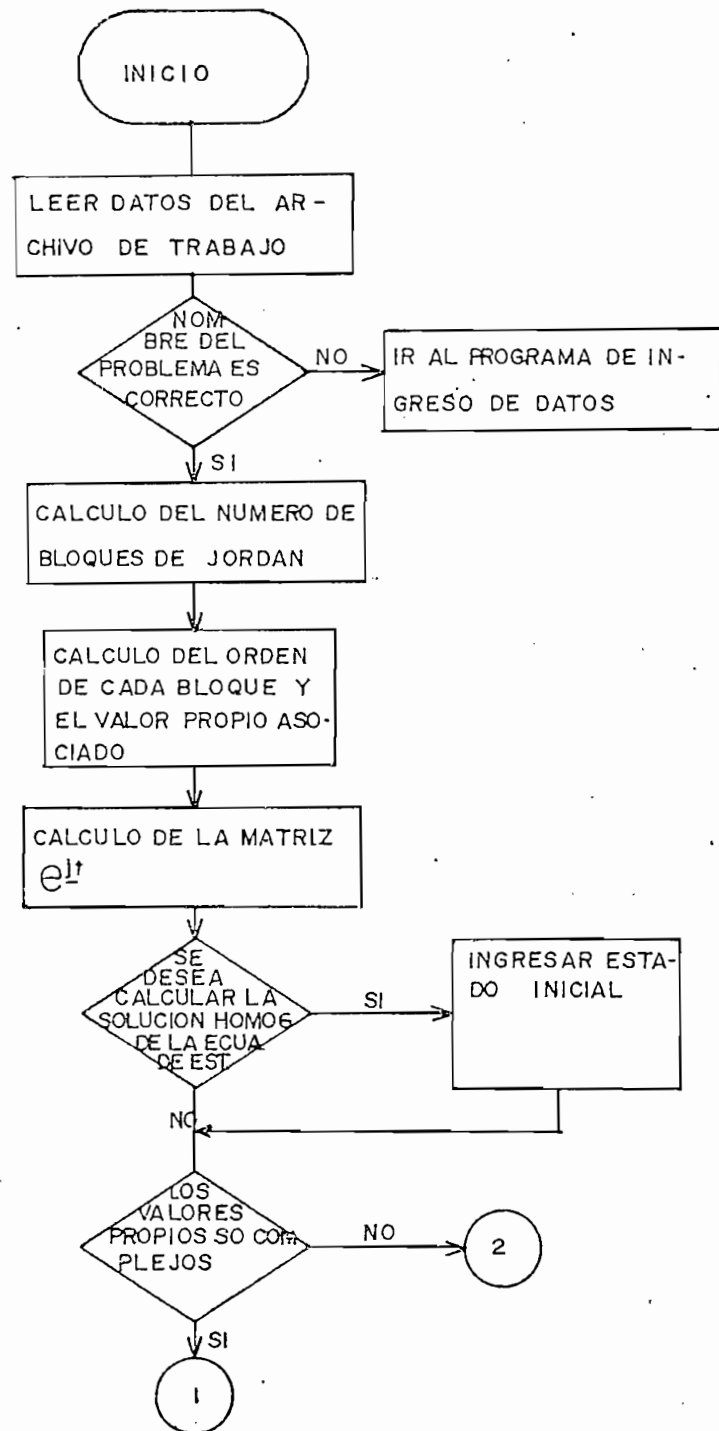
zadas más importantes además de las ya mencionadas en el programa de ingreso de datos.

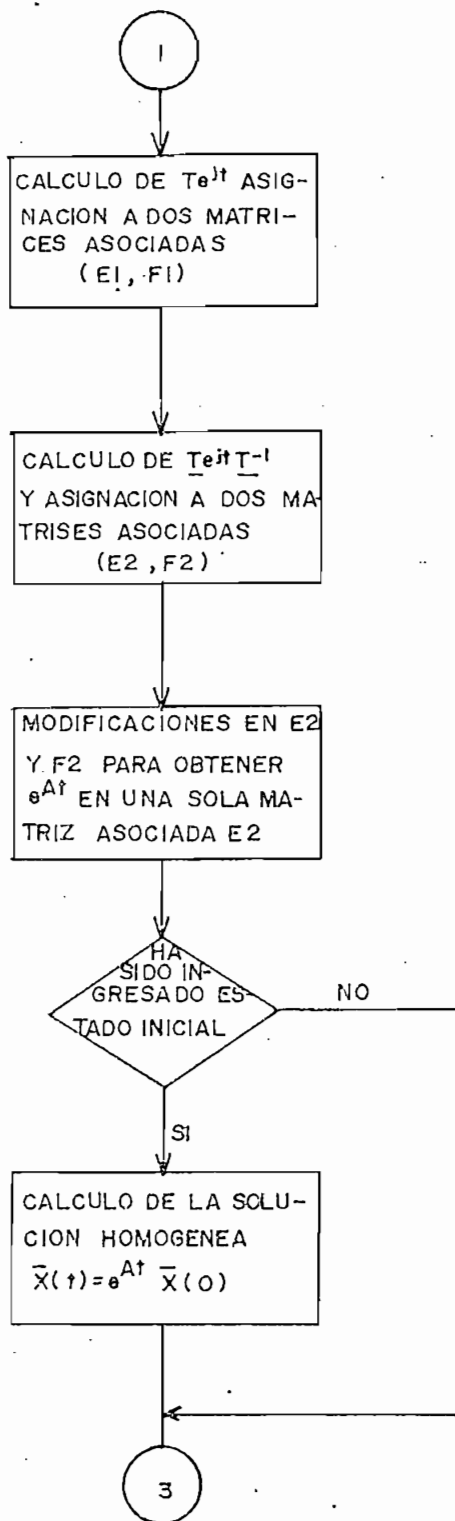
NOMBRE	CONTENIDO
N2	Número de valores propios de la matriz de Jordan.
N3	Orden del bloque de Jordan de mayor orden.
N4	Número de filas de la matriz asociada a la matriz de transición ( $N1 \times N2$ )
N5	Número de columnas de la matriz asociada a la matriz de transición ( $N1 \times N3$ ).
I1	Número de bloques de Jordan.
L	Vector que contiene los valores propios de cada bloque de Jordan.
V1	Vector de valores propios no repetidos (parte real).
V2	Vector de valores propios no repetidos (parte <u>i</u> imaginaria).
E $\phi$	Matriz que corresponde a $e^{-Jt}$ de orden $N4 \times N5$

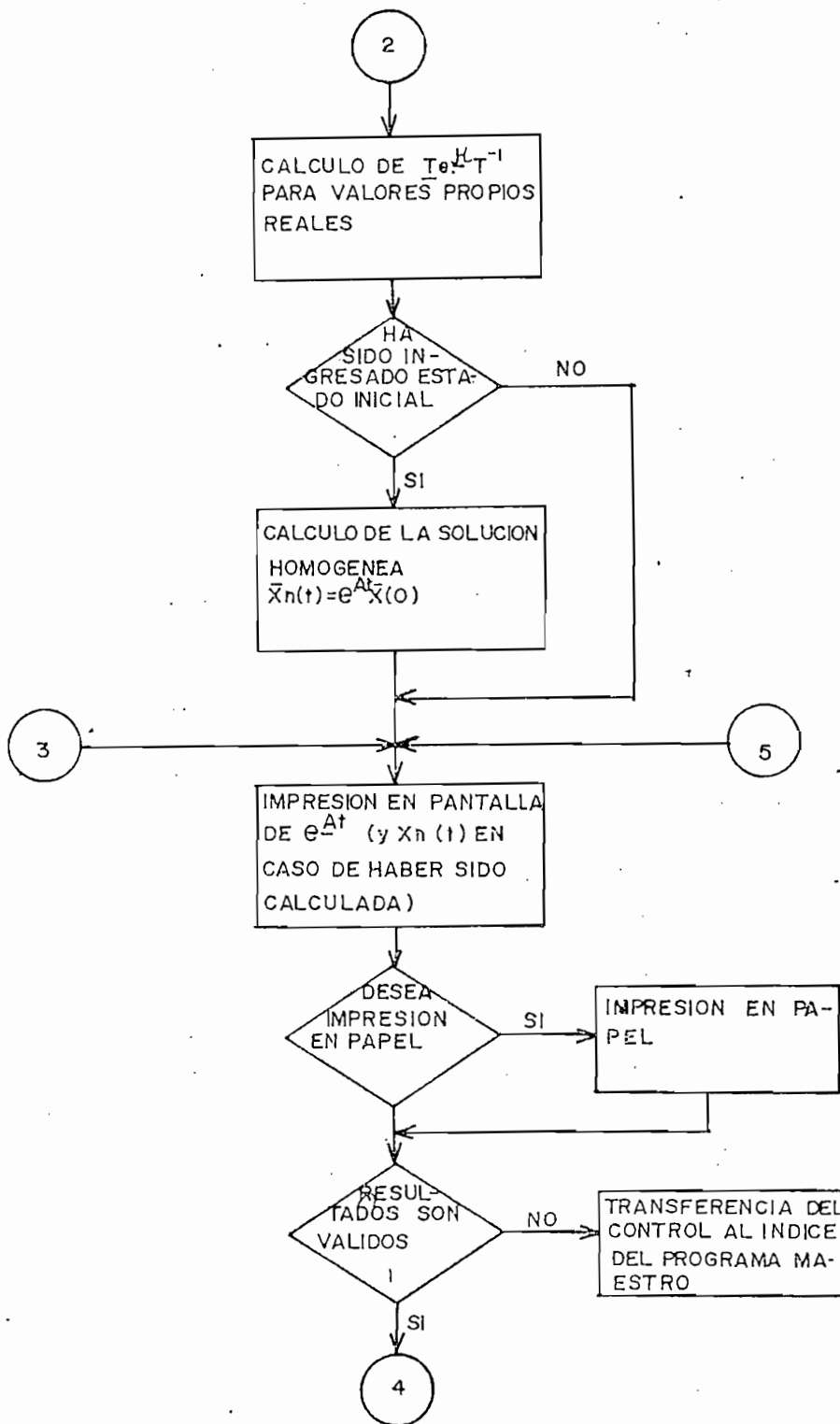
NOMBRE	CONTENIDO
E1	Matriz que corresponde a la parte real de $T e^{-Jt}$ de orden $(N4 \times N5)$ .
F1	Matriz que corresponde a la parte imaginaria de $T . e^{-Jt}$ de orden $N4 \times N5$ .
E2	Matriz asociada a la matriz de transición de <u>or</u> den $N4 \times N5$ (parte real)
F2	Matriz asociada a la matriz de transición de <u>or</u> den $N4 \times N5$ (parte imaginaria)
E3	Matriz asociada al vector solución homogenea de orden $N4 \times N3$ .

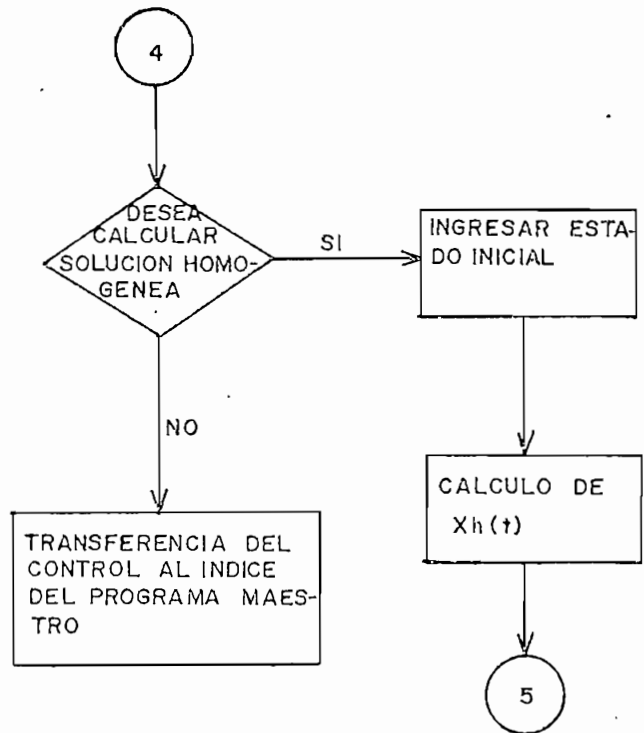
Seguidamente se presenta el diagrama de flujo del programa.











## 2.5. ESTADOS Y SALIDAS -- METODOS DE CALCULO.

Todos los tópicos que han sido tratados en este capítulo - han estado dirigidos al análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, esta última parte considera la solución tanto de la ecuación de estado como de salida.

Si bien es obvio que la solución de la ecuación de salida es muy importante en el análisis de sistemas no lo es menos la solución de la ecuación de estado, aunque esta última es un paso intermedio para obtener la anterior, su importancia radica en que nos da una visión más clara acerca del comportamiento interno del sistema como se vió en los numerales 2.2 y 2.3

En el numeral 2.4 se ha descrito y obtenido matemáticamente la solución homogénea de la ecuación matricial de estado, el presente trata de dar una descripción clara acerca de la obtención de la solución de las ecuaciones matriciales de estado y de salida cuando existe un vector  $\vec{u}(t)$  de señales de entrada (excitación) al sistema, es decir encontrar  $\vec{X}(t)$  y  $\vec{Y}(t)$  de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \underline{A}\vec{X}(t) + \underline{B}\vec{u}(t) \quad (2.45)$$

$$\vec{Y}(t) = \underline{C}\vec{X}(t) + \underline{D}\vec{u}(t) \quad (2.46)$$

Ya conocida la matriz de transición  $\underline{\Phi}(t, t_0)$ , el vector de estado y el de salida podrán ser expresados de la siguiente forma:

$$\vec{X}(t) = \underline{\Phi}(t, t_0)\vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \tau)\underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} Y(t) = \underline{C} \underline{\Phi}(t, t_0)\vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{C} \underline{\Phi}(t, \tau)\underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau + \\ + \underline{D}\vec{u}(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Como se demostró en el subcapítulo 2.4, la solución homogénea de la ecuación matricial de estado viene dada por:

$$\vec{X}_h(t) = e^{\underline{A}t}\vec{X}(0)$$

cuando el instante inicial de funcionamiento del sistema es  $t_0=0$  seg; ahora bien, siendo el sistema invariante en el tiempo se cumple que, para  $t_0$  arbitrario la solución homogénea será:

$$\vec{X}_h(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\vec{X}(t_0)$$

Fijando la atención en la ecuación diferencial no homogénea (ecuación 2.45). Para la solución particular (aplicando el método de variación de parámetros) de la ecuación de estado se supone que esta tiene la forma siguiente:

$$\vec{X}_p(t) = \underline{\Phi}(t,0)\vec{p}(t) = e^{\underline{A}t}\vec{p}(t) \quad (2.49)$$

considerando que  $t_0 = 0$  seg y que  $\vec{p}(t)$  es un vector de funciones desconocidas que posee la propiedad siguiente:

$$\vec{p}(t) = \vec{0} \quad \text{para } t=0$$

Seguidamente diferenciando  $\vec{X}_p(t)$  respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\vec{X}_p(t) = \left(\frac{d}{dt}\underline{\Phi}(t,0)\right)\vec{p}(t) + \underline{\Phi}(t,0)\frac{d}{dt}\vec{p}(t)$$

como

$$\underline{\Phi}(t,0) = e^{\underline{A}t}$$

entonces:

$$\frac{d}{dt}\underline{\Phi}(t,0) = \underline{A}\underline{\Phi}(t,0)$$

por tanto

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_p(t) = \underline{A} \underline{\Phi}(t, 0) \vec{p}(t) + \underline{\Phi}(t, 0) \frac{d}{dt} \vec{p}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_p(t) = \underline{A} \vec{X}_p(t) + \underline{\Phi}(t, 0) \frac{d}{dt} \vec{p}(t)$$

además de la ecuación (2.45) se tiene

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_p(t) = \underline{A} \vec{X}_p(t) + \underline{B} \vec{u}(t)$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\underline{\Phi}(t, 0) \frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \underline{B} \vec{u}(t)$$

despejando  $\vec{p}(t)$

$$\vec{p}(t) = \int_0^t \underline{\Phi}^{-1}(\tau, 0) \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau \quad (2.50)$$

donde  $\tau$  es una variable muerta únicamente para evaluación de la integral.

Aplicando la propiedad de inversión de la matriz de transición (refiérase al numeral 2.2 de este capítulo) se tiene lo siguiente:



$$\underline{\Phi}(t, 0) = e^{\underline{A}(t-0)} = e^{\underline{A}t}$$

y

$$\underline{\Phi}^{-1}(\tau, 0) = \underline{\Phi}(0, \tau) = e^{\underline{A}(0-\tau)} = e^{\underline{A}(-\tau)}$$

por lo tanto la ecuación (2.50) estará dada por:

$$\vec{p}(t) = \int_0^t e^{\underline{A}(-\tau)} \underline{B}u(\tau) d\tau$$

regresando a la ecuación (2.49)

$$\vec{X}_p(t) = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

por consiguiente la solución total es:

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t)$$

para  $t_0 = 0$  seg se tiene:

$$\vec{X}(t) = e^{\underline{A}t} \vec{X}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

aplicando la propiedad de invarianza, para  $t_0$  arbitrario es

tará dada la solución de estado por:

$$\vec{X}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

que corresponde a la ecuación (2.47.)

Esta misma solución  $\vec{X}(t)$  reemplazada en la ecuación (2.46) da directamente la solución para la salida del sistema así:

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}(t-t_0)}\vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau + \\ + \underline{D}\vec{u}(t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}(t-t_0)}\vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau + \\ + \underline{D}\vec{u}(t) \end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación (2.48)

De la ecuación (2.47) el término correspondiente a la solución homogénea ya fue encontrado en el numeral 2.4, por lo

tanto ahora se necesita calcular la solución particular, -  
que viene dada por

$$\vec{X}_p(t) = \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

entonces

$$\vec{X}_p(t) = e^{\underline{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

Si bien la solución homogénea puede obtenerse en forma analítica, en cambio, la solución particular es completamente imposible de obtenerla de esa forma ya que el vector de entrada  $\vec{u}(t)$  es un vector de funciones del tiempo que pueden tomar las más variadas y complejas formas; por consiguiente a continuación se presentan algunos posibles métodos prácticos para encontrar la solución en forma numérica a la ecuación matricial de estado; como consecuencia directa habrá sido encontrada la solución a la ecuación de salida (que es puramente algébrica)

#### MÉTODOS DE CÁLCULO

Se presentan en seguida algunos métodos numéricos que perm

ten hallar el vector de estado y el vector de salida en un determinado intervalo de tiempo, de tal manera que se disponga de un número razonablemente grande de pares tanto estado-tiempo como salida-tiempo (para cada componente de los respectivos vectores) en dicho intervalo, de manera que sea factible la grafización de cada uno de ellos, teniendo como variable independiente común el tiempo.

No está por demás aclarar que estos métodos numéricos de cálculo no llevan de manera alguna a una solución exacta, sino mas bien, la respuesta obtenida es una aproximación a la verdadera con un mayor o menor error dependiendo en primer lugar del algoritmo utilizado, en segundo lugar del intervalo de cálculo en consideración, en tercer lugar de las funciones involucradas y en último término de los errores de redondeo debido al número limitado de dígitos con que trabaja el computador, estos últimos introducidos al efectuar un número elevado de operaciones aritméticas sobre las mismas cantidades.

En consecuencia para obtener respuestas cercanas a las verdaderas se debe trabajar con un algoritmo cuyo error (algorítmico) sea considerablemente bajo para un intervalo razonablemente pequeño, tomando en cuenta además que el número de operaciones numéricas efectuadas sobre las mismas canti-

dades no sea muy alto, ya que mientras mayor sea este número mayor será el error introducido por el computador.

A continuación se describen algunos de los métodos más versátiles aplicados al problema en particular planteado.

#### METODO DE SIMPSON

Mediante este método se encuentra la integral definida

$$\vec{f} = \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

Aunque la función matricial  $e^{\underline{A}(-\tau)}$  es conocida, por el contrario la función vectorial  $\vec{u}(\tau)$  puede ser casi cualquier conjunto de funciones del tiempo; no puede ser cualquiera considerando que  $\vec{u}(\tau)$  no debe tener singularidades en el intervalo de tiempo a integrarse  $[t_0, t]$  ya que esto significaría que la entrada en un instante determinado tiende al infinito lo cual no es físicamente realizable, o en otras palabras cada componente del vector de entrada  $\vec{u}(\tau)$  debe estar definida en el intervalo en consideración.

$$\text{sea } \vec{f}(\tau) = e^{\underline{A}(-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau)$$

entonces

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau) d\tau$$

donde

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t F_1(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t F_{n_1}(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

siendo  $n_1$  el número de estados.

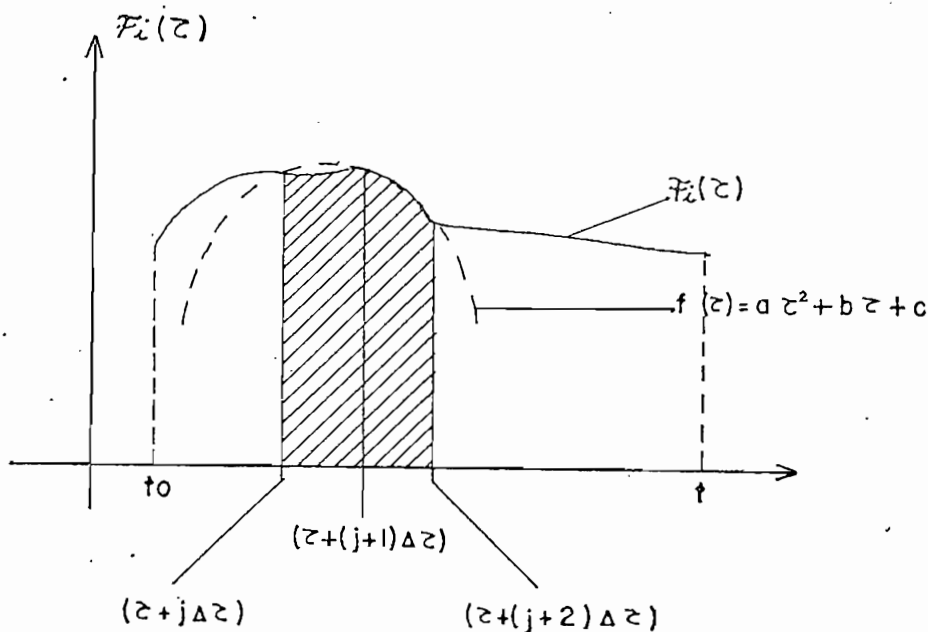
Cada elemento del vector  $\vec{J}$  se encuentra integrando la función  $F_i(\tau)$  para  $i=1,2,\dots,n_1$  en el intervalo  $[t_0,t]$ , para efectuar esta integración se puede recurrir al método propuesto conocido como Regla de Simpson.

Considerando que la regla del trapecio aproxima el área (valor de la integral) bajo una curva (función a integrarse a la suma de las áreas de trapecios de igual anchura formados por la unión de los puntos consecutivos sobre la curva por líneas rectas, ésta produce un error de truncamiento en el instante  $\tau = t_1$  al rededor de

$$\epsilon = \frac{f''(t_1) (\Delta\tau)^2 (t_0 - t)}{12}$$

donde  $t_0 < t_1 < t$ ,  $\Delta\tau$  es la anchura de dichos trapecios y  $f''(t_1)$  es la segunda derivada de la función a integrarse (ver ec. (2.51))

La regla de Simpson da una mayor exactitud en la aproximación de la integral ya que esta consiste en unir grupos sucesivos de tres puntos sobre la curva por parábolas de segundo grado; sumando las áreas bajo las parábolas se obtiene el área aproximada bajo la curva como se muestra en la figura siguiente.



obteniendo la siguiente fórmula

$$\int_{t_0}^t \mathcal{F}_i(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{3} (\mathcal{F}_i(t_0) + 4 \sum_{j=2,4,6}^m \mathcal{F}_i(t_0+j\Delta\tau) + 2 \sum_{j=3,5,7}^{m-1} \mathcal{F}_i(t_0+j\Delta\tau) + \mathcal{F}_i(t)) \quad (2.52)$$

cuyo error de truncamiento es aproximadamente igual a:

$$\varepsilon = - \frac{\mathcal{F}_i^{IV}(t_1) \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^4 (t_0-t)}{180}$$

para  $\tau=t_1$  tal que  $t_0 < t_1 < t$ .

Existen dos variaciones de la regla de Simpson las cuales son: la regla de las tres octavas de Simpson y la regla de Simpson usando términos correctivos los cuales se los encuentra a partir de la fórmula de Sterling de sexto grado. Si bien estos dos últimos métodos producen un error de truncamiento menor, su evaluación numérica se hace mucho más larga, el número de operaciones aritméticas se incrementan al evaluar cada punto de intervalo considerado aumentando el error de redondeo y el tiempo de ejecución de el computador. Es por esta razón que únicamente se los menciona en



el presente trabajo.

Haciendo uso de la regla de Simpson el procedimiento general de cálculo se muestra a continuación:

1. Dado el intervalo para hallarse numéricamente los estados y salidas, se divide al mismo en el número necesario de subintervalos, número que corresponde a la cantidad de puntos (coordenadas) necesarios para la grafización de aquellos (esta división se la realiza usando criterios que serán expuestos en el próximo subcapítulo).
2. Dada la condición inicial de estado  $\vec{X}(t_0)$  se procede a calcular el valor del vector de salida en este instante para lo cual se evalúa el vector de entrada en  $t_0$  así:

$$\vec{Y}(t_0) = \underline{C} \vec{X}(t_0) + \underline{D}\vec{u}(t_0)$$

3. Dado el intervalo total  $[t_0, t_f]$ , dividido en sus intervalos  $[t_0+(i-1)\Delta t, t_0+i\Delta t]$  para  $i=1,2,\dots,m$ ; donde  $\Delta t = (t_f - t_0)/m$ . El procedimiento siguiente debe realizarse para  $i=1,2,\dots,m$  secuencialmente.

a) Se evalúa

$$e^{\underline{A}(\Delta t)} \cdot \vec{X}(t_0 + (i-1)\Delta t)$$

b) Se evalua también:

$$e^{\underline{A}(t_0 + i\Delta t)}$$

c) Se calcula

$$\int_{t_0 + (i-1)\Delta t}^{t_0 + i\Delta t} e^{\underline{A}(-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau$$

haciendo uso de la ecuación (2.52) en la cual se escoge  $m$  suficientemente grande para asegurar que los errores no sobrepasen un determinado límite.

d) Se efectúan la suma y multiplicaciones matriciales siguientes:

$$e^{\underline{A}(\Delta t)} \vec{X}(t_0 + (i-1)\Delta t) + e^{\underline{A}(t_0 + i\Delta t)} \int_{t_0 + (i-1)\Delta t}^{t_0 + i\Delta t} e^{\underline{A}(-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau$$

e) El resultado anterior corresponde al valor del vector de estado encontrado  $\vec{X}(t_0 + i\Delta t)$

f) Se calcula la salida a partir del resultado anterior.

$$\vec{Y}(t_0 + i\Delta t) = \underline{C}\vec{X}(t_0 + i\Delta t) + \underline{D}\vec{u}(t_0 + i\Delta t)$$

El proceso precedente resulta a todas luces demasiado largo (por el excesivo número de operaciones aritméticas a realizarse) aún para el sistema de computación del que se dispone, el cual es relativamente lento. La implementación de este procedimiento en un computador justificaría en el caso de que este sea suficientemente rápido (con tiempos de ejecución de instrucciones de algunos millones de veces por segundo), ya que el orden de los sistemas a analizarse es generalmente alto. Es por esta razón que no se profundiza más en este método, cuya implementación quedaría como ejercicio de programación para el lector.

## OTROS METODOS

A continuación se mencionan algunos métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, t_0, X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, u(t)) \\ f_2(t, t_0, X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, u(t)) \\ \vdots \\ f_{n_1}(t, t_0, X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, u(t)) \end{bmatrix}$$

El primero de ellos es el método de Runge-Kutta el cual se basa en encontrar punto a punto la solución del sistema, sin necesidad de conocer las derivadas de las funciones (como lo es en algunos métodos como el de Taylor); se lo hace evaluando cada  $f_i$  para puntos seleccionados de cada intervalo; este método tiene sin embargo la desventaja que para sistemas de órdenes superiores su complejidad es tal que resulta desventajoso desde el punto de vista de tiempo de ejecución del computador.

Otros de los métodos desarrollados para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

- 1) Método de Milne, su mayor desventaja radica en que es necesario conocer la primera derivada de cada función  $f_i$  lo cual es imposible implementar en el computador para el sistema analizado en este trabajo.
- 2) Método de Hamming que no es más que una variación del método anterior para obtener mejor estabilidad, sin embargo posee la misma desventaja que el precedente.

Estos dos últimos métodos tienen variaciones conocidas como métodos predictor-conector por ejemplo: Adams-Moulton, Adams-Bashforth, etc.

Resumiendo cabe considerar lo siguiente. El método de Runge-Kutta tiene la ventaja importante de ser autoiniciador. Además es estable, da una razonable precisión; sin embargo, no proporciona estimativo alguno de la precisión que se está buscando, adicionalmente este método requerirá el doble o más el tiempo de computación que los otros por el número de evaluaciones funcionales por paso de integración.

Los demás métodos proporcionan un estimativo automático del error en cada paso permitiendo así al programa seleccionar un valor óptimo de paso de cálculo para una precisión requerida, además estos son dos veces más rápidos que el de Runge-Kutta pero tienen la desventaja antes mencionada de necesitar la primera derivada de cada función  $f_i$  para  $i=1,2,\dots,n_1$

## 2.6. CALCULO DE ESTADOS Y SALIDAS .- DESARROLLO DE PROGRAMAS.

En la presente sección se describen dos métodos de discretización de las ecuaciones diferenciales y la elaboración de sendos programas en el computador.

### METODO DE LAS LINEAS QUEBRADAS DE EULER.

Consiste en transformar el sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones de diferencias, es decir utilizando una aproximación en tiempo discreto. Esta aproximación se basa en la división del eje del tiempo en incrementos suficientemente pequeños ( $\Delta t=T$ ).

A continuación se reescriben las ecuaciones matriciales generales a resolverse

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \underline{A}\vec{X}(t) + \underline{B}\vec{u}(t) \quad (2.53)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C}\vec{X}(t) + \underline{D}\vec{u}(t) \quad (2.54)$$

Siendo la definición de derivada la siguiente

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t+\Delta t) - \vec{X}(t)}{\Delta t}$$

se escoge  $\Delta t=T$  suficientemente pequeño de manera que no afecte de manera considerable a la respuesta del sistema la definición anterior puede escribirse como:

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \frac{\vec{X}(t+T) - \vec{X}(t)}{T}$$

substituyendo esta aproximación en la ecuación (2.53)

$$\frac{\vec{X}(t+T) - \vec{X}(t)}{T} = \underline{A}\vec{X}(t) + \underline{B}\vec{u}(t)$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{X}(t+T) &= T\underline{A}\vec{X}(t) + \vec{X}(t) + T\underline{B}\vec{u}(t) \\ &= (T\underline{A} + \underline{I})\vec{X}(t) + T\underline{B}\vec{u}(t) \end{aligned}$$

si  $t$  se divide en  $n$  intervalos se tiene

$$\vec{X}((n+1)T) = (T\underline{A} + \underline{I})\vec{X}(nT) + T\underline{B}\vec{u}(nT) \quad (2.55)$$

quedando la ecuación (2.54)

$$\vec{y}(nT) = \underline{C}\vec{X}(nT) + \underline{D}\vec{u}(nT)$$

A continuación se harán algunas acotaciones acerca del escogitamiento del incremento de tiempo a utilizarse.

Algunos autores recomiendan que este  $\Delta t=T$  se escoja un valor menor o a lo sumo igual a la mitad de la constante de tiempo más pequeña del sistema para que la solución sea estable. En primer lugar el método de Euler es de por si estable ya que cumple la condición de que al disminuir  $\Delta t$  (cuando se quiera) la respuesta calculada se aproxima a la verdadera (lo que no sucede con otros métodos como por ejemplo el de Milne que en ocasiones resulta numéricamente inestable). En segundo lugar el criterio establecido referente a la constante de tiempo se cumple únicamente en ciertos casos muy particulares como se mostrará a continuación.

