ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
Facultad de Ingeniería Eléctrica

Tesis de Grado

DESACOPLAMIENTO PARA SISTEMAS CONTINUOS EN EL TIEMPO

Tesis previa a la obtención del Título de Ingeniero en Electrónica y Control

EVELIO ALFREDO GRANIZO MONTALVO

Quito - Abril 1.988

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado en su totalidad por el Sr. Evelio Granizo Montalvo.

Ing. Marco Barragán

DIRECTOR DE TESIS

A MI ESPOSA

A MI MADRE

A MIS HIJAS

AGRADECIMIENTO

Agradezco a todas las personas que de una u otra manera me han ayudado durante toda mi vida estudiantil. Y especialmente al Ing. Marco Barragán por su acertada dirección en esta tesis.

I N D I C E

C A P I T U L O   1

1.- INTRODUCCION.

1.- INTRODUCCION.

En un sistema de control, si la entrada o la señal de comando está predeterminada y no cambia debido a lo que se obtenga del control, se dice que el sistema es un sistema de "control de lazo abierto", el mismo que no puede ser un buen sistema, ya que una señal de control deseable deberá reaccionar al comportamiento del sistema. Por otro lado, si el sistema se comporta bien, ningún cambio en la señal de control es necesario, pero un cambio apropiado es requerido para que la respuesta del sistema sea la deseada. Entonces, un sistema en donde la señal de entrada dependa de lo que requiera el control, se denomina un sistema de "control realimentado".

Por consiguiente, el desarrollo de técnicas para el diseño de sistemas de control multivariable es de considerable práctica, siendo un método particular de diseño, aquel que implica el uso de realimentación para conseguir estabilidad de sistemas de control de lazo cerrado. "Conjuntamente con este método es a menudo de interés saber si es o no posible conseguir que las entradas controlen a las salidas independientemente, esto es, que una sola entrada influya en una sola salida; es decir, obtener un sistema "desacoplado"."

" En un sistema multivariable de orden n, con m entradas y m salidas, en el cual se asume que $m \le n$", la matriz función de transferencia es $\underline{G}(s)$, que relaciona la entrada $\underline{u}(s)$ y la salida $\underline{y}(s)$ con la siguiente ecuación:

$\underline{y}(s) = \underline{G}(s) * \underline{u}(s)$,

se tiene que cada entrada controla más de una salida y que cada salida es controlada por más de una entrada. Por este fenómeno el cual se denomina "acoplamiento", es generalmente muy difícil de controlar un sistema multivariable. Por lo tanto, en algunos casos para obtener un sistema multivariable desacoplado, la idea es diseñar un controlador, el cual permita que cada salida sea controlada independientemente por cada entrada, es decir, que el sistema acoplado multivariable pueda convertirse en un sistema desacoplado. Donde el control debe ser insensible para variaciones pequeñas de parámetros, mediante la incorporación de elementos dinámicos en el sistema de control.

Para que un sistema multivariable sea desacoplado, la matriz función de transferencia debe ser diagonal y no singular.

Ya conseguido el desacoplamiento de un sistema multivariable, puede obviamente ser analizado usando las técnicas clásicas para sistemas de una entrada - una salida.

Una de las maneras para determinar las condiciones necesarias y suficientes para el "desacoplamiento" de un sistema lineal invariante en el tiempo, de m entradas y m salidas, es mediante la realimentación de estado. Si un sistema satisface la condición de desacoplamiento por realimentación de estado, se puede determinar la clase Φ de todas las matrices de realimentación que desacoplan el sistema. La caracterización de Φ es usada para determinar el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados para el sistema desacoplado y para desarrollar una "técnica de síntesis con la realimentación, que dé las configuraciones de polos de lazo cerrado deseados, mientras simultáneamente se desacopla el sistema."

" Se presenta además que, en ciertos casos los sistemas multivariables invariantes en el tiempo, pueden ser desacoplados por realimentación de variables de estado, pero no se puede realizar la ubicación arbitraria de polos y el desacoplamiento simultáneamente." y otras veces sí. Dichos sistemas no se pueden desacoplar por realimentación de salida; siendo posible únicamente realizar el desacoplamiento por realimentación de salida, añadiendo un compensador. "

Pero como el estado no se puede medir directamente, es deseable conocer si un sistema puede ser descoplado usando realimentación de salida. Si es posible el desacoplamiento y no es estable, para conseguir la estabilidad a la respuesta deseada puede ser necesario construir un compensador o un observador. Por consiguiente, se determinan condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento de sistemas lineales multivariables usando realimentación de salida; para un sistema que satisface estas condiciones, la clase de todas las matrices de realimentación las cuales desacoplan el sistema es caracterizado, además, se muestra que cada subsistema desacoplado puede tener un polo real arbitrariamente cercano a un valor preseleccionado. Las condiciones dependen solamente del conocimiento de los sistemas dinámicos.

Con miras a un estudio detallado de lo mencionado anteriormente, y en vista de la importancia según se expresó antes, se ha desarrollado esta tesis, de la siguiente manera:

En esta introducción se hace un enfoque general del marco teórico, relativo a las técnicas utilizadas para el desarrollo de este trabajo; técnicas que sirven para el desacoplamiento de sistemas lineales multivariables; se hace también un bosquejo de su contenido, por capítulos.

En el segundo capítulo se dan los conceptos básicos, que son necesarios para el estudio de las técnicas de desacoplamiento, objetivo de este trabajo; técnicas de desacoplamiento que son empleadas de acuerdo a la teoría de Control Moderno, y que son: Por matriz función de transferencia, por realimentación de estado, y por realimentación de salida.

En el tercer capítulo se realiza un estudio teórico de cada una de las tres técnicas de desacoplamiento, luego se fijan las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema lineal multivariable pueda ser desacoplado.

En el cuarto capítulo se presentan los algoritmos y diagramas de flujo para cada una de las técnicas utilizadas; los cuales sirven para desarrollar los programas computacionales, basados en las técnicas antedichas.

En el capítulo quinto se obtienen los resultados para los ejercicios de los sistemas que se desean desacoplar por la técnica escogida, en cada programa implementado en el computador. Los ejercicios presentados en esta sección son básicamente los analizados en la teoría, en cada técnica de desacoplamiento.

El sexto capítulo está destinado para exponer las conclusiones que se han obtenido en el decurso de este trabajo, las mismas que fueron determinadas en base al marco teórico, y sobre todo, en la aplicación de éste en el trabajo práctico de los programas computacionales.

Luego se incorporan tres apéndices que se distribuyen de la siguiente manera:

El apéndice A exclusivamente indica el "Manual de uso" de los programas desarrollados para las técnicas de desacoplamiento. Es decir, nos precisa qué parámetros se deben introducir y qué resultados son obtenidos para cada técnica.

En el apéndice B, se presentan los listados de los programas principales, independientemente para cada técnica de desacoplamiento. Además, de acuerdo a la estructura del lenguaje Pascal se incluyen, al inicio de cada programa principal, todos los listados de los subprogramas utilizados en cada técnica.

Apéndice C.- Esta sección se creó con el objetivo de indicar en cada uno de los subprogramas los siguientes aspectos: 1) la función que desempeña cada subprograma; 2) la descripción de las variables de llamada al subprograma; 3) análisis matemático, si es necesario; y, 4) diagramas de flujo.

C A P I T U L O 2

2.- TEORIA:

2.1.- SISTEMA DE MULTIPLES ENTRADAS Y MULTIPLES SALIDAS.

2.2.- MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

2.3.- REALIMENTACION DE ESTADO.

2.4.- REALIMENTACION DE SALIDA.

2.5.- DESACOPLAMIENTO Y TECNICAS.

2.- T E O R I A :

2.1.- SISTEMA DE MULTIPLES ENTRADAS Y MULTIPLES SALIDAS.

Sea el sistema:

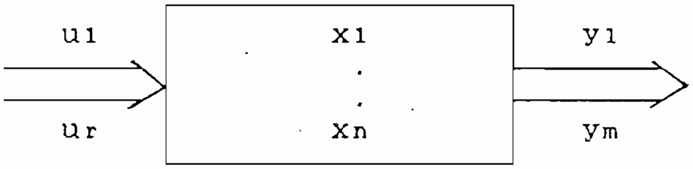


Figura: 2 . 1 .- Sistema multivariable.

La representación en espacio de estado de sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas es la siguiente:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$,son las variables de estado.

$u_1, u_2, \ldots, u_r$,son las variables de entrada.

$y_1, y_2, \ldots, y_m$,son las variables de salida.

Y las ecuaciones que rigen el sistema en forma normal:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \ldots + b_{1r}(t)u_r \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \ldots + b_{2r}(t)u_r \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \ldots + b_{nr}(t)u_r
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

donde: a(t) , b(t) son constantes o funciones de t.

Si se considera que el sistema es invariante en el tiempo, se determina entonces las ecuaciones del sistema en forma matricial y vectorial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$,vector de estado. ✓

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$,vector de entrada. ✓

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ,$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} .$$

De aquí se llega a la siguiente "ecuación matricial:"

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \quad , \qquad (2.3)$$

que es la ecuación de estado del sistema.

Las ecuaciones de salida del sistema correspondiente son:

$$y_1 = c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1r}(t)u_r$$
$$y_2 = c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \dots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \dots + d_{2r}(t)u_r$$
$$\vdots$$
$$y_m = c_{m1}(t)x_1 + c_{m2}(t)x_2 + \dots + c_{mn}(t)x_n + d_{m1}(t)u_1 + d_{m2}(t)u_2 + \dots + d_{mr}(t)u_r$$
$$(2.4)$$

Como se consideró que el sistema es invariante en el tiempo, los coeficientes son constantes. Representando en forma matricial las ecuaciones de salida, se tendría:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{,vector de salida.}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix}.$$

Llegando a determinar la siguiente ecuación matricial:

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \quad , \qquad (2.6)$$

que es la ecuación de salida del sistema.

Quedando de esta manera representado el sistema en espacio de estado por:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (2.7a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \qquad (2.7b)$$

2.2.- MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

Se considera inicialmente el sistema de una entrada y una salida. La relación siguiente es la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \qquad (2.8)$$

en donde: $u(s)$ = Es la entrada del sistema.

$y(s)$ = Es la salida del sistema.

Además las condiciones iniciales deben ser cero.

En el caso de múltiples entradas y múltiples salidas, la respuesta en espacio de estado del sistema está dado por:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$

donde éstas ecuaciones son funciones del tiempo.

Si se toma la Transformada de Laplace, de las ecuaciones de espacio de estado resulta:

$$s\,\underline{x}(s) - x(0) = \underline{A}\,\underline{x}(s) + \underline{B}\,\underline{u}(s) \qquad (2.9\,a)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{C}\,\underline{x}(s) + \underline{D}\,\underline{u}(s) \qquad (2.9\,b)$$

con condiciones iniciales nulas, de (2 . 9 a) se obtiene:

$$s\,\underline{x}(s) - \underline{A}\,\underline{x}(s) = \underline{B}\,\underline{u}(s) \qquad (2.10\,a)$$

$$(s\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{x}(s) = \underline{B}\,\underline{u}(s) \qquad (2.10\,b)$$

donde: $\underline{I}$ = Matriz identidad,

multiplicando ambos miembros de la ecuación (2 . 10 b) por $(s \underline{I} - \underline{A})^{-1}$;

$$\underline{x}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \, \underline{u}(s) \qquad (2 . 11)$$

reemplazando $\underline{x}(s)$ de la ecuación (2 . 11) en (2 . 9 b),

$$\underline{y}(s) = \underline{C} \, [(s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \, \underline{u}(s)] + \underline{D} \, \underline{u}(s)$$

factorando y ordenando:

$$\underline{y}(s) = [\underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}] \, \underline{u}(s) \qquad (2 . 12)$$

Comparando esta ecuación matricial (2 . 12) con la función de transferencia para sistemas de una entrada y una salida (2 . 8), se determina que:

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \qquad (2 . 13)$$

donde : $\underline{G}(s)$ = Matriz función de transferencia.

Es decir, por no existir división de matrices, la matriz $\underline{G}(s)$ relaciona la salida $\underline{y}(s)$ con la entrada $\underline{u}(s)$ de la siguiente manera:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}(s) \, \underline{u}(s) \qquad (2 . 14)$$

En forma matricial se tendría:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

donde: $\underline{u}(s)$ = Vector de entrada r dimensional.

$\underline{y}(s)$ = Vector de salida m dimensional.

$g_{ij}(s)$ = Significa la respuesta de la i-ésima salida debido a la j-ésima entrada, correspondiente al elemento de la fila i y columna j.

$\underline{G}(s)$ = Matriz función de transferencia de dimensión (m x r).

Por otro lado si se considera un sistema de lazo cerrado que tiene múltiples entradas y múltiples salidas, se obtiene la "matriz función de transferencia de sistemas de lazo cerrado".

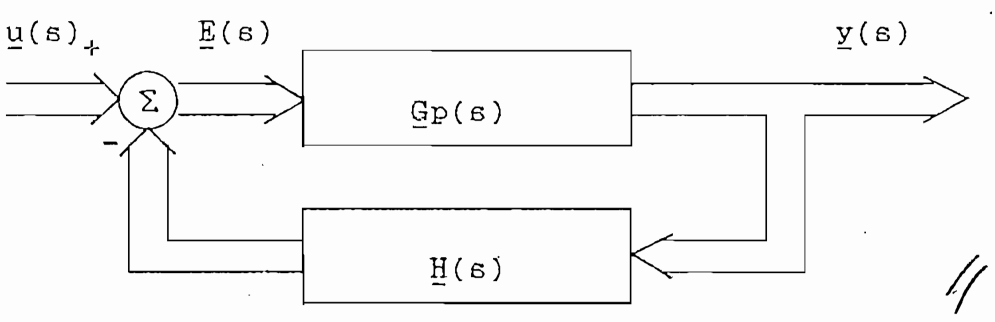


Figura: 2 . 2 .- Sistema multivariable con realimentación.

donde: $\underline{G}p(s)$ = Matriz función de transferencia de paso directo, de dimensión (m x r).

$\underline{H}(s)$ = Matriz de lazo de realimentación, de dimensión (r x m).

$\underline{E}(s)$ = Es el error, de orden r.

La salida se tiene:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\ \underline{E}(s) \qquad (2.16)$$

Se necesita conocer el error para determinar $\underline{y}(s)$, siendo entonces:

$$\underline{E}(s) = \underline{u}(s) - \underline{H}(s)\ \underline{y}(s) \qquad (2.17)$$

reemplazando la ecuación anterior (2 . 17) en la ecuación (2 .16),

$$\underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\ [\ \underline{u}(s) - \underline{H}(s)\ \underline{y}(s)\ ]$$

multiplicando $\underline{G}p(s)$ por el paréntesis,

$$\underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\ \underline{u}(s) - \underline{G}p(s)\ \underline{H}(s)\ \underline{y}(s)$$

agrupando los términos comunes de $\underline{y}(s)$,

$$[\ \underline{I} + \underline{G}p(s)\ \underline{H}(s)\ ]\ \underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\ \underline{u}(s)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior, por la izquierda $[\ \underline{I} + \underline{G}p(s)\ \underline{H}(s)\ ]^{-1}$,

$$\underline{y}(s) = [\, \underline{I} + \underline{G}p(s)\, \underline{H}(s)\,]^{-1} \underline{G}p(s)\, \underline{u}(s) \qquad (2.18)$$

"Por lo tanto la matriz función de transferencia de lazo cerrado $\underline{G}(s)$ será:

$$\underline{G}(s) = [\, \underline{I} + \underline{G}p(s)\, \underline{H}(s)\,]^{-1} \underline{G}p(s) \text{"} \qquad (2.19)$$

2.3.- REALIMENTACION DE ESTADO.

La realimentación de estado es una atractiva manera de ubicar polos y ceros en sistemas multivariables.

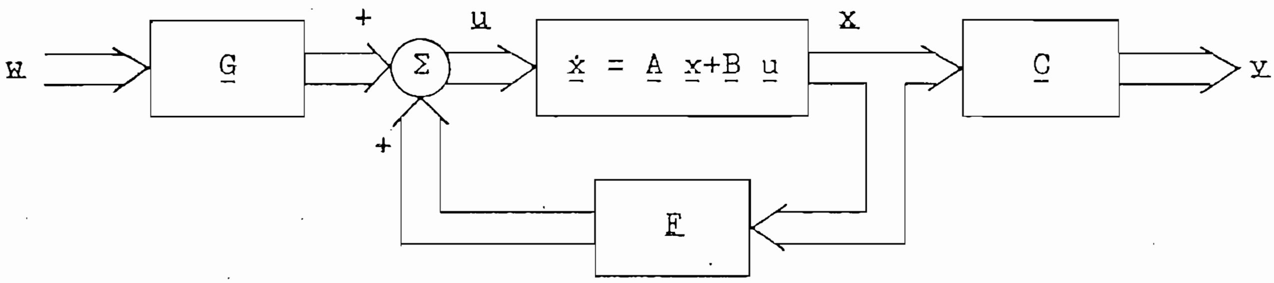


Figura: 2 . 3 .- Sistema multivariable de realimentación de estado.

donde: u = Vector de control de orden m. Es lo que entra a la planta.

w = Representa el nuevo vector de control de orden m.

E = Matriz constante de números reales de orden (m x n) , llamada matriz de realimentación de ganancia.

G = Matriz constante de números reales de orden (m x m)

Las ecuaciones dinámicas deben ser lineales e invariantes en el tiempo. Por lo tanto, es razonable asumir que la "ley de control", dependa linealmente de w y de x , y es de la forma:

$$u = E\,x + G\,w\,. \qquad (2.20)$$

La diferencia entre realimentación de estado y realimentación de salida consiste en que, en la realimentación de salida, la salida $\underline{y}$ es realimentada a la entrada; y en la realimentación de estado, el estado $\underline{x}$ es realimentado a la entrada. Ya que generalmente el número de variables de estado es más grande que el número de variables de salida, existe más campo de manipulación en la realimentación de estado que en la realimentación de salida. En efecto lo que puede ser almacenado mediante la realimentación de salida puede ser almacenado por la realimentación de estado, pero lo inverso no es cierto.

Todas las variables de estado se asumirán como variables de salida.

Se partirá del caso de "una sola variable", entonces, considérese la ecuación dinámica de una sola variable, lineal e invariante en el tiempo:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\, \underline{x} + \underline{b}\, u \qquad (2.21\ a)$$

$$y = \underline{c}\, \underline{x} \qquad (2.21\ b)$$

donde : $\underline{x}$ = Es el vector de estado de orden n.

u = Es la entrada escalar.

y = Es la salida escalar.

$\underline{A}$ = Es una matriz constante de orden (n x n).

$\underline{b}$ = Es un vector columna de orden n.

$\underline{c}$ = Es un vector fila de constantes reales de orden n.

En la realimentación de estado, cada variable de estado está multiplicada por una ganancia y realimentada en el terminal de entrada. Se hace la ganancia entre la i-ésima variable de estado y la entrada, sea k_i. Se define $\mathbf{k}$ como:

$$\mathbf{k} = [\, k_1 \quad k_2 \; . \; . \; . \; k_n \,] \qquad (2.22)$$

Por lo que, la ley de control es:

$$u = w + \mathbf{k}\,\mathbf{x}$$

donde : w = Es la nueva entrada deseada o de referencia.

Reemplazando la ley de control en la ecuación (2 . 21 a), se tiene,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,(w + \mathbf{k}\,\mathbf{x})$$

agrupando $\mathbf{x}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{b}\,\mathbf{k})\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,w$$

Entonces, la ecuación dinámica del sistema realimentado por estado es:

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{b}\,\mathbf{k})\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,w \qquad (2.23\,a)$$
$$y = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \qquad (2.23\,b)$$

Nótese que las ecuaciones dinámicas (2 . 21) y (2 . 23) tienen la misma dimensión y el mismo espacio de estado.

Ahora, considérese el "caso multivariable", donde la ecuación dinámica n-dimensional multivariable lineal e invariante en el tiempo, para el sistema de lazo abierto es:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (2.24\ a)$$

L.A.

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (2.24\ b)$$

donde : $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son matrices constantes y reales de dimensiones (n x n),(n x m) y (m x n), respectivamente.

Reemplazando la ley de control, ecuación (2 . 20). En la ecuación (2 . 24 a), y luego sacando factor común $\underline{x}$, se obtiene:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} \qquad (2.25\ a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (2.25\ b)$$

Siendo esta la ecuación dinámica que rige la realimentación de estado, para sistemas multivariables.

La matriz función de transferencia de lazo cerrado será:

$$\underline{G}c\,(s) = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})\,]^{-1}\,(\underline{B}\,\underline{G})$$

eliminando paréntesis,

$$\underline{G}c\,(s) = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E}\,]^{-1}\,\underline{B}\,\underline{G} \qquad (2.26)$$

2.4.- REALIMENTACION DE SALIDA.

"La realimentación de salida, tiene el atractivo que requiere menos sensores que los estados, entonces el número de salidas es menor al número de estados. Además, en la realimentación de salida se tiene la facilidad de que las salidas se encuentran físicamente para realimentarlas a las entradas, lo que no sucede con la realimentación de estado."

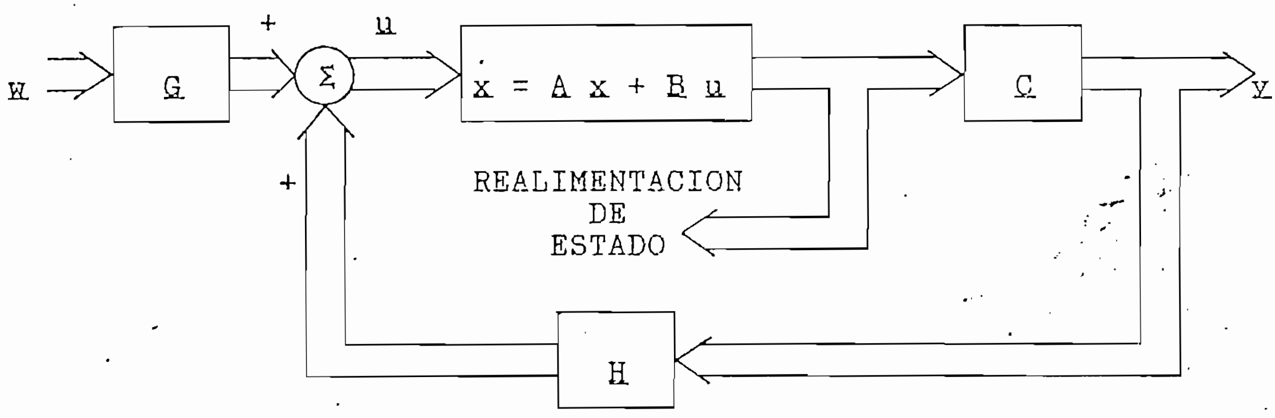


Figura 2 . 4 .- Sistema multivariable de realimentación de salida.

donde: $\underline{u}$ = Vector de control de orden m. Es lo que entra a la planta.

$\underline{w}$ = Representa el nuevo vector de control de orden m.

$\underline{H}$ = Matriz constante de números reales de orden (m x m)

$\underline{G}$ = Matriz constante de números reales de orden (m x m)

La realimentación de salida consiste en tomar muestras de las variables de salida, realimentarlas a través de un controlador $\underline{H}$ y compararlas con un nuevo vector de referencia de entrada $\underline{w}$, De acuerdo como se ve en la figura (2 . 4).

La ecuación de la "ley de control", para la realimentación de salida es:

$$\underline{u} = \underline{G}\,\underline{w} + \underline{H}\,\underline{y} \qquad (2.27)$$

El sistema de lazo abierto se representa por la ecuación dinámica:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (2.28\,a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (2.28\,b)$$

donde : $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son matrices constantes y reales de dimensiones (n x n),(n x m) y (m x n), respectivamente.

Sustituyendo la ecuación (2 . 27) en la ecuación del sistema (2 . 28 a), se tiene:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,(\underline{G}\,\underline{w} + \underline{H}\,\underline{y})$$

multiplicando el paréntesis,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{y}$$

reemplazando la ecuación (2 . 28 b) en ecuación anterior,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{B}\,\underline{H}\,(\underline{C}\,\underline{x})$$

sacando factor común $\underline{x}$,

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}$$

Por consiguiente, la ecuación dinámica que rige para la realimentación de salida es:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} \qquad (2.29\,a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (2.29\,b)$$

Como se puede ver en las ecuaciones: (2 .25) y (2 .29), la realimentación de salida es un caso especial de la realimentación de estado, reemplazando $\underline{H}\,\underline{C}$ por $\underline{F}$.

Entonces, la matriz función de transferencia de lazo cerrado será:

$$\underline{G}c\,(s) = \underline{C}\,[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,]^{-1}\,\underline{B}\,\underline{G} \qquad (2.30)$$

A partir de estos conceptos se puede desarrollar las ideas y las condiciones para conseguir desacoplamiento de sistemas multivariables.

2.5.- DESACOPLAMIENTO Y TECNICAS.

Como se ha visto, muchos sistemas de control de procesos tienen entrada múltiple y salida múltiple, de las que, por lo general, nos interesa que las modificaciones en cada entrada de referencia afecten solamente a cada salida. Si se pudiera lograr esta ausencia de interacción, sería más fácil mantener cada valor de salida a un nivel constante deseado en ausencia de perturbaciones externas, es decir, sería más fácil realizar el diseño del sistema de control. Para lograr aquello, naturalmente se requiere que el sistema tenga un número de salidas igual al de entradas.

dominio t

En general, se tienen tres técnicas para desacoplar sistemas multivariables, más empleadas en la práctica del Control Moderno, que son:

- Por matriz función de transferencia.
- Por realimentación de estado.
- Por realimentación de salida.

Cada una de las técnicas mencionadas tienen sus ventajas y sus inconvenientes, las cuales serán analizadas, al determinarse, en el siguiente capítulo, las condiciones necesarias y suficientes para que se produzca el desacoplamiento de los sistemas multivariables. Con cada técnica, además, se presentarán programas de computación, independientemente, para cada técnica. Esto en el capítulo cuarto.

C A P I T U L O 3

3.- TECNICAS DE DESACOPLAMIENTO.

3.1.- POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

3.2.- POR REALIMENTACION DE ESTADO.

3.3.- POR REALIMENTACION DE SALIDA.

3.- TECNICAS DE DESACOPLAMIENTO.

3.1.- POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

"Desacoplar un sistema significa, desde el punto de vista de matriz función de transferencia, diagonalizar la matriz $\underline{G}(s)$ de lazo cerrado, para poder determinar la respuesta del sistema solamente en función de una sola entrada, es decir, obtener que una salida dependa de una sola entrada."

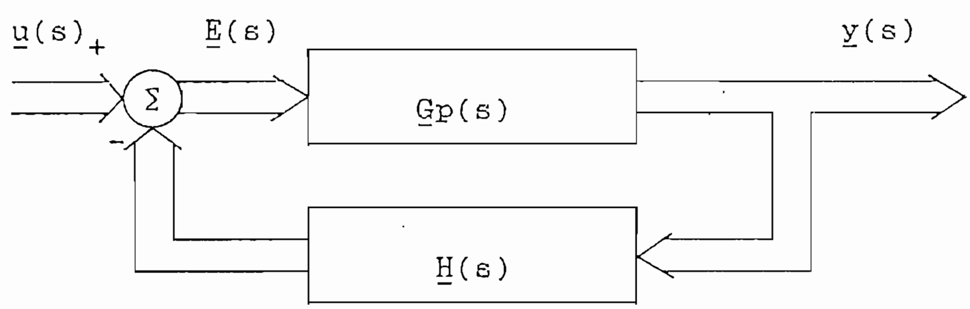


Figura: 3 . 1 .- Sistema multivariable con realimentación.

donde: $\underline{u}(s)$ = Vector de entrada n dimensional.

$\underline{y}(s)$ = Vector de salida n dimensional.

$\underline{G}p(s)$ = Matriz función de transferencia de paso directo, de dimensión (n x n).

$\underline{H}(s)$ = Matriz de lazo de realimentación, de dimensión (n x n).

$\underline{E}(s)$ = Es el error, de orden n.

De acuerdo al sistema realimentado de la figura (3 . 1), se tiene que:

$$\underline{G}(s) = [\ \underline{I} + \underline{G}p(s)\ \underline{H}(s)\ ]^{-1}\underline{G}p(s) \qquad (3.1)$$

donde: $\underline{G}(s)$ = Matriz función de transferencia de lazo cerrado.

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) & \cdots & g_{nn}(s) \end{bmatrix} . \qquad (3.2)$$

"Y en donde también $\underline{G}p(s)$ es una matriz función de transferencia de dimensión (n x n) de una planta"; se desea añadir un compensador serie $\underline{G}c(s)$, el mismo que se expresa como una matriz de dimensión (n x n), tal que las n entradas y las n salidas estén desacopladas, entonces la matriz función de transferencia de lazo cerrado debe ser diagonal, es decir, existe una matriz $\underline{G}d(s)$ tal que:

$$\underline{G}d(s) = \begin{bmatrix} g_{d11}(s) & & & 0 \\ & g_{d22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{dnn}(s) \end{bmatrix} . \qquad (3.3)$$

"

Por facilidad se considera el caso en que la realimentación $\underline{H}(s)$ es la matriz identidad, entonces de la ecuación (3 . 1):

$$\underline{G}(s) = [\, \underline{I} + \underline{G}p(s)\,]^{-1}\underline{G}p(s) \qquad (3.4)$$

Para diagonalizar el sistema, se añade un compensador $\underline{G}c(s)$ como se muestra en la figura (3 . 2).

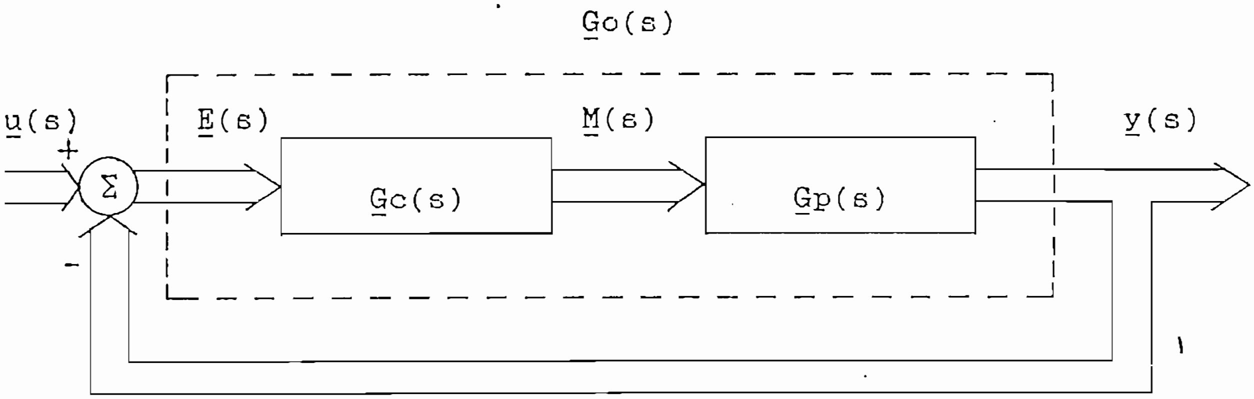


Figura: 3 . 2 .- Sistema multivariable con realimentación unitaria y compensador serie.

donde: $\underline{M}(s)$ = Es la nueva entrada de la planta Gp(s).

Entonces, de la figura (3 . 2) se tiene:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\, \underline{M}(s) \qquad (3.5)$$

$$\underline{M}(s) = \underline{G}c(s)\, \underline{E}(s) \qquad (3.6)$$

reemplazando la ecuación (3 . 6) en la ecuación (3 . 5) se llega a:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}p(s)\, \underline{G}c(s)\, \underline{E}(s)$$

si se asigna $\underline{G}o(s) = \underline{G}p(s)\ \underline{G}c(s)$ se tiene que:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}o(s)\ \underline{E}(s) \tag{3 . 7}$$

donde: $\underline{G}o(s)$ = Es la matriz función de transferencia de paso directo, cuando se añade un compensador.

Siendo $\underline{G}c(s)$ tal que diagonalice a $\underline{G}(s)$, entonces de la ecuación (3 . 4) con $\underline{G}o(s)$ se tiene:

$$\underline{G}d(s) = [\ \underline{I} + \underline{G}o(s)\ ]^{-1}\underline{G}o(s) \tag{3 . 8}$$

o también, multiplicando cada miembro de la ecuación (3 . 8), por la izquierda $[\ \underline{I} + \underline{G}o(s)\ ]$,

$$[\ \underline{I} + \underline{G}o(s)\ ]\ \underline{G}d(s) = \underline{G}o(s)$$

multiplicando el paréntesis:

$$\underline{G}d(s) + \underline{G}o(s)\ \underline{G}d(s) = \underline{G}o(s)$$

agrupando $\underline{G}o(s)$ se tiene:

$$\underline{G}d(s) = \underline{G}o(s)\ [\ \underline{I} - \underline{G}d(s)\ ] \tag{3 . 9}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación (3 . 9), por la derecha $[\ \underline{I} - \underline{G}d(s)\ ]^{-1}$,

$$\underline{G}d(s)\ [\ \underline{I} - \underline{G}d(s)\ ]^{-1} = \underline{G}o(s)$$

conmutando los términos de la ecuación anterior

$$\underline{G}_o(s) = \underline{G}_d(s)\,[\,\underline{I} - \underline{G}_d(s)\,]^{-1} \qquad (3 . 10)$$

Como $\underline{G}_d(s)$ es diagonal, entonces $[\,\underline{I} - \underline{G}_d(s)\,]^{-1}$ es diagonal. Por lo tanto $\underline{G}_o(s)$ también es diagonal.

Esto significa que para lograr que no haya interacción, se debe hacer que $\underline{G}_o(s)$ sea una matriz diagonal, siempre que la matriz de realimentación $\underline{H}(s)$ sea la matriz identidad.

Como fue definido $\underline{G}_o(s) = \underline{G}_p(s)\,\underline{G}_c(s)$, entonces despejando $\underline{G}_c(s)$ (multiplicando por la izquieda $\underline{G}_p^{-1}(s)$) se tiene:

$$\underline{G}_c(s) = \underline{G}_p^{-1}(s)\,\underline{G}_o(s) \qquad (3 . 11)$$

La determinación de $\underline{G}_c(s)$ es bastante fácil. Porque $\underline{G}_d(s)$ es conocida por imposición de diseño para desacoplamiento, y además debe satisfacer cada término de la diagonal de $\underline{G}_d(s)$ con las especificaciones de funcionamiento dadas por el diseñador para que cumpla el sistema con: exactitud, estabilidad relativa y velocidad de respuesta. Entonces, se debe calcular $\underline{G}_o(s)$ con la ecuación (3 . 10), y a partir de $\underline{G}_o(s)$ calcular $\underline{G}_c(s)$ con la ecuación (3 . 11), ya que se conoce también $\underline{G}_p(s)$.

En definitiva, para desacoplar un sistema multivariable, por el método matriz función de transferencia, se debe determinar el compensador serie $\underline{G}_c(s)$ como se indica anteriormente.

3.1.1.- Ejemplo:

Sea el sistema:

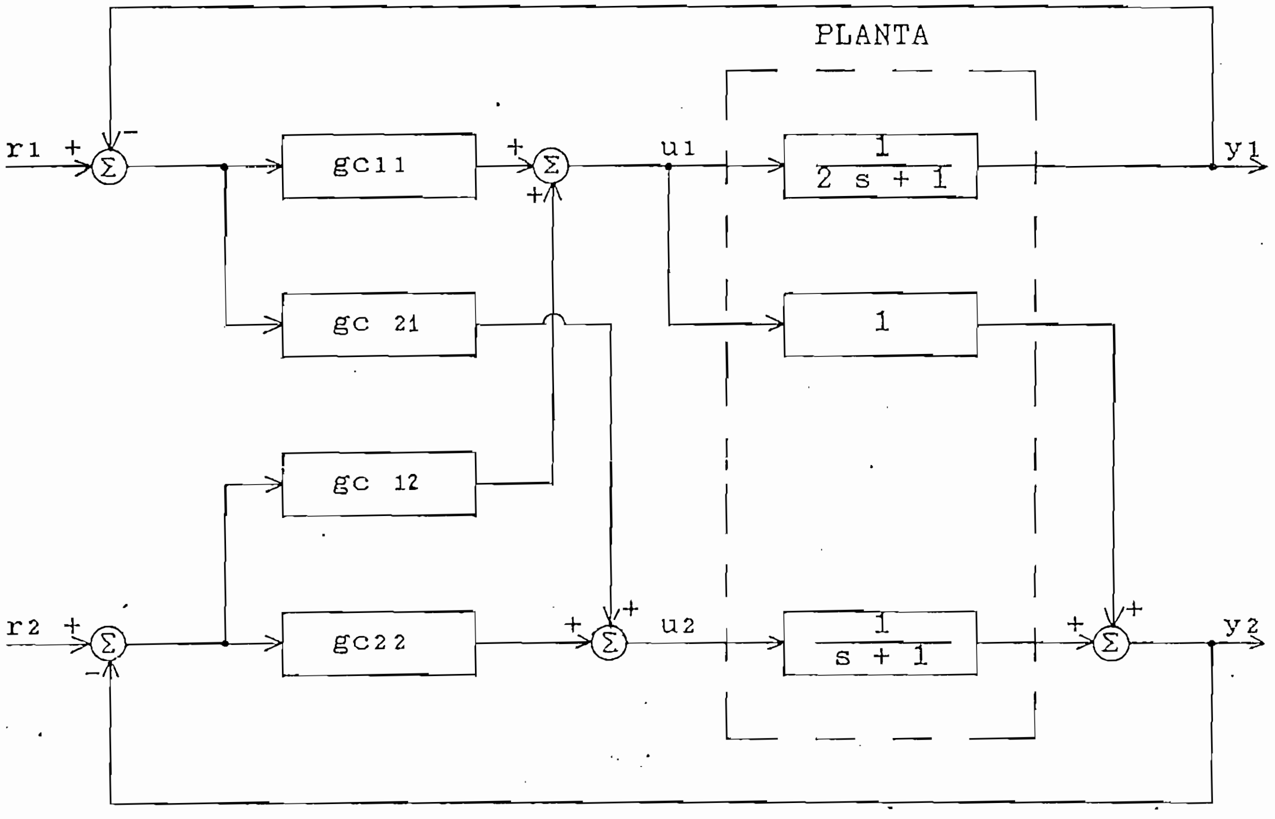


Figura: 3 . 3 .- Sistema de dos entradas y dos salidas, con compensador serie.

Determinar la matriz función de transferencia del compensador serie, tal que la matriz función de transferencia de lazo cerrado sea:

$$\underline{G}d(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

De acuerdo a la ecuación (3 . 10) se determina $\underline{G}o(s)$.

$$\underline{G}o(s) = \underline{G}d(s) [I - \underline{G}d(s)]^{-1}$$

reemplazando por sus respectivas matrices,

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}^{-1}$$

cálculo de la inversa,

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{5s^2}{(s+1)(5s+1)}} \begin{bmatrix} \frac{5s}{5s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

multiplicando la fracción de polinomios y luego simplificando la segunda matriz,

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

multiplicando ambas matrices se obtiene,

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5\,s} \end{bmatrix} \qquad (3\,.\,13)$$

Las salidas del sistema de la figura (3 . 3) son:

$$y_1 = \frac{1}{2\,s + 1}\,u_1$$

$$y_2 = u_1 + \frac{1}{s + 1}\,u_2$$

escribiendo matricialmente las salidas,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\,s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (3\,.\,14)$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación (3 . 14) la planta del sistema de la figura (3 . 3) es:

$$\underline{G}p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\,s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad (3\,.\,15)$$

Para calcular el compensador $\underline{G}c(s)$ se aplica la ecuación (3 . 11),

$$\underline{G}c(s) = \underline{G}p^{-1}(s)\ \underline{G}o(s)$$

reemplazando los valores correspondientes de las matrices, ecuaciones (3 .15) y (3 . 13), respectivamente.

$$\underline{G}c(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

determinación de la inversa,

$$\underline{G}c(s) = \frac{1}{\dfrac{1}{(s+1)(2s+1)}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

multiplicando la fracción de polinomios con la primera matriz, a su vez simplificando se tiene:

$$\underline{G}c(s) = \begin{bmatrix} 2s+1 & 0 \\ -(s+1)(2s+1) & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

multiplicando las matrices se llega a:

$$\underline{G}c(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2\ s + 1}{s} & 0 \\ -\dfrac{(s + 1)\ (2\ s + 1)}{s} & \dfrac{s + 1}{5\ s} \end{bmatrix} \qquad (\ 3\ .\ 16\ )$$

La matriz $\underline{G}c(s)$ es el compensador serie añadido a la planta $\underline{G}p(s)$, para lograr que la matriz función de transferencia de lazo cerrado sea diagonal, es decir, se obtiene que el sistema tenga cada salida dependiente únicamente de una entrada.

"Además se puede observar que $gc_{11}(s)$ y $gc_{22}(s)$ son Controles Proporcional e Integral, $gc_{21}(s)$ es un Control Proporcional e Integral Derivativo, y $gc_{12}(s)$ no existe compensador."

En el análisis realizado no se considera perturbaciones externas, y además se producen cancelaciones en el numerador y el denominador de $\underline{G}c(s)$ y $\underline{G}p(s)$, entonces aunque hemos conseguido los resultados deseados de ausencia de interacciones, en la respuesta a las entradas de referencia en ausencia de perturbaciones externas, "si se produce perturbaciones en el sistema por fuerzas externas, el sistema puede hacerse "incontrolable" por dichas cancelaciones."

3.1.2.- Conclusiones.

"Esta técnica no es óptima para el desacoplamiento y por lo tanto no sirve para análisis de control de sistemas, aunque de acuerdo a las ecuaciones descritas para desacoplar un sistema, se tiene que son muy simples, siendo para su aplicación muy teóricas y de fácil resolución a mano para un sistema de 2 entradas y 2 salidas; pero debido a que el proceso analítico es algébrico, el mismo que se alarga y complica, a la vez que se aumente el número de entradas que es igual al número de salidas , y más por supuesto, si se aumenta también el orden del sistema."

"Por otro lado, como se verá más adelante, esta técnica tiene su mayor inconveniente en el cálculo de la inversa de la matriz de la Planta Gp(s), ya que los elementos de dicha matriz son fracciones de polinomios, y por consiguiente los métodos para invertir una matriz, solamente son aplicables para matrices que contengan todos sus elementos como números reales.

3.2.- POR REALIMENTACION DE ESTADO.

Los sistemas de control multivariables, en general, exhiben interacción o acoplamiento entre varios pares entrada-salida. Lo no deseable de esta interacción nos lleva a determinar las condiciones necesarias y suficientes para su desacoplamiento, usando realimentación de estado. Entonces dado un sistema que satisfaga estas condiciones, es decir, que pueda ser desacoplado por realimentación de estado, se determinará una clase Φ de todas las matrices de realimentación que desacoplen el sistema. La determinación de la clase Φ de matrices es usada para obtener el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados para el sistema desacoplado, y se desarrollará una técnica de síntesis para la realización de las configuraciones de dichos polos.

El sistema considerado es lineal e invariante en el tiempo de m entradas y m salidas, y puede ser descrito por el conjunto familiar de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (3.21\,a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (3.21\,b)$$

donde: $\underline{x}$ = Es un vector de estado de orden n.

$\underline{u}$ = Es un vector de entrada (o control) de orden m.

$\underline{y}$ = Es un vector de salida de orden m.

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, son matrices constantes de orden (n x n), (n x m) y (m x n).

Se asume que $m \leq n$.

La configuración del controlador que se usará, es el que se muestra en la figura (3 . 4):

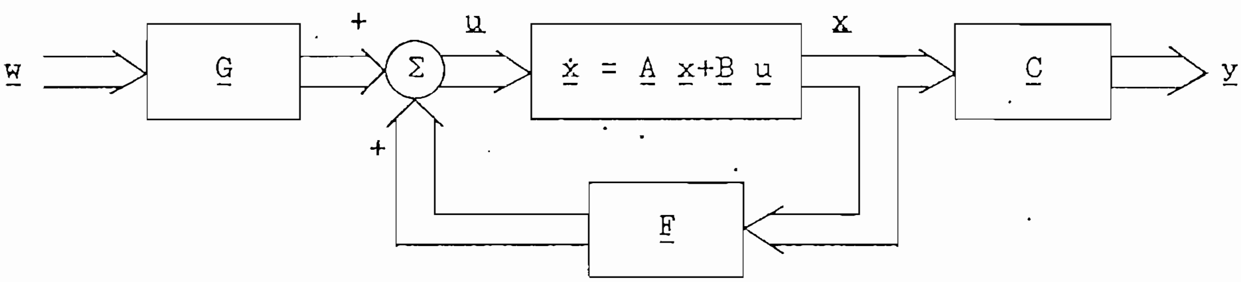


Figura: 3 . 4 .- Sistema multivariable de realimentación de estado.

Y consiste de una matriz $\underline{F}$ de orden (m x n) operando sobre las variables de estado que son realimentadas, y una matriz $\underline{G}$ de orden (m x m) operando sobre las entradas del sistema en lazo cerrado. Esto es equivalente a usar la ley de control:

$$\underline{u} = \underline{F}\,\underline{x} + \underline{G}\,\underline{w} \qquad (3\ .\ 22)$$

donde: $\underline{w}$ representa el nuevo vector de control de orden m.

Con esta ley de control, el sistema de lazo cerrado es desacoplado si su función de transferencia ecuación (2 . 26):

$$\underline{Gc}(s) = \underline{C}\,(\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,)^{-1}\underline{B}\,\underline{G}$$

es diagonal e invertible.

"Ahora bien, desacoplar una salida de un sistema por realimentación de variables de estado, quiere decir, diseñar el controlador tal que en el sistema de lazo cerrado solo una entrada afecta a esa salida específica y esta entrada no afecta a ninguna otra salida en el sistema. Este diseño se realiza con el requerimiento de que la matriz de entrada $\underline{G}$ sea no singular."

El sistema de lazo cerrado por realimentación de variables de estado se consigue sustituyendo la ley de control (3 . 22) en (3 . 21).

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,(\,\underline{F}\,\underline{x} + \underline{G}\,\underline{w}\,)$$

multiplicando el paréntesis,

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{F}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}$$

factorando,

$$\underline{\dot{x}} = (\,\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F}\,)\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}$$

"Entonces el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\underline{\dot{x}} = (\,\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F}\,)\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} \qquad (3.23\,a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (3.23\,b)$$

se llama realimentación lineal de variables de estado."

Por otro lado, sea $d_1, d_2, \ldots, d_m$ los enteros dados por:

$$d_i = \min \{ j : \underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} \neq \underline{0} \quad , j = 0,1, \ldots , n-1 \} \qquad (3.24\,a)$$

o

$$d_i = n - 1 \quad \text{si} \quad \underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} = \underline{0} \text{ , para todo } j. \qquad (3.24\,b)$$

donde : $\underline{C}_i$ significa la i-ésima fila de $\underline{C}$.

Las ecuaciones (3 . 24), significan que el producto $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B}$ es igual a cero vector, para valores menores a d_i; siempre y cuando d_i tome el valor correspondiente de j que se hace por primera vez el producto $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B}$ diferente de cero vector. Y si para cualquier j se hace siempre el producto $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B}$ igual a cero vector, d_i es igual a $n - 1$.

De acuerdo a la selección de d_i en (3 . 24), aplicando el Binomio de Newton se tiene:

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k = \underline{C}_i [\underline{A}^k + k\, \underline{A}^{k-1}\underline{B}\,\underline{F} + \frac{k(k-1)}{2\,!} \underline{A}^{k-2}(\underline{B}\,\underline{F})^2 + \ldots + (\underline{B}\,\underline{F})^k]$$

multiplicando el paréntesis,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k = \underline{C}_i \underline{A}^k + k\, \underline{C}_i \underline{A}^{k-1}\underline{B}\,\underline{F} + \frac{k(k-1)}{2\,!} \underline{C}_i \underline{A}^{k-2}(\underline{B}\,\underline{F})^2 + \ldots + \underline{C}_i (\underline{B}\,\underline{F})^k$$

agrupando,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k = \underline{C}_i \underline{A}^k + k\, (\underline{C}_i \underline{A}^{k-1}\underline{B})\, \underline{F} + \frac{k(k-1)}{2\,!} (\underline{C}_i \underline{A}^{k-2}\underline{B})\, \underline{F}\, (\underline{B}\,\underline{F}) + \ldots + (\underline{C}_i \underline{A}^{0}\underline{B})\, \underline{F}\, (\underline{B}\,\underline{F})^{k-1}$$

para valores menores o iguales a d_i, en donde $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} = 0$ para $j = 0,1, \ldots ,k-1$.

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k = \underline{C}_i \underline{A}^k \qquad ,k = 0,1, \ldots ,d_i$$

en la ecuación anterior se hace $k = d_i$, obteniéndose:

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{d_i} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i}$$

multiplicando ambos miembros por $(\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k-d_i}$, que corresponde a los valores mayores a d_i, para llegar al orden del sistema que es n, ya que k toma los valores de $d_i + 1$ a n.

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{d_i} (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k-d_i} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i} (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k-d_i}$$

simplificando,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i} (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k-d_i} \qquad ,k = d_i + 1, \ldots n.$$

Resumiendo:

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{k} \qquad ,k = 0,1, \ldots ,d_i \qquad (3 \,.\, 25 \text{ a})$$

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i} (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{k-d_i}. \qquad ,k = d_i + 1, \ldots n \qquad (3 \,.\, 25 \text{ b})$$

Para $i = 1,2, \ldots ,m$. La aplicación de la realimentación de estado (3 . 23) y una diferenciación repetida junto a las ecuaciones (3 . 25), se obtiene las siguientes relaciones:

- Para valores menores a d_i,

  de la ecuación (3 . 23 b)

  $$y_i = \underline{C}_i \, \underline{x} = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{0} \underline{x}$$

  derivando la anterior ecuación respecto a $\underline{x}$

  $$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, \dot{\underline{x}}$$

reemplazando la ecuación diferencial (3 . 23 a)

$$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, [\, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + \underline{B} \, \underline{G} \, \underline{w} \,]$$

multiplicando el paréntesis

$$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + \underline{C}_i \, \underline{B} \, \underline{G} \, \underline{w}$$

agrupando

$$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + (\underline{C}_i \, \underline{A}^0 \underline{B}) \, \underline{G} \, \underline{w}$$

de acuerdo a la definición de di, $\underline{C}_i \, \underline{A}^0 \underline{B} = 0$

$$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x}$$

por la ecuación (3 . 25 a), para $k = 1$

$$\dot{y}_i = \underline{C}_i \, \underline{A} \, \underline{x} = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x}$$

de igual forma para las demás derivadas,

$$\ddot{y}_i = \underline{C}_i \, \underline{A} \, \dot{\underline{x}}$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A} \, [\, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + \underline{B} \, \underline{G} \, \underline{w} \,]$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A} \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + \underline{C}_i \, \underline{A} \, \underline{B} \, \underline{G} \, \underline{w}$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A} \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x} + (\overset{0}{\cancel{\underline{C}_i \, \underline{A} \, \underline{B}}}) \, \underline{G} \, \underline{w}$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A} \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F}) \, \underline{x}$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A}^2 \underline{x}$$

$$= \underline{C}_i \, \underline{A}^2 \underline{x} = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^2 \underline{x}$$

así sucesivamente hasta,

$$y_i^{(di)} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \underline{x} = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{di} \underline{x}$$

- Para valores mayores a di,

$$y_i^{(di+1)} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \dot{\underline{x}}$$

$$= \underline{C}i\ \underline{A}^{di}\ [\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}\ ]$$

$$= \underline{C}i\ \underline{A}^{di}\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x} + \underline{C}i\ \underline{A}^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

$$= \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

$$y_{i}{}^{(di+2)} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\dot{\underline{x}} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$= \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}[\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}\ ] + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$= \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$= \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+2}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

así sucesivamente,

$$y_{i}^{(n)} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \ldots + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(n-di-1)}\ .$$

Resumiendo,

$$y_i = \underline{C}i\ \underline{x} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{0}\underline{x}$$

$$\dot{y}_i = \underline{C}i\ \underline{A}\ \underline{x} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x}$$

$$\ddot{y}_i = \underline{C}i\ \underline{A}^{2}\underline{x} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{2}\underline{x}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_{i}{}^{(di)} = \underline{C}i\ \underline{A}^{di}\underline{x} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{x}$$

$$y_{i}{}^{(di+1)} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

$$y_{i}{}^{(di+2)} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+2}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di+1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}i\ (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_{i}{}^{(n)} = \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n}\underline{x} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-2}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}} + \ldots + \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(n-di-1)}. \qquad (3.26\,a)$$

Del conjunto de ecuaciones anteriores se puede llegar fácilmente a

$$y_i(k) = \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x} \qquad ,k = 0,1,\ \dots\ .d_i \qquad (\ 3\ .\ 26\ b\ )$$

$$y_i(k) = \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{k-1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}_i(\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{k-2}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}} + \dots$$

$$+ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(k-d_i-1)} \qquad ,k = d_i+1,\ \dots\ ,n \qquad (\ 3\ .\ 26\ c\ )$$

donde: y_i $,i = 1,2,\ \dots\ ,m$,es la i-ésima componente de y.

De las ecuaciones (3 . 26 a) se despeja $\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x}$,para $k = 0,1,\ \dots\ ,n - 1,$

$$\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x} = y_i(k) \qquad ,k = 0,1,\ \dots\ ,d_i$$

$$-\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i+1}\underline{x} = -\ y_i(d_i+1) + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

$$-\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i+2}\underline{x} = -\ y_i(d_i+2) + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i+1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$-\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-1}\underline{x} = -\ y_i(n-1) + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-2}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-3}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}}$$

$$\dots + \underline{C}_i\ (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(n-d_i-2)},$$

las ecuaciones anteriores se puede expresar en las sumatorias:

$$\sum_{k=0}^{d_i} \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x} = \sum_{k=0}^{d_i} y_i(k) \qquad (\ 3\ .\ 27\ a\ )$$

$$\sum_{k=d_i+1}^{n-1} -\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^k\underline{x} = \sum_{k=d_i+1}^{n-1} [\ -\ y_i(k) + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{k-1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{k-2}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}} + \dots +$$

$$+ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(K-d_i-1)}\ ] \qquad (\ 3\ .\ 27\ b\ )$$

Ahora para $k = n$ en la ecuación (3 . 26 c),

$$y_i(n) = \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^n\underline{x} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-1}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w} + \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-2}\underline{B}\ \underline{G}\ \dot{\underline{w}} + \dots$$

$$+ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

pasando el término con $\underline{x}$ al primer miembro de la ecuación

$$y_i^{(n)} - \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^n \underline{x} = \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots$$

$$+ \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

reemplazando el teorema de Cayley-Hamilton,

$$(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^n = p_0(\underline{F})\,\underline{I} + p_1(\underline{F})\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F}) + \ldots + p_{n-1}(\underline{F})\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k$$

donde: $p_k(\underline{F})$ son escalares dependientes de $\underline{F}$.

$$y_i^{(n)} - \underline{C}_i \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k \right] \underline{x} = \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots +$$

$$+ \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

introduciendo en la sumatoria $\underline{C}_i$,

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\,\underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k \underline{x} = \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots +$$

$$+ \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

separando en d_i la sumatoria,

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{d_i} p_k(\underline{F})\,\underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k \underline{x} - \sum_{k=d_i+1}^{n-1} p_k(\underline{F})\,\underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^k \underline{x} = \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} +$$

$$+ \ldots + \underline{C}_i \; (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

se puede eliminar $\underline{x}$, reemplazando las ecuaciones (3 . 27),

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{d_i} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} + \sum_{k=d_i+1}^{n-1} p_k(\underline{F}) \left[- y_i^{(k)} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(k-d_i-1)} \right] = \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \ldots + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

como se sabe, la sumatoria de la adición de dos expresiones es igual a la adición de las sumatorias de cada expresión; uniendo las sumatorias de las derivadas $y_i^{(k)}$, se tiene:

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} + \sum_{k=d_i+1}^{n-1} p_k(\underline{F}) \left[\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(k-d_i-1)} \right] = \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\cdot\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots +$$

$$+ \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)}$$

pasando la sumatoria $\sum_{k=d_i+1}^{n-1}$, al otro miembro de la ecuación,

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} = \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)} -$$

$$- \sum_{k=d_i+1}^{n-1} p_k(\underline{F}) \left[\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{k-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(k-d_i-1)} \right]$$

desarrollando la sumatoria $\sum_{k=d_i+1}^{n-1}$

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} = \underline{C}_i(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} + \ldots + \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-1)} -$$

$$- p_{d_i+1}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} -$$

$$- p_{d_i+2}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i+1} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} - p_{d_i+2}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} -$$

$$\vdots$$

$$- p_{n-1}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-2} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} - p_{n-1}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{n-3} \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} - \ldots -$$

$$- p_{n-1}(\underline{F})\, \underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{F})^{d_i} \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-d_i-2)}$$

agrupando de acuerdo a las derivadas de $\underline{w}$, sacando factor común $\underline{C}_i$ por la izquierda y $\underline{B}\ \underline{G}$ por la derecha. Además si se ordena las potencias de ($\underline{A}$ + $\underline{B}$ $\underline{F}$), se llega a:

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} = \underline{C}_i \left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di+1} - p_{di+1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} +$$

$$+ \underline{C}_i\left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G}\,\dot{\underline{w}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \underline{C}_i \left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}^{(n-di-1)} \qquad (3.28a)$$

Sea $\underline{\Omega}$ la matriz(m x n) dada por:

$$\underline{\Omega} = [\, \underline{w} \mid \underline{w}^{(1)} \mid \ldots \mid \underline{w}^{(n-1)} \,], \qquad (3.29a)$$

y sea $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}$ la matriz (n x m) dada por:

$$\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\} = \begin{bmatrix} \underline{C}_i \left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di+1} - p_{di+1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G} \\ \underline{C}_i \left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G} \\ \vdots \\ \underline{C}_i \left[(\underline{A}+\underline{B}\,\underline{F})^{di} \right] \underline{B}\,\underline{G} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (3.29b)$$

donde: $\underline{0}$ es una matriz cero consistente con el orden de $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}$.

