

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

"LUGAR DE LAS RAICES PARA SISTEMAS DISCRETOS"

GALO VINICIO ACOSTA VALENCIA

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL
TITULO DE INGENIERO EN ELECTRONICA
Y CONTROL

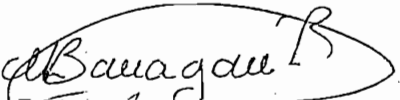


DICIEMBRE DE 1.984

QUITO

CERTIFICACION

CERTIFICO QUE LA PRESENTE TESIS
HA SIDO DESARROLLADA POR EL SR.
GALO VINICIO ACOSTA VALENCIA
BAJO MI DIRECCION.


ING. MARCO BARRAGAN

DIRECTOR DE TESIS

AGRADECIMIENTO

Mis más sinceros agradecimientos al Ing. Marco Barragán por sus acertados consejos y por todo el tiempo dedicado a la dirección de esta Tesis.

A MIS PADRES

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	
CAPITULO I : LOS SISTEMAS DISCRETOS	
Introducción.	1
1.1. Sistemas de datos muestreados .	1
1.2. Muestreadores y retenedores.	5
1.3. Análisis matemático del proceso de muestreo.	8
Espectro de muestreo.	11
1.4. El Teorema de Muestreo.	16
1.5. La función muestreada.	17
Estabilidad de sistemas muestreados.	19
1.6. Reconstrucción de señales muestreadas.	20
El retenedor de orden cero.	23
El retenedor de primer orden.	26
1.7. La transformada Z.	30
Ejemplos.	32
La transformada Z inversa.	34
Teoremas.	37
1.8. Mapeo del plano S al plano Z.	42
Lugares de amortiguamiento constante.	43
Lugares de frecuencia constante.	44
Lugares de razón de amortiguamiento constante.	44
1.9. La función de transferencia de pulsos.	47
Función de transferencia de pulsos para el R.O.C. y la relación entre $G(S)$ y $G(z)$.	49

	Pág.
1.10. Estabilidad en sistemas discretos.	57
Método de determinantes de Schur-Cohn.	59
Prueba de estabilidad de Jury.	61
Forma tabular de Raible.	64
Transformación bilineal.	69
Método de Liapunov para sistemas discretos.	72

CAPITULO II : EL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES EN EL PLANO Z

Introducción.	77
2.1. Fundamento teórico.	77
2.2. Ventajas del Lugar Geométrico de las Raíces.	80
2.3. Reglas para la construcción del L.G.R.	80
Puntos de origen del L.G.R.	85
Puntos donde termina el L.G.R.	86
Número de ramas.	86
Simetría del L.G.R.	87
Asíntotas.	88
Intersección de las asíntotas.	90
L.G.R. sobre el eje real.	91
Ángulos de partida (o llegada) desde polos complejos (o ceros complejos).	95
Puntos de arranque en el eje real.	96
Cálculo de K en el L.G.R.	106
Ganancia crítica.	107
Ejemplos.	108

	Pág.
CAPITULO III: CONSTRUCCION Y DESCRIPCION DEL PROGRAMA	
Introducción.	122
3.1. Descripción general del sistema.	122
3.2. Descripción del programa.	124
Diagrama de bloques.	127
Funcionamiento.	131
3.3. El programa principal.	135
3.4. Subrutinas.	137
Entrada de datos.	137
Cálculo y evaluación de raíces y puntos de separación.	138
Listado de variables.	139
Análisis general del L.G.R.	140
Construcción, del L.G.R.. Explicación.	143
3.5. Cálculo de la ganancia crítica.	148
3.6. Respuesta en el tiempo y estabilidad absoluta.	150
3.7. Respuesta de Frecuencia.	153
CAPITULO IV: EJEMPLOS DE UTILIZACION DEL PROGRAMA IMPLEMENTADO	
Introducción.	155
Ejemplos varios.	155
CAPITULO V : CONCLUSIONES	
Recomendaciones.	208

	Pág.
APENDICES	210
APENDICE A : Manual de utilización del programa. Manual de errores.	
APENDICE B : Listado del programa.	
APENDICE C : Diagramas de Flujo.	
BIBLIOGRAFIA.	211

INTRODUCCION

En fechas recientes se ha desarrollado ampliamente el uso de sistemas discretos y digitales en aplicaciones de control, debido a los grandes adelantos observados en materia de computadores digitales que ha traído como consecuencia un abaratamiento en el costo de los mismos, lo cual ha hecho posible el uso intensivo de sistemas de control digital en todo tipo de procesos, generalmente con la finalidad de automatizarlos.

El estudio y análisis de estabilidad de dichos sistemas puede ser realizado utilizando diferentes técnicas, siendo una de las principales el método del Lugar Geométrico de las Raíces, el cual por ser un método gráfico facilita además el diseño y compensación de los mismos, ya que la estabilidad relativa y el funcionamiento transitorio de un sistema de control discreto de lazo cerrado están íntimamente relacionados con la ubicación de las raíces de la ecuación característica de dicho sistema en el plano Z.

El método del Lugar Geométrico de las Raíces provee al Ingeniero de Control una medida de la sensibilidad de las raíces del sistema respecto a la variación de un parámetro, generalmente la ganancia de lazo abierto, lo cual permite una visualización objetiva y ágil de las características del mismo.

Debe anotarse que la construcción del Lugar de las Raíces es un proceso iterativo que debe cumplir con ciertas reglas establecidas, que traen como consecuencia la realización de complejos cálculos analí

ticos, los cuales son siempre similares en su forma, sin importar el grado del sistema en análisis, puesto que el único parámetro variable es la ganancia de lazo. Todo esto unido a las ventajas que tiene el estudiar un sistema de control mediante este método en cuanto se refiere a simulación y análisis de estabilidad y al hecho de que nada más lógico en el estudio de un sistema discreto que usar un computador digital, hace posible que este trabajo de construcción del L.G.R. y su análisis sea entregado al computador TEKTRONIX 4051 con que cuenta la Facultad.

A continuación se delinearé el contenido de la tesis:

El primer capítulo se dedica al estudio de los sistemas discretos, su definición, el proceso de muestreo, la transformada Z , mapeo del plano S al plano Z , la función de transferencia de pulsos, criterios de estabilidad de sistemas discretos, etc., todo lo cual permite comprender de mejor manera este tipo de sistemas. Se da por sobreentendido que el usuario de esta tesis tiene conocimientos básicos sobre sistemas discretos, por lo que el interés de este capítulo no es profundizar totalmente en el tema, sino más bien dar una visión general sobre los mismos.

En el segundo capítulo se desarrollan las reglas que rigen la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces de un sistema discreto en el plano Z , y que hacen posible la implementación del mismo en el computador, por lo que puede considerarse junto con los programas implementados como la parte central de esta tesis. Se entrega el fundamento teórico en que se basa el desarrollo del método del

Lugar de las Raíces y se analiza las ventajas que se obtiene al es tudiar un sistema de control mediante esta técnica, procediéndose finalmente a dar ejemplos sobre la construcción misma de estos diagramas.

En el tercer capítulo se realiza un estudio sobre la construcción del programa, se entrega una descripción general del sistema y se explica adecuadamente el trabajo que realiza cada uno de los subprogramas. Igualmente se analizan separadamente la subrutina de obtención de la ganancia crítica y los subprogramas de respuesta en el tiempo y análisis de estabilidad absoluta, así como el de respuesta de frecuencia como sistema muestreado, que han sido desarrrollados con la finalidad de proveer de forma más completa un conjunto de herramientas de diseño.

El capítulo IV comprende un sinnúmero de ejemplos que validan los programas implementados. Se desarrollan diferentes alternativas de uso de los programas y se entregan los comentarios y conclusio nes que se obtienen de cada uno de estos ejemplos de utilización.

En el capítulo V se tienen las conclusiones y comentarios generales obtenidos durante el desarrollo de esta tesis, y se entrega a demás recomendaciones que son fruto de esta experiencia.

Finalmente en los apéndices se entregan los manuales de uso y errores del programa, los diagramas de flujo de los programas implementados y el listado de los mismos, aspirando a que estos pasen a enriquecer la biblioteca de programas que posee el área de Sistemas

de Control, para uso y beneficio de los estudiantes que se están formando en la Facultad.

C A P I T U L O I

LOS SISTEMAS DISCRETOS

Introducción.-

En los últimos años se ha observado un progreso muy significativo en cuanto se refiere a Sistemas de Control de datos discretos y digitales. Estos sistemas han ganado en importancia y popularidad en todos los campos, debido en parte a los avances observados en las computadoras digitales de propósito específico, así como por las ventajas encontradas en trabajar con señales digitales.

Los sistemas de datos muestreados trabajan tanto con señales continuas como discretas, haciéndose necesario por tanto la discretización de los sistemas continuos, que pueden llevarse a cabo mediante el muestreo de datos.

1.1. SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS

Debe anotarse que el término "Sistemas de Control por Muestreo de Datos" se refiere a una clase más generalizada de sistemas, en tanto que el término "Sistemas de Control Digital" implica el uso de un controlador digital en el sistema de control.

Estrictamente hablando, datos muestreados son señales pulsantes moduladas en amplitud, esto es, un tren de pulsos que lleva la información en la amplitud de los mismos, en tanto que datos digitales son

señales generadas por computadores o transductores digitales, codificadas de cierta manera.

Las aplicaciones de los sistemas muestreados en la tecnología moderna son extensas, pero en general pueden clasificarse en las siguientes categorías:

a) Sistemas de Control con Muestreo Inherente.-

Estos son los sistemas en que las señales están disponibles solo en forma muestreada. Entre ellos, pueden citarse los siguientes:

a.1. Sistemas rastreadores de radar.- En estos sistemas, la señal de entrada tiene la forma de una serie de pulsos.

a.2. Sistemas de tiempo compartido.- Con la finalidad de reducir costos en la transmisión de la información, en muchos sistemas el circuito transmisor de datos se reparte entre varios subsistemas, lográndose de esta manera una optimización general.

a.3. Computadoras digitales en sistemas de control.- En la actualidad es muy frecuente el uso de computadoras digitales en el proceso mismo de control de un sistema, lo cual es conocido como CONTROL ON LINE, de esta manera se logra una mejora de sus características estáticas y dinámicas.

En la Fig. 1.1.1. se indica una de las diversas maneras en

que una computadora digital puede incorporarse en un sistema de control.

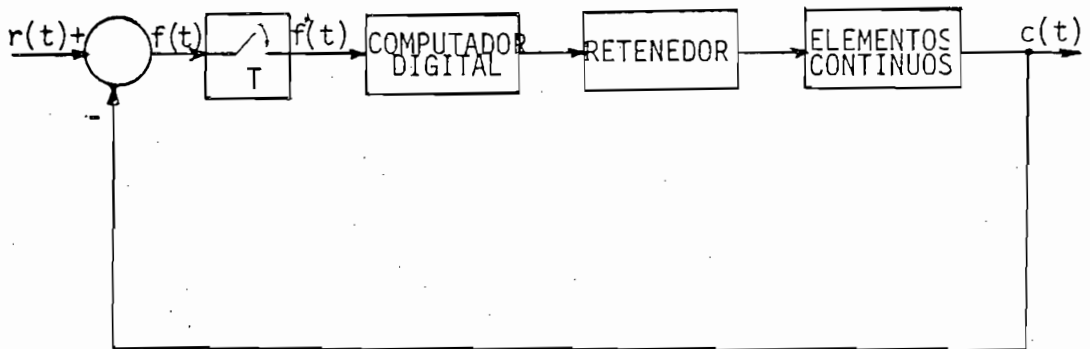


Fig. 1.1.1. Sistema de Control On Line

b) Sistemas de Control con Muestreo Intencional.-

Bajo ciertas condiciones un sistema de control por muestreo de datos con períodos de muestreo variables tiene mejor funcionamiento que los sistemas contínuos convencionales.

Los sistemas de datos muestreados pueden facilitar la obtención del "Principio de Adaptabilidad", utilizado por el denominado "Control - Adaptivo" o de "Mejoramiento Automático", muy estudiado en años recientes debido a las grandes ventajas que ofrece, puesto que estos sistemas de control pueden cambiar sus propios parámetros, como respuesta a un cambio de condiciones de funcionamiento o de las estradas del sistema, "adaptándose" el control a estas nuevas condiciones.

A continuación se presenta un diagrama de bloques de un sistema de control adaptivo.

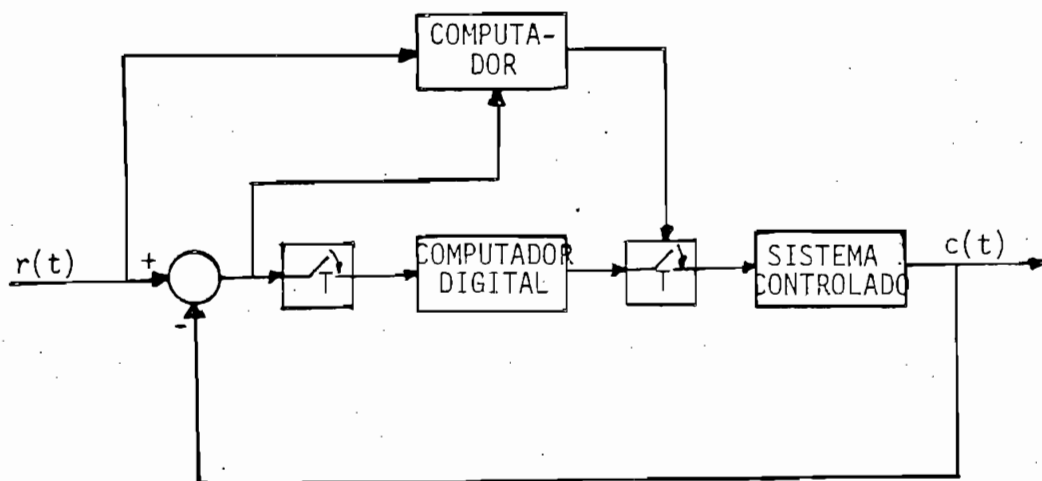


Fig. 1.1.2. Sistema de Control Adaptivo

Otras razones para el empleo del proceso de muestreo en forma inten
cional son:

- Mejoramiento de Sensibilidad: Mediante el proceso de muestreo es posible obtener una gran sensibilidad en mecanismos sensoriales.

Esto es, por ejemplo, si se hace necesario manejar una carga mediante una señal de baja potencia, si se muestrea esta señal de ba
ja potencia, el mecanismo sensorio resulta ser extremadamente sensible en términos de ganancia de energía.

- Ventajas de trabajar con señales digitales: La gran ventaja de tra
bajar con señales digitales es que mediante cierto código pueden conservarse y transmitirse con facilidad y precisión.

1.2. MUESTREADORES Y RETENEDORES

Estos circuitos son más comunmente conocidos como SAMPLE AND HOLD.

Un "muestreador" (sample) en sistemas discretos o digitales es un circuito que convierte una señal análoga a un tren de pulsos modulados en amplitud (señal discreta).

Un "retenedor" (hold) mantiene o congela el valor de una señal discreta (pulso) durante cierto tiempo determinado. En la mayoría de operaciones digitales prácticas el muestreador-retenedor es una sola unidad, denominada S/H.

Una de las principales funciones del S/H es congelar las señales de rápida variación durante todo tipo de operaciones de conversión.

En la siguiente figura se indica un circuito S/H de lo más simple.

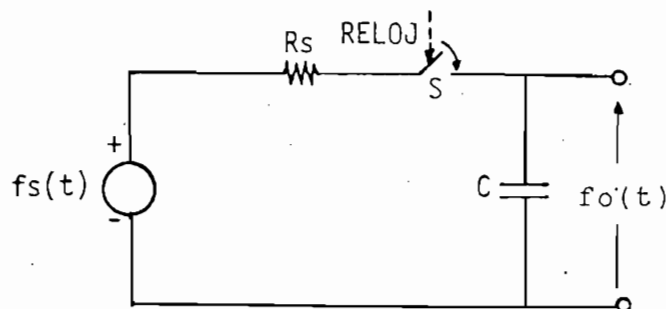


Fig. 1.2.1. Circuito Muestreador-Retenedor

El switch S , indicado en la Fig. 1.2.1. puede ser controlado mediante un reloj. Cuando S está cerrado, la salida $f_o(t)$ sigue a la entrada $f_s(t)$. Cuando se abre S , la salida se mantiene al valor de voltaje al que está cargado el condensador C . Si se considera $R_s=0$

se tendría el siguiente diagrama de señales para el circuito anterior:

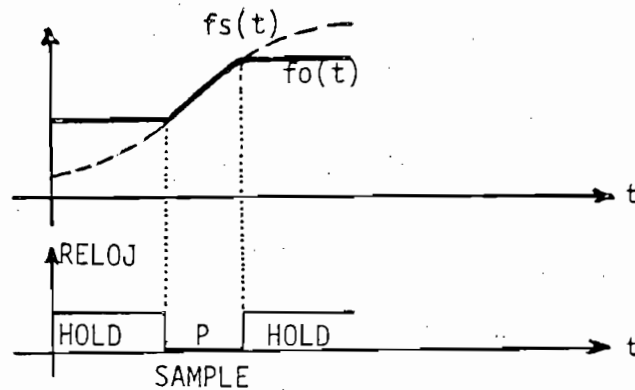


Fig. 1.2.2. Señales en el Circuito S/H con $R_s = 0$.

En la práctica, el S/H tiene varias características de imperfección, debido por ejemplo a que $R_s \neq 0$, y son:

- Tiempo de adquisición (T_a): Es el tiempo que transcurre desde que se da el comando SAMPLE hasta que la salida del dispositivo muestra o sigue la señal de entrada; dentro de una banda de error de terminada.
- Tiempo de apertura (T_p): Es el tiempo desde que se da el comando de HOLD, cuando la salida rastrea la señal de entrada, hasta que deja de hacerlo, esto es, hasta que el switch S se abre.
- Tiempo de estabilización (T_s): En el cambio de SAMPLE a HOLD se produce una oscilación amortiguada en la salida. T_s es el tiempo en que se estabiliza dicha oscilación alrededor de un error determinado.
- Descarga en modo HOLD: Mientras la salida está congelada (hold)

esta no se mantiene a un voltaje fijo, sino que decrece por efecto de las corrientes de fugas del capacitor de almacenamiento.

En la Fig. 1.2.3. se indican todas estas características de imperfección en las señales del S/H.

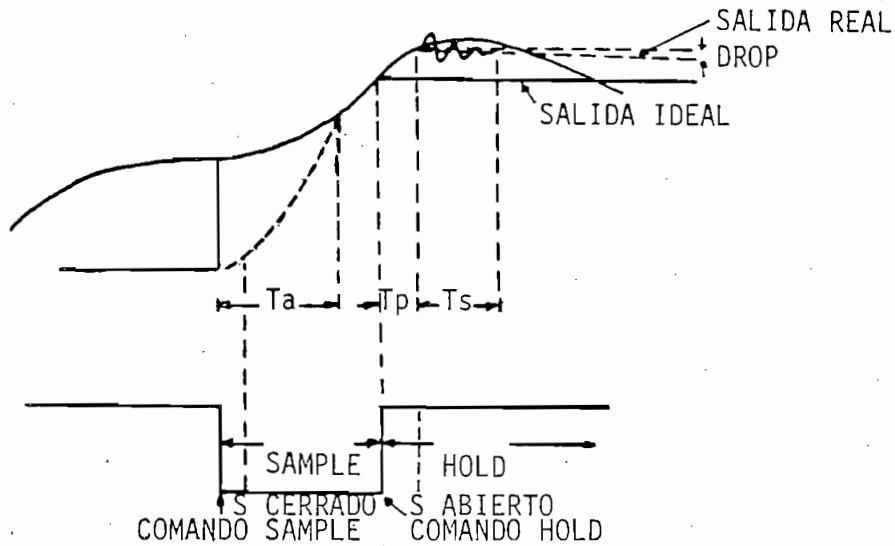


Fig. 1.2.3. Señales Reales en el S/H.

El tiempo de duración entre los comandos de SAMPLE toma el nombre de período de muestreo T .

En la práctica se tiene que el tiempo de duración del pulso muestreado, P , es mucho menor que el período de muestreo. Entonces, para propósitos prácticos, el S/H puede ser representado idealmente por el diagrama de bloques de la Fig. 1.2.4.

Para el proceso de muestreo interesa el "muestreador ideal" que es aquel en el que la duración del muestreo P es cero, simplificándose el análisis del mismo.

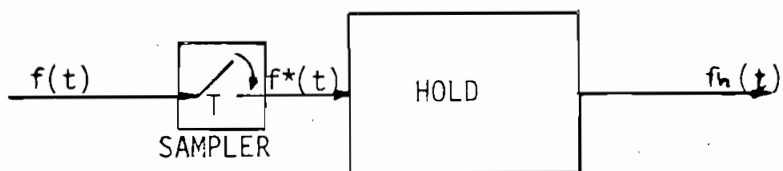


Fig. 1.2.4. Muestreador-Retenedor Ideal

1.3. ANALISIS MATEMATICO DEL PROCESO DE MUESTREO

Considérese el muestreador ideal de la Fig. 1.3.1.

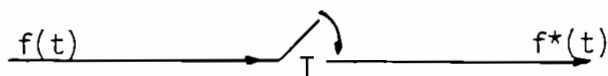


Fig. 1.3.1. Representación del Muestreador Ideal

donde: $f(t)$ es la señal continua de entrada.

$f^*(t)$ es la señal de salida, es una serie de pulsaciones mo
duladas por $f(t)$.