De la ecuación (2.53), si los valores propios de  $A$  son reales y distinguidos  $\lambda_i$  para  $i=1,2,\dots,n$ ; donde  $n$  es el número de estados del sistema, entonces la solución homogénea para cada estado  $X_i(t)$  será de la forma:

$$X_i(t) = \sum_{i=1}^{n_1} k_i e^{\lambda_i t}$$

por lo tanto la aproximación de la derivada será:



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} k_i \lambda_i e^{i t} &= \left( \sum_{i=1}^{n_1} k_i e^{\lambda_i T} e^{\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{n_1} k_i e^{\lambda_i t} \right) / T \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n_1} k_i e^{\lambda_i t} (e^{\lambda_i T} - 1) \end{aligned}$$

por lo tanto para que se cumpla esta aproximación:

$$\lambda_i = \frac{e^{i T} - 1}{T} \quad i=1, 2, \dots, n$$

aplicando el criterio expresado anteriormente es decir

$T < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_{MAX}} \right)$  se tiene para el máximo valor propio  $\lambda_{MAX}$

$$\lambda_{MAX} = (e^{\frac{1}{2}} - 1) 2 \lambda_{MAX}$$

introduciendo un factor máximo de 1.2 de error al evaluar en forma aproximada la derivada en la ecuación (2.53) suponiendo que la solución particular tenga constantes de tiempo mayores que las de la homogénea.

Ahora bien suponiendo que la solución particular de la ecuación (2.53) no tiene mayor efecto sobre la determinación del  $\Delta t$ , se considera a continuación que los valores propios de  $\underline{A}$  son complejos y distinguidos por lo tanto ca-

da estado  $X_i(t)$  será de la forma

$$X_i(t) = \sum_{i=1}^{n_i} (k_i \sin \gamma_i t + \xi_i \cos \gamma_i t) e^{\lambda_i t} + X_{ip}(t)$$

donde los valores propios son  $\lambda_i + j\gamma_i$  para  $i=1, 2, \dots, n_i$ .

Se introduce otro criterio para determinar un incremento  $\Delta t$  adecuado, que tiene su analogía en la teoría de muestreo de señales periódicas que tienen una frecuencia angular máxima  $\omega_M = \gamma_M$ ; el criterio consiste en tomar un  $\Delta t$  suficiente pequeño para que la ecuación diferencial 2.53 rastree a la frecuencia más alta, así la máxima frecuencia estará dada por:

$$\gamma_{MAX} = \frac{2\pi}{T_{min}}$$

donde

$$\Delta t \sim \frac{1}{10} T_{min} = \frac{2}{10\gamma_{MAX}}$$

entonces

$$\Delta t = \frac{1}{2\gamma_{MAX}}$$

Para establecer un tercer criterio de escogitamiento del incremento  $\Delta t$  y, siguiendo con la suposición de que la solución particular de la ecuación (2.53) no tiene mayor influencia sobre la determinación del  $\Delta t$ , siendo los valores propios de  $A$  reales o complejos pero repetidos y el orden del bloque de Jordan de mayor orden es  $n_3$  (ver subcapítulo 2.3) por lo tanto la solución tendrá términos que contengan el factor  $t^{n_3-1}$  que al evaluarlo para un sistema en particular con un instante inicial de funcionamiento  $t_0$  toma la forma  $(t-t_0)^{n_3-1}$

A continuación se presenta el desarrollo pertinente. Haciendo un análisis aproximado, considerado únicamente la contribución al error en la solución dado por este factor  $(t-t_0)^{n_3-1}$  en la evaluación de la estimación discreta de la derivada, se procede como sigue:

$$\frac{d}{dt}(t-t_0)^{n_3-1} = \frac{(t-t_0+\Delta t)^{n_3-1} - (t-t_0)^{n_3-1}}{\Delta t}$$

sea  $(t-t_0) = P$

$$(n_3-1)P^{n_3-2} = \frac{P^{n_3-1} + \sum_{k=1}^{n_3-1} \binom{n_3-1}{k} P^{n_3-1-k} (\Delta t)^k - P^{n_3-1}}{\Delta t}$$

siendo  $\binom{n_3-1}{k} = \frac{(n_3-1)!}{k!(n_3-1-k)!}$  conocido como coeficiente binomial.

Continuando con el desarrollo:

$$(n_3-1)p^{n_3-2} = \frac{(n_3-1)p^{n_3-2} \cdot \Delta t + \sum_{k=2}^{n_3-1} \binom{n_3-1}{k} p^{n_3-1-k} (\Delta t)^k}{\Delta t}$$

$$(n_3-1)p^{n_3-2} = (n_3-1)p^{n_3-2} + \sum_{k=2}^{n_3-1} \binom{n_3-1}{k} p^{n_3-1-k} (\Delta t)^{k-1}$$

para obtener el error relativo se divide esta expresión para el valor verdadero, así:

$$1 = 1 + \frac{1}{(n_3-1)} \sum_{k=2}^{n_3-1} \binom{n_3-1}{k} \left(\frac{\Delta t}{t-t_0}\right)^{k-1}$$

teniendo como resultado que el error relativo esta dado por:

$$\frac{1}{(n_3-1)} \sum_{k=2}^{n_3-1} \binom{n_3-1}{k} \left(\frac{\Delta t}{t-t_0}\right)^{k-1}$$

lo que significa que para las primeras evaluaciones es decir para valores de  $t=t_0+m\Delta t$  donde  $m$  tenga valores bajos a

si  $m=1,2,3,\dots,10$ ; los errores relativos serán altos. Seguidamente se presentan los errores relativos (en porcentaje) al evaluar la derivada en forma discreta para algunos valores de  $m$  y con varios valores de  $n$ .

$n_3/n$	1	2	3	4	5	10	15	30	50	100
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	50	25	16.5	12.5	10	5	3.3	1.66	1	0.5
4	133,3	58.3	37.04	27.08	21.3	10.3	6.81	3.37	2.01	1.003
5	275	103.1	62.04	44.14	34.2	16.02	10.45	5.112	3.04	1.51
8	1714.3	359.6	178.2	115.33	84.51	35.53	22.38	10.57	6.20	3.05
10	5577.8	723.1	310.6	186.7	131.1	50.88	31.26	14.42	8.38	4.09
15	117x10 <sup>3</sup>	4056	1081	521	322.8	99.8	57.32	24.83	14.1	6.76
20	2.76x10 <sup>6</sup>	23x10 <sup>3</sup>	3.6x10 <sup>3</sup>	1.34x10 <sup>3</sup>	714.3	169.3	90.13	36.5	20.21	9.53
25	70x10 <sup>6</sup>	140x10 <sup>3</sup>	12x10 <sup>3</sup>	3.41x10 <sup>3</sup>	1535	268.7	131.65	49.58	26.75	12.38

A partir de estos datos se encontraron las siguientes fórmulas haciendo uso del método de regresión lineal.

$$\text{error relativo (\%)} = a e^{b(n_3)} \quad \text{para } m=1,2,3$$

$$\text{error relativo (\%)} = a(n_3)^b \quad \text{para } m=4,5,\dots,100$$

donde a y b estan dados en la tabla siguiente igual que el coeficiente de correlación  $r^2$

m	a	b	$r^2$
1	10.01614797	0.629178235	0.99
2	13.43270468	0.375641976	0.99
3	13.06485659	0.28309087	0.98
4	0.726073881	2.513971351	0.99
5	0.830582467	2.263090267	0.99
10	0.794558588	1.803747242	0.99
15	0.637223249	1.669320391	0.99
30	0.381422549	1.540617702	0.99
50	0.244610967	1.492265186	0.99
100	0.128378824	1.456940631	0.99

Aplicando el método de regresión polinomial sobre los coeficientes  $a$  y  $b$  se ha encontrado la siguiente fórmula empírica que calcula el error relativo cometido en las tres primeras muestras es decir para  $m=1,2,3$ .

$$\text{Error relativo (\%)} = f(m)e^{g(m)n_3} \quad (2.56)$$

$$y \quad f(m) = a_1 + b_1 m + c_1 m^2$$

$$g(m) = a_2 + b_2 m + c_2 m^2$$

donde

$$a_1 = 2.815186329$$

$$b_1 = 9.093164065$$

$$c_1 = -1.892202438$$

$$a_2 = 1.043699643$$

$$b_2 = -0.495013985$$

$$c_2 = 0.080492576$$

estos valores fueron encontrados con un coeficiente de correlación  $r^2 = 1 \pm 10^{-8}$ .

Como se puede ver en el cuadro (pág. 181) los errores relativos cometidos en los primeros intervalos de muestreo son muy



grandes por lo que se ha dado mayor atención a la precisión en su cálculo. Estos errores relativos calculados pueden ser usados para aplicar un criterio de escogitamiento del intervalo de muestreo al menos para los primeros intervalos.

A manera de comentario se ha calculado una fórmula empírica para encontrar el error relativo para los intervalos del cuarto en adelante, la cual no será usada en el presente trabajo.

Para  $m=4,5,\dots$ ; se tiene la siguiente ecuación:

$$\text{error relativo (\%)} = f_1(m)n_3 g_1(m)$$

donde:

$$f_1(m) = a_3 + b_3 m + c_3 m^2 + d_3 m^3$$

$$g_1(m) = a_4 + b_4 m + c_4 m^2 + d_4 m^3$$

y

$$a_3 = 0.87694768 \quad ; \quad a_4 = 2.70350923$$

$$b_3 = 0.016906514 \quad ; \quad b_4 = -9.2191635 \times 10^{-2}$$

$$c_3 = 59.6204 \times 10^{-6} \quad ; \quad c_4 = 1.9667043 \times 10^{-3}$$

$$d_3 = 0.347137 \times 10^{-9} \quad ; \quad d_4 = -1.1697799 \times 10^{-5}$$

valores con un coeficiente de correlación de  $\sim 0.95$

Del desarrollo anterior se presenta a continuación un criterio que puede resultar útil en el caso en que el orden del bloque de Jordan (de la transformación de semejanza de la matriz A) de mayor orden sea mayor o igual a 3 ( $n_3 \geq 3$ ). Este consiste esencialmente en minimizar el valor absoluto del error introducido por el factor  $(t-t_0)^{n_3-1}$  (mencionado anteriormente). Si bien al observar la ecuación (2.53) no se puede notar la existencia de este tipo de términos, ellos están implícitamente involucrados en la solución y la exactitud de dicha solución dependerá de la atención que se ponga en su influencia en la introducción de errores.

Como se puede verificar del cuadro (pág. 114) los errores relativos son muy altos para los primeros intervalos y estos van decreciendo para los siguientes, por lo cual se ha optado por fijar un error absoluto de valor numérico bajo para los primeros intervalos, ya que los errores introducidos en estos debido al mecanismo numérico a seguirse (algoritmo) serán arrastrados durante todo el proceso produciendo nuevos errores en el cálculo en los intervalos subsiguientes.

Dado un valor numérico máximo del error a cometerse ( $\epsilon_{AM}$ ) de

bido al término  $(t-t_0)^{n_3-1}$  se calcula el intervalo  $\Delta t$  que producirá dicho error absoluto para el  $m$ -ésimo intervalo mediante la fórmula aproximada.

$$\Delta t = \frac{1}{m} \sqrt[n_3-2]{\frac{aM.100}{(n_3-1)(\text{error relat.}(\%))}}$$

donde el error relativo (%) viene dado por la ecuación empírica (2.56); además se considera para  $m$  los primeros números enteros.

Como posiblemente se habrá notado no se ha emitido un criterio para escoger el intervalo  $\Delta t$  considerando la contribución del vector de entradas es decir la solución particular de la ecuación diferencial matricial de estado puede contener términos lo más complejos que se pueda imaginar y está fuera del alcance del computador analizar los errores introducidos al escoger uno u otro incremento  $\Delta t$ .

#### DESARROLLO DEL PROGRAMA.

El desarrollo matemático en que se basa el procedimiento a implementarse fue ya tratado, y se llegó a las siguientes ecuaciones:

$$\vec{X}((n+1)T) = (\underline{T}\underline{A}+\underline{T})\vec{X}(nT)+\underline{T}\underline{B}\vec{u}(nT)$$

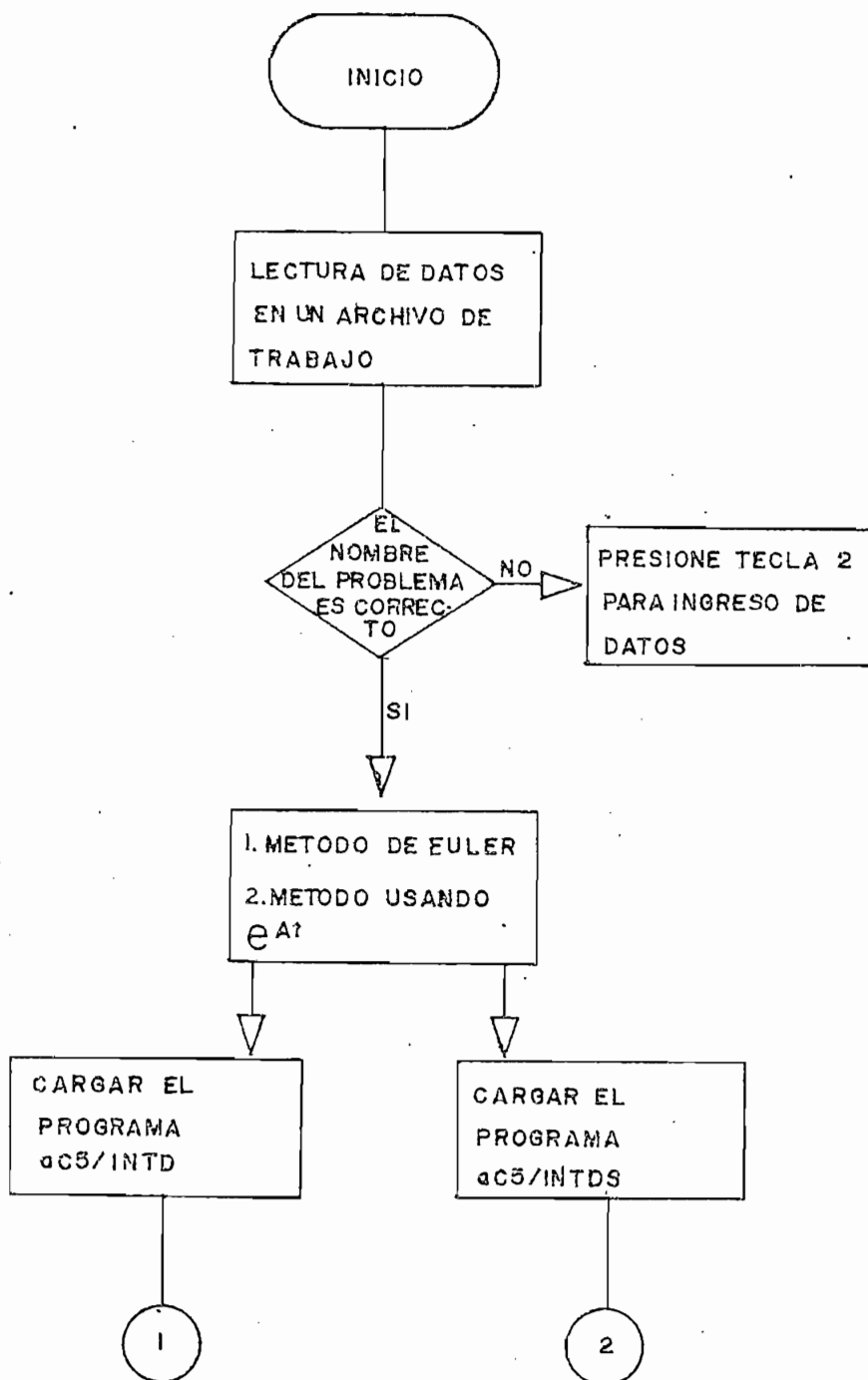
$$\vec{Y}(nT) = \underline{C}\vec{X}(nT)+\underline{D}\vec{u}(nT)$$

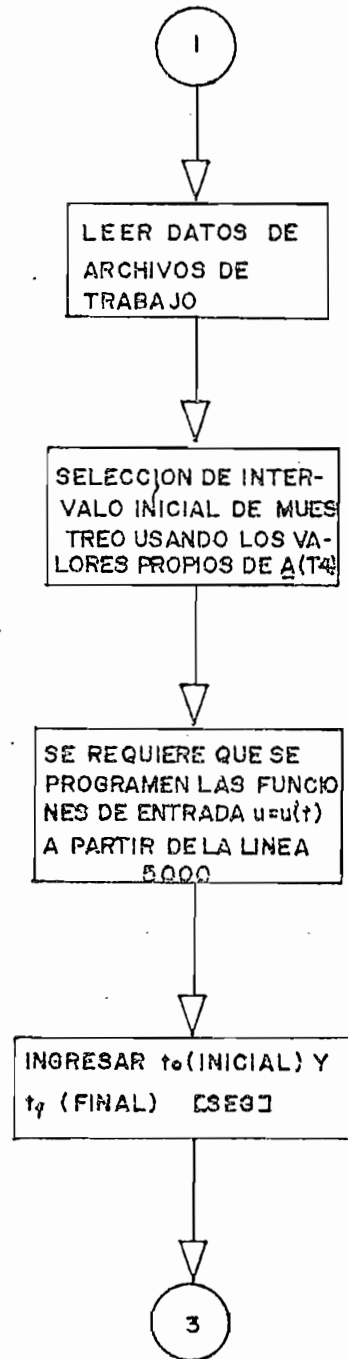
Seguidamente se expone una lista de las variables más importantes utilizadas y su contenido:

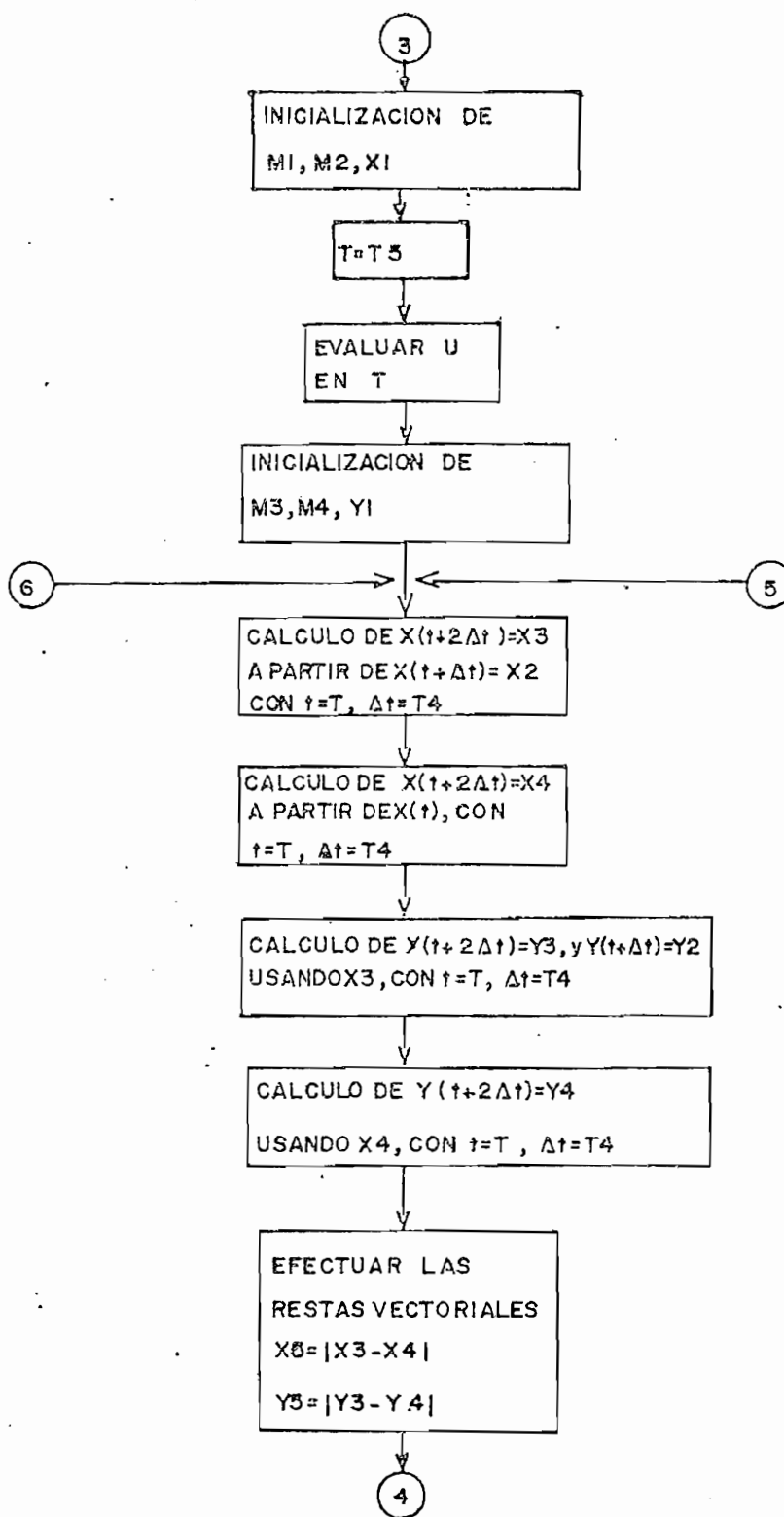
NOMBRE	CONTENIDO
$N_1$	Orden del sistema
$N$	Número de entradas
$N\phi$	Número de salidas
$A$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$
$B$	Matriz de orden $N_1 \times N$
$C$	Matriz de orden $N\phi \times N_1$
$D$	Matriz de orden $N\phi \times N$
$J$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$ . Parte real de la forma de Jordan.
$G\phi$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$ . Parte imaginaria de la forma de Jordan.
$T$	tiempo (para evaluación de entradas)
$T_4$	intervalo de muestreo
$T_5$	tiempo inicial ( $t_0$ )
$N_6$	número de intervalos
$U$	vector de orden $N$ . Evaluación de las entradas.

NOMBRE	CONTENIDO
$X_2$	Vector de orden $N_1 \times 1$ ; al igual que $X_1, X_3, X_4, X_5$
$Y_2$	Vector de orden $N_0 \times 1$ ; al igual que $Y_1, Y_3, Y_4, Y_5$
$M_1$	Vector de orden $N_1$ . Valores máximos que toman los estados.
$M_2$	Vector de orden $N_1$ . Valores mínimos que toman los estados.
$M_3$	Vector de orden $N_0$ . Valores máximos que toman las salidas.
$M_4$	vector de orden $N_0$ . Valores mínimos que toman las salidas.
$M_5$	máximo error cometido en los estados y salidas al calcularlos.

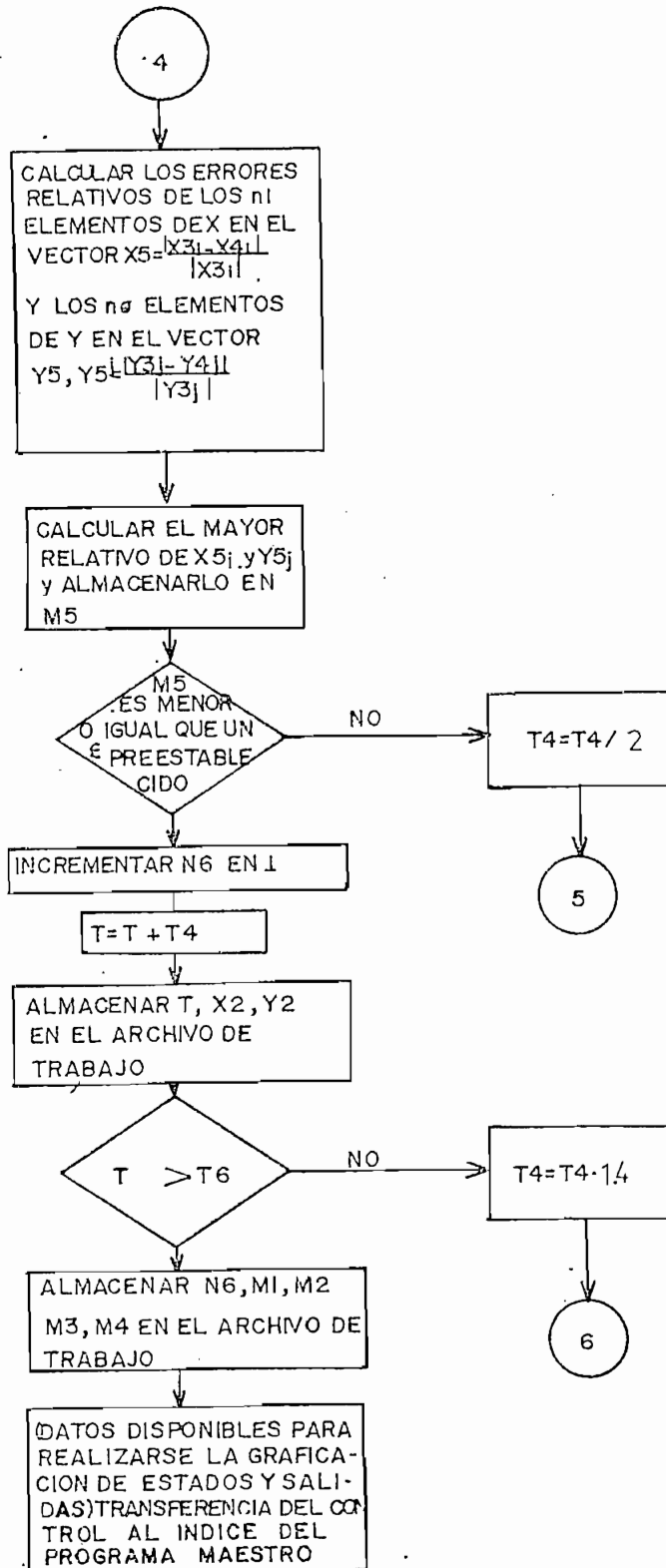
A continuación se presenta el diagrama de flujo del programa.

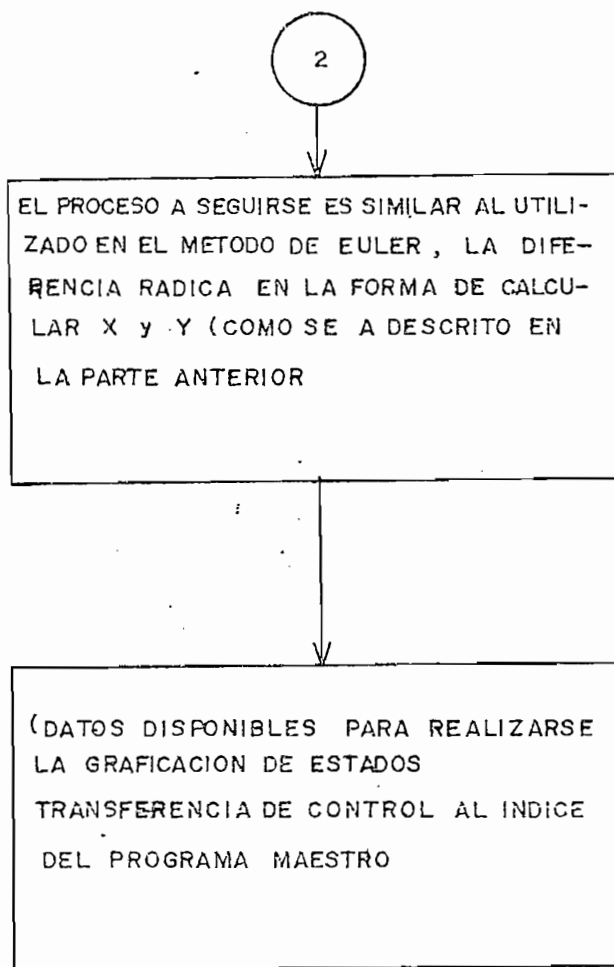












## SEGUNDO METODO DE DISCRETIZACION

La diferencia de este método respecto al anterior consiste en que este considera conocida la matriz de transición. Este tipo de cálculo por muestreo, considerando que se tiene a disposición la matriz de transición calculada en la sección 2.4 es el más adecuado para el uso del computador digital.

A partir de la ecuación (2.47)

$$\vec{X}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau$$

por lo tanto para un incremento  $\Delta t=T$

$$\vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}(t-t_0+T)} \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t+T} e^{\underline{A}(t+T-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}T} & \left[ e^{\underline{A}(t-t_0)} \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t+T-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau \right] + \\ & + \int_t^{t+T} e^{\underline{A}(t+T-\tau)} \underline{B} \vec{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

entonces:

$$\vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}T}\vec{X}(t) + \int_t^{t+T} e^{\underline{A}(t+T-\tau)} \underline{B}\vec{u}(\tau) d\tau$$

considerando que  $\vec{u}(\tau)$  es prácticamente constante para el intervalo  $t, t+T$  y aproximadamente igual a  $\vec{u}(t)$

$$\vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}T}\vec{X}(t) + \left[ \int_t^{t+T} e^{\underline{A}(t+T-\tau)} \underline{B} d\tau \right] \vec{u}(t)$$

haciendo el siguiente cambio de variables

$$\psi = t+T-\tau$$

$$d\psi = -d\tau$$

se tiene

$$\vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}T}\vec{X}(t) + \left[ \int_T^0 e^{\underline{A}\psi} \underline{B} (-d\psi) \right] \vec{u}(t)$$

$$\vec{X}(t+T) = e^{\underline{A}T}\vec{X}(t) + \left[ \int_0^T e^{\underline{A}\psi} \underline{B} d\psi \right] \vec{u}(t) \quad (2.57)$$

reemplazando esta ecuación en la ecuación de salida (2.54)

se tienen las soluciones punto a punto en el tiempo para los estados y las salidas.

Los criterios establecidos acerca de la selección de los intervalos de muestreo <sup>son</sup> vigentes para el presente método, añadiendo la consideración de que  $u(\ddot{t}) \sim \text{constante}$  para todo intervalo  $[t, t+T]$ .

Los nombres de las variables usadas en el presente programa y su contenido además de descritos en el programa anterior se presentan seguidamente.

NOMBRE.	CONTENIDO
$N_2$	Número de valores propios de la matriz de Jordan
$N_3$	Orden del bloque de Jordan de mayor orden
$F_0$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$ (auxiliar)
$F_1$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$ (auxiliar)
$F_2$	Matriz de orden $N_1 \times N_1$ (auxiliar)
$E_2$	Matriz asociada a la matriz de transición de orden $(N_1, N_2 \times N_1, N_3)$
$T_7$	Auxiliar para evaluar $e^{-At}$

En la figura (anterior) se muestra el diagrama de flujo correspondiente.

## 2.7. PROGRAMA PARA LA DETERMINACION DE CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD Y ESTABILIDAD.

Este programa consta fundamentalmente de tres partes:

1. Controlabilidad.- Unicamente se determina la controlabilidad completa de un sistema lineal invariante en el tiempo tanto para los estados como para las salidas. Para determinar la controlabilidad del sistema de (estados) se analiza el rango de la matriz de controlabilidad.

$$\left( \underline{B} \mid \underline{AB} \mid \underline{A^2B} \mid \dots \dots \dots \mid \underline{A^{n_1-1}B} \right)$$

como se indicó en la sección 1.3 del presente trabajo, para lo cual se usa el método de Grauss-Jordan de pivoteaje de filas y columnas (aplicado generalmente a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales).