Ahora si se multiplica $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}\ \underline{\Omega}$.

Se conoce que al multiplicar dos matrices, se realiza el producto de cada vector fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda matriz, entonces se tendrá:

$$L^i\{E,G\}\ \Omega = \begin{bmatrix} \underline{C}_i\ [(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+1}(F)(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\underline{B}\underline{G}\ \underline{\Omega} \\ \underline{C}_i\ [(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\underline{B}\underline{G}\ \underline{\Omega} \\ \vdots \\ \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\underline{B}\underline{G}\ \underline{\Omega} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

multiplicando por cada columna de Ω de la ecuación (3 . 29 a),

$$\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}\ \underline{\Omega} = \begin{array}{l} \text{Fila 1} \\ \\ \\ \\ \text{Fila n} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w} & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}]\ \underline{B}\underline{G}\dot{\underline{w}} & \cdots & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-1} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - \ldots - p_{di+1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w}^{(n-1)} \\ \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w} & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\dot{\underline{w}} & \cdots & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-2} - p_{n-1}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{n-3} - \ldots - p_{di+2}(\underline{F})(\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w} & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\dot{\underline{w}} & \cdots & \underline{C}_i\ [\ (\underline{A}+\underline{B}\underline{F})^{di}\ ]\ \underline{B}\underline{G}\underline{w}^{(n-1)} \\ & & \underline{0} & \end{bmatrix}}_{\text{n Columnas}}$$

Comparando la última expresión con la ecuación (3 . 28 a) , se puede establecer que se obtiene la siguiente igualdad:

$$y_i(n) - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i(k) = \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \}\, \underline{\Omega} \right) \qquad (3\ .\ 28\ b)$$

donde: tr(.) denota el trazo de una matriz, que se determina sumando los términos de la diagonal principal.

Si $\underline{E}_{ij}$ denota la matriz (m x m) con 1 en la ij-ésima posición y ceros en otro lado, entonces $\underline{E}_{ii}\, \underline{\Omega}$ es una matriz (m x n) en la que la i-ésima fila es idéntica a la i-ésima fila de $\underline{\Omega}$ y las demás filas son cero.

Sea:

$$\underline{E}_{ij} = \left.\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & j & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \end{array}}_{m} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} m$$

entonces,

$$\underline{E}_{ii} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & i & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

y sea:

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} w_1 & w_1(1) & \cdots & w_1(n-1) \\ w_2 & w_2(1) & \cdots & w_2(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i & w_i(1) & \cdots & w_i(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_m & w_m(1) & \cdots & w_m(n-1) \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

multiplicando $\underline{E}_{ii}\,\underline{\Omega}$.

$$\underline{E}_{ii}\,\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_1(1) & \cdots & w_1(n-1) \\ w_2 & w_2(1) & \cdots & w_2(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i & w_i(1) & \cdots & w_i(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_m & w_m(1) & \cdots & w_m(n-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Omega}^i = \underline{E}_{ii}\,\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i & w_i(1) & & w_i(n-1) \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

donde: La matriz $E_{ii}\,\Omega$ es denotada por Ω^i , y sirve para separar los efectos debido a cada entrada. Entonces (3 . 28 b) puede ser escrita como:

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} = \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \} \sum_{i=1}^{m} \underline{\Omega}^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \}\, \underline{\Omega}^i \right) \qquad (3.32)$$

Esta ecuación es una forma ordinaria de caracterizar la respuesta en y_i como la superposición de los efectos de cada entrada w_i. De tal forma que se puede realizar la siguiente definición.

Definición.- Las matrices $\underline{F}$ y $\underline{G}$, con $\underline{G}$ no singular, desacopla el sistema (3. 21) si

$$1.-\ y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F})\, y_i^{(k)} = \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \}\, \underline{\Omega} \right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \}\, \underline{\Omega}^i \right)$$

$$,i = 1,2, \ldots ,m \qquad (3.33\ a)$$

$$2.-\ \mathrm{tr}\left(\underline{L}^i\{ \underline{F},\underline{G} \}\, \underline{\Omega} \right) \neq 0 \qquad ,i = 1,2, \ldots ,m \qquad (3.33\ b)$$

Nótese que esta es una definición precisa que no implica afirmaciones vagas, acerca de las entradas controlando independientemente las salidas.

3.2.1.- Teorema Principal.

Con la teoría anterior, es posible establecer y probar un teorema que dé las condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento.

3.2.1.1.- Teorema 1.-

Sea $\underline{B}^*$ la matriz (m x m) dado por:

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m}\underline{B} \end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

Entonces hay un par de matrices $\underline{F}$ y $\underline{G}$ que desacoplan el sistema (3. 21) sí y sólo sí

$$\det \underline{B}^* \neq 0 \ , \qquad (3.35)$$

es decir, sí y sólo sí $\underline{B}^*$ es no singular.

" Prueba 1 ": Supóngase que $\underline{B}^*$ es no singular. Entonces se afirma que el par

$$\underline{F}^* = -\underline{B}^{*-1}\underline{A}^* \qquad (3.36\ a)$$

$$\underline{G}^* = \underline{B}^{*-1} \qquad (3.36\ b)$$

donde:

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1+1} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m+1} \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

desacopla (3 . 21).

En vista de (3 .25 b) para $k = d_i + 1$, se tiene:

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i+1} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i+1-d_i}$$

$$= \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)$$

multiplicando el paréntesis,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i+1} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{A} + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^*$$

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i+1} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+1} + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^* \qquad (3 . 38)$$

Pero $\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}$ es simplemente la i-ésima fila de $\underline{B}^*$ y con (3 . 36 a), resulta que:

agrupando,

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^* = (\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B})\ \underline{F}^*$$

como $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\ \underline{B}$, es la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, la ecuación anterior será:

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^* = \underline{B}_i^*\underline{F}^*$$

reemplazando $\underline{F}^*$ de la ecuación (3 . 36 a),

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^* = \underline{B}_i^*(- \underline{B}^{*-1}\underline{A}^*)$$

multiplicando el paréntesis,

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{F}^* = - \underline{B}_i^*\underline{B}^{*-1}\underline{A}^* ,$$

sea $\underline{I}_i = \underline{B}_i^* \underline{B}^{*-1}$,por lo que la ecuación anterior sería:

$$\underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i} \underline{B} \ \underline{F}^* = - \underline{I}_i \ \underline{A}^*$$

por último, se tiene:

$$\underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i} \underline{B} \ \underline{F}^* = - \underline{A}_i^* \ ,$$

siendo $\underline{A}_i^* = \underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i+1}$ la i-ésima fila de $\underline{A}^*$, se tendría:

$$\underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i} \underline{B} \ \underline{F}^* = - \underline{A}_i^* = - \underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i+1} \ . \qquad (3 \ . \ 39)$$

donde: $\underline{I}_i$ es el vector fila identidad de orden m correspondiente a la fila i.

$$\underline{I} = (\overbrace{0 \ \ldots \ 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ésimo lugar}}}{1} \ 0 \ \ldots \ 0}^{m}) \ .$$

Entonces, como $\underline{B}_i^*$ y $\underline{A}_i^*$ son las i-ésimas filas de $\underline{B}^*$ y $\underline{A}^*$, respectivamente, y con (3 . 39), la ecuación (3 .38) se obtiene que:

$$\underline{C}_i \ (\underline{A} + \underline{B} \ \underline{F}^*)^{d_i+k} = 0 \ . \qquad (3 \ . \ 40)$$

Para cualquier entero positivo k, de (3 . 25 a) se tiene:

$$\underline{C}_i \ (\underline{A} + \underline{B} \ \underline{F}^*)^{d_i} = \underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i}$$

multiplicando por la derecha $\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}$, ambos miembros de la ecuación anterior,

$$\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1} \ = \ \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}$$

agrupando,

$$\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1} \ = \ (\ \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ )\ \underline{B}^{*-1}$$

reemplazando la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, $\underline{B}_i{}^* = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}$

$$\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1} \ = \ \underline{B}_i{}^*\underline{B}^{*-1} \qquad (\ 3\ .\ 41\ )$$

Entonces haciendo $\underline{F} = \underline{F}^*$ y $\underline{G} = \underline{G}^*$ en la ecuación (3 . 29 b), se tiene,

multiplicando a su vez el paréntesis por $\underline{B}\ \underline{G}^*$

$$\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \begin{bmatrix} \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{n-1}\underline{B}\ \underline{G}^* - p_{n-1}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{n-2}\underline{B}\ \underline{G}^* - \ldots - p_{d_i+1}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}^* \\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{n-2}\underline{B}\ \underline{G}^* - p_{n-1}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{n-3}\underline{B}\ \underline{G}^* - \ldots - p_{d_i+2}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}^* \\ \vdots \\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\ \underline{B}\ \underline{G}^* \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

agrupando,

$$\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \begin{bmatrix} [\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{n-1}]\underline{B}\ \underline{G}^* - p_{n-1}(\underline{F}^*)[\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{n-2}]\underline{B}\ \underline{G}^* - \ldots - p_{d_i+1}(\underline{F}^*)[\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}]\underline{B}\ \underline{G}^* \\ [\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{n-2}]\underline{B}\ \underline{G}^* - p_{n-1}(\underline{F}^*)[\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{n-3}]\underline{B}\ \underline{G}^* - \ldots - p_{d_i+2}(\underline{F}^*)[\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}]\underline{B}\ \underline{G}^* \\ \vdots \\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*)^{d_i}\ \underline{B}\ \underline{G}^* \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

de acuerdo a la ecuación (3 . 40), la ecuación anterior se tendría:

$$\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \begin{bmatrix} -p_{d_i+1}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}^* \\ -p_{d_i+2}(\underline{F}^*)\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}^* \\ \vdots \\ \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}^*\ )^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}^* \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

reemplazando la ecuación (3 . 41) y con la ecuación (3 . 36 b) se obtiene:

$$\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \begin{bmatrix} -p_{d_i+1}(\underline{F}^*)\ \underline{B}_i^*\underline{B}^{*-1} \\ -p_{d_i+2}(\underline{F}^*)\ \underline{B}_i^*\underline{B}^{*-1} \\ \vdots \\ \underline{B}_i\ \underline{B}^{*-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (\ 3\ .\ 42\ a\ )$$

No obstante, $\underline{B}_i^*\underline{B}^{*-1} = \underline{I}_i$,es un vector fila con 1 en el i-ésimo lugar y ceros en cualquier otro.

$$\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \begin{bmatrix} -p_{d_i+1}(\underline{F}^*)\ \underline{I}_i \\ -p_{d_i+2}(\underline{F}^*)\ \underline{I}_i \\ \vdots \\ \underline{I}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

ampliando la ecuación anterior,

$$\underline{L}^{i}\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \ldots & 0 & -p_{di+1}(\underline{F}^*) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -p_{di+2}(\underline{F}^*) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]}_{m} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-d_i \\ \\ \\ \\ \end{array} \Bigg\} n$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{i-ésimo lugar} \end{array}$$

(3 . 42 b)

- Cálculo de la tr ($\underline{L}^{i}\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\ \underline{\Omega}$)

$$tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\underline{\Omega}) = tr \left(\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & -p_{di+1}(\underline{F}^*) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -p_{di+2}(\underline{F}^*) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_1^{(1)} & \ldots & w_1^{(n-1)} \\ w_2 & w_2^{(1)} & \ldots & w_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i & w_i^{(1)} & \ldots & w_i^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_m & w_m^{(1)} & \ldots & w_m^{(n-1)} \end{bmatrix} \right.$$

multiplicando las matrices,

$$
tr(\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\underline{\Omega}) = tr\left(\underbrace{\begin{bmatrix}
-p_{d_i+1}(\underline{F}^*)w_i & -p_{d_i+1}(\underline{F}^*)w_i^{(1)} & \ldots & -p_{d_i+1}(\underline{F}^*)w_i^{(n-1)} \\
-p_{d_i+2}(\underline{F}^*)w_i & -p_{d_i+2}(\underline{F}^*)w_i^{(1)} & \ldots & -p_{d_i+2}(\underline{F}^*)w_i^{(n-1)} \\
\vdots & \vdots & . & \vdots \\
w_i & w_i^{(1)} & & w_i^{(n-1)} \\
0 \;\ldots & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 \;\ldots & 0 & & 0
\end{bmatrix}}_{n} \right)\Big\}r
$$

siendo el tr(.),

$$
tr(\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\underline{\Omega}) = -\,p_{d_i+1}(\underline{F}^*)w_i - p_{d_i+2}(\underline{F}^*)w_i^{(1)} - \ldots + w_i^{(n-d_i-1)} \qquad (3.43)
$$

Entonces,

$$
tr\,(\,\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\,\underline{\Omega}\,) \neq 0 \qquad (3.44)
$$

donde: tr(.) denota el trazo de una matriz, que se determina sumando los términos de la diagonal principal.

- Ahora se calcula $tr\,(\,\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\,\underline{\Omega}^i\,)$

$$
tr(\underline{L}^i\{\underline{F}^*,\underline{G}^*\}\underline{\Omega}^i) = tr\left(\begin{bmatrix}
0 \ldots 0 & -p_{d_i+1}(\underline{F}^*) & 0 \ldots 0 \\
0 \ldots 0 & -p_{d_i+2}(\underline{F}^*) & 0 \ldots 0 \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\
0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 \\
w_i & w_i^{(1)} & \ldots & w_i^{(n-1)} \\
0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix} \right.
$$

multiplicando,

$$
tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^{*},\underline{G}^{*}\}\underline{\Omega}) = tr\left(\underbrace{\begin{bmatrix} -p_{di+1}(\underline{F}^{*})w_i & -p_{di+1}(\underline{F}^{*})w_i^{(1)} & \cdots & -p_{di+1}(\underline{F}^{*})w_i^{(n-1)} \\ -p_{di+2}(\underline{F}^{*})w_i & -p_{di+2}(\underline{F}^{*})w_i^{(1)} & \cdots & -p_{di+2}(\underline{F}^{*})w_i^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i & w_i^{(1)} & & w_i^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n}\right)\Bigg\} n
$$

siendo el tr(.),

$$
tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^{*},\underline{G}^{*}\}\underline{\Omega}^{i}) = -p_{di+1}(\underline{F}^{*})w_i - p_{di+2}(\underline{F}^{*})w_i^{(1)} - \ldots + w_i^{(n-di-1)} \qquad (3.45)
$$

Entonces,

$$
tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^{*},\underline{G}^{*}\}\underline{\Omega}^{i}) \neq 0 \qquad (3.46)
$$

Como se puede observar de las ecuaciones (3. 43) y (3. 45), con (3. 46) se tiene:

$$
tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^{*},\underline{G}^{*}\}\underline{\Omega}) = tr(\underline{L}^{i}\{\underline{F}^{*},\underline{G}^{*}\}\underline{\Omega}^{i}) \neq 0
$$

En otras palabras, $\underline{F}^{*}$ y $\underline{G}^{*}$ desacoplan (3. 21).

" Prueba 2 ": Ahora supóngase que hay un par de matrices $\underline{F}$, $\underline{G}$ que desacoplan (3 . 21).

Entonces de (3 . 25 a), para $k = d_i$

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\, \underline{F})^{d_i} = \underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \qquad , i = 1,2, \ldots ,m$$

multiplicando por la derecha $\underline{B}\, \underline{G}$, ambos miembros de la ecuación anterior,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\, \underline{F})^{d_i} \underline{B}\, \underline{G} = \underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \underline{B}\, \underline{G}$$

agrupando,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\, \underline{F})^{d_i} \underline{B}\, \underline{G} = (\underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \underline{B})\, \underline{G}$$

reemplazando la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \underline{B}$,

$$\underline{C}_i (\underline{A} + \underline{B}\, \underline{F})^{d_i} \underline{B}\, \underline{G} = \underline{B}_i^*\, \underline{G} \qquad , i = 1,2, \ldots ,m \qquad (3 . 47)$$

Puesto que, si el producto $\underline{C}_i\, \underline{A}^j \underline{B} = 0$ para todo j implicaría que $tr (\underline{L}^i\{\underline{E},\underline{G}\}\ \Omega) = 0$, contradiría el hecho que $\underline{F}$ y $\underline{G}$ desacoplan (3 . 21); es claro que para $j = d_i$ de la ecuación (3 .24 a) se tiene que $\underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \underline{B} \neq 0$, y por lo tanto $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i\, \underline{A}^{d_i} \underline{B} \neq 0$ para $i = 1, \ldots ,m$. Además, como $\underline{G}$ es no singular, se cumple que $\underline{B}_i^*\, \underline{G} \neq 0$ para todo i. Puesto que (3 . 33 a) se satisface, $\underline{B}_i^*\, \underline{G}$ es un vector fila de orden m de la forma $\alpha_i\, \underline{I}_i$ con $\alpha_i \neq 0$, de otra forma habrían $w_j(k)$, $j \neq i$, términos en la $tr (\underline{L}_i\{\underline{E},\underline{G}\}\ \Omega)$, y entonces $\underline{B}_i^* \underline{G} = \alpha_i\, \underline{I}_i$.

De este modo,

$$\underline{B}_1{*}\underline{G} = (\ \alpha_1 \quad 0 \quad 0 \ldots 0\ )$$

$$\underline{B}_2{*}\underline{G} = (\ 0 \quad \alpha_2 \quad 0 \ldots 0\ )$$

$$\vdots$$

$$\underline{B}_m{*}\underline{G} = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \alpha_m\ )$$

por lo tanto,

$$\underline{B}{*}\underline{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_m \end{bmatrix} \qquad (3.48)$$

donde: $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0$

Entonces, $\underline{B}^*$ es no singular puesto que $\underline{G}$ lo es.

El Teorema 1 prueba que $\underline{B}^*$ es de amplia importancia en el desacoplamiento de (3 . 21) por la realimentación de estado. La base para la selección de $\underline{F}^*$ y $\underline{G}^*$ en la prueba del Teorema 1 es la siguiente observación.

Observación.- Puesto que (3 . 26 c) para $k = d_i + 1$ implica que,

$$y_i(d_i+1) = \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i+1}\underline{x} + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

$$y_i(d_i+1) = \underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{d_i}(\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )\ \underline{x} + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

aplicando la ecuación (3 . 25 a),

$$y_{i(d_i+1)} = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i}(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F})\ \underline{x} + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{G}\ \underline{w}$$

multiplicando el paréntesis y agrupando,

$$y_{i(d_i+1)} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{A}\ \underline{x} + (\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B})\ \underline{F}\ \underline{x} + (\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B})\ \underline{G}\ \underline{w}$$

reemplazando la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}$,

$$y_{i(d_i+1)} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+1}\ \underline{x} + \underline{B}_i^*\ \underline{F}\ \underline{x} + \underline{B}_i^*\ \underline{G}\ \underline{w}$$

reemplazando la i-ésima fila de $\underline{A}^*$, $\underline{A}_i^* = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+1}$,

$$y_{i(d_i+1)} = \underline{A}_i^*\ \underline{x} + \underline{B}_i^*\ \underline{F}\ \underline{x} + \underline{B}_i^*\ \underline{G}\ \underline{w}$$

agrupando,

$$y_{i(d_i+1)} = (\underline{A}_i^* + \underline{B}_i^*\ \underline{F})\ \underline{x} + \underline{B}_i^*\ \underline{G}\ \underline{w} \qquad (3.\ 49)$$

que puede también ser reescrita en la forma:

$$\underline{Y}^* = (\underline{A}^* + \underline{B}^*\ \underline{F})\ \underline{x} + \underline{B}^*\ \underline{G}\ \underline{w} \qquad (3\ .\ 50)$$

donde: $\underline{Y}^*$ es el vector de orden m con componentes $y_{i(d_i+1)}$.

Haciendo $\underline{F} = \underline{F}^*$ y $\underline{G} = \underline{G}^*$,

$$\underline{Y}^* = (\underline{A}^* + \underline{B}^*\ \underline{F}^*)\ \underline{x} + \underline{B}^*\ \underline{G}^*\ \underline{w}$$

reemplazando las ecuaciones (3 . 36)

$$\underline{Y}^* = [\underline{A}^* + \underline{B}^* (- \underline{B}^{*-1}\underline{A}^*)]\ \underline{x} + \underline{B}^* (\underline{B}^{*-1})\ \underline{w}$$

multiplicando los paréntesis,

$$Y^* = [A^* - B^*B^{*-1}A^*] x + B^*B^{*-1}w$$

como se sabe que $I = B^*B^{*-1}$,

$$Y^* = [A^* - I A^*] x + I w$$

$$Y^* = [A^* - A^*] x + w$$

$$Y^* = w \qquad (3.51)$$

o equivalente a:

$$y_i^{(d_i+1)} = w_i \qquad (3.52)$$

Precaución.- La ecuación (3 .52) no representa el sistema desacoplado, ya que en general, envuelve la cancelación de ceros. Las ecuaciones del sistema desacoplado están dadas por (3 . 33) , o en la forma de estado como,

$$\dot{x} = (A + B F) x + B G G$$

$$y = C x$$

donde: F y G son el par de desacoplamiento.

Se ha establecido que la no singularidad de B^* es una condición necesaria para la existencia de un par de matrices F , G que desacoplen (3 . 21).

A continuación se determinará: el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados para el sistema desacoplado; qué tan arbitrariamente pueden ser especificados; y qué tan fácilmente puede ser desarrollado un algoritmo para especificar estos polos.

3.2.2.- Clases de matrices de desacoplamiento.

Sea $\underline{F}$ una matriz (m x n) y sea $\underline{G}$ una matriz (m x m) no singular. Bajo la suposición de que (3 . 21) puede ser desacoplada, se determinarán las condiciones necesarias y suficientes para que $\underline{F}$ y $\underline{G}$ sean un par de desacoplamiento. Estas condiciones resultan ser independientes de $\underline{G}$ de tal forma que tendrá sentido hablar de la clase Φ de matrices $\underline{F}$ que desacoplen (3 . 21).

Definición.- Sea $\underline{Q}^i(\underline{F})$ la matriz (n x m) dada por:

$$\underline{Q}^i(\underline{F}) = \begin{bmatrix} \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-1}\underline{B} \\ \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{n-2}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}\ )^{di}\underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix} , \quad i = 1, \ldots, m \qquad (3 . 53)$$

donde: $\underline{0}$ es una matriz cero consistente con el orden de $\underline{Q}^i(\underline{F})$.

Sea $\underline{P}^i(\underline{F})$ la matriz (n x n) dado por

$$\underline{P}^i(\underline{F}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -p_{n-1}(\underline{F}) & \ldots & -p_{di+1}(\underline{F}) & \\ 0 & 1 & \ldots & -p_{di+2}(\underline{F}) & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \underline{0} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ \hline & & \underline{0} & & \underline{I} \end{array}\right] , \quad i = 1, \ldots, m \qquad (3 . 54)$$

donde: los $p_k(\underline{F})$ son los coeficientes del polinomio característico de ($\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F}$), es decir,

$$(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F})^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\underline{F}) (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{F})^k .$$

$\underline{I}$ es la matriz identidad consistente con el orden de $\underline{P}^i(\underline{F})$.

Por la definición dada de $\underline{P}^i(\underline{F})$ es indudable, que la misma es no singular; ya que de acuerdo al Teorema matemático que dice: "si una matriz es triangular superior, se calcula el determinante, multiplicando los términos de la diagonal principal, y si el determinante es diferente de cero implica que dicha matriz es no singular", entonces resulta que el producto $\underline{P}^i(\underline{F})\ \underline{Q}^i(\underline{F})$ es la matriz (n x m) que tiene el mismo rango de $\underline{Q}^i(\underline{F})$, es decir,

$$\text{rango} [\underline{P}^i(\underline{F})\ \underline{Q}^i(\underline{F})] = \text{rango} [\underline{Q}^i(\underline{F})] \quad i = 1, \ldots ,m \qquad (3\ .\ 55\ a)$$

donde: Se dice que una matriz tiene rango m, si hay una submatriz $\underline{M}$ de (m x m) de $\underline{A}$ tal que el determinante de $\underline{M}$ no es cero, mientras los determinantes de toda submatriz de (r x r) (siendo $r \geq m+1$) de $\underline{A}$ es cero.

Nótese también que se cumple:

$$\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\} = \underline{P}^i(\underline{F})\ \underline{Q}^i(\underline{F})\ \underline{G} \qquad (3\ .\ 55\ b)$$

donde: $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}$ es definida por (3 . 29 b).

Entonces de la ecuación (3 . 55 b) se tiene:

$$\text{rango}\ [\ \underline{L}^{i}\{\underline{F},\underline{G}\}\ ] = \text{rango}\ [\ \underline{P}^{i}(\underline{F})\ \underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{G}\ ]$$

puesto que $\underline{G}$ es no singular y con la ecuación (3 . 55 a), la ecuación anterior será:

$$\text{rango}\ [\ \underline{L}^{i}\{\underline{F},\underline{G}\}\ ] = \text{rango}\ [\ \underline{Q}^{i}(\underline{F})\ ] \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (3\ .\ 56)$$

En vista de la definición de desacoplamiento, puede establecerse el siguiente teorema.

3.2.2.1.- Teorema 2.-

Si el par $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacopla (3 . 21), entonces el rango de $\underline{Q}^{i}(\underline{F})$ es uno para cualquier i; inversamente, si el rango de $\underline{Q}^{i}(\underline{F})$ es uno para todo i y si $\underline{B}^{*}$ es no singular, entonces el par $\underline{F}, \underline{B}^{*-1}$ desacopla el sistema (3 . 21).

" Prueba 1 ".- Supóngase que $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacopla (3 . 21). Entonces por (3 . 33),

$$\text{tr}\ (\ \underline{L}^{i}\{\ \underline{F},\underline{G}\ \}\ \underline{\Omega}\ ) = \text{tr}\ (\ \underline{L}^{i}\{\ \underline{F},\underline{G}\ \}\ \underline{\Omega}^{i}\ ) \neq 0 \qquad (3\ .\ 57)$$

para todo i donde $\underline{\Omega}$ es la matriz (m x n) dada por:

$$\underline{\Omega} = [\ \underline{w}\ |\ \underline{w}^{(1)}\ |\ \ldots\ |\ \underline{w}^{(n-1)}\ ] \ . \qquad (3\ .\ 58)$$

Puesto que Ω es arbitrario, y de acuerdo a (3 . 42 b) y (3 . 57) la i-ésima columna de $\underline{L}^{i}\{\underline{E},\underline{G}\}$ es un vector no cero, mientras que toda otra columna de $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}$ es vector cero. Por lo tanto, resulta que $\underline{L}^i\{\underline{F},\underline{G}\}$ tiene rango uno, y entonces, por (3 . 56) el rango [$\underline{Q}^i(\underline{F})$] = 1.

" Prueba 2 ".- Ahora supóngase que rango [$\underline{Q}^i(\underline{F})$] = 1 para todo i y que $\underline{B}^*$ es no singular.

De la ecuación (3 . 25 a) para k = d_i se tiene:

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{d_i} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i}$$

multiplicando por la derecha $\underline{B}$, ambos miembros de la ecuación anterior,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{d_i}\underline{B} = (\underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i} \, \underline{B})$$

reemplazando la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i}\underline{B}$,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{F})^{d_i}\underline{B} = \underline{B}_i^* \qquad (3 . 59)$$

de esta ecuación se puede establecer que $\underline{B}_i^* \neq 0$, entonces $\underline{B}^*$ es no singular.

Por la definición de d_i, donde $\underline{B}_i^*$ es la i-ésima fila de $\underline{B}^*$, resulta que,

$$\underline{Q}^i(\underline{F}) = \begin{bmatrix} \alpha_1{}^i \, \underline{B}_i^* \\ \alpha_2{}^i \, \underline{B}_i^* \\ \vdots \\ \underline{B}_i^* \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (3 . 60)$$

multiplicando por la derecha $\underline{B}^{*-1}$,

$$\underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{i}\ \underline{B}_i^{*} \\ \alpha_2^{i}\ \underline{B}_i^{*} \\ \vdots \\ \underline{B}_i^{*} \\ \underline{0} \end{bmatrix} B^{*-1} \quad ,$$

Al multiplicar dos matrices, se realiza el producto de cada vector fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda matriz, por lo que se tendrá:

$$\underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{i}\ \underline{B}_i^{*}\ \underline{B}^{*-1} \\ \alpha_2^{i}\ \underline{B}_i^{*}\ \underline{B}^{*-1} \\ \vdots \\ \underline{B}_i^{*}\ \underline{B}^{*-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

como se definió $\underline{I}_i = \underline{B}_i^{*}\ \underline{B}^{*-1}$,

$$\underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{i}\ \underline{I}_i \\ \alpha_2^{i}\ \underline{I}_i \\ \vdots \\ \underline{I}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

ampliando la matriz anterior,

$$\underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & \alpha_1{}^{i} & & \\ & & \alpha_2{}^{i} & & \\ \underline{0} & \cdots & \vdots & \cdots & \underline{0} \\ & & 1 & & \\ & & \underline{0} & & \end{array}\right] \qquad (3\ .\ 61)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{i-ésimo lugar} \end{array}$$

tiene solo una columna i-ésima diferente de cero.

Reemplazando la ecuación (3. 55 b), y con $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}$ se tendrá:

$$\text{tr}\ (\ \underline{L}^{i}\{\underline{F},\underline{B}^{*-1}\}\ \underline{\Omega}\ ) \ = \ \text{tr}\ (\ \underline{P}^{i}(\underline{F})\ \underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1}\underline{\Omega}\ )$$

Siendo $\underline{\Omega}$ arbitrario, $\underline{P}^{i}(\underline{F})$ definido no singular, entonces con la ecuación (3 . 61) y de acuerdo a (3 . 56), se llega a:

$$\text{tr}\ (\ \underline{L}^{i}\{\underline{F},\underline{B}^{*-1}\}\ \underline{\Omega}\ ) \ = \ \text{tr}\ (\ \underline{P}^{i}(\underline{F})\ \underline{Q}^{i}(\underline{F})\ \underline{B}^{*-1}\underline{\Omega}^{i}\ ) \ \neq \ 0 \qquad (3\ .\ 62)$$

y de esta forma el par $\underline{F}$, $\underline{B}^{*-1}$ desacopla (3. 21).

3.2.2.2.- <u>Corolario 1</u>.

Si el par $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacoplan (3 . 21), entonces hay una matriz diagonal $\underline{\Delta}$ tal que $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}\ \underline{\Delta}$.

" Prueba ": Si $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacopla (3 . 21), entonces $\underline{Q}^{i}\ (\underline{F})$

está dado por (3 . 60), a la que se multiplica $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}\underline{\Delta}$ por la derecha:

$$\underline{Q}^i(\underline{F})\,\underline{G} = \underline{Q}^i(\underline{F})\,\underline{B}^{*-1}\underline{\Delta}$$

$$\underline{Q}^i(\underline{F})\,\underline{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^i\,\underline{B}_i^* \\ \alpha_2^i\,\underline{B}_i^* \\ \vdots \\ \underline{B}_i^* \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{B}^{*-1}\underline{\Delta}$$

multiplicando,

$$\underline{Q}^i(\underline{F})\,\underline{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^i\,\underline{B}_i^*\,\underline{B}^{*-1}\underline{\Delta} \\ \alpha_2^i\,\underline{B}_i^*\,\underline{B}^{*-1}\underline{\Delta} \\ \vdots \\ \underline{B}_i^*\,\underline{B}^{*-1}\underline{\Delta} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

como $\underline{I}_i = \underline{B}_i^*\,\underline{B}^{*-1}$,

$$\underline{Q}^i(\underline{F})\,\underline{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^i\,\underline{I}_i\,\underline{\Delta} \\ \alpha_2^i\,\underline{I}_i\,\underline{\Delta} \\ \vdots \\ \underline{I}_i\,\underline{\Delta} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

al multiplicar $\underline{I}_i \underline{\Delta} = \tau^i$, $i = 1, \ldots ,m$. Y ampliando se tiene:

$$\underline{Q}^i(\underline{F})\ \underline{G} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{0} & \ldots & \begin{matrix} \tau^i\ \alpha_1{}^i \\ \tau^i\ \alpha_2{}^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau^i \\ \underline{0} \end{matrix} & \ldots & \underline{0} \end{array} \right] , \qquad (\ 3\ .\ 63\ )$$

donde: $\tau^i \neq 0$, $i = 1,2, \ldots ,m$.

Por lo tanto resulta que $\underline{B}^*\ \underline{G} =$ diagonal $[\ \tau^1, \ldots ,\tau^m\ ]$, y el corolario se establece.

3.2.2.3.- Corolario 2.

Si el par $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacoplan (3 . 21), entonces hay una matriz diagonal $\underline{\Gamma}$, tal que:

$$\underline{F}\ \underline{B} = \underline{B}^{*-1}\{\ \underline{\Gamma}\ \underline{A}^{**} - \underline{A}^*\ \}\ \underline{B} \qquad (\ 3\ .\ 64\ )$$

donde: $\underline{A}^{**}$ y $\underline{A}^*$ vienen dadas por,

$$\underline{A}^{**} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1\ \underline{A}^{d1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}_m\ \underline{A}^{dm} \end{bmatrix} , \quad \underline{A}^* = \underline{A}^{**}\underline{A} \qquad (\ 3\ .\ 65\ )$$

" Prueba ": De la ecuación (3 . 25 b) para $k = d_i + 1$, se tiene:

$$\underline{C}_i\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )^{d_i+1} = \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )$$

multiplicando por la derecha $\underline{B}$ a la ecuación anterior,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di+1} \underline{B} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E}) \, \underline{B}$$

multiplicando el paréntesis,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di+1} \underline{B} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di+1} \, \underline{B} + \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \, \underline{B} \, \underline{E} \, \underline{B}. \qquad (3.66)$$

Partiendo de la misma ecuación (3 . 25 b) para $k = di + 1$,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di+1} = \underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E}) \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di}$$

de acuerdo a la definición de di, y multiplicando por la derecha $\underline{B}$,

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di+1} \underline{B} = \underline{C}_i \, \underline{A} \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di} \underline{B} \quad .$$

al multiplicar $\underline{C}_i \; \underline{A}$ se obtiene un vector fila que puede ser expresado como $\sigma_i \, \underline{C}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Donde σ_i es una constante para cada i.

$$\underline{C}_i \, (\underline{A} + \underline{B} \, \underline{E})^{di+1} \underline{B} = \sigma_i \, \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \underline{B}. \qquad (3.67)$$

Igualando las ecuaciones (3 . 66) y (3 . 67),

$$\underline{C}_i \, \underline{A}^{di+1} \, \underline{B} + \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \, \underline{B} \, \underline{E} \, \underline{B} = \sigma_i \, \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \underline{B}$$

$$\underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \, \underline{B} \, \underline{E} \, \underline{B} = \sigma_i \, \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \underline{B} - \underline{C}_i \, \underline{A}^{di+1} \, \underline{B}$$

reemplazando $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} \, \underline{B}$, y sacando factor común $\underline{B}$ por la derecha,

$$\underline{B}_i^* \, \underline{E} \, \underline{B} = \{ \sigma_i \, \underline{C}_i \, \underline{A}^{di} - \underline{C}_i \, \underline{A}^{di+1} \} \, \underline{B}$$

reemplazando $\underline{A}_i^{**} = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di}$ y $\underline{A}_i^* = \underline{C}_i \, \underline{A}^{di+1}$

$$\underline{B}_i^* \, \underline{E} \, \underline{B} = \{ \sigma_i \, \underline{A}_i^{**} - \underline{A}_i^* \} \, \underline{B}$$

siendo lo mismo:

$$\underline{B}^* \, \underline{E} \, \underline{B} = \{ \underline{\Gamma} \, \underline{A}^{**} - \underline{A}^* \} \, \underline{B}$$

multiplicando por la izquierda $\underline{B}^{*-1}$,

$$\underline{E} \, \underline{B} = \underline{B}^{*-1} \{ \underline{\Gamma} \, \underline{A}^{**} - \underline{A}^* \} \, \underline{B}$$

donde: $\underline{\Gamma}$ es una matriz diagonal no singular de orden m.

En resumen, hasta aquí se ha demostrado que la no singularidad de $\underline{B}^*$ es una condición necesaria para la existencia de un par de desacoplamiento $\underline{E}$, $\underline{G}$. Además, el conjunto de todos los pares $\underline{E}$, $\underline{G}$ que desacolan (3 . 21) consiste de matrices $\underline{E}$ tales que su rango [$\underline{Q}^i(\underline{E})$] = 1 para todo i, y $\underline{G}$ tal que $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}\underline{\Delta}$, donde $\underline{\Delta}$ es diagonal y no singular.

3.2.3.- Ubicación de polos deseados de lazo cerrado. (Procedimiento de síntesis).-

El Teorema 2 provee un procedimiento para determinar Φ, la clase de todas las matrices de realimentación $\underline{F}$ que desacoplen (3 . 21). No obstante, la aplicación directa de la condición, rango [$\underline{Q}^i(\underline{F})$] = 1 para todo i, resulta solo en restricciones ubicadas en algunos de los mn parámetros de F. Pero todavía se requiere un procedimiento para especificar los polos del sistema de lazo cerrado, mientras se desaçopla simultáneamente (3 . 21) usando una apropiada matriz de realimentación $\underline{F} \in \Phi$. En este sentido, un procedimiento será presentado para obtener directamente una matriz de realimentación $\underline{F} \in \Phi$, cuyos parámetros están determinados, para conseguir una estructura de polos de lazo cerrado.

En particular, supóngase que $\underline{M}_k$, $k = 0,1, \ldots ,\delta$ son matrices (m x m). Entonces la selección de:

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1}[\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*] \qquad (3 . 68 a)$$

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} \qquad (3 . 68 b)$$

reemplazando en (3 . 50) las ecuaciones (3. 68),

$$\underline{Y}^* = (\underline{A}^* + \underline{B}^* (\underline{B}^{*-1}[\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*])) \underline{x} + \underline{B}^*(\underline{B}^{*-1}) \underline{w}$$

como $\underline{I} = \underline{B}^* \underline{B}^{*-1}$,

$$\underline{Y}^* = (\underline{A}^* + \underline{I} [\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]) \underline{x} + \underline{I} \underline{w}$$

$$\underline{Y}^* = (\underline{A}^* + [\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]) \underline{x} + \underline{w}$$

simplificando,

$$\underline{Y}^* = \sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k \underline{x} + \underline{w} \qquad (3 . 69)$$

Si $\delta = \max d_i$ y los $\underline{M}_k$ son adecuadamente escogidos, es decir, $\underline{M}_k = \text{diagonal} [m_k^1 , m_k^2 , \ldots , m_k^m]$, $i = 1,2, \ldots ,m$.

Entonces (3 . 69), con (3 . 25 a) y (3 . 26 b), respectivamente, puede ser escrito de la forma:

$$Y^* = \sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{y}^{(k)} + \underline{w} \qquad (3 . 70)$$

o con (3 . 49),

$$y_i^{(d_i+1)} = m_0^i y_i + m_1^i y_i^{(1)} + \ldots + m_{d_i}^i y_i^{(d_i)} + w_i$$

$$, i = 1, \ldots ,m \qquad (3 . 71)$$

indica que $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacoplan (3 . 21) y que $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de los polos de lazo cerrado pueden ser variados modificando el $\underline{M}_k$. Por ende, otras selecciones de $\underline{M}_k$ llevarán a otras configuraciones de polos de lazo cerrado. Entonces, si $\underline{B}^*$ es no singular, $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de polos de estos sistemas de lazo cerrado pueden ser especificados arbitrariamente ($d_i + 1$ cada vez) mientras que, simultáneamente, se desacopla el sistema usando el procedimiento para obtener directamente una matriz de realimentación $\underline{F} \in \Phi$.

3.2.3.1.- Lema.-

Sea $\underline{K}$ la matriz $([m + \sum_{i=1}^{m} d_i] \times n)$ dada por

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1} \\ \underline{C}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m} \end{bmatrix} \qquad (3.72)$$

Entonces, rango $[\underline{K}] = m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ y, por ende, $m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq n$.

" Prueba ": Sea $\underline{K}_i$ que denote la i-ésima fila de $\underline{K}$, y sea r_i escalares arbitrarios tales que:

$$\sum_{i=1}^{\tau} r_i \underline{K}_i = 0 \qquad (3.73\ a)$$

donde: $$\tau = m + \sum_{i=1}^{m} d_i \ . \qquad (3.73\ b)$$

Para establecer el Lema, solo se necesita probar que (3 . 73 a) implica que cada $r_i = 0$. Esto resulta directamente de (3 . 72) por postmultiplicaciones sucesivas por B , $A\,B$, ... , $A^6\,B$, y el hecho que B^* es no singular.

Ahora sea p que denota el número de polos de lazo cerrado que puede ser especificado durante el desacoplamiento, y sea f lo que denota el número de parámetros libres (entradas) en una matriz de desacoplamiento F.

Del Lema se conoce que:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq n ,$$

además, el orden n del sistema está dado por el número de polos, por lo que si p es el número de polos de lazo cerrado que se debe añadir, se tendría:

$$p \leq n ,$$

y de la ecuación (3 . 71) se tiene que:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq p$$

Entonces:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq p \leq n \qquad (4 . 74\ a)$$

Por otro lado, el número máximo de parámetros libres f que se puede tener son mn , debido a que la matriz F de desacoplamiento es de orden (m x n). Y el número de polos de lazo cerrado no puede exceder del orden n de la matriz, además, al determinar F se establece de antemano que existe m parámetros libres, se tiene que:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq f \qquad (4.74\ b)$$

Así pues, se tiene las siguientes características:

Si $m + \sum_{i=1}^{m} d_i = n$, entonces cualquier n de los polos de lazo cerrado pueden ser ubicados arbitrariamente, mientras simultáneamente se desacopla el sistema.

También, si $m + \sum_{i=1}^{m} d_i = f$, entonces (3 . 71) dan directamente significado físico a los parámetros libres en $\underline{E}$.

Si $f > m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ o $f > n$, por lo que puede ser posible especificar más $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de los polos de lazo cerrado. En esta situación, es a menudo ventajoso calcular la Matriz Función de Transferencia en lazo cerrado, sabiendo que $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}$, entonces

$$\underline{G}_c(s) = \underline{C}\,(s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E})\,\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

con f entradas en $\underline{E}$ mantenidas arbitrariamente.

Por último, el número de polos de lazo cerrado,

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i$$

no puede exceder a n , debido a que el orden del sistema está dado por el número de polos, que en este caso es n.

3.2.4.- Ejemplos.

Ejemplo 1.-

Sea el sistema:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3 . 75}$$

De acuerdo a (3 . 34)

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^{d_1} \underline{B} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^{d_2} \underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad \text{siendo } d_1 = 0 \quad y \quad d_2 = 1 \qquad (3.76)$$

$\det [B^*] = 1 - 0 = 1 \neq 0$

Puesto que B^* es no singular, el sistema (3 . 75) puede ser desacoplado. El conjunto Φ, de todas las matrices que desacoplan el sistema (3 . 75), puede ser obtenido, para todas las matrices F de orden (2 x 3) tal que rango$[Q^i(F)] = 1$.

De las ecuaciones (3 . 64) y (3 . 65),

$$F = B^{*-1} \{ \Gamma A^{**} - A^* \}$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d1} \\ C_2 A^{d2} \end{bmatrix} , \qquad A^* = A^{**} A$$

$$C_1 A^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.77)$$

$$A^* = A^{**}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3.78)$$

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.79)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 - 3 \\ 1 & \alpha_2 - 1 & \alpha_2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 - 3 \\ 1 & \alpha_2 - 1 & -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3 \end{bmatrix}$$

sea:

$f_{13} = \alpha_1 - 3$

$f_{22} = \alpha_2 - 1$

$f_{23} = -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3$

siendo los elementos de Φ de la forma:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{13} \\ 1 & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \qquad (3.80)$$

existiendo $f = 3$ parámetros libres en la matriz $\underline{F}$.

La forma más general de la matriz función de transferencia es:

$$\underline{G}c(s) = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$\det[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,] = \det[\begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ 1 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_{22} & f_{13}+f_{23} \\ 0 & 0 & f_{13} \end{bmatrix}]$$

$$= \det[\begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ 0 & s-1-f_{22} & -f_{13}-f_{23} \\ 0 & 0 & s-3-f_{13} \end{bmatrix}]$$

$$= s\,(s-1-f_{22})\,(s-3-f_{13})$$

$$[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ 0 & s-1-f_{22} & -f_{13}-f_{23} \\ 0 & 0 & s-3-f_{13} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s-1-f_{22})(s-3-f_{13}) & (s-3-f_{13}) & (s-1+f_{13}+f_{23}-f_{22}) \\ 0 & s\,(s-3-f_{13}) & s\,(f_{13}+f_{23}) \\ 0 & 0 & s\,(s-1-f_{22}) \end{bmatrix}}{s\,(s-1-f_{22})\,(s-3-f_{13})}$$

$$\underline{G}c(s) = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-1-f_{22})(s-3-f_{13}) & (s-3-f_{13}) & (s-1+f_{13}+f_{23}-f_{22}) \\ 0 & s\,(s-3-f_{13}) & s\,(f_{13}+f_{23}) \\ 0 & 0 & s\,(s-1-f_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{s\,(s-1-f_{22})\,(s-3-f_{13})}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & s\,(s-1-f_{22}) \\ (s-1-f_{22})(s-3-f_{13}) & (s-3-f_{13}) & (s-1+f_{13}+f_{23}-f_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{s\,(s-1-f_{22})\,(s-3-f_{13})}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s\,(s-1-f_{22}) & 0 \\ (2\,f_{13}+f_{23}-f_{22}+2) & (s-3-f_{13}) \end{bmatrix}}{s\,(s-1-f_{22})\,(s-3-f_{13})} \qquad (3\,.\,81)$$

Observando la matriz función de transferencia de lazo cerrado $\underline{G}c(s)$, en primera instancia, se establecería que no se podría desacoplar el sistema (3 . 75), porque no es diagonal. Pero sí se puede desacoplar, para un "subconjunto de matrices $\underline{F}$", que cumpla las condiciones: que el rango[$\underline{Q}^{i}(\underline{F})$] = 1 y $\underline{B}^{*}$ no singular, donde $\underline{Q}^{i}(\underline{F})$ está definida en (3 . 53).

Entonces, si se asigna las matrices M_k como:

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad (3 . 82)$$

y se sabe que max $d_i = \delta = 1$,

de acuerdo a la ecuación (3 . 68 a)

$$E = B^{*-1} \left[\sum_{k=0}^{\delta} M_k \, C \, A^k - A^* \right]$$

$$= B^{*-1} \left[M_0 \, C + M_1 \, C \, A - A^* \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3 . 83)$$

Como se tiene que el conjunto de todos los pares E y G que desacoplan el sistema (3 . 75), consiste de matrices E tales que el rango[Q^i (E)] = 1 para todo i. Se aplica la ecuación (3 . 53) para su comprobación.

$$\underline{Q}^i(\underline{E}) = \begin{bmatrix} \underline{C}_i\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{n-1}\underline{B} \\ \underline{C}_i\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{n-2}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}_i\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{d_i}\underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$\underline{Q}^i(\underline{E})$ es la matriz de orden $(n \times m)$, y $\underline{0}$ matriz consistente con el orden de $\underline{Q}^i(\underline{E})$.

- Para $i = 1$, siendo $d_1 = 0$

$$\underline{Q}^1(\underline{E}) = \begin{bmatrix} \underline{C}_1\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{2}\underline{B} \\ \underline{C}_1\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{1}\underline{B} \\ \underline{C}_1\,(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{E})^{0}\underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A + \underline{B}\,\underline{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A + \underline{B}\,\underline{E})\,\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{E})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{E})^2\,\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & 4 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_1\,(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{E})^2\,\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & 4 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_1\,(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{E})\,\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_1\,\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underset{\sim}{Q}^1\,(\underset{\sim}{E}) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.84)$$

rango[$\underset{\sim}{Q}^1\,(\underset{\sim}{E})$] = 1.

- Para $i = 2$, siendo $d_2 = 1$

$$\underline{Q}^2\ (\underline{E}) = \begin{bmatrix} \underline{C}_2\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )^2\underline{B} \\ \underline{C}_2\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )^1\underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )^2\ \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & 4 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2\ (\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{E}\ )\ \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{Q}^2\ (\underline{E}) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\ 3\ .\ 85\ )$$

$\det[.] = -4 \times 1 - (-2) \times 2 = -4 + 4 = 0$

donde: $[.]$ representa la submatriz (2×2) de $\underline{Q}^2\ (\underline{E})$.

Por lo tanto, $\text{rango}[\ \underline{Q}^2\ (\underline{E})\ ] = 1$.

Se obtiene que $\text{rango}[\ \underline{Q}^i\ (\underline{E})\ ] = 1$ para $i = 1,2$ y como $\underline{B}^*$ es no singular, entonces el par $\underline{E}$, $\underline{G}^{*-1}$ desacopla (3 . 75).

Se calcula la matriz de transferencia de lazo cerrado, para ver si en verdad se cumple lo establecido anteriormente.

$$\underline{Gc} = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E}\,]^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+2)(s+4) & (s+4) & (s+4) \\ 0 & s(s+4) & 2\,s \\ 0 & 0 & s(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{s\,(\,s+2\,)\,(\,s+4\,)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & s(s+2) \\ (s+2)(s+4) & (s+4) & (s+4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{s\,(\,s+2\,)\,(\,s+4\,)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s\,(\,s+2\,) & 0 \\ 0 & (s+4) \end{bmatrix}}{s\,(\,s+2\,)\,(\,s+4\,)} \qquad (\,3\,.\,86\,)$$

"<u>Nota</u>".- En los siguientes ejemplos, después de comprobar la no singularidad de $\underline{B}^*$, se dará como establecido que las matrices $\underline{E}$ cumplen con la condición rango[$\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$)] = 1 , ya que previamente está demostrado, debido a que el rango[$\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$)] ya se estableció, y lo que se trata de analizar son otras condiciones.

Ejemplo 2.-

Sea el sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

De acuerdo a (3 . 34)

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 \; A^{d_1} B \\ C_2 \; A^{d_2} B \end{bmatrix}$$

$$C_1 \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \; A \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \text{siendo } d_1 = 0 \text{ y } d_2 = 1 \qquad (3.88)$$

$$\det [B^*] = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

" Puesto que B^* es no singular, el sistema (3 . 87) puede ser desacoplado. El conjunto Φ de todas las matrices que desacoplan el sistema (3 . 87) puede ser obtenido, para todas las matrices E de orden (2 x 3) tal que rango$[Q^i(E)] = 1$. "

De las ecuaciones (3 . 64) y (3 . 65),

$$E = B^{*-1} \{ \Gamma A^{**} - A^* \}$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} \\ C_2 A^{d_2} \end{bmatrix} , \qquad A^* = A^{**} A$$

$$C_1 A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3.89)$$

$$\underline{A}^* = \underline{A}^{**}\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3.90)$$

$$\underline{B}^{*-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.91)$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 3\alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 5 & 3\alpha_2 - 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1 - 1}{2} & \dfrac{-\alpha_2 + 5}{2} & \dfrac{-3\alpha_2 + 9}{2} \\ \dfrac{\alpha_1 - 1}{2} & \dfrac{\alpha_2 - 5}{2} & \dfrac{3\alpha_2 - 9}{2} \end{bmatrix}$$

sea:

$$f_{11} = \frac{\alpha_1 - 1}{2}$$

$$f_{12} = \frac{-\alpha_2 + 5}{2}$$

$$f_{13} = \frac{-3\alpha_2 + 9}{2}$$

siendo los elementos de $\underline{\Phi}$ de la forma:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{11} & -f_{12} & -f_{13} \end{bmatrix} \qquad (3.92)$$

existiendo $f = 3$ parámetros libres en la matriz $\underline{F}$.

La forma más general de la matriz función de transferencia es:

$$\underline{G}c(s) = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}$$

$$\det[s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}] = \det[\begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2f_{12} & -2f_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}]$$

$$= \det[\begin{bmatrix} s-1-2f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s-2+2f_{12} & 2f_{13} \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix}]$$

$$= (s - 1 - 2f_{11})\,[s^2 - (5 - 2f_{12})\,s + (6 - 6f_{12} + 2f_{13})] \qquad (3.93)$$

$$[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1} = \begin{bmatrix} s - 1 - 2\,f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s - 2 + 2\,f_{12} & 2\,f_{13} \\ 0 & -1 & s - 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s - 2 + 2\,f_{12})(s - 3) + 2\,f_{13} & 0 & 0 \\ 0 & (s - 1 - 2\,f_{11})(s - 3) & -2\,f_{13}\,(s - 1 - 2\,f_{11}) \\ 0 & (s - 1 - 2\,f_{11}) & (s - 1 - 2\,f_{11})(s - 2 + 2\,f_{12}) \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11})\,[s^2 - (5 - 2\,f_{12})\,s + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13})]}$$

$$\underline{G}c(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s - 2 + 2f_{12})(s - 3) + 2f_{13} & 0 & 0 \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11})(s - 3) & -2f_{13}\,(s - 1 - 2f_{11}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) & (s - 1 - 2f_{11})(s - 2 + 2f_{12}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11})\,[s^2 - (5 - 2\,f_{12})\,s + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13})]}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s - 2 + 2f_{12})(s - 3) + 2f_{13} & 0 & 0 \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) & (s - 1 - 2f_{11})(s - 2 + 2f_{12}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11})\,[s^2 - (5 - 2\,f_{12})\,s + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13})]}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s^2 + (-5 + 2f_{12})\,s + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13}) & 0 \\ 0 & (s - 1 - 2\,f_{11}) \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11})\,[s^2 - (5 - 2\,f_{12})\,s + (6 - 6\,f_{12} + 2\,f_{13})]} \qquad (3\,.\,94)$$

En el sistema no realimentado,

$$\det[\ s\ \underline{I} - \underline{A}\ ] = \det[\ \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix}\ ]$$

$$= (\ s-1\ )(\ s-2\ )(\ s-3\ ) \qquad (\ 3\ .\ 95\ )$$

De las ecuaciones (3 . 93) y (3 . 95), se observa que los 3 polos de lazo abierto están modificados al añadir el compensador para la realimentación de estado. Es decir, al desacoplar un sistema por el Procedimiento de Síntesis, se añade polos de lazo cerrado que pueden ser especificados de acuerdo a lo que el diseñador desee.