El análisis exacto de los sistemas de datos muestreados, tomando en cuenta que la duración del muestreo P es finito, es más elaborado. Generalmente se reemplaza el muestreador real con un muestreador - ideal, cuya salida $f^*(t)$ es una serie de impulsos. Por tanto, para el muestreador ideal, la salida $f^*(t)$ es:

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad (1.3.1)$$

donde $\delta_T(t)$ es una serie de impulsos unitarios como en (1.3.2):

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (1.3.2)$$

Para sistemas causales se tiene:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (1.3.3)$$

En donde, $\delta(t-nT)$ es un impulso de área o potencia unitaria que ocurre al tiempo $t = nT$, por tanto la ecuación 1.3.1. puede escribirse:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t-nT) \quad (1.3.4)$$

Esto es, la salida del muestreador es una serie de impulsos de potencia igual a la magnitud de $f(t)$ en los instantes de muestreo $t = nT$, donde n es un número entero.

A continuación, como ejemplos, se presenta la salida de un muestreador ideal para una señal de entrada sinusoidal.

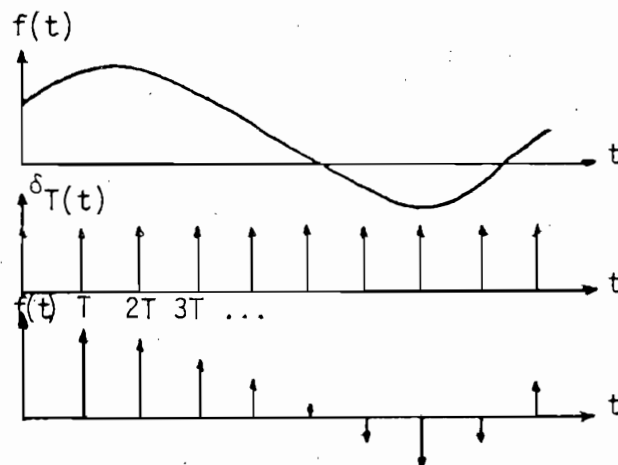


Fig. 1.3.2. Señales en el Muestreador Ideal

Al muestreador se le conoce también con el nombre de modulador de impulsos, pudiendo por tanto ser representado de la forma:

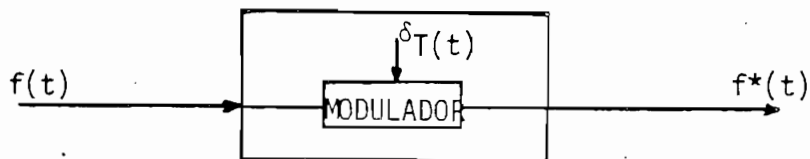


Fig. 1.3.3. El Muestreador como Modulador

donde: $\delta_T(t)$ es la señal portadora.

$f(t)$ es la señal de modulación.

En este estudio es útil la Transformada de Laplace de $f^*(t)$:

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $f^*(t)$:

$$F^*(S) = L\{f^*(t)\} = L\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-nT)\right\} \quad (1.3.5)$$

$$F^*(S) = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-St} dt \quad (1.3.6)$$

$$F^*(S) = \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-nT) e^{-St} dt \quad (1.3.7)$$

$$F^*(S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(nT) \delta(t-nT) e^{-SnT} dt \quad (1.3.8)$$

pero:

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \int_0^{\infty} \delta(t-a) dt = f(a) \quad (1.3.9)$$

Entonces:

$$F^*(S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-SnT} \quad (1.3.10)$$

La ecuación 1.3.10. es una función irracional, por lo que no es conveniente trabajar con ella, debiéndose buscar una forma de racionalizarla. Esto es lo que se consigue mediante la transformada Z, que se explicará más adelante, pero que en resumen es:

$$Z = e^{ST} \quad (1.3.11.a)$$

Esto es:
$$S = \frac{1}{T} \ln Z \quad (1.3.11.b)$$

Entonces, reemplazando (1.3.11.a) en (1.3.10), se tiene:

$$F^*(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) Z^{-n} \quad (1.3.12)$$

Donde Z es una variable compleja, relacionada con S por (1.3.11).

Por tanto:

$$F^*(Z) = F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) Z^{-n} \quad (1.3.13)$$

La ecuación (1.3.13) es una función racional en Z.

ESPECTRO DE MUESTREO.-

Para obtener el espectro de frecuencias de la señal muestreada debe tomarse su transformada de Fourier.

Como ya se analizó la serie de impulsos unitarios $\delta_T(t)$ está definida por la ecuación:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (1.3.14)$$

Puesto que esta serie es una función periódica de período T , puede representarse mediante Series de Fourier, esto es:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (1.3.15)$$

Donde: ω_s es la frecuencia de muestreo en rad/seg.

T es el período de muestreo.

C_n son los coeficientes complejos de la serie de Fourier.

Se define:
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (1.3.16)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (1.3.17)$$

pero:

$$\delta(t-nT) f(t) = \delta(t-nT) f(nT) \quad (1.3.18)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-jn\omega_s nT} dt \quad (1.3.19)$$

reemplazando $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ (1.3.20)

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-j2\pi n^2} dt \quad (1.3.21)$$

pero $e^{-j2\pi n^2} = 1$ puesto que n es entero (1.3.22)

entonces:
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt \quad (1.3.23)$$

Puesto que se integra una serie de impulsos que se suceden cada $t = nT$ entre $-T/2$ y $+T/2$, esto es:

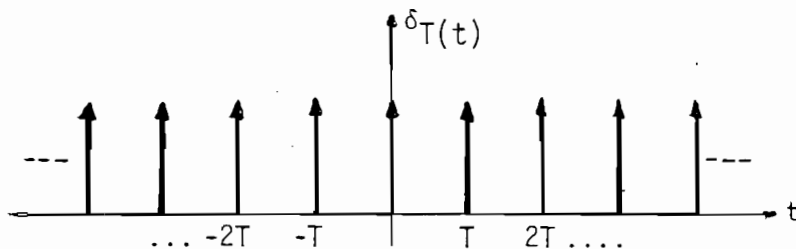


Fig. 1.3.4.

Por tanto:
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt = 1 \quad (1.3.24)$$

De aquí se concluye que
$$c_n = \frac{1}{T} \quad (1.3.25)$$

Tomando la Transformada de Laplace de $f^*(t)$ se tiene:

$$F^*(S) = L \{f(t) \cdot \delta_T(t)\} \quad (1.3.26)$$

$$F^*(S) = \int_0^{\infty} f(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnW_s t} \right] e^{-St} dt \quad (1.3.27)$$

$$F^*(S) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-t(S-jnW_s)} dt \quad (1.3.28)$$

Esto es:

$$F^*(S) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(S-jnW_s) \quad (1.3.29)$$

La ecuación 1.2.29. puede también escribirse como:

$$F^*(S) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(S+jnW_S) \quad (1.3.30)$$

Esto es cierto puesto que n se extiende entre $-\infty$ y $+\infty$.

Tomando la transformada de Fourier, esto es haciendo $S = jW$ se tiene:

$$F^*(jW) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jW + jnW_S) \quad (1.3.31)$$

$$|F^*(jW)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} |F(jW + jnW_S)| \quad (1.3.32)$$

Siempre que el espectro de frecuencia de $F(jW)$ esté limitado en una banda definida por W_C como frecuencia de corte, esto es, si su espectro es como el de la Fig. 1.3.5.

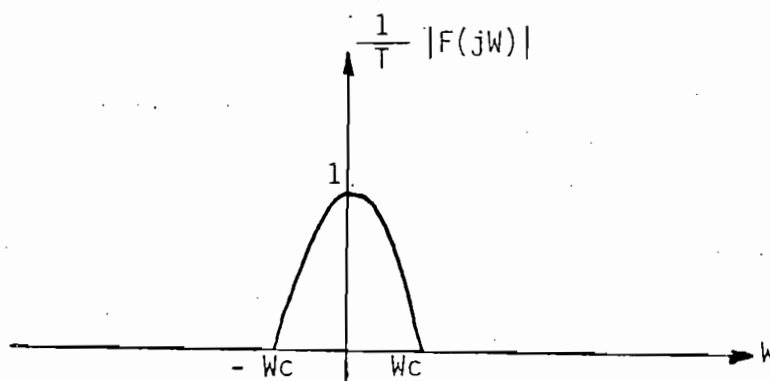


Fig. 1.3.5. Espectro de $F(jW)$

Entonces $F^*(jW)$ contiene el espectro primario de frecuencia de la se ñal de entrada, y además otros componentes complementarios separados

por la frecuencia de muestreo ω_s .

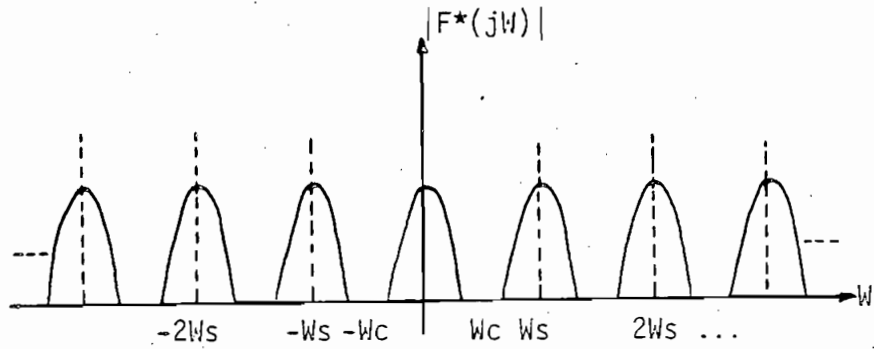


Fig. 1.3.6. Espectro de $F^*(j\omega)$

La Fig. 1.3.6. indica el espectro de $F^*(j\omega)$ para el caso particular en que la frecuencia de muestreo ω_s es mayor que $2\omega_c$. Puede suceder que ω_s sea menor que $2\omega_c$ con lo cual se tendría una superposición del espectro de $F^*(j\omega)$ lo que produciría una deformación de la señal.

A continuación se ilustra lo que sucede con el espectro de $F^*(j\omega)$ cuando ω_s es menor que $2\omega_c$.

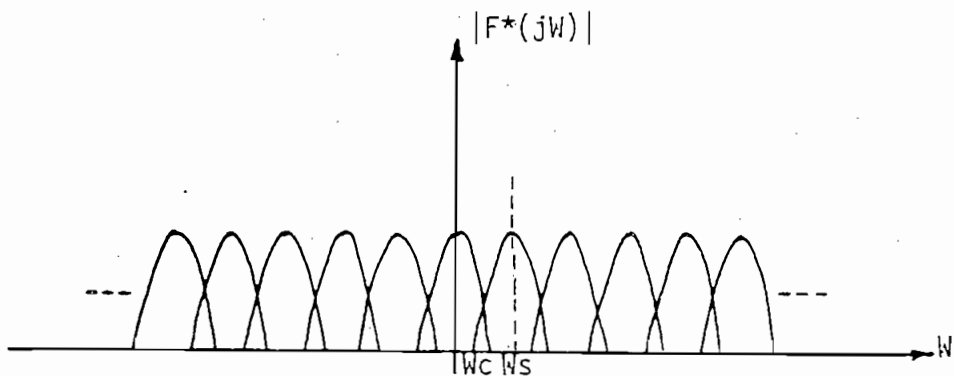


Fig. 1.3.7. Espectro de $F^*(j\omega)$ para $\omega_s < 2\omega_c$

Esto puede verse más claramente en la siguiente figura:

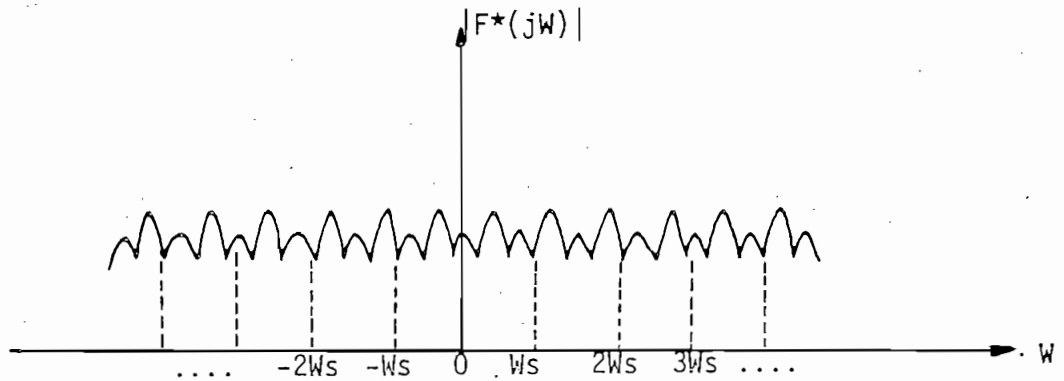


Fig. 1.3.8. Espectro de $F^*(jW)$ Deformado.

1.4. EL TEOREMA DE MUESTREO

De lo anterior debe anotarse que para el caso en que $W_s > 2W_c$ no existe corrupción de la señal en el proceso de muestreo puesto que no existe superposición de las componentes principal y complementarias del espectro. En este caso la señal original puede ser recuperada mediante un filtro pasabajos con frecuencia máxima de W_c .

Para el caso en que $W_s < 2W_c$, si existe superposición de señales en el espectro de muestreo y no es posible recuperar la señal original por simple filtraje puesto que está corrupta. La señal puede recuperarse en este caso mediante un proceso de identificación que es determinístico.

Estas simples razones físicas dadas sobre la mínima frecuencia de muestreo requerida para recuperar totalmente la señal continua original mediante el proceso de filtrado da lugar al denominado Teorema de Muestreo. Teóricamente no existe límite superior para W_s , aunque -

cualquier muestreador real debe tener una frecuencia máxima posible.

De esta análisis y del espectro observado en la Fig. 1.3.6. puede concluirse que la frecuencia de muestreo más baja posible para recuperar la señal por filtrado es $2W_C$, donde W_C es la más alta frecuencia contenida en $f(t)$. Formalmente el Teorema de Muestreo dice:

"Si una señal no contiene frecuencias mayores a W_C rad/seg está completamente caracterizada por los valores de la señal medidos a intervalos de tiempo separados por $T = (1/2)2\pi/W_C$ segundos". En la práctica, la mínima frecuencia de muestreo es mucho mayor a $2W_C$, ya que en su valor influyen la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado y otras consideraciones físicas.

1.5. LA FUNCION MUESTREADA

A continuación se indican algunas propiedades muy importantes de la función de salida del muestreador ideal, tomando en cuenta que:

$$F^*(S) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(S + jnW_S) \quad (1.5.1)$$

a) $F^*(S)$ es una función periódica con período jW_S .

$$F^*(S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nST} \quad (1.5.2)$$

Sustituyendo $S = S + jmW_S$, con m entero

$$F^*(S + jmW_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nT(S + jmW_s)} \quad (1.5.3)$$

pero: $e^{-jnmW_sT} = 1$ puesto que n, m son enteros.

$$F^*(S + jmW_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nST} \quad (1.5.4)$$

$$F^*(S + jmW_s) = F^*(S) \quad (1.5.5)$$

Esto es, dado un punto $S = S_1$ en el plano S , la función $F^*(S)$ tiene igual valor en todos los puntos $S = S_1 + jmW_s$.

Esta propiedad se ilustra claramente en la Fig. 1.5.1. El plano S se divide en un infinito número de franjas periódicas. La franja entre $-W_s/2$ y $+W_s/2$ toma el nombre de franja principal y todas las otras franjas periódicas a frecuencias superiores se llaman franjas complementarias.

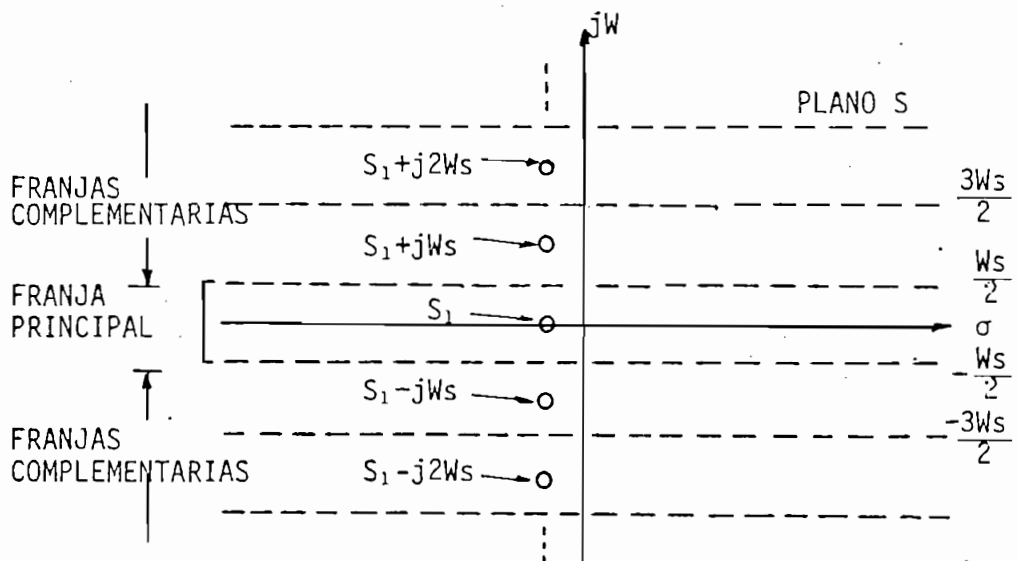


Fig. 1.5.1. Franjas Periódicas en el Plano S .

b) Si la función $F(S)$ tiene un polo en $S = S_1$ entonces $F^*(S)$ tiene polos en $S = S_1 + jmW_s$ para m entero.

Puede observarse la realidad de esta afirmación a partir de la ecuación 1.5.1.

En la Fig. 1.5.2.a. se indican dos polos de $F(S)$ y en la 1.4.2.b. se observan los correspondientes para $F^*(S)$.

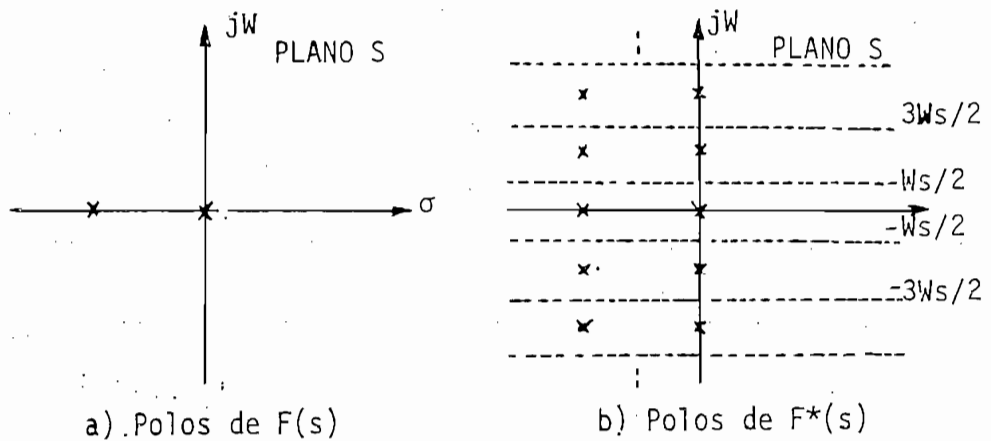


Fig. 1.5.2.

ESTABILIDAD EN SISTEMAS MUESTREADOS.-

Es conocido que la estabilidad en sistemas de datos continuos viene dado por la ubicación de las raíces de la ecuación característica - del sistema en el semiplano izquierdo del plano S. En sistemas de datos muestreados, puesto que en las franjas complementarias se re pite la información existente en la franja principal, es suficiente el analizar la ubicación de los polos en esta franja para la de terminación de la estabilidad. (Ver Fig. 1.5.2.b.).

1.6. RECONSTRUCCION DE SEÑALES MUESTREADAS

En la mayoría de sistemas de control discreto se hace necesaria la reconstrucción de la señal continua original, luego de que se ha actuado sobre la señal discreta (puesto que la mayoría de sistemas de control tienen componentes diseñados para actuar con señales continuas), necesitándose un filtro como interface entre los componentes discretos y análogos del control.

El circuito de retención usado junto con la operación de muestreo discutida en la sección 1.2. es esencialmente el tipo de filtro más usado en sistemas de control discreto.

Supóngase que se tiene $F^*(S)$ a partir de un muestreador ideal con una frecuencia de muestreo $\omega_s \geq 2\omega_c$. En la Fig. 1.6.1 se indica el espectro de $F^*(S)$, de lo cual se desprende que el tipo de filtro necesario para la reconstrucción de la señal es un pasa-bajo ideal, como se observa en la Fig. 1.6.2.

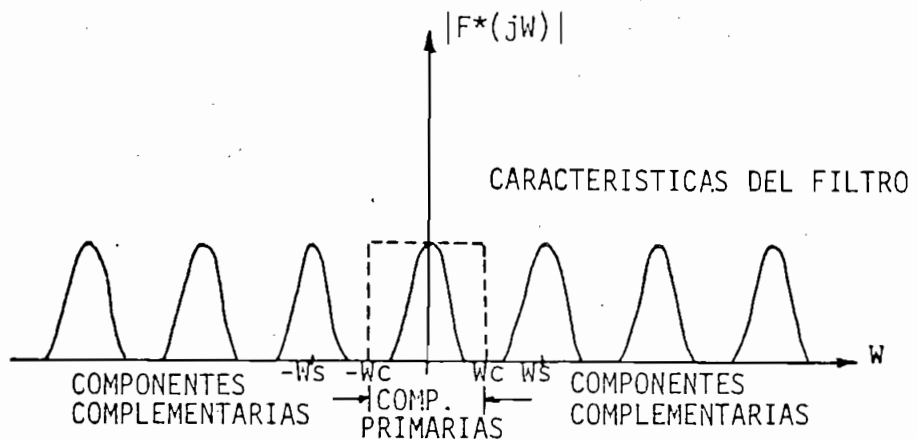


Fig. 1.6.1. Espectro de $F^*(j\omega)$

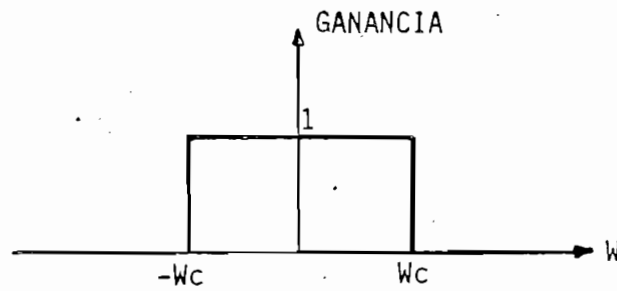


Fig. 1.6.2. Filtro Ideal

La construcción de un filtro ideal como el de la Fig. 1.6.2. es físicamente irrealizable puesto que debería responder antes de que se le aplique la señal de entrada.