Para determinar la controlabilidad de salida se analiza el rango de la matriz

$$\left( \underline{CB} \mid \underline{CAB} \mid \underline{CA^2B} \mid \dots \dots \dots \mid \underline{CA^{n_1-1}B} \right)$$

(ver sección 1.3)

2. Observabilidad.- De manera similar a lo anterior, el objeto de este programa es analizar el rango de la matriz de observabilidad

$$\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

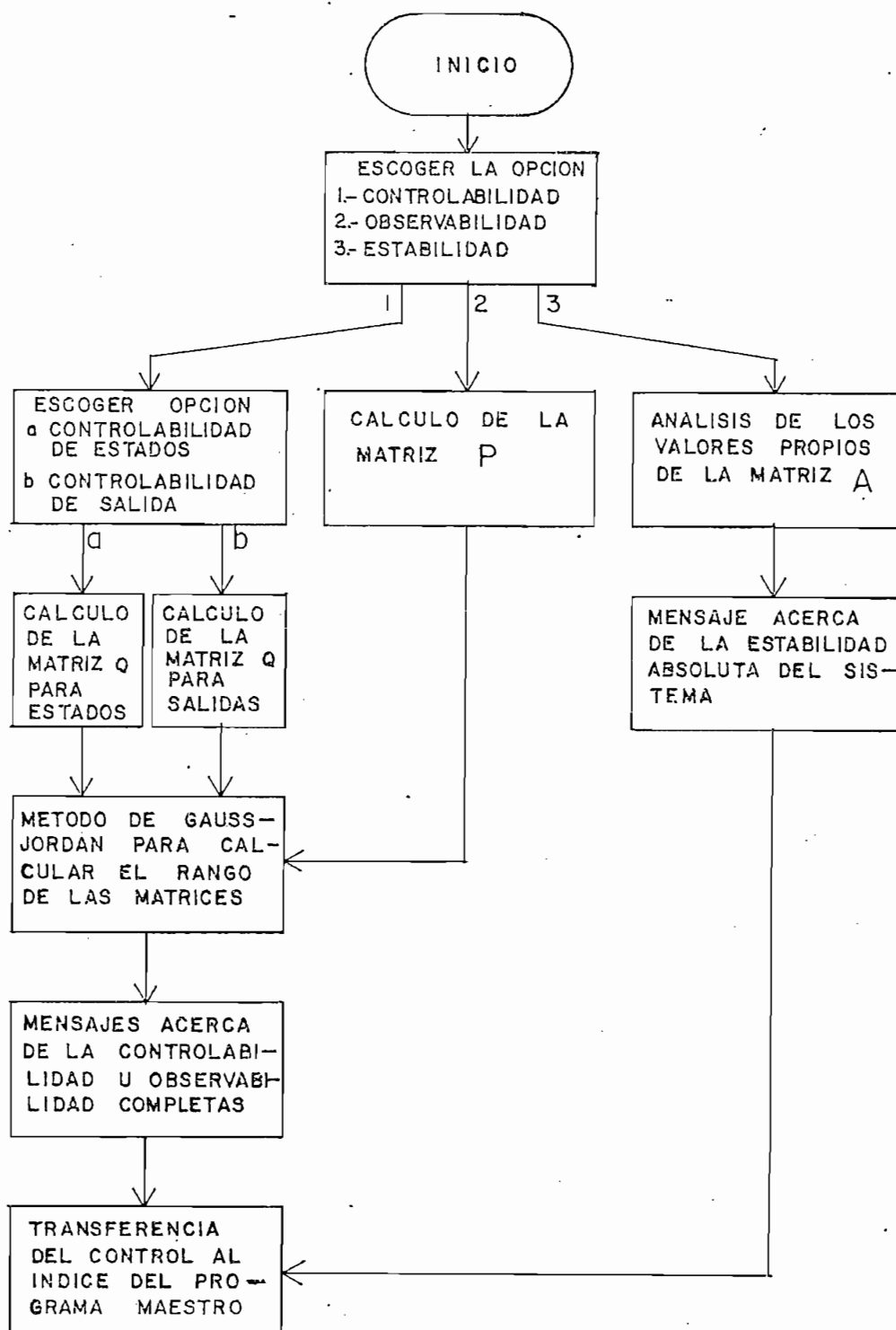
(ver sección 1.3) .

3. Estabilidad.- El programa correspondiente únicamente analiza los valores propios de A y establece si el sistema es absolutamente estable o no.

A continuación se presentan los nombres de las variables más importantes utilizadas y su contenido.

$N_1$	Orden del sistema
$N$	Número de entradas
$N\phi$	Número de salidas
$\underline{A}$	Matriz de orden $N1 \times N1$
$\underline{B}$	Matriz de orden $N1 \times N$
$\underline{C}$	Matriz de orden $N\phi \times N1$
$\underline{D}$	Matriz de orden $N\phi \times N$

En la figura siguiente se tiene el diagrama de flujo del programa en el cual se puede ver la estructura global del mismo.





## CAPITULO III

### INTRODUCCION AL CONTROL OPTIMO

- 3.1 Introducción.- Criterio Funcional.
- 3.2 Optimización Estática.
- 3.3 Optimización Dinámica.- El principio del Máximo. Con trol lineal óptimo realimentado y deducción de la ley de control óptimo.

### CAPITULO III

#### 3.1. INTRODUCCION.- CRITERIO FUNCIONAL.-

En los últimos tiempos, en cada una de las áreas de la ingeniería los sistemas de control han alcanzado gran importancia, necesitándose día a día sistemas de control que cumplan en mejor forma especificaciones particularmente requeridas, sin embargo cabe anotarse que existen especificaciones que pueden generalizarse para varios sistemas, así por ejemplo debido al desmesurado uso de las fuentes naturales de energía estas se van agotando, por lo cual los ingenieros de control se ven en la imperiosa necesidad de construir sistemas de control que optimicen el uso de estas fuentes minimizando el gasto de energía.

En general la palabra óptimo significa "lo mejor" o "lo más deseable", por lo tanto el control óptimo se refiere a la búsqueda de la mejor solución a un problema de control.

En muchos casos referentes a problemas de diseño de sistemas, los ingenieros se encuentran con el hecho de que por razones tecnológicas sólo se pueden aceptar aquellas soluciones que

sean óptimas en algún sentido.

Por otra parte en problemas de diseño se tiene un gran número de soluciones, juzgando estas en base a una figura de mérito (índice de costo o índice de funcionamiento), cada posible solución asociada con el mejor valor esta figura se conoce como la solución óptima, una manera de hallarla (talvez la menos recomendable) sería probar todas las soluciones y escoger la mejor (en caso de que otros métodos no funcionen) otra forma y la más utilizada es hacer uso de la teoría de control óptimo, teoría que brevemente se presenta a continuación.

El control óptimo es el más directo de todos los métodos de diseño, este comienza con un índice de funcionamiento que tan adecuadamente como sea posible incorpora todos los factores que influyen en el funcionamiento del sistema.

A continuación se enuncian algunas de las más importantes características ventajosas que posee un control óptimo.

- dá la única solución verdaderamente óptima.
- permite la incorporación de técnicas digitales.

- se aplica a sistemas no lineales y variantes en el tiempo.
- es una técnica que permite manejar múltiples entradas y sa lidas.

Como desventaja, se puede anotar la generalmente complicada implementación física que requiere en algunos casos; o, el laborioso trabajo que representa implementar programas sofisticados en un computador que realicen el mismo trabajo de optimización en otros.

#### CRITERIO FUNCIONAL.-

Se ha hablado de que lo que se busca es lograr que un siste ma funcione de una manera óptima; pues bien, para conseguir lo se hace necesario encontrar una función matemática para medir de alguna manera como el sistema debe ser óptimo res pecto a otros.

Si bien los factores que se buscan mejorar en un sistema son en muchas ocasiones: costo, rentabilidad, aceptación del con sumidor, etc., estos son muy difíciles de medir, por lo que desde el punto de vista analítico se centrará la atención del control óptimo en términos de funcionamiento del sistema.

Se conoce como índice de funcionamiento un número que indica la bondad del funcionamiento de un sistema. Se puede considerar óptimo un sistema de control si los valores de los parámetros están elegidos de manera tal que el índice de funcionamiento es mínimo o máximo, de manera que aquellos dependen directamente de este.

Para que un índice de funcionamiento sea útil para fines prácticos debe cumplir con ciertas especificaciones:

- el ajuste óptimo de los parámetros debe ser claramente distinguible de un ajuste no óptimo de los mismos.
- debe poseer un máximo o un mínimo.
- debe ser fácilmente calculable analítica o experimentalmente.

Por otra parte, en sistemas de control clásico se han propuesto varios índices de error de funcionamiento (para sistemas con una sola entrada  $x(t)$  y una sola salida  $y(t)$ ), definiendo el error  $e(t) = x(t) - y(t)$ , algunos de los cuales se presentan a continuación.

$$\int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

$$\int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

de los cuales el último conocido como criterio de error cuadrático integral, es quizás el de más significado práctico porque al llevarlo al mínimo valor, consigue para algunos sistemas un consumo mínimo de potencia.

Para sistemas multivariables se necesita algún criterio similar al señalado arriba, que permita que el sistema se comporte de una manera óptima en algún sentido, considerando además que el índice de funcionamiento escogido determina la naturaleza del control óptimo resultante, entonces dependiendo de dicho índice el control puede ser lineal, no lineal, estacionario o variable en el tiempo.

Es deseable que el índice de funcionamiento sea escogido desde el punto de vista práctico, sin embargo se presenta el compromiso entre una evaluación significativa del comporta-

miento del sistema y un problema matemático manejable.

El índice de funcionamiento cuadrático es el más utilizado ya que de su aplicación a plantas lineales da como resultado una ley de control con ecuaciones vectoriales condicionadas por una ecuación de Riccati (que puede ser fácilmente calculada utilizando métodos numéricos computacionales) como se verá en la última parte de este capítulo, es por esta razón que se presenta a continuación una breve descripción de las formas cuadráticas.

Si se desea llevar a un mínimo una señal de error en un sistema, se puede hacerlo mediante la minimización del siguiente índice de funcionamiento

$$I = \int_0^t \left[ \vec{\zeta}(t) - \vec{X}(t) \right]^+ \underline{F}_x \left[ \vec{\zeta}(t) - \vec{X}(t) \right] dt$$

donde  $\vec{\zeta}(t)$  es el estado deseado,  $\vec{X}(t)$  es el estado del sistema y  $\underline{F}_x$  es una matriz definida positivamente, este índice es parecido al criterio de error cuadrático integral.

(1) El signo + significa transconjugada

Pero muchas veces la minimización de errores sin minimizar la energía utilizada por el control pueden llevar a valores demasiado altos a los elementos del vector de control  $\vec{u}$  que pueden producir saturación en el sistema físico, es por esta razón por la cual se hace necesaria la presencia de  $\vec{u}$  en el índice de funcionamiento, entonces

$$I = \int_0^T [\vec{\zeta}(t) - \vec{X}(t)]^T \underline{F_x} [\vec{\zeta}(t) - \vec{X}(t)] dt + \\ + \lambda \int_0^T \vec{u}^T(t) \underline{F_u} \vec{u}(t) dt$$

donde  $\lambda$  se conoce como multiplicador de Lagrange que da la medida de influencia de  $\vec{u}$  frente a la disminución de errores al mínimo. Si se hace  $\vec{\zeta}(t)=0$  y  $T \rightarrow \infty$  se tiene

$$I = \int_0^{\infty} |X^T(t) \underline{F_x} \vec{X}(t) + \vec{u}^T(t) \underline{F_u} \vec{u}(t)| dt$$

índice que será utilizado al final de este capítulo



### 3.2 OPTIMIZACION ESTADICA.

Un problema de control óptimo generalmente comienza con los siguientes proposiciones:

- a) El modelo matemático de un sistema determinístico es conocido

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}, \vec{u}) \quad (3.1)$$

donde  $\vec{X}$  es un  $n_1$ -vector;  $\vec{f}$  es un vector funcional de los vectores de estado y de entrada (comunmente conocido como vector de control)

- b) El estado inicial es  $\vec{X}(0)$  y el estado final es  $\vec{X}(t_1)$  para algún  $t_1$  especificado, el tiempo  $t_1$  es conocido de antemano.

- c) Un índice de funcionamiento  $I$  está definido como:

$$I = \int_0^{t_1} f_0(\vec{X}, \vec{u}) dt \quad (3.2)$$

donde  $f_0(\vec{X}, \vec{u})$  representa la función de costo (una expli

cación del índice de funcionamiento se lo hizo en el subcapítulo anterior.)

- d) En caso de existir condiciones o restricciones en cuanto a los valores que pueden tomar los estados como las entradas, la solución no debe violarlas; es decir tanto  $\vec{X}$  como  $\vec{u}$  pueden estar restringidos a una región del espacio  $n_1$ -dimensional y  $n$ -dimensional respectivamente; siendo  $\vec{X}$  un vector de orden  $n_1 \times 1$  y  $\vec{u}$  un vector  $n \times 1$ .
- e) Se busca determinar una entrada  $\vec{u}^0$  óptima (control óptimo) (y, a veces el tiempo  $t_1$ , que minimizará el índice de funcionamiento (ecuación (3.2)); mientras ocurra el movimiento del estado desde  $\vec{X}(0)$  hasta  $\vec{X}(t_1)$  sujeto a las restricciones del literal anterior (d)

Los problemas de maximización pueden ser tratados con pequeñas modificaciones hechas al procedimiento de minimización que se considera a continuación.

El problema de control óptimo puede ser dividido convenientemente en dos clases que son

- 1.- El problema de optimización estática.
- 2.- El problema de optimización dinámica.

El problema de optimización estática es encontrado cuando se requiere controlar de manera óptima una planta donde su estado normal es un estado estable; a diferencia del problema de optimización dinámica que está caracterizado por vectores tanto de estado como de entrada (de control) no constantes.

Considerando el problema de optimización estática se hará en el presente subcapítulo una breve descripción del mismo.

Sea una planta descrita por la ecuación vectorial dinámica

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}, \vec{u})$$

Se quiere controlar la planta tal que mantenga el estado constante, valor estable

$$\vec{X} = \vec{X}^0$$

En este estado estable, la ecuación diferencial vectorial dinámica se reduce a la ecuación algebraica estática

$$\vec{f}(\vec{X}^0, \vec{u}^0) = \vec{0} \quad (3.3)$$

de donde es posible encontrar el valor del vector de entrada

da  $\vec{u}^0$  que mantendrá el sistema de dicho estado.

Con  $\vec{X}$  y  $\vec{u}$  reducidos a valores constantes se concluye que la velocidad de cambio del índice de funcionamiento también se mantiene constante, a partir de la ecuación (3.2) se tiene:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^0 = f_0(\vec{X}^0, \vec{u}^0) \quad (3.4)$$

es decir, dado que el índice de funcionamiento crece a una velocidad constante, se busca optimizar el proceso optimizando esta velocidad.

Ejemplo: 3.1

Dado un sistema eléctrico que consiste en  $n_1$  generadores eléctricos  $G_1, G_2, \dots, G_{n_1}$  alimentando con energía eléctrica al sistema con potencias  $X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0$  kwatts respectivamente (ver fig.3.1).

El sistema por lo tanto será alimentado por una potencia -  
tal

$$P = \sum_{i=1}^{n_1} X_i^0 \quad (3.5)$$

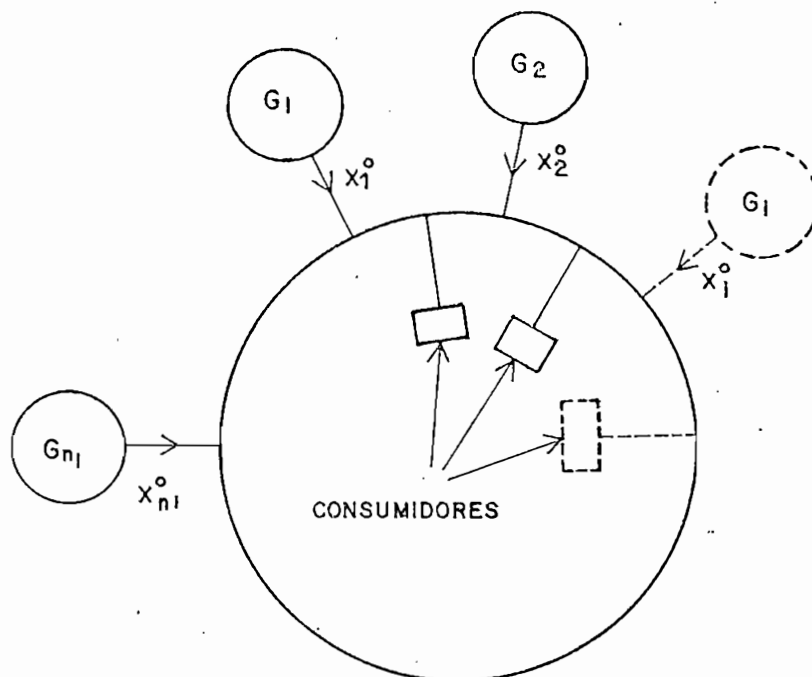


Fig. 3.1

La compañía eléctrica afronta el problema de como dividir la producción entre los varios generadores. Si el consumo necesario  $P$  como parámetro, sufre variaciones lentas en comparación a las velocidades de cambio a las que pueden ser obtenidas las salidas  $X_i$  de los generadores la ecuación (3.5) puede ser considerada una ecuación estática.

Para la selección de la apropiada división de cargas entre los generadores, la compañía eléctrica debe basar su decisión sobre una razonable figura de mérito, y en la mayoría de los casos, esta tiene que ver directamente sobre el cos

to de producción. Debido a diferencias en algunos factores como localización geográfica, combustible y tamaño del generador, el costo de la producción de energía variará para las diferentes estaciones de generación. Sea  $u_i^0(X_i^0)$  la velocidad de costo expresada, por ejemplo, en sucres por hora, para producir  $X_i^0$  Kwatts en la estación  $i$ , obteniendola velocidad de costo para estado estable como

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^0 = \sum_{i=1}^{n_1} u_i^0(X_i^0) \frac{\text{sucres}}{\text{hora}} \quad (3.6)$$

de manera que la estación de generación  $i$  acepta como entrada una señal  $u_i^0$  y produce  $X_i^0$  como salida. El problema ahora es minimizar la ecuación (3.6) con la ecuación (3.2) como condicionante; este problema es el punto central del desarrollo del presente subcapítulo.

Dentro de lo que se refiere a optimización estática esta puede ser lograda fundamentalmente de dos maneras que son:

- 1.- Por optimización de lazo abierto, que se basa en lograr que el proceso controlado funcione de acuerdo a un modelo preconcebido. Este método basado en el uso de una modelación matemática puede ser usado solamente - cuando el proceso está bien definido, sus parámetros ge

neralmente conocidos y los efectos perturbadores despreciables.

- 2.-Por optimización de lazo cerrado, usado en procesos definidos de manera no muy clara y/o cambiantes con el tiempo, donde perturbaciones aleatorias pueden tener considerable influencia en el estado de la planta, se hablará de optimización a través de experimentación al referirse a este método.

A continuación se abordará el problema de optimización estática de las dos formas citadas.

A PARTIR DEL MODELO MATEMATICO.

Recordando que el problema del control óptimo estático básicamente se ha reducido a uno de optimizar la velocidad del índice de funcionamiento (ecuación (3.4))

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^0 = f_0(\vec{X}^0, \vec{u}^0)$$

Como  $u^0$  y  $\vec{X}^0$  están relacionados entre si a través de la ecuación (3.3)

$$\vec{f}(\vec{X}^0, \vec{u}^0) = \vec{0}$$

es posible al menos en principio resolver  $\vec{u}^0$  y después reemplazar este valor  $\vec{u}^0$  en la ecuación (3.4), entonces  $f$  puede ser expresado como una función solo del estado estable  $\vec{X}^0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI}{dt}\right) &= f_0(\vec{X}^0, \vec{u}^0) \\ &= h(\vec{X}^0) \\ &= h(X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta función  $h$  asumirá distintos valores dependiendo del vector  $\vec{X}^0$  seleccionado. El éxito en encontrar el valor para el cual  $h$  es óptimo dependerá básicamente de los siguientes factores:

1. La naturaleza específica de la función  $h$
2. La dimensión de  $\vec{X}^0$
3. Los condicionantes

Dibujando  $h$  versus  $X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0$  en un espacio  $(n_1+1)$ -dimensional se obtendrá una superficie de funcionamiento mul



tidimensional. En general esto no puede ser visualizado - fácilmente excepto cuando  $n_1=1$  y  $n_1=2$ . Para el caso en que  $n_1=2$  se puede hacer una representación gráfica mediante una secuencia de curvas o contornos cada uno de los cuales tiene un determinado valor de  $h$ , por ejemplo la función cuadrática

$$h(X_1^0, X_2^0) = (X_1^0)^2 + (X_2^0)^2$$

da como resultado una familia de círculos concéntricos centrados en el origen como se puede observar en la fig. 3.2.a, que es una representación de la superficie de funcionamiento (fig. 3.2.b)

Obviamente algunos tipos de superficies no poseen un valor extremo, este es el caso de una función  $h$  lineal:

$$h(X_1^0, X_2^0) = \alpha_1 X_1^0 + \alpha_2 X_2^0$$

donde la superficie de funcionamiento resulta ser un plano.

Pueden presentarse casos en que la superficie tenga más de un óptimo con diferentes magnitudes relativas.

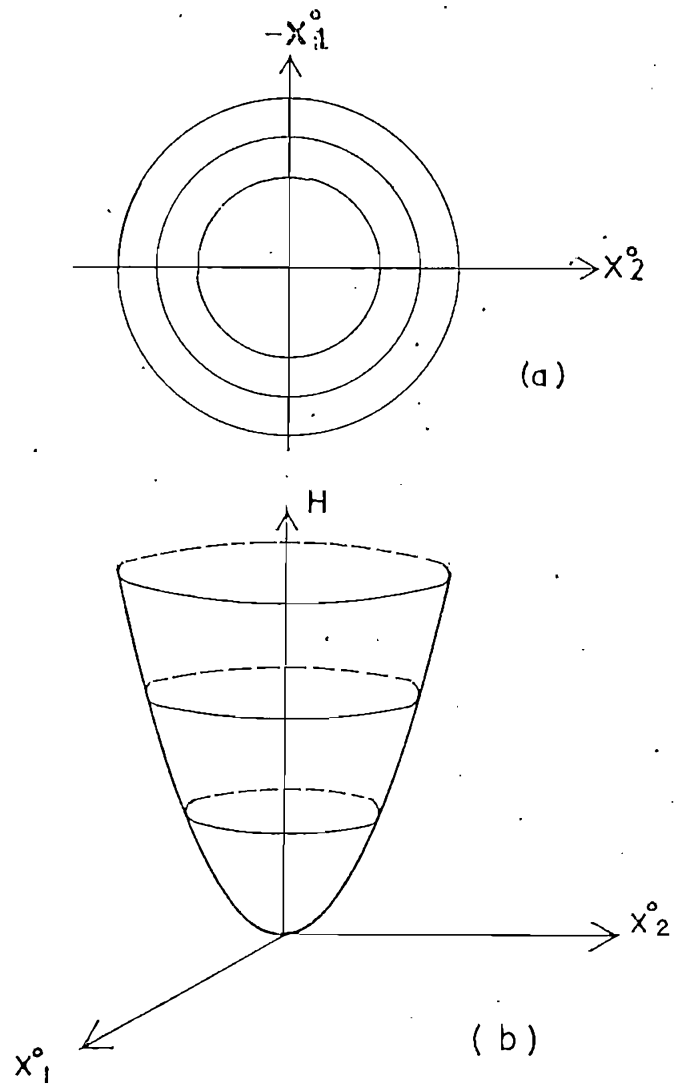


Fig. 3.2

La situación cambia radicalmente si, como es el caso usual, ciertos condicionantes sobre las variables de estado deben ser respetadas, sean estos condicionantes igualdades o de sigualdades, por ejemplo:

$$g_m(X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0) = 0 \quad (3.8)$$

o

$$g_r(X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0) < 0$$

para  $m=1, 2, \dots, p$ ;  $p < n$ , y  $r = 1, 2, \dots, q$ .

Para ilustrar esta última parte, se fija una condicionante  $g(X_1^0, X_2^0)=0$  en la gráfica de la figura 3.2, siendo esta condicionante otra superficie se tiene que el valor mínimo ó ptimo) será  $P_2$  y no  $P_1$  debido a esta restricción (condicio- nante), ver figura 3.3

Cuando la función  $h$  es lineal y los condicionantes  $g_i(\vec{X}^0)$  son lineales el problema se resuelve usando programación lineal, este tipo de problemas aparecen muy a menudo en las áreas de negocios, economía, etc.

Si  $h$  es una función matemática manejable las técnicas clá- sicas de búsqueda de extremos pueden ser empleadas. El pun

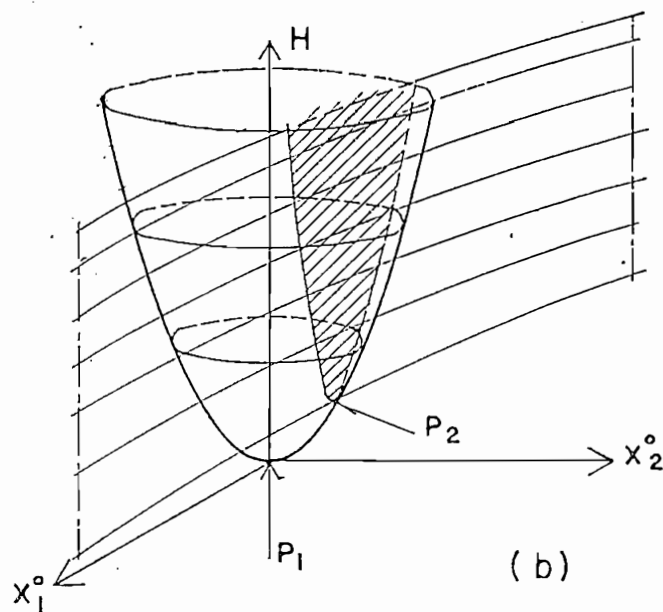
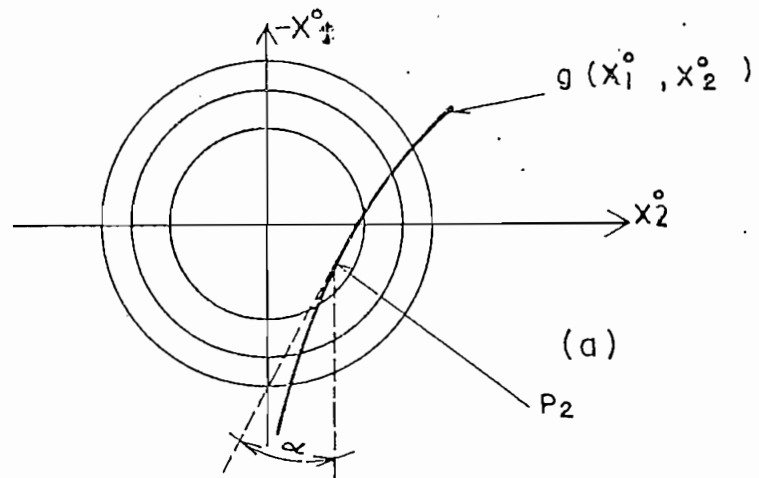


Fig. 3.3

to óptimo en el caso de no existir condicionantes a las variables de estado es identificado por el hecho de que  $h$  no cambia cuando ocurre una pequeña desviación respecto al punto óptimo; esto es,  $h$  es estacionario.

De la ecuación (3.7) se tiene

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1^0} dX_1^0 + \frac{\partial h}{\partial X_2^0} dX_2^0 + \dots + \frac{\partial h}{\partial X_{n_1}^0} dX_{n_1}^0 \quad (3.9)$$

Como  $dX_i^0$  para  $i=1,2,\dots,n_1$ ; es completamente libre, la única posible forma de asegurar que  $dh$  se mantenga igual a cero es hacer que todas las derivadas parciales se hagan ce-ro, así

$$\frac{\partial h}{\partial X_i^0} = 0$$

para  $i=1,2,\dots,n_1$ .

Para el caso en que se considere el problema sujeto a con-dicionantes, por ejemplo para el caso de  $n_1=2$  mostrado en la figura 3.3, donde se observa que  $P_2$  es el punto tangen-te entre un contorno  $h$  constante y la curva  $g(X_1^0, X_2^0)=0$  en el punto en cuestión, y usando esta característica para la identificación del punto óptimo se sigue el proceso siguien-te.

Diferenciando  $h(X_1^0, X_2^0) = \text{constante}$  se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial X_1^0} dX_1^0 + \frac{\partial h}{\partial X_2^0} dX_2^0 = 0$$

por lo tanto

$$\frac{dX_2^0}{dX_1^0} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial X_2^0}}{\frac{\partial h}{\partial X_1^0}}$$

Haciendo lo mismo con la condicionante  $g(X_1^0, X_2^0) = 0$  se tiene

$$\frac{dX_2^0}{dX_1^0} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial X_2^0}}{\frac{\partial g}{\partial X_1^0}}$$

y por definición de  $\alpha$  (ver fig. 3.3)

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial X_2^0}}{\frac{\partial h}{\partial X_1^0}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial X_2^0}}{\frac{\partial g}{\partial X_1^0}} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Esta última ecuación puede ser representada como:

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial X_1^0}}{\frac{\partial g}{\partial X_1^0}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial X_2^0}}{\frac{\partial g}{\partial X_2^0}} = -\lambda = \text{constante}$$

donde  $\lambda$  se conocen como los multiplicadores de Lagrange, se

obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial h}{\partial X_1^v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_1^v} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial X_2^v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_2^v} = 0$$

Definiendo  $h^* = h + \lambda g$ , se puede concluir que punto óptimo condicionado está caracterizado por:

$$\frac{\partial h^*}{\partial X_1^v} = 0$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial X_2^v} = 0$$

Este resultado puede ser extendido al caso  $n_1$ -dimensional con  $p$  condicionantes del tipo (ecuación (3.8)), necesitando  $p$  multiplicadores  $\lambda_i$ ;  $i=1, 2, \dots, p$  y

$$h^* = h + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$$

por lo tanto el óptimo condicionado estará caracterizado - por

$$\frac{\partial h^*}{\partial X_i^v} = 0 \quad (3.10)$$

para  $i=1,2,\dots, n_1$

se tiene por consiguiente  $(n_1+p)$  ecuaciones (3.8) y (3.10) y  $(n_1+p)$  incógnitas  $X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_1}^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ .

### OPTIMIZACION POR EXPERIMENTACION

Cuando la obtención de un modelo matemático suficientemente exacto es imposible de obtener, bajo ciertas condiciones es posible conservar un proceso de control en su óptimo estático por experimentación del sistema en tiempo real.

Algunos esquemas de búsqueda de la cima (o cima) de  $h$  han sido propuestos y son conocidos como "técnicas de ascenso a la colina". Si estos son suficientemente sofisticados - buscarán el camino más directo para llegar a la cima (o si ma) de la superficie de funcionamiento multidimensional  $h$ , los mismos que son conocidos como métodos de la gradiente o métodos del ascenso (o descenso) más pronunciado.

De la ecuación (3.9), dividiendo cada término para  $dt$ , se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial h}{\partial X_i^v} \cdot \frac{dX_i^0}{dt}$$



que puede ser expresado como el siguiente producto escalar

$$\dot{h} = (\dot{\vec{X}}^0)^T \text{ grad } h \quad (3.11)$$

La velocidad de cambio de  $h$  será la mayor posible cuando  $\dot{\vec{X}}^0$  y  $\text{grad } h$  sean paralelos.

Un sistema de control de búsqueda del óptimo del tipo experimental, generalmente debe hacer uso de entradas especiales de prueba (entradas de perturbación) inyectadas al sistema como se ve en la figura 3.4

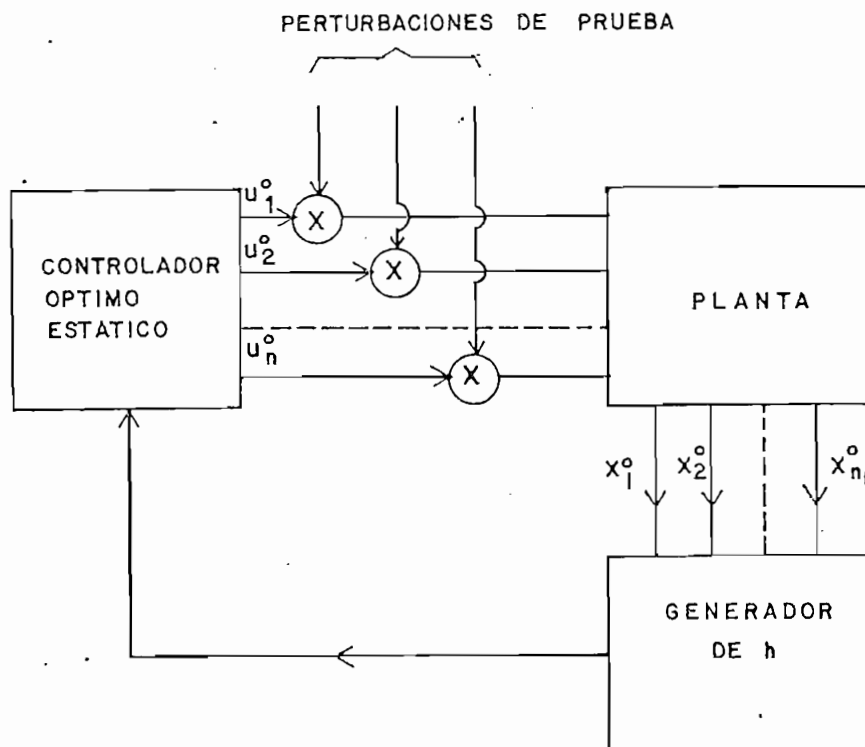


Fig. 3.4

El controlador óptimo estático deberá ser capaz de buscar la dirección más apropiada que haga que  $\dot{h}$  de la ecuación - (3.11) sea máxima.