Al hacer,

m=?

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = m + d_1 + d_2 = 2 + 0 + 1 = 3 = n,$$

entonces, efectivamente, todos los polos de lazo cerrado pueden ser arbitrariamente especificados, mientras simultáneamente el sistema es desacoplado, usando el Procedimiento de Síntesis. Además, el Teorema 2 muestra que (3 . 92) representa la forma general para una $\underline{F}$ de desacoplamiento, ya que $f = n = 3$.

Como $f = m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 3$, se puede reemplazar directamente los valores de f, pero en este ejemplo, se usará el Procedimiento de Síntesis en primera instancia y, luego se reemplazará los parámetros libres f.

Haciendo,

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.96)$$

de acuerdo a la ecuación (3 . 68 a)

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} \left[\sum_{k=0}^{1} \underline{M}_k \, \underline{C} \, \underline{A}^k - \underline{A}^* \right]$$

$$= \underline{B}^{*-1} \left[\underline{M}_0 \, \underline{C} + \underline{M}_1 \, \underline{C} \, \underline{A} - \underline{A}^* \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.97)$$

y con la ecuación (3 . 68 b).

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.98)$$

entonces el par $\underline{F}$, $\underline{G}$ desacopla el sistema (3 . 87).

Reemplazando directamente los parámetros libres f, con los valores:

$$f_{11} = \frac{-3}{2}$$

$$f_{12} = \frac{5}{2}$$

$$f_{13} = \frac{9}{2}$$

se obtiene la misma matriz $\underline{F}$, por el Procedimiento de Síntesis, ecuación (3 . 92). Entonces, de (3 . 94) reemplazando directamente los parámetros libres f, se tiene:

$$\underline{G}c(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}}{s^2 (s + 2)} \qquad (3 . 99)$$

Los polos de lazo cerrado son: s^2 (s + 2) , que son distintos a los polos de lazo abierto:(s - 1)(s - 2)(s - 3).

Ejemplo 3.-

Sea el sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.100)$$

De acuerdo a (3 . 34)

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 \; A^{d_1} B \\ C_2 \; A^{d_2} B \end{bmatrix}$$

$$C_1 \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2\, A^2\, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{siendo } d_1 = 0 \text{ y } d_2 = 2 \qquad (3.101)$$

$\det [B^*] = -1 \neq 0$

Como B^* es no singular, y puesto que rango$[\,Q^i\,(E)\,] = 1$ para todas las matrices E de orden (2 x 6), el sistema puede ser desacoplado.

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\ A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\ .\ 102)$$

$$A^* = A^{**}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\ .\ 103)$$

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\ .\ 104)$$

aplicando la ecuación (3 . 64),

$$E = B^{*-1}\ \{\ \Gamma\ A^{**} - A^*\ \}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sea :

$f_{21} = \alpha_1$

$f_{16} = \alpha_2$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{16} \\ f_{21} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3 . 105)$$

existen $f = 2$ parámetros libres en la matriz $\underline{F}$.

Siendo $\underline{F}$ y $\underline{G}$ el par de matrices que desacoplan el sistema (3 . 100).

Para el sistema realimentado, los polos son:

$$\det[\, s\,\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{F}\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{21} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{16} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\left[\begin{bmatrix} s-f_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & -f_{16} \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-f_{18} \end{bmatrix}\right]$$

$$= s^3\,(\,s - f_{21}\,)\,(\,s + 1\,)\,(\,s - f_{16}\,) \qquad (\,3\,.\,106\,)$$

Para el sistema no realimentado, los polos son:

$$\det[\, s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}\right]$$

$$= s^5\,(s + 1\,) \qquad (\,3\,.\,107\,)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3 . 106) y (3 . 107), se puede ver que solamente se produce la asignación de 2 polos de lazo cerrado ($s - f_{21}$) ($s - f_{16}$).

Haciendo en la ecuación (3 . 105):

$f_{16} = -1$

$f_{21} = 0$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.108)$$

La matriz función de transferencia de lazo cerrado será:

$$\underline{G}c(s) = \underline{C}\,[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$[\,s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^5+2s^4+s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 & 0 & 0 & -s^4-s^3 \\ 0 & 0 & s^5+s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^5+s^4 \end{bmatrix}}{s^4\,(\,s+1\,)\,(\,s+1\,)}$$

$$
Gc = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^5+2s^4+s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 & 0 & 0 & -s^4-s^3 \\ 0 & 0 & s^5+s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^5+s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{s^4 (s + 1) (s + 1)}
$$

$$
Gc = \frac{\begin{bmatrix} s^5+2s^4+s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s^4 (s + 1) (s + 1)}
$$

$$
= \frac{\begin{bmatrix} s^5 + 2 s^4 + s^3 & 0 \\ 0 & s^3 + s^2 \end{bmatrix}}{s^4 (s + 1)^2} \qquad (3 . 109)
$$

Los polos de lazo cerrado asignados arbitrariamente son: $s (s + 1)$.

Además, como B^* es no singular,

$$
m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 2 + \sum_{i=1}^{2} d_i = 2 + 0 + 2 = 4 \qquad (3 . 110')
$$

entonces, el número de polos de lazo cerrado que deben ser asignados son 4, mientras que simultáneamente se desacopla el sistema. Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (3 . 74 a) se debe tener como mínimo 4 polos de lazo cerrado. Y además, no se puede dar directamente valores a los parámetros libres f, cumpliendo efectivamente con:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = f ,$$

que es la condición para dar directamente significado físico; por lo que se debe utilizar el Procedimiento de Síntesis para la asignación de los polos de lazo cerrado.

Y por la ecuación (3 . 64 b)se debe cumplir que,

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i \leq f$$

pero se tiene,

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 4 \nleq 2 = f.$$

Por consiguiente, la ecuación (3 . 68 a), es la que se utiliza para el diseño del conjunto de matrices Φ , para desacoplar el sistema, debido a que en este caso especifica todos los polos posibles del sistema de lazo cerrado, mientras desacopla el sistema.

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} [\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]$$

$$= \underline{B}^{*-1} [\sum_{k=0}^{2} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]$$

$$= \underline{B}^{*-1} [\underline{M}_0 \underline{C} \underline{A}^0 + \underline{M}_1 \underline{C} \underline{A}^1 + \underline{M}_2 \underline{C} \underline{A}^2 - \underline{A}^*]$$

sea:

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_0^1 & 0 \\ 0 & m_0^2 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} m_1^1 & 0 \\ 0 & m_1^2 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} m_2^1 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} m_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0^1 & m_1^1-1 & m_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0^2 & m_1^2 & m_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_0^2 & m_1^2 & m_2^2 \\ m_0^1 & m_1^1-1 & m_2^1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sea :

$f_{14} = m_0^2$

$f_{15} = m_1^2$

$f_{16} = m_2^2$

$f_{21} = m_0^1$

$f_{22} = m_1^1 - 1$

$f_{23} = m_2^1$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.111)$$

existen $f = 6$ parámetros libres en la matriz $\underline{F}$.

Los polos de lazo cerrado son:

$$\det[\,s\,I - A - B\,F\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0^1 & m_1^1-1 & m_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0^2 & m_1^2 & m_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0^2 & m_1^2 & m_2^2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\left[\begin{bmatrix} s-m_0^1 & -m_1^1 & -m_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & -m_0^2 & -m_1^2 & -m_2^2 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -m_0^2 & -m_1^2 & -m_2^2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= s(s - m_0^1)(s + 1)(s^3 - m_2^2 s^2 - m_1^2 s - m_0^2) \qquad (3\ .\ 112)$$

De las ecuaciones (3 . 107) y (3 . 112), se ve que los polos de lazo cerrado que se añaden son 4, coincidiendo con la ecuación (3 . 110), paralelamente se conoce que:

$$n = 6 \neq 4 = m + \sum_{i=1}^{m} d_i.$$

Haciendo,

$$M_0 = M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (3\ .\ 113)$$

entonces, por el Procedimiento de Síntesis, ecuación (3 . 68 a), $\underline{E}$ es:

$$\underline{E} = \underline{B}^{*-1} \left[\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^* \right]$$

$$= \underline{B}^{*-1} \left[\sum_{k=0}^{2} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^* \right]$$

$$= \underline{B}^{*-1} \left[\underline{M}_0 \underline{C} \underline{A}^0 + \underline{M}_1 \underline{C} \underline{A}^1 + \underline{M}_2 \underline{C} \underline{A}^2 - \underline{A}^* \right]$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.114)$$

Y $\underline{G}$ con la ecuación (3 . 68 b), será.

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.115)$$

Por lo tanto el par de matrices $\underline{E}$ y $\underline{G}$ desacoplan el sistema (3 . 100).

Los polos de lazo cerrado son:

$$\det[\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \det\left[\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & s+1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= s^2 \, (s + 1) \, (s^3 + s^2 + s + 1) \qquad (3.116)$$

4 es el número de polos de lazo cerrado que pueden ser especificados arbitrariamente, mientras que simultáneamente desacopla el sistema.

Siendo los polos: $s\,(s^3 + s^2 + s + 1)$ especificados por la selección de los $\mathbf{M}_k$, si se hace otras selecciones de los $\mathbf{M}_k$, llevarán a otras configuraciones de los polos de lazo cerrado. Además, se produce, en el procedimiento de desacoplamiento la cancelación de 4 polos de lazo abierto, para la ubicación de los polos de lazo cerrado que se añaden.

La matriz función de transferencia de lazo cerrado será:

$$G_c(s) = \underline{C}\,[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E}\,]^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E}\,] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{E}\,]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & s^4+s^3+s^2+s & -s^4-s^3 & -s^4-2s^3-s^2 & -s^4-2s^3-2s^2-s \\ 0 & 0 & s^5+s^4+s^3+s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+2s^3+s^2 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \\ 0 & 0 & 0 & -s^3-s^2 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 \\ 0 & 0 & 0 & -s^4-s^3 & -s^4-2s^3-s^2 & s^5+s^4 \end{bmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s^3+s^2+s+1)}$$

$$G_c(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & s^4+s^3+s^2+s & -s^4-s^3 & -s^4-2s^3-s^2 & -s^4-2s^3-2s^2-s \\ 0 & 0 & s^5+s^4+s^3+s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+2s^3+s^2 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \\ 0 & 0 & 0 & -s^3-s^2 & s^5+2s^4+s^3 & s^4+s^3 \\ 0 & 0 & 0 & -s^4-s^3 & -s^4-2s^3-s^2 & s^5+s^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s^2\,(s+1)\,(s^3+s^2+s+1)}$$

$$Gc = \frac{\begin{bmatrix} s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^5+2s^4+2s^3+s^2 & s^4+2s^3+s^2 & s^3+s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s^2\ (s+1)\ (s^3+s^2+s+1)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s^5+2s^4+2s^3+2s^2+s & 0 \\ 0 & s^3+s^2 \end{bmatrix}}{s^2\ (s+1)\ (s^3+s^2+s+1)} \qquad (3.117)$$

Ejemplo 4.1.-

Sea el sistema:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3 . 118}$$

De acuerdo a (3 . 34)

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \; \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2 \; \underline{A}^{d_2}\underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \; \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \; \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{siendo } d_1 = 0 \text{ y } d_2 = 0 \tag{3 . 119}$$

$\det [B^*] = 1 \neq 0$

Puesto que B^* es no singular, y como $\text{rango}[Q^i(E)] = 1$ para todas las matrices E de orden (2 x 3), el sistema (3 . 118) puede ser desacoplado.

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d1} \\ C_2 A^{d2} \end{bmatrix},$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3 . 120)$$

$$A^* = A^{**}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3 . 121)$$

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3 . 122)$$

Aplicando la ecuación (3 . 64)

$$E = B^{*-1} \{ \Gamma A^{**} - A^* \}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - 2 & \alpha_1 - 4 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 - 2 & \alpha_1 - 4 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha_2 - 1 \end{bmatrix}$$

haciendo:

$f_{11} = \alpha_1 - 2$

$f_{12} = \alpha_1 - 4$

$f_{23} = \alpha_2 - 1$

Entonces se tiene:

$$E = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ -1 & -1 & f_{23} \end{bmatrix} \qquad (3.123)$$

Se tiene $f = 3$ parámetros libres en la matriz E,

Y calculando,

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 2 + \sum_{i=1}^{2} d_i = 2 + 0 + 0 = 2$$

obsérvese que,

$$f = n = 3 > 2 = m + \sum_{i=1}^{m} d_i .$$

Por lo que, se ubicarían arbitrariamente 2 polos de lazo cerrado por el Procedimiento de Síntesis, mientras se desacopla el sistema. Pero en este caso se puede ubicar más polos, para lo cual se determina la "Matriz Función de Transferencia de lazo cerrado".

$$\underline{G}c(s) = \underline{C} [s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{E}]^{-1} \underline{B} \, \underline{B}^{*-1}$$

$$\det[s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{E}] = \det[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2 & s-3 & 0 \\ -1 & -1 & s-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & 0 \\ -1 & -1 & f_{23} \end{bmatrix}]$$

$$= \det[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2-f_{11} & s-3-f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & s-1-f_{23} \end{bmatrix}]$$

$$= (s-1-f_{23}) [s^2 - (3+f_{12})s - (2+f_{11})] \qquad (3.124)$$

$$[s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{E}]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2-f_{11} & s-3-f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & s-1-f_{23} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{F}\,]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s-3-f_{12})(s-1-f_{23}) & -(s-1-f_{23}) & 0 \\ (s-1-f_{23})(-2-f_{11}) & s(s-1-f_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & s(s-3-f_{12})+(-2-f_{11}) \end{bmatrix}}{(s-1-f_{23})\,[\, s^2-(3+f_{12})\,s-(2+f_{11})\,]}$$

$$\underline{G}c = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-3-f_{12})(s-1-f_{23}) & -(s-1-f_{23}) & 0 \\ (s-1-f_{23})(-2-f_{11}) & s(s-1+f_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & s(s-3-f_{12})+(-2-f_{11}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s-1-f_{23})\,[\, s^2-(3+f_{12})\,s-(2+f_{11})\,]}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s-3-f_{12})(s-1-f_{23}) + (s-1-f_{23})(-2-f_{11}) & -(s-1-f_{23}) + s(s-1-f_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & s(s-3-f_{12}) + (-2-f_{11}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s-1-f_{23})\,[\, s^2-(3+f_{12})\,s-(2+f_{11})\,]}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s-1)(s-1-f_{23}) & 0 \\ 0 & s^2-(3+f_{12})s-(2+f_{11}) \end{bmatrix}}{(s-1-f_{23})\,[\, s^2-(3+f_{12})\,s-(2+f_{11})\,]} \qquad (3\,.\,125)$$

De tal forma que todos los polos de lazo cerrado pueden ser especificados por el Teorema 2. Es decir, cuando se cumple que:

$$f > m + \sum_{i=1}^{m} d_i \quad \text{o} \quad f > n\,,$$

es "probable" especificar más $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$ de los polos de lazo cerrado, como en este caso que,

$$f = p = 3 > 2 = m + \sum_{i=1}^{m} d_i .$$

Entonces, al aplicar el Procedimiento de Síntesis permite especificar 2 de los $p = 3$ polos de lazo cerrado, como se puede observar en la ecuación (3 . 124). Por lo tanto, es ventajoso calcular la "Matriz Función de Transferencia de lazo cerrado", con la matriz $\underline{E}$ del Teorema 2, para poder especificar todos los polos posibles.

Ejemplo 4.2.-

Sea el sistema:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3 . 126}$$

Calculando $\underline{B}^*$.

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \; \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2 \; \underline{A}^{d_2}\underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \; \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \; \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{siendo } d_1 = 0 \; \text{ y } \; d_2 = 0 \tag{3 . 127}$$

$$\det [\underline{B}^*] = -1 \neq 0$$

Puesto que $\underline{B}^*$ es no singular, y como $\text{rango}[\underline{Q}^i(\underline{E})] = 1$

para todas las matrices E de orden (2 x 3), el sistema (3 . 126) se puede desacoplar. Aplicando el Teorema 2, el conjunto de matrices E que desacopla el sistema será.

$$E = B^{*-1} \{ \Gamma A^{**} - A^{*} \}$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} \\ C_2 A^{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3 . 128)$$

$$A^{*} = A^{**}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3 . 129)$$

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3 . 130)$$

entonces,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_1 - 2 & -\alpha_1 + 1 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 - 1 & 0 \\ \alpha_1 - 1 & \alpha_1 - 2 & -\alpha_1 + 1 \end{bmatrix}$$

haciendo:

$f_{12} = \alpha_2 - 1$

$f_{21} = \alpha_1 - 1$

$f_{22} = \alpha_1 - 2$

Obteniéndose,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & -f_{21} \end{bmatrix} \qquad (3.131)$$

Siendo $f = 3$ parámetros libres en la matriz E,

Determínese ,los polos de lazo cerrado.

$$\det[\, s\, I - A - B\, E\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} & -f_{21} \\ 0 & f_{12} & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \det\begin{bmatrix} s-1-f_{21} & -1-f_{22} & f_{21} \\ 0 & s-1-f_{12} & 0 \\ 0 & -f_{12} & s-1 \end{bmatrix}$$

$$= (s -1 - f_{21}) (s - 1 - f_{12}) (s - 1) \qquad (3 . 132)$$

De acuerdo a la ecuación (3 . 132), son asignados 2 polos de lazo cerrado. Esto por el Teorema 2.

Ahora se analiza por el Procedimiento de Síntesis.

Los polos de lazo cerrado que pueden especificarse son:

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 2 + \sum_{i=1}^{2} d_i = 2 + 0 + 0 = 2 \text{ ,y}$$

$$f = n = 3 > 2 = m + \sum_{i=1}^{m} d_i ,$$

podría ubicarse más polos, a los 2 especificados por el Procedimiento de Síntesis, pero por el Teorema 2 se asigna solamente los mismos 2 polos de lazo cerrado.

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} [\sum_{k=0}^{\delta} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]$$

$$= \underline{B}^{*-1} [\sum_{k=0}^{0} \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^*]$$

$$= \underline{B}^{*-1} [\underline{M}_0 \underline{C} \underline{A}^0 - \underline{A}^*]$$

sea:

$$Mo = \begin{bmatrix} mo^{1} & 0 \\ 0 & mo^{2} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} mo^{1} & 0 \\ 0 & mo^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mo^{1} & mo^{1} & -mo^{1} \\ 0 & mo^{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mo^{1}-1 & mo^{1}-2 & -mo^{1}+1 \\ 0 & mo^{2}-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & mo^{2}-1 & 0 \\ mo^{1}-1 & mo^{1}-2 & -mo^{1}+1 \end{bmatrix}$$

sea :

$$f_{12} = mo^{2} - 1$$

$$f_{21} = mo^{1} - 1$$

$$f_{22} = mo^{1} - 2$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & -f_{21} \end{bmatrix} \qquad (3 . 133)$$

Siendo determinada esta matriz E por el Procedimiento de Síntesis, que corresponde a la misma matriz E ecuación (3 . 131), determinada por el del Teorema 2.

Ahora se verá los polos de lazo cerrado.

$$\det[\, sI - A - BE \,] = \det\left[\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mo^1-1 & mo^1-2 & -mo^1+1 \\ 0 & mo^2-1 & 0 \\ 0 & mo^2-1 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \det\left[\begin{bmatrix} s-mo^1 & -mo^1+1 & mo^1-1 \\ 0 & s-mo^2 & 0 \\ 0 & -mo^2+1 & s-1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= (\, s - 1 \,)\,(\, s - mo^1 \,)\,(\, s - mo^2 \,) \qquad (\, 3.\ 134 \,)$$

De forma que $p = 2$, se especifica 2 polos de lazo cerrado de acuerdo al Procedimiento de Síntesis, siendo igual si se emplea el Teorema 2.

En resumen, cuando se tiene la condición,

$$f > m + \sum_{i=1}^{m} d_i \quad \text{o} \quad f > n\,,$$

se puede tener la asignación de polos por el Procedimiento de Síntesis, y su número es igual a $m + \sum_{i=1}^{m} d_i$. Pero, se puede asignar más polos por el Teorema 2.

3.3.4.- Conclusiones.-

Las condiciones más importantes para tener el conjunto de todos los pares de matrices E, G que desacoplan un sistema son: rango[$Q^i(E)$] = 1 para todas las matrices E, y B^* es no singular para G.

- En la condición,

$$f < m + \sum_{i=1}^{m} d_i = p,$$

el Teorema 2 asigna parte de los polos de lazo cerrado, cuando determina la clase Φ de las matrices E que desacoplan el sistema, por lo que se debe aplicar el Procedimiento de Síntesis para determinar la clase Φ de las matrices E.

- Si se tiene,

$$n = m + \sum_{i=1}^{m} d_i = p,$$

la asignación de polos de lazo cerrado es total, sin ningún inconveniente, siendo n el mayor número de polos de lazo cerrado que pueden asignarse, debido a que n es el orden del sistema y se establece por el número de polos del sistema.

- Se puede dar directamente valores a los parámetros libres f, en la condición

$$f = m + \sum_{i=1}^{m} d_i,$$

sin necesidad de utilizar el Procedimiento de Síntesis.

- Y por último, el Procedimiento de Síntesis asigna todos los polos de lazo cerrado p, mientras se desacopla el sistema, excepto si se tiene la condición,

$$f > m + \sum_{i=1}^{m} d_i \qquad o \qquad f > n,$$

en la cual se asigna la ubicación de todos los polos de lazo cerrado, por medio del Teorema 2 y, a la vez, es ventajoso determinar la Matriz Función de Transferencia de lazo cerrado $\underline{G}c$, con la matriz $\underline{E}$ del Teorema 2. Además, si $f > n$, y

$$n = m + \sum_{i=1}^{m} d_i,$$

se asigna por el Procedimiento de Síntesis, todos los n polos de lazo cerrado.

- Un objetivo muy importante en Sistemas de Control, es que un sistema sea estable. La forma de conseguirlo es que los polos del sistema, en este caso de lazo cerrado, estén en el semiplano negativo s, es decir, sean negativos; obteniéndose así que la respuesta transitoria alcance el equilibrio, y no se produzca oscilaciones crecientes. Para lo cual se debe conseguir que todos los coeficientes del polinòmio característico sean positivos. Esto se puede lograr poniendo los elementos, negativos de las matrices $\underline{M}k$, ya que el polinomio característico se determina con la ecuación det[s $\underline{I}$ - $\underline{A}$ - $\underline{B}$ $\underline{E}$] , siendo $\underline{E}$ la única matriz variable, la misma que está restando, por lo tanto, si se ponen valores negativos a los elementos de la matriz $\underline{E}$, se podría tener elementos positivos en la matriz [s $\underline{I}$ - $\underline{A}$ - $\underline{B}$ $\underline{E}$] , que a su vez, al calcular el determinante es más probable que se obtenga coeficientes positivos para el polinomio característico. Esto es más bien una forma experimental, que en la mayoría de casos cumple, dando esto una pauta al diseñador, para asignar los valores a los elementos de la matriz $\underline{F}$.

3.3.- POR REALIMENTACION DE SALIDA.-

Puesto que la realimentación de salida es sólo un caso especial de la realimentación de variables de estado, de acuerdo a la figura (3 . 5):

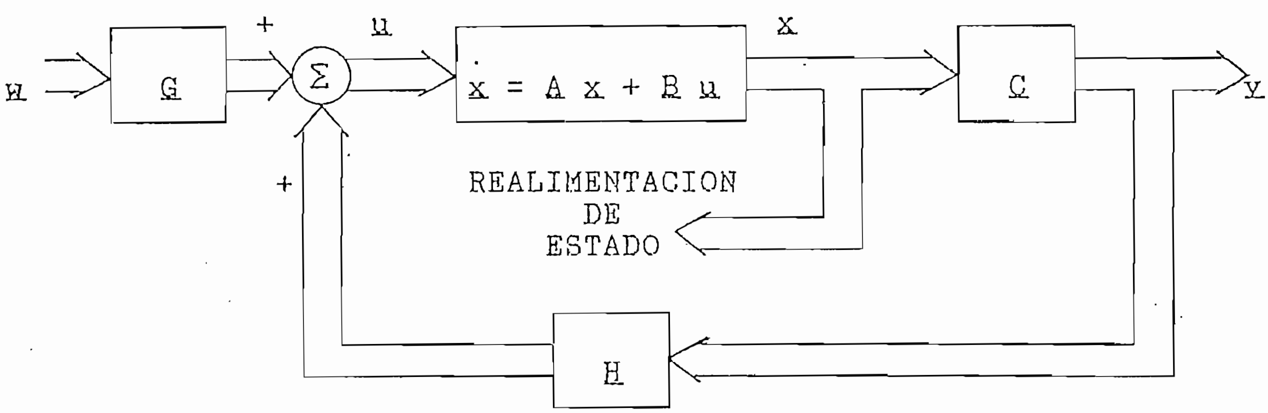


Figura 3 . 5 .- Sistema multivariable de realimentación de salida.

Es decir,

$$u = H y + G w \tag{3 . 135}$$

con $H C$ reemplazando a F , puede ser desacoplado (3 . 21) usando realimentación de salida sí y sólo sí,

1.- B^* es no singular, y
2.- Hay una matriz H (m x m) tal que rango[Q ($H C$)] = 1 para i = 1, . . . ,m .

Estas condiciones proveen una prueba conveniente para saber si puede o no un sistema ser desacoplado usando realimentación de salida.

Pero en general, el desacoplamiento por realimentación de estado, no necesariamente implica desacoplamiento por realimentación de salida. Si bien un sistema puede ser desacoplado usando realimentación de salida, algo de la flexibilidad de los polos de lazo cerrado especificados se perderá, como con la realimentación de variables de estado. Se mostró en la teoría del desacoplamiento por realimentación de estado, que sólo puede desacoplar el sistema mientras simultáneamente se especifican todos los polos de lazo cerrado; mientras tanto usando realimentación de salida el sistema puede ser desacoplado, pero los polos de lazo cerrado no son completamente arbitrarios. En conclusión la realimentación de estado, con realimentación de salida no es equivalente para el desacoplamiento de sistemas.

Por lo tanto, se consideran sistemas lineales multivariables invariantes en el tiempo, que pueden ser desacoplados por realimentación de variables de salida únicamente, para lo cual , se determina condiciones necesarias y suficientes, si un sistema puede ser desacoplado usando realimentación de salida. Cuando un sistema satisface estas condiciones, la clase de todas las matrices es caracterizada. Se puede conseguir el desacoplamiento, pero el sistema no obtiene necesariamente "estabilidad" a la respuesta deseada, entonces puede ser necesario construir un compensador o un observador para estabilizar el sistema.

"De esta manera, el sistema bajo consideración para desacoplar mediante realimentación de salida, debe ser lineal controlable, observable, e invariante en el tiempo."

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad (3.136\ a)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (3.136\ b)$$

donde: $\underline{x}$ = Es el vector de las variables de estado de orden n.

$\underline{u}$ = Es el vector de entrada de orden m.

$\underline{y}$ = Es el vector de salida de orden m.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son matrices reales constantes de dimensiones (n x n) , (n x m) y (m x n) respectivamente.

Se considera la ley de control para la realimentación de salida, de la forma:

$$\underline{u} = \underline{G}\,\underline{w} + \underline{H}\,\underline{y} \qquad (3.137)$$

donde: $\underline{w}$ es el nuevo vector de entrada, de orden m.

$\underline{H}$ y $\underline{G}$ son matrices reales constantes, de dimensiones (m x m).

El sistema de lazo cerrado por realimentación de variables de salida, se obtiene reemplazando la ley de control (3 . 137) en el sistema (3 . 136),

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,(\,\underline{G}\,\underline{w} + \underline{H}\,\underline{y}\,)$$

multiplicando el paréntesis,

$\dot{x} = A x + B G w + B H y$

reemplazando la ecuación (3 . 136 b) en la ecuación anterior,

$\dot{x} = A x + B G w + B H C x$

agrupando respecto a x,

$\dot{x} = (A + B H C) x + B G w .$

Por consiguiente, el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{x} = (A + B H C) x + B G w . \qquad (3 . 138 \text{ a})$$

$$y = C x \qquad (3 . 138 \text{ b})$$

se llama realimentación lineal de variables de salida.

El objetivo de esta técnica, es encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia del par de matrices H y G , para que el sistema (3 . 138) sea desacoplado. Es claro que el sistema (3 . 138) es desacoplado sí y sólo sí la matriz función de transferencia del sistema de lazo cerrado es diagonal y no singular.

Para el desacoplamiento de sistemas mediante realimentación de salida, es necesario recordar la definición (3 . 24), que expresa:

$$d_i = \min \{ j : C_i A^j B \neq 0 \ , j = 0, \dots , n - 1 \} \qquad (3 . 139 \text{ a})$$

o

$$d_i = n - 1 \ \text{ si } \ C_i A^j B = 0 \ , \text{para todo } j. \qquad (3 . 139 \text{ b})$$

donde: $\underline{C}_i$ es la i-ésima fila de $\underline{C}$, para $i = 1, \ldots m$.

Además, de acuerdo al Teorema 1 para el desacoplamiento por realimentación de estado, se tiene que:

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m}\underline{B} \end{bmatrix} \qquad (3.140)$$

es no singular, es decir, $\det [\underline{B}^*] \neq 0$.

$$\underline{A}^*_j = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1+j} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2+j} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m+j} \end{bmatrix} , \ j = 1,2, \ldots \qquad (3.141)$$

Y sea $\underline{B}^{*-1}_k$ que denota la k-ésima columna de $\underline{B}^{*-1}$.

Con estas definiciones, es posible establecer el siguiente teorema.

3.3.1.- <u>Teorema.</u>

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$, las cuales desacoplan el sistema (3 . 136) son:

1) $\det [\underline{B}^*] \neq 0$,y (3 . 142 a)

2) Las matrices

$$\underline{C}\ (\ \underline{A}\ +\ \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C}\ )^{j}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}\quad ,j = 0, \ldots , n-1 \qquad (3.142\ b)$$

son diagonales, donde

$$\underline{H} = -\ \underline{B}^{*-1}\ [\ \underline{A}^{*d_1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_{1}\ \mid\ \underline{A}^{*d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_{2}\ \mid \ldots \mid\ \underline{A}^{*d_m+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_{m}\ ] \qquad (3.142\ c)$$

"Prueba": Se asume $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$. Esto se puede conseguir fácilmente, rearreglando las salidas y las correspondientes entradas del sistema (3 . 136).

Para que el sistema (3 . 138) sea desacoplado, es necesario que det [$\underline{B}^*$] $\neq 0$, donde $\underline{B}^*$ está dado por la ecuación (3 . 140). Entonces, al asumir det [$\underline{B}^*$] $\neq 0$ se puede hacer

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} ,$$

de acuerdo al Teorema 1 para el desacoplamiento por realimentación de estado.

Se asume que el sistema (3 . 138) es desacoplado, entonces las matrices

$$\underline{C}\ (\ \underline{A}\ +\ \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C}\ )^{j}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} & & & 0 \\ & \alpha_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{mj} \end{bmatrix} ,\ j = 0, \ldots\ n-1 \qquad (3.143)$$

son diagonales.

La variación de i es por filas y la variación de k es por columnas, entonces.

$$C_i\ (A + B\ H\ C\ )^j B\ B^{*-1}{}_k = \begin{cases} \alpha_{ij} & ,\ i = k \qquad (3\ .\ 144\ a) \\ 0 & ,\ i \neq k \qquad (3\ .\ 144\ b) \end{cases}$$

para, $j = 0, \ldots, n - 1$

$i = 1, \ldots, m$

$k = 1, \ldots, m$

donde: α_{ij} es algún escalar.

Por la definición de d_i, ecuación (3 . 139), y las ecuaciones (3 . 25), se tiene:

$$C_i\ (A + B\ H\ C\ )^j B\ B^{*-1}{}_k = \begin{cases} C_i\ A^j B\ B^{*-1}{}_k & ,\ j = 0, \ldots, d_i \qquad (3\ .\ 145\ a) \\ C_i\ A^{d_i} (A + B\ H\ C\ )^{j-d_i} B\ B^{*-1}{}_k & ,\ j = d_i+1, \ldots, n \qquad (3\ .\ 145\ b) \end{cases}$$

entonces, por las ecuaciones (3 . 144 b) y (3. 145 a), se llega a:

$$C_i\ A^j B\ B^{*-1}{}_k = 0 \qquad ,\ j = 0, \ldots, d_i \qquad (3\ .\ 146)$$
$$,\ i \neq k\ .$$

De acuerdo al Binomio de Newton, se obtiene la ecuación:

$$(A + B\ H\ C)^j = (B\ H\ C + A)^j = (B\ H\ C)^j + j\ (B\ H\ C)^{j-1} A + \frac{j(j-1)}{2\ !}\ (B\ H\ C)^{j-2} A^2 + \ldots + \frac{j(j-1)\ldots 3}{(j-2)\ !}\ (B\ H\ C)^2 A^{j-2} +$$

$$+ \frac{j(j-1)\ldots 2}{(j-1)\,!}(\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})\,\underline{A}^{j-1} + \underline{A}^{j}$$

agrupando,

$$(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j} = [\,(\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j-1}\underline{B}\,\underline{H}\,]\,\underline{C} + [\,j\,(\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j-2}\underline{B}\,\underline{H}\,]\,\underline{C}\,\underline{A} + [\frac{j(j-1)}{2\,!}(\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j-3}\underline{B}\,\underline{H}\,]\,\underline{C}\,\underline{A}^{2} + \ldots +$$

$$+ [\,\frac{j(j-1)\ldots 3}{(j-2)\,!}(\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})\,\underline{B}\,\underline{H}\,]\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-2} + \frac{j(j-1)\ldots 2}{(j-1)\,!}\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-1} + \underline{A}^{j}$$

Se hace:

$$\underline{P}_0 = (\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)^{j-1}\underline{B}\,\underline{H}$$

$$\underline{P}_1 = j\,(\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)^{j-2}\underline{B}\,\underline{H}$$

$$\underline{P}_2 = \frac{j(j-1)}{2\,!}(\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)^{j-3}\underline{B}\,\underline{H}$$

$$\vdots$$

$$\underline{P}_{j-2} = \frac{j(j-1)\ldots 3}{(j-2)\,!}(\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)\underline{B}\,\underline{H}$$

donde: $\underline{P}_j$ son ciertas matrices que dependen de $\underline{B}$, $\underline{H}$ y $\underline{C}$;

reemplazando los $\underline{P}_j$, se obtiene:

$$(\,\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,)^{j} = \underline{P}_0\,\underline{C} + \underline{P}_1\,\underline{C}\,\underline{A} + \underline{P}_2\,\underline{C}\,\underline{A}^{2} + \ldots + \underline{P}_{j-2}\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-2} + j\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-1} + \underline{A}^{j} \quad , j = 1,2 \ldots \quad (3\,.\,147)$$

Haciendo, para $j = 1, \ldots, d_i$ y con la ecuación (3 . 147), la ecuación (3 . 145 b), puede expresarse de la siguiente forma:

$$\underline{C}_i\,\underline{A}^{d_i}(\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j}\underline{B}\,\underline{H}^{t-1}\underline{k} = \underline{C}_i\,\underline{A}^{d_i}\,(\,\underline{P}_0\,\underline{C} + \underline{P}_1\,\underline{C}\,\underline{A} + \underline{P}_2\,\underline{C}\,\underline{A}^{2} + \ldots + \underline{P}_{j-2}\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-2} + j\,\underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,\underline{A}^{j-1} + \underline{A}^{j}\,)\,\underline{B}\,\underline{H}^{t-1}\underline{k} \quad (3\,.\,148)$$

Con las ecuaciones (3 . 144), la ecuación anterior sería:

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \underline{P}_2 \underline{C} \underline{A}^2 + \ldots + \underline{P}_{j-2} \underline{C} \underline{A}^{j-2} + j \underline{B} \underline{H} \underline{C} \underline{A}^{j-1} + \underline{A}^j) \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k = \begin{cases} \alpha_{ij} & , i = k \quad (3 . 149 \text{ a}) \\ 0 & , i \neq k \quad (3 . 149 \text{ b}) \end{cases}$$

para, $j = 1, 2, \ldots$

Multiplicando el paréntesis de la ecuación (3 . 148), y agrupando respecto a $\underline{C} \underline{A}^j \underline{B}$, $j = 0, \ldots, d_1$, se llega a:

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \underline{P}_2 \underline{C} \underline{A}^2 + \ldots + \underline{P}_{j-2} \underline{C} \underline{A}^{j-2} + j \underline{B} \underline{H} \underline{C} \underline{A}^{j-1} + \underline{A}^j) \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{P}_0 [\underline{C} \underline{B}] \underline{B}^{*-1}{}_k + \ldots +$$
$$+ \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{P}_{j-2} [\underline{C} \underline{A}^{j-2} \underline{B}] \underline{B}^{*-1}{}_k + j \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B} \underline{H} [\underline{C} \underline{A}^{j-1} \underline{B}] \underline{B}^{*-1}{}_k + \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{A}^j \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k$$
$$, j = 1, \ldots, d_1$$

de acuerdo a la definición de d_1 , ecuación (3 . 139 a) para $i = 1$ y $j = 0, \ldots .d_1$, se tiene:

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \underline{P}_2 \underline{C} \underline{A}^2 + \ldots + \underline{P}_{j-2} \underline{C} \underline{A}^{j-2} + j \underline{B} \underline{H} \underline{C} \underline{A}^{j-1} + \underline{A}^j) \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+j} \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k \quad , j = 1, \ldots, d_1 \qquad (3 . 150)$$

además, con las ecuaciones (3 . 149), la ecuación (3 . 150) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \underline{P}_2 \underline{C} \underline{A}^2 + \ldots + \underline{P}_{j-2} \underline{C} \underline{A}^{j-2} + j \underline{B} \underline{H} \underline{C} \underline{A}^{j-1} + \underline{A}^j) \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k = \begin{cases} \alpha_{ij} & , i = k \quad (3 . 151 \text{ a}) \\ 0 & , i \neq k \quad (3 . 151 \text{ b}) \end{cases}$$

para, $j = 1, \ldots d_1$

Para $j = d_1 + 1$.

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \quad . \quad . \quad . \quad + j \underline{B} \underline{H} \underline{C} \underline{A}^{d_1} + \underline{A}^{d_1+1}) \underline{B} \underline{B}^{*-1}{}_k = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C} \underline{A} + \ldots +$$

$$+ \underline{P}_{j-2}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d1-1} + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d1} + \underline{A}^{d1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k}$$

multiplicando, y agrupando respecto a $\underline{C}\ \underline{A}^{j}\underline{B}$, $j = 0, \ldots, d_i$.

$$\underline{C}_i\, \underline{A}^{di} (\underline{P}_0\, \underline{C} + \underline{P}_1\, \underline{C}\, \underline{A} + \;.\;.\;.\; + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d1} + \underline{A}^{d1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} = \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{P}_0 [\, \underline{C}\, \underline{B}\,]\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} +$$

$$+ \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{P}_1 [\underline{C}\, \underline{A}\, \underline{B}]\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} + \ldots + \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{P}_{j-2} [\underline{C}\, \underline{A}^{d1-1}\underline{B}]\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} + j\, \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{B}\, \underline{H} [\underline{C}\, \underline{A}^{d1}\underline{B}]\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} + \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{A}^{d1+1}\underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k}$$

por la definición de d_1,

$$\underline{C}_i\, \underline{A}^{di} (\underline{P}_0\, \underline{C} + \underline{P}_1\, \underline{C}\, \underline{A} + \;.\;.\;.\; + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d1} + \underline{A}^{d1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} = j\, \underline{C}_i\, \underline{A}^{di}\underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d1}\underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} +$$

$$+ \underline{C}_i\, \underline{A}^{di+d1+1}\underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_{k} \qquad (3 . 152)$$

En la ecuación (3 . 143), para $j = d_1$,

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C})^{d1}\underline{B}\, \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d1} & & & 0 \\ & \alpha_{2,d1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{m,d1} \end{bmatrix}$$

por la ecuación (3 .25), la ecuación anterior será:

$$\underline{C}\, \underline{A}^{d1}\underline{B}\, \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d1} & & & 0 \\ & \alpha_{2,d1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{m,d1} \end{bmatrix}$$

haciendo $k = 1$ en $\underline{B}^{*-1}{}_{k}$, se obtiene $\underline{B}^{*-1}{}_{1}$ que es la primera columna de $\underline{B}^{*-1}$, entonces será:

$$\underline{C}\ \underline{A}^{d_1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

se multiplica j $\underline{H}$ por la izquierda, ambos miembros de la ecuación,

$$j\ \underline{H}\ \underline{C}\ \underline{A}^{d_1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1 = j \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1,d_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j\ \underline{H}\ \underline{C}\ \underline{A}^{d_1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1 = j \begin{bmatrix} h_{11}\ \alpha_{1,d_1} \\ h_{21}\ \alpha_{1,d_1} \\ \vdots \\ h_{m1}\ \alpha_{1,d_1} \end{bmatrix}$$

$$= j\ \alpha_{1,d_1}\ \underline{H}_1$$

donde: h_{ij} es el ij-ésimo elemento de $\underline{H}$.

$\underline{H}_1$ es la primera columna de $\underline{H}$.

En general $\underline{H}_k$ es la k-ésima columna de $\underline{H}$, $k = 1, \dots ,m$.

Por el corolario 1, del método de desacoplamiento por realimentación de estado, se tiene:

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} \underline{\Delta} ,$$

y como $j\, \alpha_{1,d_1}$ es un escalar, se puede escoger una matriz diagonal $\underline{\Delta}$ adecuada para eliminar $j\, \alpha_{1,d_1}$, obteniéndose:

$$j\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d_1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_1 = \underline{H}_1 .$$

Con este resultado se reemplaza en la ecuación (3 . 152).

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C}\, \underline{A} + \quad . \quad . \quad . + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d_1} + \underline{A}^{d_1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B}\, \underline{H}_1 + \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+d_1+1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k \; , k = 1 \qquad (3 . 153)$$

De acuerdo a la ecuación (3 . 146) $\underline{C}_i \cdot \underline{A}^j \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k = 0$, $j = d_1$; y como $k = 1$, entonces, $i = 1$. Por consiguiente la ecuación (3 . 152), se tiene:

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C}\, \underline{A} + \quad . \quad . \quad . + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d_1} + \underline{A}^{d_1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+d_1+1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k \qquad , k \neq 1 \qquad (3 . 154)$$

Resumiendo,

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i} (\underline{P}_0 \underline{C} + \underline{P}_1 \underline{C}\, \underline{A} + \ldots + j\, \underline{B}\, \underline{H}\, \underline{C}\, \underline{A}^{d_1} + \underline{A}^{d_1+1})\, \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k = \begin{cases} \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+d_1+1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B}\, \underline{H}_1 \; , k = 1 & (3 . 155\, a) \\ \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+d_1+1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_k \qquad , k \neq 1 & (3 . 155\, b) \end{cases}$$

De las ecuaciones (3 . 155) y (3 . 149), se tiene:

. para $k = 1$,

$$\underline{C}_i \underline{A}^{d_i+d_1+1} \underline{B}\, \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B}\, \underline{H}_1 = \begin{cases} \alpha_{1,d_1+1} \; , i = 1 & (3 . 156\, a) \\ 0 \qquad i \neq 1 & (3 . 156\, b) \end{cases}$$

. para $k \neq 1$,

$$\underline{C}_i \ \underline{A}^{d_i+d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 = \begin{cases} \alpha_{i,d_1+1} \ , i = k & (3.157\ a) \\ 0 \quad i \neq k & (3.157\ b) \end{cases}$$

Entonces de la ecuación (3. 156) se detemina $\underline{H}_1$, desarrollando para $i = 1, \ldots, m$.

$$\underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1+d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1}\underline{B} \ \underline{H}_1 = \alpha_{1,d_1+1}$$

$$\underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2+d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2}\underline{B} \ \underline{H}_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m+d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m}\underline{B} \ \underline{H}_1 = 0$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1+d_1+1} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2+d_1+1} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m+d_1+1} \end{bmatrix} \underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 + \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d_2}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \ \underline{A}^{d_m}\underline{B} \end{bmatrix} \underline{H}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d_1+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando las ecuaciones (3 . 140) y (3 . 141),

$$\underline{A}^{*}{}_{d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1 + \underline{B}^{*}\underline{H}_1 = \underline{\delta}_1$$

despejando $\underline{B}^{*}\underline{H}_1$,

$$\underline{B}^{*}\underline{H}_1 = \underline{\delta}_1 - \underline{A}^{*}{}_{d_1+1}\underline{B} \ \underline{B}^{*-1}{}_1$$

multiplicando $\underline{B}^{*-1}$ por la izquierda, ambos miembros de la ecuación anterior,

$$\underline{H}_1 = \underline{B}^{*-1} [\underline{\delta}_1 - \underline{A}^{*d_1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1] \qquad (3.158)$$

donde:

$$\underline{\delta}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d_1+1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ vector de orden } m.$$

Para obtener $\underline{H}_2$, se considera la ecuación (3 . 149) para $j = d_1 + 2, \ldots, d_2$.

Además, de las ecuaciones (3 . 146) y (3 . 157), para $k \in \{ 2, \ldots, m \}$ se obtiene:

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^j\ \underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_k = 0 \quad , j = 0, \ldots, d_i + d_2 \quad , i \neq k \qquad (3.159)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que fue realizado para $\underline{H}_1$, con (3 . 159) $\underline{H}_2$ puede ser obtenida de (3 . 149), para $j = d_2 + 1$ y $k = 2$:

$$\underline{C}_i\underline{A}^{d_i}(\underline{P}_0\ \underline{C} + \underline{P}_1\ \underline{C}\ \underline{A} + \ldots + j\ \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C}\ \underline{A}^{d_2} + \underline{A}^{d_2+1})\ \underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_k = \begin{cases} \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2 + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{H}_2 & ,k = 2 \\ \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_k & ,k \in \{ 3, \ldots, m\} \end{cases}$$

Entonces,

. para $k = 2$,

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2 + \underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i}\underline{B}\ \underline{H}_2 = \begin{cases} \alpha_{2,d_2+1} & ,i = 2 \qquad (3.160\text{ a}) \\ 0 & \ i \neq 2 \qquad (3.160\text{ b}) \end{cases}$$

, para $k \in \{ 3, \ldots, m \}$

$$\underline{C}_i\ \underline{A}^{d_i+d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2 = \begin{cases} \alpha_{i,d_2+1}\ , i = k & (3.161\ a) \\ 0 \qquad i \neq k & (3.161\ b) \end{cases}$$

Entonces, de (3 . 160) se obtiene H_2,

$$\underline{H}_2 = \underline{B}^{*-1} [\ \underline{\delta}_2 - \underline{A}^{*d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2\ ] \qquad (3.162)$$

donde:

$$\underline{\delta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{2,d_2+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} ,\ \text{vector de orden } m. \qquad (3.163)$$

Continuando en esta forma para $j = d_2 + 2, \ldots, d_m + 1$, esto sigue que:

$$\underline{H} = \underline{B}^{*-1} \{ \underline{\Delta} - [\ \underline{A}^{*d_1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1 \mid \underline{A}^{*d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2 \mid \ldots \mid \underline{A}^{*d_m+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_m\ ] \} \qquad (3.164)$$

donde: $\underline{\Delta} = \text{diag}\ [\ \alpha_{1,d_1+1}, \ldots, \alpha_{m,d_m+1}\ ]$, de dimensión $(m \times m)$.

ampliando se tendrá:

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d_1+1} & & & 0 \\ & \alpha_{2,d_2+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{m,d_m+1} \end{bmatrix} \qquad (3.165).$$

Para continuar la prueba, se necesita el siguiente lema.

3.3.1.1.- Lema.-

Supóngase que el sistema (3 . 138) puede ser desacoplado por el par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$, siendo

$$\underline{H} = \underline{G} [\underline{\Delta} - \underline{M}],$$

donde: $\underline{\Delta}$ es alguna matriz diagonal, y

$\underline{M}$ y $\underline{G}$ son matrices conocidas.

Entonces, el sistema (3 . 138) debe ser necesariamente desacoplado por el par $- \underline{G}\,\underline{M}$ y $\underline{G}$.

"Prueba": Supóngase que el sistema (3 .138) es desacoplado por el par $\underline{H}$ y $\underline{G}$, donde:

$$\underline{H} = \underline{G} (\underline{\Delta} - \underline{M}) ,$$

entonces, de acuerdo a la realimentación de salida ecuación (3 . 138), para el par $\underline{H}$ y $\underline{G}$, el sistema será:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}) \underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

reemplazando $\underline{H}$ en el sistema realimentado, se tiene:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{B}\underline{G}(\underline{\Delta} - \underline{M}) \underline{C}) \underline{x} + \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{w} . \qquad (3 . 166 a)$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad (3 . 166 b)$$

Sea:

$\bar{A} = (A + BG(\Delta - M) C)$

$\bar{B} = B G$

$\bar{C} = C$

Entonces, las ecuaciones (3 .166), se expresarían:

$$\dot{x} = \bar{A} x + \bar{B} w \qquad (3.167\ a)$$

$$y = \bar{C} x \qquad (3.167\ b)$$

Como el sistema es controlable y observable, se define la matriz:

$$R_k = [\ \bar{B}_k \quad \bar{A}\bar{B}_k \quad \ldots \quad \bar{A}^{\tau_k - 1}\bar{B}_k\ ] \quad , k = 1 , \ldots , m \qquad (3.168)$$

donde: τ_{k-1} es el entero más grande, tal que, las columnas sean linealmente independientes.

$\bar{B}_k$ es la k-ésima columna de $\bar{B}$.

Se define,

$\mathcal{R}_k = \text{rango} [R_k]$,

siendo $\mathcal{R}_k$ el k-ésimo subespacio de controlabilidad del par $\bar{A}$ y $\bar{B}_k$.

Como el par $\bar{A}$, $\bar{B}$ es controlable, entonces,

$$\tau = \sum_{k=1}^{m} \tau_k \geq n$$

Puesto que, el sistema (3 . 138) es observable los $\mathcal{R}_k$.

son independientes, ya que observabilidad es invariante bajo realimentación de salida.

Para mostrar esto, supóngase que los $\mathfrak{R}_k$ son dependientes. Entoces, $\mathfrak{R}^*$ es un subespacio invariante de $\bar{A}$ diferente de cero, dado por:

$$\mathfrak{R}^* = \bigcap_{k=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \mathfrak{R}_k \quad .$$

lo cual representa esos estados del sistema (3 . 138) que son controlados por al menos dos entradas.

Se escoge cualquier vector diferente de cero $\underline{x} \in \mathfrak{R}^*$. Entonces $\underline{x}$ puede ser escrito como una combinación lineal de vectores en al menos dos $\mathfrak{R}_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Entoncés, el desacoplamiento implica,

$$\bar{\underline{C}}\,\underline{x} = \underline{0} \; .$$

Ya que $\underline{x}$ es invariante de $\bar{A}$, sigue que:

$$\bar{\underline{C}}\,\bar{A}^j\underline{x} = \underline{0} \qquad , j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

así el sistema (3 . 138) es no observable, lo cual es una contradicción .

Por esta razón,

$$\mathfrak{R}^* = 0 \quad , y$$

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k = n \; .$$

Se define,

$$\underline{T} = [\ \underline{R}_1 \quad \underline{R}_2 \ . \ . \ . \ \underline{R}_m\ ] \ , \qquad (3.169)$$

con el objeto de realizar una "Transformación de semejanza", ya que la misma permite pasar un vector de un conjunto de estados a otro conjunto, pero manteniendo los mismos valores propios; por lo tanto, las características del sistema no cambian.

Entonces la transformación de semejanza es:

$$\underline{x} = \underline{T}\ \underline{z}$$

donde: $\underline{x}$ = Vector de estado.

$\underline{z}$ = Nuevo vector de estado.

$\underline{T}$ = Matriz de transformación.

Reemplazando la transformación de semejanza en el sistema (3 . 167),

$$\underline{T}\ \dot{\underline{z}} = \bar{\underline{A}}\ \underline{T}\ \underline{z} + \bar{\underline{B}}\ \underline{w}$$

$$\underline{y} = \bar{\underline{C}}\ \underline{T}\ \underline{z}$$

multiplicando por la izquieda $\underline{T}^{-1}$ ambos miembros de la ecuación anterior,

$$\dot{\underline{z}} = \underline{T}^{-1}\bar{\underline{A}}\ \underline{T}\ \underline{z} + \underline{T}^{-1}\bar{\underline{B}}\ \underline{w} \qquad (3.170\ a)$$

$$\underline{y} = \bar{\underline{C}}\ \underline{T}\ \underline{z} \qquad (3.170\ b)$$

Haciendo,

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}^{-1}\bar{\underline{A}}\,\underline{T}$$

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{T}^{-1}\bar{\underline{B}}$$

$$\tilde{\underline{C}} = \bar{\underline{C}}\,\underline{T}$$

Entonces, el sistema (3 . 170) se expresa de la forma:

$$\dot{\underline{z}} = \tilde{\underline{A}}\,\underline{z} + \tilde{\underline{B}}\,\underline{w} \qquad (3.171\,a)$$

$$\underline{y} = \tilde{\underline{C}}\,\underline{z} \qquad (3.171\,b)$$

Por lo tanto, el sistema (3 . 171) es desacoplado, y $\tilde{\underline{A}}$, $\tilde{\underline{B}}$, y $\tilde{\underline{C}}$ aparecen como:

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & & & 0 \\ & \underline{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underline{A}_m \end{bmatrix} , \quad \tilde{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & & & 0 \\ & \underline{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underline{B}_m \end{bmatrix} , \quad \tilde{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & & & 0 \\ & \underline{C}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underline{C}_m \end{bmatrix}$$

donde: $\underline{A}_i$, $\underline{B}_i$, y $\underline{C}_i$ tienen dimensiones ($\tau_i \times \tau_i$), ($\tau_i \times 1$), y ($1 \times \tau_i$) respectivamente; $i = 1, \ldots, m$

Se hace la ley de control para la realimentación de salida, de la forma:

$$\underline{w} = \underline{\mu} - \underline{\Delta}\,\underline{y} \qquad (3.172)$$

donde: $\underline{\mu}$ es algún vector de m entradas.

$\underline{\Delta}$ es una matriz diagonal.

Reemplazando la ley de control (3 . 172), en el sistema

(3 . 171), se tiene:

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\tilde{A}}\,\underline{z} + \underline{\tilde{B}}\,(\,\underline{\mu} - \underline{\triangle}\,\underline{y}\,)$$

multiplicando el paréntesis , y reemplazando la ecuación (3 . 171 b) en la ecuación anterior,

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\tilde{A}}\,\underline{z} + \underline{\tilde{B}}\,\underline{\mu} - \underline{\tilde{B}}\,\underline{\triangle}\,\underline{\tilde{C}}\,\underline{z}$$

agrupando respecto a $\underline{z}$,

$$\dot{\underline{z}} = (\,\underline{\tilde{A}} - \underline{\tilde{B}}\,\underline{\triangle}\,\underline{\tilde{C}}\,)\,\underline{z} + \underline{\tilde{B}}\,\underline{\mu}\,.$$

Por lo tanto, el sistema (3 . 171) con la ley de control (3 . 172), se expresa:

$$\dot{\underline{z}} = (\,\underline{\tilde{A}} - \underline{\tilde{B}}\,\underline{\triangle}\,\underline{\tilde{C}}\,)\,\underline{z} + \underline{\tilde{B}}\,\underline{\mu} \qquad (\,3\,.\,173\text{ a}\,)$$

$$\underline{y} = \underline{\tilde{C}}\,\underline{z} \qquad (\,3\,.\,173\text{ b}\,)$$

Puesto que $\underline{\triangle}$ es diagonal, el sistema (3 . 173) es no obstante desacoplado. Además, este sistema es equivalente por similitud a:

$$\dot{\underline{x}} = (\,\underline{A} - \underline{B}\,\underline{G}\,\underline{M}\,\underline{C}\,)\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{\mu}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

Entonces, el sistema (3 . 138) es desacoplado por el par de matrices $-\underline{G}\,\underline{M}$, $\underline{G}$.

Nota.- Una condición necesaria para desacoplamiento de sistemas controlables y observables con realimentación de salida, es independiente de la controlabilidad de subespacios de el sistema de lazo cerrado desacoplado por realimentación de estado.