Desechado el uso de un filtro ideal, otra forma de reconstruir la señal original sería mediante el criterio de Predicción y Alisamiento para lo cual es necesario el conocer los valores tomados anteriormente por la señal $f(nT)$, pero esto produce retardos de fase y en consecuencia posible inestabilidad del sistema. Por tanto, lo mejor que puede hacerse en la reconstrucción de la señal es tratar de aproximarla a la original tanto como sea posible; pero una mayor aproximación a la señal original requiere grandes tiempos de retardo, lo cual no es deseable en vista de los efectos indicados sobre la estabilidad del sistema. Entonces existe un compromiso entre estabilidad del sistema y una mejor aproximación de la señal.

La señal muestreada es una secuencia de pulsos $f(0), f(T), f(2T), \dots$ $\dots f(nT)$, cuya potencia para $t = nT$ viene dado por el valor de $f(t)$ en $t = nT$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Entonces el proceso de reconstrucción puede ser analizado como una extrapolación de la señal, dados diferentes puntos separados por intervalos T . Por ejemplo, la señal original $f(t)$ entre dos instantes de muestreo consecutivos nT y $(n+1)T$ será estimada en base a los valores de $f(t)$ para todos los instantes de muestreo anteriores a nT , esto es $(n-1)T, (n-2)T, \dots, 0$.

Un método por demás conocido para generar esta aproximación deseada es el expandir $f(t)$ en series de energía entre nT y $(n+1)T$ esto es:

$$f_n(t) = f(nT) + f'(nT)(t-nT) + \frac{f''(nT)}{2!} (t-nT)^2 + \dots \quad (1.6.1)$$

$$\text{donde: } f_n(t) = f(t) \quad \text{para } nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.6.2)$$

$$\text{y } f'(nT) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=nT} \quad (1.6.3)$$

$$f''(nT) = \left. \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right|_{t=nT} \quad (1.6.4)$$

Pero, una buena aproximación de $f'(t)$ en $t = nT$ es:

$$f'(nT) = \frac{1}{T} [f(nT) - f[(n-1)T]] \quad (1.6.5)$$

$$\text{y } f''(nT) = \frac{1}{T^2} [f'(nT) - f'[(n-1)T]] \quad (1.6.6)$$

$$\text{Por tanto: } f''(nT) = \frac{1}{T^2} [f(nT) - 2f[(n-1)T] + f[(n-2)T]] \quad (1.6.7)$$

Puede observarse que a medida que el grado de la derivada es mayor,

mayor es el número de pulsos retardados requeridos. Por tanto puede verse claramente que el número de retardos necesarios para aproximar $f^{(k)}(nT)$ es $(k+1)$.

Además una mejor aproximación requiere el uso de circuitos más complejos y esto da como resultado una elevación en el costo de construcción de los mismos. Por estas razones, en la práctica se hace uso de aproximaciones, que dan lugar a los circuitos RETENEDORES DE ORDENES CERO Y UNO.

RETENEDOR DE ORDEN CERO (R.O.C.)

Si solo se emplea el primer término de la serie de energía dado por la ecuación (1.6.1) para aproximar la señal entre dos instantes de muestreo consecutivos, el polinomio extrapolante es llamado Retenedor de Orden Cero. Esto se ilustra en la Fig. (1.6.3).

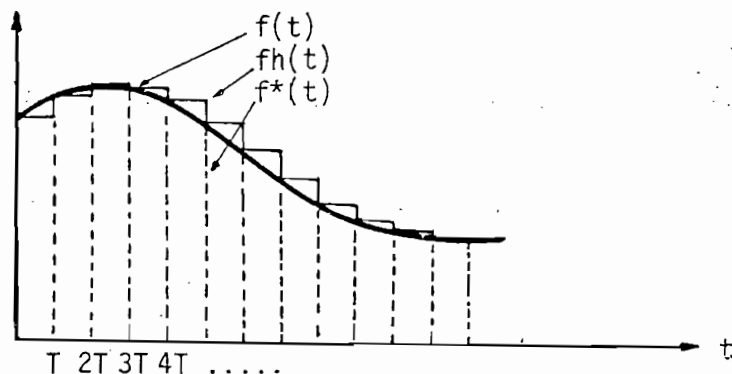


Fig. 1.6.3. Aproximación por el Retenedor de Orden Cero

Donde: $f(t)$ es la señal continua original.

$f_h(t)$ es la salida del retenedor de orden cero.

En la Fig. (1.6.4) se tiene el equivalente al circuito muestreador-retenedor de orden cero.

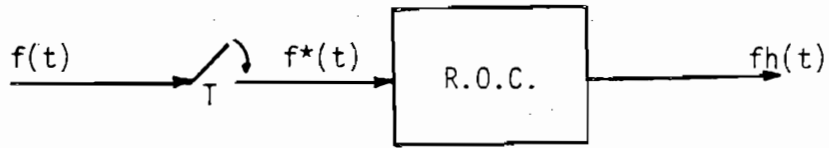


Fig. 1.6.4.

Esto es, la función del R.O.C. es que si se tiene un impulso unitario como entrada, la salida es 1 entre 0 y T, como en la Fig. 1.6.5.

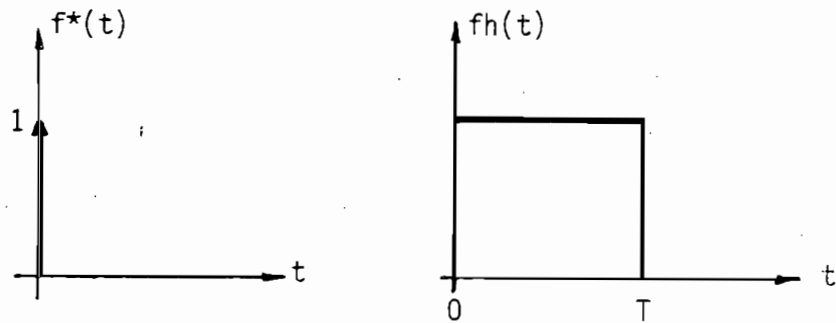


Fig. 1.6.5.

La respuesta del R.O.C. puede ser escrita como:

$$g_{ho}(t) = \mu_s(t) - \mu_s(t-T) \quad (1.6.8)$$

Donde: $\mu_s(t)$ es la función paso unitaria.

Por tanto, la función de transferencia del R.O.C. es:

$$G_{ho}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (1.6.9)$$

Su respuesta de frecuencia será:

con $s = j\omega$

$$G_{ho}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (1.6.10)$$

de donde:

$$G_{ho}(j\omega) = T \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{(\omega T/2)} e^{-j \frac{\omega T}{2}} \quad (1.6.11)$$

puesto que $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$G_{ho}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\text{sen} \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)} e^{-j \frac{\pi\omega}{\omega_s}} \quad (1.6.12)$$

Por tanto, las características de ganancia y fase del circuito retenedo de orden cero, son:

$$|G_{ho}(j\omega)| = \frac{2\pi}{\omega_s} \left| \frac{\text{sen} \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)} \right| \quad (1.6.13)$$

$$\angle G_{ho}(j\omega) = \begin{cases} -\pi(\omega/\omega_s) ; \text{ para } \text{sen} \pi(\omega/\omega_s) > 0 \\ -\pi[(\omega/\omega_s) - \frac{\text{sen} \pi(\omega/\omega_s)}{|\text{sen} \pi(\omega/\omega_s)|}] ; \text{ para } \text{sen} \pi(\omega/\omega_s) < 0 \end{cases} \quad (1.6.14a)$$

$$(1.6.14b)$$

Esto se observa en la Fig. 1.6.6.



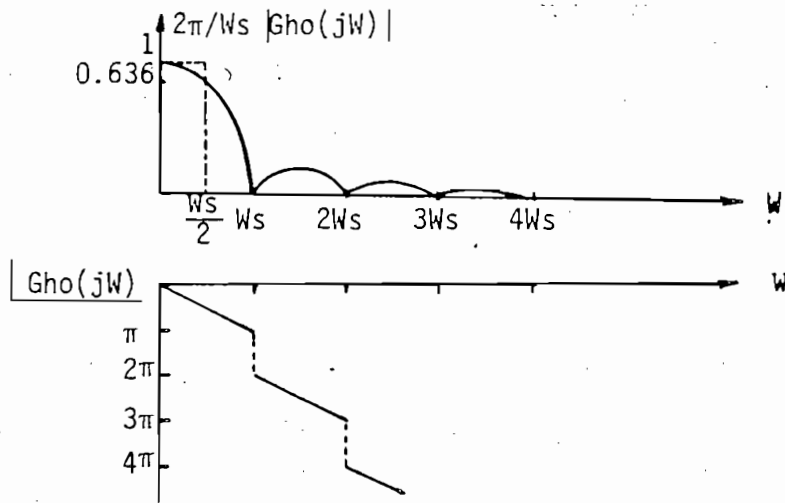


Fig. 1.6.6. Características de Ganancia y Fase del R.O.C.

Según esta figura, es evidente que el R.O.C. se comporta esencialmente como un filtro pasabajos. Sin embargo, a diferencia del filtro ideal que interrumpe a $W_S/2$, el R.O.C. solo baja al 63,6% de su valor inicial debido al término sinusoidal de la ecuación (1.6.12).

La curva de variación de fase de $G_{HO}(jW)$ se interrumpe a valores enteros de la frecuencia de muestreo W_S . Como normalmente $W_S > 2W_C$, ésta interrupción no debe tener efecto alguno en la mayoría de los sistemas.

DISPOSITIVO DE RETENCION DE PRIMER ORDEN (R.P.O.)

Si se emplean los dos primeros términos de la serie de energía de la ecuación (1.6.1) para extrapolar $f(t)$ entre dos instantes sucesivos de muestreo nT y $(n+1)T$, se tiene:

$$f_n(T) = f(nT) + f'(nT) (t-nT) \quad (1.6.15)$$

$f'(nT)$ se define como en la ecuación (1.6.5).

$$\text{Entonces: } f_n(t) = f(nT) + \frac{1}{T} \{f(nT) - f[(n-1)T]\} \cdot (t-nT) \quad (1.6.16)$$

La última ecuación dice que la salida del R.P.O. entre dos instantes de muestreo consecutivos es una función tipo rampa, así:

De la ecuación (1.6.16), si se aplica la señal a $t = 0$ ($n=0$)

$$f_0(t) = f(0) + \frac{f(0) - f(-T)}{T} t \quad (1.6.17)$$

La respuesta impulsiva unitaria entonces es:

$$g_{h_1}(t) = 1 + \frac{t}{T} \quad (1.6.18)$$

Puesto que: $f(-T) = 0$

Todo esto válido para $0 \leq t \leq T$.

La respuesta impulsiva del R.P.O. para $T \leq t \leq 2T$ se obtiene si $n=1$:

$$g_{h_2}(t) = f(T) + \frac{f(T) - f(0)}{T} (t - T) \quad (1.6.19)$$

$f(T) = 0$ ya que el impulso se aplica a $t = 0$.

$f(0) = 1$ es el impulso unitario aplicado.

Por tanto:

$$g_{h_1}(t) = 1 - \frac{t}{T} \quad (1.6.20)$$

Si $n > 1$; esto es $n = 2, 3, 4, \dots$

$$g_{h_1}(t) = 0 \quad (1.6.21)$$

Por tanto:

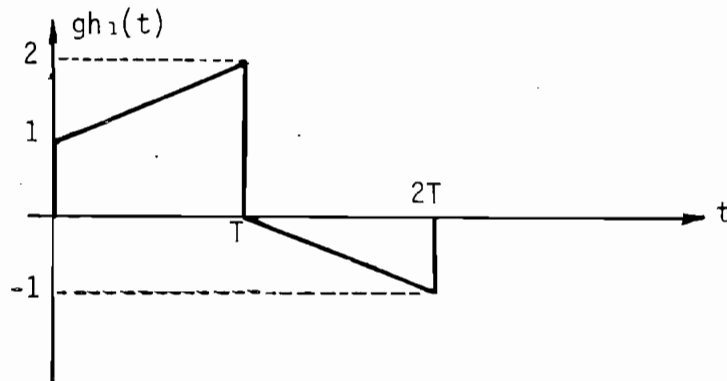


Fig. 1.6.7. Respuesta del R.P.O. a un Impulso Unitario.

En resumen:

$$g_{h_1}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T & (1.6.18) \\ 1 - \frac{t}{T} & T \leq t \leq 2T & (1.6.20) \\ 0 & t > 2T, t < 0 & (1.6.21) \end{cases}$$

Esto es:

$$g_{h_1}(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) \mu_S(t) - 2\left(1 + \frac{t-T}{T}\right) \mu_S(t-T) + \left(1 + \frac{t-2T}{T}\right) \mu_S(t-2T) \quad (1.6.22)$$

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:

$$G_{h_1}(S) = \frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2} - 2\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2}\right) e^{-TS} + \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2}\right) e^{-2TS} \quad (1.6.23)$$

$$G_{h_1}(S) = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2}\right) (1 - 2e^{-TS} + e^{-2TS}) \quad (1.6.24)$$

$$G_{h_1}(S) = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2}\right) (1 - e^{-TS})^2 \quad (1.6.25)$$

$$G_{h_1}(S) = \frac{1 + TS}{T} G_{ho}^2(S) \quad (1.6.26)$$

Haciendo a:

$S = jW$; $T = \frac{2\pi}{W_s}$, se obtienen las características de ganancia y fase:

$$|G_{h_1}(jW)| = \frac{2\pi}{W_s} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 W^2}{W_s^2}} \left(\frac{\text{sen } \pi(W/W_s)}{W/W_s}\right)^2 \quad (1.6.27)$$

$$\angle G_{h_1}(jW) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi W}{W_s}\right) - \frac{2\pi W}{W_s}$$

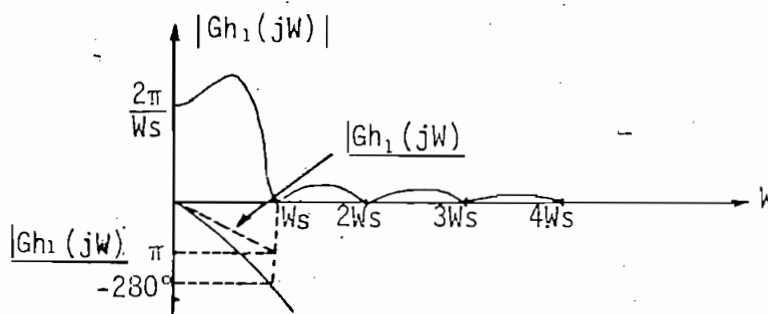


Fig. 1.6.8. Características de Ganancia y Fase del R.P.O.

COMPARACION ENTRE LOS RETENEDORES DE ORDEN CERO Y UNO

Las características de ganancia de estos dos tipos de retenedores nos indican que el R.P.O. tiene mejores características de filtrado

que el R.O.C. como es lógico. Sin embargo el R.P.O. introduce mayor retardo de fase respecto al R.O.C. Por ejemplo, a $W/W_S = 1$, la fase del retenedor de orden uno es -279.1 grados en tanto que para el dispositivo de orden cero es -180 grados. Entonces, el uso del R.P.O. en un sistema de control retroalimentado implica problemas en la estabilización por efecto del mayor retardo; además, su implementación es más complicada respecto al R.O.C. Consecuentemente, en la práctica, el retenedor de primer orden no es muy utilizado, prefiriéndose el de orden cero.

1.7. LA TRANSFORMADA Z

Así como la transformada de Laplace es básica para el análisis y diseño en sistemas continuos de control, correspondientemente el método de la transformada Z es básico en el análisis y solución de problemas de control discreto y de muestreo de datos.

Este método de la transformada Z fue originalmente introducido por HUREWICZ, siendo posteriormente desarrollado por BARKER en Inglaterra y por RAGAZZINI y ZADEH en E.U.

Aunque en años recientes el estudio por el método de variables de estado ha ganado un gran impulso en los estudios de sistemas discretos, la importancia de la transformada Z no debe ser subestimada, debido a que tiene aún gran vigencia el análisis y diseño según la teoría de control clásico.

La transformada de Laplace de una señal muestreada es:

$$L \{f^*(t)\} = F^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTS} \quad (1.7.1)$$

Puesto que esta ecuación no es una función racional en S se dificulta el análisis. Por tanto, es necesario la transformación a una función racional $F(Z)$ a través de un cambio de la variable compleja S en otra variable compleja Z , usando la relación:

$$Z = e^{TS} \quad (1.7.2)$$

$$S = \frac{1}{T} \ln Z \quad (1.7.3)$$

Con: $S = \sigma + j\omega$ (1.7.4)

$$\operatorname{Re} Z = e^{\sigma T} \cos \omega T \quad (1.7.5)$$

$$\operatorname{Im} Z = e^{\sigma T} \operatorname{sen} \omega T \quad (1.7.6)$$

Por tanto: $F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z^{-n}$ (1.7.7)

La cual es una función racional en Z .

La transformada Z de una función $f(t)$ puede representarse como:

$$F(Z) = z \{ f(t) \} \quad (1.7.8)$$

Esto es: $F(Z) = L \{ f^*(t) \}_S = \frac{1}{T} \ln Z$ (1.7.9)

Por tanto, cualquier función $f(t)$ que tiene transformada de Laplace,

tiene transformada Z.

Esto es, para tomar la transformada Z de una función $f(t)$ deben realizarse las siguientes consideraciones:

1. Muestrear $f(t)$, obteniéndose $f^*(t)$.
2. Tomar la transformada de Laplace de $f^*(t)$.

$$F^*(S) = L \{ f^*(t) \}$$

$$F^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTS}$$

3. Reemplazar e^{TS} por Z en $F^*(S)$ para obtener $F(Z)$

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z^{-n} \quad (1.7.7)$$

La ecuación (1.7.7) representa una expresión muy útil para evaluar la transformada Z de una función $f(t)$. Esta expresión tiene la forma de una serie infinita, pudiendo obtenerse la función cerrada equivalente.

A continuación se indican algunos ejemplos de la transformada Z.

1. Transformada Z de la función paso unitaria $u(t)$.

$$F^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nTS}$$

$$F^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTS}$$

$$Z = e^{TS}$$

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = Z^0 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + \dots$$

$$F(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \quad ; \quad \text{con} \quad |Z^{-1}| < 1$$

$$z \{ u(t) \} = \frac{Z}{Z - 1} \quad ; \quad \text{con} \quad |Z| > 1 \quad (1.7.8)$$

2. Transformada Z de e^{-at}

$$F^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-nTS}$$

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} Z^{-n}$$

$$F(Z) = 1 + e^{-aT} Z^{-1} + e^{-2aT} Z^{-2} + \dots$$

$$F(Z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} Z^{-1}} \quad |e^{-aT} Z^{-1}| < 1$$

$$z \{ e^{-at} \} = \frac{Z}{Z - e^{-aT}} \quad |e^{-aT} Z^{-1}| < 1 \quad (1.7.9)$$

3. Transformada Z de $\text{sen } \omega t$.

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen } n\omega T z^{-n}$$

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{jn\omega T} - e^{-jn\omega T}}{2j} z^{-n}$$

$$F(Z) = \frac{1}{2j} \left| \frac{1}{1 - e^{j\omega T} Z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} Z^{-1}} \right|$$

$$z \{ \text{sen } \omega t \} = \frac{Z \text{ sen } \omega T}{Z^2 - 2Z \cos \omega T + 1} \quad (1.7.10)$$

4. Transformada Z de $tu(t)$

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} nT Z^{-n}$$

$$F(Z) = T Z^{-1} + 2T Z^{-2} + 3T Z^{-3} + \dots \quad (1.7.11)$$

Multiplicando la ecuación anterior por Z^{-1} y restando de la original, se tiene:

$$(1 - Z^{-1}) F(Z) = TZ^{-1} + TZ^{-2} + TZ^{-3} + \dots$$

$$(1 - Z^{-1}) F(Z) = T \left(\frac{1}{1 - Z^{-1}} - 1 \right)$$

$$F(Z) = \frac{T}{1 - Z^{-1}} \left(\frac{Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \right)$$

$$z \{ tu(t) \} = \frac{TZ}{(Z - 1)^2} \quad (1.7.11)$$

LA TRANSFORMADA Z INVERSA

Dada una función $F(Z)$, a menudo es conveniente obtener la función en el dominio del tiempo. La transformación inversa de Z puede obtenerse por tres diferentes métodos:

1. La función en Z se convierte en fracciones parciales convenientes y se emplea las tablas de transformadas para obtener la función de tiempo correspondiente.
2. Expansión en series de potencia.
3. Integral de inversión real

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(Z) Z^{n-1} dz \quad (1.7.12)$$

Donde Γ es un círculo de radio e^{cT} con centro en el origen del plano Z y c tiene un valor tal que todos los polos de $F(Z)$ quedan dentro del círculo.

Esto es:

$$f(nT) = \Sigma \text{res\u00edduos de } F(Z) Z^{n-1} \text{ y evaluados en los polos de } F(Z) \quad (1.7.13)$$

Debe anotarse y hacerse incapi\u00e9 en el hecho de que la funci\u00f3n de tiempo que se obtiene toma valores solo en los instantes de muestreo nT y no es una funci\u00f3n continua.

EJEMPLO:

Dada la siguiente funci\u00f3n en Z

$$F(Z) = \frac{(1 - e^{-aT}) Z}{(Z - 1)(Z - e^{-aT})} \quad (1.7.14)$$

A continuaci\u00f3n se obtiene su transformada inversa por diferentes m\u00e9

todos.