### 3.3. OPTIMIZACION DINAMICA. EL PRINCIPIO DEL MAXIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO REALIMENTADO Y DEDUCCION DE LA LEY DE CONTROL OPTIMO.

Los tres tópicos que se presentan a continuación tienen como objetivo dar una visión más clara acerca de los alcances del control óptimo, en su exposición se evitarán las formalidades matemáticas para centrarse en la descripción de algunos aspectos que se consideran básicos en la teoría de control óptimo.

#### OPTIMIZACION DINAMICA.

A diferencia de la optimización estática en la cual fue suficiente optimizar la función:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^0 = f_0(\vec{X}^0, \vec{u}^0)$$

en el caso de la optimización dinámica es necesario extremizar (optimizar) la función

$$I = \int_0^{t_1} f_0(\vec{X}, \vec{u}) dt$$

Se presenta a continuación un ejemplo para clarificar el

tratamiento ha hacerse en este tipo de optimización.

### Ejemplo 3.2

En base al esquema general de planteamiento de un problema de control óptimo, puntualizado en el subcapítulo anterior, se procede a definir el problema siguiente. Sea un sistema mecánico simple sin rozamiento (como se muestra en la figura 3.5) cuya ecuación dinámica esta dada por:

$$m\ddot{X} = u$$

donde  $m$  representa la masa del bloque a desplazarse,  $X$  el desplazamiento y  $u$  la fuerza aplicada,

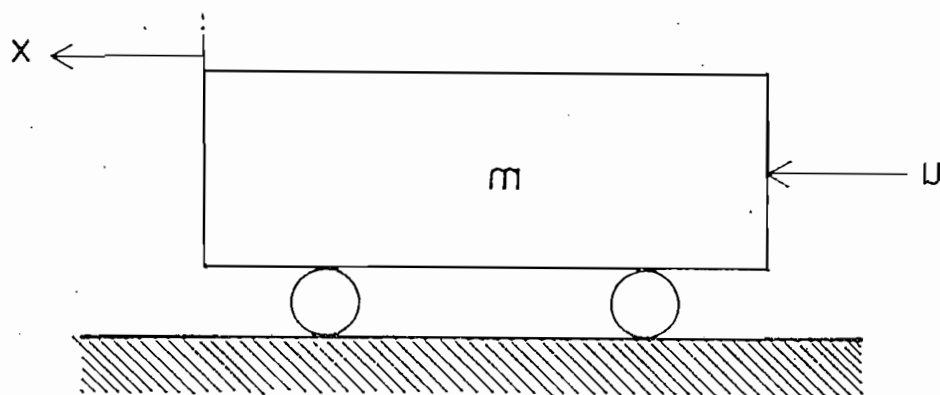


Fig. 3.5

se tiene:

a) El modelo matemático del sistema está dado por

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

con

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad X = X_1; \quad X = X_2 \quad \text{y} \quad m=1$$

b) El sistema está inicialmente en equilibrio, es decir -  $X_1(0)=h$  y  $X_2(0)=0$ , y se busca llegar a un  $X_1(t_1)=0$  y -  $X_2(t_1)=0$

c) Se escoge como índice de funcionamiento el tiempo  $t_1$ , por lo tanto

$$I = \int_0^{t_1} f_0(\vec{X}, \vec{u}) dt = \int_0^{t_1} dt = t_1$$

se llega al estado  $\vec{X}(t_1)$  en el mínimo tiempo posible -  $(t_1)$ . La función  $f_0(\vec{X}, \vec{u})=1$  para el presente ejemplo que constituye un problema de optimización de tiempo.

d) No existen restricciones para  $\vec{X}$  pero la entrada  $u$  debe cumplir la siguiente condición

$$|u| \leq 1$$

e) Se busca encontrar  $u^0(t)$  para  $0 \leq t \leq t_1$  para la cual  $t_1$  es mínimo.

Antes de continuar con el tratamiento matemático de este ejemplo se ponen en consideración el principio del máximo de Pontryagin (enunciado con más detalle al tratar específicamente la ley de control óptimo), que da una condición necesaria, condición que debe ser satisfecha por un control óptimo. Es así que en aquellos casos en los cuales cierta entrada a la planta es escogida como óptima, esta debe ser confirmada aplicando el principio de Pontryagin siendo este una búsqueda local de la trayectoria óptima constituyéndose por lo tanto una condición necesaria pero no suficiente.

Este principio aplicado a un sistema de segundo orden se lo describe a continuación.

Primeramente hay que unir las ecuaciones dinámicas y la de costo, así

$$\frac{dX_0}{dt} = f_0(\vec{X}, \vec{u})$$

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(\vec{X}, \vec{u})$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(\vec{X}, \vec{u})$$

Entonces, sea un vector  $\vec{\psi}$  tridimensional; este vector se define mediante las siguientes relaciones

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f_0}{\partial X_0} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial X_0} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial X_0}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f_0}{\partial X_1} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial X_1} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \quad (3.12)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f_0}{\partial X_2} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial X_2} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial X_2}$$

Se define el producto escalar (o Hamiltoniano)

$$H = f_0\psi_0 + f_1\psi_1 + f_2\psi_2$$

Estando la entrada (o control)  $\vec{u}$  involucrada en la parte de recha de la ecuación anterior, H depende de  $\vec{u}$  así

$$H = H(\vec{u})$$

Cuando  $u$  es óptimo entonces  $\vec{u} = \vec{u}^0$  y  $H(\vec{u})$  toma el vector máximo (o supremo) y mas aún ese máximo valor es cero.

$$H(\vec{u}^0) = \max_{\vec{u} \in \mathcal{U}} H(\vec{u}) = 0$$

donde  $\mathcal{U}$  es aquella región del espacio  $n$ -dimensional dentro de la cual puede  $\vec{u}$  encontrarse (debido a las restricciones propias de  $\vec{u}$ )

Este es el principio del máximo el cual da una condición necesaria para que  $\vec{u}^0$  sea óptimo.

No hay condición de borde para el vector  $\vec{\psi}$ , ya que la ecuación (3.12) es homogénea se puede escoger constantes arbitrarias de proporcionalidad para ellas.

Siendo  $X_0$  el índice de funcionamiento (I) este no aparece a la derecha de  $f_0$ ,  $f_1$ , y  $f_2$ , y por consiguiente de la ecuación (3.12)

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0$$

Se puede escoger un valor constante para  $\psi_0$ . Se verá más



adelante que el principio de máximo requiere que  $\psi_0$  sea negativo (si se escoge  $\psi_0$  positivo el principio se llamaría principio del mínimo).

Regresando al ejemplo 3.2 y aplicando los conceptos arriba vertidos se continua con el tratamiento matemático del mismo.

Siendo  $t_0 = 1$ ;  $f_1 = X_2$ ;  $f_2 = u$  y  $\psi_0 = -1$  y usando la e-cuación (3.12)

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0 \quad \psi_1 = \text{cte} = C_1$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 = -C_1$$

y 
$$\psi_2 = C_2 - t C_1$$

entonces

$$\begin{aligned} H &= f_0\psi_0 + f_1\psi_1 + f_2\psi_2 \\ &= -1 + X_2C_1 + u(C_2 - tC_1) \end{aligned}$$

De acuerdo al principio del máximo H debe ser maximizado - respecto a u, por lo tanto para  $|u| \leq 1$ , intuitivamente se su

pone que el control óptimo será golpe a golpe

$$u = u^0 = \text{sgn} (C_2 - tC_1)$$

y  $\psi_2 = C_2 - tC_1$  actuará como una función de conmutación.

Como el principio de Pontryagin expresa que  $\max H = 0$ , considerando la condición inicial  $X_2(0) = 0$

$$\begin{aligned} H &= -1 + C_1 X_2 \Big|_{t=0} + u(C_2 - tC_1) \Big|_{t=0} \\ &= -1 + C_2 u \end{aligned}$$

tomando  $h = 4$ , la condición inicial de  $X_1$  será  $X_1(0) = 4$

Siendo  $u(0) = -1$ , tal que  $X_1$  se dirija hacia 0 (cero),  $C_2$  deberá ser  $C_2 = -1$  para obtener  $H = 0$ . Quedando  $\psi_2$

$$\psi_2 = -1 - tC_1$$

y esta cambia de signo solamente si  $C_1$  es negativa. Cuando  $t = t_s$  se considera que se realiza la conmutación de  $u$ , entonces

$$\psi_2 = -1 - C_1 t_s$$

y

$$C_1 = -\frac{1}{ts}$$

escogiendo  $ts = 2$  seg.

$$H = -1 - \frac{1}{2}X_2 + \left(-1 + \frac{1}{2}t\right)u = 0$$

para  $0 \leq t \leq 2$  seg. se tiene

$$u = \operatorname{sgn} \left(-1 + \frac{1}{2}t\right) = -1$$

siendo

$$\frac{d}{dt}X_1 = X_2$$

y

$$\frac{dX_2}{dt} = u$$

se tiene

$$X_2 = -t + k = -t$$

$$X_1 = -\frac{t^2}{2} + k = -\frac{t^2}{2} + 4$$

como se muestra en la figura 3.6

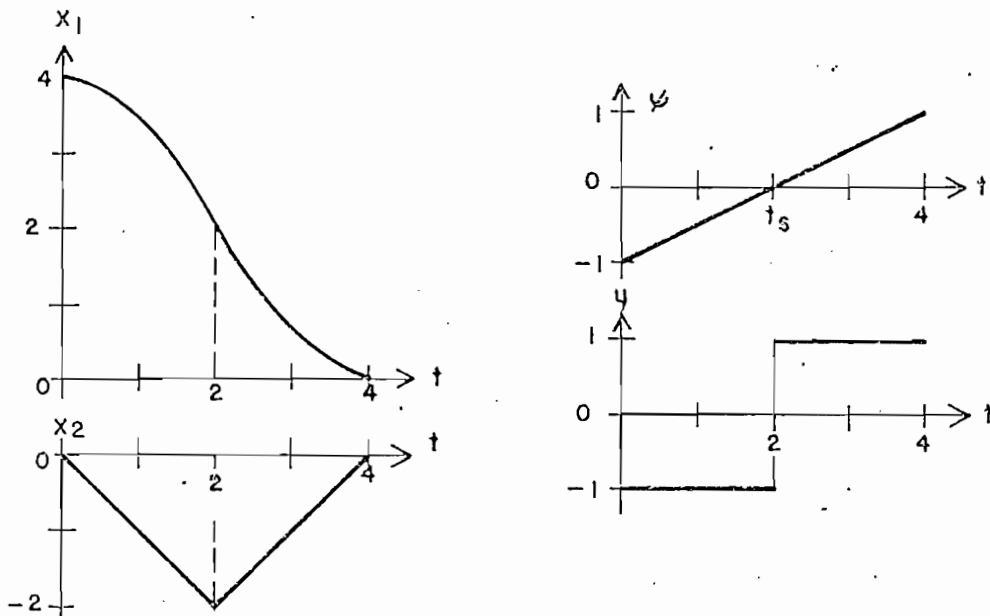


Fig. 3.6

para  $t > 2$  seg se cumple que

$$u = \operatorname{sgn}(-1 + \frac{1}{2}t) = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(t-4)^2$$

$$x_2 = t-4$$

Por lo tanto este problema podía ser resuelto mediante un control de conmutación.

El ejemplo anterior mostró que su solución necesitó resolver dos ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden, esto es:

$$\frac{d\vec{X}\vec{\Psi}_1}{dt} = \vec{f}_1(\vec{X}, \vec{u}) \quad (3.13)$$

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = -\underline{M}'_j \vec{\Psi} \quad (3.14)$$

donde

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} ; \quad \vec{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

y  $\underline{M}'_j$  es el Jacobiano (definido más adelante).

Siendo  $\vec{u}$  fijado para la condición del máximo, las dos ecuaciones diferenciales vectoriales pueden ser resueltas si sus constantes son conocidas a partir de las condiciones de borde.

En el ejemplo anterior se contaba con las siguientes condiciones de borde:  $\vec{X}(0)$ ,  $\vec{X}(t_1)$ ,  $X_0(0)$  y  $\psi_0$ ; pero estas seis condiciones no son suficientes debido al desconocimiento de  $t_1$ , por lo cual se usó una condición adicional esto es

$$\max H = 0 \quad \text{a } t=0 \quad \text{o } t=t_1$$

Cabe anotar que no todo problema de ingeniería posee un control óptimo en cuyo caso se dice que el sistema es degenerado.

Como se ha podido observar en lo desarrollado en esta primera parte del subcapítulo presente; al considerar la optimización dinámica, el tratamiento matemático difiere del caso estático. Un problema general de optimización deberá tener como índice de funcionamiento una ecuación como la siguiente.

$$I = f_{0,1}(\vec{X}, \vec{u}) + \int_0^{t_1} f_{0,2}(\vec{X}, \vec{u}) dt$$

#### PRINCIPIO DEL MAXIMO

La ley de control óptimo se basa en la aplicación del principio del máximo de Pontryagin las dos ecuaciones diferenciales vectoriales (3.13) y (3.14) permitieron encontrar un control óptimo para el ejemplo 3.2, al final de este subcapítulo se formularán estas ecuaciones de una manera más formal.

Sea un sistema de control de  $n_1$ -ésimo orden, especificada la función de costo, dados los  $(n_1+1)$  estados, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}_1 = \vec{f}_1(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.15)$$

donde

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n_1} \end{bmatrix}$$

o

$$\frac{dX_i}{dt} = f_{1i}(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.16)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n_1$  donde la variable  $X_0$  es el índice de funcionamiento  $I$

$$X_0 = I = \int_0^{t_1} f_0(\vec{X}, \vec{u})$$

y las demás variables  $X_i$ ;  $i=1, 2, \dots, n_1$  son elementos del vector de estado  $\vec{X}$  del sistema y  $\vec{u}$  es un vector  $n$ -dimensional que puede estar sujeto a alguna restricción  $\vec{u}$

El problema es encontrar un  $\vec{u}^0$  que mueva al estado del sis

tema desde  $\vec{X}(0)$  a  $\vec{X}(t_1)$  en un tiempo  $t_1$  minimizando el índice de funcionamiento  $I$ .

Introduciendo para la formulación del principio de máximo un vector  $\vec{\Psi}$   $(n_1+1)$ -dimensional que se define como:

$$\frac{d}{dt} \vec{\Psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} & \frac{\partial f_1}{\partial X_0} & \dots & \frac{\partial f_{n_1}}{\partial X_0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial X_{n_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{n_1}} & \dots & \frac{\partial f_{n_1}}{\partial X_{n_1}} \end{bmatrix} \vec{\Psi} \quad (3.17)$$

combinando la ecuación anterior con la ecuación (3.15) en una función escalar mediante el Hamiltoniano  $H$ .

$$\begin{aligned} H &= \vec{\Psi}' \dot{\vec{f}}_1 = \\ &= \vec{\Psi}' \frac{d}{dt} \vec{X}_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n_1} \psi_i f_{1i}(\vec{X}, \vec{u}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde el Hamiltoniano hace la consideración de la restricción  $\vec{u} \in \mathcal{U}$ .



El máximo valor de la función con respecto a  $\vec{u}$  puede ser demostrada por

$$M(\vec{\psi}, \vec{X}1) = \sup_{\vec{u} \in \mathcal{U}} H(\vec{\psi}, \vec{X}1, \vec{u})$$

El enunciado de principio de máximo reza como sigue: El vector  $\vec{u}$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , es un control admisible que mueve el estado del sistema desde un estado inicial  $\vec{X}(0)$  a un estado final preestablecido  $X(t_1)$  en un tiempo  $t_1$ . Para que  $\vec{u}^0(t)$  y la trayectoria resultante  $\vec{X}1^0$  sean óptimos en el espacio  $(n_1+1)$ -dimensional es necesario que exista un vector  $\vec{\psi}^0(0)$  que corresponda a  $\vec{u}^0$  y  $\vec{X}1^0$  tal que para  $t$  definido,  $0 \leq t \leq t_1$ , se cumpla:

1.- La función  $H(\vec{u})$  logra su máximo para  $\vec{u} = \vec{u}^0$

$$H(\vec{\psi}^0(t), \vec{X}1(t), \vec{u}^0(t)) = M(\vec{\psi}^0(t), \vec{X}1^0(t))$$

2.- El valor final de  $M$  es cero, mientras el valor final de  $\psi_0$  no es positivo. Por lo tanto

$$M(\vec{\psi}^0(t), \vec{X}1^0(t)) = 0$$

Siendo la ecuación (3.17) homogénea se puede asignar un valor arbitrario a  $\psi_0$ ; si  $\psi_0 = -1$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , se puede reescribir

las ecuaciones para  $\vec{X}_1$  y  $\vec{\Psi}$  en términos del Hamiltoniano  $H$ , de las ecuaciones (3.16) y (3.17) se tiene

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}$$

para  $i=0,1,\dots,n_1$

Sea la ecuación del sistema a ser controlado

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \underline{A}\vec{X} + \underline{B}\vec{u}$$

y por definición de gradiente

$$\text{grad } f_0(\vec{X}, \vec{u}) = \frac{\partial f_0(\vec{X}, \vec{u})}{\partial \vec{X}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial X_{n_1}} \end{bmatrix}$$

usando esta notación las últimas  $n_1$  ecuaciones escalares de (3.17) pueden ser reemplazadas por

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = \frac{\partial t_0}{\partial \vec{x}} - \underline{A}' \vec{\psi}$$

donde

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{n_1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

El primer elemento del vector original  $\vec{\psi}$ , es  $\psi_0 = -1$ . El Hamiltoniano de este sistema será:

$$H = -f_0(\vec{X}, \vec{u}) + \vec{\psi}' [\underline{A}\vec{X} + \underline{B}\vec{u}] \quad (3.20)$$

a ser maximizado.

Introduciendo un vector variacional  $\delta \vec{X}_1(t)$  que representa una desviación a la trayectoria óptima se puede llegar a demostrar que el valor máximo de  $H$  es cero.

A continuación, en la última parte de este subcapítulo se hace una breve descripción de lo que constituye un control lineal óptimo realimentado particularizando el índice de funcionamiento a uno cuadrático.

## CONTROL LINEAL OPTIMO REALIMENTADO Y DEDUCCION DE LA LEY DE CONTROL OPTIMO.

En esta parte se presenta el caso de un control automático de realimentación utilizando un control óptimo y aplicando un índice de funcionamiento cuadrático.

A continuación se describe una ley de control lineal de realimentación para el control lineal de un objeto cuando el fin de la trayectoria no está especificada, constituyendo la planta a ser controlada un sistema de la forma

$$\dot{X} = aX + bu$$

y adicionalmente considerando que  $u^2$  está involucrada en el índice de funcionamiento sin restricciones ( $u \in \mathbb{R}$ )

En vista de que se hará uso de las condiciones de transversalidad, seguidamente se hace una breve descripción de la misma.

### CONDICION DE TRANSVERSALIDAD

El vector columna  $n_1$ -dimensional

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t_1) \\ \vdots \\ \psi_{n_1}(t_1) \end{bmatrix}$$

debe ser ortogonal al plano (o línea) la cual es tangente a la trayectoria en el espacio  $n_1$ -dimensional. La condición de transversalidad suple la ausencia de las condiciones de borde si es necesario.

Regresando al tema que se está considerando, se asume una forma cuadrática para el índice de funcionamiento

$$I = \int_0^T (\omega X^2 + u^2) dt$$

donde  $\omega$  es el factor de peso ( $\omega \geq 0$ ) y  $T$  es el tiempo final.

El sistema ya controlado tenderá la forma mostrada en la figura 3.7 sea  $\psi_0 = -1$ ;  $f_0 = X^2 + u^2$ . De la ecuación (3.20) se tiene

$$H = -\omega X^2 - u^2 + (aX + bu)\psi$$

donde  $\psi$  debe satisfacer la ecuación diferencial

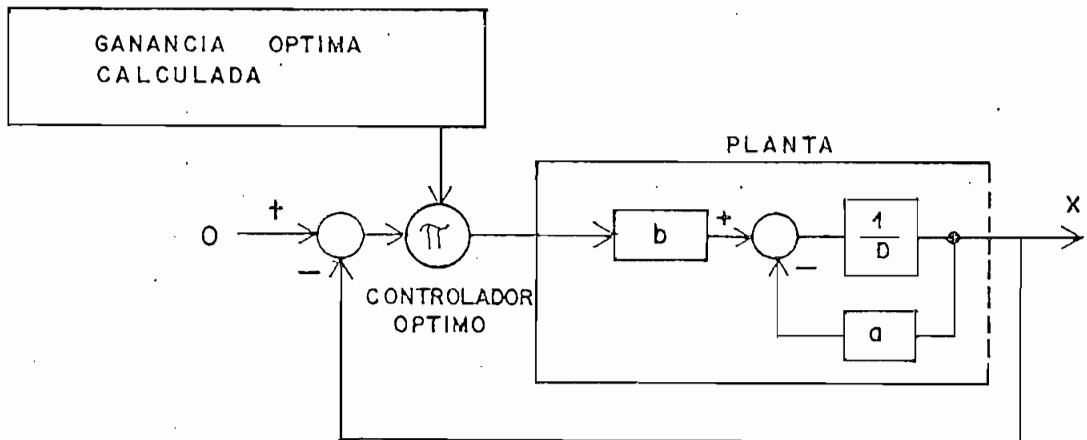


Fig. 3.7

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial X} - a\psi = 2\omega X - a\psi$$

para el caso analizado (sistema de primer orden)  $X$  y  $\psi$  son escalares.

Por la condición de máximo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

encontrando el control  $u$  óptimo (que maximiza  $H$ )

$$u = \frac{1}{2}b\psi$$

de donde se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b^2 \\ 2\omega & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \psi \end{bmatrix}$$

Usando la transformada de Laplace se encuentra la solución

$$\underline{S}(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} S-a & -\frac{1}{2}b^2 \\ -2\omega & S+a \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\underline{S}(t) = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$S_{11}(t) = \frac{P+a}{2p} e^{Pt} + \frac{(P-a)}{2p} e^{-Pt}$$

$$S_{12}(t) = \frac{b^2}{4p} (e^{Pt} - e^{-Pt})$$

$$S_{21}(t) = \frac{\omega}{p} (e^{Pt} - e^{-Pt})$$

$$S_{22}(t) = \left(\frac{P-a}{2p}\right) e^{Pt} + \left(\frac{P+a}{2p}\right) e^{-Pt}$$

donde

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 \omega}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} = \underline{S}(t) \begin{bmatrix} X(0) \\ \psi(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ \psi(T) \end{bmatrix} = \underline{S}(T) \begin{bmatrix} X(0) \\ \psi(0) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{S}(T)\underline{S}^{-1}(t) \begin{bmatrix} X(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{S}(T-t) \begin{bmatrix} X(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}$$

por la condición de transversalidad  $\psi(T)=0$ , y

$$S_{21}(T-t) \cdot X(t) + S_{22}(T-t)\psi(t) = 0.$$

$$\circ \quad \frac{1}{2}\psi(t) = -h(t) \cdot X(t)$$

donde

$$h(t) = \frac{1}{2} \times \frac{S_{21}(T-t)}{S_{22}(T-t)}$$



$$y \quad u = -bh(t)X(t) = -g(t)X(t)$$

$$\text{con} \quad g(t) = bh(t)$$

$$= \omega b_* \frac{P(T-t) - P(T-t)}{(P-a) P(T-t) + (P+a) - P(T-t)} \quad (3.21)$$

donde la ecuación (3.21) es la solución de la ecuación

$$\frac{dg}{dt} = -2ag + bg^2 - \omega b \quad (3.22)$$

que puede ser fácilmente deducida de las expresiones anteriores, esta ecuación (3.22) se conoce como ecuación de Riccati, y puede ser implementada en el sistema (ver figura 3.8).

Reemplazando  $bh$  por  $g$  se puede hallar la ecuación de Riccati en  $h$ .

La ecuación diferencial de Riccati debe ser inicializada - por  $g(0)$  (o  $h(0)$ ) al tiempo  $t=0$ , usando la condición de transversalidad  $h(T) = 0$

La ganancia óptima  $g$  llega a ser constante si  $T \rightarrow \infty$ , ( $g_s$ )

$$bg_s^2 - 2ag_s - \omega b = 0$$

donde

$$g_s = \frac{P+a}{b} = \frac{\omega b}{P-a}$$

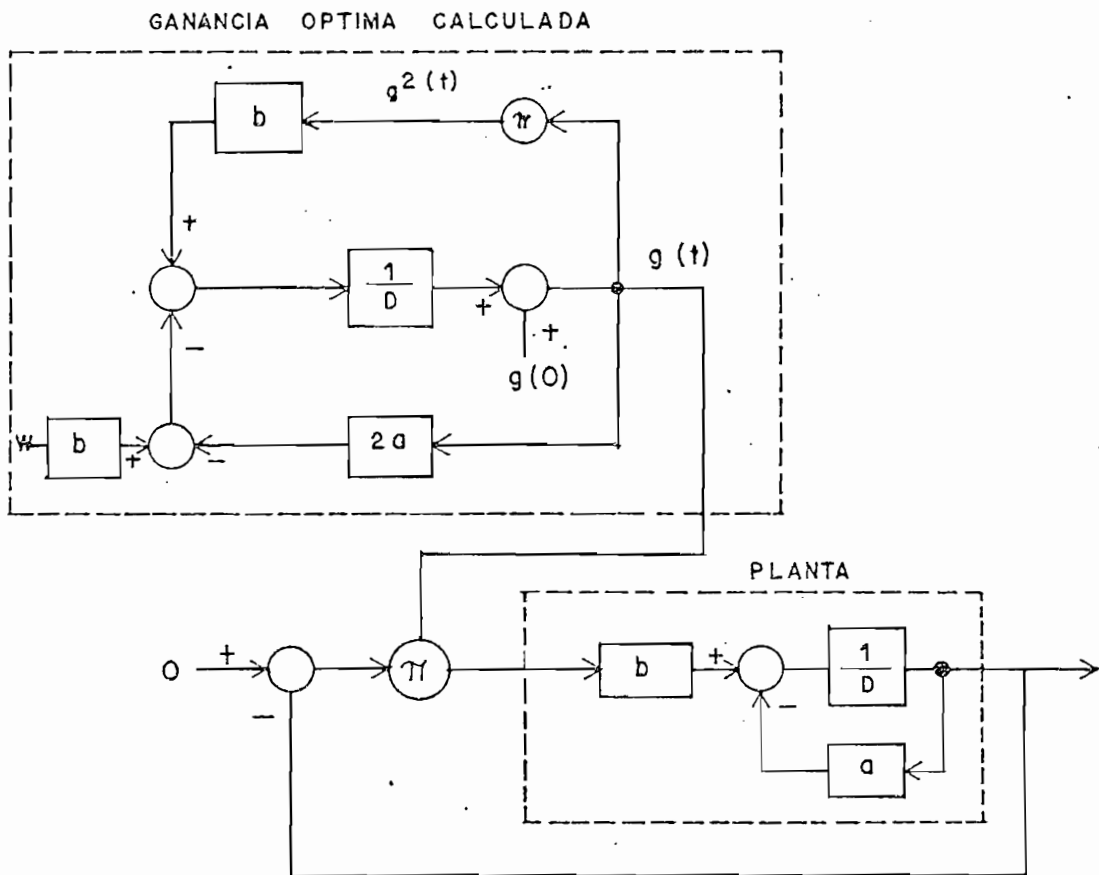


Fig. 3.8

El desarrollo anterior permite hacer a continuación una generalización de la solución de realimentación para control óptimo con una planta de  $n_1$ -ésimo orden

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \underline{A}\vec{X} + \underline{B}\vec{u}$$

Redefiniendo el índice de funcionamiento como la siguiente forma cuadrática

$$I = \int_0^T (\vec{X}' \underline{F}_X \vec{X} + \vec{u}' \underline{F}_u \vec{u}) dt$$

donde  $\underline{F}_X$  es una matriz simétrica ( $n_1 \times n_1$ ) definida no negativamente y  $\underline{F}_u$  una matriz simétrica ( $n \times n$ ) definida positivamente cuando  $u$  es un  $n$ -vector.

Del desarrollo anterior se puede escribir que

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{X}} = \vec{\psi} - \underline{H}(t)\vec{X}(t) \quad (3.23)$$

que se obtiene de

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{X}}(t) \\ \dot{\vec{\psi}}(t) \end{bmatrix} = \underline{S}(T-t) \begin{bmatrix} \vec{X}(t) \\ \vec{\psi}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}(T-t) & \underline{S}_{12}(T-t) \\ \underline{S}_{21}(T-t) & \underline{S}_{22}(T-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}(t) \\ \vec{\psi}(t) \end{bmatrix}$$

y

$$\vec{\psi}(T) = \vec{0}$$

siendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\psi}(t) &= -\frac{1}{2}\underline{S}_{22}^{-1}(T-t)\underline{S}_{21}(T-t)\vec{X}(t) \\ &= -\underline{H}(t)\vec{X}(t) \end{aligned}$$

Obteniéndose la ley de control óptimo para el sistema

$$\vec{u}^0(t) = -\underline{G}(t)\vec{X}(t) \quad (3.24)$$

$$\underline{G}(t) = \underline{F}\underline{u}^{-1}\underline{B}'\underline{H}(t) \quad (3.25)$$

y  $\underline{H}(t)$  debe satisfacer la ecuación diferencial de Riccati del tipo

$$\frac{d\underline{H}(t)}{dt} = -\underline{A}'\underline{H} - \underline{H}\underline{A} + \underline{H}\underline{B}\underline{F}\underline{u}^{-1}\underline{B}'\underline{H} - \underline{F}\underline{x} \quad (3.26)$$

esta ecuación es inicializada por  $\underline{H}(T) = \underline{0}$

Las condiciones de control óptimo dadas por las ecuaciones (3.23), (3.24), (3.25) y (3.26) deben ser modificadas si un  $\vec{y}$  vector de salida  $\vec{y}$  incluye un acoplamiento directo entrada a salida ( $\underline{D}\vec{u}$ ),

$$\vec{y} = \underline{C}\vec{X} + \underline{D}\vec{u}$$

y el índice de funcionamiento es especificado en términos de la salida

$$I = \int_0^T (\vec{y}' \underline{F}_y \vec{y} + \vec{u}' \underline{F}_u \vec{u}) dt$$

donde  $\underline{F}_y$  es una matriz positiva semidefinidamente.

$$\begin{aligned} f_0(\vec{X}, \vec{u}) &= \vec{y}' \underline{F}_y \vec{y} + \vec{u}' \underline{F}_u \vec{u} \\ &= (\vec{X}' \underline{C}' + \vec{u}' \underline{D}') \underline{F}_y (\underline{C}\vec{X} + \underline{D}\vec{u}) + \vec{u}' \underline{F}_u \vec{u} \\ &= \vec{X}' (\underline{C}' \underline{F}_y \underline{C}) \vec{X} + (\vec{X}' \underline{C}' \underline{F}_y \underline{D} + \vec{u}' \underline{D}' \underline{F}_y \underline{C}) \vec{X} \\ &\quad + \vec{u}' (\underline{D}' \underline{F}_y \underline{D} + \underline{F}_u) \vec{u} \end{aligned}$$

definiendo

$$\underline{F_x} = \underline{C}' \underline{F_y} \underline{C}$$

$$\underline{F_c} = \underline{D}' \underline{F_y} \underline{C}$$

$$\underline{F_0} = \underline{D}' \underline{F_y} \underline{D} + \underline{F_u}$$

se llega a que la ley de control óptimo para este sistema está dada por

$$\vec{u}^0(t) = -\underline{G}(t) \vec{X}(t)$$

$$\underline{G}(t) = \underline{F_0}^{-1} (\underline{B}' \underline{H}(t) + \underline{F_c})$$

donde  $\underline{H}(t)$  debe satisfacer la ecuación de Riccati siguiente

$$\frac{d}{dt} \underline{H} = -\underline{A}' \underline{H} - \underline{H} \underline{A} + \underline{H} \underline{B} \underline{F_0}^{-1} \underline{B}' \underline{H} +$$

$$+ (-\underline{F_x}) + (\underline{H} \underline{B} \underline{F_0}^{-1} \underline{F_c} + \underline{F_c}' \underline{F_0}^{-1} \underline{B}' \underline{H}) +$$

$$+ \underline{F_c}' \underline{F_0}^{-1} \underline{F_c}$$

ecuación inicializada con  $\underline{H}(T) = \underline{0}$

## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 Resultados.