Necesidad.- Las condiciones necesarias para la existencia del par H , G que desacoplan el sistema (3 . 138), son las siguientes:

1) $\det [B^*] \neq 0$,y
2) Las matrices

$$C (A + B H C)^j B\, B^{*-1} \quad ,j = 0, \ldots , n - 1$$

deben ser diagonales, donde:

$$H = - B^{*-1} [A^{*d_1+1} B\, B^{*-1}{}_1 \mid A^{*d_2+1} B\, B^{*-1}{}_2 \mid \ldots \mid A^{*d_m+1} B\, B^{*-1}{}_m]$$

Suficiencia.- Es suficiente escoger,

$$G = B^{*-1} \text{ , y} \qquad (3 . 174 a)$$

$$H = - B^{*-1} [A^{*d_1+1} B\, B^{*-1}{}_1 \mid A^{*d_2+1} B\, B^{*-1}{}_2 \mid \ldots \mid A^{*d_m+1} B\, B^{*-1}{}_m] \qquad (3 . 174 b)$$

3.3.2.- Ubicación de polos de lazo cerrado.

Si el sistema (3 . 138) puede ser desacoplado por el par H y G , es posible ubicar los n polos en el sistema desacoplado de lazo cerrado, de tal forma que cada subsistema de una entrada y una salida tenga los polos arbitrarios asignados deseados.

Como se consideró que el sistema (3 . 138) es desacoplado, la clase de todas las matrices de desacoplamiento H estan dadas por la ecuación:

$$H = B^{*-1} \{ \triangle - [A^{*d_1+1} B \, B^{*-1}{}_1 \;\vdots\; A^{*d_2+1} B \, B^{*-1}{}_2 \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; A^{*d_m+1} B \, B^{*-1}{}_m] \} \qquad (3.175 \text{ a})$$

donde: $\triangle$ = es cualquier matriz diagonal arbitraria, de dimensión (m x m).

$$\triangle = \begin{bmatrix} \alpha_{1,d1+1} & & & 0 \\ & \alpha_{2,d2+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{m,dm+1} \end{bmatrix} \qquad (3.175 \text{ b})$$

El cambio de polos del sistema de lazo cerrado, tiene el objetivo de tratar que el sistema se estabilice. Siendo posible conseguir esto, dando los valores adecuados a la matriz $\triangle$, para que los polos de lazo cerrado o valores propios tengan partes reales negativas, pero si los valores propios obtenidos no proveen una respuesta aceptable, entonces, un compensador y un observador es requerido.

3.3.3.- Ejemplos.

Ejemplo 1.-

Sea el sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3 . 176}$$

Para que el sistema (3 . 176) pueda ser desacoplado, en primera instancia debe ser controlable y observable.

"Para que un sistema de orden n sea controlable se requiere que rango [P] = n".

donde: $P = [\, B \;\; A\,B \;\; . \;\; . \;\; . \;\; A^{n-1}B \,]$

En el presente ejemplo, n = 3,

$P = [\, B \;\; A\,B \;\; A^2B \,]$

$$A\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.177)$$

$$\mathbf{P}\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 44 \\ 0 & 44 & 52 \end{bmatrix}$$

donde: $\mathbf{P}^T$ es la transpuesta de la matriz $\mathbf{P}$.

$$\det[\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^T\,] = \det\left[\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 44 \\ 0 & 44 & 52 \end{bmatrix}\right] = 1488$$

Como $\det[\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^T\,] \neq 0$, entonces rango $[\,\mathbf{P}\,] = 3$, y a su vez, el sistema (3 . 176) es controlable.

"Para que un sistema de orden n sea observable se requiere que rango $[\,\mathbf{Q}\,] = n$".

donde:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\ \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\ \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, n = 3,

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\ \underline{A} \\ \underline{C}\ \underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\ \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\ \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3.178)$$

$$\underline{Q}^T\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 48 \\ 0 & 48 & 91 \end{bmatrix}$$

donde: $\underline{Q}^T$ es la transpuesta de la matriz $\underline{Q}$.

$$\det [\ \underline{Q}^T\underline{Q}\ ] = \det [\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 48 \\ 0 & 48 & 91 \end{bmatrix}\ ] = 186$$

Como $\det [\ \underline{Q}^T\underline{Q}\ ] \neq 0$, entonces rango $[\ \underline{Q}\ ] = 3$, y a su vez, el sistema (3 . 176) es observable.

Ahora se comprobará que $\underline{B}^*$ sea no singular.

De acuerdo a (3 . 140),

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1\ \underline{A}^{d_1}\underline{B} \\ \underline{C}_2\ \underline{A}^{d_2}\underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1\ \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \; A \; \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \text{siendo } d_1 = 0 \text{ y } d_2 = 1 \qquad (3 . 179)$$

$$\det [\underline{B}^*] = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Como $\underline{B}^*$ es no singular, el sistema (3 . 176) puede ser desacoplado. Entonces, la clase de todas las matrices de desacoplamiento $\underline{H}$ están dadas por (3 . 164), sí y sólo sí, las matrices

$$\underline{C} \; (A + \underline{B} \; \underline{H} \; \underline{C})^j \underline{B} \; \underline{B}^{*-1} \quad , j = 0, \ldots , n - 1$$

son diagonales.

La ecuación (3 . 164) para m = 2 se transforma en:

$$\underline{H} = \underline{B}^{*-1} \{ \triangle - [A^{*d_1+1}\underline{B} \; \underline{B}^{*-1}{}_1 \mid A^{*d_2+1}\underline{B} \; \underline{B}^{*-1}{}_2] \}$$

donde:

$$A^*_j = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A}^{d_1+j} \\ \underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^{d_2+j} \end{bmatrix} \quad , \; j = d_1 + 1, d_2 + 2$$

. Para $j = d_1 + 1$.

$$A^*_{d_1+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A}^{d_1+d_1+1} \\ \underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^{d_2+d_1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$A^*_{d_1+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3.180)$$

. Para $j = d_2 + 1$.

$$A^*_{d_2+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A}^{d_1+d_2+1} \\ \underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^{d_2+d_2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A}^2 \\ \underset{\sim}{C}_2 \; \underset{\sim}{A}^3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}_1 \; \underset{\sim}{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2\ \underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{A}^*_{d_2+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix} \qquad (3.181)$$

$$\underline{B}^{*-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.182)$$

$$\underline{A}^*_{d_1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^*_{d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Haciendo:

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

reemplazando los últimos resultados en la ecuación (3 . 164), para m = 2.

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 19 \end{bmatrix} \}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} \qquad (3.183)$$

Y con la ecuación (3 . 174a), se obtiene $\underline{G}$.

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.184)$$

Para establecer que el par de matrices $\underline{H}$, $\underline{G}$ desacoplan el sistema (3. 176), se debe comprobar que las siguientes matrices son diagonales:

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^j \underline{B}\,\underline{B}^{*-1} \quad , j = 0,1,2$$

. Para $j = 0$.

$$\underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si es diagonal.

. Para $j = 1$.

$$\underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -22 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -22 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{H} \underline{C}) \underline{B} \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -22 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si es diagonal.

. Para $j = 2$.

$$(\underline{A} + \underline{B} \underline{H} \underline{C})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -100 \\ 0 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{H} \underline{C})^2 \underline{B} \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -100 \\ 0 & 5 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

si es diagonal.

Por lo tanto el par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$ desacoplan el sistema (3 . 176), y para comprobar se determina la matriz función de transferencia de lazo cerrado.

La matriz función de transferencia de lazo cerrado será:

$$\underline{G}c(s) = \underline{C}\,[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,]^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$\det[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 22 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix}\right]$$

$$= (\, s + 1\,)\,(\, s^2 - 5\,s + 28\,)$$

$$[\, s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}\,]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 22 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+22 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s-3) & -22(s+1) \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix}}{(\, s+1\,)\,(\, s^2 - 5\,s + 28\,)}$$

$$\underline{G}c(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+22 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s-3) & -22(s+1) \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(\, s+1\,)\,(\, s^2 - 5\,s + 28\,)}$$

$$Gc(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+22 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+28)}$$

$$Gc(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+22 & 0 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+28)} \qquad (3.185)$$

Ya que la matriz función de transferencia de lazo cerrado es diagonal, efectivamente se ha desacoplado el sistema.

Para establecer que los polos de lazo cerrado, son ubicados en igual número a las entradas y salidas, se determina los polos de lazo abierto para compararlos con los polos de lazo cerrado.

$$\det[\, s\,I - A\,] = \det\left[\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix} \right]$$

$$= (s-1)(s-2)(s-3)$$

En este ejemplo se han cambiado los tres polos del sistema al realizar la realimentación de salida. Además se establece que si los valores de la matriz diagonal $\triangle$ son negativos, puede ser factible que el sistema desacoplado sea estable, puesto que, los polos de lazo cerrado se ubicarían en el semiplano izquierdo del plano complejo s. Esto es similar al análisis realizado en la técnica de desacoplamiento por realimentación de estado.

Ejemplo 2.-

Sea el sistema:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 . 186)

- En primer lugar, será desacoplado el sistema (3 . 186) por realimentación de estado.

De acuerdo a (3 . 34)

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^{d_1} \underline{B} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^{d_2} \underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \text{siendo } d_1 = 0 \quad y \quad d_2 = 1 \qquad (3 . 187)$$

$$\det [\underline{B}^*] = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Puesto que $\underline{B}^*$ es no singular, el sistema (3 . 186) puede ser desacoplado. El conjunto Φ de todas las matrices que desacoplan el sistema (3 . 186) puede ser obtenido, para todas las matrices $\underline{F}$ de orden (2 x 3) tal que rango$[\underline{Q}^i(\underline{F})] = 1$.

De las ecuaciones (3 . 64) y (3 . 65),

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} \{ \underline{\Gamma}\, \underline{A}^{**} - \underline{A}^* \}$$

$$\underline{A}^{**} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^{d_1} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^{d_2} \end{bmatrix} , \qquad \underline{A}^* = \underline{A}^{**} \underline{A}$$

$$\underline{C}_1 \underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{A}^{**} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3 . 188)$$

$$A^* = A^{**}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3 . 189)$$

$$B^{*-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 3\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 5 & 3\ \alpha_2 - 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1 - 1}{2} & \dfrac{-\alpha_2 + 4}{2} & \dfrac{-3\ \alpha_2 + 9}{2} \\ \dfrac{\alpha_1 - 1}{2} & \dfrac{\alpha_2 - 6}{2} & \dfrac{3\ \alpha_2 - 9}{2} \end{bmatrix}$$

sea:

$$f_{11} = \frac{\alpha_1 - 1}{2}$$

$$f_{12} = \frac{- \alpha_2 + 4}{2}$$

$$f_{13} = \frac{- 3 \alpha_2 + 9}{2}$$

$$f_{22} = \frac{\alpha_2 - 6}{2}$$

siendo los elementos de Φ de la forma:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{11} & f_{22} & -f_{13} \end{bmatrix} \qquad (3.190)$$

existiendo $f = 4$ parámetros libres en la matriz $\underline{F}$.

La forma más general de la matriz función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\underline{G}c(s) = \underline{C} [s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{F}]^{-1} \underline{B} \underline{B}^{*-1}$$

$$\det[s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{F}] = \det[\begin{bmatrix} s - 1 & -1 & 0 \\ 0 & s - 2 & 0 \\ 0 & -1 & s - 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 f_{11} & f_{12}+f_{22} & 0 \\ 0 & -f_{12}+f_{22} & -2f_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}]$$

$$= \det[\begin{bmatrix} s - 1 - 2 f_{11} & -1 - f_{12} - f_{22} & 0 \\ 0 & s - 2 + f_{12} - f_{22} & 2 \cdot f_{13} \\ 0 & -1 & s - 3 \end{bmatrix}]$$

$$= (s-1-2f_{11}) \left[s^2 + (-5+f_{12}-f_{22})s + (6-3f_{12}+3f_{22}+2f_{13})\right]$$

$$[s I - A - B E]^{-1} = \begin{bmatrix} s - 1 - 2 f_{11} & -1 - f_{12} - f_{22} & 0 \\ 0 & s - 2 + f_{12} - f_{22} & 2 f_{13} \\ 0 & -1 & s - 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s - 2 + f_{12} - f_{22})(s-3) + 2f_{13} & -(-1 - f_{12} - f_{22})(s-3) & 2f_{13}(-1 - f_{12} - f_{22}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11})(s-3) & - 2f_{13} (s - 1 - 2f_{11}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) & (s - 1 - 2f_{11})(s - 2 + f_{12} -f_{22}) \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11}) \left[s^2 + (-5 + f_{12} - f_{22}) s + (6 - 3f_{12} + 3f_{22} + 2f_{13})\right]}$$

$$G_c = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s - 2 + f_{12} - f_{22})(s-3) + 2f_{13} & -(-1 - f_{12} - f_{22})(s-3) & 2f_{13}(-1 - f_{12} - f_{22}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11})(s-3) & -2f_{13} (s - 1 - 2f_{11}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) & (s-1- 2f_{11})(s-2 + f_{12} - f_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11}) \left[s^2 + (-5 + f_{12} - f_{22}) s + (6 - 3f_{12} + 3f_{22} + 2f_{13})\right]}$$

$$G_c = \frac{\begin{bmatrix} (s - 2 + f_{12} - f_{22})(s-3) + 2f_{13} & -(-1 - f_{12} - f_{22})(s-3) & 2f_{13}(-1 - f_{12} - f_{22}) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) & (s-1- 2f_{11})(s-2 + f_{12} - f_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s - 1 - 2f_{11}) \left[s^2 + (-5 + f_{12} - f_{22}) s + (6 - 3f_{12} + 3f_{22} + 2f_{13})\right]}$$

$$G_c = \frac{\begin{bmatrix} (s - 2 + f_{12} - f_{22})(s-3) + 2f_{13} & -(-1 - f_{12} - f_{22})(s-3) \\ 0 & (s - 1 - 2f_{11}) \end{bmatrix}}{(s-1-2f_{11}) \left[s^2 + (-5+f_{12}-f_{22})s + (6-3f_{12}+3f_{22}+2f_{13})\right]}$$

(3 . 191)

El sistema (3 . 186) será desacoplado si la matriz función de transferencia de lazo cerrado es diagonal, esto se cumple para la condición $f_{22} = - 1 - f_{12}$. Entonces, el sistema se desacopla para un "subconjunto" de matrices $\underline{F}$ que debe satisfacer las condiciones: rango [$\underline{Q}^i$ ($\underline{F}$)] = 1 , y $\underline{B}^*$ sea no singular.

\- A continuación se desacopalará el sistema (3 . 186) por realimentación de salida.

Compruébese que el sistema sea controlable y observable.

Para que un sistema de orden 3 sea controlable se requiere que rango [$\underline{P}$] = 3.

$\underline{P}$ = [$\underline{B}$ A $\underline{B}$ $A^2\underline{B}$]

$$A\,\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.192)$$

$$\underline{P}\,\underline{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 28 & 32 \\ 28 & 42 & 44 \\ 32 & 44 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\det [\, \underline{P}\,\underline{P}^T \,] = \det \left[\begin{bmatrix} 26 & 28 & 32 \\ 28 & 42 & 44 \\ 32 & 44 & 52 \end{bmatrix} \right] = 1520$$

Como $\det [\, \underline{P}\,\underline{P}^T \,] \neq 0$, entonces rango [$\underline{P}$] = 3 , y a su vez, el sistema (3 . 186) es controlable.

Para que un sistema de orden 3 sea observable se requiere que rango [$\underline{Q}$] = 3.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,A \\ \underline{C}\,A^2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3.193)$$

$$\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 36 & 51 \\ 1 & 51 & 91 \end{bmatrix}$$

$$\det [\, Q^T Q \,] = \det \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 36 & 51 \\ 1 & 51 & 91 \end{bmatrix} \right] = 941$$

Como $\det [\, Q^T Q \,] \neq 0$, entonces rango $[\, Q \,] = 3$, y a su vez, el sistema (3 . 186) es observable.

La comprobación de la no singularidad de B^*, ya fue establecida. Por consiguiente, la clase de todas las matrices de desacoplamiento H están dadas por (3 . 164), sí y sólo sí, las matrices

$$C\,(\, A + B\,H\,C\,)^j B\,B^{*-1} \qquad , j = 0, \ldots , n - 1$$

son diagonales.

La ecuación (3 . 164) para m = 2 se tiene:

$$H = B^{*-1} \{\, \Delta - [\, A^{*}_{d_1+1} B\, B^{*-1}{}_1 \mid A^{*}_{d_2+1} B\, B^{*-1}{}_2 \,] \,\}$$

donde:

$$A^*_j = \begin{bmatrix} C_1\, A^{d_1+j} \\ C_2\, A^{d_2+j} \end{bmatrix} \qquad , \; j = d_1 + 1, d_2 + 2$$

. Para $j = d_1 + 1$.

$$A^*_{d_1+1} = \begin{bmatrix} C_1\, A^{d_1+d_1+1} \\ C_2\, A^{d_2+d_1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\, A \\ C_2\, A^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \ \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \ \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{A}^{*}{}_{d1+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad (3.194)$$

. Para $j = d_2 + 1$.

$$\underline{A}^{*}{}_{d2+1} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^{d1+d2+1} \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^{d2+d2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \ \underline{A}^2 \\ \underline{C}_2 \ \underline{A}^3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 \ \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 \ \underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{A}^{*}{}_{d2+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix} \qquad (3.195)$$

$$\underline{B}^{*-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.196)$$

$$\underline{A}^{*}{}_{d1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{*}{}_{d2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 19 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Haciendo:

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces $\underline{H}$ se tendrá:

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 19 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -12 \end{bmatrix} \qquad (3.197)$$

Y $\underline{G}$ se determina con la ecuación (3 . 174 a),

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.198)$$

El par de matrices $\underline{H}$, $\underline{G}$ desacoplan el sistema (3. 186), si las siguientes matrices son diagonales:

$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^{j} \underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$, $j = 0,1,2$

. Para $j = 0$.

$$\underline{C}\,\underline{B}\,\underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si es diagonal.

. Para $j = 1$.

$$\underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -21 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\,(\underline{A} + \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C})\,\underline{B}\ \underline{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -21 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no es diagonal.

Como las matrices,

$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C})^j \underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$

no son diagonales para todos los $j = 0,1,2$; entonces el par $\underline{H}$ y $\underline{G}$ no desacopla el sistema (3 . 186).

Se calcula la matriz función de transferencia de lazo cerrado, para verificar que el par no desacopla el sistema (3 . 186).

$$\underline{G}c(s) = \underline{C} [s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}]^{-1} \underline{B}\,\underline{B}^{*-1}$$

$$\det[s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}] = \det\left[\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 3 \\ 0 & s-2 & 21 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix} \right]$$

$$= (s + 1) (s^2 - 5 s + 27)$$

$$[s\,\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{H}\,\underline{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 3 \\ 0 & s-2 & 21 \\ 0 & -1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+21 & (s-3)-3 & -21-3(s-2) \\ 0 & (s+1)(s-3) & -21(s+1) \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+27)}$$

$$Gc(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+21 & (s-3)-3 & -21-3(s-2) \\ 0 & (s+1)(s-3) & -21(s+1) \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+27)}$$

$$Gc(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+21 & (s-3)-3 & -21-3(s-2) \\ 0 & (s+1) & (s+1)(s-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+27)}$$

$$Gc(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s-2)(s-3)+21 & (s-3)-3 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix}}{(s+1)(s^2-5s+27)} \qquad (3.199)$$

Como se puede observar en la ecuación (3 . 199), la matriz función de transferencia de lazo cerrado no es diagonal, y por lo tanto, el par de matrices H , G no desacoplan el sistema (3 . 186) por realimentación de salida.

En este ejemplo, se puede establecer que es posible desacoplar mediante la técnica de realimentación de estado, para un "subconjunto" de matrices $\underline{E}$ que cumple las condiciones: rango [$\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$)] = 1 , y $\underline{B}^*$ no sea singular; pero no se puede desacoplar por realimentación de salida.

3.3.4.- Conclusiones.

- Las condiciones necesarias y suficientes de la existencia del par de matrices $\underline{H}$ y $\underline{G}$, para que un sistema sea desacoplado, son las siguientes:

1) $\det [\ \underline{B}^* \ ] \neq 0$,y
2) Las matrices

$\underline{C}\ (\ \underline{A}\ +\ \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C}\ )^j \underline{B}\ \underline{B}^{*-1}$,$j = 0, \ldots , n - 1$

deben ser diagonales.

donde:

$\underline{H} = -\ \underline{B}^{*-1}\ [\ \underline{A}^{*d_1+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_1\ \mid\ \underline{A}^{*d_2+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_2\ \mid \ldots \mid\ \underline{A}^{*d_m+1}\underline{B}\ \underline{B}^{*-1}{}_m\ ]$

$\underline{G}\ =\ \underline{B}^{*-1}$.

- Cuando se tiene desacoplamiento por realimentación de estado para un "subconjunto" de matrices $\underline{E}$, por lo general no se puede desacoplar por realimentación de salida. Pero si el desacoplamiento por realimentación de estado se realiza sin ningún inconveniente, para un "conjunto" de matrices $\underline{E}$, el desacoplamiento por realimentación de salida es factible. Además, se puede establecer que si un sistema puede ser desacoplado por realimentación de salida, cumple necesariamente, como se ha demostrado en los ejemplos, que se desacopla por realimentación de estado.

- Para cambiar la ubicación de polos de lazo cerrado, se lo hace variando los valores de la matriz diagonal $\underline{\Delta}$. Por lo tanto, si se quiere conseguir estabilidad de un sistema lineal multivariable de lazo cerrado por la ubicación de los polos en el plano complejo s, se debe tener que todos los polos queden en el semiplano izquierdo s. Una manera tentativa de conseguir esto, es dando valores(-)a la matriz diagonal $\underline{\Delta}$, siendo una forma experimental, la misma que puede satisfacer para un cierto número de polos de lazo cerrado, por lo que será necesario para el resto de polos que no cumplan, analizar al sistema desacoplado, mediante la forma clásica de una entrada - una salida, para colocar un compensador u observador que produzca la estabilidad deseada. Siendo lo último lo que sucede frecuentemente, esto se estableció por la gran cantidad de ejercicios realizados.

C A P I T U L O 4

4.- ALGORITMOS Y DIAGRAMAS DE FLUJO DESARROLLADOS PARA LAS TECNICAS DE DESACOPLAMIENTO.

4.1.- ALGORITMO.- Es una secuencia lógica de pasos, usados para resolver un problema en una cantidad finita de tiempo.

4.2.- DIAGRAMA N-S.- Por lo general, un programa consiste de instrucciones o sentencias agrupadas secuencialmente en un procedimiento. Y la Programación Estructurada, da necesariamente el resultado en módulos o bloques, que permite separar en forma gráfica el conjunto de instrucciones de un objetivo en particular. En el presente trabajo se va a utilizar el "Método Gráfico", que consiste en la "diagramación N-S".

4.2.1.- Diagramación N-S (Nassi-Shneiderman).- Quiere decir diagramación en cajas, que es el principio de la "Programación Estructurada". Por consiguiente, no se puede utilizar los "Diagramas de Flujo". Como se podrá ver a continuación, la ventaja de esta programación en cajas, es la fácil comprensión de cualquier persona que tenga acceso a un programa estructurado, porque cada una de las cajas o bloques hace un procedimiento específico, y solamente cuando se haya realizado dicho bloque continúa efectuando el siguiente bloque, en forma jerárquica, de arriba hacia abajo; a su vez, en un mismo bloque puede existir sub-bloques, que se realizan también, en forma jerárquica, de niveles más altos hacia niveles más bajos.

Las estructuras básicas para poder programar son 3:

- Secuencial.
- Control de lazos (repeticiones).
- Toma de decisiones.

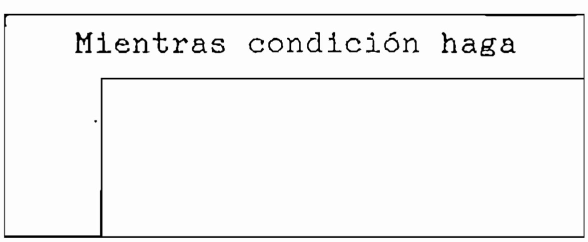
Los diagramas N-S más utilizados, con sus respectivas equivalencias de las sentencias del lenguaje de programación Pascal, que es el lenguaje estructurado que se utiliza para la incorporación de los programas, son los siguientes:

4.2.2.- <u>Secuencial</u>.- Sirve para asignar variables y expresiones, sirve también para entrada y salida de datos.

Paso 1
Paso 2

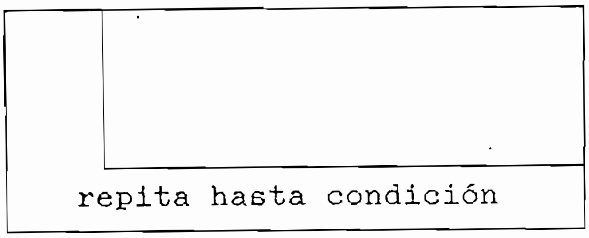
4.2.3.- <u>Control de lazos</u>.- Existen varios métodos:

Mientras.- Se utiliza este tipo de lazo, cuando no se sabe el número de iteraciones que se van a realizar, depende de una condición, o sea, mientras alguna condición subsista, repítase; caso contrario, no hace nada.



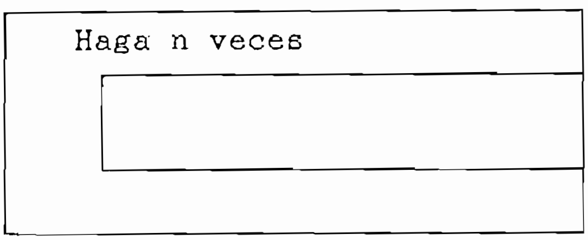

```
while condición do
  begin
    _
    _
    _
  end;
```

Hasta.- Igual a la instrucción "Mientras", no se conoce el número de iteraciones y depende de una condición, pero se repite hasta que ocurra una condición. En este caso se hace al menos una vez, porque la condición está al final del lazo.




```
repeat
   -
   -
   -
until condición;
```

Haga n veces.- se utiliza cuando se conoce el número de veces que se va a repetir el lazo.




```
for i:=n1 to n2 do
  begin
   -
   -
   -
  end;
```

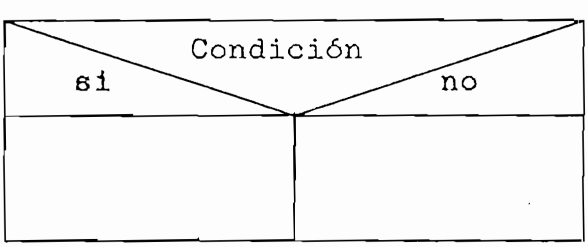
i = Variable de control del lazo.

n_1 = Valor inicial de i.

n_2 = Valor final de i.

4.2.4.- <u>Toma de decisiones</u>.-

Simple (if).- Es una condición que tiene 2 posibilidades de respuesta: si o no. Si satisface la condición cumple el un lado del diagrama, caso contrario se cumple el otro lado.




```
if condición
  then
    begin
     -
     -
    end
  else
    begin
     -
     -
    end;
```

else, no es obligatorio.

4.3.- DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA.

4.3.1.- <u>Análisis matemático</u>.- Las ecuaciones que rigen esta técnica de desacoplamiento son: (3 . 10) y (3 . 11),

$$\underline{G}o(s) = \underline{G}d(s) [\underline{I} - \underline{G}d(s)]^{-1} \qquad (4.1)$$

$$\underline{G}c(s) = \underline{G}p^{-1}(s)\ \underline{G}o(s) \qquad (4.2)$$

Se parte de la ecuación (4 . 1).

Sea:

$$\underline{G}d(s) = \begin{bmatrix} gd_{11}(s) & & & 0 \\ & gd_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & gd_{nn}(s) \end{bmatrix}, \qquad (4.3)$$

con la ecuación (4 . 3) se determina $[\underline{I} - \underline{G}d(s)]^{-1}$,

$$[\underline{I} - \underline{G}d(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - gd_{11}(s) & & & 0 \\ & 1 - gd_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 - gd_{nn}(s) \end{bmatrix}^{-1},$$

la inversa de una matriz diagonal, se determina invirtiendo cada término de la diagonal.

$$[\ \underline{I} - \underline{G}d(s)\ ]^{-1} = \begin{bmatrix} [1 - gd11(s)]^{-1} & & & 0 \\ & [1 - gd22(s)]^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [1 - gdnn(s)]^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aplicando la ecuación (4 . 1) se obtiene:

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} gd11(s) & & & 0 \\ & gd22(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & gdnn(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1 - gd11(s)]^{-1} & & & 0 \\ & [1 - gd22(s)]^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [1 - gdnn(s)]^{-1} \end{bmatrix}$$

multiplicando ambas matrices,

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} gd11(s)\ [1 - gd11(s)]^{-1} & & & 0 \\ & gd22(s)\ [1 - gd22(s)]^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & gdnn(s) - [1 - gdnn(s)]^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

Sea:

$$gdii(s) = \frac{nii(s)}{dii(s)} \qquad ,i = 1,2, \ldots ,n \qquad (4.5)$$

donde: $gdii(s)$ = Es el elemento de la i-ésima fila e i-ésima columna de la matriz $\underline{G}d(s)$.

entonces con la ecuación (4 . 5), los elementos de la matriz

(4 . 4) se tiene que:

$gdii(s)\,[\,1 - gdii(s)\,]^{-1}$, es el elemento de la i-ésima fila e i-ésima columna de la matriz $\underline{G}o(s)$.

Operando algébricamente y simplificando se determina:

$$gdii(s)\,[\,1 - gdii(s)\,]^{-1} = \frac{nii(s)}{dii(s)}\,[\,1 - \frac{nii(s)}{dii(s)}\,]^{-1}$$

$$= \frac{nii(s)}{dii(s)}\,[\,\frac{dii(s) - nii(s)}{dii(s)}\,]^{-1}$$

$$= \frac{nii(s)}{dii(s)}\,[\,\frac{dii(s)}{dii(s) - nii(s)}\,]$$

$$= \frac{nii(s)}{dii(s) - nii(s)}$$

$$gdii(s)\,[\,1 - gdii(s)\,]^{-1} = \frac{nii(s)}{dii(s) - nii(s)} \quad , i = 1, 2, \ldots n \qquad (4.6)$$

reemplazando los términos en la matriz $\underline{G}o(s)$ de la ecuación (4 . 4), por la ecuación (4 . 6) se tendría:

$$\underline{G}o(s) = \begin{bmatrix} \frac{n11(s)}{d11(s) - n11(s)} & & 0 \\ & \frac{n22(s)}{d22(s) - n22(s)} & \\ 0 & & \frac{nnn(s)}{dnn(s) - nnn(s)} \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

Siendo la ecuación (4 . 7) la que se utiliza para determinar la matriz $\underline{G}o(s)$, y como se puede observar, dicha matriz es diagonal, y sus elementos son fracciones de polinomios; cuyo numerador corresponde al mismo numerador de $\underline{G}d(s)$, y el denominador es la diferencia del denominador con el numerador de $\underline{G}d(s)$. Por consiguiente, su cálculo es muy fácil, pero como interesa el compensador serie, esta determinación de $\underline{G}o(s)$ es intermedia.

Sea la planta:

$$\underline{G}p(s) = \frac{1}{\delta(s)} \begin{bmatrix} gp_{11}(s) & gp_{12}(s) & \cdots & gp_{1n}(s) \\ gp_{21}(s) & gp_{22}(s) & \cdots & gp_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ gp_{n1}(s) & gp_{n2}(s) & \cdots & gp_{nn}(s) \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

donde: $\delta(s)$ = Es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los elementos de la planta $\underline{G}p(s)$.

se define:

$$\underline{G}pL(s) = \begin{bmatrix} gp_{11}(s) & gp_{12}(s) & \cdots & gp_{1n}(s) \\ gp_{21}(s) & gp_{22}(s) & \cdots & gp_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ gp_{n1}(s) & gp_{n2}(s) & \cdots & gp_{nn}(s) \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

Invirtiendo $\underline{G}pL(s)$ (Ver en la sección de subprogramas) se tiene lo siguiente:

$$\underline{G}pL^{-1}(s) = \frac{1}{dpl(s)} \begin{bmatrix} gl_{11}(s) & gl_{12}(s) & \ldots & gl_{1n}(s) \\ gl_{21}(s) & gl_{22}(s) & \ldots & gl_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ gl_{n1}(s) & gl_{n2}(s) & \ldots & gl_{nn}(s) \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

Entonces la Matriz Inversa de la planta $\underline{G}p(s)$, sería:

$$\underline{G}p^{-1}(s) = \delta(s)\, \underline{G}pL^{-1}(s),$$

es decir,

$$\underline{G}p^{-1}(s) = \frac{\delta(s)}{dpl(s)} \begin{bmatrix} gl_{11}(s) & gl_{12}(s) & \ldots & gl_{1n}(s) \\ gl_{21}(s) & gl_{22}(s) & \ldots & gl_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ gl_{n1}(s) & gl_{n2}(s) & \ldots & gl_{nn}(s) \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

Aplicando las ecuaciones (4 . 4) y (4 . 11) en la ecuación (4 . 2), se tiene:

$$\underline{G}c(s) = \frac{\delta(s)}{dpl(s)} \begin{bmatrix} gl_{11}(s) & gl_{12}(s) & \ldots & gl_{1n}(s) \\ gl_{21}(s) & gl_{22}(s) & \ldots & gl_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ gl_{n1}(s) & gl_{n2}(s) & \ldots & gl_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_{11}(s)}{d_{11}(s)-n_{11}(s)} & & 0 \\ & \frac{n_{22}(s)}{d_{22}(s)-n_{22}(s)} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{n_{nn}(s)}{d_{nn}(s)-n_{nn}(s)} \end{bmatrix}$$

multiplicando las matrices y los polinomios,

$$Gc(s) = \left[\frac{\delta(s)\ n_{11}(s)}{dpl(s)\ [d_{11}(s)-n_{11}(s)]} \begin{Bmatrix} gl_{11}(s) \\ gl_{21}(s) \\ \vdots \\ gl_{n1}(s) \end{Bmatrix} \cdots \frac{\delta(s)\ n_{nn}(s)}{dpl(s)\ [d_{nn}(s)-n_{nn}(s)]} \begin{Bmatrix} gl_{1n}(s) \\ gl_{2n}(s) \\ \vdots \\ gl_{nn}(s) \end{Bmatrix} \right]$$

Sea:

$$nu_j(s) = \delta(s)\ n_{jj}(s) \qquad ,j = 1,2, \ldots n \qquad (4.12)$$

$$den_j(s) = dpl(s)\ [d_{jj}(s)-n_{jj}(s)] \qquad ,j = 1,2, \ldots n \qquad (4.13)$$

entonces se tiene,

$$Gc(s) = \left[\frac{1}{den_1(s)} \begin{Bmatrix} nu_1(s)\ gl_{11}(s) \\ nu_1(s)\ gl_{21}(s) \\ \vdots \\ nu_1(s)\ gl_{n1}(s) \end{Bmatrix} \cdots \frac{1}{den_n(s)} \begin{Bmatrix} nu_n(s)\ gl_{1n}(s) \\ nu_n(s)\ gl_{2n}(s) \\ \vdots \\ nu_n(s)\ gl_{nn}(s) \end{Bmatrix} \right].$$

por último se hace,

$$num_{ij}(s) = nu_j(s)\ gl_{ij}(s) \qquad ,i = 1,2, \ldots ,n$$

$$,j = 1,2, \ldots ,n \qquad (4.14)$$

Llegando a una expresión del compensador serie $\underline{G}c(s)$, como la siguiente:

$$\underline{G}c(s) = \begin{bmatrix} \frac{num_{11}(s)}{den_1(s)} & \frac{num_{12}(s)}{den_2(s)} & \cdots & \frac{num_{1n}(s)}{den_n(s)} \\ \frac{num_{21}(s)}{den_1(s)} & \frac{num_{22}(s)}{den_2(s)} & \cdots & \frac{num_{2n}(s)}{den_n(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{num_{n1}(s)}{den_1(s)} & \frac{num_{n2}(s)}{den_2(s)} & \cdots & \frac{num_{nn}(s)}{den_n(s)} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

Bien, se ha conseguido matemáticamente el compensador serie $\underline{G}c$ (s) , para producir el desacoplamiento del sistema. Pero se debe dar significado físico a esos resultados, ya que por las operaciones matemáticas se obtiene que los elementos racionales polinomiales de la matriz $\underline{G}c$ (s) tienen grados muy altos, entonces no se puede diseñar dicho compensador. De este modo se va a realizar una <u>aproximación</u> de cada elemento, como un compensador PID (Control Proporcional, Derivado e Integral), porque en los sistemas reales, la mayoría de los controles automáticos industriales, se aproximan a un PID, pero también pueden ser solamente compensadores individuales o la combinación de ellos.

La acción de control proporcional, derivativo e integral (PID), es la combinación de los efectos de acción proporcional P, acción de control derivativo D, y acción de control integral I. Esta acción combinada tiene la ventaja, de cada una de las tres acciones de control individuales. La función de transferencia, con esta acción de control está dada por:

$$FT(s) = Kp \left(1 + Td\ s + \frac{1}{Ti\ s} \right) \qquad (4.16)$$

donde : Kp = Sensibilidad proporcional o ganancia.

Td = Tiempo derivativo.

Ti = Tiempo integral.

Multiplicando Kp en (4 . 16).

$$FT\ (s) = Kp + Kp\ Td\ s + \frac{Kp}{Ti\ s}$$

sea las constantes:

$$Kd = Kp\ Td$$

$$Ki = \frac{Kp}{Ti}$$

ordenando en forma descendente a s, se tiene:

$$FT\ (s) = Kd\ s + Kp + \frac{Ki}{s} \qquad (4 . 17)$$

Siendo (4 . 17), la forma de los elementos de $\underline{G}c$ (s) a la cual se va a llegar.

De acuerdo al análisis matemático realizado, determinar el compensador serie $\underline{G}c(s)$ puede parecer un cálculo sencillo, puesto que la matriz $\underline{G}c(s)$ descrita en la ecuación (4 . 15), tiene cada uno de sus elementos racionales polinomiales, los mismos que se determinan simplemente por multiplicación de polinomios . Pero el problema de mayor trascendencia es el cálculo de la Inversa de $\underline{G}p(s)$, ya sea en forma manual o computacional, porque dicha matriz posee cada uno de sus elementos como fracción de polinomios, siendo posible invertir una matriz de acuerdo a los métodos tradicionales, cuando sus elementos son números reales; por lo tanto se realizó un estudio para poder suplir este inconveniente, llegando a determinar un método computacional para invertir matrices racionales polinomiales, el mismo que está explicado en la sección de subprogramas. Este método tiene la deficiencia de que la matriz a invertir debe tener realizado un mínimo común múltiplo para todos los denominadores de sus elementos .

A más de ello, después de haber realizado la inversión de cualquier matriz, se obtiene que dichos elementos que son polinomios, aumentan considerablemente su grado, así como un denominador común que se crea para todos los elementos, de esta manera al continuar con el proceso de desacoplamiento, en el cual se realiza a través de multiplicaciones de polinomios, se aumentaría todavía más el grado de los polinomios de los elementos de la matriz Gc(s). Por lo tanto, se pensaría en simplificar el numerador y el denominador de cada término de Gc(s), pero como se analizó en el ejemplo del tema (3 . 1), que al tratar de simplificar, el sistema se puede volver incontrolable; en cuyo caso, se hace una aproximación de cada elemento, a una acción de control PID; obviamente, el resultado también se obtendrá aproximado.

Entonces, como se puede ver, la "ténica de desacoplamiento por matriz función de transferencia" no es muy aconsejable para el diseño de sistemas, por ser el mismo muy teórico.

A pesar de los inconvenientes indicados se realizó el programa computacional, el mismo que serviría para demostraciones de la parte teórica, y para diseño se utilizará los otros 2 métodos: por realimentación de estado, y por realimentación de salida.

4.3.2.- Algoritmo.-

1.- Entrada del orden de la matriz $\underline{G}p(s)$, que corresponde al número de entradas o salidas del sistema [n].

2.- Entrada del mayor grado de los elementos de la planta Gp(s), ya encontrada el mínimo común múltiplo de los denominadores [m].

3.- Entrada del mayor grado del mínimo común múltiplo de los denominadores de $\underline{G}p(s)$, que es el orden del sistema [t].

4.- Entrada del mayor grado entre los númeradores y denominadores de los términos de la matriz diagonal $\underline{G}d(s)$ [m1].

5.- Entrada de la matriz $\underline{G}pL(s)$, de dimensión (n x n x m).

6.- Entrada del mínimo común denominador $\delta(s)$, de orden t.

7.- Entrada de la matriz diagonal $\underline{G}d(s)$, de dimensión (n x n x m1).

8.- Determinar:

La matriz $\underline{G}o(s)$, mediante la ecuación (4 . 7).

Numeradori de $\underline{G}o(s)$ = nii(s), ,i = 1,2, ... ,n

Denominadori de $\underline{G}o(s)$ = dii(s) - nii(s) ,i =1 ,2, ... ,n

9.- Determinar:

La matriz $\underline{G}pL^{-1}(s)$, subprograma: Matriz Inversa Polinomial.

10.- Determinar:

La matriz $\underline{G}c(s)$, mediante la ecuación (4 . 15).

10.1.- nuj(s) = δ(s) njj(s) ,j = 1,2, ... ,n

10.2.- Numerador de $\underline{G}c(s)$,

numij(s) = nuj(s) glij(s) ,i = 1,2, ... ,n

$, j = 1,2, \ldots, n$

10.3.- Denominador de $\underline{G}c(s)$,

$den_j(s) = dpl(s)\,[d_{jj}(s) - n_{jj}(s)]$ $\quad, j = 1,2, \ldots, n.$

Siendo: i = Fila de matriz.

j = Columna de matriz.

11.- Obtener los compensadores PID.

$P_k = num_{ij}(s) / den_j(s)$ $\quad, i = 1,2, \ldots, n$

$, j = 1,2, \ldots, n$

$, k = -1,0,1,2.$

$\underline{G}c_{ijk} = P_k$ $\quad, i = 1,2, \ldots, n$

$, j = 1,2, \ldots, n$

$, k = -1,0,1,2.$

12.- Imprimir el compensador serie Gc(s).

13.- Fin.

Nota.- Sea la matriz,

$\underline{A}(s) = [\, a_{ijk}(s) \,]$

cualquier matriz polinomial en la frecuencia s, de orden (n x n x m2).

donde: n se define como el número de entradas o salidas del sistema.

m2 es el mayor grado de los elementos de la matriz $\underline{A}(s)$.

Se puede descomponer una matriz polinomial, como una suma de submatrices constantes y reales, es decir, $\underline{A}(s)$ se puede expresar mediante un polinomio de la forma:

$$\underline{A}(s) = [\, \underline{A}_0 + \underline{A}_1 s + \ldots + \underline{A}_{m2} s^{m2} \,]$$

Entonces, la tercera dimensión indica cada submatriz A_i , $i = 1, \ldots , m2$. de orden (n x n). Siendo cada A_i un plano, correspondiente a su grado polinomial.

4.3.3.- Diagrama N - S.-

Inicio

Leer (N , M, T , M1)

N ≤ 5

SI

NO

Para k = 0 a M haga

Para i = 1 a N haga

Para j = 1 a N haga

Leer GpL[i,j,k]

Para k = 0 a T haga

Leer δ[k]

Para k = 0 a M1 haga

Para i = 1 a 2 haga

Para j = 1 a N haga

i = 1

si | no

Leer GD[1,j,k] | Leer GD[2,j,k]

Para k = 0 a M1 haga

Para i = 1 a 2 haga

Para j = 1 a N haga

i = 1

si | no

Gon[1,j,k] = GD[1,j,k] | Gon[2,j,k] = GD[2,j,k] - GD[1,j,k]

```
MatrizInversaPolinomial(GpL,dpl)
RR = 0
Para j = 1 a N haga
    Para k = 0 a M1 haga
        Nn[k] = Gon[1,j,k]
        Dn[k] = Gon[2,j,k]
    PRroductoPolinomioPolinomio(T,M1,δ,Nn,nu)
    PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,M1,dpl,Dn,den)
    Para k = 0 a ORO+M1 haga
        Gcd[1,j,k] = den[k]
    Para i = 1 a N haga
        Para k = 0 a M haga
            NGpL[k] = GpL[i,j,k]
        PRoductoPolinomioPolinomio(M,T+M1,NGpL,nu,num)
        Para k = 0 a M+M1+T haga
            Gc[i,j,k] = num[k]
        JX = M+M1+T
        JY = ORO+M1
        Para k1 = 0 a JX haga
            num1[k1] = num[k1]
        Para k1 = 0 a JY haga
            den1[k1] = den[k1]
        DivisionPolinomios(JX,num1,JY,den1,Grado,PID)
```

Escribir(´COMPENSADOR Gc´)

Escribir(´Compensador PID(i,j)´)

Grado ≤ -2

si

no

Grado = -2

si

no

Escrbir(´No hay aproximación´)

Escribir(´No hay compensador´)

Para k3 = - 1 a Grado haga

Escribir(´Grado:´,k3,PID[k3]

Escribir(´Quiere imprimir el Compensador Serie Completo Gc (S/N)´)

Leer(´Z´)

(Z = S) o (Z = s)

si

no

Para j = 1 a N haga

Para k = 0 a ORO+M1 haga

den1[k] = Gcd[1,j,k]

ReducirGrado(ORO+M1,den1,Grado2)

Escribir(´COMPENSADOR Gc´)

Escribir(´Denominador (*,j)´)

RR = 1

si

no

Escribir(´Está mal dado la Matriz-Diagonal GD)

Para k = 0 a Grado2 haga

Escribir(´Grado´,k,den1[k])

Para i = 1 a N haga

Para k = 0 a M+M1+T haga

num[k] = Gc[i,j,k]

ReducirGrado(M+M1+T,num1,Grado1)

Escribir('Numerador(i,j)')

Grado1 < 0

si

no

Escribir('Grado(0): 0')

Para k = 0 a Grado1 haga

Escribir('Grado',k,num1[k1]

N > 5

SI

NO

Escribir('EL ORDEN DEL SISTEMA DEBE SER N ≤ 5, PORQUE NO ALCANZA LA MEMORIA DEL COMPUTADOR')

Fin

4.4.- DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO.-

4.4.1.- Algoritmo.-

1.- Entrada del orden del sistema [n].

2.- Entrada del número de "Entradas" o "Salidas" del sistema [m].

3.- Si $m \leq n$

Entonces hacer:

3.1.- Entrada de la matriz $\underline{A}$, de orden (n x n).

3.2.- Entrada de la matriz $\underline{B}$, de orden (n x m).

3.3.- Entrada de la matriz $\underline{C}$, de orden (m x n).

3.4.- Determinar $\underline{B}^*$, de acuerdo a la ecuación (3 . 34), y con las ecuaciones (3 . 24).

3.4.1.- Si $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} = 0$, para todo j.

, $i = 1, \ldots, m$.

, $\underline{C}_i$ = i-ésima fila de $\underline{C}$.

Entonces hacer:

- $d_i = n - 1$, $i = 1, \ldots, m$.
- $\underline{B}_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

, $\underline{B}_i^*$ = i-ésima fila de $\underline{B}^*$.

Caso contario hacer:

- $d_i = \min \{ j : \underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} \neq 0$, $j = 0, \ldots, n-1\}$

, $i = 1, \ldots, m$

- $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B}$, $i = 1, \ldots, m$

3.5.- Calcular:

La matriz $\underline{B}^{*-1}$, y

det[$\underline{B}^*$] , subprograma: DeterminanteEInversa.

3.6.- Si det [$\underline{B}^*$] $\neq 0$.

Entonces hacer:

3.6.1.- SUMA $= m + \sum_{i=1}^{m} d_i$

3.6.2.- Si SUMA $\leq n$.

Entonces hacer:

3.6.2.1.- Determinar $\underline{A}^{**}$, con la ecuación (3 . 65).

$\underline{A}^{**}{}_i = \underline{C}_i \, \underline{A}^{d_i}$, $i = 1, \ldots, m$

, $\underline{A}_i^{**}$= i-ésima fila de $\underline{A}^{**}$.

3.6.2.2.- Calcular:

$\underline{A}^* = \underline{A}^{**}\underline{A}$

3.6.2.3.- Determinar el conjunto de matrices $\underline{F}$ que desacopla el sistema, con la ecuación (3 . 64).

$\underline{FGEN}_k = \underline{B}^{*-1} \, \underline{\Gamma} \, \underline{A}^{**}$, $k = 1, \ldots, m$

, $\underline{\Gamma}$ = Matriz diagonal[$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$]

, $\underline{FGEN}_k$ = k-ésimo plano (m x n) de $\underline{FGEN}$, siendo cada plano correspondiente a α_i , $i = 1, \ldots, m$.

$\underline{FGEN}_{m+1} = - \underline{B}^{*-1} \, \underline{\Gamma} \, \underline{A}^*$.

3.6.2.3.1.- Determinar:

$\underline{F}f$, Conjunto de matrices $\underline{F}$ que desacopla el sistema,

f , número de parámetros libres de $\underline{F}$, subprograma: MatrizFGeneral.

3.6.2.4.- Determinar:

MDI $= \max[\, d_i \,]$, $i = 1, \ldots, m$.

3.6.2.5.- Si SUMA > f.

Entonces hacer:

- Imprimir('El conjunto de matrices $\underline{F}$ para desacoplar el sistema, se determina por el procedimiento de Síntesis').
- Determinar el conjunto de matrices $\underline{F}$ con la ecuación (3 . 68 a).

$$\underline{FGEN}_{k1} = \underline{B}^{*-1} \sum_{k=1}^{MDI+1} \underline{M}_k \; \underline{C} \; \underline{A}^K \,,$$

, $k1 = 1, \ldots m \times (MDI + 1)$.

, $\underline{M}_k$ = Matriz diagonal$[m_k{}^1, \ldots, m_k{}^m]$.

$\underline{FGEN}_{k1}$ = k1-ésimo plano ($m \times n$) de $\underline{FGEN}$, siendo cada plano correspondiente a $m_k{}^i$.

, $i = 1, \ldots, m$.

, $k = 1, \ldots, MDI+1$.

$$\underline{FGEN}_{m \times (MDI+1)} = - \underline{B}^{*-1} \; \underline{A}^*$$

- Determinar:

  $\underline{Ef}$, conjunto de matrices $\underline{F}$, subprograma: MatrizFGeneral.

3.6.2.6.- Si (f > SUMA) o (f > n).

Entonces hacer:

- Si SUMA $\neq$ n

  Entonces hacer:

3.6.2.6.1.- Imprimir('Puede ser posible especificar más de los SUMA polos de lazo cerrado').

3.6.2.6.2.- Imprimir('Quiere todos los polos de lazo cerrado (S/N)').

- Leer ('Z').

- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer: R1 = 1.

  Caso contrario hacer: R1 = 0.

3.6.2.7.- Si SUMA = n.

Entonces hacer:

- Imprimir('Cualquier n de los polos de lazo cerrado pueden ser posicionados arbitrariamente mientras simultáneamente se desacopla el sistema').
- R1 = 0.

3.6.2.8.- Si SUMA = f.

Entonces hacer.

- Imprimir('Conjunto de matrices E que desacopla el sistema').
- Imprimir: Ef_{ij} , i = 1, ... ,m.
  , j = 1, ... ,n.
- Imprimir('Quiere dar directamente valores a los parámetros libres f (S/N)').
- Leer('Z').
- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer: R1 = 1.

  Caso contrario hacer: R1 = 0.

3.6.2.9.- Repita hasta que t = 1.

3.6.2.9.1.- Si R1 = 1 .

Entonces hacer:

- Imprimir('Conjunto de matrices que desacopla el sistema').

- Imprimir: $\underline{E}f_{ij}$, $i = 1, \ldots ,m.$
  , $j = 1, \ldots ,n.$
- Imprimir('Introduzca los elementos de la matriz $\underline{E}$').
- Leer: $\underline{E}_{ij}$, $i = 1, \ldots ,m.$
  , $j = 1, \ldots ,n.$

Caso contrario hacer:

- Imprimir('Introduzca los valores de las matrices diagonales $\underline{M}_k$').
- Leer: $\underline{MI}_k$ = diagonal[$m_{k1}, m_{k2}, \ldots ,m_{km}$]
  , $i = 1, \ldots ,m.$
  , $k = 0, \ldots ,MDI.$
- Calcular $\underline{E}$ con la ecuación (3 . 68 a).

$$\underline{E} = \underline{B}^{*-1} \left[\sum_{k=0}^{MDI} \underline{M}_k \, \underline{C} \, \underline{A}^k - \underline{A}^* \right].$$

3.6.2.9.2.- Determinar $\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$) de acuerdo a la ecuación (3 . 53).

$\underline{MC} = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{E}$

$\underline{Q}^i = \underline{C}_i \times \underline{MC} \times \underline{B}$, $i = 1, \ldots ,m.$

- Determinar.
  rango [$\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$)] , $i = 1, \ldots ,m.$
- Si rango [$\underline{Q}^i$ ($\underline{E}$)] = 1
  Entonces hacer: tt = 0
  Caso contrario: tt = 1

3.6.2.9.3.- Si tt = 0

Entonces hacer:

- Calcular $\underline{G}$ con la ecuación (3 . 68 b).
  $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}$.
- Imprimir('Quiere imprimir el conjunto de matrices

E que desacopla el sistema (S/N)´).

- Leer(´Z´).
- Si (Z = ´S´) o (Z = ´s´).

  Entonces hacer:

  - Imprimir: Ef_{ij} ; i = 1, ... ,m.

    , j = 1, ... ,n.
- Calcular, la Adjunta y Polinomio Característico de lazo abierto.

  $SIA = [s I - A]^{-1}$,

  D1 = det[s I - A] , con el subprograma:

  InversaMatrizDinamica.
- Calcular, los polos de lazo abierto:

  Xr = reales,

  Xi = imaginarias,

  subprograma: RaicesPolinomiales.
- Imprimir:

  Xr , Xi.
- Calcular, la Adjunta y Polinomio Característico de lazo cerrado.

  $SIA = [s I - A - B E]^{-1}$,

  D2 = det[s I - A - B E] , con el subprograma:

  InversaMatrizDinamica.
- Calcular, los polos de lazo cerrado:

  Yr = reales,

  Yi = imaginarias,

  subprograma: RaicesPolinomiales.

- Imprimir:

  Yr , Yi.

- Imprimir('Quiere cambiar estos polos (S/N)').

- Leer ('Z').

- Si (Z ='S') o (Z ='s').

  Entonces hacer t = 0.

  Caso contrario t = 1.

3.6.2.9.4.- Si tt $\neq$ 0

Entonces hacer.

- Imprimir('No hay como desacoplar el sistema, porque no se cumple la condición rango[Q^i (E)] = 1 ').

- Leer ('Z').

- Si (Z ='S') o (Z ='s').

  Entonces hacer: t = 0.

  Caso contrario: t = 1.

2.6.2.10.- Si tt = 0

Entonces hacer:

- Imprimir('Matriz E que desacopla el sistema').

- Imprimir: E_{ij} , i = 1, ... ,m.

  , j = 1, ... ,n.

- Imprimir('Matriz G que desacopla el sistema').

- Imprimir: G_{ij} , i = 1, ... ,m.

  , j = 1, ... ,m.

- Calcular, la Matriz Función de Transferencia de lazo cerrado con la siguiente ecuación:

$$Gc = C [s I - A - B E]^{-1} B B^{*-1}.$$

- Imprimir('Quiere ver la Matriz Función de Transferencia Gc (S/N)').
- Leer ('Z').
- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer:

  - Imprimir('Matrices numeradores de Gc en potencias de s').
  - Imprimir: Gc_k , k = 0, ... ,n-1.
  - Imprimir('Polinomio característico').
  - Imprimir: $D2_k$, k = 0, ... ,n.
- Imprimir('Quiere escribir los resultados en papel')
- Leer ('Z').
- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer:

  - Imprimir: A , B , C , M_k , E , G , Gc , y Polos de lazo cerrado').