1. Método de fracciones parciales.

Escribiendo (1.7.14) en fracciones parciales:

$$F(Z) = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-aT}}$$

Por tanto: $f(nT) = 1 - e^{-anT}$

2. Expansión en series de potencia:

$$F(Z) = \frac{a_m Z^m + a_{m-1} Z^{m-1} + \dots + a_0}{Z^n + b_{n-1} Z^{n-1} + \dots + b_0} \quad ; m \leq n \quad (1.7.15)$$

Haciendo la división se tiene:

$$F(Z) = A_{(n-m)} Z^{m-n} + A_{(n-m+1)} Z^{m-n-1} + \dots \quad (1.7.16)$$

$$f(nT) = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\} \quad (1.7.17)$$

$$f_{(n-m)} = A_{(n-m)}$$

$$f_{(n-m+1)} = A_{(n-m+1)}$$

Por tanto, $F(Z)$ puede escribirse:

$$F(Z) = (1 - e^{-aT})Z^{-1} + (1 - e^{-2aT})Z^{-2} + (1 - e^{-3aT})Z^{-3} + \dots \quad (1.7.18)$$

$$F(Z) = (Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + \dots) - (e^{-aT}Z^{-1} + e^{-2aT}Z^{-2} + \dots) \quad (1.7.19)$$

entonces: $f(nT) = 1 - e^{-anT}$

3. Método de la integral de inversión real

$$F(Z) = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-aT}} \quad (1.7.20)$$

$$f(nT) = Z.Z^{n-1} \Big|_{Z=1} - Z.Z^{n-1} \Big|_{Z=e^{-aT}} \quad (1.7.21)$$

entonces: $f(nT) = 1 - e^{-anT}$

TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA Z

A continuación se indican algunos teoremas que se cumplen para la transformada Z:

1. Si $z \{f_1(t)\} = F_1(Z)$

y:

$$z \{f_2(t)\} = F_2(Z)$$

Se cumple: $z \{af_1(t) \pm bf_2(t)\} = aF_1(Z) \pm bF_2(Z) \quad (1.7.22)$

2. Traslación real:

$$z \{f(t \pm KT)\} = Z^{\pm k} F(Z) \quad (1.7.23)$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
 z f(t \pm KT) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT \pm KT) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT \pm KT) Z^{-(n \pm K)} Z^{\pm K} \\
 &= Z^{\pm K} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT \pm KT) Z^{-(n \pm K)} \\
 &= Z^{\pm K} F(Z)
 \end{aligned}$$

3. Traslación compleja:

$$z\{e^{\mp aT} f(t)\} = F(Z e^{\pm aT}) \quad (1.7.24)$$

Prueba:
$$z\{e^{\mp aT} f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{\mp anT} Z^{-n}$$

Sea $Z_1 = Z e^{\pm aT}$

$$\begin{aligned}
 z\{e^{\mp aT} f(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z_1^{-n} = F(Z_1) \\
 &= F(Z e^{\pm aT})
 \end{aligned}$$

4. Teorema del valor inicial:

Si $z\{f(t)\} = F(Z)$

y $\lim_{Z \rightarrow \infty} F(Z)$ existe

entonces:
$$\lim_{n \rightarrow 0} f(nT) = \lim_{Z \rightarrow \infty} F(Z) \quad (1.7.25)$$

Prueba:
$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z^{-n} = f(0) + f(T) Z^{-1} + f(2T) Z^{-2} + \dots$$

Tomando el límite a ambos lados, cuando $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} F(Z) = f(0) = \lim_{n \rightarrow 0} f(nT)$$

5. Teorema del valor final:

$$\text{Si } z \{ f(t) \} = F(Z)$$

Y si la función $(1 - Z^{-1}) F(Z)$ no tiene polo sobre o fuera de la circunferencia de radio 1, entonces se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) F(Z) \quad (1.7.26)$$

Demostración: Considérense las dos secuencias finitas siguientes:

$$\sum_{n=0}^k f(nT) Z^{-n} = f(0) + f(T) Z^{-1} + f(2T) Z^{-2} + \dots + f(kT) Z^{-k} \quad (1.7.27)$$

$$\sum_{n=0}^k f[(n-1)T] Z^{-n} = f(0) Z^{-1} + f(T) Z^{-2} + f(2T) Z^{-3} + \dots + f[(k-1)T] Z^{-k}$$

La última ecuación puede ser escrita de la forma:

$$\sum_{n=0}^k f[(n-1)T] Z^{-n} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} f(nT) Z^{-n} \quad (1.7.28)$$

Tomando el límite cuando $Z \rightarrow 1$ de la ecuación que resulta de estar (1.7.27) - (1.7.28)

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^k f(nT) Z^{-n} - Z^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} f(nT) Z^{-n} \right] = \sum_{n=0}^k f(nT) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT) = f(kT)$$

Si en la última ecuación se toma el límite cuando $K \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^K f(nT) Z^{-n} - Z^{-1} \sum_{n=0}^{K-1} f(nT) Z^{-n} \right]$$

intercambiando los límites en la ecuación anterior:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f(KT) = \lim_{Z \rightarrow 1} \{ F(Z) - Z^{-1} F(Z) \}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) F(Z)$$

6. Teorema de la derivada parcial:

$$z \left\{ \frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} F(Z, a) \quad (1.7.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } z \left\{ \frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} f(nT, a) Z^{-n} \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT, a) Z^{-n} = \frac{\partial}{\partial a} F(Z, a) \end{aligned}$$

7. Teorema de la Convención Real:

$$\text{Si } z\{f_1(t)\} = F_1(Z) \quad \text{y} \quad z\{f_2(t)\} = F_2(Z)$$

$$\text{y} \quad f_1(t) = f_2(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$\text{Entonces: } z \left\{ \sum_{n=0}^K f_1(nT) f_2(KT-nT) \right\} = F_1(Z) F_2(Z) \quad (1.7.30)$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
 z\left\{ \sum_{n=0}^K f_1(nT) f_2(KT-nT) \right\} &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=0}^K f_1(nT) f_2(KT-nT) Z^{-K} \\
 &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) f_2(KT-nT) Z^{-K}
 \end{aligned}$$

haciendo $m = k-n$ e intercambiando el orden de los sumatorios.

$$\begin{aligned}
 z\left\{ \sum_{n=0}^K f_1(nT) f_2(KT-nT) \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) Z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f_2(mT) Z^{-m} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) Z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT) Z^{-m} \\
 &= F_1(Z) F_2(Z)
 \end{aligned}$$

8. Convolución compleja:

$$\text{Si } z\{f_1(t)\} = F_1(Z) \quad \text{y} \quad z\{f_2(t)\} = F_2(Z)$$

$$\text{Entonces: } z\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi) F_2(Z\xi^{-1})}{\xi} d\xi \quad (1.7.31)$$

Donde Γ está dentro de la región descrita por:

$$\sigma_1 < |\xi| < \frac{|Z|}{\sigma_2}$$

$$\text{y} \quad |Z| > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2)$$

donde: $\sigma_1 =$ radio de convergencia de $F_1(\xi)$

$\sigma_2 =$ radio de convergencia de $F_2(\xi)$

1.8. MAPEO DEL PLANO S AL PLANO Z

Así como el análisis y diseño de sistemas continuos de control usualmente se relacionan con la configuración de polos y ceros en el plano S, los polos y ceros de la transformada Z de la función de transferencia del sistema, determinan la respuesta del sistema discreto - en los instantes de muestreo; por esto la importancia de estudiar el Mapeo del Plano S al plano Z de algunos de los contornos más comúnmente usados en el plano S.

Para sistemas discretos, el plano S se divide en un número infinito de bandas periódicas. La banda principal está entre $-\frac{W_s}{2}$ y $+\frac{W_s}{2}$, y la información que ella trae se repite en las bandas complementarias; por tanto, para el análisis de estabilidad de sistemas discretos basta el estudio de polos y ceros en la banda principal.

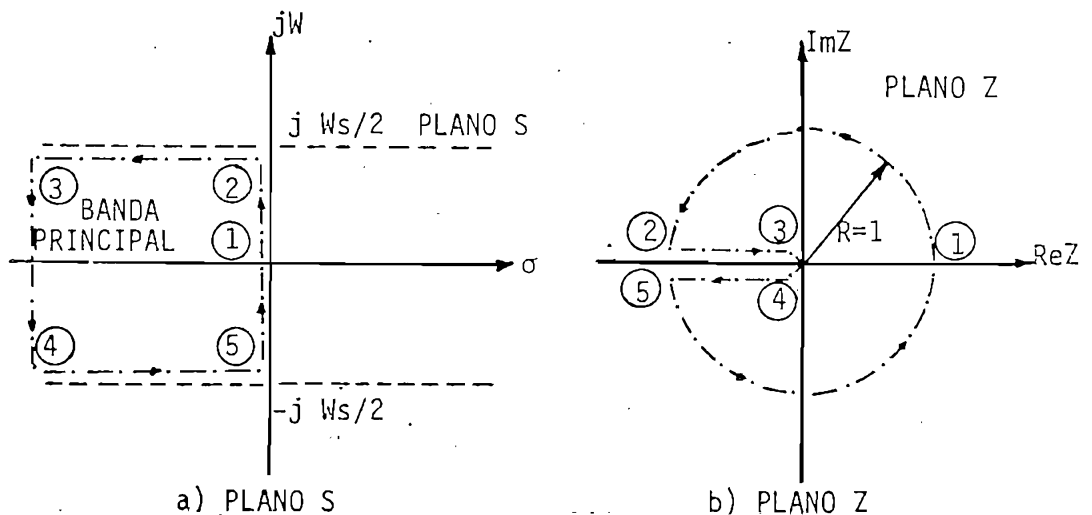


Fig. 1.8.1. Mapeo de la Banda Principal de la Mitad Izquierda del Plano S al Plano Z.

La banda principal, con la trayectoria descrita por ①, ②, ③, ④, ⑤, ① en la mitad izquierda del plano S se mapea en un círculo de radio unitario centrado en el origen del plano Z mediante la trans

formación $Z = e^{TS}$.

Esto es, la parte izquierda de las bandas complementarias se mapean en el círculo unitario, en tanto que el semiplano a la derecha del eje imaginario del plano S se mapea en el exterior del círculo. Esto implica, que para que un sistema discreto sea estable, los polos del sistema deben localizarse dentro del círculo de radio unitario.

LUGARES DE AMORTIGUAMIENTO CONSTANTE:

Para un factor de amortiguamiento constante σ_1 en el plano S, el lugar correspondiente del plano Z es una circunferencia de radio $Z = e^{\sigma_1 T}$ centrada en el origen.

Si σ_1 está a la izquierda del eje $j\omega$ del plano S, $e^{\sigma_1 T}$ está en el interior del círculo de radio unitario, en tanto que si σ_2 está a la derecha de $j\omega$, la circunferencia de radio $e^{\sigma_2 T}$ es exterior al círculo unitario.

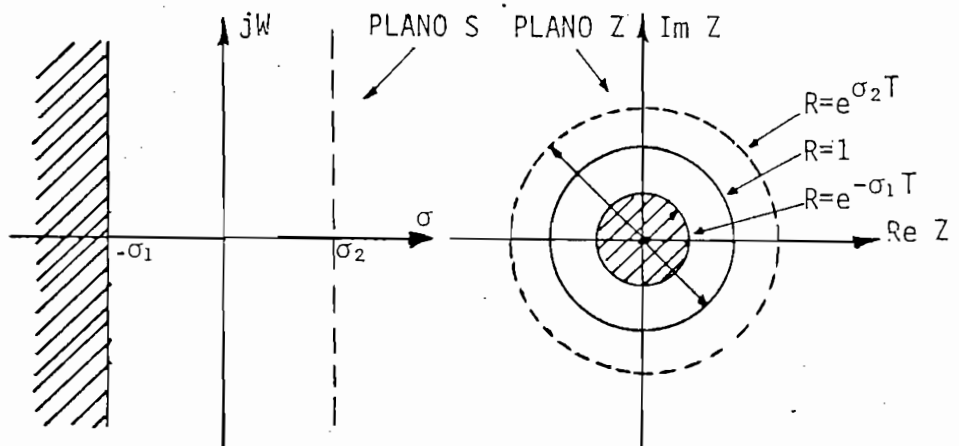


Fig. 1.8.2. Lugares de Amortiguamiento Constante en el Plano S y Z

LUGARES DE FRECUENCIA CONSTANTE

Para cualquier frecuencia constante $\omega = \omega_1$ en el plano S, el correspondiente lugar en el plano Z es una línea recta que parte del origen con un ángulo $\theta = \omega_1 T$ radianes.

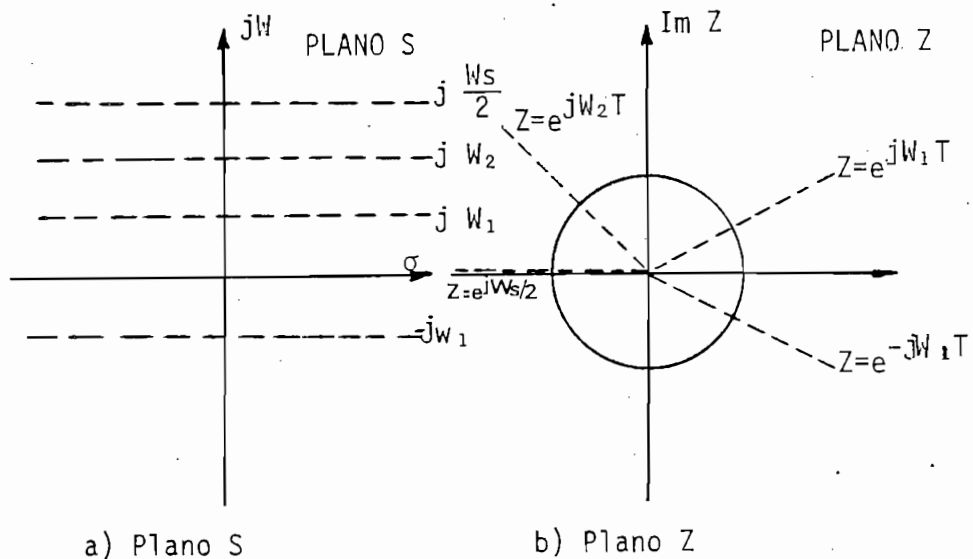


Fig. 1.8.2. Lugares de Amortiguamiento constante en el plano S y Z

Para valores de frecuencia menores a $\frac{\omega_s}{4}$, el ángulo correspondiente es menor a $\frac{\pi}{2}$. Si ω está comprendida entre $\frac{\omega_s}{4}$ y $\frac{\omega_s}{2}$, el ángulo con el que parte la recta del origen del plano Z está entre $\frac{\pi}{2}$ y π . Igualmente, las líneas caen dentro del círculo unitario si el valor correspondiente de σ es negativo, caso contrario está fuera de dicho círculo.

LUGARES DE RAZÓN DE AMORTIGUAMIENTO CONSTANTE

Para una razón de amortiguamiento constante ξ , el lugar del plano S viene descrito por:

$$S = -W \operatorname{tg} \beta + jW$$

La respectiva transformada Z es:

$$Z = e^{TS} = e^{(-W \operatorname{tg} \beta + jW)T} = e^{-\left(\frac{2\pi T}{W_s}\right) W \operatorname{tg} \beta} \left| \frac{2\pi T W}{W_s} \right| \quad (1.8.1)$$

Donde $\beta = \operatorname{Sen}^{-1} \xi = \text{constante}$.

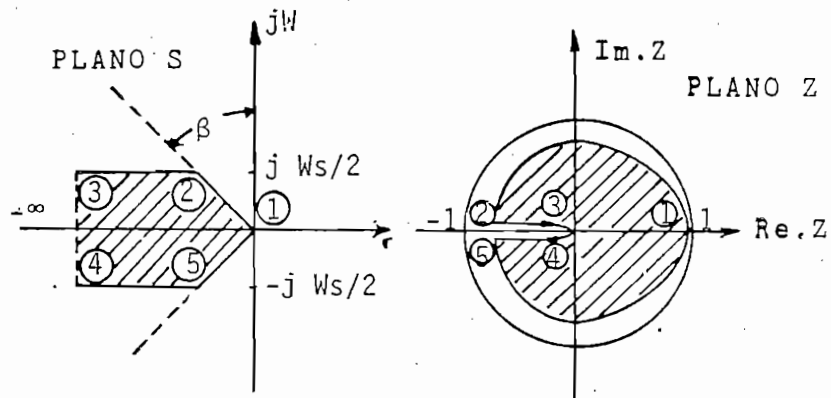


Fig. 1.8.4. Lugar de Razón de Amortiguamiento Constante en el Plano S y Z.

Para un valor dado de β , la trayectoria constante descrita por la ecuación (1.8.1) es una espiral logarítmica en el plano Z, excepto para $\beta = 0^\circ$ y 90° .

En la Fig. 1.8.5. se observan las trayectorias ξ constante dado $\beta = 30^\circ$. Cada media revolución de la espiral logarítmica corresponde al paso del lugar constante en el plano S a través de un semiperíodo $\frac{W_s}{2}$ a lo largo del eje jW .

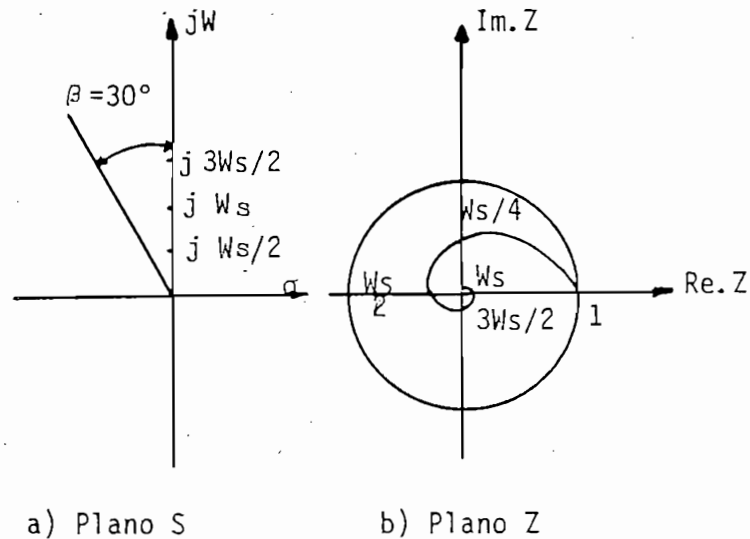


Fig. 1.8.5. Razón de Amortiguamiento Constante para $\beta = 30^\circ$ ($\xi = 50\%$) en el Plano S y Z.

LIMITACIONES DE LA TRANSFORMADA Z

La transformada Z tiene varias limitaciones, y debe tenerse, en ciertos casos, mucho cuidado en la aplicación e interpretación de sus resultados.

Debe tomarse en cuenta que la transformada Z se basa en la aproximación de la señal muestreada a una serie de impulsos, cuyas áreas son iguales a la magnitud de la señal de entrada al muestreador en los instantes de muestreo. Esta aproximación se considera válida solamente en los casos en que la duración del muestreo (ancho del pulso) es pequeño comparado con la constante de tiempo más significativa del sistema.

Igualmente, la transformada Z de la salida de un sistema lineal, $C(Z)$, especifica los valores de la función de tiempo $c(t)$ sólo en los instantes de muestreo. $C(Z)$ no tiene ninguna información sobre $c(t)$

entre los instantes de muestreo. Por tanto, a partir de $C(Z)$, mediante la transformada inversa de Z puede conocerse $c(KT)$, que describe a $c(t)$ sólo en los instantes de muestreo $t = KT$.

Al analizar un sistema lineal por el método de la transformada Z , la función de transferencia del sistema continuo, $G(S)$, debe tener al menos un polo más que ceros, o equivalentemente la respuesta impulsiva de $G(S)$ no debe tener discontinuidades a $t = 0$; de otra manera, la respuesta del sistema obtenida por el método de la transformada Z puede ser incorrecta.

1.9. LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS

En un sistema de lazo abierto, la función de transferencia viene dada por:

$$G(S) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

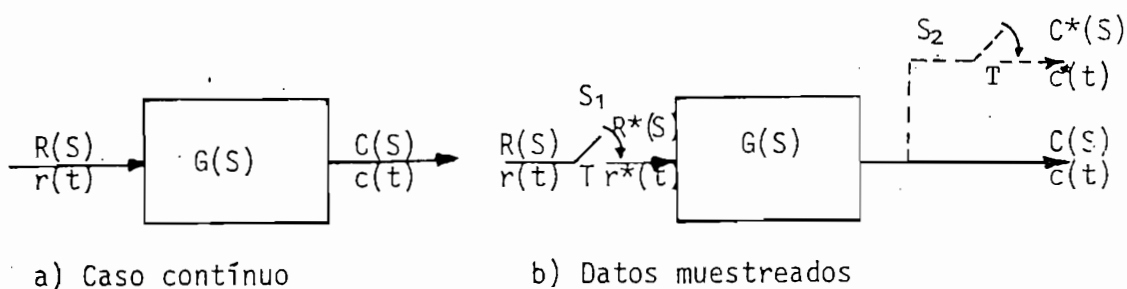


Fig. 1.9.1. Sistema de Lazo Abierto.

Para un sistema de datos muestreados como el de la Fig. 1.9.1b, si se supone que se aplica como entrada $r(t)$ una función paso unitaria en $t = 0$ y S_1 se cierra y se abre una sola vez en $t = 0$, entonces la

entrada a la red es $r^*(t)$, que es un impulso unitario que ocurre en $t = 0$. La salida $c(t)$ que responde a esta entrada, es la respuesta impulso de G , es decir:

$$c(t) = g(t) = \text{respuesta impulso de } G.$$

Considerando un muestreador ficticio a la salida, S_2 , se tiene:

$$c^*(t) = g^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) \delta(t-nT) \quad (1.9.1)$$

Donde: $c(nT) = g(nT)$ se define como la serie ponderada de G .