4.2 Conclusiones.

4.3 Metodologia de uso de los programas.

#### 4.1 RESULTADOS.

A continuación se presentan algunos ejemplos que muestran la bondad de los programas desarrollados.



ANALISIS DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES EN EL ESPACIO DE ESTADO,  
TESIS DE GRADO DE JULIO C. PROANO R. -- 1982

=====

NOMBRE DEL PROBLEMA: EJEMPLO 1 -- V.PROP. REALES

EL SISTEMA TIENE

2 ESTADOS
1 ENTRADAS
1 SALIDAS

-----

MATRIZ A

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.00000	2	1.00000

FILA 2

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	-2.00000	2	-3.00000

MATRIZ B

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR
1	2.00000

FILA 2

-----

COL	VALOR
1	0.00000

MATRIZ C

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	2.00000	2	1.00000

MATRIZ D

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR
1	0.00000

MATRIZ J

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	-2.00000	2	0.00000

FILA 2

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
-----	-------	-----	-------

MATRIZ T

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.44721	2	0.70711

FILA 2

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	-0.89443	2	-0.70711

MATRIZ T-INV

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	-2.23607	2	-2.23607

FILA 2

-----

COL	VALOR	COL	VALOR
1	2.82843	2	1.41421

EL NUMERO DE BLOQUES ES : 2

EL BLOQUE 1 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES : -2

EL BLOQUE 2 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES : -1

EL NUMERO DE COLUMNAS DEL elemento DE LA MATRIZ  $e^{Jt}$  ES : 1

EL NUMERO DE VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ J ES : 2

EL VECTOR DE VALORES PROPIOS (PARTE REAL) ES

-2	-1
----	----

EL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES

0	1
---	---

LA MATRIZ  $e^{At}$  ES :

FILA 1

$e^{At}(1,1)=$

$$\begin{aligned} & (-1.00 )e^{-2.00t} + \\ & (+2.00 )e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

$e^{At}(1,2)=$

$$\begin{aligned} & (-1.00 )e^{-2.00t} + \\ & (+1.00 )e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

FILA 2

$e^{At}(2,1)=$

$$\begin{aligned} & (+2.00 )e^{-2.00t} + \\ & (-2.00 )e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

$e^{At}(2,2)=$

$$\begin{aligned} & (+2.00 )e^{-2.00t} + \\ & (-1.00 )e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

EL VECTOR  $X(t)$  ES :

FILA 1

$X(t)(1)=$

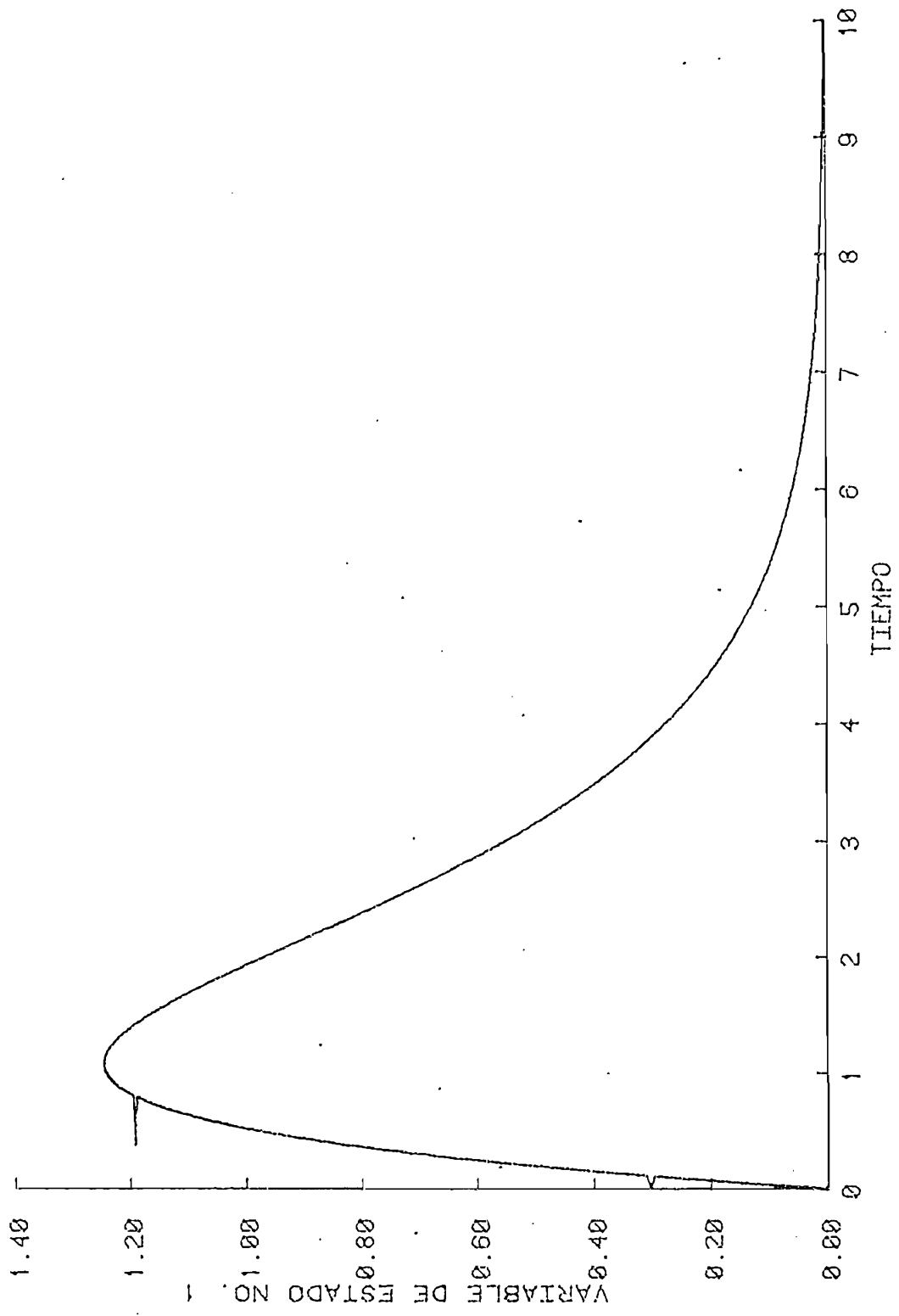
$$\begin{aligned} & (-1.00) e^{-2.00t} + \\ & (+1.00) e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

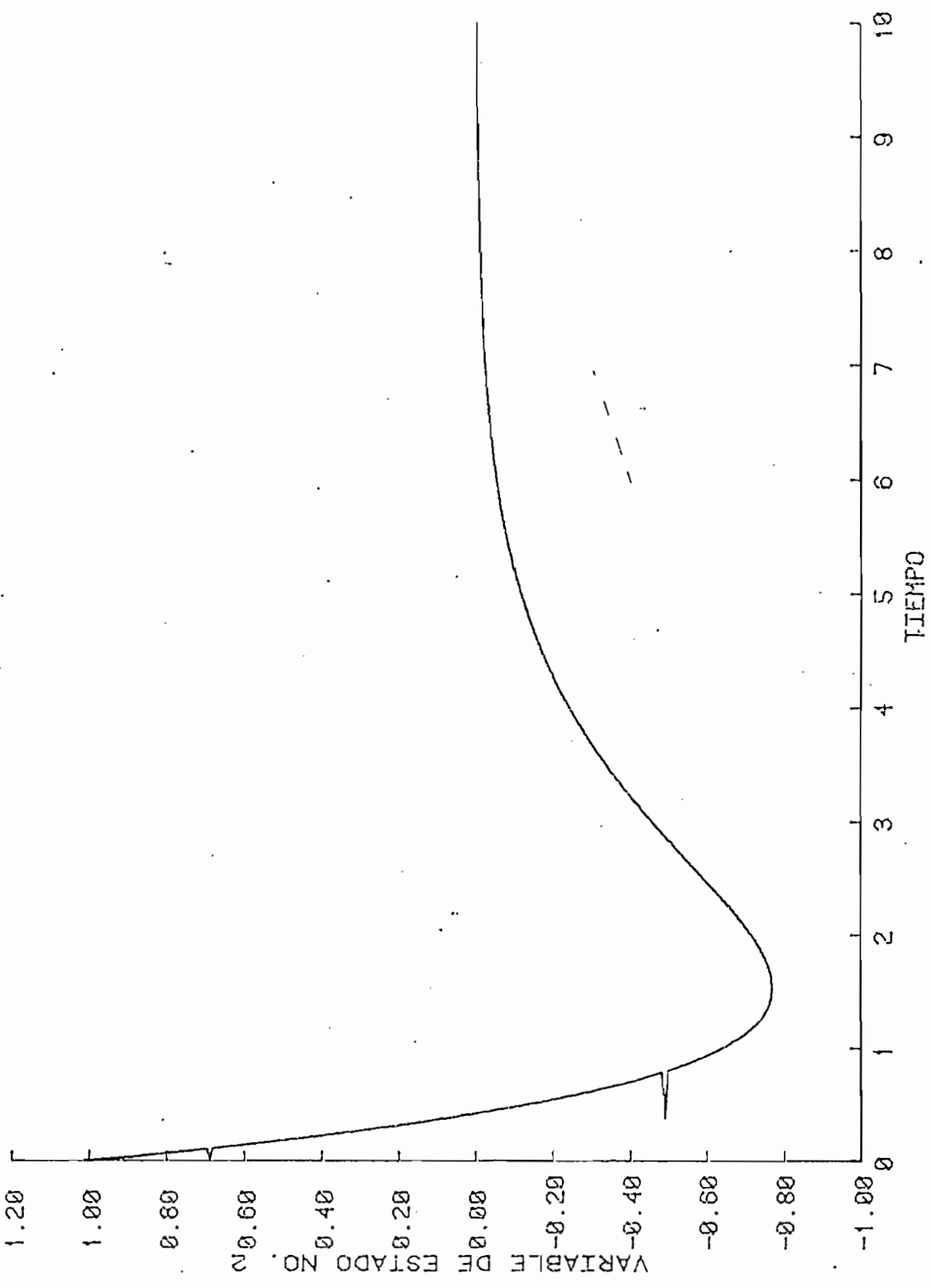
FILA 2

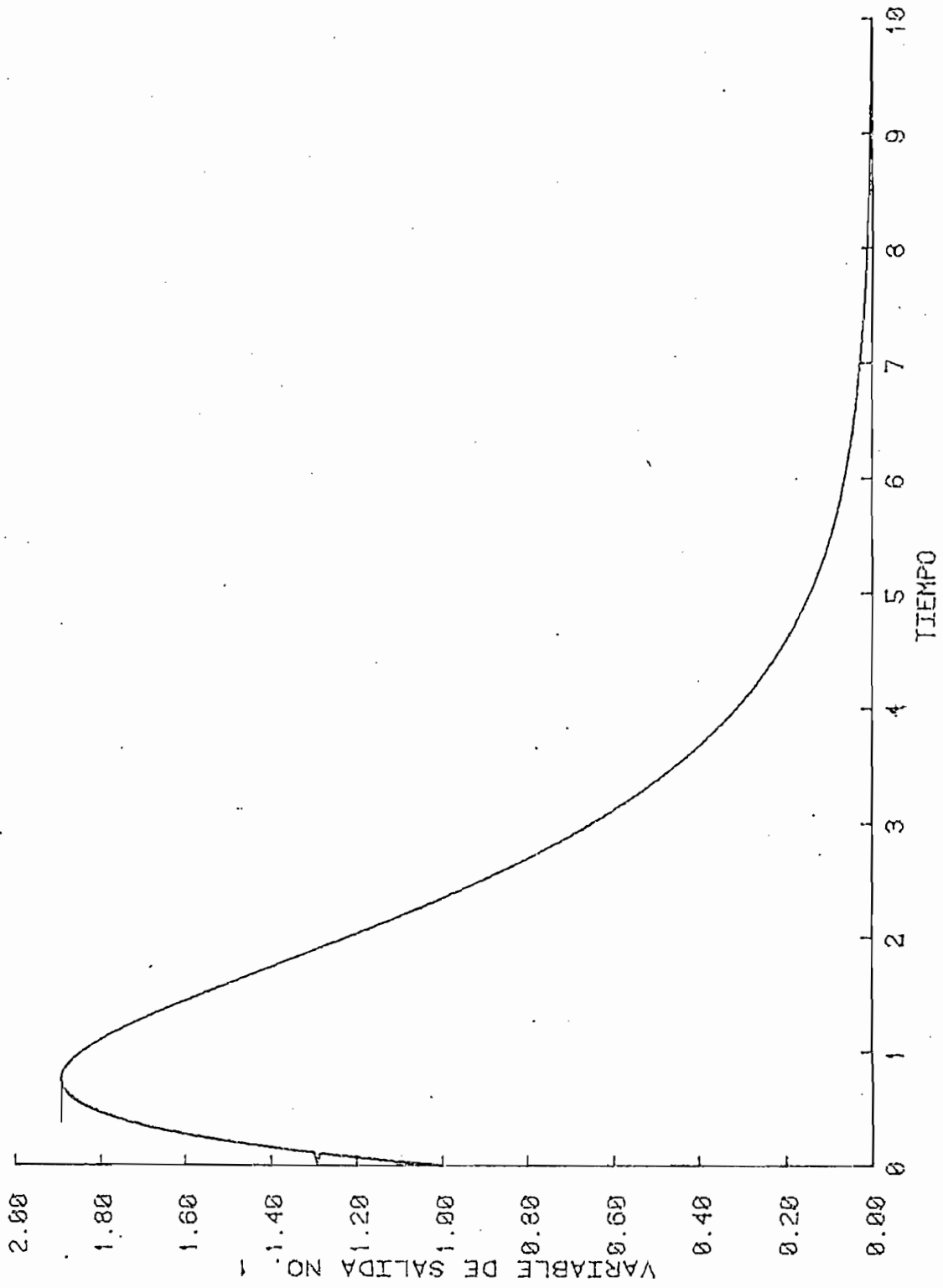
$X(t)(2)=$

$$\begin{aligned} & (+2.00) e^{-2.00t} + \\ & (-1.00) e^{-1.00t} + \end{aligned}$$

A CONTINUACION SE HAN CALCULADO LOS VALORES DE LOS ESTADOS Y LAS SALIDAS PARA  $t$  DESDE 0 HASTA 10 ~~seg~~ UTILIZANDO EL METODO DE LA MATRIZ DE TRANSICION A FIN DE TENER LA MAYOR PRECISION POSIBLE. SE PRESENTAN LOS GRAFICOS CORRESPONDIENTES.







ANALISIS DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES EN EL ESPACIO DE ESTADO,  
TESIS DE GRADO DE JULIO C. FRANCO R. -- 1982

=====

NOMBRE DEL PROBLEMA: EJEMPLO 2 -- V. PROP. COMPLEJOS

EL SISTEMA TIENE

6 ESTADOS  
1 ENTRADAS  
6 SALIDAS

-----

MATRIZ A

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	-1.1111	2	0.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	-0.1667	6	-1.1111				

FILA 2

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	125.0000	2	-25.0000	3	0.0000	4	-125.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 3

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	1.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 4

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.3800	3	0.0000	4	-0.1667
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 5

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	-2.0000	3	1.5625	4	0.0000
5	-1.5625	6	0.0000				

FILA 6

-----

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	0.1250	6	0.0000				

MATRIZ B

=====

FILA 1

-----

COL	VALOR
1	0.1667

FILA 2

-----

COL	VALOR
1	-3.7500

FILA 3

-----



1 0.0000

FILA 4

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 5

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 6

COL VALOR  
1 -0.1250

MATRIZ C

FILA 1

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	1.0000	2	0.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 2

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	1.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 3

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.0000	3	1.0000	4	0.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 4

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.0000	3	0.0000	4	1.0000
5	0.0000	6	0.0000				

FILA 5

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	1.0000	6	0.0000				

FILA 6

COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR	COL	VALOR
1	0.0000	2	0.0000	3	0.0000	4	0.0000
5	0.0000	6	1.0000				

MATRIZ D

FILA 1

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 2

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 3

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 4

COL VALOR  
1 0.0000

FILA 5

-----  
COL VALOR  
1 0.0000  
FILAS 6

-----  
COL VALOR  
1 0.0000

MATRIZ J

=====

FILA 1

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 -22.8124 0.0000 2 0.0000 0.0000  
3 0.0000 0.0000 4 0.0000 0.0000  
5 0.0000 0.0000 6 0.0000 0.0000

FILA 2

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 0.0000 0.0000 2 -3.6125 0.0000  
3 0.0000 0.0000 4 0.0000 0.0000  
5 0.0000 0.0000 6 0.0000 0.0000

FILA 3

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 0.0000 0.0000 2 0.0000 0.0000  
3 -0.1949 0.3893 4 0.0000 0.0000  
5 0.0000 0.0000 6 0.0000 0.0000

FILA 4

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 0.0000 0.0000 2 0.0000 0.0000  
3 0.0000 0.0000 4 -0.1949 -0.3893  
5 0.0000 0.0000 6 0.0000 0.0000

FILA 5

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 0.0000 0.0000 2 0.0000 0.0000  
3 0.0000 0.0000 4 0.0000 0.0000  
5 -0.5128 0.1628 6 0.0000 0.0000

FILA 6

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 0.0000 0.0000 2 0.0000 0.0000  
3 0.0000 0.0000 4 0.0000 0.0000  
5 0.0000 0.0000 6 -0.5128 -0.1628

MATRIZ T

=====

FILA 1

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 -0.0007 0.0000 2 -0.0385 0.0000  
3 -0.0672 -0.2040 4 -0.0672 0.2040  
5 -0.1349 -0.0758 6 -0.1349 0.0758

FILA 2

-----  
COL REAL IMAG COL REAL IMAG  
1 -0.9942 0.0000 2 -0.6322 0.0000

3	0.1981	-0.0957	4	0.1981	0.0957
5	0.1887	-0.0054	6	0.1887	0.0054

FILA 3

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	0.0436	0.0000	2	0.1750	0.0000
3	-0.4003	-0.3086	4	-0.4003	0.3086
5	-0.3373	-0.0966	6	-0.3373	0.0966

FILA 4

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	0.0167	0.0000	2	0.0697	0.0000
3	-0.1068	-0.1857	4	-0.1068	0.1857
5	-0.1719	-0.0750	6	-0.1719	0.0750

FILA 5

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	-0.0968	0.0000	2	-0.7501	0.0000
3	-0.7470	0.0000	4	-0.7470	0.0000
5	-0.8615	0.0000	6	-0.8615	0.0000

FILA 6

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	0.0005	0.0000	2	0.0260	0.0000
3	0.0960	0.1918	4	0.0960	-0.1918
5	0.1908	0.0606	6	0.1908	-0.0606

MATRIZ T-INV

FILA 1

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	6.4444	0.0000	2	-1.1188	0.0000
3	-0.0033	0.0000	4	-6.1756	0.0000
5	0.0487	0.0000	6	0.3139	0.0000

FILA 2

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	-8.3280	0.0000	2	0.1667	0.0000
3	0.2253	0.0000	4	6.0455	0.0000
5	-0.5209	0.0000	6	-2.5615	0.0000

FILA 3

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	-3.9563	0.2787	2	-0.0299	-0.0103
3	-2.1389	1.9074	4	2.5923	-9.7778
5	-0.2085	-0.7708	6	-5.1555	-8.7111

FILA 4

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	-3.9563	-0.2787	2	-0.0299	0.0103
3	-2.1389	-1.9074	4	2.5923	9.7778
5	-0.2085	0.7708	6	-5.1555	8.7111

FILA 5

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	6.6947	12.1767	2	0.0162	0.0670

3	1.7569	-3.8491	4	-4.5332	22.0657
5	-0.1756	1.4463	6	5.5683	28.1522

FILA 6

COL	REAL	IMAG	COL	REAL	IMAG
1	6.6947	-12.1767	2	0.0162	-0.0670
3	1.7569	3.8491	4	-4.5332	-22.0657
5	-0.1756	-1.4463	6	5.5683	-28.1522

EL NUMERO DE BLOQUES ES: 6

EL BLOQUE 1 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-22.8124446922 + 0 J$

EL BLOQUE 2 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-3.61253320912 + 0 J$

EL BLOQUE 3 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-0.194859102282 + 0.38930656778 J$

EL BLOQUE 4 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-0.194859102282 + -0.38930656778 J$

EL BLOQUE 5 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-0.512790835933 + 0.162798815938 J$

EL BLOQUE 6 ES DE ORDEN : 1

Y SU VALOR PROPIO ES :  $-0.512790835933 + -0.162798815938 J$

EL NUMERO DE COLUMNAS DEL elemento DE LA MATRIZ  $a^{0j}$  ES : 1

EL NUMERO DE VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ J ES : 6

EL VECTOR DE VALORES PROPIOS (PARTE REAL) ES

-22.8124446922      -3.61253320912      -0.194859102282      -0.194859102282  
-0.512790835933      -0.512790835933

EL VECTOR DE V.P. (PARTE IMAG.) ES

0	0	0,38930656778	-0,38930656778
0.162798815938	-0.162798815938		

EL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES

1	0	-1	2
0	1		

LA MATRIZ e<sup>-At</sup> ES :

FILA 1

e<sup>-At</sup>(1,1)=

( -0,0046 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
 ( +0,3202 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
 ( +0,6457 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -1,5770 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( +0,0387 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
 ( +4,3000 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(1,2)=

( +0,0008 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
 ( -0,0064 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
 ( -0,0002 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -0,0136 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( +0,0058 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
 ( +0,0205 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(1,3)=

( 0,0000 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
 ( -0,0087 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
 ( +1,0660 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -0,6164 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -1,0573 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
 ( -0,7723 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(1,4)=

( +0,0044 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
 ( -0,2325 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
 ( -4,3386 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -0,2568 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( +4,5667 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
 ( +5,2669 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(1,5)=

( 0,0000 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
 ( +0,0200 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
 ( -0,2865 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( -0,1887 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
 ( +0,2665 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
 ( +0,3636 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(1,6)=

```
( -0.0002 )e^-22.8124t +
( +0.0985 )e^-3.6125t +
( -2.8616 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -3.2751 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +2.7633 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( +8.4399 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

FILA 2

e^At(2,1)=

```
( -6.4071 )e^-22.8124t +
( +5.2649 )e^-3.6125t +
( -1.5145 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -0.8676 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +2.6567 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( -4.5230 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

e^At(2,2)=

```
( +1.1123 )e^-22.8124t +
( -0.1054 )e^-3.6125t +
( -0.0138 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -0.0016 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +0.0068 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( -0.0251 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

e^At(2,3)=

```
( +0.0033 )e^-22.8124t +
( -0.1424 )e^-3.6125t +
( -0.4826 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -1.1652 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +0.6217 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( +1.4712 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

e^At(2,4)=

```
( +6.1399 )e^-22.8124t +
( -3.8219 )e^-3.6125t +
( -0.8440 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +4.3709 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -1.4740 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( -8.3748 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

e^At(2,5)=

```
( -0.0484 )e^-22.8124t +
( +0.3293 )e^-3.6125t +
( -0.2301 )COS( 0.3893t)e^-0.1949t +
( +0.2656 )SEN( 0.3893t)e^-0.1949t +
( -0.0507 )COS( 0.1628t)e^-0.5128t +
( -0.5476 )SEN( 0.1628t)e^-0.5128t +
```

e<sup>-At</sup>(2,6)=

```
( -0.3121 )e-22.8124t +
( +1.6193 )e-3.6125t +
( -3.7102 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( +2.4654 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( +2.4029 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( -10.5632 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

FILA 3

e<sup>-At</sup>(3,1)=

```
( +0.2809 )e-22.8124t +
( -1.4574 )e-3.6125t +
( +3.3391 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( -2.2189 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( -2.1626 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( +9.5069 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

e<sup>-At</sup>(3,2)=

```
( -0.0488 )e-22.8124t +
( +0.0292 )e-3.6125t +
( +0.0176 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( -0.0267 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( +0.0020 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( +0.0483 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

e<sup>-At</sup>(3,3)=

```
( -0.0001 )e-22.8124t +
( +0.0394 )e-3.6125t +
( +2.8896 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( +0.2067 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( -1.9288 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( -2.2567 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

e<sup>-At</sup>(3,4)=

```
( -0.2691 )e-22.8124t +
( +1.0579 )e-3.6125t +
( -8.1104 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( -6.2273 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( +7.3216 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( +14.0074 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

e<sup>-At</sup>(3,5)=

```
( +0.0021 )e-22.8124t +
( -0.0912 )e-3.6125t +
( -0.3089 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +
( -0.7457 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +
( +0.3979 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
( +0.9416 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```



$e^{-At}(3,6)=$

```
( +0.0137 )e-22.8124t +  
( -0.4482 )e-3.6125t +  
( -1.2496 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -10.1556 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( +1.6842 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +  
( +20.0648 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

FILA 4

$e^{-At}(4,1)=$

```
( +0.1075 )e-22.8124t +  
( -0.5806 )e-3.6125t +  
( +0.9489 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -1.4096 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -0.4758 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +  
( +5.1895 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

$e^{-At}(4,2)=$

```
( -0.0187 )e-22.8124t +  
( +0.0116 )e-3.6125t +  
( +0.0026 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -0.0133 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( +0.0045 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +  
( +0.0255 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

$e^{-At}(4,3)=$

```
( -0.0001 )e-22.8124t +  
( +0.0157 )e-3.6125t +  
( +1.1653 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -0.3867 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -1.1810 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +  
( -1.0597 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

$e^{-At}(4,4)=$

```
( -0.1030 )e-22.8124t +  
( +0.4215 )e-3.6125t +  
( -4.1848 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -1.1268 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( +4.8663 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +  
( +6.9056 )SEN( 0.1628t)e-0.5128t +
```

$e^{-At}(4,5)=$

```
( +0.0008 )e-22.8124t +  
( -0.0363 )e-3.6125t +  
( -0.2417 )COS( 0.3893t)e-0.1949t +  
( -0.2421 )SEN( 0.3893t)e-0.1949t +  
( +0.2772 )COS( 0.1628t)e-0.5128t +
```

( +0.4708 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At(4,6)</sup>=

( +0.0052 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( -0.1786 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( -2.1330 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -3.7759 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +2.3063 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +10.5123 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 5

e<sup>-At(5,1)</sup>=

( -0.6237 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +6.2472 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +5.9111 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +0.4164 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -11.5346 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +20.9798 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At(5,2)</sup>=

( +0.1083 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( -0.1250 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +0.0446 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -0.0154 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -0.0279 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +0.1154 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At(5,3)</sup>=

( +0.0003 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( -0.1690 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +3.1958 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +2.8498 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -3.0271 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( -6.6317 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At(5,4)</sup>=

( +0.5977 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( -4.5349 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( -3.8732 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -14.6089 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +7.8105 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +38.0180 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At(5,5)</sup>=

( -0.0047 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +0.3907 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +0.3115 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +

( -1.1516 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +0.3025 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +2.4918 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(5,6)=

( -0.0304 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +1.9214 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +7.7029 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -13.0152 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -9.5940 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +48.5048 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 6

e<sup>-At</sup>(6,1)=

( +0.0034 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( -0.2162 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( -0.8666 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +1.4642 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +1.0793 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( -5.4568 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(6,2)=

( -0.0006 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +0.0043 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( -0.0018 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +0.0134 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -0.0019 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( -0.0275 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(6,3)=

( 0.0000 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +0.0058 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( -1.1424 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +0.4543 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +1.1366 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( +1.2557 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(6,4)=

( -0.0033 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +0.1569 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +4.2487 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +0.8830 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -4.4024 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( -7.8698 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

e<sup>-At</sup>(6,5)=

( 0.0000 )e<sup>-22.8124t</sup> +

( -0,0135 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
( +0,2557 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
( +0,2280 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
( -0,2422 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
( -0,5305 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

e<sup>-At(6,6)</sup>=

( +0,0002 )e<sup>-22,8124t</sup> +  
( -0,0665 )e<sup>-3,6125t</sup> +  
( +2,3518 )COS( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
( +3,6504 )SEN( 0,3893t)e<sup>-0,1949t</sup> +  
( -1,2855 )COS( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +  
( -11,4156 )SEN( 0,1628t)e<sup>-0,5128t</sup> +

EL VECTOR X(t) ES :

FILA 1

X(t)(1)=

( +0.0040 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
 ( -0.0375 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
 ( -11.9591 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( -4.7495 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( +12.9927 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
 ( +24.0460 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 2

X(t)(2)=

( +5.5573 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
 ( -0.6171 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
 ( -6.4300 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( +11.5047 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( +1.4898 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
 ( -33.3071 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 3

X(t)(3)=

( -0.2436 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
 ( +0.1708 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
 ( -17.0207 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( -25.0358 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( +16.0935 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
 ( +59.8433 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 4

X(t)(4)=

( -0.0933 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
 ( +0.0681 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
 ( -10.7190 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( -7.0525 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( +12.7442 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
 ( +30.5727 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 5

X(t)(5)=

( +0.5410 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
 ( -0.7323 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
 ( +2.6718 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( -44.6666 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
 ( -2.4805 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
 (+152.1523 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

FILA 6

X(t)(6)=

( -0.0030 )e<sup>-22.8124t</sup> +  
( +0.0253 )e<sup>-3.6125t</sup> +  
( +11.1251 )COS( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( +6.4263 )SEN( 0.3893t)e<sup>-0.1949t</sup> +  
( -10.1475 )COS( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +  
( -33.8677 )SEN( 0.1628t)e<sup>-0.5128t</sup> +

## 4.2 CONCLUSIONES.

La preponderancia alcanzada en el campo tecnológico en materia de diseños tanto de tipo militar como comercial se debe fundamentalmente al empleo adecuado de las técnicas de control de sistemas, técnicas que día a día se vuelven más y más sofisticadas gracias al constante desarrollo de sistemas computacionales y métodos numéricos que sirven de apoyo a todas las disciplinas científico-técnicas.

Siguiendo esta línea de pensamiento, el presente trabajo puede ser enfocado como una pequeña contribución al estudio de los sistemas de control lineales, dinámicos e invariantes en el tiempo, ya que se hace un análisis cuantitativo y cualitativo de los mismos, contribuyendo de esta manera con una biblioteca de programas en lenguaje BASIC para el minicomputador Tektronix existente en la facultad.

Los programas implementados para el computador digital han sido desarrollados en base de los fundamentos teóricos presentados en este trabajo, los mismos que sin detenerse en la rigurosidad matemática buscan documentarlo de una manera clara y precisa.

Siendo el objetivo principal proveer algunas herramientas para el análisis de sistemas de control lineales, dinámicos e invariantes en el tiempo, su aplicación inmediata - constituye el uso de la biblioteca de programas con fines didácticos como también para el desarrollo de nuevos proyectos y tesis.

Cabe anotarse que todo problema que tenga una representación en el espacio de estado como una ecuación diferencial vectorial lineal (ecuación de estado) y una ecuación de salida puede ser analizado y resuelto haciendo uso de los programas aquí desarrollados.

El cálculo de la matriz de transición de estados ha sido hecho de manera exacta, es decir obteniendo funciones matemáticas para cada elemento de dicha matriz logrando con ello obtener la solución homogénea de la ecuación de estado de manera igualmente exacta lo cual puede resultar muy útil en el análisis de un sistema de orden elevado y de particular utilidad en la simulación digital de los sistemas lineales dinámicos e invariantes en el tiempo.

La simulación digital de un sistema comúnmente conocida como cálculo de estados y salidas ha sido tratada en traba-



jos anteriores haciendo uso de métodos aproximados de evaluación de la matriz de transición lo cual introduce los consiguientes errores de cómputo; en el presente trabajo se usa la evaluación exacta de la matriz de transición para la simulación de los sistemas, mejorando de esta manera la exactitud de dicha simulación. En este trabajo se han desarrollado dos métodos de cálculo de estados y salidas con el fin de tener más de una opción para fines didácticos.

El análisis cualitativo de los sistemas se lo ha implementado en el computador mediante un programa que hace uso de los criterios de controlabilidad y observabilidad en forma completa como del criterio de estabilidad absoluta. Análisis que es de gran utilidad para el diseño de controladores óptimos para sistemas lineales.

Los resultados obtenidos en la sección anterior (4.1) son una confirmación de lo anteriormente expuesto.

El análisis y conclusiones materia de este trabajo podrían acogerse como un aporte o estímulo para el desarrollo de nuevos proyectos y tesis en materia de control óptimo con lo que quedaría satisfecha una noble aspiración.

#### 4.3 METODOLOGIA DE USO DE LOS PROGRAMAS.

- 1.- Prenda el computador
- 2.- Coloque el disco en una de las unidades
- 3.- Inicialise el sistema de reloj del computador desde el teclado mediante la instrucción:  
CALL "SETTIM", "DD-MMM-AA Ø HH: MM: SS" y luego aplaste la tecla RETURN donde:  
DD: día  
MMM: mes (iniciales en Inglés)  
AA: año  
Ø: espacio en blanco  
HH: hora  
MM: minutos  
SS: segundos (opcional
- 4.- Monte el disco en el sistema usando la instrucción:  
CALL "MOUNT", N<sup>\*</sup>, A\$  
(\* ) número de la unidad en la que se ha colocado el disco.  
luego aplaste la tecla RETURN
- 5.- Realizar el paso 4 con el disco que contiene los programas de obtención de valores y vectores propios (Tesis de Cristóbal García) en caso de ser necesario, y ha

ciendo uso de la referencia |5| ejecutar el programa correspondiente..

NOTA: antes de cargar a la memoria del computador el programa maestro es necesario inicializar la unidad de discos en que se ha colocado el disco correspondiente mediante la instrucción UNIT N<sup>o</sup> (\*) igual que en 4 y luego aplaste la tecla RETURN

- 6.- Inicializar la unidad de discos en que se coloca el disco que contiene los programas de esta tesis (ver NOTA anterior)
- 7.- Cargar a la memoria del computador el programa maestro; utilizando la instrucción  
  OLD "JPROANO"  
luego aplaste la tecla RETURN
- 8.- Correr el programa con la instrucción RUN y aplaste la tecla RETURN
- 9.- Siendo el sistema computacional utilizado interactivo se mantiene una comunicación conversacional entre el computador y el usuario durante todo el proceso, cada vez que sea necesario ingresar datos al computador es necesario enseguida aplastar la tecla RETURN.

- 10.- Si por alguna razón desea interrumpir la ejecución de un programa basta aplastar dos veces la tecla BREAK.
- 11.- Después de haber interrumpido la ejecución de un programa se puede tener acceso al índice de programas aplastando la tecla definible 1 que muestra las opciones disponibles.