3.6.3.- Si SUMA > n.

Entonces hacer:

- Imprimir('Como $m + \Sigma d_i > n$, siendo el número de polos de lazo cerrado a ser asignado, mayor al orden del sistema, entonces el sistema no se puede desacoplar ').

3.7.- Si det[B*] = 0.

Entonces hacer:

- Imprimir('B* es singular, entonces el sistema no se puede desacoplar').

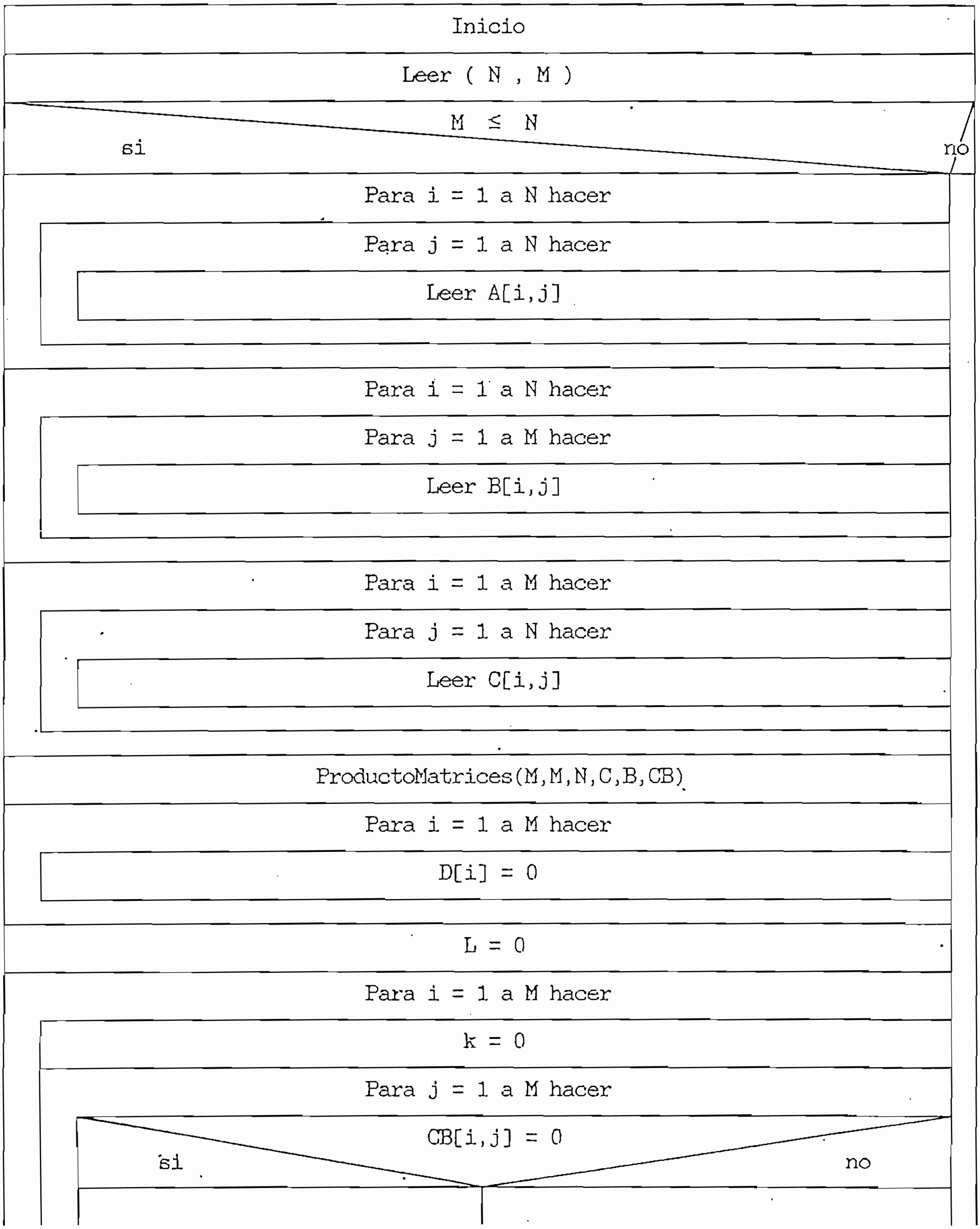
4.- Si m > n.

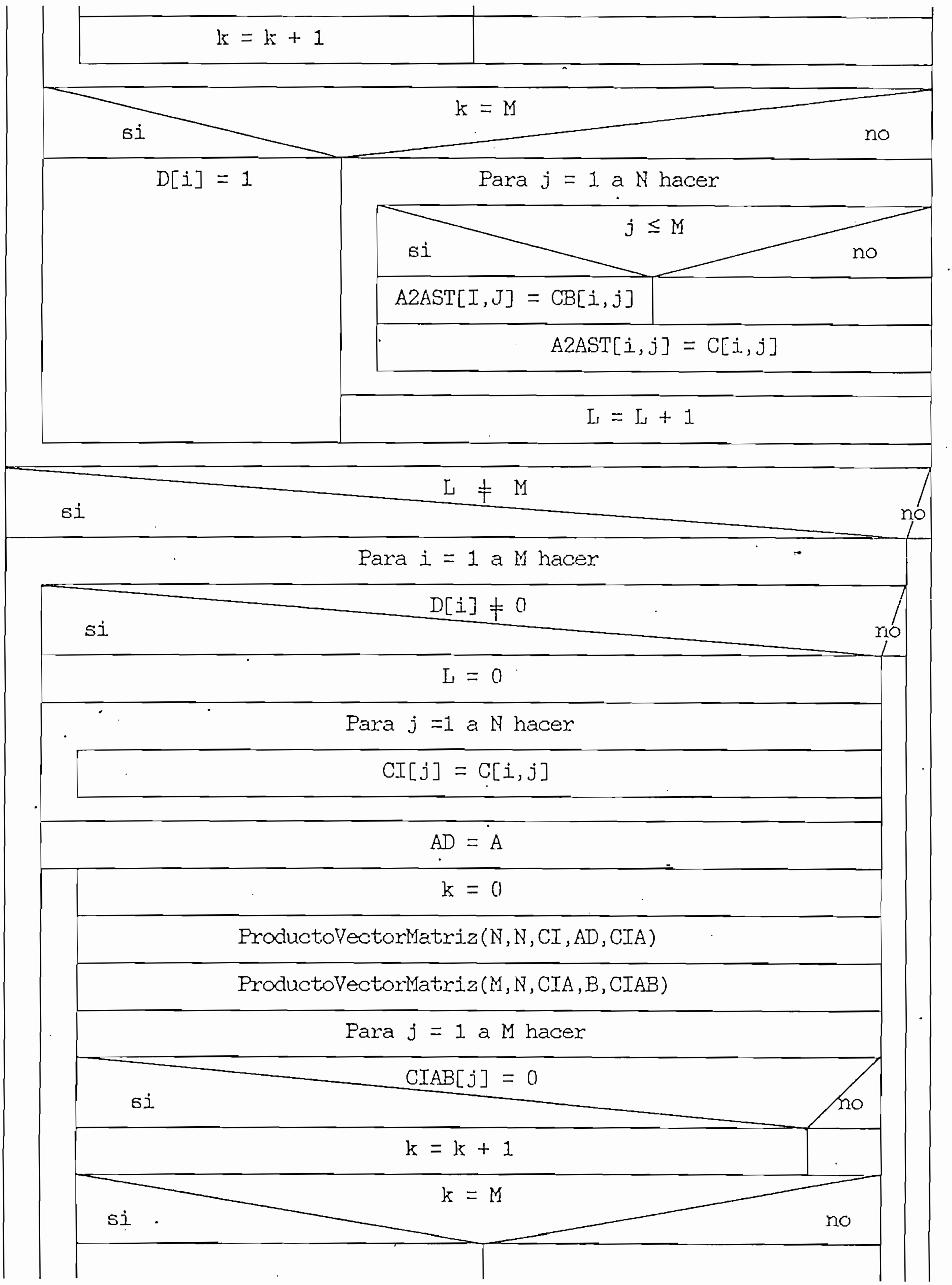
Entonces hacer:

- Imprimir('Para desacoplar un sistema se debe tener la condición $m \leq n$ ').

5.- Fin.

4.4.2.- Diagrama N - S.




k = k + 1
k = M
si
no
D[i] = 1
Para j = 1 a N hacer
j ≤ M
si
no
A2AST[I,J] = CB[i,j]
A2AST[i,j] = C[i,j]
L = L + 1
L ≠ M
si
no
Para i = 1 a M hacer
D[i] ≠ 0
si
no
L = 0
Para j =1 a N hacer
CI[j] = C[i,j]
AD = A
k = 0
ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA)
ProductoVectorMatriz(M,N,CIA,B,CIAB)
Para j = 1 a M hacer
CIAB[j] = 0
si
no
k = k + 1
k = M
si
no

```
D[i] = D[i] + 1
ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)
AD = AN
D[i] = N
  si
    para j = 1 a M hacer
      BAST[i,j] = 0
    L = N - 1
  no
Para j = 1 a M hacer
  j ≤ M
    si
      BAST[i,j] = CIAB[j]
    no
  A2AST[i,j] = CIA[j]
L = N - 1
Repetir hasta que  L = N - 1
L = M
  si
    BAST = CB
    DeterminanteEInversa(M,BAST,BASTINV,DET)
    DET ≠ 0
      si
        SUMA = M
        Para i = 1 a M haga
          SUMA = SUMA + D[i]
        SUMA ≤ N
          si
            ProductoMatrices(M,N,M,A2AST,A,A1AST)
            Para k = 1 a M haga
              Para i = 1 a M haga
                Para j = 1 a N haga
                  FGEN[i,j,k] = BASTINV[i,k] * A2AST[k,j]
          no
      no
  no
```

```
ProductoMatrices(M,N,M,BASTINV,A1AST,CB)
Para i = 1 a M haga
    Para j = 1 a N haga
        FGEN[i,j,M+1] = -CB[i,j]
MDI = D[1]
Para i = 2 a M haga
    D[i]  >  MDI
    si                                   no
        MDI = D[i]
MatrizFGeneral(M,FGEN,Ff,f1)
SUMA  >  f1
si                                       no
    Imprimir('El conjunto de matrices F para desacoplar el sistema se
        determina por el Procedimiento de Síntesis')
    Para i = 1 a M haga
        Para j = 1 a N haga
            FGEN[i,j,M*(MDI+1)+1] = -CB[i,j]
    AD = A
    MCA = C
    K = 0
    Para k1 = 1 a MDI+1 haga
        Para k2 = 1 a M haga
            k = k + 1
            Para i = 1 a M haga
                Para j = 1 a N haga
```

FGEN[i,j,k] = BASTINV[i,k2] * MCA[k2,j]

ProductoMatrices(M,N,N,C,AD,MCA)

ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)

AD = AN

MatrizFGeneral(M*(MDI+1)+1,FGEN,Ff,f2)

R1 = 0

(f1 > SUMA) o (f1 > N)

si | no

SUMA ≠ N

si | no

Imprimir('Puede ser posible especificar más de los SUMA Polos de Lazo Cerrado')

Imprimir('Quiere todos los polos de lazo cerrado (S/N) ')

Leer('Z')

(Z = 'S') o (Z = 's')

si | no

R1 = 1 | R1 = 0

SUMA = N

si | no

Imprimir('Cualquie n de los polos de lazo cerrado puden ser posicionados arbitrariamente mientras simultáneamente se desacopla el sistema')

R1 = 0

SUMA = f1

si | no

Imprimir('Conjunto de matrices F que desacopla el sistema')

Para i = 1 a M haga

Para j = 1 a N haga

abs(Ff[i,j]) > 1000

si

Ff[i,j] > 0

si

Imprimir(´f´,Ff[i,j]-1000)

no

Imprimir(´f´,Ff[i,j]+1000)

no

Ff[i,j]

Imprimir(´Quiere dar directamente valores a los parámetros libres f (S/N)´)

Leer(´Z´)

(Z = ´S´) o (Z = ´s´)

si

R1 = 1

no

R1 = 0

Para i = 1 a M haga

Para j = 1 a N haga

F[i,j] = 1000

R1 = 1

si

Imprimir(´Conjunto de matrices F que desacopla el sistema´)

Para i = 1 a M haga

Para j = 1 a N haga

abs(Ff[i,j]) > 1000

si

Ff[i,j] > 0

si

Imprimir(´f´,Ff[i,j]-1000)

no

Imprimir(´f´,Ff[i,j]+1000)

no

Ff[i,j]

no

Imprimir(´Introduzca los elementos de la matriz F´)

Para i = 1 a M haga

Para j = 1 a N haga

abs(Ff[i,j]) < 1000

si | no

F[i,j]=Ff[i,j]

abs(F[i,j]) = 1000

si | no

(i = M) y (j = N)

si | no

Leer(F[i,j])

Leer(F[i,j])

j = N

si | no

k3 = i + 1
k4 = 1

k3 = i
k4 = j + 1

Para k1 = k3 a M haga

Para k2 = k4 a N haga

(Ff[i,j]-Ff[k1,k2])=0

si | no

F[k1,k2] = F[i,j]

(Ff[i,j]+Ff[k1,k2])=0

si | no

F[k1,k2] = -F[i,j]

k4 = k + 1

R1 ≠ 1

si | no

Imprimir('Introduzca los valores de las matrices diagonales Mk')

Para i = 0 a MDI haga

Para j = 1 a M haga

Leer(MI[i,j])

```
Para i = 1 a M hacer
    Para j = 1 a N hacer
        MCAT[i,j] = MI[0,i] * C[i,j] - A1AST[i,j]
AD = A
Para k = 1 a MDI hacer
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a N hacer
            MC[i,j] = MI[k,i] * C[i,j]
    ProductoMatrices(M,N,N,MC,AD,MCA)
    ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)
    AD = AN
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a N hacer
            MCAT[i,j] = MCAT[i,j] + MCA[i,j]
ProductoMatrices(M,N,M,BASTINV,MCAT,F)
ProductoMatrices(N,N,M,B,F,MC)
Para i = 1 a N hacer
    Para j = 1 a N hacer
        MC[i,j] = A[i,j] + MC[i,j]
tt = 0
Para ii = 1 a M hacer
    Para k = 1 a N hacer
```

```
Para j = 1 a M hacer
    Q[k,j] = 0
Para j = 1 a N hacer
    CI[j] = C[ii,j]
i1 = N - D[ii]
i2 = 1
D[ii] = 0
si                                                  no
    ProductoVectorMatriz(M,N,CI,B,CIAB)
    Para j = 1 a M hacer
        Q[i1,j] = CIAB[j]
    i1 = i1 - 1
AD = MC
D[ii] ≥ 2
si                                                  no
    ProductoMatrices(N,N,N,MC,AD,AN)
    AD = AN
    I2 = I2 + 1
    repita hasta i2 = D[ii]
ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA)
ProductoVectorMatriz(M,N,CIA,B,CIAB)
Para j = 1 a M hacer
    Q[i1,j] = CIAB[j]
ProductoMatrices(N,N,N,MC,AD,AN)
AD =AN
```

i1 = i1 - 1

i2 = i2 + 1

repita hasta i2 = N

MCA = Q

M1 = M

DeterminanteEInversa(M1,MCA,MCA,Deter)

M1 = M1 - 1

M1 = 1

si | no

abs(Deter) ≤ 0.0001

si | no

Deter = 1000 | tt = 1

repita hasta abs(Deter) > 0.0001

tt = 0

si | no

G = BASTINV

Imprimir('Quiere imprimir el Conjunto de Matrices F que desacopla el sistema (S/N)')

Leer('Z')

(Z = 'S') o (Z = 's')

si | no

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a N hacer

abs(Ff[i,j]) > 1000

si | no

Ff[i,j] > 0

si | no

Imprimir('f',Ff[i,j]-1000) | Imprimir('f',Ff[i,j]+1000) | Ff[i,j]

InversaMatrizDinamica(N,A,SIA,D1)

RaicesPolinomiales(N,D1,Xr,Xi,Z1,Z2)

Imprimir(´Polos de Lazo Abierto´)

N ≠ Z2 - 1

si

no

Para i = 1 a Z1 hacer

Imprimir(Xr[i])

N ≠ Z1

si

no

Para i = 1 a Z2 - 1 hacer

Para j = 1 a 2 hacer

Imprimir(Xi[i,j])

ProductoMatrices(N,N,M,B,F,ABF)

Para i = 1 a N hacer

Para j = 1 a N hacer

ABF[i,j] = A[i,j] ABF[i,j)

InversaMatrizDinamica(N,ABF,SIA,D2)

RaicesPolinomiales(N,D2,Yr,Yi,Z3,Z4)

Imprimir(´Polos de Lazo Cerrado´)

N ≠ Z4 - 1

si

no

Para i = 1 a Z3 hacer

Imprimir(Yr[i])

N ≠ Z3

si

no

Para i = 1 a Z4 - 1 hacer

Para j = 1 a 2 hacer

Imprimir(Yi[i,j])

Imprimir('Quiere cambiar estos polos (S/N)')

Leer('Z')

(Z = 'S') o (Z = 's')

si | no

t = 0 | t = 1

tt $\neq$ 0

si | no

Imprimir('No hay como desacoplar el sistema, porque no se cumple la condición rango[Q^i (F)] = 1 ')

Imprimir('Pero puede haber un subconjunto de matrices F que desacoplan el sistema')

Imprimir('Intente una vez más . . . . . !

Repitir hasta que t = 1

tt = 0

si | no

Imprimir('Matriz F que desacopla el sistema')

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a N hacer

Imprimir(F[i,j])

Imprimir('Matriz G que desacopla el sistema')

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a M hacer

Imprimir(G[i,j])

```
Para k = 0 a N - 1 hacer
    Para i = 1 a N hacer
        Para j = 1 a N hacer
            CB[i,j] = SIA[i,j,k]
    ProductoMatrices(M,N,N,C,CB,MC)
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a N hacer
            Gc[i,j,k] = MC[i,j])
ProductoMatrices(N,M,M,B,BASTINV,MCA)
Para k = 0 a N - 1 hacer
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a N hacer
            CB[i,j] = Gc[i,j,k]
    ProductoMatrices(M,M,N,CB,MCA,MC)
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a M hacer
            Gc[i,j,k] = MC[i,j])
Imprimir(´Quiere ver la Matriz Función de Transferencia (S/N)´)
Leer(´Z´)
( Z = ´S´ ) o ( Z = ´s´)
si                                                        no
Para k = 0 a N - 1 hcer
```

```
Imprimir('MATRICES Gc EN POTENCIAS DE s')
Para i = 1 a M hacer
    Para j = 1 a M hacer
        Imprimir(Gc[i,j,k])
Imprimir('POLINOMIO CARACTERISTICO')
Para k = 0 a N hacer
    Imprimir(D2[k])
Imprimir('Quiere imprimir los resultados en papel (S/N)')
Leer('Z')
( Z = 'S' ) o ( Z = 's')
si                                                                  no
IMPRIMIR EN PAPEL: A , B , C , Mk , Gc, y Polos de lazo cerrado
SUMA > N
si                                                                  no
Imprimir('COMO  M + d1 + d2 + ... + dm > N  , SIENDO EL NUMERO DE POLOS
         DE LAZO CERRADO A SER ASIGNADO, MAYOR AL ORDEN DEL SISTEMA,
         ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR')
DET := 0
si                                                                  no
Imprimir('B* ES NO SINGULAR, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR')
M > N
si                                                                  no
Imprimir('PARA DESACOPLAR UN SISTEMA SE DEBE TENER LA CONDICION  M ≤ N')
Fin
```

4.5.- DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA.-

4.5.1.- Algoritmo.-

1.- Entrada del orden del sistema [n].

2.- Entrada del número de "Entradas" o "Salidas" del sistema [m].

3.- Si $m \leq n$

Entonces hacer:

3.1.- Entrada de la matriz $\underline{A}$, de orden (n x n).

3.2.- Entrada de la matriz $\underline{B}$, de orden (n x m).

3.3.- Entrada de la matriz $\underline{C}$, de orden (m x n).

3.4.- Determinar $\underline{B}^*$, de acuerdo a la ecuación (3 . 140), y con las ecuaciones (3 . 24).

3.4.1.- Si $\underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} = 0$, para todo j.

, $i = 1, \ldots, m$.

, $\underline{C}_i$ = i-ésima fila de $\underline{C}$.

Entonces hacer:

- $d_i = n - 1$, $i = 1, \ldots, m$.
- $\underline{B}_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

, $\underline{B}_i^*$ = i-ésima fila de $\underline{B}^*$.

Caso contario hacer:

- $d_i = \min \{ j : \underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} \neq 0$, $j = 0, \ldots, n-1\}$

, $i = 1, \ldots, m$

- $\underline{B}_i^* = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i} \underline{B}$, $i = 1, \ldots, m$

3.5.- Calcular:

La matriz $\underline{B}^{*-1}$, y

det[$\underline{B}^*$] , subprograma: DeterminanteEInversa.

3.6.- Si det [$\underline{B}^*$] $\neq$ 0 .

Entonces hacer:

3.6.1.- Determinar si el sistema es controlable.

- $\underline{P}_k = \underline{A}^k\underline{B}$,k = 0,1, ... ,n - 1.

,$\underline{P}_k$ = k-ésima matriz de $\underline{P}$, de orden (n x m).

,$\underline{P}$ = Matriz de orden [n x (mn)].

- Determinar la matriz transpuesta de $\underline{P}$.

$\underline{PT} = \underline{P}^T$

- Calcular:

$\underline{PPT} = \underline{P}\ \underline{PT}$, <u>subprograma</u>: MatricesProducto.

- Calcular:

det [$\underline{PPT}$] , <u>subprograma</u>: DeterminanteEInversa.

3.6.2.- Si det [$\underline{PPT}$] $\neq$ 0

Entonces hacer:

3.6.2.1.- Determinar si el sistema es observable.

- $\underline{Q}_k = \underline{C}\ \underline{A}^k$,k = 0,1, ... ,n - 1.

,$\underline{Q}_k$ = k-ésima matriz de $\underline{Q}$, de orden (m x n).

,$\underline{Q}$ = Matriz de orden [(mn) x n].

- Determinar la matriz transpuesta de $\underline{Q}$.

$\underline{QT} = \underline{Q}^T$

- Calcular:

$\underline{QQT} = \underline{Q}\ \underline{QT}$, <u>subprograma</u>: MatricesProducto.

- Calcular:

det [$\underline{QQT}$] , <u>subprograma</u>: DeterminanteEInversa.

3.6.2.2.- Si det [$\underline{QQT}$] $\neq$ 0

Entonces hacer:

3.6.2.2.1.- Determinar $\underline{A}^*_j$, con la ecuación (3 . 141).

- $\underline{A}^*_{ji} = \underline{C}_i \underline{A}^{d_i+j}$, $i = 1, \ldots, m$, para cada j.

, $j = d_1+1, d_2+1, \ldots, d_m+1$.

, $\underline{A}^*_{ji}$ = i-ésima fila de $\underline{A}^*_j$.

, $\underline{A}^*_j$ = j-ésima matriz de orden (m x n).

- Calcular:

$\underline{AJAST}_k = \underline{A}^*_j \underline{B} \underline{B}^{*-1}_k$, $k = 1, \ldots, m$, para cada j.

, $j = d_1+1, d_2+1, \ldots, d_m+1$.

, $\underline{AJAST}_K$ = i-ésima columna de $\underline{AJAST}$.

3.6.2.2.2.- Repita hasta que t = 1.

- Imprimir('Introduzca los elementos de la matriz diagonal $\underline{\Delta}$').

- Leer: $\underline{\Delta} = \mathrm{diag}\,[\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ ]$

- Calcular $\underline{H}$, con la ecuación (3 . 164).

$\underline{AAST} = \underline{\Delta} - \underline{AJAST}$

$\underline{H} = \underline{B}^{*-1}\underline{AAST}$

- tt = 0

- Determinar:

$\underline{DIAG}_j = \underline{C} (\underline{A} + \underline{B}\ \underline{H}\ \underline{C})^j \underline{B}\ \underline{B}^{*-1}$, $j = 0, \ldots, n-1$

- Comprobar:

$\underline{DIAG}_j = \mathrm{diag}\,[\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\ ]$, $j = 0, \ldots, n-1$

3.6.2.2.2.1.- Si $\underline{DIAG}_j = \mathrm{diag}[\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m]$ para $j = 0, \ldots, n-1$.

Entonces hacer:

- tt = 1.
- Calcular G con la ecuación (3 . 174 a).

  $G = B^{*-1}$.
- Calcular, la Adjunta y Polinomio Característico de lazo abierto.

  $SIA = [s I - A]^{-1}$,

  D1 = det[s I - A] , con el subprograma:

  InversaMatrizDinamica.
- Calcular, los polos de lazo abierto:

  Xr = reales,

  Xi = imaginarias,

  subprograma: RaicesPolinomiales.
- Imprimir:

  Xr , Xi.
- Calcular, la Adjunta y Polinomio Característico de lazo cerrado.

  $SIA = [s I - A - B H C]^{-1}$,

  D2 = det[s I - A - B H C], con el subprograma :InversaMatrizDinamica.
- Calcular, los polos de lazo cerrado:

  Yr = reales,

  Yi = imaginarias,

  subprograma: RaicesPolinomiales.
- Imprimir:

  Yr , Yi.
- Imprimir('Quiere cambiar estos polos (S/N)').

- Leer ('Z').
- Si (Z ='S') o (Z ='s').

  Entonces hacer: t = 0.

  Caso contrario: t = 1.

Caso contrario hacer:

- t = 1.

2.6.2.2.3.- Si tt = 1

Entonces hacer:

- Imprimir('Matriz $\underline{H}$ que desacopla el sistema').
- Imprimir: H_{ij} , $i = 1, \ldots, m$.

  , $j = 1, \ldots, m$.
- Imprimir('Matriz $\underline{G}$ que desacopla el sistema').
- Imprimir: $\underline{G}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$.

  , $j = 1, \ldots, m$.
- Calcular, la Matriz Función de Transferencia de lazo cerrado con la siguiente ecuación:

  $\underline{G}c = \underline{C} [s \underline{I} - \underline{A} - \underline{B} \underline{H} \underline{C}]^{-1} \underline{B} \underline{B}^{*-1}$.
- Imprimir('Quiere ver la Matriz Función de Transferencia $\underline{G}c$ (S/N)').
- Leer ('Z').
- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer:

  - Imprimir('Matrices numeradores de $\underline{G}c$ en potencias de s').
  - Imprimir: $\underline{G}c_k$, $k = 0, \ldots, n-1$.
  - Imprimir('Polinomio característico').
  - Imprimir: D_{2k} , $k = 0, \ldots, n$.

- Imprimir('Quiere escribir los resultados en papel')
- Leer ('Z').
- Si (Z = 'S') o (Z = 's').

  Entonces hacer:

  - Imprimir: A , B , C , DELTA , H , G , Gc , y Polos de lazo cerrado').

  Caso contrario hacer:

- Imprimir('Las matrices C (A + B H C)jB B**-1 , j = 0,1, ... ,n-1 no son diagonales, entonces el sistema no se puede desacoplar').

3.6.2.3.- Si det [QQT] = 0.

Entonces hacer:

- Imprimir('El sistema no es observable, entonces el sistema no se puede desacoplar').

3.6.3.- Si det [PPT] = 0.

Entonces hacer:

- Imprimir('El sistema no es controlable, entonces el sistema no se puede desacoplar').

3.7.- Si det[B*] = 0.

Entonces hacer:

- Imprimir('B* es singular, entonces el sistema no se puede desacoplar').

4.- Si m > n.

Entonces hacer:

- Imprimir('Para desacoplar un sistema se debe tener la condición m ≤ n ').

5.- Fin.

4.5.2.- Diagrama N - S.

Inicio

Leer (N , M)

M ≤ N

si

no

Para i = 1 a N hacer

Para j = 1 a N hacer

Leer A[i,j]

Para i = 1 a N hacer

Para j = 1 a M hacer

Leer B[i,j]

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a N hacer

Leer C[i,j]

ProductoMatrices(M,M,N,C,B,CB)

Para i = 1 a M hacer

D[i] = 0

L = 0

Para i = 1 a M hacer

k = 0

Para j = 1 a M hacer

CB[i,j] = 0

si

no

k = k + 1

k = M

si | no

D[i] = 1

Para j = 1 a N hacer

j ≤ M

si | no

A2AST[I,J] = CB[i,j]

A2AST[i,j] = C[i,j]

L = L + 1

L ≠ M

si | no

Para i = 1 a M hacer

D[i] ≠ 0

si | no

L = 0

Para j =1 a N hacer

CI[j] = C[i,j]

AD = A

k = 0

ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA)

ProductoVectorMatriz(M,N,CIA,B,CIAB)

Para j = 1 a M hacer

CIAB[j] = 0

si | no

k = k + 1

k = M

si | no

D[i] = D[i] + 1

ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)

AD = AN

D[i] = N

si

no

para j = 1 a M hacer

BAST[i,j] = 0

L = N - 1

Para j = 1 a M hacer

j ≤ M

si

no

BAST[i,j] = CIAB[j]

A2AST[i,j] = CIA[j]

L = N - 1

Repitir hasta que L = N - 1

L = M

si

no

BAST = CB

DeterminanteEInversa(M,BAST,BASTINV,DET)

DET ≠ 0

si

no

Para i = 1 a N haga

Para j = 1 a M haga

P[i,j] = B[i,j]

PT[j,i] = B[i,j]

AD = A

k = M + 1

Para i1 = 1 a N - 1 haga

ProductoMatrices(N,M,N,AD,B,AB)

Para j = 1 a M haga

Para i = 1 a N haga

```
P[i,k] = AB[i,j]
PT[k,i] = AB[i,j]
k = k + 1
ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)
AD = AN
MatricesProducto(N,N,M*N,P,PT,PPT)
DeterminanteEInversa(N,PPT,PPT,Deter1)
Deter1 ≠ 0
si                                                    no
Para i = 1 a M haga
Para j = 1 a N haga
Q[i,j] = C[i,j]
QT[j,i] = C[i,j]
AD  = A
k = M + 1
Para i1 = 1 a N - 1 haga
ProductoMatrices(M,N,N,C,AD;CA)
Para i = 1 a M haga
Para j = 1 a N haga
Q[k,j] = CA[i,j]
PT[j,k] = CA[i,j]
k = k + 1
ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)
```

AD = AN

MatricesProducto(N,N,M*N,QT,Q,QQT)

DeterminanteEInversa(N,QQT,QQT,Deter2)

Deter2 ≠ 0

si

no

Para k = 1 a M hacer

Para i = 1 a M hacer

AD = A

(D[i] + D[k]) ≠ 0

si

no

j = 1

ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN)

AD = AN

j = j + 1

Repita hasta que j = (D[i] + D[k]) + 1

Para j = 1 a N hacer

CI[j] = C[i,j]

ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA)

Para j = 1 a N hacer

AAST[i,j] = CIA[j]

ProductoMatrices(M,M,N,AAST,B,ASTB)

Para i = 1 a M hacer

BJ[i] = BASTINV[i,k]

ProductoMatrizVector(M,M,ASTB,BJ,ABJ)

Para i = 1 a M hacer

```
AJAST[i,k] = ABJ[i]

Imprimir('Introduzca los valores de la matriz diagonal DELTA')
Para i = 1 a M hacer
  Para j = 1 a M hacer
    i ≠ j
    si:  AAST[i,j] = - AJAST[i,j]
    no:  Leer: DELTA[i]
         AAST[i,j] = DELTA[i] -
                   - AJAST[i,j]
ProductoMatrices(M,M,M,BASTINV,AAST,H)
tt = 0
ProductoMatrices(M,M,N,C,B,CB)
ProductoMatrices(M,M,M,CB,BASTINV,DIAG)
Para i = 1 a M hacer
  Para j = 1 a M hacer
    i ≠ j
    si:  DIAG[i,j] = 0
         si:  L = L + 1
         no
    no
k = 0
L = M*M - M
si:  ProductoMatrices(N,M,M,B,H,CB)
     ProductoMatrices(N,N,M,CB,C,AB)
     Para i = 1 a N hacer
no
```

```
Para j = 1 a N hacer
    ABHC[i,j] = A[i,j] + AB[i,j]
LL = 0
AD = ABHC
    ProductoMatrices(M,N,N,C,AD,CB)
    ProductoMatrices(M,M,N,CB,B,CA)
    ProductoMatrices(M,M,M,CA,BASTINV,DIAG)
    L = 0
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a M hacer
            i ≠ j
            si                                   no
                DIAG[i,j] = 0
                si                           no
                    L = L + 1
    L = M*M - M
    si                                   no
        k = k + 1                        LL = N - 1
        LL = LL + 1
    ProductoMatrices(N,N,N,AD,ABHC,AN)
    AD = AN
Repita hasta que LL = N - 1
k = N - 1
si                                       no
    tt = 1
    G = BASTINV
```

```
InversaMatrizDinamica(N,A,SIA,D1)
RaicesPolinomiales(N,D1,Xr,Xi,Z1,Z2)
Imprimir('Polos de Lazo Abierto')
N ≠ Z2 - 1
  si
    Para i = 1 a Z1 hacer
      Imprimir(Xr[i])
  no
N ≠ Z1
  si
    Para i = 1 a Z2 - 1 hacer
      Para j = 1 a 2 hacer
        Imprimir(Xi[i,j])
  no
InversaMatrizDinamica(N,ABHC,SIA,D2)
RaicesPolinomiales(N,D2,Yr,Yi,Z3,Z4)
Imprimir('Polos de Lazo Cerrado')
N ≠ Z4 - 1
  si
    Para i = 1 a Z3 hacer
      Imprimir(Yr[i])
  no
N ≠ Z3
  si

    Para i = 1 a Z4 - 1 hacer
      Para j = 1 a 2 hacer
        Imprimir(Yi[i,j])
  no
```

Imprimir('Quiere cambiar estos polos (S/N)')

Leer('Z')

(Z = 'S') o (Z = 's')

si | no

t = 0 | t = 1

t = 1

si | no

tt = 1

Repita hasta que t = 1

tt = 1

si | no

Imprimir('Matriz H que desacopla el sistema')

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a M hacer

Imprimir: H[i,j]

Imprimir('Matriz G que desacopla el sistema')

Para i = 1 a M hacer

Para j = 1 a M hacer

Imprimir(G[i,j])

Para k = 0 a N - 1 hacer

Para i = 1 a N hacer

Para j = 1 a N hacer

CB[i,j] = SIA[i,j,k]

ProductoMatrices(M,N,N,C,CB,PPT)

Para i = 1 a M hacer

```
            Para j = 1 a N hacer
                Gc[i,j,k] = PPT[i,j])
ProductoMatrices(N,M,M,B,BASTINV,QQT)
Para k = 0 a N - 1 hacer
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a N hacer
            CB[i,j] := Gc[i,j,k]
    ProductoMatrices(M,M,N,CB,QQT,PPT)
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a M hacer
            Gc[i,j,k] = PPT[i,j])
Imprimir('Quiere ver la Matriz Función de Transferencia (S/N)')
Leer('Z')
( Z = 'S' ) o ( Z = 's')
si                                                        no
Para k = 0 a N - 1 hacer
    Imprimir('MATRICES Gc EN POTENCIAS DE s')
    Para i = 1 a M hacer
        Para j = 1 a M hacer
            Imprimir(Gc[i,j,k])
Imprimir('POLINOMIO CARACTERISTICO')
```

Para k = 0 a N hacer

Imprimir(D2[k])

Imprimir('Quiere imprimir los resultados en papel (S/N)')

Leer('Z')

(Z = 'S') o (Z = 's')

si | no

IMPRIMIR EN PAPEL: A , B , C , M_K , Gc, y Polos de lazo cerrado

$tt \neq 1$

si | no

Imprimir('LAS MATRICES (A + B H C)j , j = 0, ... , N - 1 NO SON DIAGONALES, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR')

Deter2 = 0

si | no

Imprimir('EL SISTEMA NO ES OBSERVABLE, ENTONCES EL SISTEMA NO SE DESACOPLA ')

Deter1 = 0

si | no

Imprimir('EL SISTEMA NO ES CONTROLABLE, ENTONCES EL SISTEMA NO SE DESACOPLA ')

DET = 0

si | no

Imprimir('B* ES NO SINGULAR, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR')

M > N

si | no

Imprimir('PARA DESACOPLAR UN SISTEMA SE DEBE TENER LA CONDICION M ≤ N')

Fin

C A P I T U L O   5

1.- EJERCICIOS Y RESULTADOS.

1.- EJERCICIOS Y RESULTADOS.-

Los ejercicios presentados en esta sección son los mismos desarrollados en cada técnica de desacoplamiento, con el fin de comprobar que los programas cumplen con la teoría, y además porque dichos ejercicios se han desarrollado con el detallamiento y explicación requerida para la correcta comprensión de los mismos.

Se presentan además ejercicios de mayor magnitud a los anteriores, con el fin de probar que los programas realizados pueden ser aplicados, no sólo a sistemas simples, sino también a sistemas complejos cuyo desarrollo manual se tornaría largo y difícil, o inclusive impracticable.

5.1.- DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

EJEMPLO Nº. 1

DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA Gp

Matrices numeradores de la planta Gp en potencias de s

Grado 0

Fila 1:	1	0
Fila 2:	1	1

Grado 1

Fila 1:	1	0
Fila 2:	3	2

Grado 2

Fila 1:	0	0
Fila 2:	2	0

Mínimo Común denominador de la planta Gp

Grado 0:	1
Grado 1:	3
Grado 2:	2

MATRIZ DIAGONAL GD

Matrices numeradores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0
Fila 2:	0	1

Grado 1

Fila 1:	0	0
Fila 2:	0	0

Matrices denominadores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0
Fila 2:	0	1

Grado 1

Fila 1:	1	0
Fila 2:	0	5

COMPENSADOR SERIE Gc

Compensador PID (1,1)

Grado:-1	1.000
Grado: 0	2.000

Compensador PID (2,1)

Grado:-1	-1.000
Grado: 0	-3.000
Grado: 1	-2.000

Compensador PID (1,2)

Grado(0): 0 *No hay compensador

Compensador PID (2,2)

Grado:-1	0.200
Grado: 0	0.200

EJEMPLO Nº. 2

DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA Gp

Matrices numeradores de la planta Gp en potencias de s

Grado 0

Fila 1:	4	5	1	2
Fila 2:	7	4	8	0
Fila 3:	1	4	1	0
Fila 4:	0	1	4	1

Grado 1

Fila 1:	5	0	0	0
Fila 2:	4	1	0	0
Fila 3:	5	4	1	0
Fila 4:	0	6	7	8

Grado 2

Fila 1:	0	0	0	1
Fila 2:	4	5	1	2
Fila 3:	0	4	1	7
Fila 4:	0	1	4	7

Grado 3

Fila 1:	8	5	4	0
Fila 2:	1	4	1	5
Fila 3:	1	0	0	0
Fila 4:	4	1	5	1

Grado 4

Fila 1:	4	1	1	2
Fila 2:	4	1	5	4
Fila 3:	1	7	4	1
Fila 4:	5	1	1	2

Grado 5

Fila 1:	1	1	1	4
Fila 2:	1	4	1	4
Fila 3:	1	1	4	1
Fila 4:	4	1	1	1

Mínimo Común denominador de la planta Gp

Grado 0:	4
Grado 1:	1
Grado 2:	0
Grado 3:	4
Grado 4:	1
Grado 5:	8
Grado 6:	7

MATRIZ DIAGONAL GD

Matrices numeradores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0	0	0
Fila 2:	0	0	0	0
Fila 3:	0	0	0	0
Fila 4:	0	0	0	0

Grado 1

Fila 1:	1	0	0	0
Fila 2:	0	5	0	0
Fila 3:	0	0	1	0
Fila 4:	0	0	0	0

Grado 2

Fila 1:	7	0	0	0
Fila 2:	0	7	0	0
Fila 3:	0	0	4	0
Fila 4:	0	0	0	1

Grado 3

Fila 1:	6	0	0	0
Fila 2:	0	3	0	0
Fila 3:	0	0	2	0
Fila 4:	0	0	0	0

Matrices denominadores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0	0	0
Fila 2:	0	4	0	0
Fila 3:	0	0	1	0
Fila 4:	0	0	0	4

Grado 1

Fila 1:	0	0	0	0
Fila 2:	0	1	0	0
Fila 3:	0	0	4	0
Fila 4:	0	0	0	1

Grado 2

Fila 1:	5	0	0	0
Fila 2:	0	6	0	0
Fila 3:	0	0	9	0
Fila 4:	0	0	0	8

Grado 3

Fila 1:	0	0	0	0
Fila 2:	0	0	0	0
Fila 3:	0	0	0	0
Fila 4:	0	0	0	1

COMPENSADOR SERIE Gc

Compensador PID (1,1)

Grado:-1	2.405
Grado: 0	1.221

Compensador PID (2,1)

Grado:-1	-0.682
Grado: 0	-2.548
Grado: 1	-0.978

Compensador PID (3,1)

Grado:-1	-1.026
Grado: 0	-1.464

Compensador PID (4,1)

Grado:-1	3.042
Grado: 0	3.118
Grado: 1	0.978

Compensador PID (1,2)

Grado:-1	-0.607
Grado: 0	-0.076
Grado: 1	-0.585

Compensador PID (2,2)

Grado:-1	-0.390
Grado: 0	-0.228
Grado: 1	1.006

Compensador PID (3,2)

Grado:-1	-0.677
Grado: 0	0.027
Grado: 1	-0.585

Compensador PID (4,2)

Grado:-1	-0.749
Grado: 0	-0.271
Grado: 1	-0.585

Compensador PID (1,3)

Grado:-1	1.471
Grado: 0	-1.414
Grado: 1	0.389

Compensador PID (2,3)

Grado:-1	-0.487
Grado: 0	-0.164

Compensador PID (3,3)

Grado:-1	0.818
Grado: 0	-1.618
Grado: 1	0.553

Compensador PID (4,3)

Grado:-1	-0.037
Grado: 0	-1.284
Grado: 1	0.389

Compensador PID (1,4)

Grado:-1	5.062
Grado: 0	1.944

Compensador PID (2,4)

Grado:-1	0.778

Compensador PID (3,4)

Grado:-1	-1.726
Grado: 0	-0.389

Compensador PID (4,4)

Grado:-1	1.065
Grado: 0	-0.389

EJEMPLO Nº. 3

DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA Gp

Matrices numeradores de la planta Gp en potencias de s

Grado 0

Fila 1:	1	4	0	1	4
Fila 2:	5	7	8	4	5
Fila 3:	1	2	4	7	4
Fila 4:	1	0	2	4	5
Fila 5:	7	8	4	1	2

Grado 1

Fila 1:	4	7	8	5	1
Fila 2:	2	4	7	8	4
Fila 3:	1	5	2	0	1
Fila 4:	4	7	8	4	1
Fila 5:	0	0	1	4	4

Grado 2

Fila 1:	7	8	4	5	1
Fila 2:	2	4	7	4	0
Fila 3:	0	1	4	1	2
Fila 4:	4	5	7	4	8
Fila 5:	4	5	1	2	1

Grado 3

Fila 1:	4	5	4	1	4
Fila 2:	1	4	1	5	2
Fila 3:	1	4	0	1	4
Fila 4:	1	0	1	4	1
Fila 5:	5	1	2	1	0

Grado 4

Fila 1:	1	4	1	4	5
Fila 2:	4	1	4	1	0
Fila 3:	0	0	1	4	1
Fila 4:	5	1	4	1	1
Fila 5:	1	1	0	0	1

Mínimo Común denominador de la planta Gp

Grado 0:	4
Grado 1:	1
Grado 2:	5
Grado 3:	2
Grado 4:	1
Grado 5:	4
Grado 6:	10

MATRIZ DIAGONAL GD

Matrices numeradores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0	0	0	0
Fila 2:	0	0	0	0	0
Fila 3:	0	0	0	0	0
Fila 4:	0	0	0	1	0
Fila 5:	0	0	0	0	4

Grado 1

Fila 1:	4	0	0	0	0
Fila 2:	0	1	0	0	0
Fila 3:	0	0	4	0	0
Fila 4:	0	0	0	8	0
Fila 5:	0	0	0	0	7

Grado 2

Fila 1:	0	0	0	0	0
Fila 2:	0	1	0	0	0
Fila 3:	0	0	4	0	0
Fila 4:	0	0	0	1	0
Fila 5:	0	0	0	0	5

Matrices denominadores de GD

Grado 0

Fila 1:	1	0	0	0	0
Fila 2:	0	4	0	0	0
Fila 3:	0	0	1	0	0
Fila 4:	0	0	0	5	0
Fila 5:	0	0	0	0	2

Grado 1

Fila 1:	4	0	0	0	0
Fila 2:	0	1	0	0	0
Fila 3:	0	0	4	0	0
Fila 4:	0	0	0	1	0
Fila 5:	0	0	0	0	0

Grado 2

Fila 1:	4	0	0	0	0
Fila 2:	0	1	0	0	0
Fila 3:	0	0	0	0	0
Fila 4:	0	0	0	1	0
Fila 5:	0	0	0	0	1

COMPENSADOR SERIE Gc

Compensador PID (1,1)

Grado:-1	1.510
Grado: 0	-0.214
Grado: 1	-1.210

Compensador PID (2,1)

Grado:-1	2.249
Grado: 0	0.840

Compensador PID (3,1)

Grado:-1	9.959
Grado: 0	5.914
Grado: 1	3.070

Compensador PID (4,1)

Grado:-1	-1.570
Grado: 0	-0.614
Grado: 1	-1.070

Compensador PID (5,1)

Grado:-1	0.699
Grado: 0	0.354
Grado: 1	1.210

Compensador PID (1,2)

Grado:-1	-52.296
Grado: 0	-22.226
Grado: 1	-7.170
Grado: 2	-5.648
Grado: 3	-2.105

Compensador PID (2,2)

Grado:-1	7.267
Grado: 0	2.509
Grado: 1	1.824
Grado: 2	1.365
Grado: 3	0.634
Grado: 4	-0.685

Compensador PID (3,2)

Grado:-1	72.441
Grado: 0	32.300
Grado: 1	13.686
Grado: 2	6.170
Grado: 3	2.413
Grado: 4	0.895

Compensador PID (4,2)

Grado:-1	123.182
Grado: 0	53.549
Grado: 1	24.204
Grado: 2	8.792
Grado: 3	5.504
Grado: 4	2.790

Compensador PID (5,2)

Grado:-1	109.508
Grado: 0	49.847
Grado: 1	21.051
Grado: 2	9.322
Grado: 3	3.947
Grado: 4	0.685

Compensador PID (1,3)

Grado:-1	-3.317
Grado: 0	-2.992
Grado: 1	-1.109
Grado: 2	-1.210

Compensador PID (2,3)

Grado:-1	-8.396
Grado: 0	-2.686
Grado: 1	-1.530

Compensador PID (3,3)

Grado:-1	10.509
Grado: 0	2.406
Grado: 1	1.835
Grado: 2	-0.510

Compensador PID (4,3)

Grado:-1	-9.763
Grado: 0	-3.255
Grado: 1	-1.094
Grado: 2	0.510

Compensador PID (5,3)

Grado:-1	7.916
Grado: 0	4.087
Grado: 1	2.829
Grado: 2	1.210

Compensador PID (1,4)

Grado:-1	-2042.827
Grado: 0	273.928
Grado: 1	-33.704
Grado: 2	4.351

Compensador PID (2,4)

Grado:-1	-9078.786
Grado: 0	1215.321
Grado: 1	-164.910
Grado: 2	20.652
Grado: 3	-4.351

Compensador PID (3,4)

Grado:-1	-35617.093
Grado: 0	4757.149
Grado: 1	-635.769
Grado: 2	80.916
Grado: 3	-12.035

Compensador PID (4,4)

Grado:-1	35576.991
Grado: 0	-4750.687
Grado: 1	633.102
Grado: 2	-80.916
Grado: 3	12.035

Compensador PID (5,4)

Grado:-1	22814.829
Grado: 0	-3038.254
Grado: 1	400.900
Grado: 2	-49.072
Grado: 3	4.351

Compensador PID (1,5)

Grado:-1	-3.410
Grado: 0	-1.432
Grado: 1	-1.908
Grado: 2	0.320

Compensador PID (2,5)

Grado:-1	-11.567
Grado: 0	-3.794
Grado: 1	-0.663
Grado: 2	-2.945

Compensador PID (3,5)

Grado:-1	-19.275
Grado: 0	-9.783
Grado: 1	-5.411
Grado: 2	-2.551

Compensador PID (4,5)

Grado:-1	4.159
Grado: 0	1.252
Grado: 1	0.693
Grado: 2	-0.875

Compensador PID (5,5)

Grado:-1	7.546
Grado: 0	3.323
Grado: 1	1.674
Grado: 2	-0.320

5.2.- DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

EJEMPLO Nº. 1

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	0.000	1.000	1.000
Fila 2:	-1.000	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	3.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	1.000	1.000
Fila 3:	1.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	0.000	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000	0.000

MATRICES DIAGONALES Mk

Matriz M0

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Matriz M1

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	-2.000

MATRIZ F

Fila 1:	0.000	0.000	-7.000
Fila 2:	1.000	-3.000	9.000

MATRIZ G

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	-2.000	1.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 1

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 0

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	4.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	6.000
Grado1:	8.000
Grado0:	0.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
0.000	
-2.000	
-4.000	

EJEMPLO Nº. 2

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	1.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	2.000	0.000
Fila 3:	0.000	1.000	3.000

MATRIZ B

Fila 1:	1.000	1.000
Fila 2:	-1.000	1.000
Fila 3:	0.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	1.000

MATRIZ F

Fila 1:	-1.500	2.500	4.500
Fila 2:	-1.500	-2.500	-4.500

MATRIZ G

Fila 1:	0.500	-0.500
Fila 2:	0.500	0.500

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 1

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 0

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	2.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	2.000
Grado1:	0.000
Grado0:	0.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
0.000	
0.000	
-2.000	

EJEMPLO Nº. 3

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
Fila 4:	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
Fila 5:	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
Fila 6:	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000
Fila 4:	0.000	0.000
Fila 5:	0.000	0.000
Fila 6:	1.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000

MATRICES DIAGONALES Mk

Matriz MO

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	-1.000

Matriz M1

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	-1.000

Matriz M2

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	-1.000

MATRIZ F

Fila 1:	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000
Fila 2:	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

MATRIZ G

Fila 1:	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 5

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 4

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 3

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 2

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 1

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 0

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Polinomio característico

Grado6:	1.000
Grado5:	2.000
Grado4:	2.000
Grado3:	2.000
Grado2:	1.000
Grado1:	0.000
Grado0:	0.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
0.000	
0.000	
-1.000	0.000
-1.000	-0.000
0.000	1.000
0.000	-1.000

EJEMPLO Nº. 4.1

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	0.000	1.000	0.000
Fila 2:	2.000	3.000	0.000
Fila 3:	1.000	1.000	1.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	1.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	1.000

MATRICES DIAGONALES Mk

Matriz MO

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	-2.000

MATRIZ F

Fila 1:	-3.000	-5.000	0.000
Fila 2:	-1.000	-1.000	-3.000

MATRIZ G

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 1

Fila 1:	3.000	0.000
Fila 2:	0.000	2.000

Grado 0

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	4.000
Grado1:	5.000
Grado0:	2.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
-0.998	
-1.002	
-2.000	

EJEMPLO Nº. 4.2

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	1.000	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	1.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000
Fila 3:	1.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	1.000	-1.000
Fila 2:	0.000	1.000	0.000

MATRICES DIAGONALES Mk

Matriz MO

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	-2.000

MATRIZ F

Fila 1:	0.000	-3.000	0.000
Fila 2:	-2.000	-3.000	2.000

MATRIZ G

Fila 1:	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 1

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 0

Fila 1:	-2.000	0.000
Fila 2:	0.000	-1.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	2.000
Grado1:	-1.000
Grado0:	-2.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
1.000	
-1.000	
-2.000	

EJEMPLO Nº. 5

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

MATRIZ A

Fila 1:	1.000	0.000	0.000	2.000	0.000	0.000
Fila 2:	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	0.000	5.000	0.000	0.000
Fila 4:	0.000	4.000	0.000	0.000	0.000	1.000
Fila 5:	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
Fila 6:	1.000	0.000	2.000	0.000	0.000	5.000

MATRIZ B

Fila 1:	2.000	0.000	0.000	1.000	0.000
Fila 2:	1.000	0.000	1.000	0.000	2.000
Fila 3:	0.000	1.000	0.000	5.000	0.000
Fila 4:	4.000	0.000	0.000	1.000	0.000
Fila 5:	2.000	0.000	6.000	0.000	1.000
Fila 6:	1.000	2.000	0.000	0.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	4.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
Fila 2:	2.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
Fila 3:	0.000	0.000	2.000	0.000	5.000	0.000
Fila 4:	0.000	2.000	0.000	1.000	0.000	1.000
Fila 5:	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

MATRICES DIAGONALES Mk

Matriz MO

Fila 1:	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	-2.000	0.000	0.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	-3.000	0.000	0.000
Fila 4:	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
Fila 5:	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.000

MATRIZ F

Fila 1:	-0.913	-0.174	0.174	-0.435	0.011	-0.348
Fila 2:	0.870	-1.739	-1.261	0.652	-1.141	-3.478
Fila 3:	0.249	0.138	-0.229	0.164	-0.889	0.049
Fila 4:	-0.174	0.348	-0.348	-1.130	0.728	0.696
Fila 5:	0.332	-0.482	0.028	-0.115	0.314	0.399

MATRIZ G

Fila 1:	0.076	0.043	-0.043	0.000	0.141
Fila 2:	-0.489	0.435	0.065	0.000	0.163
Fila 3:	-0.043	0.034	0.012	-0.045	0.166
Fila 4:	0.098	-0.087	0.087	-0.000	-0.533
Fila 5:	0.109	-0.289	0.016	0.273	-0.279

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 5

Fila 1:	1.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
Fila 2:	0.000	1.000	0.000	-0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	1.000	-0.000	-0.000
Fila 4:	-0.000	-0.000	0.000	1.000	-0.000
Fila 5:	-0.000	-0.000	0.000	0.000	1.000

Grado 4

Fila 1:	13.174	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
Fila 2:	-0.000	12.174	0.000	0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	11.174	-0.000	-0.000
Fila 4:	0.000	-0.000	0.000	13.174	-0.000
Fila 5:	0.000	-0.000	-0.000	0.000	10.174

Grado 3

Fila 1:	66.739	-0.000	0.000	0.000	-0.000
Fila 2:	-0.000	55.565	0.000	-0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	46.391	-0.000	-0.000
Fila 4:	0.000	-0.000	0.000	66.739	-0.000
Fila 5:	0.000	-0.000	-0.000	0.000	39.217

Grado 2

Fila 1:	161.087	0.000	0.000	0.000	-0.000
Fila 2:	-0.000	116.696	0.000	-0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	88.652	-0.000	-0.000
Fila 4:	-0.000	0.000	0.000	161.087	-0.000
Fila 5:	0.000	-0.000	-0.000	0.000	70.957

Grado 1

Fila 1:	182.696	0.000	0.000	0.000	-0.000
Fila 2:	-0.000	110.391	0.000	0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	77.826	-0.000	-0.000
Fila 4:	-0.000	0.000	0.000	182.696	-0.000
Fila 5:	0.000	-0.000	-0.000	0.000	59.957

Grado 0

Fila 1:	76.174	0.000	0.000	0.000	-0.000
Fila 2:	-0.000	38.087	0.000	-0.000	-0.000
Fila 3:	0.000	-0.000	25.391	-0.000	0.000
Fila 4:	-0.000	0.000	0.000	76.174	0.000
Fila 5:	0.000	-0.000	-0.000	0.000	19.043

Polinomio característico

Grado6:	1.000
Grado5:	14.174
Grado4:	79.913
Grado3:	227.826
Grado2:	343.783
Grado1:	258.870
Grado0:	76.174

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
-0.997	
-4.000	
-1.003	
-3.174	
-2.000	
-3.000	

5.3.- DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA

EJEMPLO Nº. 1

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA

MATRIZ A

Fila 1:	1.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	2.000	0.000
Fila 3:	0.000	1.000	3.000

MATRIZ B

Fila 1:	1.000	1.000
Fila 2:	-1.000	1.000
Fila 3:	0.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	0.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	1.000

MATRIZ DIAGONAL DELTA

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	-3.000

MATRIZ H

Fila 1:	-1.000	11.000
Fila 2:	-1.000	-11.000

MATRIZ G

Fila 1:	0.500	-0.500
Fila 2:	0.500	0.500

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 1

Fila 1:	-5.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 0

Fila 1:	28.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	-4.000
Grado1:	23.000
Grado0:	28.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
-1.000	
2.500	4.664
2.500	-4.664

EJEMPLO Nº. 2

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA

MATRIZ A

Fila 1:	0.000	1.000	1.000
Fila 2:	-1.000	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	0.000	3.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	1.000	1.000
Fila 3:	1.000	0.000

MATRIZ C

Fila 1:	0.000	0.000	1.000
Fila 2:	1.000	0.000	0.000

MATRIZ DIAGONAL DELTA

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	-2.000

MATRIZ H

Fila 1:	-4.000	0.000
Fila 2:	6.000	-2.000

MATRIZ G

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	-2.000	1.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000

Grado 1

Fila 1:	-1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 0

Fila 1:	3.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	0.000
Grado1:	2.000
Grado0:	3.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
-1.000	
0.500	1.658
0.500	-1.658

EJEMPLO Nº. 3

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA

MATRIZ A

Fila 1:	0.000	1.000	0.000
Fila 2:	2.000	3.000	0.000
Fila 3:	1.000	1.000	1.000

MATRIZ B

Fila 1:	0.000	0.000
Fila 2:	1.000	0.000
Fila 3:	0.000	1.000

MATRIZ C

Fila 1:	1.000	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	0.000	1.000

MATRIZ DIAGONAL DELTA

Fila 1:	-2.000	0.000
Fila 2:	0.000	-1.000

MATRIZ H

Fila 1:	-6.000	0.000
Fila 2:	-1.000	-2.000

MATRIZ G

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO CERRADO

Matrices numeradores de Gc en potencias de s

Grado 2

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	1.000

Grado 1

Fila 1:	2.000	0.000
Fila 2:	0.000	3.000

Grado 0

Fila 1:	1.000	0.000
Fila 2:	0.000	4.000

Polinomio característico

Grado3:	1.000
Grado2:	4.000
Grado1:	7.000
Grado0:	4.000

POLOS DE LAZO CERRADO

Partes de los polos:

Reales	Imaginarias
-1.000	
-1.500	1.323
-1.500	-1.323

C A P I T U L O 6

1.- CONCLUSIONES.