Si se toma la transformada de Laplace de ésta última ecuación, se tiene:

$$G^*(S) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-nTS} \quad (1.9.2)$$

que es la función de transferencia de pulsos del sistema G .

Una vez que se define la serie ponderada de una red G , la salida $c(t)$ y $c^*(t)$ del sistema, que corresponde a cualquier entrada arbitraria, puede obtenerse mediante el principio de superposición. Suponiendo que se aplica una función arbitraria $r(t)$ al sistema de la Fig. 1.0.1b. en $t = 0$, la entrada $r^*(t)$ es la serie $r(nT)$. Cuando $t = nT$, la salida muestreada $c(nT)$ es la suma de los efectos de to dos los muestreos de $r(nT)$, $r((n-1)T)$, $r((n-2)T)$, ..., $r(0)$, o sea:

$$c(nT) = \sum \text{efectos de todos los muestreos } r(nT), r((n-1)T), \dots, r(0) \quad (1.9.3)$$

Esto es:

$$c(nT) = r(0) g(nT) + r(T) g((n-1)T) + \dots + r((n-1)T) g(T) + r(nT) g(0) \quad (1.9.4)$$

Multiplicando ambos miembros de la ec. (1.9.4) por e^{-nTS} y tomando el sumatorio desde $n = 0$ hasta $n = \infty$, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)e^{-nTS} = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-nTS} \{r(0) + r(T)e^{-TS} + r(2T)e^{-2TS} + \dots\} \quad (1.9.5)$$

$$\text{de donde: } \sum_{n=0}^{\infty} c(nT)e^{-nTS} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)e^{-nTS} \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)e^{-nTS} \quad (1.9.6)$$

Esto es:

$$C^*(S) = R^*(S) \cdot G^*(S) \quad (1.9.7)$$

En donde $G^*(S)$ es la función de transferencia de pulsos y está definida por la ec. (1.9.2).

Si se toma la transformada Z a ambos lados de la ec. (1.9.7) se tiene:

$$C(Z) = R(Z) \cdot G(Z) \quad (1.9.8)$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS PARA EL R.O.C. Y LA RELACION ENTRE G(S) Y G(Z)

La función de transferencia del R.O.C. en el dominio S es:

$$G_{ho}(S) = \frac{1 - e^{-ST}}{S} \quad (1.9.9)$$

Tomando su transformada Z, se tiene:

$$G_{ho}(Z) = z\left\{\frac{1 - e^{-ST}}{S}\right\} = (1 - Z^{-1}) z\left\{\frac{1}{S}\right\} = 1 \quad (1.9.10)$$

Este resultado era esperado, puesto que el R.O.C. simplemente mantiene la función muestreada a un valor fijo durante el período de muestreo.

En la mayoría de sistemas prácticos, luego del R.O.C. se tiene un sistema continuo como se indica en la Fig. 1.9.1b. La transformada Z de la salida de dicho sistema es:

$$C(Z) = G_1(Z) \cdot R(Z) \quad (1.9.11)$$

Donde: $G_1(Z) = z\{G_{ho}(S) \cdot G(S)\} \quad (1.9.12)$

Sustituyendo (1.9.10) en (1.9.12), se tiene:

$$G_1(Z) = z\left\{\frac{1 - e^{-TS}}{S} G(S)\right\} \quad (1.9.13)$$

y: $G_1(Z) = (1 - Z^{-1}) z\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \quad (1.9.14)$

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS DE ELEMENTOS EN CASCADA

a) Con muestreador intercalado:

$$N(S) = G_1(S) \cdot R^*(S) \quad (1.9.15)$$

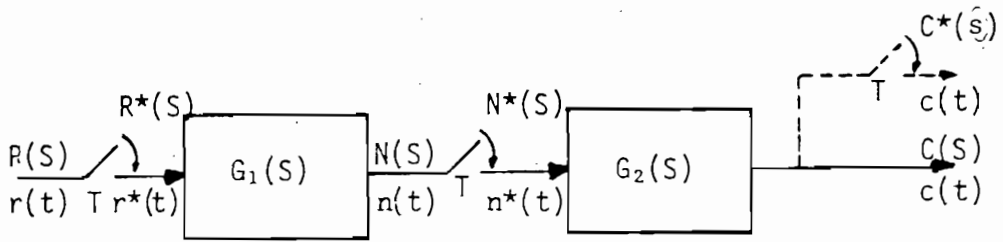


Fig. 1.9.2. Sistema de Lazo Abierto con Muestreador Intercalado.

$$C(S) = G_2(S) N^*(S) \quad (1.9.16)$$

De la ec. (1.9.15) se tiene:

$$N^*(S) = G_1^*(S) R^*(S) \quad (1.9.17)$$

Reemplazando (1.9.17) en (1.9.16) y tomando la transformación de pulso:

$$C^*(S) = G_2^*(S) G_1^*(S) R^*(S) \quad (1.9.18)$$

Tomando la transformada Z a la última ecuación:

$$C(Z) = G_1(Z) G_2(Z) R(Z) \quad (1.9.19)$$

b) Sin muestreador intercalado.

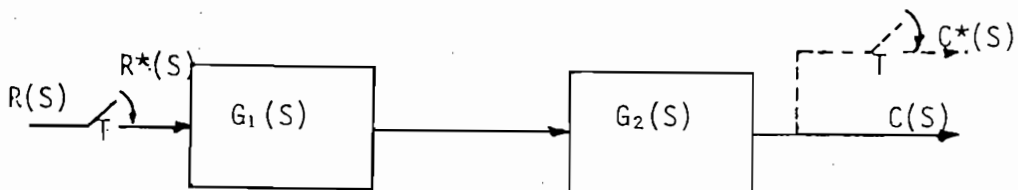


Fig. 1.9.3. Sistema de Lazo Abierto sin Muestreador Intercalado.

$$C(S) = R^*(S) G_1(S) G_2(S) \quad (1.9.20)$$

Aplicando la F.T. de pulsos a la última ecuación:

$$C^*(S) = R^*(S) [G_1(S) G_2(S)]^* \quad (1.9.21)$$

de donde, tomando su transformada Z:

$$C(Z) = R(Z) \cdot G_1 G_2(Z) \quad (1.9.22)$$

Debe indicarse, que en general:

$$G_1(Z) G_2(Z) \neq G_1 G_2(Z) \quad (1.9.23)$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS PARA SISTEMAS DE LAZO CERRADO

a) Con muestreador previo a la planta:

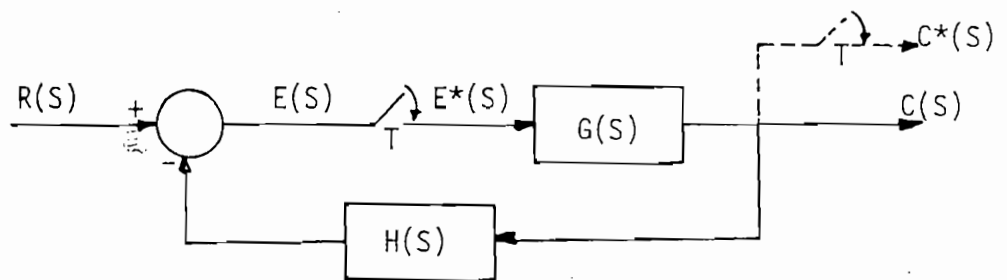


Fig. 1.9.4. Sistema de Lazo Cerrado con Muestreo previo a la Planta.

$$E(S) = R(S) - H(S) G(S) E^*(S) \quad (1.9.24)$$

Tomando la F.T. de pulsos de la última ecuación:

$$E^*(S) = R^*(S) - E^*(S) HG^*(S) \quad (1.9.25)$$

pero
$$C(S) = G(S) E^*(S) = G(S) \frac{R^*(S)}{1 + HG^*(S)} \quad (1.9.26)$$

por tanto:
$$C^*(S) = G^*(S) \frac{R^*(S)}{1 + HG^*(S)} \quad (1.9.27)$$

y:
$$C(Z) = \frac{G(Z)}{1 + HG(Z)} R(Z) \quad (1.9.28)$$

b) Con muestreador en el lazo de realimentación

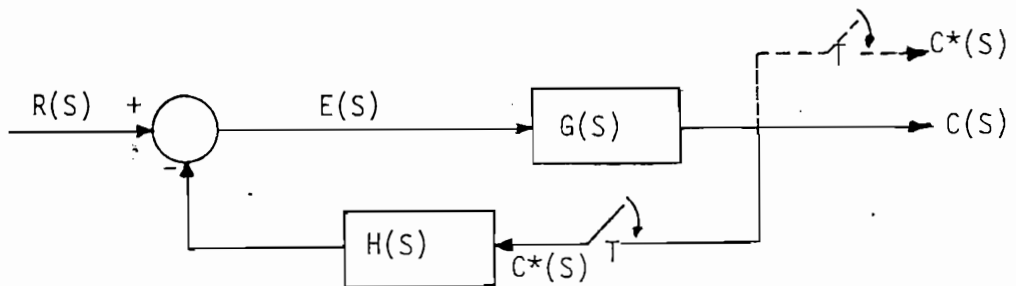


Fig. 1.9.5. Sistema de Lazo Cerrado con Muestreador en la Realimentación.

$$C(S) = E(S) G(S) \quad (1.9.29)$$

$$E(S) = R(S) - H(S) C^*(S) \quad (1.9.30)$$

de donde:
$$C(S) = G(S) R(S) - G(S) H(S) C^*(S) \quad (1.9.31)$$

Aplicando el principio de F.T. de pulsos, se tiene:

$$C^*(S) = GR^*(S) - HG^*(S) C^*(S) \quad (1.9.32)$$

por tanto:
$$C^*(S) = \frac{GR^*(S)}{1 + HG^*(S)} \quad (1.9.33)$$

Tomando la transformada Z:

$$C(Z) = \frac{GR(Z)}{1 + HG(Z)} \quad (1.9.34)$$

A continuación se presentan varios ejemplos adicionales que permiten una mejor comprensión en cuanto a funciones de transferencia de sistemas discretos.

1.

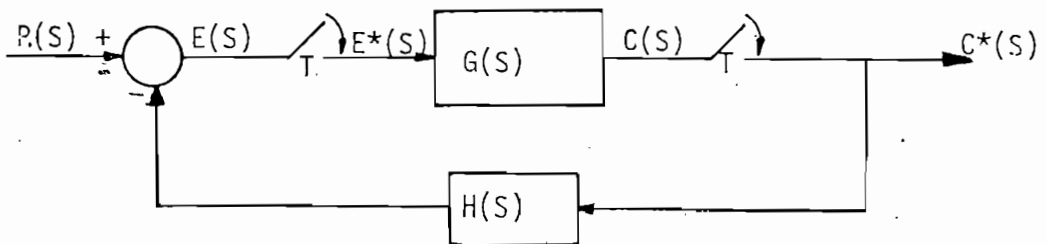


Fig. 1.9.6. Sistema de Lazo Cerrado con Muestreador antes y después de la Planta.

$$E(S) = R(S) - H(S) C^*(S) \quad (1.9.35)$$

$$C(S) = G(S) E^*(S) \quad (1.9.36)$$

$$C^*(S) = G^*(S) E^*(S) \quad (1.9.37)$$

Substituyendo (1.9.37) en (1.9.35):

$$E(S) = R(S) - H(S) G^*(S) E^*(S) \quad (1.9.38)$$

$$E^*(S) = R^*(S) - H^*(S) G^*(S) E^*(S) \quad (1.9.39)$$

Despejando $E^*(S)$ de la última ecuación, y sustituyendo en (1.9.37):

$$C^*(S) = G^*(S) \frac{R^*(S)}{1 + H^*(S) G^*(S)} \quad (1.9.40)$$

y:

$$C(Z) = \frac{G(Z)}{1 + H(Z) G(Z)} R(Z) \quad (1.9.41)$$

2.

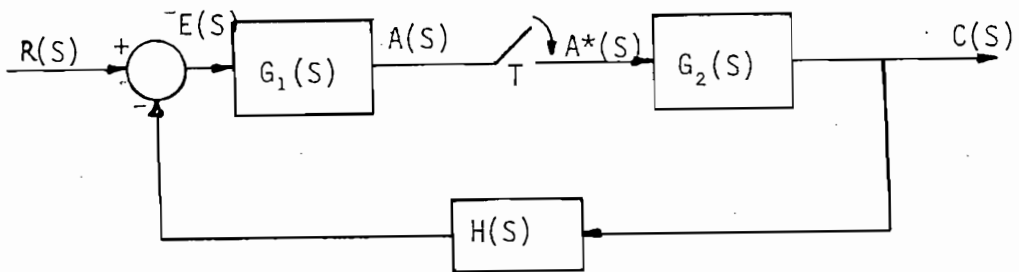


Fig. 1.9.7. Sistema de Lazo Cerrado con Muestreador entre dos Plantas.

$$C(S) = A^*(S) G_2(S) \quad (1.9.42)$$

$$A(S) = E(S) G_1(S) \quad (1.9.43)$$

$$E(S) = R(S) - H(S) C(S) \quad (1.9.44)$$

$$A(S) = R(S) G_1(S) - H(S) G_1(S) C(S) \quad (1.9.45)$$

Reemplazando (1.9.42) en (1.9.45):

$$A^*(S) = R G_1^*(S) - H G_1 G_2^*(S) A^*(S) \quad (1.9.46)$$

Entonces:

$$A^*(S) = \frac{R G_1^*(S)}{1 + H G_1 G_2^*(S)} \quad (1.9.47)$$

Sustituyendo (1.9.47) en (1.9.42):

$$C^*(S) = \frac{RG_1^*(S)}{1 + HG_1G_2^*(S)} G_2^*(S) \quad (1.9.48)$$

y:

$$C(Z) = \frac{RG_1(Z)}{1 + HG_1G_2(Z)} G_2(Z) \quad (1.9.49)$$

3.

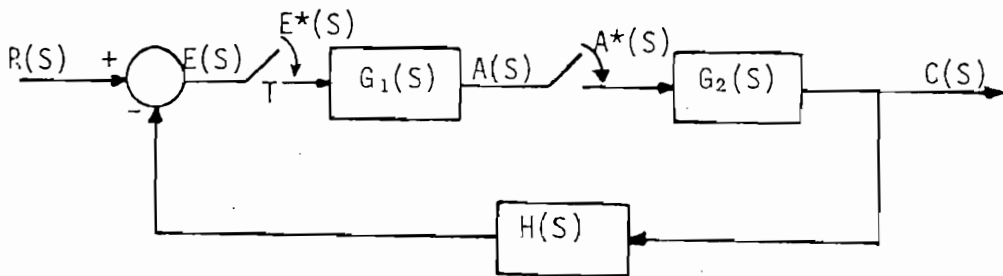


Fig. 1.9.8. Sistema de Lazo Cerrado con dos Muestreadores y dos Plantas.

$$C(S) = A^*(S) G_2(S) \quad (1.9.50)$$

$$A(S) = G_1(S) E^*(S) \quad (1.9.51)$$

$$E(S) = R(S) - H(S) C(S) \quad (1.9.52)$$

De las ecuaciones (1.9.50) y (1.9.51)

$$C^*(S) = G_1^*(S) G_2^*(S) E^*(S) \quad (1.9.53)$$

de (1.9.52):

$$E^*(S) = R^*(S) - HC^*(S) \quad (1.9.54)$$

$$E^*(S) = R^*(S) - (H(S) G_1^*(S) E^*(S) G_2(S))^* \quad (1.9.55)$$

$$E^*(S) = R^*(S) - G_1^*(S) E^*(S) G_2 H^*(S) \quad (1.9.56)$$

Despejando $E^*(S)$ y substituyendo en (1.9.53):

$$C^*(S) = G_1^*(S) G_2^*(S) \frac{R^*(S)}{1 + G_1^* G_2 H^*(S)} \quad (1.9.57)$$

y:

$$C(Z) = \frac{G_1(Z) G_2(Z) R(Z)}{1 + G_1(Z) * G_2 H(Z)} \quad (1.9.58)$$

1.10. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DISCRETOS

Uno de los principales requerimientos en el funcionamiento de sistemas de control es el concepto de estabilidad. Un sistema estable se define como aquel que tiene una respuesta limitada, estando sujeto a una entrada o perturbación limitada.

El concepto de estabilidad absoluta en sistemas de datos muestreados requiere que los polos del sistema estén ubicados dentro de la franja principal, a la izquierda del eje imaginario del plano S .

La estabilidad absoluta en sistemas discretos exige que los polos del sistema estén localizados al interior del círculo unitario en el plano Z . Por tanto, si los polos están todos dentro del círculo unitario, el sistema de control es absolutamente estable; si uno o más polos están fuera del círculo unitario, el sistema de control es inestable; si los polos están sobre el círculo, se dice que el sistema está en el límite de estabilidad.

En la figura que se indica a continuación se ilustra claramente la influencia de la ubicación de los polos del sistema respecto al círculo unitario en la respuesta del sistema.

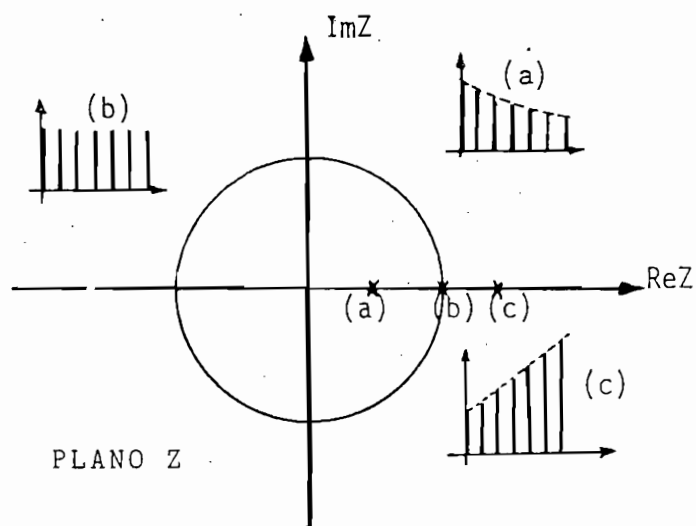


Fig. 1.10.1. Localización de los polos del sistema y estabilidad.

Puesto que todos los polos son reales, las diferentes respuestas del sistema no son oscilatorias.

Se representa mediante el polo (a), el caso de estabilidad absoluta, indicándose en la figura correspondiente (a), la respuesta del sistema.

El polo (b) ubicado sobre el círculo unitario, representa el caso de un sistema en el límite de estabilidad, teniéndose su respuesta esquematizada en la figura (b).

El polo (c) representa a un sistema inestable, cuya respuesta se ob

serva en la figura correspondiente (c).

CRITERIOS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS DISCRETOS

Usando la definición de que un sistema discreto es asintóticamente estable si todas las raíces de la ecuación característica están dentro del círculo unitario en el plano Z , se han desarrollado diferentes criterios de estabilidad, de los que se indicarán a continuación los más importantes.

- 1) Método de Determinantes de Schur-Cohn.
- 2) Prueba de estabilidad de Jury.
- 3) Forma Tabular de Raible.
- 4) Transformaciones bilineales: Método de Routh-Hourwitz y análisis de frecuencia.
- 5) Segundo método de Liapunov para Sistemas Discretos.
- 6) Lugar de las raíces.

Los cinco primeros métodos se detallan a seguir, dejando el Lugar de las Raíces para ser tratado en el siguiente capítulo por ser el tema central de esta tesis.

1) METODO DE DETERMINANTES DE SCHUR-COHN

El criterio de Routh-Hourwitz, muy utilizado en sistemas continuos no puede ser aplicado directamente al dominio Z puesto que la región de estabilidad es diferente. El método de Schur-Cohn establece una prueba para la localización de las raíces de un polinomio

en Z con respecto al círculo unitario.

Sea $F(Z)$ la ecuación característica de un sistema discreto:

$$F(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 = 0 \quad (1.10.1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son coeficientes reales o complejos.

Las raíces de la ecuación característica caen dentro de la circunferencia $|Z| = 1$ si y sólo si la secuencia de los Determinantes de Schur-Cohn: $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n$ tienen n variaciones de signo.

El Determinante de Schur-Cohn Δ_k se define:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ \hline \bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{k-2} \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \dots & \bar{a}_n & & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \quad (1.10.2)$$

Donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$ y \bar{a}_k es el complejo conjugado de a_k .

Si todos los coeficientes del polinomio son reales, Δ_k es simétrico respecto a la diagonal principal.

Este criterio de Schur-Cohn también puede establecerse de la forma:

El sistema es estable si:

$$\begin{aligned} \Delta_k < 0 & \text{ si } k \text{ impar} \\ \Delta_k > 0 & \text{ si } k \text{ par} \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

Es decir, si la ecuación (1.10.3) no se satisface, entonces la ecuación característica tiene al menos una raíz fuera del círculo unitario. A diferencia del criterio de Routh-Hurwitz, el de Schur-Cohn no indica de manera definitiva cuantas son las raíces que caen fuera del círculo unitario y tampoco da información de raíces ubicadas sobre la circunferencia $|Z| = 1$.

2) PRUEBA DE ESTABILIDAD DE JURY

Este criterio de estabilidad, desarrollado por Jury y Blanchard tiene algunas de las ventajas del criterio de Routh-Hurwitz para sistemas continuos y es más simple de aplicar que el método anterior, y consiste en lo siguiente:

Dado el polinomio $F(Z)$:

$$F(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_2 Z^2 + a_1 Z^1 + a_0 = 0$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son coeficientes reales.

Debiendo siempre a_n ser positivo, puede desarrollarse la siguiente tabla:

FILA	Z^0	Z^1	Z^2	\dots	Z^{n-k}	\dots	Z^{n-1}	Z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-k}	\dots	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_k	\dots	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-k}	\dots	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_k	\dots	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	\dots			c_{n-2}	
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots			c_0	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n-3$	q_0	q_1	q_2					

(1.10.4)

Los elementos de la fila $(2k + 2)(k = 0,1,2,\dots)$ son los coeficientes de la fila $(2k + 1)$ escritos en orden inverso.