```

1 REM CALCULO DE LA RESPUESTA DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL DOMINIO
2 REM DEL TIEMPO PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES
3 O0=-1
4 GO TO 100
5 REM JULIO C.PROANO ROSADO -- ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
6 REM     TESIS DE GRADO
8 O1=2
9 GO TO 1000
12 O1=3
13 P6=1
14 GO TO 1000
16 O1=4
17 P6=1
18 GO TO 1000
20 O1=5
21 GO TO 1000
24 O1=6
25 GO TO 1000
32 P6=2
33 IF O2=57 THEN 1030
34 END
36 P6=2
37 IF O2=56 THEN 1030
38 END
40 P6=2
41 IF O2=52 THEN 1030
42 END
100 REM     PROGRAMA:           JPROANO
110 REM
120 REM *****LINEA 120 -- INICIALIZACION *****
130 REM
140 REM INDICE
150 PRINT 'L ANALISIS DE SISTEMAS EN VARIABLES DE ESTADO EN EL '
170 PRINT 'J           DOMINIO DEL TIEMPO'
180 PRINT 'J     TECLA  1 -- INDICE DE PROGRAMAS'
190 PRINT 'J     TECLA  2 -- INGRESO, LISTADO Y ACTUALIZACION DE DATOS'
200 PRINT 'J     TECLA  3 -- OBTENCION DE MATRIZ DE TRANSICION'
201 PRINT 'J     TECLA  4 -- CALCULO DE ESTADOS Y SALIDAS'
202 PRINT 'J     TECLA  5 -- GRAFICOS DE ESTADOS Y SALIDAS EN FUNCION ' ;
203 PRINT 'DEL TIEMPO'
207 PRINT 'J     TECLA  6 -- ANALISIS CUALITATIVO DE CONTROLABILIDAD, ' ;
209 PRINT 'OBSERVABILIDAD'
210 PRINT '           Y ESTABILIDAD.'
490 PRINT 'J           ESCOJA TECLA'
491 END
500 REM LINEA 500  SUB. IMPRESION
501 K9=72
502 O7=32
504 PRINT '¿DESEA IMPRESION EN PAPEL? (SI O NO): ' ;
506 INPUT A$
508 IF NOT(A$='S' OR A$='SI') THEN 518
512 O7=51
514 PRINT '¿ALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)G'
515 INPUT A$

```

```

516 PRINT "JCANTIDAD MAXIMA DE CARACTERES POR RENGLON (72-132): ";
517 INPUT K9
518 CALL "TIME",H$
519 RETURN
800 REM ***** LINEA 800 -- SELECCION DE NOMBRE DE PROGRAMA *****
801 IF 01=02 AND 00<>-1 THEN 1030
810 IF 00<>-1 THEN 850
815 REM ASIGNACION DE LA UNIDAD DE DISCO
820 PRINT "JUNIDAD DONDE ESTA EL DISCO: ";
830 INPUT 00
840 IF NOT(00=0 OR 00=1) THEN 820
850 CALL "UNIT",00
855 REM ***** SELECCION DE PROGRAMAS *****
860 DATA "","INGRESO","TRA","CEYS","GEYS","CDE"
870 RESTORE 860
880 FOR J1=1 TO 01
890 READ X$
900 NEXT J1
910 X$="@C5/"&X$
920 DELETE 1001,50000
930 J1=MEMORY
940 AFFEND X$;1000
1000 REM ***** LINEA 1000 -- SELECCION AUTOMATICA DE PROGRAMAS *****
1010 02=0
1020 GO TO 800
1030 REM
1040 END

```

```

1000 REM *** LINEA 1000 ***           @C5/INGRESO      (TECLA 2)
1010 O2=2
1020 GO TO 800
1030 REM INGRESO DE DATOS: MATRICES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO
1040 REM Y DE SALIDA
1050 REM INGRESO DE LA FORMA DE JORDAN Y DE LAS MATRICES
1060 REM DE TRANSFORMACION DE SEMEJANZA T Y T^-1
1070 REM DEFINICION DE VARIABLES
1080 REM A = MATRIZ DE LA ECUACION DE ESTADO           -- ORDEN N1*N1
1090 REM B = MATRIZ DE LA ECUACION DE ESTADO           -- ORDEN N1*N1
1100 REM C = MATRIZ DE LA ECUACION DE SALIDA           -- ORDEN N0*N1
1110 REM D = MATRIZ DE LA ECUACION DE SALIDA           -- ORDEN N0*N1
1120 REM J = FORMA DE JORDAN (PARTE REAL)             -- ORDEN N1*N1
1130 REM G0= FORMA DE JORDAN (PARTE IMAG.)            -- ORDEN N1*N1
1140 REM T = MATRIZ DE SEMEJANZA (PARTE REAL)         -- ORDEN N1*N1
1150 REM T1= MATRIZ DE SEMEJANZA (PARTE IMAG.)        -- ORDEN N1*N1
1160 REM T0= MATRIZ INV. DE SEMEJANZA (PARTE REAL)    -- ORDEN N1*N1
1170 REM T2= MATRIZ INV. DE SEMEJANZA (PARTE IMAG)    -- ORDEN N1*N1
1180 Y$=' INGRESO, VERIFICACION Y CORRECCION DE DATOS'
1190 O9=NOT(OO)
1200 O8=0
1210 O6=0
1220 PAGE
1230 PRINT ' ' ;Y$
1240 PRINT 'JJJJ' ' 1.-INGRESO DE COEFICIENTES'
1250 PRINT 'J' ' 2.-LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO EN DISCO PROPIO'
1260 PRINT 'J' ' 3.-LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO EN DISCO 'C. ';
1270 PRINT 'GARCIA' ' (@C5/EST2)'
1280 PRINT 'J' ' 4.-LISTADO DE DATOS'
1290 PRINT 'J' ' 5.-CORRECCION DE DATOS'
1300 PRINT 'J' ' 6.-FIN DE INGRESO DE DATOSJ
'
1310 PRINT ' ' CLASE DESEADA:G ';
1320 INPUT I9
1330 IF I9<1 OR I9>6 THEN 1310
1340 PAGE
1350 PRINT 'JJ'
1360 GO TO I9 OF 1370,2700,2870,3330,5240,6500
1370 OPEN '@C5/DAT';1,'U',X$
1380 CALL 'REWIND',1
1390 GOSUB 1410
1400 GO TO 1490
1410 PRINT 'NOMBRE DEL PROBLEMA (MAX 50 CARACTERES):J'
1420 INPUT Z$
1430 IF LEN(Z$)=>50 THEN 1470
1440 FOR J1=LEN(Z$)+1 TO 50
1450 Z$=Z$&' '
1460 NEXT J1
1470 Z$=SEG(Z$,1,50)
1480 RETURN
1490 PRINT 'JINGRESE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS DEL SISTEMA'
1500 PRINT 'JORDEN DEL SISTEMA = ';
1510 INPUT N1
1520 PRINT 'JNUMERO DE ENTRADAS = ';
1530 INPUT N

```

```

1540 PRINT "JNUMERO DE SALIDAS = ";
1550 INPUT NO
1560 B0=1
1570 WRITE #1;Z$,B0,N1,N,NO
1580 REM INGRESO DE A,B,C,I (POR FILAS)
1590 N7=N1
1600 N8=N1
1610 A$="A"
1620 GOSUB 1640
1630 GO TO 1980
1640 REM SUB. INGRESO DE MATRIZ A$ (REAL)
1650 DELETE A
1660 DIM A(N7,N8)
1670 PRINT "LINGRESE ELEMENTOS DE MATRIZ ";A$;" POR FILAS"
1680 FOR J2=1 TO N7
1690 PRINT "JFILA ";J2
1700 FOR J3=1 TO N8
1710 PRINT USING 1720:A$,J2,J3
1720 IMAGE 10X,FA,"(",FI",FI") ",S
1730 INPUT A(J2,J3)
1740 NEXT J3
1750 NEXT J2
1760 WRITE #1;A
1770 DELETE A
1780 RETURN
1790 REM SUB. INGRESO DE MATRIZ A$ (COMPLEJA)
1800 DELETE A1,A2
1810 DIM A1(N7,N8),A2(N7,N8)
1820 PRINT "LINGRESE ELEMENTOS DE MATRIZ ";A$;" POR FILAS ";
1830 PRINT "(REAL, IMAG.)G"
1840 FOR J2=1 TO N7
1850 PRINT "JFILA ";J2
1860 FOR J3=1 TO N8
1870 PRINT USING 1880:A$,J2,J3
1880 IMAGE 10X,FA,"(",FI",FI") Real ",S
1890 INPUT A1(J2,J3)
1900 PRINT USING 1910:
1910 IMAGE 40X"KImag. ",S
1920 INPUT A2(J2,J3)
1930 NEXT J3
1940 NEXT J2
1950 WRITE #1;A1,A2
1960 DELETE A1,A2
1970 RETURN
1980 A$="B"
1990 N8=N
2000 GOSUB 1640
2010 A$="C"
2020 N7=N0
2030 N8=N1
2040 GOSUB 1640
2050 A$="I"
2060 N8=N
2070 GOSUB 1640

```



```
2080 PRINT "GGGJJJ A,B,C,D HAN SIDO INGRESADAS"
2090 PRINT "JJLOS VALORES y LOS VECTORES PROPIOS SON COMPLEJOS?";
2100 PRINT " (SI O NO) ";
2110 INPUT B$
2120 IF B$<>"S" AND B$<>"SI" THEN 2310
2130 B0=2
2140 PRINT "JDESEA INGRESARLOS (SI O NO): ";
2150 INPUT A$
2160 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2260
2170 A$="J"
2180 N7=N1
2190 N8=N1
2200 GOSUB 1790
2210 A$="T"
2220 GOSUB 1790
2230 A$="T-INV"
2240 GOSUB 1790
2250 GO TO 2470
2260 DELETE A
2270 DIM A(N1,N1)
2280 A=0
2290 WRITE #1:A,A,A,A,A,A
2300 GO TO 2470
2310 PRINT "JSON SOLAMENTE REALES. DESEA INGRESARLOS (SI O NO): ";
2320 INPUT A$
2330 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2430
2340 A$="J"
2350 N7=N1
2360 N8=N1
2370 GOSUB 1640
2380 A$="T"
2390 GOSUB 1640
2400 A$="T-INV"
2410 GOSUB 1640
2420 GO TO 2470
2430 DELETE A
2440 DIM A(N1,N1)
2450 A=0
2460 WRITE #1:A,A,A
2470 O8=1
2480 CALL "REWIND",1
2490 READ #1:Z$
2500 WRITE #1:B0
2510 CLOSE 1
2520 PRINT "GGGJJJJ                FIN DE DATOS PARA CALCULO DE e^At"
2530 REM *** SUBROUTINA PARA ARCHIVO DE DATOS ***
2540 PRINT "JJDESEA ALMACENAR LOS DATOS EN UN ARCHIVO (SI O NO) : ";
2550 INPUT A$
2560 CALL "UNIT",00
2570 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 1220
2580 PRINT "JINGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO : ";
2590 INPUT V$
2600 CALL "FILE",00,V$,A$
2610 IF A$="" THEN 2670
```

```

2620 PRINT 'JYA EXISTE DICHO ARCHIVO, DESEA DESTRUIRLO (SI O NO): ';
2630 INPUT A$
2640 IF A$='S' OR A$='SI' THEN 2660
2650 GO TO 2580
2660 KILL V$
2670 COPY '@C5/DAT',00 TO V$,00
2680 Y$='DATOS ESTAN ALMACENADOS EN EL ARCH. : '&V$
2690 GO TO 1220
2700 REM *** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO (PROPIO) ***
2710 PRINT 'JJ'
2720 PRINT 'NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS: ';
2730 INPUT V$
2740 CALL 'FILE',00,V$,A$
2750 IF A$='' THEN 2820
2760 O8=1
2770 CALL 'UNIT',00
2780 KILL '@C5/DAT'
2790 COPY V$,00 TO '@C5/DAT',00
2800 Y$='DATOS LEIDOS DEL ARCHIVO : '&V$
2810 GO TO 1220
2820 PRINT 'JNO EXISTE DICHO ARCHIVO'
2830 PRINT 'JDESEA LEER OTRO ARCHIVO (SI O NO) : ';
2840 INPUT A$
2850 IF A$='SI' OR A$='S' THEN 2710
2860 GO TO 1220
2870 REM*** LECTURA DEL ARCHIVO (@C5/EST2) ***
2880 CALL 'UNIT',09
2890 OPEN '@C5/EST2';1,'R',A$
2900 CALL 'UNIT',00
2910 OPEN '@C5/DAT';2,'U',A$
2920 CALL 'REWIND',2
2930 Z$='
2940 Z$=SEG(Z$,1,50)
2950 READ #1;N1,N,NO
2960 WRITE #2;Z$,0,N1,N,NO
2970 DELETE A
2980 DIM A(N1,N1)
2990 READ #1:A
3000 WRITE #2:A
3010 DELETE A
3020 DIM A(N1,N)
3030 READ #1:A
3040 WRITE #2:A
3050 DELETE A
3060 DIM A(NO,N1)
3070 READ #1:A
3080 WRITE #2:A
3090 DELETE A
3100 DIM A(NO,N)
3110 READ #1:A
3120 WRITE #2:A
3130 DELETE A,T,TO
3140 DIM A(N1,N1),T(N1,N1),TO(N1,N1)
3150 READ #1:A,T,TO,B$

```

```

3160 WRITE #2:A
3170 B0=2
3180 IF B#='S' OR B#='SI' THEN 3200.
3190 B0=1
3200 GO TO B0 OF 3210,3230
3210 WRITE #2:T,TO
3220 GO TO 3270
3230 READ #1:A
3240 WRITE #2:A,T
3250 READ #1:A,T
3260 WRITE #2:A,TO,T
3270 DS=1
3280 GOSUB 1410
3290 CALL 'REWIND',2
3300 WRITE #2:Z$,B0
3310 CLOSE
3320 GO TO 2540
3330 REM *** LISTADO DE DATOS ***
3340 IF DS=1 THEN 3400
3350 PAGE
3360 PRINT 'JJPRIMERO DEBE INGRESAR DATOS O LEERLOS DE ALGUN ARCHIVO'
3370 PRINT 'JJPRESIONE RETURN PARA CONTINUARG'
3380 INPUT A$
3390 GO TO 1220
3400 REM
3410 GOSUB 500
3420 PRINT 'JINGRESE FORMATO DESEADO PARA NUMEROS ';
3430 OPEN '@C5/DAT';1,'R',X$
3440 READ #1:Z$,B0,N1,N,NO
3450 PRINT '(EJ 4E , 4D,2D): ';
3460 INPUT F$
3470 G#=F$
3480 G#=G#&'3X'
3490 G#=G#&F$
3500 D#=STR(K9-16)
3510 D#=D#&'T,FA,FA'
3520 D#='P/,FA,'&D#
3530 A#=SEG(H$,1,9)
3540 PRINT @07: USING D#:'ESCUELA POLITECNICA NACIONAL', 'FECHA: ',A$
3550 A#=SEG(H$,11,8)
3560 D#=SEG(D$,3,LEN(D$)-2)
3570 PRINT @07: USING D#:'FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA', 'HORA: ',A
3580 PRINT @07:'ANALISIS DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES EN EL ';
3590 PRINT @07:'ESPACIO DE ESTADO.'
3600 PRINT @07:'TESIS DE GRADO DE JULIO C. PROANO R. -- 1982'
3610 D#=STR(K9)
3620 D#=D#&'(''='')'
3630 PRINT @07: USING D#;
3640 PRINT @07: USING 3650:Z$
3650 IMAGE /'NOMBRE DEL PROBLEMA: 'FA
3660 PRINT @07: USING 3670:N1
3670 IMAGE /'EL SISTEMA TIENE'30T2D' ESTADOS'
3680 PRINT @07: USING 3690:N,NO
3690 IMAGE 30T2D' ENTRADAS'/30T2D' SALIDAS'

```

```

3700 I$=STR(K9)
3710 I$=I$&'(''-''')
3720 PRINT @07: USING I$:
3730 Z2=1
3740 IF 07=32 THEN 3760
3750 Z2=2
3760 Z1=1
3770 A$='A'
3780 N7=N1
3790 N8=N1
3800 DELETE A1
3810 DIM A1(N7,N8)
3820 READ #1:A1
3830 GOSUB Z2 OF 3850,4560
3840 GO TO 4030
3850 REM SUB. IMPR. MATRIZ (PANTALLA)
3860 FOR J1=1 TO N7
3870 PRINT @07: USING 3880:A$,J1
3880 IMAGE /'MATRIZ ''FA''', FILA 'FD,3X,S
3890 GO TO Z1 OF 3900,3920
3900 PRINT @07:'J'
3910 GO TO 3930
3920 PRINT @07:'(REAL      IMAG)J'
3930 FOR K1=1 TO N8
3940 PRINT @07: USING 3950:A$,J1,K1
3950 IMAGE 10X,FA>('FD','FD') ',S
3960 GO TO Z1 OF 3970,3990
3970 PRINT @07: USING F$:A1(J1,K1)
3980 GO TO 4000
3990 PRINT @07: USING G$:A1(J1,K1),A2(J1,K1)
4000 NEXT K1
4010 NEXT J1
4020 RETURN
4030 A$='B'
4040 N8=N
4050 DELETE A1
4060 DIM A1(N7,N8)
4070 READ #1:A1
4080 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4090 A$='C'
4100 N7=N0
4110 N8=N1
4120 DELETE A1
4130 DIM A1(N7,N8)
4140 READ #1:A1
4150 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4160 A$='D'
4170 N8=N
4180 DELETE A1
4190 DIM A1(N7,N8)
4200 READ #1:A1
4210 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4220 GO TO B0 OF 4230,4400
4230 A$='J'

```

```
4240 N7=N1
4250 N8=N1
4260 DELETE A1
4270 DIM A1(N7,N8)
4280 READ #1:A1
4290 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4300 A$='T'
4310 READ #1:A1
4320 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4330 A$='T-INV'
4340 READ #1:A1
4350 CLOSE
4360 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4370 PRINT 'JRETURN PARA CONTINUARG'
4380 INPUT A$
4390 GO TO 1220
4400 Z1=2
4410 N7=N1
4420 N8=N1
4430 DELETE A1,A2
4440 DIM A1(N7,N8),A2(N7,N8)
4450 A$='J'
4460 READ #1:A1,A2
4470 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4480 A$='T'
4490 READ #1:A1,A2
4500 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4510 A$='T-INV'
4520 READ #1:A1,A2
4530 GOSUB Z2 OF 3850,4560
4540 CLOSE
4550 GO TO Z2 OF 4370,1220
4560 REM *** SUB. IMPR. MATRIZ (PAPEL)
4570 PRINT @07: USING 4580:A$
4580 IMAGE /'MATRIZ 'FA/12('='')
4590 GO TO Z1 OF 4600,4630
4600 C$='4D,=X,;,2X,S'
4610 C$=REP(F$,POS(C$,",",1),1)
4620 GO TO 4660
4630 C$='4D,=X,;,1X,=X,*,2X,S'
4640 C$=REP(F$,POS(C$,",",1),1)
4650 C$=REP(F$,POS(C$, "*",1),1)
4660 T9=POS(F$,",",1)
4670 IF T9<>0 THEN 4740
4680 T9=POS(F$, "E",1)
4690 IF T9=0 THEN 4720
4700 L1=8+VAL(F$)
4710 GO TO 4770
4720 L1=VAL(F$)
4730 GO TO 4770
4740 L1=VAL(F$)
4750 I$=SEG(F$,T9+1,LEN(F$)-T9)
4760 L1=L1+1+VAL(I$)
4770 REM L1 -- CANT. CARACT. DE F$
```

```

4780 J1=1
4790 IF L1=>5 THEN 4810
4800 J1=6-L1
4810 D$=STR(J1)
4820 C$=REP(D$,POS(C$,"=",1),1)
4830 GO TO Z1 OF 4850,4840
4840 C$=REP(D$,POS(C$,"=",1),1)
4850 D$=""
4860 FOR J1=1 TO L1+1 MAX 6
4870 D$=D$&" "
4880 NEXT J1
4890 GO TO Z1 OF 4900,4930
4900 D$=REP("VALOR",LEN(D$)-4,5)
4910 E$=" COL"&D$
4920 GO TO 4990
4930 D$=REP("IMAG",LEN(D$)-3,4)
4940 E$=D$
4950 E$=REP("REAL",LEN(E$)-3,4)
4960 E$=" COL"&E$
4970 E$=E$&" "
4980 E$=E$&D$
4990 E$=E$&" "
5000 K=INT(K9/LEN(E$))
5010 FOR I=1 TO N7
5020 PRINT @07: USING 5030:I
5030 IMAGE 'FILA 'FD/7("-")
5040 FOR J1=1 TO N8 MIN K
5050 PRINT @07: USING 'FA,S':E$
5060 NEXT J1
5070 PRINT @07:
5080 K1=0
5090 REM
5100 FOR J1=1 TO N8
5110 GO TO Z1 OF 5120,5140
5120 PRINT @07: USING C$:J1,A1(I,J1)
5130 GO TO 5150
5140 PRINT @07: USING C$:J1,A1(I,J1),A2(I,J1)
5150 K1=K1+1
5160 IF K1<K THEN 5190
5170 PRINT @07:
5180 K1=0
5190 NEXT J1
5200 IF K1=K THEN 5220
5210 PRINT @07:
5220 NEXT I
5230 RETURN
5240 REM *** PROGRAMA PARA CORRÉGIR DATOS ***
5250 IF 08=1 THEN 5270
5260 GO TO 3350
5270 OPEN '@C5/DAT';1,"U",X$
5280 PAGE
5290 PRINT 'J                CORRÉCCION DE DATOSJ'
5300 PRINT '                1 - NOMBRE DEL PROBLEMA'
5310 PRINT '                2 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ "'A'"

```

```

5320 PRINT '      3 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'B''
5330 PRINT '      4 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'C''
5340 PRINT '      5 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'D''
5350 PRINT '      6 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'J''
5360 PRINT '      7 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'T''
5370 PRINT '      8 - VALORES NUMERICOS DE MATRIZ 'T-INVERSA''
5380 PRINT '      9 - FIN DE CORRECCIONES'
5390 PRINT 'J      INGRESE CLASE DESEADA :GG ;'
5400 INPUT J1
5410 IF J1<1 OR J1>9 THEN 5390
5420 PAGE
5430 PRINT 'INGRESE VALORES CORRECTOS'
5440 PRINT 'JRETURN PARA DEJAR LOS VALORES ACTUALESJ'
5450 GO TO J1 OF 5480,5620,5620,5620,5620,5620,5620,5620,5460
5460 CLOSE 1
5470 GO TO 2530
5480 CALL 'REWIND',1
5490 READ #1:Z$
5500 PRINT 'NOMBRE ACTUAL:      ';Z$
5510 PRINT 'JNOMBRE CORRECTO:  ';
5520 INPUT Z$
5530 IF Z$='' THEN 5280
5540 IF LEN(Z$)=>50 THEN 5580
5550 FOR J1=LEN(Z$)+1 TO 50
5560 Z$=Z$&' '
5570 NEXT J1
5580 Z$=SEG(Z$,1,50)
5590 CALL 'REWIND',1
5600 WRITE #1:Z$
5610 GO TO 5280
5620 GOSUB 6190
5630 GOSUB 5690
5640 GOSUB 6190
5650 WRITE #1:A1
5660 GO TO B0 OF 5680,5670
5670 WRITE #1:A2
5680 GO TO 5280
5690 REM *** SUB. CORRECCION DE MATRIZ A1 + JA2
5700 DELETE A1,A2
5710 GO TO J1-1 OF 5720,5760,5790,5820,5850,5850,5850
5720 M7=N1
5730 M8=N1
5740 DIM A1(M7,M8)
5750 GO TO 5880
5760 M7=N1
5770 M8=N
5780 GO TO 5740
5790 M7=N0
5800 M8=N1
5810 GO TO 5740
5820 M7=N0
5830 M8=N
5840 GO TO 5740
5850 M7=N1

```

```

5860 M8=N1
5870 DIM A1(M7,M8),A2(M7,M8)
5880 READ #1:A1
5890 GO TO B0 OF 5910,5900
5900 READ #1:A2
5910 DATA 'A','B','C','D','J','T','T-INV'
5920 RESTORE 5910
5930 FOR J2=1 TO J1-1
5940 READ A$
5950 NEXT J2
5960 PRINT 'J      MATRIZ: ';A$
5970 PRINT 'J      FILA (MAX ';M7;') ';
5980 INPUT J3
5990 IF J3<1 OR J3>M7 THEN 5970
6000 PRINT '      COL. (MAX ';M8;') ';
6010 INPUT J4
6020 IF J4<1 OR J4>M8 THEN 6000
6030 PRINT 'JVALOR ACTUAL DE ';A$;'(';J3;',';J4;') ';
6040 PRINT A1(J3,J4);
6050 GO TO B0 OF 6080
6060 PRINT '      ';A2(J3,J4)
6070 GO TO 6090
6080 PRINT
6090 PRINT 'JVALOR CORRECTO:      ';
6100 INPUT B$
6110 IF B$='' THEN 6130
6120 A1(J3,J4)=VAL(B$)
6130 GO TO B0 OF 6180,6140
6140 PRINT 'K
6150 INPUT B$
6160 IF B$='' THEN 6180
6170 A2(J3,J4)=VAL(B$)
6180 RETURN
6190 REM *** SUB. LECTURA INERTE HASTA ANTES DE MATRIZ NO. J2
6200 CALL 'REWIND',1
6210 READ #1:Z$,B0,N1,N,NO
6220 IF J1=2 THEN 6480
6230 DELETE A3
6240 DIM A3(N1,N1)
6250 READ #1:A3
6260 IF J1=3 THEN 6480
6270 DELETE A3
6280 DIM A3(N1,N)
6290 READ #1:A3
6300 IF J1=4 THEN 6480
6310 DELETE A3
6320 DIM A3(NO,N1)
6330 READ #1:A3
6340 IF J1=5 THEN 6480
6350 DELETE A3
6360 DIM A3(NO,N)
6370 READ #1:A3
6380 IF J1=6 THEN 6480
6390 DELETE A3

```



```
6400 DIM A3(N1,N1)
6410 READ #1:A3
6420 GO TO B0 OF 6440,6430
6430 READ #1:A3
6440 IF J1=7 THEN 6480
6450 READ #1:A3
6460 GO TO B0 OF 6480,6470
6470 READ #1:A3
6480 DELETE A3
6490 RETURN
6500 REM *** FIN DE DATOS
6510 IF 08<>1 THEN 3350
6520 OPEN "@C5/X0";1,"F",X$
6530 F8=1
6540 WRITE #1:F8
6550 CLOSE 1
6560 OPEN "@C5/TRAT";1,"F",X$
6570 F7=1
6580 WRITE #1:F7
6590 CLOSE 1
6600 GO TO 100
```

```

1000 REM *** LINEA 1000 @C5/TRA (TECLA 3) ***
1010 O2=3
1020 GO TO 800
1030 REM *** CALCULA E^AT EN FUNCION DEL TIEMPO *****
1040 REM *** ACEPTA VALORES COMPLEJOS EN J, T, T^-1 *****
1050 REM TESIS DE GRADO
1060 REM QUITO,06-MAR-82
1070 REM JULIO PROANO
1080 REM CALCULO DE LA MATRIZ e^Jt
1090 REM
1100 REM CALCULO DE LA MATRIZ DE TRANSICION CUANDO LOS ELEMENTOS
1110 REM DE LAS MATRICES J, T Y T^-1 SON COMPLEJOS
1120 CALL 'UNIT',00
1130 OPEN '@C5/DAT';1,'R',A$
1140 READ #1:Z$,BO,N1,N,NO
1150 DELETE A,B,C,D,J,T,TO
1160 DIM A(N1,N1)
1170 READ #1:A
1180 DELETE A
1190 DIM A(N1,N)
1200 READ #1:A
1210 DELETE A
1220 DIM A(NO,N1)
1230 READ #1:A
1240 DELETE A
1250 DIM A(NO,N)
1260 READ #1:A
1270 DELETE A,J,G0
1280 DIM J(N1,N1)
1290 READ #1:J
1300 IF BO=1 THEN 1330
1310 DIM G0(N1,N1)
1320 READ #1:G0
1330 PRINT 'L OBTENCION DE MATRIZ DE TRANSICION'
1340 PRINT 'J EL NOMBRE DEL PROBLEMA ES : ';Z$
1350 PRINT 'JJ ES CORRECTO ? (SI O NO) : ';
1360 INPUT A$
1370 IF A$='S' OR A$='SI' THEN 1410
1380 PRINT 'JJJPRESIONE LA TECLA 2 PARA INGRESAR DATOS, O'
1390 PRINT 'JLEER DATOS DE ARCHIVO EN EL DISCOG'
1400 END
1410 O7=32
1420 PRINT 'JJ DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI O NO) : ';
1430 INPUT A$
1440 IF A$<>'S' AND A$<>'SI' THEN 1460
1450 O7=51
1460 REM
1470 DELETE V,L,V0
1480 DIM V(N1),L(N1),V0(N1)
1490 I1=1
1500 L=1
1510 FOR I2=1 TO N1
1520 IF I2=N1 THEN 1560
1530 IF ABS(J(I2,I2+1))<=1.0E-11 THEN 1560

```