1.- CONCLUSIONES.-

En este trabajo se realiza el estudio de las tres técnicas para desacoplar un sistema multivariable: por matriz función de transferencia, por realimentación de estado, y por realimentación de salida; los mismos que consisten en determinar un compensador de acuerdo a cada técnica, de tal forma que el sistema acoplado multivariable pueda convertirse en un desacoplado, permitiendo que cada entrada controle solamente una salida y que cada salida pueda ser controlada por una sola entrada. Se hace también la consideración de que el número de entradas m que es igual al número de salidas debe ser menor o igual al orden del sistema n ; es decir, $m \leq n$.

En la técnica por matriz función de transferencia, el algoritmo que se utiliza es de muy fácil resolución matemática, pero la aplicación ya sea manual o computarizada, es bastante complicada. Esto debido a que se debe determinar la inversión de la matriz de la planta $\underline{Gp}$, cuyos elementos son fracciones de polinomios, y no existe métodos adecuados para realizar dicha inversión. Por ello se hizo un estudio para resolver este problema, el mismo que tiene la deficiencia de obtener la matriz inversa $\underline{Gp}^{-1}$ con los elementos de grados muy altos, por tanto, el resultado para poder darle significado físico, se le aproxima a un compensador PID, siendo por consiguiente un método aproximado, que no siempre serviría para diseño de sistemas de control.

El desacoplamiento por realimentación de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo se ha resuelto, mediante la determinación de las condiciones necesarias y suficientes para su desacoplamiento en términos de la no singularidad de la matriz B*. Se ha establecido la clase Φ de todas las matrices de realimentación que desacoplan el sistema y además se desarrolló una técnica de síntesis para la ubicación de los polos de lazo cerrado deseados, mientras se desacopla el sistema. Obteniéndose el desacoplamiento de un sistema, se puede realizar el control de sistemas multivariables, específicamente en la estabilización.

Por la gran cantidad de ejercicios realizados, se puede establecer, para el desacoplamiento por realimentación de estado, existen sistemas que pueden ser desacoplados para un subconjunto de matrices E, a pesar que la matriz función de transferencia de lazo cerrado en función de los parámetros f no sea diagonal. Entonces; se realiza pruebas de tanteo introduciendo nuevos valores de f o de las matrices diagonales Mk, para tratar de eliminar los elementos diferentes de cero de la matriz función de transferencia, que no están en la diagonal principal (ver ejemplo 3.2.4).

Para la realimentación de salida se presentan las condiciones necesarias y suficientes, las cuales producen el desacoplamiento de sistemas lineales multivariables. Aun cuando estas condiciones son satisfechas, la respuesta del sistema desacoplado no puede ser aceptable. Cuando esto ocurre es posible añadir dinámica al sistema desacoplado, haciendo un estudio de cada subsistema de una entrada - una salida para obtener la respuesta deseada. Por lo expuesto, se requiere mayor investigación para determinar cuando el desacoplamiento y estabilidad pueden ser obtenidos usando realimentación de salida; puesto que las condiciones de desacoplamiento ya están establecidas, falta de determinar las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas controlables y observables de una entrada - una salida usando realimentación de salida.

Para diseño de sistemas, el desacoplamiento por realimentación de estado es más aconsejable que el desacoplamiento por realimentación de salida, ya que por medio del primero se puede conseguir simultáneamente el desacoplamiento y estabilidad del sistema, mientras que en la segunda técnica para desacoplar el sistema se necesita prácticamente de un compensador u observador para estabilizar dicho sistema.

Desacoplamiento por realimentación de estado no necesariamente implica desacoplamiento por realimentación de salida, por tal razón, se realizó un estudio separado de las dos técnicas en mención. Sin embargo, si un sistema puede ser desacoplado por realimentación de salida ,necesariamente se desacopla por realimentación de estado.

En definitiva, en las técnicas de desacoplamiento por realimentación de estado y realimentación de salida, luego de producirse el desacoplamiento, si el sistema no es estable para algunos pares entrada - salida, se puede añadir un compensador solamente para estabilizar esos pares inestables, ya que sólo se necesita de un estudio de control para sistemas de una entrada-una salida.

Por otro lado, debido a que la bibliografía consultada trae información incompleta, se tuvo muchos inconvenientes para establecer el análisis computacional. Además, estas fuentes contenían vacíos y errores conceptuales; vacíos que en su conjunto fueron superados en base a una investigación profunda del autor de este trabajo, y por las correcciones de nuevos documentos; hechos que determinaron llegar a establecer las correcciones necesarias.

Los programas computacionales se realizaron en el lenguaje de alto nivel PASCAL, pero para su mejor utilización se les hizo ejecutables desde el sistema operativo, a fin de que puedan ser utilizados por cualquier persona, sin que le sea necesario el conocimiento del lenguaje Pascal, ya que están en leguaje objeto y no se necesita del compilador Pascal.

El programa desacoplamiento por matriz función de transferencia tiene restricciones en el orden del sistema y número de entradas y salidas, debido a la capacidad de memoria del computador utilizado (ver límites en la tabla A.1, en el manual de uso para el desacoplamiento por matriz función de transferencia). Además, la aproximación a un compensador PID de cada elemento del compensador serie Gc no necesariamente existe, por lo cual los resultados obtenidos del desacoplamiento por esta técnica no se imprime en papel.

Por lo anterior, y debido a que los programas computacionales en las tres técnicas son extensos, dichos programas fueron desarrollados independientemente, pero al realizarlos ejecutables a través del sistema operativo, se los utiliza por medio de un menú para la selección de cualquier técnica de desacoplamiento.

Respecto a los subprogramas, estos están establecidos en muchas obras, por lo que se ha dado prioridad a cosas nuevas y por supuesto a los conceptos sobre la teoría de la tesis. Pero se ha hecho un estudio personal de todos los subprogramas; como queda dicho, la teoría se puede encontrar en las referencias indicadas.

La teoría de desacoplamiento por realimentación de variables de estado, en sistemas de control multivariables es generalizada, para incluir el caso donde un subconjunto del conjunto de salidas es el candidato para el desacoplamiento. Los sistemas en los cuales tal desacoplamiento es empleado se llamarán "parcialmente desacoplados". Esta técnica, utilizando el concepto de subespacios de controlabilidad, puede ser analizada en un posterior trabajo.

En esta sección se ha incluido solamente las conclusiones de carácter general, puesto que las particulares se han establecido en cada técnica de desacoplamiento.

A P E N D I C E * A *

MANUAL DE USO

Partiendo del hecho que el computador está prendido, se introduce en la unidad de diskette (floppy disk drive), el diskette en el que se encuentran los programas de esta tesis. A continuación teclear el nombre del archivo MENU y luego pulsar la tecla "Enter", al cargarse en memoria este, aparecerá en pantalla el siguiente menú:

DESACOPLAMIENTO DE SISTEMAS

0 = FIN

1 = MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

2 = REALIMENTACION DE ESTADO

3 = REALIMENTACION DE SALIDA

ESCOJA UNA OPCION (0,1,2,3):_

OPCION 0.-

Esta opción corresponde a la terminación de la ejecución de los programas, en pantalla aparecerá la palabra FIN y de inmediato se sale al sistema operativo.

OPCION 1.-

Esta opción corresponde a la técnica de desacoplamiento por matriz función de transferencia.

Al introducir los datos se presenta el inconveniente, que las matrices polinomiales se descomponen en una suma de matrices constantes, en potencias crecientes de s.

La matriz polinomial de la planta Gp debe estar expresada de la siguiente forma:

$$Gp = \frac{1}{DELTA} \; GpL$$

donde: GpL = Matriz polinomial del numerador de la planta Gp.

DELTA = Polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores de los elementos de la planta Gp.

Lüego que se realizan los cálculos correspondientes y se obtienen los resultados, en los cuales pueden aparecer los siguientes comentarios:

- "No hay aproximación", quiere decir que no se puede aproximar ese elemento de la matriz Gc (que es el compensador serie que se añade para producir el desacoplamiento del sistema), a un compensador PID, debido a que el grado del numerador es mucho menor al grado del denominador. Por lo tanto, este es un inconveniente para poder establecer un adecuado compensador.

La aproximación PID no se obtiene directamente por medio del programa, ya que si el grado del numerador es mayor al grado del denominador en dos o más, se obtendría elementos del compensador con grado mayor o igual a dos, entonces se presentan los polinomios completos para que el diseñador, si cree conveniente, lo deseche y establezca el compensador PID.

- "No hay compensador", este mensaje aparece en pantalla cuando los elementos de la matriz Gc son cero, entonces no existe compensación.

- "ERROR está mal dada la matriz diagonal GD", se da cuando la matriz diagonal GD es singular, es decir, siendo GD una matriz diagonal, uno de sus elementos es igual a cero.

Los elementos de la matriz diagonal GD, que es la matriz función de transferencia a la que se quiere llegar, se introducen simultáneamente el numerador y el denominador correspondiente a la diagonal principal.

Cuando el programa llega a su fin se regresa al menú.

En la tabla (A . 1) se presentan los valores límites para la entrada de datos, estos límites se crean debido a la capacidad del computador (compatible con IBM de 512 K de memoria RAM), el mismo en el que se realizó el estudio de la presente tesis.

N	M	M1
5	4	3
4	5	6
3	6	10

Tabla A . 1

donde: N = Orden de la matriz Gp, (entradas = salidas).

M = Mayor grado de los elementos de la matriz Gp, una vez encontrado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

M1 = Mayor grado de los numeradores y denominadores de los elementos de la matriz diagonal GD.

En este programa no se incluye la impresión de los resultados en papel, según lo explicado en la sección 3 . 1 . 2, pero se ha incluído adicionalmente el archivo FUN.COM, ejecutable desde el Sistema Operativo, realizado exclusivamente para este propósito.

OPCION 2.-

Esta opción corresponde a la técnica de desacoplamiento por realimentación de estado.

La introducción de datos es muy simple ya que se lo hace a través de teclado, y también debido a que los elementos de las matrices del sistema, representado en espacio de estado, son constantes.

A continuación todo el programa realiza un diálogo persona - máquina, para que el diseñador tome decisiones a sus requerimientos.

Luego se pide introducir los elementos de la diagonal principal de las matrices diagonales Mk, k = 0, 1, ... ,max di e i = 1, ... ,m; o introducir los valores de los parámetros libres

f. Siendo aconsejable que estos datos sean negativos, de acuerdo a lo explicado en la técnica, desacoplamiento por realimentación de estado, en la sección 3 . 2 . 5 ; estas matrices diagonales Mk y los parámetros libres f son los que cambian la ubicación de los polos de lazo cerrado, entonces, se puede cambiar estos parámetros las veces que se desea, hasta conseguir los polos de lazo cerrado deseados.

Los resultados calculados se obtienen en pantalla, y si el diseñador está satisfecho con los mismos, habiéndose cumplido desacoplamiento y estabilidad, el programa le pregunta si desea imprimir en papel, siendo posible escoger o no esta alternativa.

Termina este programa para luego regresar inmediatamente al menú.

OPCION 3.-

Esta opción corresponde a la técnica de desacoplamiento por realimentación de salida, siendo muy similar a la opción 2 para la manipulación del programa, como se verá a continuación.

El ingreso de datos se hace desde el teclado para las matrices que representan el sistema en espacio de estado.

Al igual que en la opción anterior se realiza un diálogo persona - máquina.

Se introduce los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal DELTA, que es la que cambia la ubicación de los polos de lazo cerrado, siendo posible cambiar esta matriz diagonal, hasta obtener los polos de lazo cerrado deseados.

Los resultados son presentados siempre en pantalla, pero existe la alternativa de escoger, si se desea imprimir en papel.

Igual a las otras dos técnicas, al terminar el programa regresa al menú.

En cualquier programa si se presenta errores de: ejecución, entrada, y salida; inmediatamente se sale del programa correspondiente hacia el menú, sin especificar cuál fue el error que se produjo. Entonces, se debe escoger la técnica de desacoplamiento deseada y reingresar los datos.

En el momento de la impresión de resultados en papel, si aperece en pantalla el comentario "Abort,Retry,Ignory ?" y a continuación " No paper error writing device PRN", puede ser debido a que no está prendida la impresora o se terminó el papel. Para poder continuar con la impresión se pulsa la letra "i", pero para terminar se pulsa la letra "a" o se pulsan simultáneamente las teclas CTRL y BREAK.

En caso de que se introduzca valores mayores a los límites de cada programa, aparecerá en pantalla el comentario correspondiente, indicando la condición que deben cumplir dichos valores.

A P E N D I C E * B *

LISTADO DE PROGRAMAS

DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

```
program DesacoplamientoMatrizFuncionTransferencia(input,output);
   const
      Longitud=125;
      MaxOrdenMatriz=5;
   type
      Index=0..Longitud;
      OrdenN=1..MaxOrdenMatriz;
      Matrices=array[OrdenN,OrdenN,Index] of integer;
      VectorP=array[Index] of integer;
      MatrizN=array[1..2,OrdenN,OrdenN] of integer;
      Vectores=array[-1..Longitud] of real;
 var
     N:OrdenN;
     M,T,ORO,M1:integer;
     i,j,k,k1,k2:index;
     Grado,Grado1,Grado2,JX,JY,k3,RR:integer;
     Delta,Nn,Dn,nu,num,dpl,den,NGpL:VectorP;
     Gc,GpL:Matrices;
     GD,Gon:MatrizN;
     PID,den1,num1:Vectores;
     Gcd:array[1..2,OrdenN,Index] of integer;
     Z,S:char;

 procedure ProductoMatricesPolinomiales(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna:OrdenN;
                                        GradoM1,GradoM2:Index;
                                        Matriz1,Matriz2:Matrices;
                                        var Producto:Matrices);

   var
      k3:OrdenN;

   begin {ProductoMatricesPolinomiales}
     for k:=0 to GradoM1+GradoM2 do
        begin {for k}
           for i:=1 to FilaM1 do
              begin {for i}
                 for j:=1 to ColumnaM2 do
                    Producto[i,j,k]:=0
              end {for i}
        end; {for k}
      for k1:=0 to GradoM1 do
        begin {for k1}
           k:=k1;
           for k2:=0 to GradoM2 do
              begin {for k2}
                 for i:=1 to FilaM1 do
                    begin {for i}
                       for j:=1 to ColumnaM2 do
                          begin {for j}
                             for k3:=1 to FilaColumna do
```

```
                                               begin {for k3}
                                                  Producto[i,j,k]:=Producto[i,j,k]+
                                                               Matriz1[i,k3,k1]*Matriz2[k3,j,k2]
                                               end {for k3}
                                     end {for j}
                          end; {for i}
                     k:=k+1
                end {for k2}
      end {for k1}
   end; {ProductoMatricesPolinomiales}

procedure PProductoMatrizPolinomio(Fila,Columna:OrdenN;GradoM,GradoP:Index;
                                   Matriz:Matrices;Polinomio:VectorP;
                                   var Produc:Matrices);
   begin {PProductoMatrizPolinomio}
      for k:=0 to GradoM+gradoP do
         begin {for k}
            for i:=1 to Fila do
               begin {for i}
                  for j:=1 to Columna do
                     Produc[i,j,k]:=0
               end {for i}
         end; {for k}
    for k1:=0 to GradoM do
       begin {for k1}
          k:=k1;
          for k2:=0 to GradoP do
             begin {for k2}
                for i:=1 to Fila do
                   begin {for i}
                      for j:=1 to Columna do
                         Produc[i,j,k]:=Produc[i,j,k]+Matriz[i,j,k1]*
                                        Polinomio[k2]
                   end; {for i}
                k:=k+1
             end {for k2}
       end {for k1}
   end; {PProductoMatrizPolinomio}

Procedure PRroductoPolinomioPolinomio(GradoP1,GradoP2:Index;
                                      Polinomio1,PPolinomio2:VectorP;
                                      var Prod:VectorP);
   begin {PRoductoPolinomioPolinomio}
      for k:=0 to GradoP1+GradoP2 do
         Prod[k]:=0;
      for k1:=0 to GradoP1 do
         begin {for k1}
            k:=k1;
            for k2:=0 to GradoP2 do
               begin {for k2}
                  Prod[k]:=Prod[k]+Polinomio1[k1]*PPolinomio2[k2];
```

```
                    k:=k+1
                 end {for k2}
              end {for k1}
         end; {PRroductoPolinomioPolinomio}

       procedure MatrizInversaPolinomial(var GpL:Matrices;var Denominador:VectorP);
         var
            R,P:OrdenN;
            F:Integer;
            GpLInversa,AD,A11,A12,A21,A1112,A2111,DP:Matrices;
            A22,D,DENOM:VectorP;
         begin {matrizInversaPolinomial}
            A11:=GpL;
            for k:=0 to 2*M do
              D[k]:=0;
            for k1:=0 to M do
              begin {for k1}
                k:=k1;
                for k2:=0 to M do
                  begin {for k2}
                    D[k]:=D[k]+A11[1,1,k1]*A11[2,2,k2]-A11[1,2,k1]*A11[2,1,k2];
                    k:=k+1
                  end {for k2}
              end; {for k1}
            for k:=0 to M do
              begin {for k}
                AD[1,1,k]:=A11[2,2,k];
                AD[1,2,k]:=-A11[1,2,k];
                AD[2,1,k]:=-A11[2,1,k];
                AD[2,2,k]:=A11[1,1,k]
              end; {for k}
            ORO:=2*M;
            F:=M; R:=2;
            if N=2
              then
                begin {then exterior}
                  GpLInversa:=AD;
                  Denominador:=D
                end {then exterior}
              else
                begin {else}
                  for P:=3 to N  do
                    begin {for P}
                      for k:=0 to F do
                        begin {for k}
                          for i:=1 to P do
                            begin {for i}
                              for j:=1 to P do
                                begin {for j}
                                  if (j=P) and (i<>j)
                                    then A12[i,1,k]:=GpL[i,j,k]
```

```
       else
        if (i=P) and (i<>j)
         then A21[1,j,k]:=GpL[i,j,k]
         else
          if (i=P) and (j=P)
           then A22[k]:=GpL[i,j,k]
     end {for j}
   end {for i}
 end; {for k}
ProductoMatricesPolinomiales(R,1,R,M,F,AD,A12,A1112);
ProductoMatricesPolinomiales(1,R,R,F,M,A21,AD,A2111);
PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,F,D,A22,DENOM);
ProductoMatricesPolinomiales(1,1,R,F,ORO,A21,A1112,DP);
for k:=0 to ORO+F do
 DENOM[k]:=DENOM[k]-DP[1,1,k];
PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,ORO+F,D,DENOM,Denominador);
PProductoMatrizPolinomio(R,R,M,ORO+F,AD,DENOM,A11);
ProductoMatricesPolinomiales(R,R,1,ORO,ORO,A1112,A2111,DP);
for k:=0 to 2*ORO do
 begin {for k}
  for i:=1 to R do
   begin {for i}
    for j:=1 to R do
     A11[i,j,k]:=A11[i,j,k]+DP[i,j,k]
   end {for i}
 end; {for k}
PProductoMatrizPolinomio(R,1,ORO,ORO,A1112,D,A12);
PProductoMatrizPolinomio(1,R,ORO,ORO,A2111,D,A21);
for k:=0 to 2*ORO do
 begin {for k}
  for i:=1 to R do
   begin {for i}
    A12[i,1,k]:=-A12[i,1,k];
    A21[1,i,k]:=-A21[1,i,k]
   end {for i}
 end; { for k}
PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,ORO,D,D,A22);
for k:=0 to 2*ORO do
 begin {for k}
  for i:=1 to P do
   begin {for i}
    for j:=1 to P do
     begin {for j}
      if (j=P) and (i<>j)
       then GpLInversa[i,j,k]:=A12[i,1,k]
       else
        if (i=P) and (i<>j)
         then GpLInversa[i,j,k]:=A21[1,j,k]
         else
          if (i=P) and (j=P)
           then GpLInversa[i,j,k]:=A22[k]
```

```
                                     else GpLInversa[i,j,k]:=A11[i,j,k]
                         end {for j}
                     end {for i}
                 end; {for k}
               M:=2*ORO;
               ORO:=2*ORO+F;
               if P<>N
                 then
                   begin {then interior}
                     D:=Denominador;
                     AD:=GpLInversa;
                     R:=R+1
                   end {then interior}
             end {for P}
         end; {else}
     GpL:=GpLInversa
  end; {MatrizInversaPolinomial}

 procedure ReducirGrado(IR:integer;XY:Vectores;var IXY:integer);
   const
     EPS=0.001;
   var
     IJ,IRR:integer;

   begin {ReducirGrado}
     IRR:=IR;
     IJ:=0;
     repeat
       if IRR>=0
         then
           begin
             if abs(XY[IRR])<=EPS
               then IRR:=IRR-1
               else IJ:=1
           end
         else IJ:=1
     until IJ=1;
     IXY:=IRR
   end; {Reducir Grado}

procedure DivisionPolinomios(IX:integer;X:Vectores;IY:integer;Y:Vectores;
                            var IP:integer;var P:Vectores);
  var
     I1,J1,II,XXI:integer;
     XR:Vectores;

  begin {DivisionPolinomios}
    XXI:=IX;
    XR:=X;
    ReducirGrado(IY,Y,IY);
    if IY<0
```

```
          then RR:=1
          else
            begin {else IY < 0}
              ReducirGrado(XXI,XR,XXI);
                if XXI<0
                  then IP:=-3
                  else
                    begin {else XXI < 0}
                      IP:=XXI-IY;
                      if IP<-1
                        then IP:=-2
                        else
                          begin {else IP < -1}
                            XXI:=IY;
                            I1:=IP;
                            repeat
                              II:=I1+XXI;
                              P[I1]:=XR[II]/Y[IY];
                              for k:= 1 to XXI do
                                begin {for k}
                                  J1:=k-1+I1;
                                  XR[J1]:=XR[J1]-P[I1]*Y[K-1]
                                end; {for k}
                              I1:=I1-1
                            until I1<-1
                          end {else IP < -1}
                    end {else XXI < 0}
            end {else IY < 0}
      end; {DivisionPolinomios}

   begin {DesacoplamientoMatrizFuncionTransferencia}
         CLRSCR;
         GOTOXY(14,5);
         write('DESACOPLAMIENTO POR MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA');
         GOTOXY(14,6);
         write('--------------- --- ------ ------- -- -------------');
         GOTOXY(14,9);
         write('GpL = Matriz numerador polinomial de  la  planta  Gp');
         GOTOXY(20,10);
         write('del sistema, de dimensión (N x N x M).');
         GOTOXY(14,13);
         write('Delta = Polinomio,  mínimo  común  múltiplo  de los ');
         GOTOXY(22,14);
         write('denominadores de los elementos de la matriz');
         GOTOXY(22,15);
         write('Gp, de orden T.');
         GOTOXY(14,18);
         write('GD  = Matriz polinomial diagonal, a la que se  quiere');
         GOTOXY(20,19);
         write('llegar para que el sistema sea desacoplado, de');
         GOTOXY(20,20);
```

```
          write('dimensión (N x N x M1).');
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
          CLRSCR;
          GOTOXY(15,8);
          write('Grado de la Matriz GpL, (entradas = salidas):  N = ');read(N);
          GOTOXY(15,10);
          write('Mayor Grado de los elementos de la Matriz GpL: M = ');read(M);
          GOTOXY(15,12);
          write('Mayor Grado del Denominador "Delta" de Gp:     T = ');read(T);
          GOTOXY(15,14);
          write('Mayor Grado de los elementos de la Matriz GD : M1= ');read(M1);
      IF N<=5
       THEN
        BEGIN
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
          CLRSCR;
          GOTOXY(35,5);
          writeln('MATRIZ GpL');
          writeln;
          GOTOXY(13,7);
          writeln('Matrices numeradores de la planta Gp en potencias de s');
          writeln;writeln;
          for k:=0 to M do
             begin {for k}
                writeln('Grado ',k);
                for i:=1 to N do
                   begin {for i}
                      for j:=1 to N do
                         begin {for j}
                            write('GpL(',i,',',j,',',k,')=');read(GpL[i,j,k]);
                            write('   ')
                         end; {for j}
                      writeln
                   end; {for i}
                writeln
             end; {for k}
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
          CLRSCR;
          GOTOXY(19,5);
          writeln('COEFICIENTES DEL DENOMINADOR "Delta" DE Gp');
          writeln;
          GOTOXY(10,7);
          writeln('Mínimo común múltiplo de los denominadores de la planta Gp.');
          GOTOXY(26,8);
          writeln('En potencias crecientes de s');
```

```
        writeln;writeln;
        for k:=0 to T do
           begin {for k}
              write('Delta(',k,')=');read(Delta[k]);
              write('  ')
           end; {for k}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        CLRSCR;
        GOTOXY(17,5);
        writeln('COEFICIENTES DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE GD');
        writeln;
        GOTOXY(5,7);
        write('Matriz función de transferencia diagonal Gd, a la que se quire ');
        writeln('llegar');
        GOTOXY(11,8);
        writeln('para desacoplar el sistema, en potencias crecientes de s.');
        GOTOXY(1,9);
        write('(* Para que el sistema sea desacoplado, la matriz GD debe ser ');
        writeln('no singular ! * )');
        writeln;
        for k:=0 to M1 do
           begin {for k}
              writeln('Grado ',k);
              for i:=1 to 2 do
                 begin {for i}
                    for j:=1 to N do
                       begin {for j}
                         if i=1
                           then
                             begin {then}
                               write('numGD(',j,',',j,',',k,')=');
                               read(GD[i,j,k])
                             end {then}
                           else
                             begin {else}
                               write('denGD(',j,',',j,',',k,')=');
                               read(GD[i,j,k])
                             end; {else}
                          write('  ')
                       end; {for j}
                    writeln
                 end; {for i}
              writeln
           end; {for k}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        for k:=0 to M1 do
           begin {for k}
```

```
                for i:=1 to 2 do
                   begin {for i}
                      for j:=1 to N do
                         begin {for j}
                           if i=1
                             then Gon[1,j,k]:=GD[1,j,k]
                             else Gon[2,j,k]:=GD[2,j,k]-GD[1,j,k]
                         end {for j}
                   end {for i}
             end; {for k}
          MatrizInversaPolinomial(GpL,dpl);
          RR:=0;
          for j:=1 to N do
            begin {for j}
              for k:=0 to M1 do
                begin {for k}
                  Nn[k]:=Gon[1,j,k];
                  Dn[k]:=Gon[2,j,k]
                end; {for k}
              PRroductoPolinomioPolinomio(T,M1,Delta,Nn,nu);
              PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,M1,dpl,Dn,den);
              for k:=0 to ORO+M1 do
                Gcd[1,j,k]:=den[k];
              for i:=1 to N do
                begin {for i}
                  for k:=0 to M do
                    NGpL[k]:=GpL[i,j,k];
                  PRroductoPolinomioPolinomio(M,T+M1,NGpL,nu,num);
                  for k:=0 to M+M1+T do
                    Gc[i,j,k]:=num[k];
                  JX:=M+M1+T;
                  JY:=ORO+M1;
                  for k1:=0 to JX do
                    num1[k1]:=num[k1];
                  for k1:=0 to JY do
                    den1[k1]:=den[k1];
                  DivisionPolinomios(JX,num1,JY,den1,Grado,PID);
                  CLRSCR;
                  GOTOXY(33,5);
                  writeln('COMPENSADOR Gc');
                  GOTOXY(30,7);
                  writeln('Compensador PID (',i,',',j,')');
                  writeln;writeln;
                  if Grado<=-2
                    then
                      begin {then}
                        if Grado=-2
                          then writeln('No hay aproximación')
                          else writeln('Grado(0): 0    *No hay compensador')
                      end {then}
                    else
```

```
            begin {else}
              for k3:=-1 to Grado do
                writeln('Grado:',k3:2,'    ',PID[k3]:10:3)
            end; {else}
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
      end {for i}
  end; {for j}
CLRSCR;
GOTOXY(15,5);
write('Quiere ver el Compensador Serie completo Gc (S/N) ');
readln(Z);
if (Z='S') or (Z='s')
  then
    begin {then}
      GOTOXY(27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      readln(z);
      for j:=1 to N do
        begin {for j}
          for k:=0 to ORO+M1 do
            den1[k]:=Gcd[1,j,k];
          ReducirGrado(ORO+M1,den1,Grado2);
          CLRSCR;
          GOTOXY(33,5);
          writeln('COMPENSADOR Gc');
          GOTOXY(32,7);
          writeln('Denominador(*,',j,')');
          GOTOXY(1,8);
          write('* = Indica todas las filas, porque el denominador ');
          writeln('es el mismo para cada columna');
          writeln;
          if RR=1
            then writeln('ERROR, ésta mal dado la Matriz Diagonal GD')
            else
              begin
                for k:=0 to Grado2 do
                  begin
                    if k<=9
                      then write('Grado( ',k,'):',den1[k]:8:0,'   ')
                      else write('Grado(',k,'):',den1[k]:8:0,'   ')
                  end
              end;
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for k:=0 to M+M1+T do
                num1[k]:=Gc[i,j,k];
```

```
                       ReducirGrado(M+M1+T,num1,Grado1);
                       CLRSCR;
                       GOTOXY(33,5);
                       writeln('COMPENSADOR Gc');
                       GOTOXY(32,7);
                       writeln('Numerador(',i,',',j,')');
                       writeln;
                       if Grado1<0
                         then write('Grado(0):  0')
                         else
                           begin {else}
                             for k:=0 to Grado1 do
                               begin
                                 if k<=9
                                   then write('Grado( ',k,'):',num1[k]:8:0,'  ')
                                   else write('Grado(',k,'):',num1[k]:8:0,'  ')
                               end
                           end; {else}
                       writeln;
                       GOTOXY(27,24);
                       write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                       readln(z);
                     end {for i}
                 end {for j}
             end; {then}
      END
     ELSE
      BEGIN
        CLRSCR;
        GOTOXY(20,10);
        write('  EL ORDEN DEL SISTEMA DEBE SER  N <= 5 , ');
        GOTOXY(20,12);
        write('PORQUE NO ALCANZA LA MEMORIA DEL COMPUTADOR');
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        read(Z)
      END
    end.{DesacoplamientoMatrizFuncionTransferencia}
```

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE ESTADO

```
program RealimentacionDeEstado(input,output);
   const
      MaxOrdenMatriz=10;
      Max=64;
   type
      Index=1..Max;
      Indice=0..MaxOrdenMatriz;
      OrdenN=1..MaxOrdenMatriz;
      MatrizIJK=array[OrdenN,OrdenN,Index] of real;
      Matrices=array[OrdenN,OrdenN,Indice] of real;
      MatrizReal=array[OrdenN,OrdenN] of real;
      Imaginarias=array[OrdenN,1..2] of real;
      Vectores=array[OrdenN] of real;
      Vector0=array[Indice] of real;
   var
      N,M,i,ii,j,k1,k2,k3,k4,Z1,Z2,Z3,Z4:OrdenN;
      k,w:Index;
      i1,i2:Indice;
      A,B,C,F,G,Ff,CB,BAST,BASTINV,A1AST,A2AST,AD,AN,MCA,MCAT,MC,Q:MatrizReal;
      ABF:MatrizReal;
      SIA,Gc:Matrices;
      FGEN:MatrizIJK;
      MI:array[0..MaxOrdenMatriz,OrdenN] of real;
      CI,CIA,CIAB,Xr,Yr:Vectores;
      Xi,Yi:Imaginarias;
      D1,D2:Vector0;
      D:array[OrdenN] of integer;
      L,LL,SUMA,f1,f2,MDI,R1,t,tt,M1:integer;
      DET,Deter:real;
      Z,ZZ,S:char;

  procedure ProductoMatrices(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna:OrdenN;
                             Matriz1,Matriz2:MatrizReal;
                             var Producto:MatrizReal);
   var
      S1:real;

   begin {ProductoMatrices}
     for k1:=1 to FilaM1 do
       begin {for k1}
         for k2:=1 to ColumnaM2 do
           begin {for k2}
             S1:=0;
             for k3:=1 to FilaColumna do
               begin {for k3}
                 Producto[k1,k2]:=Matriz1[k1,k3]*Matriz2[k3,k2];
                 S1:=S1+Producto[k1,k2]
               end; {for k3}
             Producto[k1,k2]:=S1
           end {for k2}
```

```
        end {for k1}
    end; {ProductoMatrices}

   procedure ProductoVectorMatriz(Elemento,Columna:OrdenN;Vector:Vectores;
                                  Matriz:matrizReal;var Prod:Vectores);
     var
       S1:real;

     begin {ProductoVectorMatriz}
       for k2:=1 to Elemento do
         begin {for k2}
           S1:=0;
           for k3:=1 to Columna do
             begin {for k3}
               Prod[k2]:=Vector[k3]*Matriz[k3,k2];
               S1:=S1+Prod[k2]
             end; {for k3}
           Prod[k2]:=S1
         end; {for k2}
    end; {ProductoVectorMatriz}

   procedure DeterminanteEInversa(M:OrdenN;A2:MatrizReal;var A1INV:MatrizReal;
                                  var De:real);
     var
        j1:OrdenN;
        A1:matrizReal;
        X:vectores;
        PP:array[OrdenN,1..2] of integer;
        S1,CEL:real;

     procedure Cholesky;
       Begin {Cholesky}
         k3:=0;
         for k1:=1 to M do
           begin {for k1}
             if k1<M
               then
                 begin {then exterior}
                   if A1[k1,k1]=0
                     then
                       begin {then interior}
                         k3:=k3+1;
                         k:=k1;
                         repeat
                           k:=k+1;
                         until (A1[k1,k]=1) or (k=M+1);
                         if k<=M
                           then
                             begin {then}
                               PP[k3,1]:=k1;
                               PP[k3,2]:=k;
```

```
                      for k2:=1 to M do
                        begin {for k2}
                          CEL:=A1[k2,k1];
                          A1[k2,k1]:=A1[k2,k];
                          A1[k2,k]:=CEL
                        end {for k2}
                    end {then}
              end {then interior}
        end {then exterior}
  end; {for k1}
if k<=M
  then
    begin
      for j:=2 to M+1 do
        A1[1,j]:=A1[1,j]/A1[1,1];
    end;
for i:=2 to M do
  begin {for i}
    for j:=2 to M+1 do
      begin {fo j}
        if i>=j
          then
            begin {then externo}
              S1:=0;
              for k:=1 to j-1 do
                S1:=S1+A1[i,k]*A1[k,j];
              A1[i,j]:=A1[i,j]-S1
            end {then externo}
          else
            begin {else}
              if A1[i,i]<>0
                then
                  begin {then interno}
                    S1:=0;
                    for k:=1 to i-1 do
                      S1:=S1+A1[i,k]*A1[k,j];
                    A1[i,j]:=(A1[i,j]-S1)/A1[i,i]
                  end {the interno}
            end {else}
      end {for j}
  end; {for i}
  X[M]:=A1[M,M+1];
  for i:=1 to M-1 do
    begin {for i}
      k1:=M-i;
      S1:=0;
      for j:=k1+1 to M do
        S1:=S1+A1[k1,j]*X[j];
      X[k1]:=A1[k1,M+1]-S1;
    end; {for i}
k:=k3;
```

```
          if k>1
            then
              begin {then}
                repeat
                  k:=k mod 2;
                until k<=1
              end; {then}
          if k=0
            then De:=1
            else De:=-1;
          for i:=1 to M do
            De:=De*A1[i,i];
          if De<>0
            then
              begin {then}
                for j:=1 to k3 do
                  begin {for k3}
                    i:=k3-j+1;
                    k1:=PP[i,1];
                    k:=PP[i,2];
                    CEL:=X[k1];
                    X[k1]:=X[k];
                    X[k]:=CEL
                  end {for k3}
              end {then}
        end; {Cholesky}

      begin {DeterminanteEInversa}
        for j1:=1 to M do
          begin {for j1}
            A1:=A2;
            for i:=1 to M do
              begin {for i}
                if i=j1
                  then A1[i,M+1]:=1
                  else A1[i,M+1]:=0;
              end; {for i}
            Cholesky;
            for i:=1 to M do
              A1INV[i,j1]:=X[i];
          end {for j1}
      end; {DeterminanteEInversa}

    procedure MatrizFGeneral(w:Index;FGEN:MatrizIJK;var Ff:MatrizReal;
                                              var g:integer);
      var
        P,Q:integer;

      begin {MatrizFGeneral}
        for i:=1 to M do
          begin {for i}
```

```
          for j:=1 to N do
            Ff[i,j]:=0
        end; {for i}
      g:=0;
      for i:=1 to M do
        begin {for i}
          for j:=1 to N do
            begin {for j}
              L:=0;
              k:=1;
              repeat
                if FGEN[i,j,k]=0
                  then k:=k+1
                  else
                    begin {else}
                      k:=w+1;
                      L:=1
                    end; {else}
              until k=w+1;
              if L=0
                then Ff[i,j]:=FGEN[i,j,M+1]
                else
                  begin {else}
                    if abs(Ff[i,j])<30000
                      then
                        begin {then interior}
                          if (i=M) and (j=N)
                            then
                              begin {then}
                                Ff[i,j]:=30000+10*i+j;
                                g:=g+1
                              end {then}
                            else
                              begin {else interior}
                                g:=g+1;
                                Ff[i,j]:=30000+10*i+j;
                                if j=N
                                  then
                                    begin {then}
                                      k3:=i+1;
                                      k4:=1
                                    end {then}
                                  else
                                    begin {else}
                                      k3:=i;
                                      k4:=j+1
                                    end; {else}
                                for k1:=k3 to M do
                                  begin {for k1}
                                    for k2:=k4 to N do
                                      begin {for k2}
```

```
                                       k:=1;
                                       P:=0;
                                       repeat
                                         if FGEN[i,j,k]=FGEN[k1,k2,k]
                                           then
                                             begin
                                               k:=k+1;
                                               Q:=1
                                             end
                                           else
                                             begin
                                               if FGEN[i,j,k]=-FGEN[k1,k2,k
                                                 then
                                                   begin
                                                     k:=k+1;
                                                     Q:=-1
                                                   end
                                                 else
                                                   begin
                                                     k:=w+2;
                                                     P:=1
                                                   end
                                             end;
                                       until k=(w+2);
                                       if P=0
                                         then Ff[k1,k2]:=Q*(30000+10*i+j)
                                     end; {for k2}
                                   k4:=1
                                 end {for k1}
                             end {else interior}
                       end {then interior}
                 end {else}
           end {for j}
       end {for i}
  end; {MatrizFGeneral}

procedure InversaMatrizDinamica(N:OrdenN;A1:MatrizReal;var R:Matrices;
                                var ALFA:Vector0);
  var
     AR:MatrizReal;
     TRAZO:real;

  procedure Multiplicacion;
     var
        S1:real;

     begin {Multiplicacion}
       for i:=1 to N do
         begin {for i}
           for j:=1 to N do
             begin {for j}
```

```
                    S1:=0;
                    for k1:=1 to N do
                      begin {for k1}
                        AR[i,j]:=A1[i,k1]*R[k1,j,k-1];
                        S1:=S1+AR[i,j]
                      end; {for k1}
                    AR[i,j]:=S1
                  end {for j}
              end {for i}
          end; {Multiplicacion}

      begin {InversaMatrizDinamica}
          ALFA[0]:=1;
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for j:=1 to N do
                begin {for j}
                  if i<>j
                    then R[i,j,0]:=0
                    else R[i,j,0]:=1
                end {for j}
            end; {for i}
          for k:=1 to N do
            begin {for k}
              Multiplicacion;
              TRAZO:=0;
              for i:=1 to N do
                TRAZO:=TRAZO+AR[i,i];
              ALFA[k]:=-TRAZO/k;
              for i:=1 to N do
                begin {for i}
                  for j:=1 to N do
                    begin {for j}
                      if I<>j
                        then R[i,j,k]:=AR[i,j]
                        else R[i,j,k]:=AR[i,j]+ALFA[k]
                    end {for j}
                end; {for i}
            end; {for k}
      end; {InversaMatrizDinamica}

    procedure RaicesPolinomiales(N1:OrdenN;Polinomio:Vector0;var X1:Vectores;
                                   var X2:Imaginarias;var Z1,Z2:OrdenN);
      const
          Epsilon=0.0001;
      var
          NN:OrdenN;
          U,DU,V,DV,DN,DES,REALES,IMAG:real;
          A1,B1,C1:Vector0;
      begin {RaicesPolinomiales}
          NN:=N1; Z1:=1; Z2:=1;
```

```
    A1:=Polinomio;
    while N1>=2 do
      begin {while exterior}
        if A1[N1]<>0
          then
            begin {then exterior}
              if abs(A1[N1-2])<=0.0000001
                then
                  Begin {then}
                    U:=0; V:=0
                  end {then}
                else
                  begin {else}
                    U:=A1[N1-1]/A1[N1-2];
                    V:=A1[N1]/A1[N1-2]
                  end; {else}
              if N1<>2
                then
                  begin {then}
                    repeat
                      B1[0]:=1; B1[1]:=A1[1]-U;
                      C1[0]:=1; C1[1]:=B1[1]-U;
                      for k:=2 to N1 do
                        begin {for k}
                          B1[k]:=A1[k]-B1[k-1]*U-B1[k-2]*V;
                          C1[k]:=B1[k]-C1[k-1]*U-C1[k-2]*V
                        end; {for k}
                      DN:=C1[N1-1]*C1[N1-3]-C1[N1-2]*C1[N1-2];
                      if DN=0
                        then
                          begin
                            DU:=0.2;
                            DV:=0.1
                          end
                        else
                          begin
                            DU:=(B1[N1]*C1[N1-3]-B1[N1-1]*C1[N1-2])/DN;
                            DV:=(B1[N1-1]*C1[N1-1]-B1[N1]*C1[N1-2])/DN;
                          end;
                      U:=U+DU;
                      V:=V+DV
                    until (abs(B1[N1])<Epsilon) and (abs(B1[N1-1])<Epsilon)
                    U:=U-DU;
                    V:=V-DV
                  end; {then}
              DES:=U*U-4*V;
              if DES>=0
                then
                  begin {then}
                    X1[Z1]:=(-U+sqrt(DES))/2;
                    X1[Z1+1]:=(-U-sqrt(DES))/2;
```

```
                          Z1:=Z1+2
                        end {then}
                      else
                        begin {else}
                          IMAG:=sqrt(-DES)/2;
                          REALES:=-U/2;
                          X2[Z2,1]:=REALES;
                          X2[Z2,2]:=IMAG;
                          X2[Z2+1,1]:=REALES;
                          X2[Z2+1,2]:=-IMAG;
                          Z2:=Z2+2
                        end; {else}
                    N1:=N1-2;
                    for k:=0 to N1 do
                      A1[k]:=B1[k]
                  end {then exterior}
                else
                  begin {else exterior}
                    X1[Z1]:=0;
                    Z1:=Z1+1;
                    N1:=N1-1;
                    if N1=1
                      then B1[1]:=A1[1]
                  end {else exterior}
            end; {while exterior}
          if N1=0
            then Z1:=Z1-1
            else
             begin {else}
               if NN=1
                 then X1[Z1]:=-A1[1]
                 else X1[Z1]:=-B1[1]
             end; {else}
     end; {RaicesPolinomiales}

  begin {RealimentacionDeEstado}
        CLRSCR;
        GOTOXY(17,2);
        write('R E A L I M E N T A C I O N   D E   E S T A D O');
        GOTOXY(17,3);
        write('-------------------------   ---   ----------');
        GOTOXY(20,5);
        write('Descripción del Sistema de Lazo Abierto');
        GOTOXY(25,6);
        write('.');
        GOTOXY(25,7);
        write('x  =  A x  +  B u');
        GOTOXY(25,9);
        write('y  =  C x');
        GOTOXY(20,12);
        write('Descripción del Sistema de Lazo Cerrado');
```

```
        GOTOXY(25,13);
        write('.');
        GOTOXY(25,14);
        write('x  =  ( A  + B F ) x + B G w');
        GOTOXY(25,16);
        write('y  =  C x');
        GOTOXY(14,18);
        write('Gc = Matriz Función de Transferencia de Lazo Cerrado');
        GOTOXY(14,20);
        write('Mk = Matrices Diagonales, que cambia la ubicación ');
        GOTOXY(22,21);
        write(' de los polos de lazo cerrado');
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        CLRSCR;
        GOTOXY (17,8);
        write('Orden del Sistema                          : N = ');
        readln(N);
        GOTOXY (17,12);
        write('Número de Entradas y Salidas del Sistema : M = ');
        readln(M);
     if N<MaxOrdenMatriz
      then
       begin
     IF M<=N
      THEN
       BEGIN
        CLRSCR;
        GOTOXY(36,5);
        writeln('MATRIZ A');
        writeln;
        for i:=1 to N do
          begin {for i}
            for j:=1 to N do
              begin {for j}
                write('A(',i,',',j,')=');
                read(A[i,j]);
                write('   ')
              end; {for j}
              writeln
          end; {for i}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        CLRSCR;
        GOTOXY(36,5);
        writeln('MATRIZ B');
        writeln;
        for i:=1 to N do
          begin {for i}
```

```
          for j:=1 to M do
            begin {for j}
              write('B(',i,',',j,')=');
              read(B[i,j]);
              write('  ')
            end; {for j}
            writeln
        end; {for i}
      GOTOXY(27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      readln(z);
      CLRSCR;
      GOTOXY(36,5);
      writeln('MATRIZ C');
      writeln;
      for i:=1 to M do
        begin {for i}
          for j:=1 to N do
            begin {for j}
              write('C(',i,',',j,')=');
              read(C[i,j]);
              write('  ')
            end; {for j}
            writeln
        end; {for i}
      GOTOXY(27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      readln(z);
      ProductoMatrices(M,M,N,C,B,CB);
      for i:=1 to M do
        D[i]:=0;
      L:=0;
      for i:=1 to M do
        begin {for i}
          k:=0;
          for j:=1 to M do
            begin {for j}
              if CB[i,j]=0
                then k:=k+1
            end; {for j}
          if k=M
            then D[i]:=1
            else
              begin {else}
                for j:=1 to N do
                  begin {for j}
                    if j<=M
                      then BAST[i,j]:=CB[i,j];
                    A2AST[i,j]:=C[i,j]
                  end; {for j}
                L:=L+1
```

```
  else
    BAST:=CB;
DeterminanteEInversa(M,BAST,BASTINV,DET);
if DET<>0
  then
    begin {then DET}
     SUMA:=M;
     for i:=1 to M do
       SUMA:=SUMA+D[i];
     if SUMA<=N
       then
         begin {then SUMA <= N}
           ProductoMatrices(M,N,N,A2AST,A,A1AST);
           for k:=1 to M do
             begin {for k}
               for i:=1 to M do
                 begin {for i}
                   for j:=1 to N do
                     FGEN[i,j,k]:=BASTINV[i,k]*A2AST[k,j]
                 end {for i}
             end; {for k}
           ProductoMatrices(M,N,M,BASTINV,A1AST,CB);
           for i:=1 to M do
             begin {for i}
               for j:=1 to N do
                 FGEN[i,j,M+1]:=-CB[i,j]
             end; {for i}
           MDI:=D[1];
           for i:=2 to M do
             begin {for i}
               if D[i]>MDI
                 then MDI:=D[i]
             end; {for i}
           MatrizFGeneral(M,FGEN,Ff,f1);
           if SUMA>f1
             then
               begin {SUMA > f1}
                 CLRSCR;
                 GOTOXY(14,5);
                 write('El Conjunto de Matrices F para desacoplar el');
                 writeln(' sistema');
                 GOTOXY(18,6);
                 write('se determina por el Procedimiento de');
                 writeln(' Síntesis');
                 GOTOXY(27,24);
                 write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                 readln(z);
                 for i:=1 to M do
                   begin {for i}
                     for j:=1 to N do
                       begin {for j}
```

```
                begin {then SUMA = N}
                  CLRSCR;
                  GOTOXY(6,5);
                  write('Cualquier n =',N:2,' de los polos de lazo');
                  writeln(' cerrado pueden ser posicionados');
                  GOTOXY(8,6);
                  write('arbitrariamente mientras simultáneamente');
                  writeln(' se desacopla el sistema');
                  R1:=0;
                  GOTOXY(27,24);
                  write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                  readln(z)
                end; {then SUMA = N}
            if SUMA=f1
              then
                begin {then SUMA = N}
                  CLRSCR;
                  GOTOXY(17,5);
                  write('Conjunto de Matrices F que desacopla el ');
                  writeln('sistema');
                  writeln;writeln;
                  for i:=1 to M do
                    begin {for i}
                      write('Fila ',i,':    ');
                      for j:=1 to N do
                        begin {for j}
                          if abs(Ff[i,j])>30000
                           then
                             begin {then externo}
                               if Ff[i,j]>0
                                then write(' f',(Ff[i,j]-30000):2:0,
                                                                  '  ')

                                else write('-f',-(Ff[i,j]+30000):2:0,
                                                                  '  ')

                             end {then externo}
                           else write(Ff[i,j]:4:1,'    ')
                        end; {for j}
                      writeln
                    end; {for i}
                  GOTOXY(6,22);
                  write('Quiere dar directamente valores a los');
                  write(' parámetros libres f = ',f1,' (S/N) ');
                  readln(Z);
                  if (Z='S') or (Z='s')
                    then R1:=1
                    else R1:=0;
                  GOTOXY(27,24);
                  write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                  readln(z)
                end; {then SUMA = N}
            repeat
```

```
           for i:=1 to M do
             begin {for i}
               for j:=1 to N do
                 F[i,j]:=30000
             end; {for i}
           if R1=1
             then
               begin {then R1 = 1}
                 CLRSCR;
                 GOTOXY(17,2);
                 write('Conjunto de Matrices F que desacopla el ');
                 writeln('sistema');
                 writeln;
                 for i:=1 to M do
                   begin {for i}
                     write('Fila ',i,':    ');
                     for j:=1 to N do
                       begin {for j}
                        if abs(Ff[i,j])>30000
                         then
                          begin {then exterior}
                           if Ff[i,j]>0
                            then write(' f',(Ff[i,j]-30000):2:0,
                                                                '     ')
                            else write('-f',-(Ff[i,j]+30000):2:0,
                                                                '     ')
                          end {then exterior}
                         else write(Ff[i,j]:4:1,'    ')
                       end; {for j}
                     writeln
                   end; {for i}
                 GOTOXY(20,17);
                 writeln('Introduzca los elementos de la matriz F');
                 writeln;
                 for i:=1 to M do
                   begin {for i}
                     for j:=1 to N do
                       begin {for j}
                         if abs(Ff[i,j])<30000
                           then F[i,j]:=Ff[i,j]
                           else
                             begin {else interno}
                               if abs(F[i,j])=30000
                                 then
                                   begin {then F}
                                     if (i=M) and (j=N)
                                       then
                                         begin {then}
                                           write('F(',i,',',j,')=');
                                           read(F[i,j]);
                                           write('  ')
```

```
                            end {then}
                          else
                            begin {else}
                              write('F(',i,',',j,')=');
                              read(F[i,j]);
                              write('   ');
                              if j=N
                                then
                                  begin {then}
                                    k3:=i+1;
                                    k4:=1
                                  end {then}
                                else
                                  begin {else}
                                    k3:=i;
                                    k4:=j+1
                                  end; {else}
                              for k1:=k3 to M do
                                begin {for k1}
                                  for k2:=k4 to N do
                                    begin {for k2}
                                      if (Ff[i,j]-
                                                Ff[k1,k2])=0
                                        then F[k1,k2]:=
                                                    F[i,j];
                                      if (Ff[i,j]+
                                                Ff[k1,k2])=0
                                        then F[k1,k2]:=
                                                   -F[i,j];
                                    end; {for k2}
                                  k4:=1
                                end {for k1}
                            end {else}
                      end {then F}
                end {else interno}
          end {for j}
      end; {for i}
  GOTOXY(27,24);
  write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
  readln(z)
  end {then R1 = 1}
else
  begin {else R1 = 1}
    CLRSCR;
    GOTOXY(14,5);
    write('Introduzca los valores de las matrices ');
    writeln('diagonales Mk');
    GOTOXY(30,6);
    write('k = 0');
    if MDI<>0
      then
```

```
                    begin
                      for LL:=1 to MDI do
                         write('  ,',LL:2);
                    end;
                writeln;writeln;
                for LL:=0 to MDI do
                  begin {for i}
                    writeln('Matriz M',LL);
                    for j:=1 to M do
                      begin {for j}
                        write('M',LL,'(',j,',',j,')= ');
                        read(MI[LL,j]);
                        write('  ')
                      end; {for j}
                    writeln;writeln;
                  end; {for LL}
                GOTOXY(27,24);
                write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                readln(z);
                for i:=1 to M do
                  begin {for i}
                    for j:=1 to N do
                        MCAT[i,j]:=MI[0,i]*C[i,j]-A1AST[i,j]
                  end; {for i}
                AD:=A;
                for k:=1 to MDI do
                  begin {for k}
                    for i:=1 to M do
                      begin {for i}
                        for j:=1 to N do
                          MC[i,j]:=MI[k,i]*C[i,j]
                      end; {for i}
                    ProductoMatrices(M,N,N,MC,AD,MCA);
                    ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN);
                    AD:=AN;
                    for i:=1 to M do
                      begin {for i}
                        for j:=1 to N do
                          MCAT[i,j]:=MCAT[i,j]+MCA[i,j]
                      end {for i}
                  end; {for k}
                ProductoMatrices(M,N,M,BASTINV,MCAT,F);
              end; {else R = 1}
           ProductoMatrices(N,N,M,B,F,MC);
           for i:=1 to N do
             begin {for i}
               for j:=1 to N do
                 MC[i,j]:=A[i,j]+MC[i,j]
             end; {for i}
           tt:=0;
           for ii:=1 to M do
```

```
                         begin {for ii}
                           for k:=1 to N do
                             begin {for k}
                               for j:=1 to M do
                                 Q[k,j]:=0
                             end; {for k}
                           for j:=1 to N do
                             CI[j]:=C[ii,j];
                           i1:=N-D[ii];
                           i2:=1;
                           if D[ii]=0
                             then
                               begin {then}
                                 ProductoVectorMatriz(M,N,CI,B,CIAB);
                                 for j:=1 to M do
                                     Q[i1,j]:=CIAB[j];
                                 i1:=i1-1
                               end; {then}
                           AD:=MC;
                           if D[ii] >= 2
                             then
                               begin {then}
                                 repeat
                                   ProductoMatrices(N,N,N,MC,AD,AN);
                                   AD:=AN;
                                   i2:=i2+1;
                                 until i2=D[ii]
                               end; {then}
                           repeat
                             ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA);
                             ProductoVectorMatriz(M,N,CIA,B,CIAB);
                             for j:=1 to M do
                               Q[i1,j]:=CIAB[j];
                             ProductoMatrices(N,N,N,MC,AD,AN);
                             AD:=AN;
                             i1:=i1-1;
                             i2:=i2+1;
                           until i2=N;
                           for i:=1 to N do
                             begin {for i}
                               MCA[i,1]:=Q[i,ii];
                               MCAT[1,i]:=Q[i,ii]
                             end; {for i}
                           i2:=1;
                           repeat
                             if i2 <> ii
                               then
                                 begin {then}
                                   for i:=1 to N do
                                     begin {for i}
                                       MCA[i,2]:=Q[i,i2];
```

```
                        MCAT[2,i]:=Q[i,i2]
                      end; {for i}
                    DeterminanteEInversa(2,MCAT,MCA,Deter);
                    if abs(Deter)>=0.0001
                      then tt:=1
                  end; {then}
                i2:=i2+1;
              until (i2=M+1) or (tt=1);
            end; {for ii}
          if tt = 0
            then
              Begin {then}
                G:=BASTINV;
                CLRSCR;
                GOTOXY(20,5);
                writeln('Quiere imprimir el conjunto de Matrices F');
                GOTOXY(25,6);
                write('que desacopla el sistema (S/N) ');
                readln(Z);
                if (Z='S') or (Z='s')
                  then
                    begin {then Z = S}
                      writeln;writeln;
                      for i:=1 to M do
                        begin {for i}
                          write('Fila ',i,':    ');
                          for j:=1 to N do
                            begin {for j}
                              if abs(Ff[i,j])>30000
                               then
                                begin {then exterior}
                                 if Ff[i,j]>0
                                  then write(' f',(Ff[i,j]-30000):2:0,
                                                                   ' ')
                                  else write('-f',-(Ff[i,j]+30000):2:0
                                                                 ,'    ')
                                end {then externo}
                               else write(Ff[i,j]:4:1,'     ')
                            end; {for j}
                        writeln
                        end; {for i}
                    end; {then Z = S}
                GOTOXY(27,24);
                write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                readln(Z);
                InversaMatrizDinamica(N,A,SIA,D1);
                RaicesPolinomiales(N,D1,Xr,Xi,Z1,Z2);
                CLRSCR;
                GOTOXY(30,5);
                writeln('Polos de Lazo Abierto');
                writeln;
```

```
writeln('      Partes de los polos:');
writeln;
writeln('    Reales   ','   ','   Imaginarias');
if N<>Z2-1
  then
    begin {then}
      for i:=1 to Z1 do
        Writeln(Xr[i]:10:3)
    end; {then}
if N<>Z1
  then
    begin {then}
      for i:=1 to Z2-1 do
        begin {for i}
          for j:=1 to 2 do
            write(Xi[i,j]:10:3,'      ');
          writeln
        end {for i}
     end; {then}
GOTOXY (27,24);
write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
readln(Z);
ProductoMatrices(N,N,M,B,F,ABF);
for i:=1 to N do
  begin {for i}
    for j:=1 to N do
      ABF[i,j]:=A[i,j]+ABF[i,j]
  end; {for i}
InversaMatrizDinamica(N,ABF,SIA,D2);
RaicesPolinomiales(N,D2,Yr,Yi,Z3,Z4);
CLRSCR;
GOTOXY(30,5);
writeln('Polos de Lazo Cerrado');
writeln;
writeln('      Partes de los polos:');
writeln;
writeln('    Reales   ','   ','   Imaginarias');
if N<>Z4-1
 then
    begin {then}
      for i:=1 to Z3 do
         Writeln(Yr[i]:10:3)
      end; {then}
if N<>Z3
  then
    begin {then}
      for i:=1 to Z4-1 do
        begin {for i}
          for j:=1 to 2 do
            write(Yi[i,j]:10:3,'      ');
      writeln
```

```
                    end {for i}
                  end; {then}
                GOTOXY(25,20);
                write('Quiere cambiar éstos Polos (S/N) ');
                readln(Z);
                if (Z='S') or (Z='s')
                  then t:=0
                  else t:=1;
                GOTOXY (27,24);
                write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                readln(z);
              end {then tt=0}
            else
              begin {else tt=0}
                CLRSCR;
                GOTOXY(16,5);
                write('No hay como desacoplar el sistema porque no ');
                GOTOXY(16,6);
                write('se cumple la condición  rango[ Qi (F) ] = 1');
                GOTOXY(16,8);
                write('Pero PUEDE haber un subconjunto de matrices');
                GOTOXY(16,9);
                write('         F que desacoplen el sistema');
                GOTOXY(16,11);
                write('  Intente una vez más si lo desea ..... !');
                GOTOXY(25,20);
                write('Quiere cambiar los Polos (S/N) ');
                readln(Z);
                if (Z='S') or (Z='s')
                  then t:=0
                  else t:=1;
                GOTOXY (27,24);
                write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                readln(z);
              end; {else tt=0}
        until t=1;
        if tt=0
          then
            begin {then tt = 0}
              CLRSCR;
              GOTOXY (24,5);
              writeln('Matriz F que desacopla el sistema');
              writeln;writeln;
              for i:=1 to M do
                begin {for i}
                  write('Fila ',i,':    ');
                  for j:=1 to N do
                    write(F[i,j]:10:3);
                  writeln('  ')
                end; {for i}
              GOTOXY (27,24);
```

```
write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
readln(z);
CLRSCR;
GOTOXY (24,5);
writeln('Matriz G que desacopla el sistema');
writeln;writeln;
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write('Fila ',i,':   ');
    for j:=1 to M do
      write(G[i,j]:10:3);
    writeln('  ')
  end; {for i}
GOTOXY(27,24);
write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
readln(z);
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    for i:=1 to N do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          CB[i,j]:=SIA[i,j,k]
      end; {for i}
    ProductoMatrices(M,N,N,C,CB,MC);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          Gc[i,j,k]:=MC[i,j]
      end; {for i}
  end; {for k}
ProductoMatrices(N,M,M,B,BASTINV,MCA);
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          CB[i,j]:=Gc[i,j,k]
      end; {for i}
    ProductoMatrices(M,M,N,CB,MCA,MC);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to M do
          Gc[i,j,k]:=MC[i,j]
      end; {for i}
  end; {for k}
  CLRSCR;
  GOTOXY(12,5);
  write('Quiere ver la Matriz Función de ');
  write('Transferencia Gc (S/N) ');
  readln(Z);
  if (Z='S') or (Z='s')
```

```
          then
            begin {then Z = S}
              for k:=0 to N-1 do
                begin {for k}
                  CLRSCR;
                  GOTOXY (22,5);
                  write('MATRICES NUMERADORES DE Gc EN ');
                  writeln('POTENCIAS DE s');
                  writeln;writeln;
                  writeln('Grado ',N-k-1);
                  writeln;
                  for i:=1 to M do
                    begin {for i}
                      write('Fila ',i,':    ');
                        for j:=1 to M do
                          write(Gc[i,j,k]:10:3);
                        writeln('   ')
                    end; {for i}
                  GOTOXY (15,24);
                  write('PARA SEGUIR VIENDO LOS RESULTADOS');
                  write('  PULSE " ENTER " :');
                  readln(z);
                end; {for k}
              CLRSCR;
              GOTOXY(33,5);
              writeln('POLINOMIO CARACTERISTICO');
              writeln;
              for k:=0 to N do
                writeln('Grado',N-k,':    ',D2[k]:10:3);
              GOTOXY(27,24);
              write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
              readln(z);
            end; {then Z = S}
        CLRSCR;
        GOTOXY (17,5);
        write('QUIERE OBTENER LOS RESULTADOS EN LA');
        write(' IMPRESORA (S/N) ');
        readln(Z);
        if (Z='S') or (Z='s')
          then
            begin {then}
              GOTOXY(20,7);
              write('Asegúrese que este prendida la ');
              write('impresora ... !');
            end; {then}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(ZZ);
        if (Z='S') or (Z='s')
          then
            begin {then}
```

```
write(LST,'DESACOPLAMIENTO POR REALIMEN');
writeln(LST,'TACION DE ESTADO');
write(LST,'--------------- --- --------');
writeln(LST,'------ -- ------');
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ A');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to N do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to N do
      write(LST,A[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ B');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to N do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      write(LST,B[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ C');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to N do
      write(LST,C[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
if R1<>1
  then
    begin {then}
      writeln(LST);writeln(LST);
      writeln(LST,'MATRICES DIAGONALES Mk');
      for LL:=0 to MDI do
        begin {for LL}
          writeln(LST);writeln(LST);
          writeln(LST,'Matriz M',LL);
          writeln(LST);
          for i:=1 to M do
            begin {for i}
              write(LST,'Fila ',i,':    ');
              for j:=1 to M do
                begin {for j}
                  if i<>j
                    then write(LST,0.0:10:3)
```

```
                    else write(LST,MI[LL,j]:10:3
                end; {forj}
              writeln(LST)
            end {for i}
        end; {for LL}
    end; {then}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ F');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to N do
      write(LST,F[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ G');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      write(LST,G[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
write(LST,'MATRIZ FUNCION DE TRANS');
writeln(LST,'FERENCIA DE LAZO CERRADO');
writeln(LST);writeln(LST);
write(LST,'Matrices numeradores de Gc ');
writeln(LST,'en potencias de s');
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    writeln(LST);writeln(LST);
    writeln(LST,'Grado ',N-k-1);
    writeln(LST);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        write(LST,'Fila ',i,':    ');
          for j:=1 to M do
            write(LST,Gc[i,j,k]:10:3);
          writeln(LST,'  ')
      end; {for i}
  end; {for k}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'Polinomio característico');
writeln(LST);writeln(LST);
for k:=0 to N do
  writeln(LST,'Grado',N-k,':    ',D2[k]:10:3);
writeln(LST);writeln(LST);
```

```
                      writeln(LST,'POLOS DE LAZO CERRADO');
                      writeln(LST);
                      writeln(LST,'      Partes de los polos:');
                      writeln(LST);
                      writeln(LST,'    Reales  ','  ',
                                 '  Imaginarias');
                      if N<>Z4-1
                        then
                          begin {then}
                            for i:=1 to Z3 do
                              writeln(LST,Yr[i]:10:3)
                          end; {then}
                      if N<>Z3
                         then
                           begin {then}
                             for i:=1 to Z4-1 do
                               begin {for i}
                                 for j:=1 to 2 do
                                   write(LST,Yi[i,j]:10:3,'      ');
                                  writeln(LST)
                               end {for i}
                           end {then}
                    end {then}
            end; {then tt = 0}
      end {then SUMA <= N}
    else
      begin {else SUMA <= N}
        CLRSCR;
        GOTOXY(15,8);
        write('COMO  m + d1 + d2 +...+ dm > n  ,SIENDO EL NUMERO ');
        GOTOXY(15,10);
        write('DE POLOS DE LAZO CERRADO A SER ASIGNADO, MAYOR AL ');
        GOTOXY(15,12);
        write('ORDEN DEL SISTEMA, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE');
        GOTOXY(15,14);
        write('                    DESACOPLAR');
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
      end {else SUMA <= N}
  end {then DET}
else
  begin {else DET}
    CLRSCR;
    GOTOXY(17,10);
    write('B* ES SINGULAR, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE');
    GOTOXY(17,12);
    write('                    DESACOPLAR');
    GOTOXY(27,24);
    write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
    readln(z);
```

```
                end; {else DET}
           END
          ELSE
           BEGIN
            CLRSCR;
            GOTOXY(10,10);
            write('PARA DESACOPLAR UN SISTEMA SE DEBE TENER LA CONDICION M <= N');
            GOTOXY(27,24);
            write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
            readln(z);
           END
    end
   else
    begin
     CLRSCR;
      GOTOXY(20,10);
       write('  EL ORDEN DEL SISTEMA DEBE SER  N <= 10 , ');
       GOTOXY(16,12);
       write('DEBIDO A LA INICIALIZACION REALIZADA EN EL PROGRAMA');
       GOTOXY(27,24);
       write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
       read(Z)
   end
   end. {RealimentacionDeEstado}
```