Además:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}$$

$$\dots \quad q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que el polinomio $F(Z)$ no tenga raíces sobre o fuera de la circunferencia unitaria son:

$$F(1) > 0$$

$$F(-1) \begin{cases} > 0, & n \text{ par} \\ < 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

y, además

$$|a_0| < |a_n|$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}| \tag{1.10.5}$$

$$|d_0| > |d_{n-3}|$$

$$\vdots$$

$$|q_0| > |q_2|$$

Esto es, se tiene $n - 1$ condiciones.

Las pruebas de estabilidad dadas en (1.10.5) son válidas únicamente si las inecuaciones proveen resultados concluyentes, pues así como el criterio de Routh-Hourwitz para sistemas continuos lineales, ocasionalmente el primer elemento de una fila o toda la fila es cero antes de que la tabla se termine; estos son los "casos singulares".

Un caso singular puede ser eliminado expandiendo y contrayendo infinitesimalmente el círculo unitario, lo cual es equivalente a mover

las raíces de dicho círculo. La transformación que cumple este propósito es:

$$Z = (1 + \epsilon)\bar{Z} \quad (1.10.6)$$

Donde ϵ es un número real muy pequeño. Si ϵ es positivo, equivale a expandir el radio unitario a un valor $1 + \epsilon$ y si ϵ es negativo, es equivalente a contraer el radio a $1 + \epsilon$. Esto es equivalente a mover las raíces. Si hay diferencia en la estabilidad cuando el círculo se ha expandido o contraído por ϵ , existen raíces sobre la circunferencia unitaria.

La transformación dada en la ecuación (1.10.6) es muy fácil de ser aplicada puesto que:

$$(1 \pm \epsilon)^n Z^n = (1 \pm n\epsilon) Z^n \quad |\epsilon| \ll 1 \quad (1.10.7)$$

3) FORMA TABULAR DE RAIBLE

Es el mismo criterio de Jury, pero desarrollado de tal manera que permite una simplificación en cuanto a la computación:

$$\text{Si } F(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0$$

La Tabulación de Raible es como sigue:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0	k_a
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}		k_b
c_0	c_1	c_2	...	c_{n-2}			k_c
.
.
p_0	p_1	p_2					k_p
q_0	q_1						k_q
r_0							

Esto es, se tiene que calcular n filas.

Donde:

$$\begin{aligned}
 k_a &= a_0/a_n \\
 k_b &= b_{n-1}/b_0 \\
 k_c &= c_{n-2}/c_0 \\
 &\vdots \\
 k_p &= p_2/p_0 \\
 k_q &= q_1/q_0
 \end{aligned}
 \tag{1.10.8}$$

y:

$$\begin{aligned}
 b_i &= a_{n-i} - k_a a_i & i &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\
 c_j &= b_j - k_b b_{n-j-1} & j &= 0, 1, 2, \dots, n-2 \\
 &\vdots \\
 q_0 &= p_0 - k_p p_2 \\
 q_1 &= p_1 - k_p p_1 \\
 r_0 &= q_0 - k_q q_1
 \end{aligned}$$

Si la Tabulación de Raible es no singular, y si a_n es positivo, los signos de los n elementos calculados de la primera columna indica el número de raíces de $F(Z)$ que están dentro (o fuera) del círculo unitario.

Estó es: número de elementos calculados en la primera columna.

$(b_0, c_0, \dots, p_0, q_0, r_0)$ = número de raíces dentro del círculo unitario.

O sinó: número de elementos negativos calculados en la primera columna:

$(b_0, c_0, \dots, p_0, q_0, r_0)$ = número de raíces fuera del círculo unitario.

Si ocurre un caso singular en esta Tabulación, puede ser corregido - mediante la transformación de la ecuación (1.10.6), haciendo $\epsilon > 0$ y $\epsilon < 0$, la diferencia entre los elementos positivos (o negativos) de la primera columna, dá las raíces que están sobre la circunferencia unitaria.

A continuación se dan ejemplos que ilustran más claramente estos dos últimos criterios.

$$\text{a) } F(Z) = Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \quad (1.10.9)$$

Este es un caso singular puesto que todas sus raíces están sobre la circunferencia unitaria:

Por tanto:

$$F[(1 + \epsilon)Z] = (1 + 3\epsilon)Z^3 + (1 + 2\epsilon)Z^2 + (1 + \epsilon)Z + 1 = 0 \quad (1.10.10)$$

Entonces:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 + 3\epsilon & & 1 + 2\epsilon & & 1 + \epsilon & 1 & k_a = \frac{1}{1+3\epsilon} \\
 -) & \frac{1}{1 + 3\epsilon} & & \frac{1+\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & \frac{1+2\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & \\
 \hline
 b_0 = & \frac{6\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & \frac{4\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & \frac{2\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & k_b = \frac{1}{3} \\
 \\
 -) & \frac{2\epsilon}{3(1 + 3\epsilon)} & & \frac{4\epsilon}{3(1 + 3\epsilon)} & & & & \\
 \hline
 c_0 = & \frac{16\epsilon}{3(1 + 3\epsilon)} & & \frac{8\epsilon}{3(1 + 3\epsilon)} & & & & k_c = \frac{1}{2} \\
 \\
 -) & \frac{4\epsilon}{3(1 + 3\epsilon)} & & & & & & \\
 \hline
 d_0 = & \frac{4\epsilon}{1 + 3\epsilon} & & & & & &
 \end{array}$$

b_0 , c_0 , d_0 , dependen en forma directamente proporcional a ϵ . Así, todos son positivos para $\epsilon > 0$ y todos son negativos para $\epsilon < 0$. Por tanto las tres raíces se mueven de dentro hacia afuera del círculo para cuando ϵ cambia de signo, por lo que fácilmente se ve que todas las raíces están sobre la circunferencia unitaria. Esto es cierto ya que las raíces de esta ecuación son $Z = -1$ y $Z = \pm j$.

b) Mediante este ejemplo, es posible observar la gran utilidad del criterio de estabilidad de Jury en diseño de sistemas discretos.

La ecuación característica de un sistema de control discreto es:

$$F(Z) = Z^3 + (111.6 T^2 + 16.74 T - 3)Z^2 + (3 - 33.48 T + 1.395 \cdot 10^{-4}KT^3)Z + (1.395 \cdot 10^{-4}KT^3 + 16.74 T - 11.6 T^2 - 1) = 0 \quad (1.10.11)$$

Donde: T es el período de muestreo.

K es la ganancia.

Se desea determinar el rango de K y T para los que el sistema sea asintóticamente estable.

Aplicando el criterio de Jury a la ecuación característica del sistema, se tiene:

$$1) F(1) > 0, \text{ esto es: } KT^3 > 0$$

Puesto que T siempre es positivo, se tiene que $K > 0$.

$$2) F(-1) < 0, \text{ esto es: } -8 + 66.96 T < 0$$

por tanto $T < 0.12 \text{ seg.}$

$$3) |a_0| < |a_3|, \text{ esto es: } |1.395 \cdot 10^{-4} KT^3 + 16.74 T - 111.6 T^2 - 1| < |1|$$

$$4) |b_0| > |b_2|, \text{ donde : } b_0 = a_0^2 - a_3^2$$

$$b_2 = a_0 a_2 - a_1 a_3$$

$$a_0 = 1.395 \cdot 10^{-4} KT^3 + 16.74 T - 111.6 T^2 - 1$$

$$a_1 = 3 - 33.48 T + 1.395 \cdot 10^{-4} KT^3$$

$$a_2 = 111.6 T^2 + 16.74 T - 3$$

$$a_3 = 1$$

El gráfico del rango de variación de K y T para que el sistema sea estable se da en la Fig. 1.10.2.

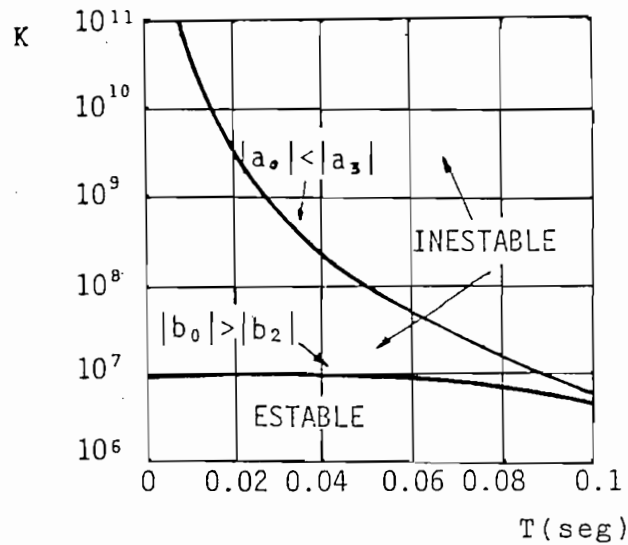


Fig. 1.10.2. Gráfico de K vs. T para análisis de estabilidad.

4) TRANSFORMACION BILINEAL

Esta transformación, que convierte el círculo unitario en un eje imaginario como el del plano S para sistemas continuos, permite la aplicación de los métodos de control clásico para análisis de estabilidad, como son el criterio de Routh-Hourwitz y el análisis de frecuencia.

A continuación se indican dos transformaciones bilineales convenientes:

$$Z = \frac{r + 1}{r - 1} \quad (1.10.12)$$

$$r = \frac{z + 1}{z - 1}$$

$$Z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \quad (1.10.13)$$

$$w = \frac{2}{T} \left[\frac{z - 1}{z + 1} \right]$$

La transformación indicada en la ecuación (1.10.12) permite analizar el sistema mediante el criterio de Routh-Hourwitz, en tanto que la ecuación (1.10.13), denominada transformación de Padé, permite realizar el análisis de frecuencia.

En la Fig. 1.10.3 se indican los planos r y w resultante del mapeo del círculo unitario del plano Z .

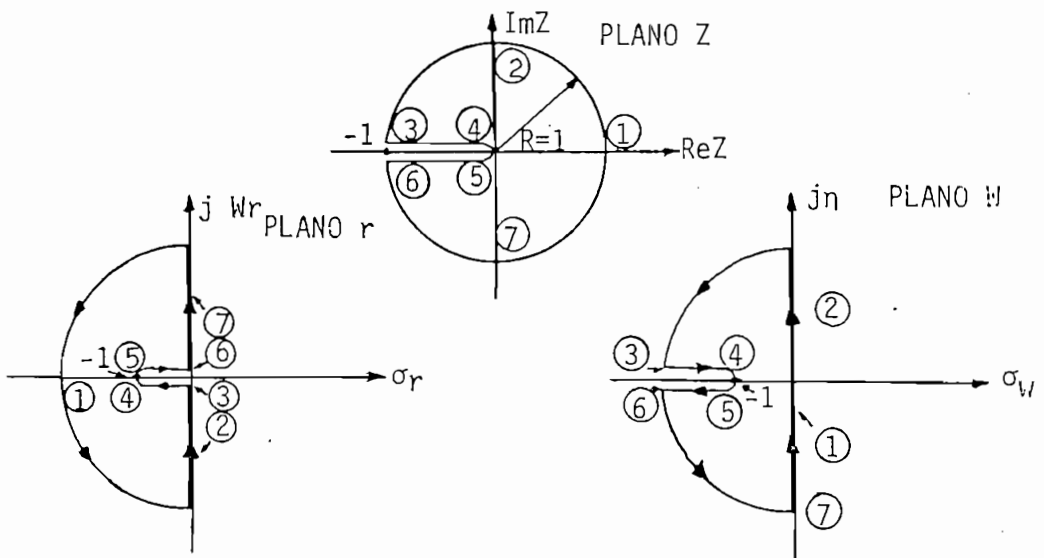


Fig. 1.10.3. Planos r y w resultantes del mapeo del círculo unitario en Z mediante las transformaciones bilineales respectivas.

Vale anotar que la transformación bilineal w se ve alterada por un factor $\frac{2}{T}$ que permite la existencia de una correspondencia biunívoca entre η e $\text{Im}.Z$.

A continuación se indica a manera de ejemplo, la determinación de la ganancia crítica del sistema de la Fig. 1.10.4. mediante el uso de transformación r y el criterio de Routh-Hourwitz.

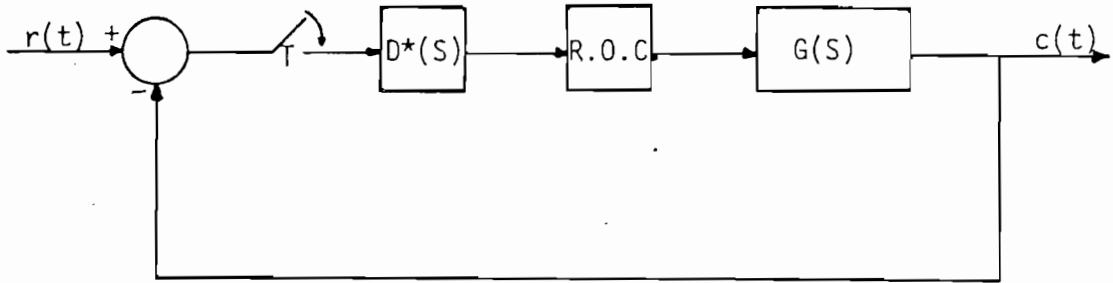


Fig. 1.10.4. Sistema de control discreto con realimentación unitaria.

Se da: $D(Z) = \frac{z}{z-1}$; $G(S) = \frac{KS}{(S+1)(S+5)}$

$$G(Z) = z \{D^*(S) \cdot \text{R.O.C.} \cdot G(S)\}$$

entonces: $G(Z) = D(Z) (1 - Z^{-1}) z \left\{ \frac{G(S)}{S} \right\}$

y : $G(Z) = \frac{0.090285 K \cdot Z}{(Z - 0.368)(Z - 0.0067)}$

Para realimentación unitaria se tiene:

$$F(Z) = \frac{G(Z)}{1 + G(Z)}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + G(Z) = 1 + \frac{0.090285 K \cdot Z}{(Z - 0.368)(Z - 0.0067)} = 0$$

esto es: $Z^2 + (0.090285 K - 0.3746)Z + 0.0248 = 0$

Aplicando la transformación bilineal r :

$$r = \frac{z + 1}{z - 1}$$

$$z = \frac{r + 1}{r - 1}$$

resulta:

$$\left(\frac{r + 1}{r - 1}\right)^2 + (0.090285 K - 0.3746)\left(\frac{r + 1}{r - 1}\right) + 0.0248 = 0$$

$$(0.0903 K + 0.628)r^2 + 1.995 r + (1.377 - 0.0903 K) = 0$$

Al aplicar el criterio de Routh-Hourwitz a la función de segundo grado, resulta que todos los coeficientes deben ser del mismo signo, en este caso todos deben ser positivos.

Por tanto: $1.3777 - 0.903 K > 0$

$$K < \frac{1.377}{0.0903} = 15.25$$

finalmente: $K < 15.25$

5) SEGUNDO METODO DE LIAPUNOV PARA SISTEMAS DISCRETOS

Este método es muy útil si se tiene un sistema discreto expresado por ecuaciones de diferencias.

Así, considérese un sistema discreto lineal, invariante en el tiempo,

descrito por la siguiente ecuación de diferencias:

$$\underline{x}(k + 1) = \underline{A} \underline{x}(k) \quad (1.10.14)$$

donde: \underline{x} es un vector $n \times 1$

\underline{A} es una matriz $n \times n$

Se dice que el estado de equilibrio $\underline{x}_e = \underline{0}$ es asintóticamente estable si y sólo si dada una matriz \underline{Q} , definida positiva, existe una matriz \underline{P} definida positiva, real y simétrica tal que:

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} - \underline{P} = - \underline{Q} \quad (1.10.15)$$

Entonces: $V(\underline{x}) = \underline{x}^T(k) \underline{P} \underline{x}(k) \quad (1.10.16)$

es una función de Liapunov y además:

$$\Delta V(\underline{x}) = - \underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) \quad (1.10.17)$$

donde $\Delta V(\underline{x})$ viene definido por:

$$\Delta V(\underline{x}) = V(\underline{x}(k+1)) - V(\underline{x}(k)) \quad (1.10.18)$$

La comprobación de este teorema se basa en el denominado teorema de Sylvester, el cual establece que si \underline{P} es una matriz definida positiva, entonces:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \quad (1.10.19)$$

es definida positiva.

Usando la ecuación (1.10.16) como función de Liapunov:

$$\Delta V(\underline{x}) = V(\underline{x}(k+1)) - V(\underline{x}(k)) \quad (1.10.20)$$

$$= \underline{x}^T(k+1) \underline{P} \underline{x}(k+1) - \underline{x}^T(k) \underline{P} \underline{x}(k) \quad (1.10.21)$$

Ahora sustituyendo (1.10.14) en (1.10.21), se tiene:

$$\Delta V(\underline{x}) = \underline{x}^T(k) [\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} - \underline{P}] \underline{x}(k) \quad (1.10.22)$$

$$= - \underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) \quad (1.10.23)$$

Así, a partir del Teorema de Sylvester si $\Delta V(\underline{x})$ es negativa definida, \underline{Q} debe ser definida positiva.

A continuación se ilustra de mejor manera este criterio de estabilidad mediante un ejemplo:

Sea el sistema discreto:

$$x_1(k+1) = -0.5 x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = -0.5 x_2(k)$$

La matriz de coeficientes es:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

El estado de equilibrio es $\underline{x}_e = 0$.

Sea \underline{Q} la matriz Identidad:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y \underline{P} tiene la forma:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación (1.10.15) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultantes, se obtiene:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1.33 & 0 \\ 0 & 1.33 \end{bmatrix}$$

La cual es definida positiva, por tanto:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T(k) \underline{P} \underline{x}(k)$$

es la función de Liapunov y es definida positiva. La función $\Delta V(\underline{x})$ viene dada por la ecuación (1.10.17), la cual es definida negativa, y el estado de equilibrio es asintóticamente estable.

C A P I T U L O I I

EL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES EN EL PLANO ZIntroducción

Al igual que las técnicas de análisis de frecuencia, como el diagrama de Nyquist y el diagrama de Bode sirven para el estudio de sistemas discretos de control en cuanto se refiere a análisis de estabilidad, al estudio de la respuesta del sistema en estado estable y transitorio, y para diseño y compensación, es razonable que el criterio del Lugar Geométrico de las Raíces sirva igualmente para el estudio de sistemas de control discretos.

2.1 FUNDAMENTO TEORICO

Existe una gran ventaja en cuanto a la aplicación del criterio del L.G.R. en sistemas discretos, y es el hecho de que su construcción se realiza en base a reglas similares a las utilizadas para el caso de sistemas continuos, las cuales son convenientemente estudiadas en los diferentes cursos de control clásico.

La ecuación característica es el plano S para sistemas continuos es:

$$1 + G(S) H(S) = 0 \quad (2.1.)$$

la cual es una función racional.

Para el caso discreto, la ecuación característica que define al sistema es también una función racional.

$$1 + A(Z) = 0 \quad (2.1.2)$$

donde

$$A(Z) = \begin{cases} G(Z) \cdot H(Z), & \text{ó} \\ GH(Z) \end{cases}$$

Puesto que las leyes que rigen la construcción del L.G.R. en el plano S , son aplicables para funciones racionales, se concluye que la construcción del L.G.R. en el plano Z es factible y puede ser implementada en computador.

En diseño de sistemas de control, algunas especificaciones de desempeño o funcionamiento se expresan en términos de la respuesta transitoria del sistema. Los parámetros de diseño en el dominio del tiempo, tales como tiempo pico, máximo sobretiro, factor de amortiguamiento y tiempo de estabilización, están íntimamente relacionados con la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema de control, que son los polos de la función de transferencia de lazo cerrado del mismo. Una vez que se han obtenido las raíces de la ecuación característica, es posible conocer los diferentes modos de respuesta transitoria.

Consecuentemente, para diseñar un sistema de control bajo especificaciones en el dominio del tiempo, el Ingeniero de Control necesita un conocimiento general de la influencia de la variación de los polos del sistema en su respuesta transitoria. Este conocimiento puede ser

fácilmente obtenido de un diagrama de variación de las raíces características, teniendo como parámetro la ganancia de lazo del sistema. Este diagrama es conocido como el Lugar Geométrico de las Raíces.

Mediante la ayuda del L.G.R., el diseño de un sistema de control se basa en el ajuste o compensación mediante la ubicación de los ceros de la función de transferencia de lazo abierto y con la variación de la ganancia de lazo del sistema, obteniendo de esta manera un sistema con una nueva distribución de polos y ceros que permitan obtener la respuesta deseada. Esto es, el método del L.G.R. provee al Ingeniero de Control técnicas de diseño que toman en cuenta tanto respuesta transitoria como respuesta de frecuencia, logrando de esta forma un enlace entre el análisis en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Debe anotarse que al igual que en sistemas continuos, la respuesta transitoria en sistemas de control discretos está determinada completamente por la naturaleza de los polos de la función de lazo cerrado del mismo. Vale subrayar también el hecho de que para que un sistema de control continuo retroalimentado sea estable, la parte real de las raíces de la ecuación característica debe ser negativa. En el plano Z en cambio, el límite de estabilidad constituye la circunferencia de radio unitario centrada en el origen; por tanto, como ya se estudió anteriormente, el análisis de estabilidad en sistemas discretos es diferente al análisis que se realiza en sistemas continuos.

2.2. VENTAJAS DEL L.G.R.

Una de las principales ventajas de utilizar el diagrama del Lugar Geométrico de las Raíces para el análisis o diseño de un sistema de control, es el hecho de que este diagrama nos da una indicación sobre la estabilidad absoluta y relativa del mismo, con respecto a la variación de un parámetro K , generalmente la ganancia de lazo, a diferencia de otros métodos como el de Routh-Hourwitz y métodos tabulares, que nos permiten conocer sólo si un sistema es absolutamente estable o no.