```
1540 L(I1)=L(I1)+1
1550 GO TO 1600
1560 V(I1)=J(I2,I2)
1570 IF B0=1 THEN 1590
1580 V0(I1)=G0(I2,I2)
1590 I1=I1+1
1600 NEXT I2
1610 I1=I1-1
1620 PRINT @07:"JJ EL NUMERO DE BLOQUES ES: ";I1
1630 FOR Z=1 TO I1
1640 PRINT @07:"JJ EL BLOQUE ";Z;" ES DE ORDEN : ";L(Z)
1650 IF B0=1 THEN 1680
1660 PRINT @07:"JJ Y SU VALOR PROPIO ES : ";V(Z);" + ";V0(Z);" J"
1670 GO TO 1690
1680 PRINT @07:"JJ Y SU VALOR PROPIO ES : ";V(Z)
1690 NEXT Z
1700 REM CALCULO DEL NUMERO DE COLUMNAS DEL ELEMENTO DE LA
1710 REM MATRIZ RESPUESTA
1720 DIM LO(I1)
1730 FOR Z=1 TO I1
1740 LO(Z)=L(Z)
1750 NEXT Z
1760 FOR Y=1 TO I1
1770 IF LO(1)=>LO(Y) THEN 1810
1780 Z=LO(1)
1790 LO(1)=L(Y)
1800 LO(Y)=Z
1810 NEXT Y
1820 N3=LO(1)
1830 DELETE LO
1840 PRINT @07:"JJ EL NUMERO DE COLUMNAS DEL elemento ";
1850 PRINT @07:"DE LA MATRIZ e^Jt ES : ";N3
1860 REM CALCULO DE EL NUMERO DE VALORES PROPIOS QUE TIENE LA MATRIZ
1870 N2=1
1880 FOR Z=2 TO I1
1890 IF I1=1 THEN 1950
1900 IF B0=1 THEN 1930
1910 IF V(Z)=V(Z-1) AND V0(Z)=V0(Z-1) THEN 1950
1920 GO TO 1940
1930 IF V(Z)=V(Z-1) THEN 1950
1940 N2=N2+1
1950 NEXT Z
1960 PRINT @07:"JJ EL NUMERO DE VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ J ES : ";N2
1970 DELETE E0,V1,V2
1980 N4=N1*N2
1990 N5=N1*N3
2000 DIM E0(N4,N5),V1(N2),V2(N2)
2010 IF B0=1 THEN 2020
2020 E0=0
2030 I2=1
2040 K0=0
2050 FOR K1=1 TO I1
2060 IF K1=1 THEN 2120
2070 IF B0=1 THEN 2100
```

```

2080 IF V(K1)=V(K1-1) AND V0(K1)=V0(K1-1) THEN 2150
2090 GO TO 2110
2100 IF V(K1)=V(K1-1) THEN 2150
2110 I2=I2+1
2120 V1(I2)=V(K1)
2130 IF B0=1 THEN 2150
2140 V2(I2)=V0(K1)
2150 FOR K2=1 TO L(K1)
2160 K0=K0+1
2170 FOR K3=1 TO N1
2180 IF K3<K0 THEN 2350
2190 IF K3=K0 THEN 2260
2200 IF K3>K0+L(K1)-K2 THEN 2350
2210 Z1=K3-K0
2220 IF Z1=0 THEN 2280
2230 GOSUB 2300
2240 E0((K0-1)*N2+I2,(K3-1)*N3+1+K3-K0)=1/Z
2250 GO TO 2350
2260 E0((K0-1)*N2+I2,(K3-1)*N3+1)=1
2270 GO TO 2350
2280 Z=1
2290 GO TO 2240
2300 Z=1
2310 FOR J2=1 TO Z1
2320 Z=Z*J2
2330 NEXT J2
2340 RETURN
2350 NEXT K3
2360 NEXT K2
2370 NEXT K1
2380 REM DISPONIBLE LA MATRIZ  $e^{-Jt}$  (N4 X N5) (E0)
2390 PRINT @07:"JJ EL VECTOR DE VALORES PROPIOS (PARTE REAL) ES"
2400 PRINT @07:V1
2410 IF B0=1 THEN 2440
2420 PRINT @07:"JJ EL VECTOR DE V.P. (PARTE IMAG.) ES"
2430 PRINT @07:V2
2440 PRINT "JJ DESEA CALCULAR LA SOLUCION HOMOGENEA (SI O NO) : ";
2450 INPUT A$
2460 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2580
2470 F8=2
2480 PRINT "JJ INGRESE EL VECTOR DE ESTADO INICIAL"
2490 DELETE X0
2500 DIM X0(N1)
2510 FOR J1=1 TO N1
2520 PRINT "J EL ESTADO DE LA VARIABLE ";J1;" ES : ";
2530 INPUT X0(J1)
2540 NEXT J1
2550 PRINT @07:"J EL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES"
2560 PRINT @07:X0
2570 GO TO 2620
2580 F8=1
2590 DELETE X0
2600 DIM X0(N1)
2610 X0=0

```

```
2620 OPEN "@C5/X0";9,"F",A$
2630 WRITE #9:P8,X0
2640 CLOSE 9
2650 IF R0=2 THEN 2690
2660 O1=50
2670 X$="@C5/TRAR"
2680 GO TO 920
2690 O1=51
2700 X$="@C5/TRAC"
2710 GO TO 920
```

```
1000 REM *** CALCULO DE e-At (v.p. reales) @C5/TRAR
1010 Q2=50
1020 GO TO 800
1030 DELETE T,TO
1040 DIM T(N1,N1),TO(N1,N1)
1050 READ #1;T,TO
1060 CLOSE 1
1070 DELETE E1,E2,E3
1080 DIM E1(N4,N5),E2(N4,N5)
1090 IF P8=1 THEN 1110
1100 DIM E3(N4,N3)
1110 E1=0
1120 E2=0
1130 E3=0
1140 I9=1
1150 FOR U=1 TO N1
1160 IF I9=3 THEN 1180
1170 FOR W=1 TO N1
1180 FOR X=1 TO N1
1190 FOR Y=1 TO N2
1200 FOR Z=1 TO N3
1210 GOSUB I9 OF 1290,1320,1350
1220 NEXT Z
1230 NEXT Y
1240 NEXT X
1250 IF I9=3 THEN 1270
1260 NEXT W
1270 NEXT U
1280 GO TO I9 OF 1380,1400,1430
1290 I2=E1((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1300 E1((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)=I2+T(U,X)*E0((X-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1310 RETURN
1320 I2=E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1330 E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)=I2+TO(X,W)*E1((U-1)*N2+Y,(X-1)*N3+Z)
1340 RETURN
1350 I2=E3((U-1)*N2+Y,Z)
1360 E3((U-1)*N2+Y,Z)=I2+X0(X)*E2((U-1)*N2+Y,(X-1)*N3+Z)
1370 RETURN
1380 I9=2
1390 GO TO 1150
1400 I9=3
1410 IF P8=1 THEN 1430
1420 GO TO 1150
1430 O1=52
1440 X#="@C5/TRAI"
1450 GO TO 920
```

```

1000 REM *** CALCULO DE e^At (v.p. complejos)          @C5/TRAC"
1010 O2=51
1020 GO TO 800
1030 DELETE T,T1,T0,T2
1040 DIM T(N1,N1),T1(N1,N1),T0(N1,N1),T2(N1,N1)
1050 READ #1:T,T1,T0,T2
1060 CLOSE 1
1070 DELETE E1,E2,E3,F1,F2
1080 DIM E1(N4,N5),E2(N4,N5),F1(N4,N5),F2(N4,N5)
1090 IF P8=1 THEN 1110
1100 DIM E3(N4,N3)
1110 F1=0
1120 F2=0
1130 E1=0
1140 E2=0
1150 E3=0
1160 FOR I9=1 TO 3
1170 IF I9=3 THEN 1480
1180 FOR U=1 TO N1
1190 IF I9=3 THEN 1210
1200 FOR W=1 TO N1
1210 FOR X=1 TO N1
1220 FOR Y=1 TO N2
1230 FOR Z=1 TO N3
1240 GOSUB I9 OF 1330,1380,1450
1250 NEXT Z
1260 NEXT Y
1270 NEXT X
1280 IF I9=3 THEN 1300
1290 NEXT W
1300 NEXT U
1310 NEXT I9
1320 GO TO 1650
1330 J4=(U-1)*N2+Y
1340 J5=(W-1)*N3+Z
1350 E1(J4,J5)=E1(J4,J5)+T(U,X)*E0((X-1)*N2+Y,J5)
1360 F1(J4,J5)=F1(J4,J5)+T1(U,X)*E0((X-1)*N2+Y,J5)
1370 RETURN
1380 J4=(U-1)*N2+Y
1390 J5=(W-1)*N3+Z
1400 E2(J4,J5)=E2(J4,J5)+T0(X,W)*E1(J4,(X-1)*N3+Z)
1410 E2(J4,J5)=E2(J4,J5)-T2(X,W)*F1(J4,(X-1)*N3+Z)
1420 F2(J4,J5)=F2(J4,J5)+T0(X,W)*F1(J4,(X-1)*N3+Z)
1430 F2(J4,J5)=F2(J4,J5)+T2(X,W)*E1(J4,(X-1)*N3+Z)
1440 RETURN
1450 I2=E3((U-1)*N2+Y,Z)
1460 E3((U-1)*N2+Y,Z)=I2+X0(X)*E2((U-1)*N2+Y,(X-1)*N3+Z)
1470 RETURN
1480 FOR J1=1 TO N2
1490 IF V2(J1)=0 THEN 1620
1500 IF V2(J1)>0 THEN 1570
1510 FOR J2=1 TO N1
1520 FOR J3=1 TO N5
1530 E2((J2-1)*N2+J1,J3)=2*F2((J2-1)*N2+J1,J3)

```

```
1540 NEXT J3
1550 NEXT J2
1560 GO TO 1620
1570 FOR J2=1 TO N1
1580 FOR J3=1 TO N5
1590 E2((J2-1)*N2+J1, J3)=2*E2((J2-1)*N2+J1, J3)
1600 NEXT J3
1610 NEXT J2
1620 NEXT J1
1630 IF P8=1 THEN 1660
1640 GO TO 1180
1650 REM
1660 O1=52
1670 X$="@C5/TRAI"
1680 GO TO 920
```



```

1000 REM ***                               @C5/TRAI
1010 O2=52
1020 GO TO 800
1030 GO TO P6 OF 1040,2160
1040 O7=32
1050 C$='4E'
1060 IF B0=2 THEN 1100
1070 DELETE V2
1080 DIM V2(N2)
1090 V2=0
1100 I9=1
1110 GO TO 1200
1120 I9=1
1130 PRINT 'JJJ SI SE INTERRUMPE LA IMPRESION DEBIDO A UN FORMATO ';
1140 PRINT 'EQUIVOCADO,'
1150 PRINT 'J APARECERA EN LA PANTALLA UN MENSAJE DE ERROR,'
1160 PRINT 'JJ EN ESE CASO AFLASTE LA TECLA 10 PARA ESCOGER OTRO';
1170 PRINT 'FORMATOGG'
1180 PRINT 'JJ AFLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR'
1190 INPUT A$
1200 GOSUB I9 OF 1690,1710
1210 FOR U=1 TO N1
1220 PRINT @O7:
1230 PRINT @O7:'FILA ';U
1240 IF I9=2 THEN 1290
1250 FOR W=1 TO N1
1260 PRINT @O7:
1270 PRINT @O7:'e^At(';U;',';W;')=';' 'J'
1280 GO TO 1300
1290 PRINT @O7:'X(t)(';U;')=';' 'J'
1300 FOR Y=1 TO N2
1310 PRINT @O7:'(';
1320 I8=1
1330 FOR Z=1 TO N3
1340 GOSUB I9 OF 1730,1920
1350 NEXT Z
1360 IF I8=0 THEN 1380
1370 PRINT @O7:'CERO';
1380 PRINT @O7:')';
1390 IF V2(Y)=0 THEN 1520
1400 IF V2(Y)<0 THEN 1470
1410 PRINT @O7:'COS(';
1420 D$=';',S'
1430 D$=REP(C$,POS(D$,';',1),1)
1440 PRINT @O7: USING D$:V2(Y)
1450 PRINT @O7:'t)';
1460 GO TO 1520
1470 PRINT @O7:'SEN(';
1480 D$=';',S'
1490 D$=REP(C$,POS(D$,';',1),1)
1500 PRINT @O7: USING D$: -V2(Y)
1510 PRINT @O7:'t)';
1520 IF V1(Y)=0 THEN 1590
1530 PRINT @O7:'e^';

```

```
1540 D$=";",S"
1550 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
1560 PRINT @07: USING D$:V1(Y)
1570 PRINT @07:"t + "
1580 GO TO 1600
1590 PRINT @07:" + "
1600 NEXT Y
1610 PRINT @07:"J"
1620 IF I9=2 THEN 1640
1630 NEXT W
1640 NEXT U
1650 IF I9=2 THEN 2110
1660 IF P8=1 THEN 2110
1670 I9=2
1680 GO TO 1200
1690 PRINT @07:"L LA MATRIZ e^At ES : "
1700 RETURN
1710 PRINT @07:"L EL VECTOR X(t) ES : "
1720 RETURN
1730 IF E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)=0 THEN 1910
1740 I8=0
1750 IF Z=1 THEN 1870
1760 IF Z=2 THEN 1820
1770 D$="+;",S"
1780 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
1790 PRINT @07: USING D$:E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1800 PRINT @07:"t^";Z-1;" ";
1810 GO TO 1910
1820 D$="+;",S"
1830 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
1840 PRINT @07: USING D$:E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1850 PRINT @07:"t ";
1860 GO TO 1910
1870 D$="+;",S"
1880 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
1890 PRINT @07: USING D$:E2((U-1)*N2+Y,(W-1)*N3+Z)
1900 PRINT @07:" ";
1910 RETURN
1920 IF E3((U-1)*N2+Y,Z)=0 THEN 2100
1930 I8=0
1940 IF Z=1 THEN 2060
1950 IF Z=2 THEN 2010
1960 D$="+;",S"
1970 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
1980 PRINT @07: USING D$:E3((U-1)*N2+Y,Z)
1990 PRINT @07:"t^";Z-1;" ";
2000 GO TO 2100
2010 D$="+;",S"
2020 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
2030 PRINT @07: USING D$:E3((U-1)*N2+Y,Z)
2040 PRINT @07:"t ";
2050 GO TO 2100
2060 D$="+;",S"
2070 D$=REP(C$,POS(D$,";",1),1)
```

```

2080 PRINT @07: USING D$:E3((U-1)*N2+Y,Z)
2090 PRINT @07:" ";
2100 RETURN
2110 IF 07=32 THEN 2220
2120 PRINT @32:"JJ DESEA IMPRIMIR LOS RESULTADOS CON OTRO FORMATO? ";
2130 PRINT "(SI O NO): ";
2140 INPUT A$
2150 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2280
2160 PRINT "J EL FORMATO ACTUAL PARA LOS NUMEROS ES: ";C$
2170 PRINT "J INGRESE FORMATO DESEADO: ";
2180 INPUT C$
2190 07=32
2200 PRINT "J"
2210 GO TO 1120
2220 PRINT "JJ DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI O NO): ";
2230 INPUT A$
2240 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2120
2250 07=51
2260 PRINT @07:"J"
2270 GO TO 1120
2280 PRINT "JJ LOS RESULTADOS SON VALIDOS (SI O NO) : ";
2290 INPUT A$
2300 CALL 'UNIT',00
2310 IF A$="S" OR A$="SI" THEN 2330
2320 GO TO 100
2330 OPEN '@C5/TRAT';1,"F",A$
2340 F7=2
2350 WRITE #1:F7,B0,N2,N3,U1
2360 IF B0=1 THEN 2380
2370 WRITE #1:V2
2380 WRITE #1:E2
2390 CLOSE 1
2400 GO TO P8 OF 2410,2440
2410 PRINT "JJ DESEA AHORA CALCULAR LA SOLUCION HOMOGENEA? (SI O NO): ";
2420 INPUT A$
2430 GO TO 2460
2440 PRINT "JJ DESEA CAMBIAR SOLO LAS COND. INIC. (SI O NO) : ";
2450 INPUT A$
2460 IF A$<>"S" AND A$<>"SI" THEN 2500
2470 01=53
2480 X$="@C5/TRACI"
2490 GO TO 920
2500 IF P8=2 THEN 2320
2510 DELETE X0
2520 DIM X0(N1)
2530 X0=0
2540 GO TO 2320

```

```

1000 REM *** CALCULO DE LA SOLUCION HOMOGENEA @C5/TRACI
1010 O2=53
1020 GO TO 800
1030 F8=2
1040 PRINT 'JJINGRESE EL VECTOR DE ESTADO INICIAL (CONDICIONES ');
1050 PRINT 'INICIALES)'
1060 DELETE X0
1070 DIM X0(N1)
1080 FOR J1=1 TO N1
1090 PRINT 'JEL ESTADO DE LA VARIABLE ';J1;' ES: ';
1100 INPUT X0(J1)
1110 NEXT J1
1120 PRINT @07:"JEL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES"
1130 PRINT @07:X0
1140 OPEN "@C5/X0";9,"F",A$
1150 F8=2
1160 WRITE #9:F8,X0
1170 CLOSE 9
1180 DELETE E3
1190 DIM E3(N4,N3)
1200 E3=0
1210 FOR U=1 TO N1
1220 FOR X=1 TO N1
1230 FOR Y=1 TO N2
1240 FOR Z=1 TO N3
1250 GOSUB 1310
1260 NEXT Z
1270 NEXT Y
1280 NEXT X
1290 NEXT U
1300 GO TO 1340
1310 I2=E3((U-1)*N2+Y,Z)
1320 E3((U-1)*N2+Y,Z)=I2+X0(X)*E2((U-1)*N2+Y,(X-1)*N3+Z)
1330 RETURN
1340 REM
1350 O1=52
1360 X#="@C5/TRAI"
1370 GO TO 920

```

```

1000 REM *** LINEA 1000 ***           @C5/CEYS           (TECLA 4)
1010 O2=4
1020 GO TO 800
1030 REM CALCULO DE ESTADOS Y SALIDAS MEDIANTE DOS METODOS
1040 CALL "UNIT",00
1050 OPEN "@C5/DAT";1,"R",A$
1060 READ #1;Z$
1070 CLOSE 1
1080 PRINT "L CALCULO DE ESTADOS Y SALIDAS"
1090 PRINT "J EL NOMBRE DEL PROBLEMA ES : ";Z$
1100 PRINT "JJ ES CORRECTO ? (SI O NO) ; ";
1110 INPUT A$
1120 IF A$="S" OR A$="SI" THEN 1130
1130 PRINT "JJJ PRESIONE LA TECLA 2 PARA INGRESAR DATOS, O"
1140 PRINT "J LEER DATOS DE ARCHIVO EN EL DISCOG"
1150 END
1160 PRINT "JJ           1.-METODO DE EULER"
1170 PRINT "J           2.-METODO USANDO MATRIZ DE TRANSICION e^At"
1180 PRINT "J           3.-NO SE DESEA CALCULO, REGRESO A MENU"
1190 PRINT "JJ           ESCOJA OPCION : ";
1200 INPUT J1
1210 GO TO J1 OF 1230,1260,100
1220 GO TO 1140
1230 O1=56
1240 X$="@C5/INTI"
1250 GO TO 920
1260 O1=57
1270 X$="@C5/INTIS"
1280 GO TO 920

```

27

```
1000 REM *** CALCULO DE EST. Y SAL. (met. de Euler) @C5/INTD
1010 Q2=56
1020 GO TO 800
1030 E9=1.0E-4
1040 GO TO P6 DE 1050,1390
1050 OPEN "@C5/XO";2,"F",A$
1060 OPEN "@C5/DAT";1,"R",A$
1070 DELETE A,B,C,D,J,N1,N,NO,GO,XO
1080 READ #1;Z$,B0,N1,N,NO
1090 DIM A(N1,N1),B(N1,N),C(NO,N1),D(NO,N),J(N1,N1),XO(N1)
1100 READ #2;P8
1110 IF P8=1 THEN 1200
1120 READ #2;XO
1130 PRINT "JEL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES:"
1140 FOR J1=1 TO N1
1150 PRINT "J XO(";J1;")= ";XO(J1)
1160 NEXT J1
1170 PRINT "JJ DESEA CAMBIARLO (SI O NO): ";
1180 INPUT A$
1190 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 1280
1200 PRINT "JJINGRESE EL VECTOR DE ESTADO INICIAL"
1210 FOR J1=1 TO N1
1220 PRINT "J XO(";J1;")= ";
1230 INPUT XO(J1)
1240 NEXT J1
1250 P8=2
1260 CALL "REWIND",2
1270 WRITE #2;P8,XO
1280 CLOSE 2.
1290 READ #1;A,B,C,D,J
1300 IF B0=1 THEN 1330
1310 DIM GO(N1,N1)
1320 READ #1;GO
1330 CLOSE 1
1340 T4=ABS(J(1,1))
1350 PRINT "LEL SISTEMA TIENE ";N;" ENTRADASJ"
1360 LIST 4890,9998
1370 PRINT "GG"
1380 END
1390 REM *** CONTINUACION ****
1400 P6=1
1410 FOR J1=1 TO N1
1420 IF T4<=ABS(J(J1,J1)) THEN 1440
1430 GO TO 1450
1440 T4=ABS(J(J1,J1))
1450 NEXT J1
1460 T3=1.0E-99
1470 IF B0=1 THEN 1540
1480 T3=ABS(GO(1,1))
1490 FOR J1=1 TO N1
1500 IF T3<=ABS(GO(J1,J1)) THEN 1520
1510 GO TO 1530
1520 T3=ABS(GO(J1,J1))
1530 NEXT J1
```

```
1540 T4=2*PI/(10*T3) MIN 1/(20*T4)
1550 PRINT "L TIEMPO INICIAL (to): ";
1560 INPUT T5
1570 PRINT " TIEMPO FINAL (tf): ";
1580 INPUT T6
1590 PAGE
1600 N6=1
1610 OPEN "@C5/DES";1,"U",A#
1620 CALL "REWIND",1
1630 DELETE A1,B1,C1,D1,U,M1,M2,M3,M4,T
1640 DELETE X1,X2,X3,X4,X5,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,U1,U2
1650 DIM U(N),A1(N1,N1),B1(N1,N),C1(N0),D1(N0),M1(N1),M2(N1)
1660 DIM M3(N0),M4(N0),X1(N1),X2(N1),X3(N1),X4(N1),X5(N1)
1670 DIM Y1(N0),Y2(N0),Y3(N0),Y4(N0),Y5(N0),U1(N),U2(N)
1680 X1=X0
1690 M1=X0
1700 M2=X0
1710 T=T5
1720 GOSUB 5000
1730 C1=0
1740 D1=0
1750 FOR J1=1 TO N0
1760 FOR J2=1 TO N1
1770 C1(J1)=C1(J1)+C(J1,J2)*X0(J2)
1780 NEXT J2
1790 FOR J2=1 TO N
1800 D1(J1)=D1(J1)+D(J1,J2)*U(J2)
1810 NEXT J2
1820 NEXT J1
1830 Y1=C1+D1
1840 M3=Y1
1850 M4=Y1
1860 WRITE #1:Z#,"INTD",T5,T6,N1,N0,N6,M1,M2,M3,M4,T5,X0,Y1
1870 A1=T4*A
1880 B1=T4*B
1890 FOR J1=1 TO N1
1900 A1(J1,J1)=A1(J1,J1)+1
1910 NEXT J1
1920 DELETE A2,B2
1930 DIM A2(N1),B2(N1)
1940 GOSUB 5000
1950 U1=U
1960 X4=X1
1970 GOSUB 1990
1980 GO TO 2110
1990 A2=0
2000 B2=0
2010 FOR J2=1 TO N1
2020 FOR J3=1 TO N
2030 B2(J2)=B2(J2)+B1(J2,J3)*U(J3)
2040 NEXT J3
2050 FOR J3=1 TO N1
2060 A2(J2)=A2(J2)+A1(J2,J3)*X4(J3)
2070 NEXT J3
```

```
2080 NEXT J2
2090 X5=A2+B2
2100 RETURN
2110 T=T+T4
2120 GOSUB 5000
2130 U2=U
2140 X4=X5
2150 X2=X5
2160 GOSUB 1990
2170 X3=X5
2180 X4=X1
2190 T=T-T4
2200 U=U1
2210 A1=2*T4*A
2220 B1=2*T4*B
2230 FOR J1=1 TO N1
2240 A1(J1,J1)=A1(J1,J1)+1
2250 NEXT J1
2260 GOSUB 1990
2270 X4=X5
2280 DELETE A2,B2
2290 DIM A2(N0),B2(N0)
2300 T=T+T4
2310 X5=X2
2320 U=U2
2330 GOSUB 2350
2340 GO TO 2470
2350 A2=0
2360 B2=0
2370 FOR J2=1 TO N0
2380 FOR J3=1 TO N1
2390 A2(J2)=A2(J2)+C(J2,J3)*X5(J3)
2400 NEXT J3
2410 FOR J3=1 TO N
2420 B2(J2)=B2(J2)+D(J2,J3)*U(J3)
2430 NEXT J3
2440 NEXT J2
2450 Y5=A2+B2
2460 RETURN
2470 Y2=Y5
2480 T=T+T4
2490 GOSUB 5000
2500 X5=X3
2510 GOSUB 2350
2520 Y3=Y5
2530 T=T-2*T4
2540 X5=X4
2550 GOSUB 2350
2560 Y4=Y5
2570 X5=X3-X4
2580 Y5=Y3-Y4
2590 X5=ABS(X5)
2600 Y5=ABS(Y5)
2610 FOR J2=1 TO N1
```



```
2620 X5(J2)=X5(J2)/ABS(X3(J2))
2630 NEXT J2
2640 FOR J2=1 TO N0
2650 Y5(J2)=Y5(J2)/ABS(Y3(J2))
2660 NEXT J2
2670 M5=X5(1)
2680 FOR J3=2 TO N1
2690 M5=M5 MAX X5(J3)
2700 NEXT J3
2710 FOR J3=1 TO N0
2720 M5=M5 MAX Y5(J3)
2730 NEXT J3
2740 IF M5<=E9 THEN 2770
2750 T4=T4/2
2760 GO TO 1870
2770 T=T+T4
2780 WRITE #1:T,X2,Y2
2790 FOR J2=1 TO N1
2800 M1(J2)=M1(J2) MAX X2(J2)
2810 M2(J2)=M2(J2) MIN X2(J2)
2820 NEXT J2
2830 FOR J2=1 TO N0
2840 M3(J2)=M3(J2) MAX Y2(J2)
2850 M4(J2)=M4(J2) MIN Y2(J2)
2860 NEXT J2
2870 N6=N6+1
2880 IF T>T6 THEN 2920
2890 X1=X2
2900 T4=T4*1.4
2910 GO TO 1870
2920 CALL 'REWIND',1
2930 READ #1:Z$,A$,T5
2940 WRITE #1:T
2950 READ #1:N1,N0
2960 WRITE #1:N6,M1,M2,M3,M4
2970 CLOSE 1
2980 DELETE U
2990 PRINT USING '10/10X''FIN DE CALCULO''':
3000 PRINT USING '/10X''RETURN PARA CONTINUARG''':
3010 INPUT A$
3020 GO TO 100
4890 REM *** SUBROUTINA DE FUNCIONES DE ENTRADA
4900 REM
4910 REM PROGRAME A CONTINUACION LAS FUNCIONES DE ENTRADA,
4920 REM P. EJ.:
4930 REM
4940 REM U(1)=3*T+8*SIN(5*T)
4950 REM
4960 REM NOTE: T ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE
4970 REM CADA SUBINDICE DE U CORRESPONDE A UNA ENTRADA
4980 REM
4990 REM UNA VEZ TERMINADA LA PROGRAMACION, TECLA 9 PARA CONTINUAR
5000 REM
9999 RETURN
```

```

1000 REM *** CALCULO DE EST, Y SAL, (usando e^At)      @C5/INTDIS
1010 O2=57
1020 GO TO 800
1030 E9=1.0E-4
1040 GO TO P6 OF 1050,1450
1050 OPEN '@C5/TRAT';3,'R',A$
1060 READ #3:P7
1070 IF P7=2 THEN 1110
1080 PRINT "JJJPRESIONE LA TECLA 3 PARA CALCULAR"
1090 PRINT "LA MATRIZ DE TRANSICIONG"
1100 END
1110 OPEN '@C5/XO';2,'F',A$
1120 OPEN '@C5/DAT';1,'R',A$
1130 DELETE A,B,C,D,J,N1,N,NO,GO,XO
1140 READ #1:Z$,B0,N1,N,NO
1150 DIM A(N1,N1),B(N1,N),C(NO,N1),D(NO,N),J(N1,N1),XO(N1)
1160 READ #2:P8
1170 IF P8=1 THEN 1260
1180 READ #2:X0
1190 PRINT "JEL VECTOR DE ESTADO INICIAL ES:"
1200 FOR J1=1 TO N1
1210 PRINT "J XO(";J1;")= ";X0(J1)
1220 NEXT J1
1230 PRINT "JJ DESEA CAMBIARLO (SI O NO): ";
1240 INPUT A$
1250 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 1340
1260 PRINT "JJINGRESE EL VECTOR DE ESTADO INICIAL"
1270 FOR J1=1 TO N1
1280 PRINT "J XO(";J1;")= ";
1290 INPUT X0(J1)
1300 NEXT J1
1310 P8=2
1320 CALL "REWIND",2
1330 WRITE #2:P8,X0
1340 CLOSE 2
1350 READ #1:A,B,C,D,J
1360 IF B0=1 THEN 1390
1370 DIM G0(N1,N1)
1380 READ #1:G0
1390 CLOSE 1
1400 T4=ABS(J(1,1))
1410 PRINT "LEL SISTEMA TIENE ";N;" ENTRADASJ"
1420 LIST 4890,9998
1430 PRINT "GG"
1440 END
1450 REM *** CONTINUACION ***
1460 OPEN '@C5/TRAT';3,'R',A$
1470 READ #3:P7
1480 READ #3:B0,N2,N3
1490 DELETE V1,V2,E2
1500 DIM V1(N2),E2(N1*N2,N1*N3)
1510 READ #3:V1
1520 IF B0=1 THEN 1550
1530 DIM V2(N2)

```

```

1540 READ #3:V2
1550 READ #3:E2
1560 CLOSE 3
1570 P6=1
1580 FOR J1=1 TO N1
1590 IF T4<=ABS(J(J1,J1)) THEN 1610
1600 GO TO 1620
1610 T4=ABS(J(J1,J1))
1620 NEXT J1
1630 T3=1.0E-99
1640 IF B0=1 THEN 1710
1650 T3=ABS(GO(1,1))
1660 FOR J1=1 TO N1
1670 IF T3<=ABS(GO(J1,J1)) THEN 1690
1680 GO TO 1700
1690 T3=ABS(GO(J1,J1))
1700 NEXT J1
1710 T4=2*PI/(10*T3) MIN 1/(20*T4)
1720 PRINT 'L TIEMPO INICIAL (t0): ';
1730 INPUT T5
1740 PRINT ' TIEMPO FINAL (tf): ';
1750 INPUT T6
1760 PAGE
1770 N6=1
1780 CALL 'UNIT',00
1790 OPEN '@C5/DES';1,'U',A$
1800 CALL 'REWIND',1
1810 DELETE U,U1,U2,C1,D1,M1,M2,M3,M4,T,F0,F1,F2,F3
1820 DELETE X1,X2,X3,X4,X5,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,J,G0
1830 DIM U(N),U1(N),U2(N),C1(N0),D1(N0),F0(N1,N1)
1840 DIM F1(N1,N1),F2(N1,N),F3(N1,N),M1(N1),M2(N1)
1850 DIM M3(N0),M4(N0),X1(N1),X2(N1),X3(N1),X4(N1)
1860 DIM X5(N1),Y1(N0),Y2(N0),Y3(N0),Y4(N0),Y5(N0)
1870 X1=X0
1880 M1=X0
1890 M2=X0
1900 T=T5
1910 GOSUB 5000
1920 C1=0
1930 D1=0
1940 FOR J1=1 TO N0
1950 FOR J2=1 TO N1
1960 C1(J1)=C1(J1)+C(J1,J2)*X0(J2)
1970 NEXT J2
1980 FOR J2=1 TO N
1990 D1(J1)=D1(J1)+D(J1,J2)*U(J2)
2000 NEXT J2
2010 NEXT J1
2020 Y1=C1+D1
2030 M3=Y1
2040 M4=Y1
2050 WRITE #1:Z$, 'INTDS',T5,T6,N1,N0,N6,M1,M2,M3,M4,T5,X0,Y1
2060 GOSUB 2080
2070 GO TO 2740

```