DESACOPLAMIENTO POR REALIMENTACION DE SALIDA

```
program RealimentacionDeSalida(input,output);
   const
      MaxOrdenMatriz=10;
      Max=100;
   type
      Index=1..Max;
      Indice=0..MaxOrdenMatriz;
      OrdenN=1..MaxOrdenMatriz;
      Matrices=array[OrdenN,OrdenN,Indice] of real;
      MatrizCO1=array[OrdenN,Index] of real;
      MatrizCO2=array[Index,OrdenN] of real;
      MatrizReal=array[OrdenN,OrdenN] of real;
      Imaginarias=array[OrdenN,1..2] of real;
      Vectores=array[OrdenN] of real;
      Vector0=array[Indice] of real;
   var
      N,M,i,i1,j,k1,k2,k3,k4,Z1,Z2,Z3,Z4:OrdenN;
      k:Index;
      A,B,C,H,G,BAST,BASTINV,AD,AN,CB,AB,CA,PPT,QQT,AAST,ASTB:MatrizReal;
      AJAST,DIAG,ABHC:MatrizReal;
      SIA,Gc:Matrices;
      P,QT:MatrizCO1;
      PT,Q:MatrizCO2;
      CI,CIA,CIAB,BJ,ABJ,DELTA,Xr,Yr:Vectores;
      Xi,Yi:Imaginarias;
      D1,D2:Vector0;
      D:array[OrdenN] of integer;
      L,LL,t,tt,M1:integer;
      DET,Deter1,Deter2:real;
      Z,S,ZZ:char;

  procedure ProductoMatrices(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna:OrdenN;
                             Matriz1,Matriz2:MatrizReal;
                             var Producto:MatrizReal);
   var
      S1:real;

   begin {ProductoMatrices}
     for k1:=1 to FilaM1 do
       begin {for k1}
         for k2:=1 to ColumnaM2 do
           begin {for k2}
             S1:=0;
             for k3:=1 to FilaColumna do
               begin {for k3}
                 Producto[k1,k2]:=Matriz1[k1,k3]*Matriz2[k3,k2];
                 S1:=S1+Producto[k1,k2]
               end; {for k3}
             Producto[k1,k2]:=S1
           end {for k2}
```

```
        end {for k1}
    end; {ProductoMatrices}

  procedure MatricesProducto(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna:OrdenN;
                             Matriz1:MatrizCO1;Matriz2:MatrizCO2;
                             var Producto:MatrizReal);
   var
      S1:real;

   begin {ProductoMatrices}
     for k1:=1 to FilaM1 do
       begin {for k1}
         for k2:=1 to ColumnaM2 do
           begin {for k2}
             S1:=0;
             for k3:=1 to FilaColumna do
               begin {for k3}
                 Producto[k1,k2]:=Matriz1[k1,k3]*Matriz2[k3,k2];
                 S1:=S1+Producto[k1,k2]
               end; {for k3}
             Producto[k1,k2]:=S1
           end {for k2}
       end {for k1}
   end; {ProductoMatrices}

  procedure ProductoVectorMatriz(Elemento,Columna:OrdenN;Vector:Vectores;
                                 Matriz:MatrizReal;var Prod:Vectores);
    var
      S1:real;

    begin {ProductoVectorMatriz}
      for k2:=1 to Elemento do
        begin {for k2}
          S1:=0;
          for k3:=1 to Columna do
            begin {for k3}
              Prod[k2]:=Vector[k3]*Matriz[k3,k2];
              S1:=S1+Prod[k2]
            end; {for k3}
          Prod[k2]:=S1
        end; {for k2}
   end; {ProductoVectorMatriz}

  procedure ProductoMatrizVector(Elemento,Columna:OrdenN;Matriz:MatrizReal;
                                 Vector:Vectores;var Prod:Vectores);
    var
      S1:real;

    begin {ProductoVectorMatriz}
      for k2:=1 to Elemento do
        begin {for k2}
```

```
        S1:=0;
        for k3:=1 to Columna do
          begin {for k3}
            Prod[k2]:=Vector[k3]*Matriz[k2,k3];
            S1:=S1+Prod[k2]
          end; {for k3}
        Prod[k2]:=S1
      end; {for k2}
 end; {ProductoVectorMatriz}

procedure DeterminanteEInversa(M:OrdenN;A2:MatrizReal;var A1INV:MatrizReal;
                               var De:real);
  var
     j1:OrdenN;
     A1:matrizReal;
     X:vectores;
     PP:array[OrdenN,1..2] of integer;
     S1,CEL:real;

  procedure Cholesky;
    Begin {Cholesky}
      k3:=0;
      for k1:=1 to M do
        begin {for k1}
          if k1<M
            then
              begin {then exterior}
                if A1[k1,k1]=0
                  then
                    begin {then interior}
                      k3:=k3+1;
                      k:=k1;
                      repeat
                        k:=k+1;
                      until (A1[k1,k]=1) or (k=M+1);
                      if k<=M
                        then
                          begin {then}
                            PP[k3,1]:=k1;
                            PP[k3,2]:=k;
                            for k2:=1 to M do
                              begin {for k2}
                                CEL:=A1[k2,k1];
                                A1[k2,k1]:=A1[k2,k];
                                A1[k2,k]:=CEL
                              end {for k2}
                          end {then}
                    end {then interior}
              end {then exterior}
        end; {for k1}
      if k<=M
```

```
          then
            begin
              for j:=2 to M+1 do
                A1[1,j]:=A1[1,j]/A1[1,1];
            end;
        for i:=2 to M do
          begin {for i}
            for j:=2 to M+1 do
              begin {fo j}
                if i>=j
                  then
                    begin {then externo}
                      S1:=0;
                      for k:=1 to j-1 do
                        S1:=S1+A1[i,k]*A1[k,j];
                      A1[i,j]:=A1[i,j]-S1
                    end {then externo}
                  else
                    begin {else}
                      if A1[i,i]<>0
                        then
                          begin {then interno}
                            S1:=0;
                            for k:=1 to i-1 do
                              S1:=S1+A1[i,k]*A1[k,j];
                            A1[i,j]:=(A1[i,j]-S1)/A1[i,i]
                          end {the interno}
                    end {else}
              end {for j}
          end; {for i}
          X[M]:=A1[M,M+1];
          for i:=1 to M-1 do
            begin {for i}
              k1:=M-i;
              S1:=0;
              for j:=k1+1 to M do
                S1:=S1+A1[k1,j]*X[j];
              X[k1]:=A1[k1,M+1]-S1;
            end; {for i}
        k:=k3;
        if k>1
          then
            begin {then}
              repeat
                k:=k mod 2;
              until k<=1
            end; {then}
        if k=0
          then De:=1
          else De:=-1;
        for i:=1 to M do
```

```
            De:=De*A1[i,i];
          if De<>0
            then
              begin {then}
                for j:=1 to k3 do
                  begin {for k3}
                    i:=k3-j+1;
                    k1:=PP[i,1];
                    k:=PP[i,2];
                    CEL:=X[k1];
                    X[k1]:=X[k];
                    X[k]:=CEL
                  end {for k3}
              end {then}
        end; {Cholesky}

      begin {DeterminanteEInversa}
        for j1:=1 to M do
          begin {for j1}
            A1:=A2;
            for i:=1 to M do
              begin {for i}
                if i=j1
                  then A1[i,M+1]:=1
                  else A1[i,M+1]:=0;
              end; {for i}
            Cholesky;
            for i:=1 to M do
              A1INV[i,j1]:=X[i];
          end {for j1}
      end; {DeterminanteEInversa}

    procedure InversaMatrizDinamica(N:OrdenN;A1:MatrizReal;var R:Matrices;
                                            var ALFA:Vector0);
      var
        AR:MatrizReal;
        TRAZO:real;

      procedure Multiplicacion;
        var
          S1:real;

        begin {Multiplicacion}
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for j:=1 to N do
                begin {for j}
                  S1:=0;
                  for k1:=1 to N do
                    begin {for k1}
                      AR[i,j]:=A1[i,k1]*R[k1,j,k-1];
```

```
                        S1:=S1+AR[i,j]
                      end; {for k1}
                    AR[i,j]:=S1
                  end {for j}
              end {for i}
          end; {Multiplicacion}

      begin {InversaMatrizDinamica}
          ALFA[0]:=1;
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for j:=1 to N do
                begin {for j}
                  if i<>j
                    then R[i,j,0]:=0
                    else R[i,j,0]:=1
                end {for j}
            end; {for i}
          for k:=1 to N do
            begin {for k}
              Multiplicacion;
              TRAZO:=0;
              for i:=1 to N do
                TRAZO:=TRAZO+AR[i,i];
              ALFA[k]:=-TRAZO/k;
              for i:=1 to N do
                begin {for i}
                  for j:=1 to N do
                    begin {for j}
                      if I<>j
                        then R[i,j,k]:=AR[i,j]
                        else R[i,j,k]:=AR[i,j]+ALFA[k]
                    end {for j}
                end; {for i}
            end; {for k}
      end; {InversaMatrizDinamica}

    procedure RaicesPolinomiales(N1:OrdenN;Polinomio:Vector0;var X1:Vectores;
                                 var X2:Imaginarias;var Z1,Z2:OrdenN);
      const
          Epsilon=0.0001;
      var
          NN:OrdenN;
          U,DU,V,DV,DN,DES,REALES,IMAG:real;
          A1,B1,C1:Vector0;
      begin {RaicesPolinomiales}
          NN:=N1; Z1:=1; Z2:=1;
          A1:=Polinomio;
          while N1>=2 do
            begin {while exterior}
              if A1[N1]<>0
```

```
            then
              begin {then exterior}
                if abs(A1[N1-2])<=0.0000001
                  then
                    Begin {then}
                      U:=0; V:=0
                    end {then}
                  else
                    begin {else}
                      U:=A1[N1-1]/A1[N1-2];
                      V:=A1[N1]/A1[N1-2]
                    end; {else}
                if N1<>2
                  then
                    begin {then}
                      repeat
                        B1[0]:=1; B1[1]:=A1[1]-U;
                        C1[0]:=1; C1[1]:=B1[1]-U;
                        for k:=2 to N1 do
                          begin {for k}
                            B1[k]:=A1[k]-B1[k-1]*U-B1[k-2]*V;
                            C1[k]:=B1[k]-C1[k-1]*U-C1[k-2]*V
                          end; {for k}
                        DN:=C1[N1-1]*C1[N1-3]-C1[N1-2]*C1[N1-2];
                        if DN=0
                          then
                            begin
                              DU:=0.2;
                              DV:=0.1
                            end
                          else
                            begin
                              DU:=(B1[N1]*C1[N1-3]-B1[N1-1]*C1[N1-2])/DN;
                              DV:=(B1[N1-1]*C1[N1-1]-B1[N1]*C1[N1-2])/DN;
                            end;
                        U:=U+DU;
                        V:=V+DV
                      until (abs(B1[N1])<Epsilon) and (abs(B1[N1-1])<Epsilon);
                      U:=U-DU;
                      V:=V-DV
                    end; {then}
                DES:=U*U-4*V;
                if DES>=0
                  then
                    begin {then}
                      X1[Z1]:=(-U+sqrt(DES))/2;
                      X1[Z1+1]:=(-U-sqrt(DES))/2;
                      Z1:=Z1+2
                    end {then}
                  else
                    begin {else}
```

```
                      IMAG:=sqrt(-DES)/2;
                      REALES:=-U/2;
                      X2[Z2,1]:=REALES;
                      X2[Z2,2]:=IMAG;
                      X2[Z2+1,1]:=REALES;
                      X2[Z2+1,2]:=-IMAG;
                      Z2:=Z2+2
                    end; {else}
                N1:=N1-2;
                for k:=0 to N1 do
                  A1[k]:=B1[k]
              end {then exterior}
            else
              begin {else exterior}
                X1[Z1]:=0;
                Z1:=Z1+1;
                N1:=N1-1;
                if N1=1
                  then B1[1]:=A1[1]
              end {else exterior}
        end; {while exterior}
      if N1=0
        then Z1:=Z1-1
        else
         begin {else}
           if NN=1
             then X1[Z1]:=-A1[1]
             else X1[Z1]:=-B1[1]
         end; {else}
   end; {RaicesPolinomiales}

begin {RealimentacionDeSalida}
      CLRSCR;
      GOTOXY(17,2);
      write('R E A L I M E N T A C I O N   D E   S A L I D A');
      GOTOXY(17,3);
      write('-------------------------   ---   -----------');
      GOTOXY(20,5);
      write('Descripción del Sistema de Lazo Abierto');
      GOTOXY(25,6);
      write('.');
      GOTOXY(25,7);
      write('x  =  A x  +  B u');
      GOTOXY(25,9);
      write('y  =  C x');
      GOTOXY(20,12);
      write('Descripción del Sistema de Lazo Cerrado');
      GOTOXY(25,13);
      write('.');
      GOTOXY(25,14);
      write('x  =  ( A  + B H C ) x + B G w');
```

```
          GOTOXY(25,16);
          write('y  =  C x');
          GOTOXY(14,18);
          write('Gc = Matriz Función de Transferencia de Lazo Cerrado');
          GOTOXY(14,20);
          write('DELTA = Matriz Diagonal, que cambia la ubicación de ');
          GOTOXY(22,21);
          write('los polos de lazo cerrado');
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" '); .
          readln(z);
          CLRSCR;
          GOTOXY (17,5);
          write('Orden del Sistema                               : N = ');
          readln(N);
          GOTOXY (17,8);
          write('Número de Entradas y Salidas del Sistema : M = ');
          readln(M);
     if N<=MaxOrdenMatriz
      then
       begin
       IF M<=N
        THEN
         BEGIN
          CLRSCR;
          GOTOXY(36,5);
          writeln('MATRIZ A');
          writeln;
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for j:=1 to N do
                begin {for j}
                  write('A(',i,',',j,')=');
                  read(A[i,j]);
                  write('  ')
                end; {for j}
                writeln
            end; {for i}
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z);
          CLRSCR;
          GOTOXY(36,5);
          writeln('MATRIZ B');
          writeln;
          for i:=1 to N do
            begin {for i}
              for j:=1 to M do
                begin {for j}
                  write('B(',i,',',j,')=');
                  read(B[i,j]);
```

```
                write('   ')
              end; {for j}
              writeln
          end; {for i}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        CLRSCR;
        GOTOXY(36,5);
        writeln('MATRIZ C');
        writeln;
        for i:=1 to M do
          begin {for i}
            for j:=1 to N do
              begin {for j}
                write('C(',i,',',j,')=');
                read(C[i,j]);
                write('   ')
              end; {for j}
              writeln
          end; {for i}
        GOTOXY(27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
        ProductoMatrices(M,M,N,C,B,CB);
        for i:=1 to M do
          D[i]:=0;
        L:=0;
        for i:=1 to M do
          begin {for i}
            k:=0;
            for j:=1 to M do
              begin {for j}
                if CB[i,j]=0
                  then k:=k+1
              end; {for j}
            if k=M
              then D[i]:=1
              else
                begin {else}
                  for j:=1 to M do
                    BAST[i,j]:=CB[i,j];
                  L:=L+1
                end {else}
          end; {for i}
        if L<>M
          then
            begin {then externo}
              for i:=1 to M do
                begin {for i}
                  if D[i]<>0
```

```
                        then
                          begin {then interno}
                            L:=0;
                            for j:=1 to N do
                              CI[j]:=C[i,j];
                            AD:=A;
                            repeat
                              k:=0;
                              ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA);
                              ProductoVectorMatriz(M,N,CIA,B,CIAB);
                              for j:=1 to M do
                                begin
                                  if CIAB[j]=0
                                    then k:=k+1;
                                end;
                              if k=M
                                then
                                  begin {then mas interno}
                                    D[i]:=D[i]+1;
                                    ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN);
                                    AD:=AN;
                                    if D[i]=N
                                      then
                                        begin
                                          for j:=1 to M do
                                            BAST[i,j]:=0;
                                          L:=N-1
                                        end
                                  end {then mas interno}
                                else
                                  begin {else mas interno}
                                    for j:=1 to M do
                                      BAST[i,j]:=CIAB[j];
                                    L:=N-1
                                  end {else mas interno}
                            until L=(N-1)
                          end {interno}
                    end {for i}
                end {then externo}
              else
                BAST:=CB;
            DeterminanteEInversa(M,BAST,BASTINV,DET);
            if DET<>0
              then
                begin {then DET}
                  for i:=1 to N do
                    begin {for i}
                      for j:=1 to M do
                        begin {for j}
                          P[i,j]:=B[i,j];
                          PT[j,i]:=B[i,j]
```

```
                end {for j}
             end; {for i}
           AD:=A;
           k:=M+1;
           for i1:=1 to N-1 do
             begin {for i1}
               ProductoMatrices(N,M,N,AD,B,AB);
               for j:=1 to M do
                 begin {for j}
                   for i:=1 to N do
                     begin {for i}
                       P[i,k]:=AB[i,j];
                       PT[k,i]:=AB[i,j]
                     end; {for i}
                   k:=K+1
                 end; {for j}
               ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN);
               AD:=AN;
             end; {for i1}
           MatricesProducto(N,N,M*N,P,PT,PPT);
           DeterminanteEInversa(N,PPT,PPT,Deter1);
           if Deter1<>0
             then
               begin {then Deter1 <> 0}
                 for i:=1 to M do
                   begin {for i}
                     for j:=1 to N do
                       begin {for j}
                         Q[i,j]:=C[i,j];
                         QT[j,i]:=C[i,j]
                       end {for j}
                   end; {for i}
                 AD:=A;
                 k:=M+1;
                 for i1:=1 to N-1 do
                   begin {for i1}
                     ProductoMatrices(M,N,N,C,AD,CA);
                       for i:=1 to M do
                         begin {for i}
                           for j:=1 to N do
                             begin {for j}
                               Q[k,j]:=CA[i,j];
                               QT[j,k]:=CA[i,j]
                             end; {for j}
                           k:=k+1;
                         end; {for i}
                       ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN);
                       AD:=AN
                   end; {for i1}
                 MatricesProducto(N,N,M*N,QT,Q,QQT);
                 DeterminanteEInversa(N,QQT,QQT,Deter2);
```

```
                    if Deter2<>0
                      then
                        begin {then Deter2 <> 0}
                          for k:=1 to M do
                            begin {for k}
                              for i:=1 to M do
                                begin {for i}
                                  AD:=A;
                                  if (D[i]+D[k])<>0
                                    then
                                      begin {then}
                                        j:=1;
                                        repeat
                                          ProductoMatrices(N,N,N,A,AD,AN);
                                          AD:=AN;
                                          j:=j+1;
                                        until j=(D[i]+D[k]+1);
                                      end; {then}
                                  for j:=1 to N do
                                    CI[j]:=C[i,j];
                                  ProductoVectorMatriz(N,N,CI,AD,CIA);
                                  for j:=1 to N do
                                    AAST[i,j]:=CIA[j];
                                end; {for i}
                              ProductoMatrices(M,M,N,AAST,B,ASTB);
                              for i:=1 to M do
                                BJ[i]:=BASTINV[i,k];
                              ProductoMatrizVector(M,M,ASTB,BJ,ABJ);
                              for i:=1 to M do
                                AJAST[i,k]:=ABJ[i];
                            end; {for k}
                          repeat
                            CLRSCR;
                            GOTOXY(15,5);
                            write('Introduzca los valores de la matriz ');
                            writeln('diagonal DELTA');
                            writeln;
                            for i:=1 to M do
                              begin {for i}
                                for j:=1 to M do
                                  begin {for j}
                                    if i<>j
                                      then AAST[i,j]:=-AJAST[i,j]
                                      else
                                        begin {else}
                                          write('DELTA(',i,',',j,')= ');
                                          read(DELTA[i]);
                                          write('   ');
                                          AAST[i,j]:=DELTA[i]-AJAST[i,j]
                                        end {else}
                                  end {for j}
```

```
  end; {for i}
GOTOXY(27,24);
write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
readln(z);
ProductoMatrices(M,M,M,BASTINV,AAST,H);
tt:=0;
ProductoMatrices(M,M,N,C,B,CB);
ProductoMatrices(M,M,M,CB,BASTINV,DIAG);
L:=0;
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    for j:=1 to M do
      begin {for j}
        if i<>j
          then
            if DIAG[i,j]=0
              then L:=L+1
      end {for j}
  end; {for i}
k:=0;
if L=(M*M-M)
  then
    begin {then L = M*M-M}
      ProductoMatrices(N,M,M,B,H,CB);
      ProductoMatrices(N,N,M,CB,C,AB);
      for i:=1 to N do
        begin {for i}
          for j:=1 to N do
            ABHC[i,j]:=A[i,j]+AB[i,j];
        end; {for i}
      LL:=0;
      AD:=ABHC;
      repeat
        ProductoMatrices(M,N,N,C,AD,CB);
        ProductoMatrices(M,M,N,CB,B,CA);
        ProductoMatrices(M,M,M,CA,BASTINV,DIAG);
        L:=0;
        for i:=1 to M do
          begin {for i}
            for j:=1 to M do
              begin {for j}
                if i<>j
                  then
                    if DIAG[i,j]=0
                      then L:=L+1
              end {forj}
          end; {for i}
        if L=(M*M-M)
          then
            begin {then}
              k:=k+1;
```

```
                              LL:=LL+1
                            end {then}
                        else LL:=N-1;
                        ProductoMatrices(N,N,N,AD,ABHC,AN);
                        AD:=AN;
                      until LL=(N-1);
                    end; {then L = M*M-M}
                if k=(N-1)
                  then
                    begin {then externo}
                      tt:=1;
                      G:=BASTINV;
                      InversaMatrizDinamica(N,A,SIA,D1);
                      RaicesPolinomiales(N,D1,Xr,Xi,Z1,Z2);
                      CLRSCR;
                      GOTOXY(30,5);
                      writeln('Polos de Lazo Abierto');
                      writeln;
                      writeln('      Partes de los polos:');
                      writeln;
                      writeln('   Reales   ','   ','   Imaginarias');
                      if N<>Z2-1
                        then
                          begin {then}
                            for i:=1 to Z1 do
                              Writeln(Xr[i]:10:3)
                          end; {then}
                      if N<>Z1
                        then
                          begin {then}
                            for i:=1 to Z2-1 do
                              begin {for i}
                                for j:=1 to 2 do
                                  write(Xi[i,j]:10:3,'      ');
                                writeln
                              end {for i}
                          end; {then}
                      GOTOXY (27,24);
                      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                      readln(Z);
                      InversaMatrizDinamica(N,ABHC,SIA,D2);
                      RaicesPolinomiales(N,D2,Yr,Yi,Z3,Z4);
                      CLRSCR;
                      GOTOXY(30,5);
                      writeln('Polos de Lazo Cerrado');
                      writeln;
                      writeln('      Partes de los polos:');
                      writeln;
                      writeln('   Reales   ','   ','   Imaginarias');
                      if N<>Z4-1
                        then
```

```
            begin {then}
              for i:=1 to Z3 do
                Writeln(Yr[i]:10:3)
            end; {then}
        if N<>Z3
           then
             begin {then}
               for i:=1 to Z4-1 do
                 begin {for i}
                   for j:=1 to 2 do
                     write(Yi[i,j]:10:3,'      ');
                    writeln
                 end {for i}
             end; {then}
        GOTOXY(25,20);
        write('Quiere cambiar éstos Polos (S/N) ');
        readln(Z);
        if (Z='S') or (Z='s')
          then t:=0
          else t:=1;
        GOTOXY (27,24);
        write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
        readln(z);
      end {then externo}
    else t:=1;
until t=1;
if tt=1
  then
    begin {then tt = 1}
      CLRSCR;
      GOTOXY (24,5);
      writeln('Matriz H que desacopla el sistema');
      writeln;writeln;
      for i:=1 to M do
        begin {for i}
          write('Fila ',i,':    ');
          for j:=1 to M do
            write(H[i,j]:10:3);
          writeln('  ')
        end; {for i}
      GOTOXY (27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      readln(z);
      CLRSCR;
      GOTOXY (24,5);
      writeln('Matriz G que desacopla el sistema');
      writeln;writeln;
      for i:=1 to M do
        begin {for i}
          write('Fila ',i,':    ');
          for j:=1 to M do
```

```
      write(G[i,j]:10:3);
    writeln('  ')
  end; {for i}
GOTOXY(27,24);
write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
readln(z);
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    for i:=1 to N do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          CB[i,j]:=SIA[i,j,k]
      end; {for i}
    ProductoMatrices(M,N,N,C,CB,PPT);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          Gc[i,j,k]:=PPT[i,j]
      end; {for i}
  end; {for k}
ProductoMatrices(N,M,M,B,BASTINV,QQT);
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to N do
          CB[i,j]:=Gc[i,j,k]
      end; {for i}
    ProductoMatrices(M,M,N,CB,QQT,PPT);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        for j:=1 to M do
          Gc[i,j,k]:=PPT[i,j]
      end; {for i}
  end; {for k}
CLRSCR;
GOTOXY(12,5);
write('Quiere ver la Matriz Función de ');
write('Transferencia Gc (S/N) ');
readln(Z);
if (Z='S') or (Z='s')
  then
    begin {then Z = S}
      for k:=0 to N-1 do
        begin {for k}
          CLRSCR;
          GOTOXY (18,5);
          write('MATRICES NUMERADORES DE  Gc');
          writeln('  EN POTENCIAS DE s');
          writeln;writeln;
          writeln('Grado ',N-k-1);
```

```
                              writeln;
                              for i:=1 to M do
                                begin {for i}
                                  write('Fila ',i,':    ');
                                    for j:=1 to M do
                                      write(Gc[i,j,k]:10:3);
                                    writeln('   ')
                                end; {for i}
                              GOTOXY (15,24);
                              write('PARA SEGUIR VIENDO LOS ');
                              write('RESULTADO PULSE " ENTER " :');
                              readln(z);
                            end; {for k}
                          CLRSCR;
                          GOTOXY(33,5);
                          writeln('POLINOMIO CARACTERISTICO');
                          writeln;
                          for k:=0 to N do
                            writeln('Grado',N-k,':     ',D2[k]:10:3);
                          GOTOXY(27,24);
                          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                          readln(z);
                        end; {then Z = S}
                    CLRSCR;
                    GOTOXY (17,5);
                    write('QUIERE OBTENER LOS RESULTADOS EN LA');
                    write(' IMPRESORA (S/N) ');
                    readln(Z);
                    if (Z='S') or (Z='s')
                      then
                        begin {then}
                          GOTOXY(20,7);
                          write('Asegúrese que este prendida la ');
                          write('impresora ... !');
                        end; {then}
                    GOTOXY(27,24);
                    write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                    readln(ZZ);
                    if (Z='S') or (Z='s')
                      then
                        begin {then}
                          write(LST,'DESACOPLAMIENTO POR REALIMEN');
                          writeln(LST,'TACION DE SALIDA');
                          write(LST,'--------------- --- ---------');
                          writeln(LST,'------ -- ------');
                          writeln(LST);writeln(LST);
                          writeln(LST,'MATRIZ A');
                          writeln(LST);writeln(LST);
                          for i:=1 to N do
                            begin {for i}
                              write(LST,'Fila ',i,':    ');
```

```
    for j:=1 to N do
      write(LST,A[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ B');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to N do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      write(LST,B[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ C');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to N do
      write(LST,C[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ DIAGONAL DELTA');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      begin {for j}
        if i<>j
          then write(LST,0.0:10:3)
          else write(LST,DELTA[i]:10:3)
      end; {forj}
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ H');
writeln(LST);writeln(LST);
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      write(LST,H[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'MATRIZ G');
writeln(LST);writeln(LST);
```

```
for i:=1 to M do
  begin {for i}
    write(LST,'Fila ',i,':    ');
    for j:=1 to M do
      write(LST,G[i,j]:10:3);
    writeln(LST)
  end; {for i}
writeln(LST);writeln(LST);
write(LST,'MATRIZ FUNCION DE TRANS');
writeln(LST,'FERENCIA DE LAZO CERRADO');
writeln(LST);writeln(LST);
write(LST,'Matrices numeradores de Gc ');
writeln(LST,'en potencias de s');
for k:=0 to N-1 do
  begin {for k}
    writeln(LST);writeln(LST);
    writeln(LST,'Grado ',N-k-1);
    writeln(LST);
    for i:=1 to M do
      begin {for i}
        write(LST,'Fila ',i,':    ');
          for j:=1 to M do
            write(LST,Gc[i,j,k]:10:3);
          writeln(LST,'   ')
      end; {for i}
  end; {for k}
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'Polinomio característico');
writeln(LST);writeln(LST);
for k:=0 to N do
  writeln(LST,'Grado',N-k,':    ',
                  D2[k]:10:3);
writeln(LST);writeln(LST);
writeln(LST,'POLOS DE LAZO CERRADO');
writeln(LST);
writeln(LST,'       Partes de los polos:');
writeln(LST);
writeln(LST,'     Reales   ','   ',
              '   Imaginarias');
if N<>Z4-1
  then
    begin {then}
      for i:=1 to Z3 do
        writeln(LST,Yr[i]:10:3)
    end; {then}
if N<>Z3
   then
     begin {then}
       for i:=1 to Z4-1 do
         begin {for i}
           for j:=1 to 2 do
```

```
                                         write(LST,Yi[i,j]:10:3,
                                                   '      ');
                                        writeln(LST)
                                     end {for i}
                                 end {then}
                          end {then}
                    end {then tt = 1}
                  else
                    begin {else tt = 1}
                      CLRSCR;
                      GOTOXY(4,10);
                      write('LAS MATRICES  C ( A  +  B H C )j  , ');
                      write('j = 0,1, ... ,n-1  NO SON DIAGONALES, ');
                      GOTOXY(19,12);
                      write('ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE ');
                      writeln('DESACOPLAR');
                      GOTOXY(27,24);
                      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                      readln(z)
                    end {else tt =1}
              end {then Deter2 <> 0}
            else
              begin {else Deter2 <> 0}
                CLRSCR;
                GOTOXY(26,10);
                write('EL SISTEMA NO ES OBSERVABLE,');
                GOTOXY(19,12);
                write('ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR');
                GOTOXY(27,24);
                write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
                readln(z);
              end {else Deter2  <> 0}
        end {Deter1 <> 0}
      else
        begin {else Deter1 <> 0}
          CLRSCR;
          GOTOXY(26,10);
          write('EL SISTEMA NO ES CONTROLABLE,');
          GOTOXY(19,12);
          write('ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE DESACOPLAR');
          GOTOXY(27,24);
          write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
          readln(z)
        end {else Deter1 <> 0}
  end {then DET}
else
  begin {else DET}
    CLRSCR;
    GOTOXY(17,10);
    write('B* ES SINGULAR, ENTONCES EL SISTEMA NO SE PUEDE');
    GOTOXY(17,12);
```

```
            write('                        DESACOPLAR');
            GOTOXY(27,24);
            write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
            readln(z);
          end; {else DET}
     END
    ELSE
     BEGIN
      CLRSCR;
      GOTOXY(10,10);
      write('PARA DESACOPLAR UN SISTEMA SE DEBE TENER LA CONDICION M <= N');
      GOTOXY(27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      readln(z);
     END;
   end
  else
   begin
    CLRSCR;
     GOTOXY(20,10);
      write('  EL ORDEN DEL SISTEMA DEBE SER  N <= 10 , ');
      GOTOXY(16,12);
      write('DEBIDO A LA INICIALIZACION REALIZADA EN EL PROGRAMA');
      GOTOXY(27,24);
      write('PARA CONTINUAR PULSE "ENTER" ');
      read(Z)
  end
end. {RealimentacionDeSalida}
```

A P E N D I C E * C *

SUBPROGRAMAS

MATRIZ INVERSA POLINOMIAL.

Este subprograma <u>MatrizInversaPolinomial</u> determina la inversión de una matriz polinomial. Donde la matriz inversa está compuesta por un polinomio denominador, y una matriz tridimensional, cada uno de los planos de la matriz corresponde al respectivo grado polinomial.

<u>Análisis matemático</u>.-

Sean las matrices:

$\underline{A} = [\, a_{ij} \,]$, de orden n.

$\underline{B} = [\, b_{ij} \,]$, inversa de $\underline{A}$.

Se divide las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$, en submatrices o cajas de los órdenes indicados a continuación.

Como $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}_n$, se tiene:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}_p & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_q \end{array}\right] \qquad (C.1)$$

siendo: $p + q = n$

- Para $\underline{A}\,\underline{B}$, se tiene:

$$\underline{A}_{11}\,\underline{B}_{11} + \underline{A}_{12}\,\underline{B}_{21} = \underline{I}_p \qquad (C.2)$$

$$\underline{A}_{11}\,\underline{B}_{12} + \underline{A}_{12}\,\underline{B}_{22} = \underline{0} \qquad (C.3)$$

- Para $B\,A$, se tiene:

$$B_{21}\,A_{11} + B_{22}\,A_{21} = 0 \qquad (C.4)$$

$$B_{21}\,A_{12} + B_{22}\,A_{22} = I_q \qquad (C.5)$$

Se define:

$$B_{22} = \mu^{-1} \; . \qquad (C.6)$$

De la ecuación (C . 3) y con la ecuación (C . 6) se despeja B_{12},

$$A_{11}\,B_{12} = -\; A_{12}\,B_{22}$$

$$B_{12} = -\; A_{11}^{-1}A_{12}\,B_{22}$$

$$B_{12} = -\;(A_{11}^{-1}A_{12})\; \mu^{-1} \; . \qquad (C.7)$$

De la ecuación (C . 4) y con la ecuación (C . 6) se despeja B_{21},

$$B_{21}\,A_{11} = -\; B_{22}\,A_{21}$$

$$B_{21} = -\; B_{22}\,A_{21}\,A_{11}^{-1}$$

$$B_{21} = -\; \mu^{-1}(A_{21}\,A_{11}^{-1}) \; . \qquad (C.8)$$

De la ecuación (C . 2),

$$A_{11}\,B_{11} = I_p - A_{12}\,B_{21}$$

despejando B_{11} y agrupando,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - (A_{11}^{-1}A_{12})\,B_{21}$$

reemplazando la ecuación (C . 8),

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - (A_{11}^{-1}A_{12})\,[\, -\; \mu^{-1}\,(A_{21}\,A_{11}^{-1})\,]$$

simplificando,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12}) \mu^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) \qquad (C . 9)$$

Sustituyendo en (C . 5) B_{21} y B_{22},

$$- \mu^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) A_{12} + \mu^{-1} A_{22} = I_q$$

agrupando,

$$\mu^{-1} [A_{22} - (A_{21} A_{11}^{-1}) A_{12}] = I_q$$

despejando μ,

$$\mu = A_{22} - (A_{21} A_{11}^{-1}) A_{12} \qquad (C . 10)$$

En resumen:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12}) \mu^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = - (A_{11}^{-1} A_{12}) \mu^{-1} \\ B_{21} = - \mu^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) \\ B_{22} = \mu^{-1} \\ \qquad \mu = A_{22} - A_{21} (A_{11}^{-1} A_{12}) \end{array} \right. \qquad (C . 11)$$

Como se puede observar, en el sistema de ecuaciones de (C . 11) se determina la inversa de la matriz A, el método consiste en la inversa de la submatriz A_{11}, que básicamente es el único inconveniente. En la práctica se suele tomar A_{11} de orden n - 1, y a su vez, para hallar A_{11}^{-1} se sigue el procedimiento siguiente:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \ldots$$

1.- Hallar A_2^{-1}.

2.- Se subdivide en cajas A_3 de forma que $A_{22} = [\ a_{33}\ ]$ y se aplica (C . 11), obteniéndose A_3^{-1}.

3.- Se repite el procedimiento con A_4 una vez subdividida en cajas de manera que $A_{22} = [\ a_{44}\ ]$.

Nota.- De acuerdo a la selección de A_{11}, se puede observar que A_{22} es un número real.

En base al método anteriormente descrito, el mismo que es aplicable a matrices cuyos elementos son números reales, a continuación se realiza el análisis de inversión de matrices con elementos polinomiales.

Sea $A\ (s)$ una matriz de orden (n x n) definida en el dominio polinómico, constituido por todos los polinomios en la frecuencia s.

$$A\ (s) = \frac{1}{\delta(s)} \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \ldots & a_{1n}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \ldots & a_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(s) & a_{n2}(s) & \ldots & a_{nn}(s) \end{bmatrix} \qquad (C . 12)$$

donde: $A(s) = [\, a_{ij}(s) \,]$.

Sea m el grado máximo en s de los polinomios $a_{ij}(s)$ de (C . 12). Entonces, $A(s)$ se puede expresar mediante un polinomio, por lo cual recibe el nombre de " matriz polinómica" de grado m en s.

$$A(s) = \frac{1}{\delta(s)} [\, A_0 + A_1 s^1 + \dots + A_m s^m \,] \qquad (C.13)$$

donde: A_i son matrices de orden (n x n), cuyos elementos son números reales.

Se toma:

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & a_{13}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & a_{23}(s) \\ a_{31}(s) & a_{32}(s) & a_{33}(s) \end{bmatrix},$$

se efectúa la subdivisión de forma que:

$$A_{11}(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad A_{12}(s) = \begin{bmatrix} a_{13}(s) \\ a_{23}(s) \end{bmatrix}, \quad A_{21}(s) = \begin{bmatrix} a_{31}(s) & a_{32}(s) \end{bmatrix}, \quad A_{22}(s) = \begin{bmatrix} a_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$(C.14)$$

por definición de la inversa de una matriz,

$$A_{11}(s)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[\, A_{11}(s) \,]}{\det[\, A_{11}(s) \,]}$$

donde:

$$\underline{AD}(s) = \operatorname{adj}[\,\underline{A}_{11}(s)\,] = \begin{bmatrix} a_{22}(s) & -\,a_{12}(s) \\ -\,a_{21}(s) & a_{11}(s) \end{bmatrix}$$

(C . 15 a)

$$D(s) = \det[\,\underline{A}_{11}(s)\,] = a_{11}(s)\,a_{22}(s) - a_{12}(s)\,a_{21}(s)$$

(C . 15 b)

entonces,

$$\underline{A}_{11}^{-1}(s) = \frac{1}{D(s)}\,\underline{AD}(s) \quad .$$

De las ecuaciones (C . 11), se determina los términos de los paréntesis.

$$\underline{A}_{11}^{-1}(s)\,\underline{A}_{12}(s) = \frac{1}{D(s)}\,\underline{AD}(s)\,\underline{A}_{12}(s)$$

de la ecuación anterior, sea:

$$\underline{A}_{1112}(s) = \underline{AD}(s)\,\underline{A}_{12}(s) \qquad (C\,.\,16)$$

$$\underline{A}_{21}(s)\,\underline{A}_{11}^{-1}(s) = \frac{1}{D(s)}\,\underline{A}_{21}(s)\,\underline{AD}(s)$$

de la ecuación anterior, sea:

$$\underline{A}_{2111}(s) = \underline{A}_{21}(s)\,\underline{AD}(s) \quad . \qquad (C\,.\,17)$$

De la ecuación (C. 10) se determina $\mu^{-1}(s)$,

$$\mu(s) = \underline{A}_{22}(s) - \underline{A}_{21}(s)\,[\,\underline{A}_{11}^{-1}(s)\,\underline{A}_{12}(s)\,]$$

reemplazando $A_{11}(s)$ y multiplicando por $\frac{D(s)}{D(s)}$,

$$\mu(s) = \frac{D(s)}{D(s)} A_{22}(s) - A_{21}(s) \left[\frac{1}{D(s)} AD(s) A_{12}(s) \right]$$

factorando para $\frac{1}{D(s)}$ y reemplazando (C .16),

$$\mu(s) = \frac{1}{D(s)} \left[D(s) A_{22}(s) - A_{21}(s) A_{1112}(s) \right]$$

por último, se determina $\mu^{-1}(s)$,

$$\mu^{-1}(s) = \frac{D(s)}{D(s) A_{22}(s) - A_{21}(s) A_{1112}(s)}$$

sea:

$$DENOM(s) = D(s) A_{22}(s) - A_{21}(s) A_{1112}(s) \qquad (C. 18)$$

entonces,

$$\mu^{-1}(s) = \frac{D(s)}{DENOM(s)} .$$

Ahora se determinanlas submatrices de la matriz inversa $B(s)$.