Puesto que la técnica del L.G.R. es un método gráfico para ubicar - las raíces a medida que varía un parámetro, proporciona al Ingeniero de Control una medida de la sensibilidad de las raíces del sistema para una variación en el parámetro que se considera.

En cuanto al diseño de compensadores, el método del L.G.R. proporciona una gran ventaja, ya que indica de manera eficaz el valor que debe tomar la ganancia del sistema para que este sea estable; indica también la variación adecuada o la implementación de ceros en el sistema para estabilizarlo completamente. Esto es, será suficiente encontrar una adecuada distribución de polos y ceros del sistema para obtener el funcionamiento adecuado del mismo.

2.3. REGLAS PARA LA CONSTRUCCION DEL L.G.R. EN EL PLANO Z

Considérese el sistema de control discreto retroalimentado de la Fig. 2.3.1., cuya función de transferencia es:

$$\frac{C^*(S)}{R^*(S)} = \frac{G^*(S)}{1 + A^*(S)} \quad (2.3.1)$$

donde: $G^*(S)$ es la función muestreada de $G(S)$ y $G(S) = G_h(S) \cdot G_s(S)$

$A^*(S)$ es la función muestreada de $A(S)$ y $A(S) = G_h(S) \cdot G_s(S) \cdot H(S)$

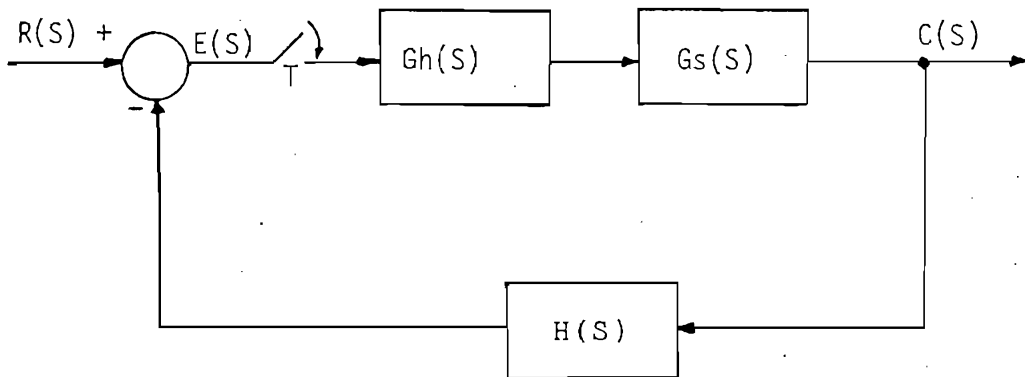


Fig. 2.3.1. Sistema de Control Discreto Retroalimentado.

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + A^*(S) = 0 \quad (2.3.2)$$

El lugar de las raíces en el plano S dependerá de la distribución de polos y ceros de $A^*(S)$, pero la función muestreada $A^*(S)$, como ya se anotó anteriormente, posee infinito número de polos, que son los polos de $A(S)$ repetidos cada $j\omega_s$ a lo largo de líneas paralelas al eje $j\omega$ y, posee además infinito número de ceros. Por tanto, aún cuando es posible obtener el L.G.R. de un sistema discreto en el plano S , este es muy complicado ya que tendrá infinito número de ramas.

En términos de la transformada Z , la función de transferencia del sistema de la Fig. 2.3.1. viene dada por:

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1 + A(Z)} \quad (2.3.3)$$

donde: $A(Z) = GH(Z) \quad (2.3.4)$

La última ecuación es la transformada Z asociada con $G(S) H(S)$ y se denomina Función de Transferencia de Pulsos de Lazo Abierto.

Y $\frac{C(Z)}{R(Z)}$ se denomina Función de Transferencia de Pulsos de Lazo Cerrado.

Por tanto, la ecuación característica es:

$$1 + A(Z) = 0 \quad (2.3.5)$$

la cual puede escribirse como:

$$A(Z) = -1 = e^{j(180^\circ \pm q360^\circ)} \quad (2.3.6)$$

donde $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Puesto que $A(Z)$ es una función de la variable compleja Z , la ecuación (2.3.6) puede descomponerse en dos ecuaciones, igualando la magnitud y el ángulo de fase de los dos miembros de esta última ecuación respectivamente.

Por tanto:

$$|A(Z)| = 1 \quad (2.3.7)$$

y la ecuación de fase:

$$\angle A(Z) = 180^\circ \pm q360^\circ \quad (2.3.8)$$

Por otro lado, la función de transferencia de pulsos de lazo abierto, puede definirse como una relación de polinomios en Z:

$$A(Z) = K \frac{N(Z)}{D(Z)} \quad (2.3.9)$$

donde:
$$N(Z) = Z^m + a_{m-1} Z^{m-1} + a_{m-2} Z^{m-2} + \dots + a_0 \quad (2.3.10)$$

$$N(Z) = \prod_{r=1}^m (Z - Z_r) \quad (2.3.11)$$

y:
$$D(Z) = Z^n + b_{n-1} Z^{n-1} + b_{n-2} Z^{n-2} + \dots + b_0 \quad (2.3.12)$$

$$D(Z) = \prod_{r=1}^n (Z - P_r) \quad (2.3.13)$$

donde: Z_r son los ceros de lazo abierto.

P_r son los polos de lazo abierto; y,

$m \leq n$ en la generalidad de sistemas.

entonces:
$$A(Z) = \frac{K \prod_{r=1}^m (Z - Z_r)}{\prod_{r=1}^n (Z - P_r)} \quad (2.3.14)$$

Haciendo la sustitución:

$$(Z - Z_r) = a_r \angle \theta_{Z_r} \quad (2.3.15)$$

$$(Z - P_r) = b_r \angle \theta_{P_r} \quad (2.3.16)$$

La ecuación (2.3.14) puede escribirse:

$$A(Z) = \frac{K \prod_{r=1}^m a_r}{n \prod_{r=1}^n b_r} \left/ \frac{\sum_{r=1}^m \theta_{Z_r} - \sum_{r=1}^n \theta_{P_r}}{\quad} \right. \quad (2.3.17)$$

Por tanto, la ecuación de magnitud se transforma en:

$$K \cdot \frac{\prod_{r=1}^m a_r}{n \prod_{r=1}^n b_r} = 1 \quad (2.3.18)$$

y la ecuación de fase es:

$$\sum_{r=1}^m \theta_{Z_r} - \sum_{r=1}^n \theta_{P_r} = 180^\circ \pm q360^\circ \quad (2.3.19)$$

donde: a_r es la distancia del cero Z_r al punto Z del L.G.R.

θ_{Z_r} es el ángulo de fase correspondiente.

y b_r es la distancia desde el polo P_r al punto Z del L.G.R.

θ_{P_r} es el ángulo de fase correspondiente.

Ahora, volviendo a escribir la ecuación característica, se tiene:

$$\prod_{r=1}^n (Z - P_r) + K \prod_{r=1}^m (Z - Z_r) = 0 \quad (2.3.20)$$

Si $K = 0$ las raíces de la ecuación característica son los polos P_r de lazo abierto.

Si $K \rightarrow \infty$, las raíces de la ecuación característica tienden a los ceros Z_r de lazo abierto.

Por tanto, se observa que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica $1 + K \frac{N(Z)}{D(Z)} = 0$ empieza en los polos de lazo abierto ($D(Z) = 0$) y termina en los ceros de lazo abierto ($N(Z) = 0$), a medida que K aumenta desde cero hasta infinito.

Vale anotar pues, que para la mayoría de sistemas, varios de los ceros de lazo abierto están en el infinito del plano Z .

Por último, por su importancia, debe recalcar que todo punto que pertenece al Lugar Geométrico de las Raíces, debe cumplir con las ecuaciones (2.3.18) y (2.3.19), que son las de magnitud y fase respectivamente.

REGLAS PARA LA CONSTRUCCION

Las siguientes reglas de construcción se han derivado de la relación entre los polos y ceros de $A(Z)$ y las raíces de la ecuación característica:

1) PUNTOS DE ORIGEN DEL L.G.R. ($K = 0$)

El Lugar Geométrico de las Raíces empieza en los polos de la función

de lazo abierto. ($D(Z) = 0$)

La ecuación característica es $1 + k \frac{N(Z)}{D(Z)}$

$$D(Z) + k N(Z) = 0$$

Si $k = 0$

entonces: $D(Z) = 0$

2) PUNTOS DONDE TERMINA EL L.G.R. ($K \rightarrow \infty$)

El Lugar Geométrico de las Raíces termina en los ceros de lazo abierto. ($N(Z) = 0$)

$$1 + k \frac{N(Z)}{D(Z)} = 0$$

$$\frac{1}{k} + \frac{N(Z)}{D(Z)} = 0$$

$$k \rightarrow \infty$$

$$\frac{N(Z)}{D(Z)} = 0 ; \text{ esto es } N(Z) = 0$$

3) NUMERO DE RAMAS

Un diagrama del lugar de las raíces tiene tantas ramas como raíces tiene la ecuación característica. Como la cantidad de polos de lazo abierto generalmente excede a la de ceros, la cantidad de ramas iguala a la de polos. Si la cantidad de polos de lazo cerrado es la misma que la cantidad de polos de lazo abierto, la cantidad de ramas de lugares de las raíces que terminan en ceros de lazo abierto finitos, es igual a la cantidad Z de ceros de lazo abierto. Las restantes $P-Z$ ramas terminan en el infinito ($P-Z$ ceros implícitos en el infinito) a lo largo de asíntotas.

Sin embargo es importante notar que si se considera un problema puramente matemático, se puede hacer que la cantidad de polos de lazo cerrado sea igual a la de ceros de lazo abierto en lugar de ser igual a los polos de lazo abierto. En tal caso, la cantidad de ramas del lugar de la raíz es igual a la cantidad de ceros de lazo abierto.

En general, si:

N es el número de ramas del L.G.R.

Z es el número de ceros finitos de lazo abierto.

P es el número de polos finitos de lazo abierto.

Entonces:

$$N = Z \quad \text{si } Z > P \quad (2.3.21)$$

$$N = P \quad \text{si } P > Z \quad (2.3.22)$$

4) SIMETRÍA DEL L.G.R.

Para K real, el Lugar Geométrico de las Raíces es totalmente simétrico con respecto al eje real. La prueba de esta regla es evidente, puesto que para funciones racionales, las raíces complejas aparecen en pares complejos conjugados.

5) ASINTOTAS

Para grandes valores de Z, las ramas del L.G.R. son asintóticas a líneas rectas que parten desde los puntos de intersección de las asintotas con ángulos dados por:

$$\phi = \frac{(2q + 1)\pi}{P. - Z} \tag{2.3.23}$$

donde: $q = 0, 1, 2, 3, \dots, P-Z-1$ (2.3.24)

Comprobación:

La forma general en la función de transferencia de lazo abierto puede escribirse como:

$$A(Z) = K \frac{Z^m + a_1 Z^{m-1} + a_2 Z^{m-2} + \dots + a_m}{Z^{m+n} + b_1 Z^{m+n-1} + \dots + b_{m+n}} \tag{2.3.35}$$

$$A(Z) = \frac{K}{Z^n + (b_1 - a_1) Z^{n-1} + \dots + R(Z)/P(Z)} \tag{2.3.26}$$

En donde R(Z) es un polinomio de grado menor que m

y $P(Z) = Z^m + a_1 Z^{m-1} + \dots + a_m$ (2.3.27)

La ecuación característica del sistema es:

$$Z^n + (b_1 - a_1)Z^{n-1} + \dots + R(Z)/P(Z) = - K \tag{2.3.28}$$

A medida de que Z crece, el término R(Z)/P(Z) se aproxima a cero pues

to que el grado de $P(Z)$ es mayor que $R(Z)$, y solo se consideran significativos los dos primeros términos de la ecuación (2.3.28), esto es:

$$Z^n + (b_1 - a_1) Z^{n-1} = -K \quad (2.3.29)$$

o sinó:

$$Z \left(1 + \frac{b_1 - a_1}{Z}\right)^{1/n} = (-K)^{1/n} \quad (2.3.30)$$

El factor $\left(1 + \frac{b_1 - a_1}{Z}\right)^{1/n}$ de la ecuación (2.3.30) crece en una serie infinita, obteniéndose como resultado:

$$Z \left(1 + \frac{b_1 - a_1}{nZ} + \dots\right) = (-K)^{1/n} \quad (2.3.31)$$

Despreciándose los términos superiores al segundo, se tiene:

$$Z + \frac{b_1 - a_1}{n} = (-K)^{1/n} \quad (2.3.32)$$

Sustituyendo $Z = \text{Re}.Z + j\text{Im}.Z$, se tiene:

$$\text{Re } Z + j \text{Im } Z + \frac{b_1 - a_1}{n} = |K|^{1/n} \cdot \cos\left\{\frac{2q+1}{n}\Pi\right\} + j \text{sen } \frac{2q+1}{n}\Pi \quad (2.3.33)$$

Igualando partes reales e imaginarias respectivamente:

$$\text{Re } Z + \frac{b_1 - a_1}{n} = |K|^{1/n} \cos \frac{2q+1}{n} \Pi \quad (2.3.34)$$

$$\text{Im } Z = |K|^{1/n} \text{sen } \frac{2q+1}{n} \Pi \quad (2.3.35)$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$|K|^{1/n} = \frac{I_m Z}{\text{Sen} \left(\frac{2q+1}{n} \right) \Pi} = \frac{R_e Z + \frac{b_1 - a_1}{n}}{\text{Cos} \left(\frac{2q+1}{n} \right) \Pi} \quad (2.3.36)$$

Por tanto: $I_m Z = \text{tg} \left(\frac{2q+1}{n} \right) \Pi \left[R_e Z + \frac{b_1 - a_1}{n} \right]$ (2.3.37)

La ecuación anterior representa una línea recta en el plano Z, que tiene la forma de:

$$I_m Z = m(R_e Z - R_{e_1} Z) \quad (2.3.38)$$

Donde m es la pendiente y $R_{e_1} Z$ es el cruce de la recta con el eje real.

Por tanto: $m = \text{tg} \frac{2q+1}{n} \Pi = \text{tg} \frac{2q+1}{P-Z} \Pi$ (2.3.39)

y $R_{e_1} Z = - \left(\frac{b_1 - a_1}{n} \right)$ (2.3.40)

donde: $q = 0, 1, 2, 3, \dots, P-Z$

La ecuación (2.3.39) permite comprobar lo afirmado.

6) INTERSECCION DE LAS ASINTOTAS

a) La intersección del número de asíntotas $N = P - Z$, queda solamente sobre el eje real.

b) La intersección de las asíntotas en el eje real se expresa por:

$$\operatorname{Re}_1 Z = - \left(\frac{b_1 - a_1}{n} \right) = \frac{\sum \text{polos de } A(Z) - \sum \text{ceros de } A(Z)}{(P - Z)} \quad (2.3.41)$$

Demostración

La demostración de la regla 6.a. es muy sencilla si se toma en cuenta que el L.G.R. es simétrico respecto al eje real.

En cuanto a la regla 6.b. esto se demostró en el numeral anterior, lo que se tiene expresado en la ecuación (2.3.40), ya que según las leyes algebraicas se tiene que:

$$b_1 = - \sum \text{raíces del denominador de } A(Z) = - \sum \text{polos de } A(Z)$$

y

$$a_1 = - \sum \text{raíces del numerador de } A(Z) = - \sum \text{ceros de } A(Z).$$

7) L.G.R. SOBRE EL EJE REAL

Las contribuciones de los polos y ceros finitos al argumento de $A(Z)$ para puntos en el eje real se puede analizar para dos diferentes casos:

a) Raíces complejas

Se tienen los polos conjugados P_1 y P_2 y un punto σ_1 en el eje real, siendo la fase de $A(Z)$:

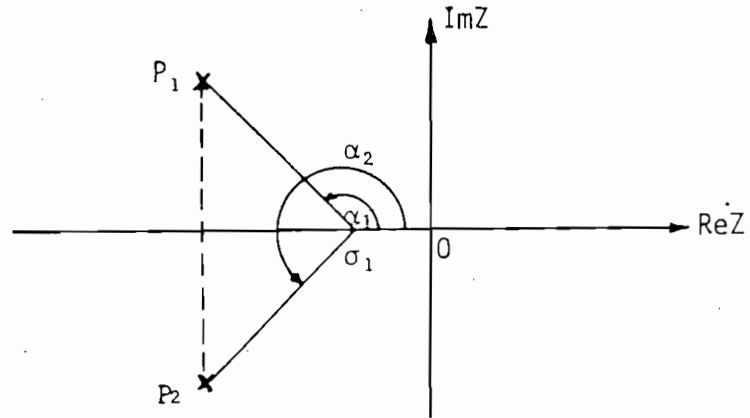


Fig. 2.3.2. Contribución de ángulo de raíces complejas.

$$|A(Z)| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.3.42)$$

donde: $\alpha_1 = \widehat{A\sigma_1 B}$ (opuestos al vértice) (2.3.43)

$$\widehat{A\sigma_1 P_1} = \widehat{A\sigma_1 P_2} \text{ (bisectados por } A\sigma_1) \quad (2.3.44)$$

$$\widehat{A\sigma_1 P_1} = \widehat{B\sigma_1 O} \text{ (opuestos por el vértice)} \quad (2.3.45)$$

por tanto: $\widehat{A\sigma_1 P_2} = \widehat{B\sigma_1 O}$ (2.3.46)

y $\widehat{A\sigma_1 B} = \widehat{A\sigma_1 P_2} + \widehat{P_2\sigma_1 B}$ (2.3.47)

Reemplazando (2.3.43) en (2.3.42), se tiene:

$$|A(Z)| = \widehat{A\sigma_1 B} + \alpha_2 \quad (2.3.48)$$

reemplazando (2.3.47) en (2.3.48):

$$|A(Z)| = \widehat{A\sigma_1 P_2} + \widehat{P_2\sigma_1 B} + \alpha_2 \quad (2.3.49)$$

Por tanto, de la ecuación (2.3.46) se llega a:

$$\underline{|A(Z)} = \widehat{B\sigma_1} O + \widehat{P_2\sigma_1} B + \alpha_2 \quad (2.3.50)$$

Esto es:

$$\underline{|A(Z)} = 2\pi \quad \delta \quad \underline{|A(Z)} = 0 \quad (2.3.51)$$

Esto quiere decir que raíces complejas no contribuyen al argumento - de $A(Z)$ para puntos sobre el eje real, puesto que el ángulo con que contribuye cada raíz compleja se anula con el que contribuye su conjugada.

b) Raíces reales

La contribución al argumento de $A(Z)$ de parte de polos y ceros reales es de acuerdo a la posición que tienen respecto al punto del eje real, como se observa en la Fig. 2.3.3.

Como ya se dijo antes, para que un punto sea del L.G.R., este debe cumplir con la ecuación de fase, que es:

$$\underline{|A(Z)} = (2q + 1)\pi \quad \text{para valores de } k \text{ reales}$$

En la figura siguiente se tiene:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi$$

$$\alpha_4 = 0$$

$$\underline{|A(Z)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\underline{|A(Z)} = 3\pi$$

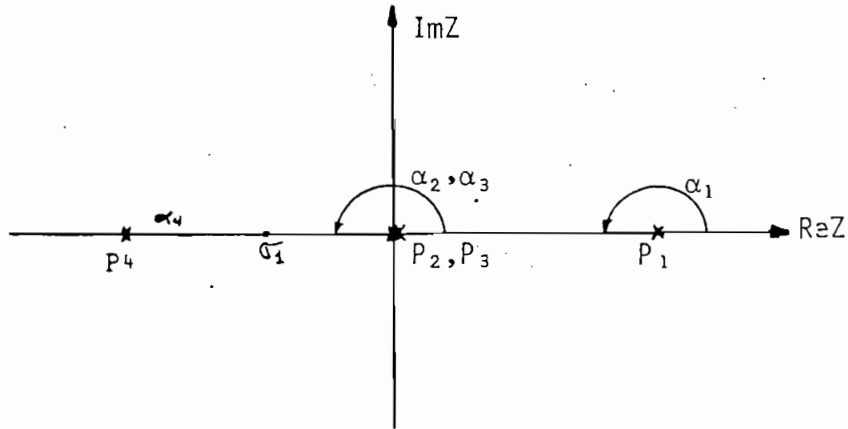


Fig. 2.3.3. Contribución de ángulo de raíces reales.

De la Figura anterior se establece que las raíces que contribuyen al argumento de $A(Z)$ son las que se hallan a la derecha del punto σ_1 que se analiza, cada una de ellas aporta con un ángulo igual a Π rad o 180° .

Por tanto:

$$n\Pi = (2q + 1) \Pi \quad (2.3.52)$$

de donde: $n = 2q + 1$ con $q = 0, 1, 2, 3, \dots$ (2.3.53)

Esto es, n resulta ser impar.

En definitiva, para que un punto sobre el eje real sea del L.G.R. es con dición necesaria y suficiente que se encuentre a la izquierda de un número impar de polos y ceros reales.

8) ANGULOS DE PARTIDA (O LLEGADA) DESDE POLOS COMPLEJOS (O CEROS COMPLEJOS)

Para obtener el trazo de los lugares de las raíces con exactitud razonable, debe hallarse las direcciones de los lugares de la raíz cerca de los polos y ceros complejos. Si se elige un punto de prueba y se lo desplaza en la vecindad inmediata de un polo complejo (o cero complejo), se puede considerar que la suma de las contribuciones angulares desde todos los otros polos y ceros se mantiene constante. Por tanto, el ángulo de salida (o llegada) del lugar de las raíces desde un polo complejo (o cero complejo) puede ser hallado restando de 180° la suma de todos los ángulos de las cantidades complejas desde todos los otros polos y ceros al polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos adecuados.

Esto puede observarse con mayor facilidad en la Fig. 2.3.4.a. en la que se da una rápida determinación de la dirección con la cual el lugar parte de un polo complejo o llega a un cero complejo. Se elige una área alrededor de p_2 , de manera que d_2 es mucho menor que d_0 , d_1 d_3 .