```

2080 T7=T4
2090 F0=0
2100 J5=1
2110 GOSUB 2130
2120 GO TO 2380
2130 F1=0
2140 FOR J1=1 TO N1
2150 FOR J2=1 TO N1
2160 FOR J3=1 TO N2
2170 Z9=0
2180 FOR J4=1 TO N3
2190 Z9=E2((J1-1)*N2+J3,(J2-1)*N3+J4)*T7^(J4-1)+Z9
2200 NEXT J4
2210 IF B0=1 THEN 2270
2220 IF V2(J3)=0 THEN 2270
2230 IF V2(J3)<0 THEN 2260
2240 Z9=Z9*COS(V2(J3)*T7)
2250 GO TO 2270
2260 Z9=Z9*SIN(-V2(J3)*T7)
2270 Z9=Z9*EXP(V1(J3)*T7)
2280 GO TO J5 OF 2290,2310,2330
2290 F0(J1,J2)=F0(J1,J2)+Z9
2300 GO TO 2340
2310 F1(J1,J2)=F1(J1,J2)+2*Z9
2320 GO TO 2340
2330 F1(J1,J2)=F1(J1,J2)+4*Z9
2340 NEXT J3
2350 NEXT J2
2360 NEXT J1
2370 RETURN
2380 REM
2390 F1=F0
2400 GOSUB 2430
2410 F3=F2+B
2420 GO TO 2520
2430 F2=0
2440 FOR K1=1 TO N1
2450 FOR K2=1 TO N
2460 FOR K3=1 TO N1
2470 F2(K1,K2)=F2(K1,K2)+F1(K1,K3)*B(K3,K2)
2480 NEXT K3
2490 NEXT K2
2500 NEXT K1
2510 RETURN
2520 J5=3
2530 REM
2540 J9=2
2550 REM J9 -- NO. DE INTERVALOS PARA FORMULA DE SIMPSON (DEBE SER PAR)
2560 T7=0
2570 FOR J0=1 TO J9-1 STEP 2
2580 T7=T7+J0*T4/J9
2590 GOSUB 2130
2600 GOSUB 2430
2610 F3=F3+F2

```

```
2620 NEXT J0
2630 IF J9=2 THEN 2720
2640 J5=2
2650 T7=0
2660 FOR J0=2 TO J9-2 STEP 2
2670 T7=T7+J0*T4/J9
2680 GOSUB 2130
2690 GOSUB 2430
2700 F3=F3+F2
2710 NEXT J0
2720 F3=T4/(J9*3)*F3
2730 RETURN
2740 DELETE A2,B2
2750 DIM A2(N1),B2(N1)
2760 GOSUB 5000
2770 U1=U
2780 X4=X1
2790 GOSUB 2810
2800 GO TO 2930
2810 A2=0
2820 B2=0
2830 FOR J2=1 TO N1
2840 FOR J3=1 TO N
2850 B2(J2)=B2(J2)+F3(J2,J3)*U(J3)
2860 NEXT J3
2870 FOR J3=1 TO N1
2880 A2(J2)=A2(J2)+F0(J2,J3)*X4(J3)
2890 NEXT J3
2900 NEXT J2
2910 X5=A2+B2
2920 RETURN
2930 T=T+T4
2940 GOSUB 5000
2950 U2=U
2960 X4=X5
2970 X2=X5
2980 GOSUB 2810
2990 X3=X5
3000 X4=X1
3010 T=T-T4
3020 U=U1
3030 T4=2*T4
3040 GOSUB 2080
3050 GOSUB 2810
3060 T4=T4/2
3070 X4=X5
3080 DELETE A2,B2
3090 DIM A2(N0),B2(N0)
3100 T=T+T4
3110 X5=X2
3120 U=U2
3130 GOSUB 3150
3140 GO TO 3270
3150 A2=0
```

```
3160 B2=0
3170 FOR J2=1 TO N0
3180 FOR J3=1 TO N1
3190 A2(J2)=A2(J2)+C(J2,J3)*X5(J3)
3200 NEXT J3
3210 FOR J3=1 TO N
3220 B2(J2)=B2(J2)+D(J2,J3)*U(J3)
3230 NEXT J3
3240 NEXT J2
3250 Y5=A2+B2
3260 RETURN
3270 Y2=Y5
3280 T=T+T4
3290 GOSUB 5000
3300 X5=X3
3310 GOSUB 3150
3320 Y3=Y5
3330 T=T-T4-T4
3340 X5=X4
3350 GOSUB 3150
3360 Y4=Y5
3370 X5=X3-X4
3380 Y5=Y3-Y4
3390 X5=ABS(X5)
3400 Y5=ABS(Y5)
3410 FOR J2=1 TO N1
3420 X5(J2)=X5(J2)/ABS(X3(J2))
3430 NEXT J2
3440 FOR J2=1 TO N0
3450 Y5(J2)=Y5(J2)/ABS(Y3(J2))
3460 NEXT J2
3470 M5=X5(1)
3480 FOR J3=2 TO N1
3490 M5=M5 MAX X5(J3)
3500 NEXT J3
3510 FOR J3=1 TO N0
3520 M5=M5 MAX Y5(J3)
3530 NEXT J3
3540 IF M5<=E9 THEN 3570
3550 T4=T4/2
3560 GO TO 2060
3570 T=T+T4
3580 WRITE #1:T,X2,Y2
3590 FOR J2=1 TO N1
3600 M1(J2)=M1(J2) MAX X2(J2)
3610 M2(J2)=M2(J2) MIN X2(J2)
3620 NEXT J2
3630 FOR J2=1 TO N0
3640 M3(J2)=M3(J2) MAX Y2(J2)
3650 M4(J2)=M4(J2) MIN Y2(J2)
3660 NEXT J2
3670 N6=N6+1
3680 IF T>T6 THEN 3720
3690 X1=X2
```

```

3700 T4=T4*1.4
3710 GO TO 2060
3720 CALL "REWIND",1
3730 READ #1:Z$,A$,T5
3740 WRITE #1:T
3750 READ #1:N1,NO
3760 WRITE #1:N6,M1,M2,M3,M4
3770 CLOSE 1
3780 DELETE U,F1,F2,F3,F0
3790 PRINT USING "10/10X" "FIN DE CALCULO***";
3800 PRINT USING "/10X" "RETURN PARA CONTINUARG***";
3810 INPUT A$
3820 GO TO 100
4890 REM *** SUBROUTINA DE FUNCIONES DE ENTRADA
4900 REM
4910 REM PROGRAME A CONTINUACION LAS FUNCIONES DE ENTRADA,
4920 REM P, EJ.:
4930 REM
4940 REM U(1)=3*T+8*SIN(5*T)
4950 REM
4960 REM NOTE: T ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE
4970 REM CADA SUBINDICE DE U CORRESPONDE A UNA ENTRADA
4980 REM
4990 REM UNA VEZ TERMINA LA PROGRAMACION, TECLA B PARA CONTINUAR
5000 REM
9999 RETURN
    
```

```

1000 REM *** LINEA 1000 *** @C5/GEYS (TECLA 5)
1010 O2=5
1020 GO TO 800
1030 REM PROGRAMA QUE SACA RESULTADOS EN FORMA GRAFICA
1040 CALL "UNIT",00
1050 OPEN "@C5/DES";1,"R",X$
1060 READ #1;Z$,A$,T5,T6,N1,N0,N6
1070 DELETE M1,M2,M3,M4,X1,Y1,X5,Y5,U1,U2,U3,U4
1080 DELETE E,E0,E1,E2,A,B,C,D,J,G0,T,T1,T2,A1,A2,A3,F1,F2,F0
1090 DIM M1(N1),M2(N1),M3(N0),M4(N0),X1(N1),Y1(N0)
1100 Z9=1
1110 IF MEMORY<2*8*N6+1000 THEN 1140
1120 DIM X5(N6),Y5(N6)
1130 Z9=2
1140 READ #1;M1,M2,M3,M4
1150 X9=1,792
1160 Y9=2,816
1170 A9=1
1180 PRINT "L GRAFICOS"
1190 PRINT "J EL NOMBRE DEL PROBLEMA ES : ";Z$
1200 PRINT "JJ ES CORRECTO ? (SI O NO) : ";
1210 INPUT A$
1220 IF A$="S" OR A$="SI" THEN 1400
1230 PRINT "JJJ PRESIONE LA TECLA 2 PARA INGRESAR DATOS, O"
1240 PRINT "J LEER DATOS DE ARCHIVO EN EL DISCOG"
1250 END
1260 REM *** SUB. DISPOSITIVO GRAFIZ.
1270 O5=32
1280 PRINT "J DESEA GRAFICO(S) EN PAPEL (SI O NO): ";
1290 INPUT A$
1300 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 1370
1310 O5=1
1320 IF A9<>1 THEN 1340
1330 PRINT "J AJUSTE TECLAS SET AL TAMANO DEL PAPEL A USARSE"
1340 PRINT "J COLOQUE O CAMBIE PAPEL Y PLUMA"
1350 PRINT "J RETURN PARA CONTINUARG"
1360 INPUT A$
1370 PAGE
1380 A9=2
1390 RETURN
1400 REM *** SELECCION DE GRAFICO
1410 CALL "REWIND",1
1420 READ #1;Z$,A$,T5,T6,N1,N0,N6,M1,M2,M3,M4,T,X1,Y1
1430 PRINT "L 1 - GRAFICO(S) DE ESTADOS"
1440 PRINT "J 2 - GRAFICO(S) DE SALIDA(S)"
1450 PRINT "J 3 - FIN DE GRAFICOS (REGRESO AL MENU)"
1460 PRINT "J CLASE DESEADA: ";
1470 INPUT J1
1480 IF J1<1 OR J1>3 THEN 1460
1490 GO TO J1 OF 1500,3260,100
1500 PRINT "J NUMERO DE LA VARIABLE DE ESTADO (MAX ";N1;"): ";
1510 INPUT J2
1520 IF J2<1 OR J2>N1 THEN 1500
1530 T$=STR(J2)

```



```

1540 T$='GRAFICO DE LA VARIABLE DE ESTADO NO.'&T$
1550 T8=T5
1560 T9=T6
1570 M8=M2(J2)
1580 M9=M1(J2)
1590 U1=0
1600 U2=0
1610 U3=T8
1620 U4=M8
1630 GOSUB 1660
1640 GOSUB 1260
1650 GO TO 2240
1660 REM
1670 PRINT USING 'PFA':T$
1680 PRINT 'J INGRESE PARAMETROS PARA GRAFICO'
1690 PRINT 'JSE MUESTRAN ULTIMOS VALORES, RETURN PARA DEJAR LOS MISMOS'
1700 PRINT USING '/14X''Tmin''4D,3D':T8
1710 PRINT USING '/14X''Tmax''4D,3D':T9
1720 PRINT USING '/3X''Minimo vertical''4D,3D':M8
1730 PRINT USING '/3X''Máximo vertical''4D,3D':M9
1740 PRINT USING '/6X''Marcas eje t''4D,3D':U1
1750 PRINT USING '/2X''Marcas eje vert.''4D,3D':U2
1760 PRINT USING '/5X''Abscisa cruce''4D,3D':U3
1770 PRINT USING '/4X''Ordenada cruce''4D,3D':U4
1780 HOME
1790 PRINT USING '6/35T''Valor deseado '',S':
1800 INPUT B$
1810 IF B$='' THEN 1830
1820 T8=VAL(B$)
1830 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
1840 INPUT B$
1850 IF B$='' THEN 1870
1860 T9=VAL(B$)
1870 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
1880 INPUT B$
1890 IF B$='' THEN 1910
1900 M8=VAL(B$)
1910 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
1920 INPUT B$
1930 IF B$='' THEN 1950
1940 M9=VAL(B$)
1950 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
1960 INPUT B$
1970 IF B$='' THEN 1990
1980 U1=VAL(B$)
1990 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
2000 INPUT B$
2010 IF B$='' THEN 2030
2020 U2=VAL(B$)
2030 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':
2040 INPUT B$
2050 IF B$='' THEN 2070
2060 U3=VAL(B$)
2070 PRINT USING '/35T''Valor deseado '',S':

```

```
2080 INPUT B$
2090 IF B$="" THEN 2110
2100 U4=VAL(B$)
2110 PRINT USING 2120:
2120 IMAGE /30T"CORRECTO? (SI O NO): ",S
2130 INPUT A$
2140 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 1660
2150 PAGE
2160 RETURN
2170 REM *** SUB. DE WINDOW Y DE VIEWPORT
2180 WINDOW T8,T9,M8,M9
2190 IF O5=32 THEN 2220
2200 VIEWPORT 14,2,147,12,99
2210 GO TO 2230
2220 VIEWPORT 14,2,127,12,99
2230 RETURN
2240 GOSUB 2170
2250 GO TO Z9 OF 2280,2260
2260 X5(1)=T
2270 Y5(1)=X1(J2)
2280 MOVE @05:T,X1(J2)
2290 FOR J3=2 TO N6
2300 READ #1:T,X1,Y1
2310 GO TO Z9 OF 2340,2320
2320 X5(J3)=T
2330 Y5(J3)=X1(J2)
2340 DRAW @05:T,X1(J2)
2350 NEXT J3
2360 HOME
2370 PRINT " EJES? (SI O NO): ";
2380 INPUT A$
2390 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 2930
2400 REM *** EJES
2410 GOSUB 2170
2420 MOVE @05:U3,U4
2430 IF U3=>T9 THEN 2600
2440 FOR J3=U3 TO T9 STEP U1
2450 GOSUB 2470
2460 GO TO 2590
2470 GOSUB 2170
2480 DRAW @05:J3,U4
2490 IF J3>T9 OR J3<T8 THEN 2580
2500 SCALE 1,1
2510 RDRAW @05:0,1
2520 A$=STR(J3)
2530 A$=REP(" ",1,1)
2540 RMOVE @05:-LEN(A$)/2*X9,-1.1*Y9-1
2550 PRINT @05:A$;
2560 GOSUB 2170
2570 MOVE @05:J3,U4
2580 RETURN
2590 NEXT J3
2600 IF U3<=T8 THEN 2660
2610 GOSUB 2170
```

```
2620 MOVE @05:U3,U4
2630 FOR J3=U3-U1 TO T8 STEP -U1
2640 GOSUB 2470
2650 NEXT J3
2660 REM *** EJE VERTICAL
2670 GOSUB 2170
2680 MOVE @05:U3,U4
2690 IF U4>M9 THEN 2840
2700 FOR J3=U4 TO M9 STEP U2
2710 GOSUB 2730
2720 GO TO 2830
2730 GOSUB 2170
2740 DRAW @05:U3,J3
2750 IF J3<M8 OR J3>M9 THEN 2820
2760 SCALE 1,1
2770 RDRAW @05:1,0
2780 RMOVE @05:-4*Y9,-0,4*Y9
2790 PRINT @05: USING "FD,2D,S";J3
2800 GOSUB 2170
2810 MOVE @05:U3,J3
2820 RETURN
2830 NEXT J3
2840 IF U4<=M8 THEN 2900
2850 GOSUB 2170
2860 MOVE @05:U3,U4
2870 FOR J3=U4-U2 TO M8 STEP -U2
2880 GOSUB 2730
2890 NEXT J3
2900 REM
2910 HOME
2920 PRINT
2930 PRINT " LEYENDAS? (SI O NO): ";
2940 INPUT A$
2950 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 3130
2960 A$="TIEMPO"
2970 GOSUB 2170
2980 MOVE @05:(T8+T9)/2,M8
2990 SCALE 1,1
3000 RMOVE @05:-LEN(A$)/2*X9,-2,2*Y9
3010 PRINT @05:A$
3020 GOSUB 2170
3030 A$=SEG(T$,POS(T$,"VAR",1),LEN(T$)+1)
3040 MOVE @05:T8,(M8+M9)/2
3050 SCALE 1,1
3060 RMOVE @05:-4*Y9,-LEN(A$)/2*X9
3070 PRINT @05,25:90
3080 PRINT @05:A$;
3090 PRINT @05,7;
3100 GOSUB 2170
3110 HOME
3120 PRINT "J"
3130 PRINT " DESEA REPETIR EL GRAFICO? (SI O NO): ";
3140 INPUT A$
3150 IF NOT(A$="S" OR A$="SI") THEN 1400
```

```
3160 GOSUB 1660
3170 GOSUB 1260
3180 GOSUB 2170
3190 GO TO Z9 OF 3200,3230
3200 CALL "REWIND",1
3210 READ #1:Z$,A$,T5,T6,N1,N0,N6,M1,M2,M3,M4,T,X1,Y1
3220 GO TO J2 OF 2280,3450
3230 MOVE @05:X5(1),Y5(1)
3240 DRAW @05:X5,Y5
3250 GO TO 2360
3260 PRINT "J NUMERO DE LA VARIABLE DE SALIDA (MAX ";NO;"); ";
3270 INPUT J2
3280 IF J2<1 OR J2>NO THEN 3260
3290 T$=STR(J2)
3300 T$="GRAFICO DE LA VARIABLE DE SALIDA NO."&T$
3310 T8=T5
3320 T9=T6
3330 M8=M4(J2)
3340 M9=M3(J2)
3350 U1=0
3360 U2=0
3370 U3=T8
3380 U4=M8
3390 GOSUB 1660
3400 GOSUB 1260
3410 GOSUB 2170
3420 GO TO Z9 OF 3450,3430
3430 X5(1)=T
3440 Y5(1)=Y1(J2)
3450 MOVE @05:T,Y1(J2)
3460 FOR J3=2 TO N6
3470 READ #1:T,X1,Y1
3480 GO TO Z9 OF 3510,3490
3490 X5(J3)=T
3500 Y5(J3)=Y1(J2)
3510 DRAW @05:T,Y1(J2)
3520 NEXT J3
3530 GO TO 2360
```

```

1000 REM CALCULO DE CONTR. OBSERV. Y ESTAB @C5/COE (TECLA 6)
1010 Q2=6
1020 GO TO 800
1030 CALL 'UNIT',00
1040 OPEN '@C5/DAT';1,'R',A$
1050 READ #1;Z$
1060 CLOSE 1
1070 PRINT 'L ANALISIS CUALITATIVO (CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD,'
1080 PRINT ' Y ESTABILIDAD),'
1090 PRINT 'J EL NOMBRE DEL PROBLEMA ES : ";Z$
1100 PRINT 'JJ ES CORRECTO ? (SI O NO) : ";
1110 INPUT A$
1120 IF A$='S' OR A$='SI' THEN 1160
1130 PRINT 'JJJ PRESIONE LA TECLA 2 PARA INGRESAR DATOS, O'
1140 PRINT 'J LEER DATOS DE ARCHIVO EN EL DISCOG'
1150 END
1160 PRINT 'L ANALISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS'
1170 PRINT 'J 1.- CONTROLABILIDAD'
1180 PRINT 'J 2.- OBSERVABILIDAD'
1190 PRINT 'J 3.- ESTABILIDAD'
1200 PRINT 'J 4.- FIN DE ANALISIS'
1210 PRINT 'JJ ESCOGER OPCION : ";
1220 INPUT J1
1230 PAGE
1240 GO TO J1 OF 1260,2280,3460,100
1250 GO TO 1160
1260 PRINT 'L 1.- CONTROLABILIDAD DE ESTADO'
1270 PRINT 'J 2.- CONTROLABILIDAD DE SALIDA'
1280 PRINT 'JJ ESCOGER OPCION: ";
1290 INPUT J1
1300 PAGE
1310 GO TO J1 OF 1330,1330
1320 GO TO 1260
1330 CALL 'UNIT',00
1340 OPEN '@C5/DAT';1,'R',A$
1350 READ #1;Z$,B0,N1,N,NO
1360 DELETE A,B,C,D,Q,Q1,Q2
1370 DIM A(N1,N1),B(N1,N),Q(N1,N1*N),Q1(N1,N),Q2(N1,N)
1380 READ #1;A,B
1390 IF J1=1 THEN 1440
1400 DELETE Q3
1410 DIM Q3(NO,N*(N1+1)),C(NO,N1),D(NO,N)
1420 READ #1;C,D
1430 Q3=0
1440 CLOSE 1
1450 REM CALCULO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD
1460 Q1=B
1470 FOR K=1 TO N1
1480 IF K=1 THEN 1600
1490 Q2=0
1500 REM SUBRRUTINA DE MULTIPLICACION DE A^i*B
1510 FOR K1=1 TO N1
1520 FOR K2=1 TO N
1530 FOR K3=1 TO N1

```

```

1540 Q2(K1,K2)=Q2(K1,K2)+A(K1,K3)*Q1(K3,K2)
1550 NEXT K3
1560 NEXT K2
1570 NEXT K1
1580 Q1=Q2
1590 REM TRANSFERENCIA DEL PROD. ANT. A LA MATRIZ Q
1600 K3=(K-1)*N+1
1610 FOR K1=1 TO N1
1620 FOR K2=K3 TO K*N
1630 Q(K1,K2)=Q1(K1,K2-K3+1)
1640 NEXT K2
1650 NEXT K1
1660 NEXT K
1670 IF J1=1 THEN 1840
1680 REM MULTIFPLICACION C*Q
1690 FOR K1=1 TO N0
1700 FOR K2=1 TO N*N1
1710 FOR K3=1 TO N1
1720 Q3(K1,K2)=Q3(K1,K2)+C(K1,K3)*Q(K3,K2)
1730 NEXT K3
1740 NEXT K2
1750 NEXT K1
1760 REM TRANSFERENCIA DE D A Q3
1770 K3=N*N1+1
1780 FOR K1=1 TO N0
1790 FOR K2=K3 TO N*(N1+1)
1800 Q3(K1,K2)=D(K1,K2-K3+1)
1810 NEXT K2
1820 NEXT K1
1830 IF J1=2 THEN 3020
1840 REM CALCULO DEL RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD
1850 FOR K=1 TO N1-1
1860 U=ABS(Q(K,K))
1870 R=K
1880 S=K
1890 FOR K1=K TO N1
1900 FOR K2=K TO N1*N
1910 IF U->ABS(Q(K1,K2)) THEN 1950
1920 U=ABS(Q(K1,K2))
1930 R=K1
1940 S=K2
1950 NEXT K2
1960 NEXT K1
1970 IF ABS(Q(R,S))<=1.0E-11 THEN 2250
1980 IF R=K THEN 2040
1990 FOR K1=K TO N1*N
2000 Z8=Q(K,K1)
2010 Q(K,K1)=Q(R,K1)
2020 Q(R,K1)=Z8
2030 NEXT K1
2040 IF S=K THEN 2110
2050 FOR K1=1 TO N1
2060 Z8=Q(K1,K)
2070 Q(K1,K)=Q(K1,S)

```

```

2080 Q(K1,S)=Z8
2090 NEXT K1
2100 REM *****
2110 IF K+1>N1 THEN 2180
2120 FOR K1=K+1 TO N1
2130 Z1=-Q(K1,K)/Q(K,K)
2140 FOR K2=K+1 TO N1*N
2150 Q(K1,K2)=Q(K1,K2)+Z1*Q(K,K2)
2160 NEXT K2
2170 NEXT K1
2180 NEXT K
2190 K=N1
2200 IF ABS(Q(N1,N1))<=1.0E-11 THEN 2250
2210 PRINT "L EL SISTEMA ES CONTROLABLE "
2220 PRINT "JJ *** APLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR "
2230 INPUT A$
2240 GO TO 1160
2250 PRINT "L EL SISTEMA ES INCONTROLABLE "
2260 REM (K-1) ES EL RANGO DE LA MATRIZ
2270 GO TO 2220
2280 CALL "UNIT",00
2290 OPEN "@C5/DAT";1,"R",A$
2300 READ #1:Z$,B0,N1,N,NO
2310 DELETE A,B,C,D,Q,Q1,Q2
2320 DIM A(N1,N1),B(N1,N),C(NO,N1),Q(NO*N1,N1),Q1(NO,N1),Q2(NO,N1)
2330 READ #1:A,B,C
2340 DELETE B
2350 CLOSE 1
2360 REM CALCULO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD
2370 Q1=C
2380 FOR K=1 TO N1
2390 IF K=1 THEN 2510
2400 Q2=0
2410 REM SUBROUTINA DE MULTIPLICACION DE C*A^i
2420 FOR K1=1 TO NO
2430 FOR K2=1 TO N1
2440 FOR K3=1 TO N1
2450 Q2(K1,K2)=Q2(K1,K2)+Q1(K1,K3)*A(K3,K2)
2460 NEXT K3
2470 NEXT K2
2480 NEXT K1
2490 Q1=Q2
2500 REM TRANSFERENCIA DEL PROD. ANT. A LA MATRIZ Q
2510 K3=(K-1)*NO+1
2520 FOR K1=K3 TO K*NO
2530 FOR K2=1 TO N1
2540 Q(K1,K2)=Q1(K1-K3+1,K2)
2550 NEXT K2
2560 NEXT K1
2570 NEXT K
2580 REM CALCULO DEL RANGO DE LA MATRIZ DE OBSERVABILIDAD
2590 FOR K=1 TO N1-1
2600 U=ABS(Q(K,K))
2610 R=K

```

```

2620 S=K
2630 FOR K1=K TO N1*NO
2640 FOR K2=K TO N1
2650 IF U=>ABS(Q(K1,K2)) THEN 2690
2660 U=ABS(Q(K1,K2))
2670 R=K1
2680 S=K2
2690 NEXT K2
2700 NEXT K1
2710 IF ABS(Q(R,S))<=1.0E-11 THEN 2990
2720 IF R=K THEN 2780
2730 FOR K1=K TO N1
2740 Z8=Q(K,K1)
2750 Q(K,K1)=Q(R,K1)
2760 Q(R,K1)=Z8
2770 NEXT K1
2780 IF S=K THEN 2850
2790 FOR K1=1 TO N1*NO
2800 Z8=Q(K1,K)
2810 Q(K1,K)=Q(K1,S)
2820 Q(K1,S)=Z8
2830 NEXT K1
2840 REM     ****
2850 IF K+1>N1 THEN 2920
2860 FOR K1=K+1 TO N1*NO
2870 Z1=-Q(K1,K)/Q(K,K)
2880 FOR K2=K+1 TO N1
2890 Q(K1,K2)=Q(K1,K2)+Z1*Q(K,K2)
2900 NEXT K2
2910 NEXT K1
2920 NEXT K
2930 K=N1
2940 IF ABS(Q(N1,N1))<=1.0E-11 THEN 2990
2950 PRINT "L   EL SISTEMA ES OBSERVABLE"
2960 PRINT "JJ  *** APLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR "
2970 INPUT A$
2980 GO TO 1160
2990 PRINT "L   EL SISTEMA ES INOBSERVABLE "
3000 REM (K-1) ES EL RANGO DE LA MATRIZ
3010 GO TO 2960
3020 REM CALCULO DEL RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD
3030 FOR K=1 TO NO-1
3040 U=ABS(Q3(K,K))
3050 R=K
3060 S=K
3070 FOR K1=K TO NO
3080 FOR K2=K TO (N1+1)*N
3090 IF U=>ABS(Q3(K1,K2)) THEN 3130
3100 U=ABS(Q3(K1,K2))
3110 R=K1
3120 S=K2
3130 NEXT K2
3140 NEXT K1
3150 IF ABS(Q3(R,S))<=1.0E-11 THEN 3430

```



```

3160 IF R=K THEN 3220
3170 FOR K1=K TO (N1+1)*N
3180 Z8=Q3(K,K1)
3190 Q3(K,K1)=Q3(R,K1)
3200 Q3(R,K1)=Z8
3210 NEXT K1
3220 IF S=K THEN 3290
3230 FOR K1=1 TO NO
3240 Z8=Q3(K1,K)
3250 Q3(K1,K)=Q3(K1,S)
3260 Q3(K1,S)=Z8
3270 NEXT K1
3280 REM     ****
3290 IF K+1>NO MIN (N1+1)*N THEN 3360
3300 FOR K1=K+1 TO NO
3310 Z1=-Q3(K1,K)/Q3(K,K)
3320 FOR K2=K+1 TO (N1+1)*N
3330 Q3(K1,K2)=Q3(K1,K2)+Z1*Q3(K,K2)
3340 NEXT K2
3350 NEXT K1
3360 NEXT K
3370 K=NO
3380 IF ABS(Q3(NO,NO))<=1.0E-11 THEN 3430
3390 PRINT 'L   LA SALIDA ES CONTROLABLE '
3400 PRINT 'JJ  *** AFLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR '
3410 INPUT A$
3420 GO TO 1160
3430 PRINT 'L   LA SALIDA ES INCONTROLABLE '
3440 REM (K-1) ES EL RANGO DE LA MATRIZ
3450 GO TO 3400
3460 CALL 'UNIT',00
3470 OPEN '@C5/DAT';1,'R',A$
3480 DELETE B,C,D,J,GO
3490 READ #1;Z$,B0,N1,N,NO
3500 DIM B(N1,N),C(NO,N1),D(NO,N),J(N1,N1),GO(N1,N1)
3510 READ #1;J,B,C,D,J
3520 IF B0=2 THEN 3550
3530 GO=0
3540 GO TO 3560
3550 READ #1;GO
3560 CLOSE 1
3570 DELETE B,C,D
3580 J2=J(1,1)
3590 FOR J1=1 TO N1
3600 J2=J2 MAX J(J1,J1)
3610 IF ABS(J2)<=1.0E-11 THEN 3700
3620 NEXT J1
3630 IF J2>0 THEN 3760
3640 PRINT 'LJJ           EL SISTEMA ES ESTABLE'
3650 PRINT 'JJ EL POLO MAS PROXIMO AL EJE Jw (EN EL PLANO S)'
3660 PRINT 'J TIENE COMO PARTE REAL: ';J2
3670 PRINT 'JJ  *** AFLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR '
3680 INPUT A$
3690 GO TO 1160

```

```
3700 PRINT "LJJ                EL SISTEMA ES INESTABLE"
3710 PRINT "JJ TIENE UN POLO EN EL EJE JW (EN EL PLANO S)"
3720 PRINT "J CUYO VALOR ES: ";GO(J1,J1);" J"
3730 PRINT "JJ *** APLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR "
3740 INPUT A$
3750 GO TO 1160
3760 PRINT "LJJ                EL SISTEMA ES INESTABLE"
3770 PRINT "JJ *** APLASTE "RETURN" PARA CONTINUAR "
3780 INPUT A$
3790 GO TO 1160
```

E\*

## B I B L I O G R A F I A

- 1.- BROGAN W., Modern Control Theory, Quantum Publishers, Inc., New York, 1974.
- 2.- WIBERG D., Espacio de Estado y Sistemas Lineales, Serie Shaum, Mc Graw Hill Inc., 1973.
- 3.- MALTSEV A., Fundamentos de Algebra Lineal, Ed. Mir, Moscú, 1978.
- 4.- DORF R., Sistemas Automáticos de Control, Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1978
- 5.- GARCIA C., Bases para el Análisis de Sistemas de Control en el Espacio de Estado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Quito, 1981
- 6.- TABAK-KUO, Optimal Control by Mathematical Programming, Prentice-Hall, Inc., 1971
- 7.- DORF R., Time-Domain Analysis and Design of Control Systems, Addison-Wesley, 1965.
- 8.- DERUSSO R., State Variables for Engineers, John Willey & sons, Inc, 1965.
- 9.- RAVEN F., Ingeniería de Control Automático, Editorial

Hispano Americana S.A., Buenos Aires, 1972.

- 10.- OGATA K., Ingeniería de Control Moderna, Prentice Hall Internacional, Madrid, 1972.
- 11.- SCHEID F., Análisis Numérico, Serie Schaum, McGraw-Hill Inc., México, 1972.
- 12.- JAMES y otros, Applied Numerical Methods for Digital Computation, Universidad de Nebraska, 2da. Edición.
- 13.- TAKAHASHI y otros, Control and Dinamic Systems, Addison-Wesley, 1970.
- 14.- CHEN C., Introduction to Linear System Theory, Holt Rinehart and Winston Inc., 1970
- 15.- ELGERD O., Control Systems Theory, McGraw-Hill Kaga-pushu Ltd., Tokyo, 1967.
- 16.- EVELEIGH V., Introducción to Control System Design, - McGraw-Hill, 1972.