De acuerdo a (C . 9),

$$B_{11}(s) = A_{11}^{-1}(s) + \left[A_{11}^{-1}(s) A_{12}(s) \right] \mu^{-1}(s) \left[A_{21}(s) A_{11}^{-1}(s) \right]$$

multiplicando por $\frac{\mu^{-1}(s)}{\mu^{-1}(s)}$,

$$B_{11}(s) = \frac{\mu^{-1}(s)}{\mu^{-1}(s)} A_{11}^{-1}(s) + [\, A_{11}^{-1}(s)\, A_{12}(s) \,]\, \mu^{-1}(s)\, [\, A_{21}(s)\, A_{11}^{-1}(s) \,]$$

reemplazando (C . 16), (C . 17) y $\mu^{-1}(s)$,

$$B_{11}(s) = \frac{\dfrac{D(s)}{DENOM(s)}}{\dfrac{D(s)}{DENOM(s)}} \frac{1}{D(s)} AD(s) + [\frac{1}{D(s)} AD(s)\, A_{12}(s)]\, \frac{D(s)}{DENOM(s)}\, [A_{21}(s)\, \frac{1}{D(s)} AD(s)]$$

simplificando,

$$B_{11}(s) = \frac{1}{D(s)\, DENOM(s)} \{\, DENOM(s)\, AD(s) + [\, AD(S)\, A_{12}(s) \,]\, [\, A_{21}(s)\, AD(s) \,] \,\}$$

sean: $dpl(s) = D(s)\, DENOM(s)$ (C . 19)

$$Bp_{11}(s) = DENOM(s)\, AD(s) + A_{1112}(s)\, A_{2111}(s)$$

(C . 20)

entonces,

$$B_{11}(s) = \frac{1}{dpl(s)} Bp_{11} \,.$$

De la ecuación (C . 7),

$$B_{12}(s) = -\, [\, A_{11}^{-1}(s)\, A_{12}(s) \,]\, \mu^{-1}(s)$$

reemplazando A_{11}^{-1} y μ^{-1},

$$B_{12}(s) = -\, [\, \frac{1}{D(s)} AD(s)\, A_{12}(s) \,]\, \frac{D(s)}{DENOM(s)}$$

reemplazando (C . 19) y (C . 16),

$$B_{12}(s) = -\frac{1}{dpl(s)} A_{1112}(s)\ D(s)$$

sea:

$$Bp_{12}(s) = -A_{1112}(s)\ D(s) \qquad (C\ .\ 21)$$

entonces,

$$B_{12}(s) = \frac{1}{dpl(s)} Bp_{12}(s) \quad .$$

De la ecuación (C . 8),

$$B_{21}(s) = -\mu^{-1}(s)\ [\ A_{21}(s)\ A_{11}^{-1}(s)\ ]$$

reemplazando $\mu^{-1}(s)$ y $A_{11}^{-1}(s)$,

$$B_{21}(s) = -\frac{D(s)}{DENOM(s)} [\ A_{21}(s) \frac{1}{D(s)} AD(s)\ ]$$

reemplazando (C . 19) y (C . 17),

$$B_{21}(s) = -\frac{1}{dpl(s)} D(s)\ A_{2111}(s)$$

sea:

$$Bp_{21}(s) = -D(s)\ A_{2111}(s) \qquad (C\ .\ 22)$$

entonces,

$$B_{21}(s) = \frac{1}{dpl(s)} Bp_{21}(s) \quad .$$

De la ecuación (C . 6),

$$\underline{B}_{22}(s) = \mu^{-1}(s)$$

multiplicando por $\dfrac{D(s)}{D(s)}$ y reemplazando $\mu^{-1}(s)$,

$$\underline{B}_{22}(s) = \frac{D(s)}{D(s)} \frac{D(s)}{DENOM(s)}$$

reemplazando (C . 19),

$$\underline{B}_{22}(s) = \frac{1}{dpl(s)} D(s)\ D(s)$$

sea:

$$\underline{B}p_{22}(s) = D(s)\ D(s) \qquad (C . 23)$$

entonces,

$$\underline{B}_{22}(s) = \frac{1}{dpl(s)} \underline{B}p_{22}(s)$$

Resumiendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{B}_{11}(s) &= \frac{1}{dpl(s)} \underline{B}p_{11}(s) . \\ \underline{B}_{12}(s) &= \frac{1}{dpl(s)} \underline{B}p_{12}(s) . \\ \underline{B}_{21}(s) &= \frac{1}{dpl(s)} \underline{B}p_{21}(s) . \\ \underline{B}_{22}(s) &= \frac{1}{dpl(s)} \underline{B}p_{22}(s) . \end{aligned} \right. \qquad (C . 24)$$

Este es el conjunto de ecuaciones que determina la matriz inversa $A_3(s)$, es decir,

$$A_3^{-1}(s) = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) \end{bmatrix}$$

reemplazando las ecuaciones (C . 24),

$$A_3^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{dpl(s)} Bp_{11}(s) & \dfrac{1}{dpl(s)} Bp_{12}(s) \\ \dfrac{1}{dpl(s)} Bp_{21}(s) & \dfrac{1}{dpl(s)} Bp_{22}(s) \end{bmatrix}$$

sacando factor común de los denominadores,

$$A_3^{-1}(s) = \frac{1}{dpl(s)} \begin{bmatrix} Bp_{11}(s) & Bp_{12}(s) \\ Bp_{21}(s) & Bp_{22}(s) \end{bmatrix}$$

entonces $A_3^{-1}(s)$ es:

$$A_3^{-1}(s) = \frac{1}{dpl(s)} Bp \qquad (C . 25)$$

Ahora se toma:

$$A_4(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & a_{13}(s) & a_{14}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & a_{23}(s) & a_{24}(s) \\ a_{31}(s) & a_{32}(s) & a_{33}(s) & a_{34}(s) \\ a_{41}(s) & a_{42}(s) & a_{43}(s) & a_{44}(s) \end{bmatrix}$$

y la subdivisión será:

$$\underline{A}_{11}(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & a_{13}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & a_{23}(s) \\ a_{31}(s) & a_{32}(s) & a_{33}(s) \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{12}(s) = \begin{bmatrix} a_{14}(s) \\ a_{24}(s) \\ a_{34}(s) \end{bmatrix},$$

$$A_{21}(s) = \begin{bmatrix} a_{41}(s) & a_{42}(s) & a_{43}(s) \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{22}(s) = \begin{bmatrix} a_{44}(s) \end{bmatrix}$$

como ya se calculó la inversa de $\underline{A}_{11}(s)$, siendo:

$$\underline{A}_{11}^{-1}(s) = \underline{A}_{3}^{-1}(s) = \frac{1}{dpl(s)} \underline{Bp} .$$

Se repite el procedimiento desde la ecuación (C . 16), en adelante, hasta que el rango[$\underline{A}_i(s)$] = n, es decir,

rango[$\underline{A}_i(s)$] $\leq$ rango[$\underline{A}(s)$] ,i = 3, ... ,n (C . 26).

Pero se debe recordar, que para seguir el mismo procedimiento, se debe cambiar:

$$D(s) = dpl(s) \qquad (C . 27)$$

$$\underline{AD}(s) = \underline{Bp}(s) \qquad (C . 28)$$

Por último cuando se ha cumplido que rango[$\underline{A}_i(s)$] = n, se tiene:

$$\underline{A}^{-1}(s) = \delta(s)\ \underline{A}_n(s) = \frac{\delta(s)}{D(s)} \underline{AD}(s) \qquad (C . 29)$$

Para el caso particular del estudio realizado, del cálculo de la inversa de la matriz de la planta $\underline{Gp}$ (s) en el método de desacoplamiento por matriz función de transferencia, se hace el cambio de $\underline{Gp}(s)$ por $\underline{A}(s)$, y sea:

$$\underline{Gp}\ (s) = \frac{1}{\delta\ (s)}\ \underline{GpL}\ (s).$$

Algoritmo.-

1.- Procedure MatrizInversaPolinomial(GpL,dpl).

2.- Asignar $\underline{A}_{11}(s)$ de acuerdo a (C . 14),

$$\underline{A}_{11}\ (s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}$$

3.- Determinar,

$$D(s) = a_{11}(s)\ a_{22}(s) - a_{12}(s)\ a_{21}(s).$$

$$\underline{AD}(s) = \begin{bmatrix} a_{22}(s) & -\ a_{12}(s) \\ -\ a_{21}(s) & a_{11}(s) \end{bmatrix}$$

4.- Si n = 2.

4.1.- Entonces realizar:

$\underline{GpL}$Inversa(s) = $\underline{AD}$(S)

dpl(s) = D(s).

4.2.- Caso contrario:

Realizar desde p = 3 hasta p = n

4.2.1.- Asignar $\underline{A}_{12}(s)$, $\underline{A}_{21}(s)$, $\underline{A}_{22}(s)$ de acuerdo a (C . 14).

$$A_{12}(s) = \begin{bmatrix} a_{1p}(s) \\ a_{2p}(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{rp}(s) \end{bmatrix}$$

$$A_{21}(s) = \begin{bmatrix} a_{p1}(s) & a_{p2}(s) & \ldots & a_{pr}(s) \end{bmatrix}$$

$$A_{22}(s) = \begin{bmatrix} a_{pp}(s) \end{bmatrix}$$

donde: $p = r + 1$,p = orden de la submatriz a invertir

$2 \leq r \leq n - 1$,r = orden de la submatriz $A_{11}(s)$.

4.2.2.- Determinar,

$A_{1112}(s) = AD(s)\ A_{12}(s)$

$A_{2111}(s) = A_{21}(s)\ AD(s)$

$DENOM(s) = D(s)\ A_{22}(s) - A_{21}(s)\ A_{1112}(s)$

$dpl(s) = D(s)\ DENOM(s)$

$A_{11}(s) = DENOM(s)\ AD(s) + A_{1112}(s)\ A_{2111}(s)$

$A_{12}(s) = - D(s)\ A_{1112}(s)$

$A_{21}(s) = - D(s)\ A_{2111}(s)$

$A_{22}(s) = D(s)\ D(s)$

$$GpLInversa(s) = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$D(s) = dpl(s)$

$AD(s) = GpLInversa(s)$

5.- Determinar.

GpL = GpLInversa.

6.- Fin.

Nota.- La representación de las matrices polinomiales, es similar al programa principal.

Diagrama N - S.-

```
Procedure MatrizInversaPolinomial(GpL,dpl)
A11 = GpL
Para k = 0 a 2 * M haga
    D[k] = 0
Para k1 = 0 a M haga
    k = k1
    Para k2 = 0 a M haga
        D[k] = D[k] + A11[1,1,k1]*A22[2,2,k2] - A11[1,2,k1]*A11[2,1,k2]
        k = k + 1
Para k = 0 a M haga
    AD[1,1,k] = A11[2,2,k]
    AD[1,2,k] = -A11[1,2,k]
    AD[2,1,k] = -A11[2,1,k]
    AD[2,2,k] = A11[1,1,k]
ORO = 2 * M
F = M
```

```
R = 2
N = 2
  si:
    GpLInversa = AD
    dpl = D
  no:
    Para P = 3 a N haga
      Para k = 0 a F haga
        Para i = 1 a P haga
          Para j = 1 a P haga
            ( j = P ) y ( i ≠ j )
              si:
                A12[i,1,k] = GpL[i,j,k]
              no:
                ( i = P ) y ( i ≠ j )
                  si:
                    A21[1,j,k]= GpL[i,j,k]
                  no:
                    (i = P) y (j = P)
                      si:
                        A22[k]=GpL[i,j,k]
                      no
      ProductoMatricesPolinomiales(R,1,R,M,F,AD,A12,A1112)
      ProductoMatricesPolinomiales(1,R,R,F,M,A21,AD,A2111)
      PRroductoPolonomioPolinomio(ORO,F,D,A22,DENOM)
      ProductoMatricesPolinomiales(1,1,R,F,ORO,A21,A1112,DE2)
      Para k = 0 a ORO haga
        DENOM[k] = DENOM[k] - DE2[1,1,k]
      PRoductoPolonomioPolinomio(ORO,ORO+F,D,DENOM,dpl)
      PProductoMatrizPolinomio(R,R,M,ORO+F,AD,DENOM,A11)
      ProductoMatricesPolinomiales(R,R,1,ORO,ORO,A1112,A2111,BL2
      Para k = 0 a 2 * ORO haga
        Para i = 1 a R haga
          Para j = 1 a R haga
```

A11[i,j,k] = A11[i,j,k] + BL2[i,j,k]

PProductoMatrizPolinomio(R,1,ORO,ORO,A1112,D,A12)

PProductoMatrizPolinomio(1,R,ORO,ORO,A2111,D,A21)

Para k = 0 a 2 * ORO + F haga

Para i = 1 a R haga

A12[i,1,k] = -A12[i,1,k]

A21[1,i,k] = -A21[1,i,k]

PRroductoPolinomioPolinomio(ORO,ORO,D,D,A22)

Para k = 0 a 2 * R haga

Para i = 1 a P haga

Para j = 1 a P haga

(j = P) y (i ≠ j)

si

GpLInversa
[i,j,k] =
A12[i,1,k]

no

(i = P) y (i ≠ j)

si

GpLInversa
[i,j,k] =
A21[1,j,k]

no

(i = P) y (j = P)

si

GpLInversa
[i,j,k] =
A22[k]

no

GpLInversa
[i,j,k] =
A11[i,j,k]

M = 2 * ORO

ORO = 2 * ORO + F

P ≠ N

si

D = dpl

no

AD = GpLInversa

R = R + 1

GpL = GpLInversa

Fin

PRODUCTO MATRICES POLINOMIALES.

Esta subrutina <u>ProductoMatricesPolinomiales</u> multiplica 2 matrices polinomiales de diferente grado.

<u>Análisis Matemático</u>.-

Sean las matrices polinomiales:

$\underline{M}(s) = [\ m_{ij}(s)\ ]$ de orden (a x c).

$\underline{N}(s) = [\ n_{ij}(s)\ ]$ de orden (c x b).

$$\underline{M}(s) = \begin{bmatrix} m_{11}(s) & \dots & m_{1c} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{a1}(s) & \dots & m_{ac} \end{bmatrix} \qquad \underline{N}(s) = \begin{bmatrix} n_{11}(s) & \dots & n_{1b}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ n_{c1}(s) & \dots & n_{cb}(s) \end{bmatrix} \tag{C . 30}$$

definidas en el dominio polinómico, constituídas por todos los polinomios en la frecuencia s.

Si d y e son los grados máximos en s de los polinomios $m_{ij}(s)$ y $n_{ij}(s)$, respectivamente, se tiene que las matrices $\underline{M}(s)$ y $\underline{N}(s)$ se representan mediante polinomios;

$$\underline{M}(s) = [\ \underline{M}_0 + \underline{M}_1 s + \dots + \underline{M}_d s^d\ ] \tag{C . 31 a}$$

$$\underline{N}(s) = [\ \underline{N}_0 + \underline{N}_1 s + \dots + \underline{N}_e s^e\ ] \tag{C . 31 b}$$

donde: $\underline{M}_i$ son matrices reales de orden (a x c) ,i = 1, ... ,d

$\underline{N}_i$ son matrices reales de orden (c x b) ,i = 1, ... ,e

Multiplicando ambas matrices se tiene:

$\underline{MN}(s) = \underline{M}(s) \times \underline{N}(s)$

$$\underline{MN}(s) = [\,\underline{M}_0 + \underline{M}_1 s + \ldots + \underline{M}_d s^d\,]\,[\,\underline{N}_0 + \underline{N}_1 s + \ldots + \underline{N}_e s^e\,]$$

$$= \underline{M}_0 \underline{N}_0 + \underline{M}_0 \underline{N}_1 s + \;.\;.\;.\; + \underline{M}_0 \underline{N}_e s^e$$

$$+ \underline{M}_1 \underline{N}_0 s + \underline{M}_1 \underline{N}_1 s^2 + \;.\;.\;.\; + \underline{M}_1 \underline{N}_e s^{e+1}$$

$$\vdots$$

$$+ \underline{M}_d \underline{N}_0 s^d + \underline{M}_d \underline{N}_1 s^{d+1} + \;.\;.\;.\; + \underline{M}_d \underline{N}_e s^{d+e}$$

$$= \underline{M}_0 \underline{N}_0 + (\,\underline{M}_0 \underline{N}_1 + \underline{M}_1 \underline{N}_0\,)\, s + \;.\;.\;.\; + \underline{M}_d \underline{N}_e s^{d+e} \qquad (C.32)$$

Entonces el producto de matrices polinomiales, se transforma en producto y suma de matrices reales. Por lo tanto el Producto de Matrices Reales (Ver subprograma ProductoMatrices) se realiza por planos de dimensiones (a x c) y (c x b), correspondiente a las matrices $\underline{M}(s)$ y $\underline{N}(s)$, respectivamente. Donde los planos de $\underline{M}(s)$ varía de k1 = 0, ... ,d , y los planos de $\underline{N}(s)$ varía de k2 = 0, ...,e .

<u>Algoritmo</u>.-

Para el programa se realizó los siguientes cambios de variables.

a = FilaM1

b = ColumnaM2

c = FilaColumna

d = GradoM1

e = GradoM2

$\underline{M}(s)$ = MatrizM1

$\underline{N}(s)$ = MatrizM2

$\underline{MN}(s)$ = Producto.

1.- <u>Procedure</u> ProductoMatricesPolinomiales (FilaM1,ColumnaM2, FilaColumna,GradoM1,GradoM2,MatrizM1,MatrizM2, Producto).

2.- Determinar:

2.1.- Realizar para k1 = 0 hasta GradoM1.

2.1.1.- Realizar para k2 = 0 hasta GradoM2.

$$\text{Producto}[i,j,k] = \sum_{k3=1}^{\text{FilaColumna}} \text{MatrizM1}[i,k3,k1] * \text{MatrizM2}[k3,j,k2],$$

, i = 1, ... , FilaM1

, j = 1, ... , ColumnaM2

, k = 0, ... ,GradoM1+GradoM2,

para cada k1.

3.- Fin.

<u>Secuencia de llamada</u>.-

ProductoPolinomioPolinomio(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna,GradoM1, GradoM2,MatrizM1,MatrizM2,Producto).

<u>Definición de símbolos</u>.-

FilaM1 = Número de filas de la Matriz1.

ColumnaM2 = Número de columnas de MatrizM2.

FilaColumna = Número de columnas de la MatrizM1, igual al número de filas de MatrizM2.

GradoM1 = Mayor grado de los elementos polinomiales de la Matriz1

GradoM2 = Mayor grado de los elementos polinomiales de la Matriz2

Matriz1 = Elementos de la Matriz1, Matriz1[i,j,0] matriz constante.

Matriz2 = Elementos de la Matriz2, Matriz2[i,j,0] matriz constante.

Producto = Elementos del resultado del producto de matrices.

Diagrama N - S.-

```
Procedure ProductoMatricesPolinomiales(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna,GradoM1,
                                       GradoM2,Matriz1,Matriz2,Producto).
Para k = 0 a GradoM1 + GradoM2 haga
    Para i = 1 a FilaM1 haga
        Para j = 1 a ColumnaM2 haga
            Producto[i,j,k] = 0
Para k1 = 0 a GradoM1 haga
    k = k1
    Para k2 = 0 a GradoM2 haga
        Para i = 1 a FilaM1 haga
            Para j = 1 a ColumnaM2 haga
                Para k3 = 1 a FilaColumna haga
                    Producto[i,j,k] =Producto[i,j,k]+Matriz1[i,k3,k1]*Matriz2[k3,j,k2]
        k = k + 1
Fin
```

PRODUCTO MATRIZ POLINOMIO.-

El subprograma <u>PProductoMatrizPolinomio</u> realiza la multiplicación de una matriz polinomial con un polinomio, cuyo resultado es también una matriz polinomial.

<u>Análisis Matemático</u>.-

Sea la matriz polinomial:

$\underline{H}(s) = [\, h_{ij}(s) \,]$ de orden (a x c).

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & \cdots & h_{1c}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{a1}(s) & \cdots & h_{ac}(s) \end{bmatrix}$$

Se representa la matriz $\underline{H}(s)$ mediante polinomios:

$$\underline{H}(s) = [\, \underline{H}_0 + \underline{H}_1 s + \ldots + \underline{H}_d s^d \,]$$

donde: d es el grado máximo en s de los polinomios $h_{ij}(s)$.

Y sea el polinomio $P_0(s)$ de grado e.

Se multiplica:

$$\underline{HP}(s) = \underline{H}(s) \times P_0(s)$$

$$\underline{HP}(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & \cdots & h_{1c}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{a1}(s) & \cdots & h_{ac}(s) \end{bmatrix} \times P_0(s)$$

$$\underline{HP}\ (s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) \times Po\ (s) & \ldots & h_{1c}(s) \times Po\ (s) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{a1}(s) \times Po\ (s) & \ldots & h_{ac}(s) \times Po\ (s) \end{bmatrix} \qquad (C.33)$$

Al multiplicar una matriz polinomial por un polinomio, se realiza el producto por cada elemento polinomial de la matriz. Entonces se ha llegado a un producto de 2 polinomios (Ver subprograma PRroductoPolinomioPolinomio).

Siendo la variación de los planos de la matriz $\underline{H}$ (s) , desde k1 = 0,1, ... ,d.

Algoritmo.-

Para el programa se realizó los siguientes cambios de variables.

a = Fila

c = Columna

d = GradoM

e = GradoP

$\underline{H}$ (s) = Matriz

Po(s) = Polinomio

$\underline{NP}$(s) = Produc.

1.- Procedure PProductoMatrizPolinomio(Fila,Columna,GradoM, GradoP,Matriz,Polinomio,Produc).

2.- Determinar:

2.1.- Realizar para k1 = 0 hasta GradoM.

2.1.1.- Realizar para k2 = 0 hasta GradoP.

Produc[i,j,k] = Produc[i,j,k] + Matriz[i,j,k1] * Po[k2]

, i = 1, . . . ,Fila.

, j = 1, . . . ,Columna.

, k = 0, . . . ,GradoM+GradoP,

para cada k1.

3.- Fin.

Secuencia de llamada.-

PProductoMatrizPolinomio(Fila,Columna,GradoM,GradoP,Matriz,
Polinomio,Produc).

Definición de símbolos.-

Fila = Número de filas de la Matriz.

Columna = Número de columnas de la Matriz.

GradoM = Mayor grado de los elementos de la Matriz.

GradoP = Grado del Polinomio.

Matriz = Elementos de la Matriz, Matriz[i,j,0] matriz constante.

Polinomio = Coeficientes del Polinomio, Polinomio[0] término constante.

Produc = Elementos del resultado del producto Matriz, Polinomio.

Subprogramas usados.-

Ninguno.

Diagrama N - S.-

```
Procedure PProductoMatrizPolinomio(Fila,Columna,GradoM,GradoP,Matriz,
                Produc).
  Para k = 0 a GradoM + GradoP haga
    Para i = 1 a Fila haga
      Para j = 1 a Columna haga
        Produc[i,j,k] = 0
  Para k1 = 0 a GradoM haga
    k = k1
    Para k2 = 0 a GradoP haga
      Para i = 1 a Fila haga
        Para j = 1 a Columna haga
          Produc[i,j,k] =Produc[i,j,k]+Matriz[i,j,k1]*Polinomio[k2]
      k = k + 1
Fin
```

PRODUCTO POLINOMIO POLINOMIO.-

El subprograma PRroductoPolinomioPolinomio, multiplica 2 polinomios de diferente grado.

Sean los polinomios:

$P_1(s)$ de grado d.

$P_2(s)$ de grado e.

donde: $P_1(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_d s^d$

$P_2(s) = q_0 + q_1 s + \ldots + q_e s^e$

Multiplicando ambos polinomios se llega a:

$$P_3(s) = P_1(s) \times P_2(s)$$

$$\begin{aligned} P_3(s) &= [\, p_0 + p_1 s + \ldots + p_d s^d \,]\,[\, q_0 + q_1 s + \ldots + q_e s^e \,] \\ &= p_0 q_0 + p_0 q_1 s + \ldots + p_0 q_e s^e + \\ &\qquad + p_1 q_0 s + p_1 q_1 s^2 + \ldots + p_1 q_e s^{e+1} + \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad + p_d q_0 s^d + p_d q_1 s^{d+1} + \ldots + p_d q_e s^{d+e} \\ &= p_0 q_0 + (\, p_0 q_1 + p_1 q_0 \,) s + \ldots + p_d q_e s^{d+e}. \end{aligned} \qquad (C.34)$$

El producto de polinomios, es simplemente la multiplicación y suma de los coeficientes de dichos polinomios.

Algoritmo.-

Para el programa se realizó los siguientes cambios de variables.

d = GradoP1

e = GradoP2

$P_1(s)$ = Polinomio1

$P_2(s)$ = Polinomio2

$P_3(s)$ = Prod.

1.- <u>Procedure</u> PRroductoPolinomioPolinomio(GradoP1,GradoP2,
Polinomio1,Polinomio2,Prod).

2.- Determinar:

2.1.- Realizar para k1 = 0 hasta GradoP1.

2.1.1.- Realizar para k2 = 0 hasta GradoP2.

Prod[k] = Prod[k] + Polinomio1[k1] * Polinomio2[k2]
, k = 0, . . . ,GradoP1+GradoP2,
para cada k1.

3.- Fin.

<u>Secuencia de llamada</u>.-

PRroductoPolinomioPolinomio(GradoP1,GradoP2,Polinomio1,
Polinomio2,Prod).

<u>Definición de símbolos</u>.-

GradoP1 = Grado del Polinomio1.

GradoP2 = Grado del Polinomio2.

Polinomio1 = Coeficientes del Polinomio1, Polinomio1[0] término constante.

Polinomio2 = Coeficientes del Polinomio2, Polinomio2[0] término constante.

Prod = Coeficientes del producto de los Polinomios.

<u>Subprogramas usados</u>.-

Ninguno.

Diagrama N - S.-

```
Procedure PRroductoPolinomioPolinomi(GradoP1,GradoP2,Polinomio1,PPolinomio2
Produc).
Para k = 0 a GradoP1 + GradoP2 haga
    Prod[k] = 0
Para k1 = 0 a GradoP1 haga
    k = k1
    Para k2 = 0 a GradoP2 haga
        Prod[k] = Prod[k] + Polinomio1[k1] * PPolinomio2[k2]
        k = k + 1
Fin
```

REDUCIR GRADO [3].-

Este subprograma ReducirGrado es usado para eliminar los coeficientes de mayor grado de un polinomio, que sean cero, si ellos no exceden al valor EPS, hasta que uno exceda EPS es establecido.

Secuencia de llamada.-

ReducirGrado(IR,XY,IXY).

Definición de símbolos.-

IX = Orden sin reducir el grado del polinomio.

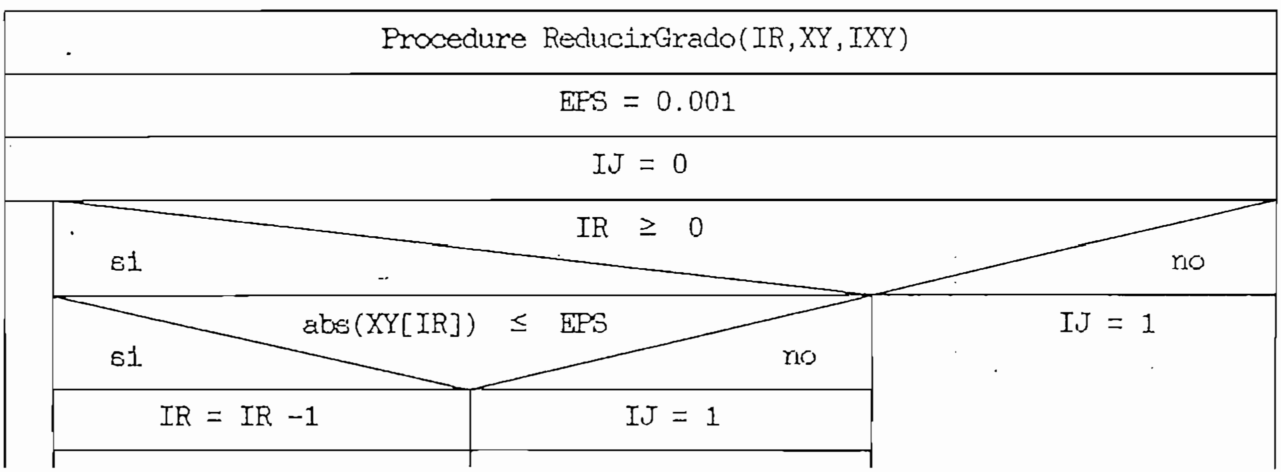
XY = Coeficientes del arreglo para XY (s), XY[0] es el término constante.

IXY = Orden reducido del grado del polinomio.

Subprogramas usados.-

Ninguno.

Diagrama N - S.-



repita hasta que IJ = 1

IXY = IR

Fin

DIVISION POLINOMIOS [3].-

Este subprograma DivisionPolinomios es usado para la división de 2 polinomios:

$$P(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

Secuencia de llamada.-

DivisionPolinomios(IX,X,IY,Y,IP,P).

Definición de símbolos.-

IX = Orden de X (s).

X = Coeficientes del arreglo para X (s).

IY = Orden de Y (s).

Y = Coeficientes del arreglo para Y (s).

IP = Orden de P (s).

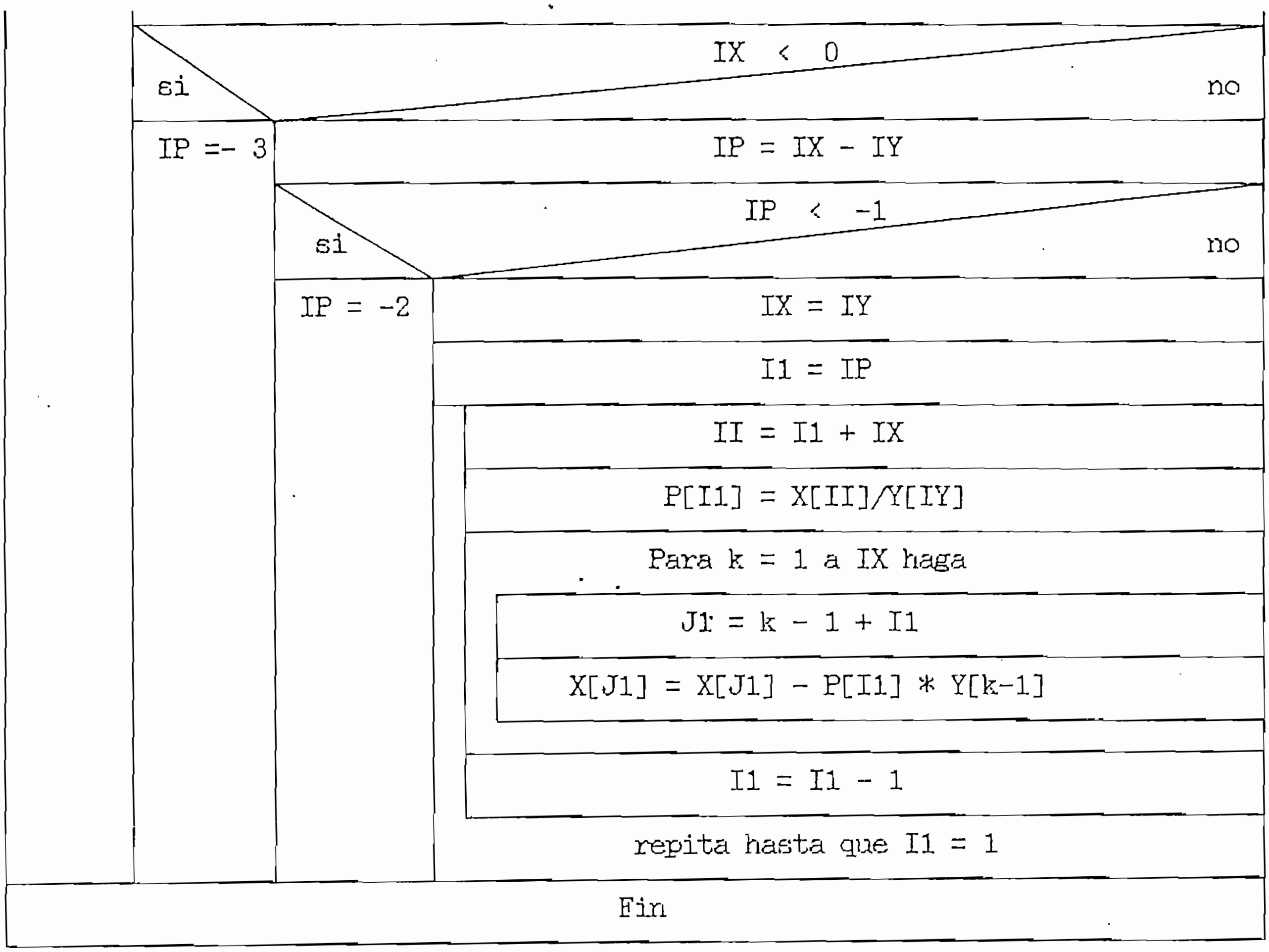
P = Coeficientes del arreglo para P (s).

Subprogramas usados.-

(1) ReducirGrado.

Diagrama N - S.-

Procedure DivisionPolinomios(IX,X,IY,Y,IP,P)	
ReducirGrado(IY,Y,IY)	
IY < 0 — si	no
RR = 1	ReducirGrado(IX,X,IX)


IX < 0
si
no
IP =- 3
IP = IX - IY
IP < -1
si
no
IP = -2
IX = IY
I1 = IP
II = I1 + IX
P[I1] = X[II]/Y[IY]
Para k = 1 a IX haga
J1 = k - 1 + I1
X[J1] = X[J1] - P[I1] * Y[k-1]
I1 = I1 - 1
repita hasta que I1 = 1
Fin

PRODUCTO MATRICES [13].-

Este subprograma ProductoMatrices multiplica 2 matrices, cuyos elementos son números reales.

Producto = Matriz1 x Matriz2

Secuencia de llamada.-

ProductoMatrices(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna,Matriz1,Matriz2,
Producto).

Definición de símbolos.-

FilaM1 = Número de filas de la Matriz1.

ColumnaM2 = Número de columnas de la Matriz2.

FilaColumna = Número de columnas de la Matriz1, igual al número de filas de la Matriz2.

Matriz1 = Coeficientes de la Matriz1.

Matriz2 = Coeficientes de la Matriz2.

Producto = Coeficientes del resultado del producto de matrices.

Subprogramas usados.-

Ninguno.

Diagrama N - S.-

Procedure ProductoMatrices(FilaM1,ColumnaM2,FilaColumna,GradoM1,GradoM2,
Matriz1,Matriz2,Producto)

Para k1 = 1 a FilaM1 haga

Para k2 = 1 a ColumnaM2 haga

```
S1 = 0
Para k3 = 1 a FilaColumna haga
    Producto[k1,k2] = Matriz1[k1,k3] * Matriz2[k3,k2]
    S1 = S1 + Producto[k1,k2]
Producto[k1,k2] = S1
Fin
```

PRODUCTO VECTOR MATRIZ [13].-

Este subprograma <u>ProductoVectorMatriz</u> multiplica un vector fila por una matriz, siendo cada elemento un número real.

<u>Prod</u> = <u>Vector</u> x <u>Matriz</u>

<u>Secuencia de llamada</u>.-

ProductoVectorMatriz(Elemento,Columna,Vector,Matriz,Prod).

<u>Definición de símbolos</u>.-

Elemento = Número de filas de la Matriz, igual al orden del Vector fila.

Columna = Número de columnas de la Matriz.

Vector = Coeficientes del Vector.

Matriz = Coeficientes de la Matriz.

Prod = Coeficientes del resultado del producto Vector-Matriz.

<u>Subprogramas usados</u>.-

Ninguno.

<u>Diagrama N - S</u>.-

Procedure ProductoVectorMatriz(Elemento,Columna,Vector,Matriz,Prod)

Para k2 = 1 a Elemento haga

S1 = 0

Para k3 = 1 a Columna haga

Prod[k2] = Vector[k3] * Matriz[k3,k2]

```
S1 := S1 + Prod[k2]

Prod[k2] = S1

Fin
```

DETERMINANTE E INVERSA [13].-

La subrutina DeterminanteEInversa utiliza como base la resolución de sistemas de ecuaciones, mediante el método de "Descomposición triangular" o factorización en 2 matrices L U. Siendo específicamente el método de Cholesky el que se utilizará.

El determinante de A2 es el producto diagonal de L U. Los elementos diagonales de L U simplemente corresponden a sus elementos pivotes, para lo cual habrá sido necesario intercambiar las filas para llevar estos a la diagonal. Cada permutación multiplica el determinante por -1, entonces se multiplicará el determinante por $(-1)^k$ donde k es el número de permutaciones requerido para llevar los pivotes a la diagonal.

La matriz inversa $A2^{-1}$ = A1INV se define como aquella matriz que, multiplicada por A2, da como resultado la matriz identidad I. Siendo cada columna de la matriz inversa, dada por la solución de las ecuaciones lineales con la correspondiente columna de I como vector columna de los términos independientes.

Secuencia de la llamada.-

DeterminanteEInversa(M,A2,A1INV,De).

Definición de símbolos.-

A2 = Coeficientes de la matriz, a calcular el determinante e Inversa.

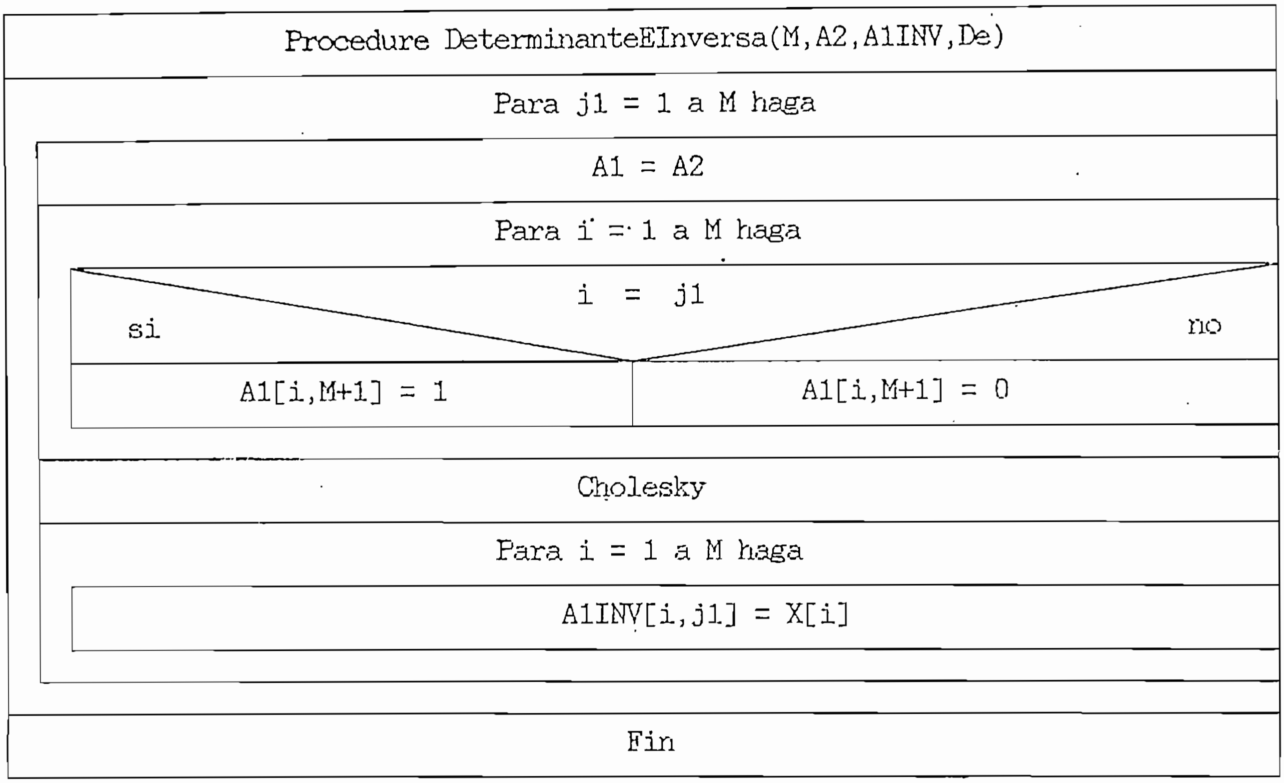
A1INV = Coeficientes de la matriz Inversa.

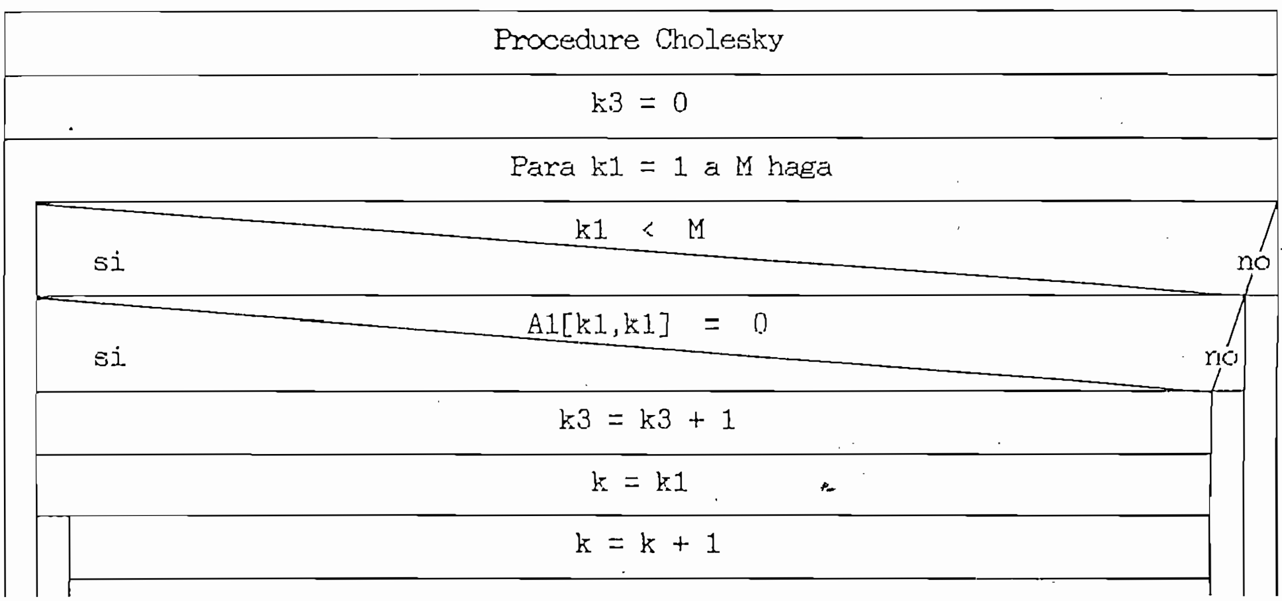
De = Determinante de la matriz A2.

Subprogramas utilizados.-

(1) Cholesky.

Diagrama N - S.-





```
    repita hasta que (A1[k1,k] = 1) o (k = M + 1)

  k ≤ M
  si:
    PP[k3,1] = k1
    PP[k3,2] = k
    Para k2 = 1 a M haga
      CEL = A1[k2,k1]
      A1[k2,k1] = A1[k2,k]
      A1[k2,k] = CEL
  no

k ≤ M
si:
  Para j = 2 a M + 1 haga
    A1[1,j] = A[1,j]/A[1,1]
no

Para i = 2 a M haga
  Para j = 2 a M + 1 haga
    i ≥ j
    si:
      S1 = 0
      Para k = 1 a j - 1 haga
        S1 = S1 + A1[i,k] * A1[k,j]
      A1[i,j] = A1[i,j] - S1
    no:
      A1[i,i] ≠ 0
      si:
        S1 = 0
        Para k = 1 a i - 1  haga
          S1 = S1 + A1[i,k] * A1[k,j]
        A1[i,j] = (A1[i,j] - S1)/A1[i,i])
      no

X[M] = A1[M,M+1]
```

```
Para i = 1 a M - 1 haga
    k1 = M - i
    S1 = 0
    Para j = k1 + 1 a M haga
        S1 = S1 + A1[k1,j] * X[j]
    X[k1] = A1[k1,M+1] - S1
K = k3
k > 1
si                                              no
    k = k mod 2
    repita hasta que k ≤ 1
k = 0
si                                              no
    De = 1                      De = -1
Para i = 1 a M haga
    De = De * A1[i,i]
De ≠ 0
si                                              no
    Para j = 1 a k3 haga
        i = k3 - j + 1
        k1 = PP[i,1]
        k = PP[i,2]
        CEL = X[k1]
        X[k1] = X[k]
        X[k] = CEL
Fin
```

MATRIZ F GENERAL.-

Este subprograma <u>MatrizFGeneral</u> sirve únicamente para determinar el conjunto de matrices F que desacopla el sistema, y por ende el número de parámetros libres f. Realizado como subprograma, porque se necesita 2 veces en diferentes partes del programa general (Realimentación de estado).

<u>Secuencia de llamada</u>.-

MatrizFGeneral(w,FGEN,Ff,g).

<u>Definición de símbolos</u>.-

w = Número de parámetros de las matrices diagonales M_k.

FGEN = Matriz tridimensional, donde cada plano de orden (m x n) corresponde a cada parámetro de las matrices diagonales M_k.

Ff = Conjunto de matrices F que desacopla el sistema.

g = Número de parámetros libres f.

<u>Subprogramas usados</u>.-

Ninguno.

<u>Diagrama N - S</u>.-

Procedure MatrizFGeneral(w,FGEN,Ff,g)
Para i = 1 a M haga
Para j = 1 a N haga
Ff[i,j] = 0

g = 0

Para i = 1 a M haga

Para j = 1 a N haga

L = 0

k = 1

FGEN[i,j,k] = 0

si

k = k + 1

no

k = w + 1

L = 1

repita hasta que k = w + 1

L = 0

si

Ff[i,j] =
FGEN[i,j,M+1]

no

abs(Ff[i,j]) < 1000

si

(i = M) y (j = N)

si

Ff[i,j] =
1000+10*i+j

g = g + 1

no

g = g + 1

Ff[i,j] = 1000 + 10 * i + j

j = N

si

k3 = i + 1

k4 = 1

no

k3 = i

k4 = j + 1

Para k1 = k3 a M haga

Para k2 = k4 a N haga

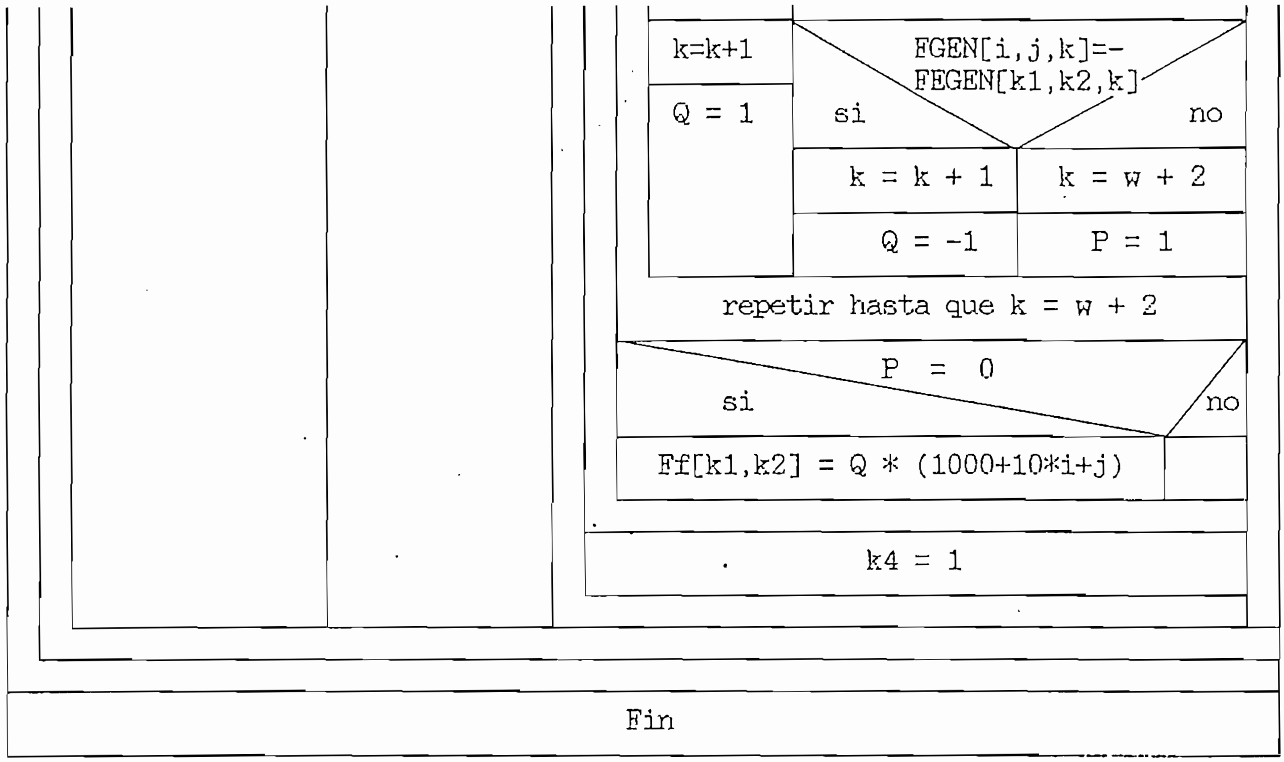
k = 1

P = 0

FGEN[i,j,k]=FGEN[k1,k2,k]

si

no


k=k+1
Q = 1
FGEN[i,j,k]=-FEGEN[k1,k2,k]
si
no
k = k + 1
Q = -1
k = w + 2
P = 1
repetir hasta que k = w + 2
P = 0
si
no
Ff[k1,k2] = Q * (1000+10*i+j)
k4 = 1
Fin

INVERSA MATRIZ DINAMICA.-

Este subprograma <u>InversaMatrizDinamica</u> invierte matrices del tipo $[\, s I - A \,]$, para lo cual aplicamos el "Algoritmo de Leverrier o Faddeev":

Sea $A = [\, a_{ij} \,]$ una matriz de orden n.

$$[\, s I - A \,]^{-1} = \frac{Adj[\, s I - A \,]}{det[\, s I - A \,]}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} det[\, s I - A \,] &= \alpha_0 \, s^n + \alpha_1 \, s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \, s + \alpha_n \\ Adj[\, s I - A \,] &= R_0 \, s^{n-1} + R_1 \, s^{n-2} + \ldots + R_{n-1} \end{aligned}\right\} R_n = 0$$

siendo: α_i = Escalar

R_i = Matrices.

$$R_0 = I \,;$$

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \, tr[\, A \, R_{k-1} \,] \quad , k = 1, \ldots ,n \quad ; \alpha_0 = 1$$

$$R_k = A \, R_{k-1} + \alpha_k \, I \quad , k = 1, \ldots ,n$$

donde: tr[.] denota la traza, que se determina sumando los términos de la diagonal principal.

<u>Secuencia de llamada</u>.-

InversaMatrizDinamica(N,A1,R,ALFA).

<u>Definición de símbolos</u>.-

N = Orden de la matriz A1.

A1 = Coeficientes reales de la matriz, a invertir.

R = Coeficientes de las matrices R_k de la Adjunta, R[i,j,N-1] matriz constante.

ALFA = Coeficientes del polinomio característico det[s I - A].

Subprogramas usados.-

(1) Multiplicación.

Diagrama N - S.-

```
Procedure InversaMatrizDinamica(N,A1.R,ALFA)
ALFA[0] = 1
Para i = 1 a N haga
    Para j = 1 a N haga
        i ≠ j
        si: R[i,j,0] = 0
        no: R[i,j,0] = 1
Para k = 1 a N haga
    Multiplicacion
    TRAZO = 0
    Para i = 1 a N haga
        TRAZO =TRAZO + AR[i,i]
    ALFA[K] = -TRAZO/k
    Para i = 1 a N haga
        Para j = 1 a N haga
```

$i \neq j$

si	no
R[i,j,k] = AR[i,j]	R[i,j,k] = AR[i,j] + ALFA[k]

Fin

Procedure Multiplicacion

Para i = 1 a N haga

Para j = 1 a N haga

S1 = 0

Para k1 = 1 a N haga

AR[i,j] = A1[i,k] * R[k1,j,k-1]

S1 = S1 + AR[i,j]

AR[i,j] = S1

Fin

RAICES POLINOMIALES [13].-

Esta subrutina <u>RaicesPolinomiales</u> es usada para encontrar las raíces de un polinomio con coeficientes reales. Usa un método modificado de Bairstow por extracción de raíces.

<u>Secuencia de llamada</u>.-

RaicesPolinomiales(N1,Polinomio,X1,X2,Z1,Z2).

<u>Definición de símbolos</u>.-

N1 = Grado del Polinomio, N1 ≤ 10.

Polinomio = Arreglo de los coeficientes del Polinomio, Polinomio[N] término constante.

X1 = Arreglo de las raíces reales.

X2 = Arreglo de las raíces imaginarias.

Z1 = Número de las raíces reales.

Z2 = Número de las raíces imaginarias.

<u>Subprogramas usados</u>.-

Ninguno.

<u>Diagrama N - S</u>.-

Procedure RaicesPolinomiales(N1,Polinomio,X1,X2,Z1,Z2)
NN = N1
Z1 = 1
Z2 = 1
A1 = Polinomio

Haga mientras N1 ≥ 2

A1[N1] ≠ 0

si | no

abs(A1[N1-2]) ≤ 0.000001

si | no

si	no
U = 0	U = A1[N1-1]/A1[N1-2]
V = 0	V = A1[N1]/A1[N1-2]

N1 ≠ 2

si | no

B1[0] = 1

B1[1] = A1[1] - U

C1[0] = 1

C1[1] = B1[1] - U

Para k = 2 a N1 haga

B1[k] = A1[k] - B1[k-1] * U - B1[k-2] * V

C1[k] = B1[k] - C1[k-1] * U - C1[k-2] * V

DN = C1[N1-1] * C1[N1-3] - C1[N1-2] * C1[N1-2]

DU = (B1[N1] * C1[N1-3] - B1[N1-1] * C1[N1-2])/ DN

DV = (B1[N1-1] * C1[N1-1] - B1[N1] * C1[N1-2])/ DN

U = U + DU

V = V + DV

(abs(B1[N1])<Epsilon) y (absB1[N1-1])<Epsilon)

U = U - DU

V = V - DV

DES = U * U - 4 * V

DES ≥ 0

si	no
X1[Z1] = (-U + sqrt(DES)) / 2	IMAG = sqrt(-DES) / 2

X1[Z1+1] = (-U - sqrt(DES)) / 2	REALES = -U / 2
Z1 = Z1 + 2	X2[Z2,1] = REALES
	X2[Z2,2] = IMAG
	X2[Z2+1,1] = REALES
	X2[Z2+1,2] = IMAG
	Z2 = Z2 + 2

N1 = N1 - 2

Para k = 0 N1 haga

A1[k] = B1[k]

A1[N1] = 0

si

no

X1[Z1] = 0

Z1 = Z1 + 1

N1 = N1 - 1

N1 = 1

si

no

B1[1] = A1[1]

N1 = 0

si

no

si	no
Z1 = Z1 - 1	NN = 1

NN = 1: si	no
X1[Z1] = - A1[1]	X1[Z1] = - B1[1]

Fin

PRODUCTO MATRIZ VECTOR [13].-

Este subprograma <u>ProductoMatrizVector</u> multiplica una matriz por un vector columna, siendo cada elemento un número real.

<u>Prod</u> = <u>Matriz</u> x <u>Vector</u>

<u>Secuencia de llamada</u>.-

ProductoMatrizVector(Elemento,Columna,Vector,Matriz,Prod).

<u>Definición de símbolos</u>.-

Elemento = Número de filas de la Matriz.

Columna = Número de columnas de la Matriz , igual al orden del Vector columna.

Vector = Coeficientes del Vector.

Matriz = Coeficiéntes de la Matriz.

Prod = Coeficientes del resultado del producto Matriz-Vector.

<u>Subprogramas usados</u>.-

Ninguno.

<u>Diagrama N - S</u>.-

```
Procedure ProductoMatrizVector(Elemento,Columna,Vector,Matriz,Prod)
Para k2 = 1 a Elemento haga
    S1 = 0
    Para k3 = 1 a Columna haga
        Prod[k2] = Vector[k3] * Matriz[k2,k3]
```

S1 = S1 + Prod[k2]

Prod[k2] = S1

Fin

MATRICES PRODUCTO.-

Este subprograma Matrices Producto, es exactamente el mismo subprograma ProductoMatrices, con la única diferencia que este subprograma está definido para multiplicar matrices de dimensiones bastante grandes.

Por lo tanto, ver subprograma ProductoMatrices.

BIBLIOGRAFIA

1.- CHEN, Chi Tsong; "INTRODUCTION TO LINEAR SYSTEM THEORYC"; Editorial, Holt Rinehart and Winston, Inc; United States of America; 1970.

2.- OGATA, Katsuhiko; "INGENIERIA DE CONTROL MODERNO"; Editorial Prentice - Hall Internacional; Buenos Aires; 1973.

3.- MELSA, James L. and JONES, Stephen K.; "COMPUTER PROGRAMS FOR COMPUTATIONAL ASSISTANG IN THE STUDY OF LINEAR CONTROL THEORY " ; Second Edition; Editorial McGraw - Hill Book Company; United States of America; 1973.

4.- GILBER, E. G.; "THE DECOUPLING OF MULTIVARIABLE SYSTEMS BY STATE FEEDBACK"; SIAM J. Contr. ; vol. 7; pp. 50-64; February 1969.

5.- MONTGOMERIE G. A. and NICHOLSON H.; "MODERN APPROACHES TO CONTROL SYSTEM DESING"; Edited by MUNRO N.; Published by The Institution of Electrical Engineers; London; 1979.

6.- GUERRERO, Juan D.; "REALIMENTACION DE ESTADO"; Tesis; E.P.N.; Quito; 1983.

7.- LOPEZ, Carlos B.; "REALIMENTACION DE SALIDA"; Tesis; E.P.N.; Quito 1985.

8.- EL - BAGOURY, M. A. and BAYOUMI M. M.; "DECOUPLING OF LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS USING OUTPUT FEEDBACK"; IEEE Transactions on Automatic Control; February 1977; pp. 146-149.

9.- FALB, Peter L. and WOLOVICH, William A.; "DECOUPLING IN THE DESIGN AND SYNTHESIS OF MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS"; IEEE Transactions on Automatic Control; vol. AC-12,No.6; December; 1967; pp. 651-659.

10.- HOWZE, J. W. AND PEARSON J. B.;"DECOUPLING AND ARBITRARY POLE PLACEMENT IN LINEAR SYSTEMS USING OUTPUT FEEDBACK"; IEEE Transactions on Automatic Control; vol. T-AC; December; 1970; pp. 660-663.

11.- SATO, Stephen M. and LOPRESTY,Philip V.; "ON THE GENERALIZATION OF ESTATE FEEDBACK DECOUPLING THEORY"; IEEE Transactions on Automatic Control; vol. AC-16, No.2; April 1971; pp. 133-139.

12.- FRANK, Ayres; "MATRICES"; Colección Shaum; Primera Edición; Editorial Mcgraw-Hill; México; 1970.

13.- POLLAK, V. Seymour; "UNA GUIA A LA PROGRAMACION ESTRUCTURADA Y PL1"; Primera Edición; México; 1973.

14.- GROGONO, Peter; "PROGRAMACION EN PASCAL"; Primera Edición; México; 1984.