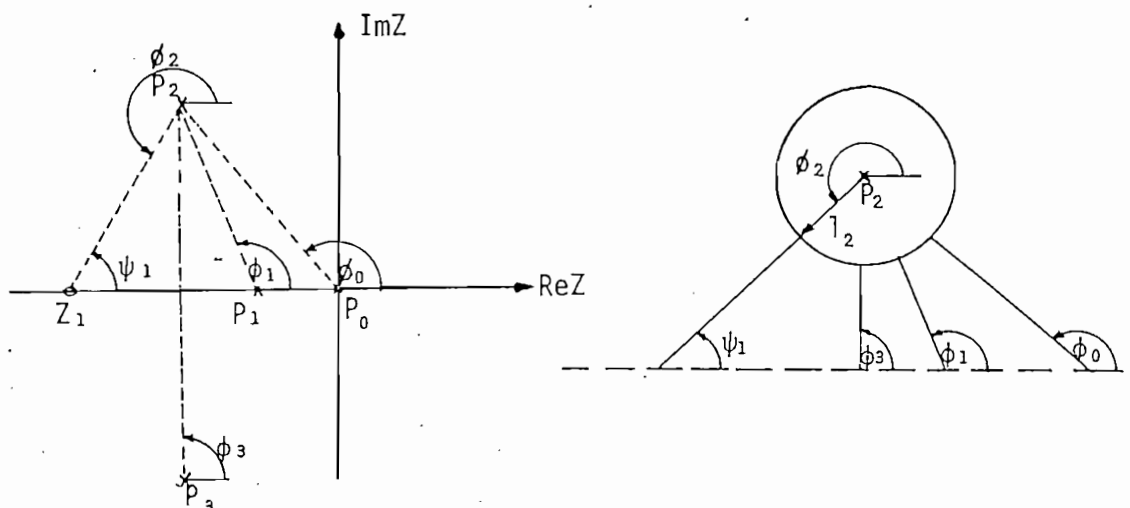


Fig. 2.3.4.

Para mayor claridad se indica en la Fig. 2.3.4.b. el área cercana a P_2 de manera ampliada.

Si ϕ es el ángulo de partida, entonces, si se aplica a este pequeño círculo la condición de fase, se tiene:

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \psi_1 = (2q + 1) 180^\circ \quad (2.3.54)$$

$$\therefore \Phi_2 = (2q + 1) 180^\circ - (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_3 - \psi_1) \quad (2.3.55)$$

Para el cero complejo Z_1 , el ángulo de aproximación será:

$$\psi_1 = (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 - 90^\circ) - (2q + 1)180^\circ \quad (2.3.56)$$

Puesto que -180° es el mismo punto que 180° , se puede generalizar, diciendo que el ángulo de partida (o llegada) de un polo complejo (o cero complejo) es:

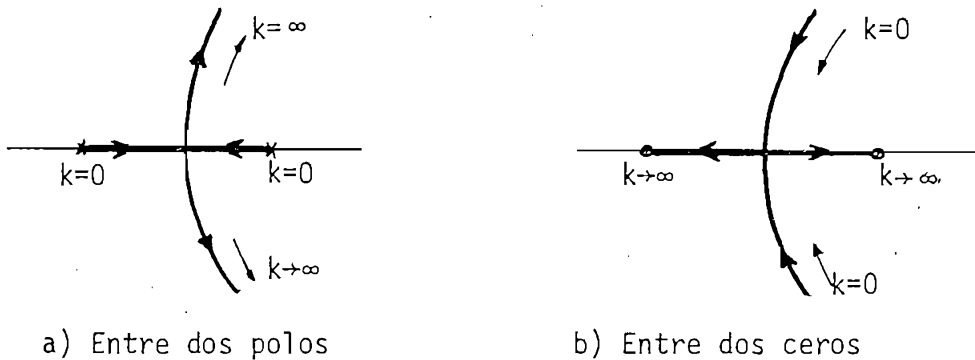
$$\beta = 180^\circ + \alpha \quad (2.3.57)$$

donde: α es la contribución de ángulo de todos los polos y ceros, pero sin tomar en cuenta la contribución del polo o cero en cuestión.

9) PUNTOS DE ARRANQUE O SEPARACION DEL L.G.R. EN EL EJE REAL

Los puntos en el plano Z donde se encuentran raíces múltiples son denominados puntos de arranque del L.G.R.

En la Fig. (2.3.5a) se puede observar la separación del L.G.R. en el eje real para el caso en que sucede entre dos polos, en tanto que en la Fig. (2.3.5b) se da el caso en que el punto de separación está en tre dos ceros.



a) Entre dos polos

b) Entre dos ceros

Fig. 2.3.5. Puntos de arranque en el eje real.

El punto de arranque en este caso representa una doble raíz de la ecuación característica del sistema, ya que al punto de separación llegan o parten dos ramales del lugar de la raíz.

En general, de un punto de arranque o separación pueden partir o llegar varios ramales del L.G.R. Por ejemplo, en la Fig. (2.3.6) se observa que cuatro ramales se encuentran en un punto del eje real y parten en distintas direcciones. Para este caso, el punto de arranque constituye una raíz cuádruple de la ecuación característica del sistema.

En las figuras 2.3.5a. y 2.3.5b. se observa que los ramales se separan en el eje real con ángulos de 180° entre sí, en tanto que en la Fig. 2.3.6. se separan con ángulos de 90° . De esto, puede generalizarse la siguiente afirmación:

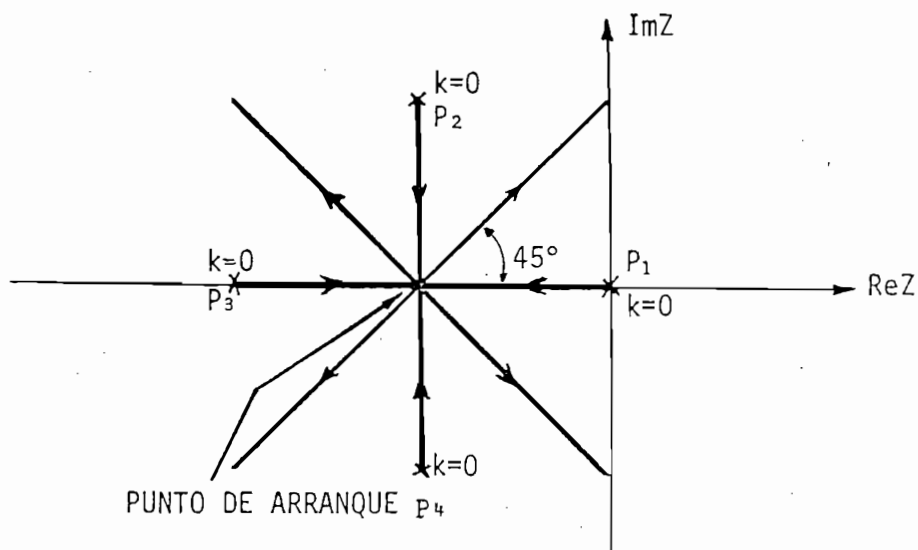


Fig. 2.3.6. Punto de arranque del L.G.R. desde una raíz cuadruple.

"Los ramales del L.G.R. pueden aproximarse y partir de un punto de arranque en el eje real con diferencia de ángulo de $180^\circ/N$, donde N es el número de ramales".

Igualmente, puede haber más de un punto de arranque en el L.G.R. pero debido a la simetría del mismo, los puntos de arranque deben quedar sobre el eje real u ocurrir en pares complejos conjugados.

9.a. Punto de arranque debido a polos y ceros en el eje real

Si solo se consideran los polos y ceros reales de $A(Z)$ y se supone que $-a$ es el punto de arranque en el eje real, el valor de a se determina de la ecuación:

$$\sum_{\substack{\text{Ceros a la} \\ \text{izq. de } -a}} \frac{1}{Z_i - a} - \sum_{\substack{\text{Polos a la} \\ \text{izq. de } -a}} \frac{1}{P_j - a} = \sum_{\substack{\text{Ceros a la} \\ \text{der. de } -a}} \frac{1}{a - Z_i} - \sum_{\substack{\text{Polos a la} \\ \text{der. de } -a}} \frac{1}{a - P_j} \quad (2.3.58)$$

Lo cual equivale a escribir:

$$\sum \frac{1}{Z + P_j} = \sum \frac{1}{Z + Z_i} \quad (2.3.59)$$

con $Z = -a$

Comprobación:

Considérese la configuración de polos y ceros dada en la Fig. (2.3.7). en la que los ramales del L.G.R. tienen un punto de arranque situado entre dos polos de $A(Z)$, $-P_2$ y $-P_3$. Supóngase que se escoje un punto Z'_1 que está muy próximo al punto de arranque $-a$, entonces Z'_1 debe satisfacer las condiciones de fase (ec. 2.3.19), esto es:

$$\sum_{i=1}^2 \angle [Z'_1 + Z_i] - \sum_{j=1}^3 \angle [Z'_1 + P_j] = \pi \cdot (2q + 1) \quad (2.3.60)$$

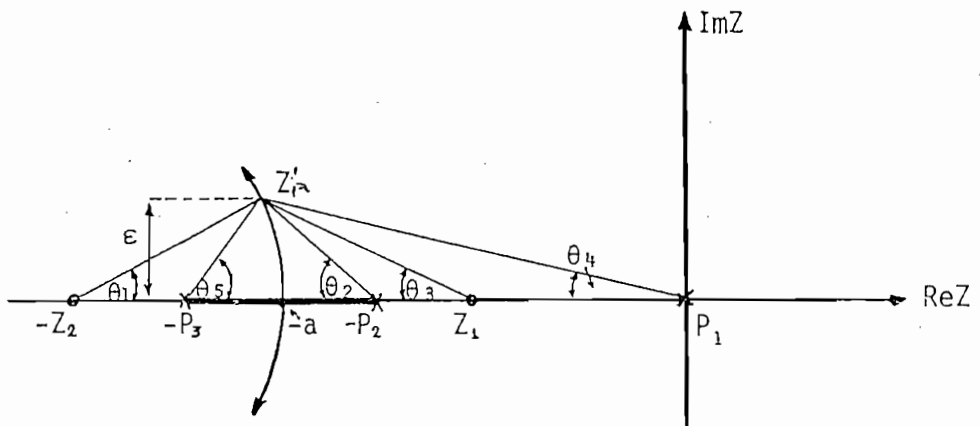


Fig. 2.3.7. Punto de arranque en el eje real debido a polos y ceros reales de $A(Z)$.

En términos de los ángulos que se indican en la figura anterior, la condición de fase es:

$$[\theta_1 + (\pi - \theta_3)] - [(\pi - \theta_2) + (\pi - \theta_4) + \theta_5] = \pi(2q + 1) \quad (2.3.61)$$

$$\delta: \quad \theta_1 - \theta_3 + \theta_2 + \theta_4 - \theta_5 = 0 \quad (2.3.62)$$

Como se supone que Z_1 está muy próximo a $-a$, los ángulos son muy pequeños, pudiendo ser reemplazados por sus correspondientes tangentes, lo cual da como resultado:

$$\frac{\epsilon}{Z_2 - a} - \frac{\epsilon}{a - Z_1} + \frac{\epsilon}{a - P_2} + \frac{\epsilon}{a} - \frac{\epsilon}{P_3 - a} = 0 \quad (2.3.63)$$

esto es:

$$\frac{1}{Z_2 - a} - \frac{1}{P_3 - a} = \frac{1}{a - Z_1} - \frac{1}{a - P_2} - \frac{1}{a - P_1} \quad (2.3.64)$$

De esta manera se ha demostrado la validez de la ecuación (2.3.58).

9.b. Punto de arranque debido a polos y ceros complejos

La contribución de los polos y ceros complejos de $A(Z)$ al punto de arranque en el eje real se determina por la ecuación:

$$\begin{array}{l} \sum \frac{2(\alpha_j - a)}{(\alpha_j - a)^2 + \beta_j^2} \\ \text{Ceros complejos} \\ \text{a la izq. de } -a \end{array} - \begin{array}{l} \sum \frac{2(\alpha_j - a)}{(\alpha_j - a)^2 + \beta_j^2} \\ \text{polos complejos} \\ \text{a la izq. de } -a \end{array} =$$

$$\begin{array}{l} \sum \frac{2(a - \alpha_j)}{(a - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} \\ \text{Ceros complejos} \\ \text{a la derecha de} \\ -a \end{array} - \begin{array}{l} \sum \frac{2(a - \alpha_j)}{(a - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} \\ \text{Polos complejos} \\ \text{a la derecha de} \\ -a \end{array} \quad (2.3.65)$$

que puede escribirse como:

$$\sum \frac{1}{Z + Z_j} = \sum \frac{1}{Z + P_j} \quad (2.3.66)$$

con $Z = -a$

Esto es, puede determinarse el punto de arranque en forma general - por efecto de polos y ceros complejos y reales, puesto que las ecuaciones que determinan el efecto de los mismos son idénticas.

Comprobación de la ec. (2.3.65):

En la Fig. (2.3.8) se muestra un par de polos (o ceros) complejos - conjugados. Si se supone que el punto $-a$ es punto de arranque del L.G.R. en el eje real, y se escoje un punto Z_1 del L.G.R., muy cercano al punto de arranque, de acuerdo a la Fig. (2.3.8) se tiene:

$$\theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{a - \alpha} \quad (2.3.67)$$

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta - \epsilon}{a - \alpha} \quad (2.3.68)$$

$$y \quad \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{a - \alpha} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta - \epsilon}{a - \alpha} \quad (2.3.69)$$

Como ϵ es muy pequeño, $\theta_1 - \theta_2$ es un ángulo muy chico que puede aproximarse por su tangente, por tanto:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\beta/(a-\alpha) - (\beta-\epsilon)/(a-\alpha)}{1 + \beta(\beta-\epsilon)/(a-\alpha)^2} \quad (2.3.70)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\epsilon(a - \alpha)}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (a > \alpha) \quad (2.3.71)$$

La contribución total de ángulo es:

$$2(\theta_1 - \theta_2) = \pm \frac{2\epsilon(a - \alpha)}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (2.3.72)$$

En donde se usa el signo positivo para ceros complejos y el signo negativo para polos complejos situados a la derecha del punto de separación $-a$.

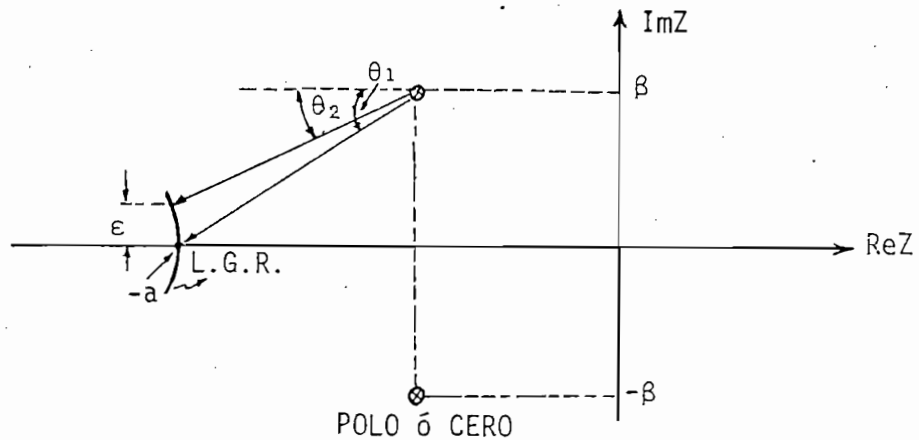


Fig. 2.3.8. Punto de arranque en el eje real debido a polos y ceros complejos de $A(Z)$.

De modo semejante, puede mostrarse muy fácilmente que si un par de polos o ceros complejos están a la izquierda del punto de arranque $-a$, la contribución angular total es:

$$2(\theta_1 - \theta_2) = \pm \frac{2\epsilon(\alpha - a)}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} \quad (2.3.73)$$

Generalmente ocurre que se tiene polos y ceros tanto reales como complejos, por lo que el cálculo del punto de separación en el eje real se lo hace con la ayuda de la ecuación (2.3.59) tomando en cuenta todos los polos y ceros.

9.c. Puntos de arranque o separación que no están en el eje real

La ecuación (2.3.59) puede igualmente aplicarse para determinar los puntos de arranque que no estén situados sobre el eje real. Considérese la Fig. (2.3.9). El punto de separación sobre el eje real pue

de ser fácilmente determinado como -2 , sin embargo hay dos puntos de arranque conjugados para los ramales complejos. Debido a la simetría del L.G.R. sólo es necesario determinar uno de esos puntos. Si el eje que une los dos puntos de separación complejos se considera como el real, mediante una traslación y rotación adecuada de ejes, puede considerarse este caso como similar a los anteriores.

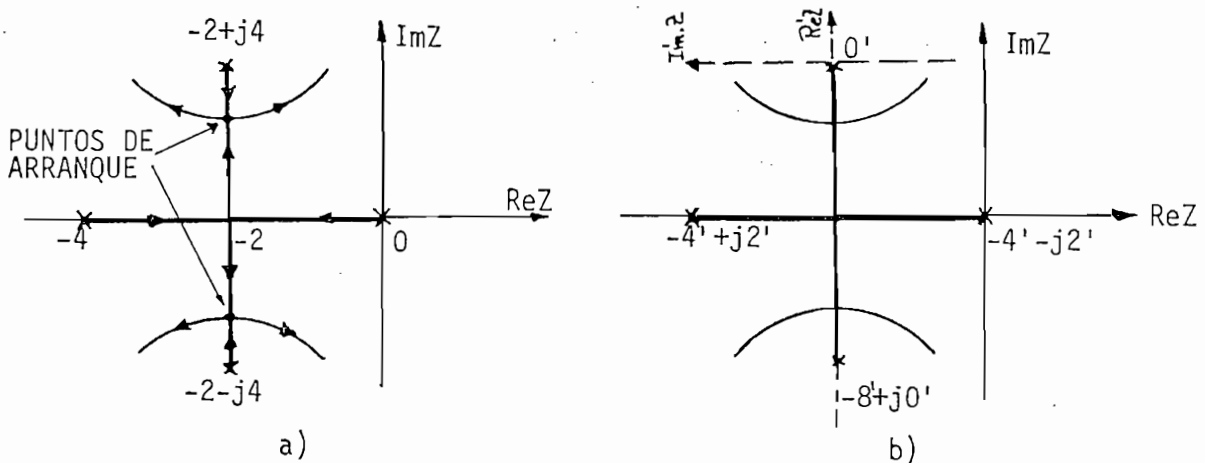


Fig. 2.3.9. Puntos de separación que no están sobre el eje real.

En la Fig. (2.3.9b) se escoge arbitrariamente el punto $-2 + Im . 4$ como nuevo origen, y se indica el nuevo eje de coordenadas.

Por tanto, aplicando la ec. (2.3.59), se tiene:

$$-\frac{1}{8-a} - \frac{2(4-a)}{(4-a)^2 + 2^2} = -\frac{1}{a} \quad (2.3.74)$$

de donde:

$a = 1.555$, por tanto, los puntos de separación de los ramales complejos están situados en $Z = -2 \pm Im . 2.45$.

9.d. Puntos de arranque o separación calculados por el método analítico

Este método es el más utilizado debido a su simplicidad para ser aplicado y que toma en cuenta todas las consideraciones anteriores en una sola.

La ecuación característica es:

$$1 + K \frac{N(Z)}{D(Z)} = 0 \quad (2.3.75)$$

de donde puede obtenerse:

$$K = f(Z) \quad (2.3.76)$$

en donde $f(Z)$ no contiene a K , y los puntos de arranque (reales y complejos) del diagrama del L.G.R. son las raíces que se obtienen de igualar la primera derivada de K , con respecto a Z , a cero, esto es:

$$\frac{dK}{dZ} = 0 \quad (2.3.77)$$

Comprobación:

Suponiendo que la ecuación característica del sistema es un polinomio con coeficientes constantes, puede escribirse como:

$$D(Z) + K \cdot N(Z) = 0 \quad (2.3.78)$$

En donde K es una constante positiva y $N(Z)$ y $D(Z)$ no son funciones de K . Si se considera que K varía con incrementos ΔK , la ecuación (2.3.78) se convierte en:

$$D(Z) + (K + \Delta K) \cdot N(Z) = 0 \quad (2.3.79)$$

Dividiendo la última ecuación por $D(Z) + K \cdot N(Z)$, se tiene:

$$1 + \frac{\Delta K \cdot N(Z)}{D(Z) + K \cdot N(Z)} \quad (2.3.80)$$

que puede ser escrita como:

$$1 + \Delta K \cdot F(Z) = 0 \quad (2.3.81)$$

en donde:
$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z) + K \cdot N(Z)} \quad (2.3.82)$$

y el denominador de $F(Z)$ es la ecuación característica.

En puntos muy próximos a la raíz Z_j de la ecuación característica, de multiplicidad n (puntos de arranque en Z_j), $F(Z)$ puede aproximarse como:

$$F(Z) = \frac{A_j}{(Z - Z_j)^n} = \frac{A_j}{(\Delta Z)^n} \quad (2.3.83)$$

Sustituyendo (2.3.83) en (2.3.81), se tiene:

$$1 + \frac{\Delta K A_j}{(\Delta Z)^n} = 0 \quad (2.3.84)$$

de donde:

$$\frac{\Delta K}{\Delta Z} = - \frac{(\Delta Z)^{n-1}}{A_i} \quad (2.3.85)$$

Tomando el límite a ambos lados de la última ecuación, a medida que ΔK se aproxima a cero, resulta:

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta K}{\Delta Z} \right) = \frac{dK}{dZ} = 0 \quad (2.3.86)$$

Por lo tanto, en los puntos de arranque o separación de los ramales del L.G.R. se cumple que la derivada de la ganancia del sistema respecto a Z es cero.

10. CALCULO DE K EN EL L.G.R.

Una vez construido el L.G.R. a partir de la ecuación característica, es necesario la determinación del valor de ganancia K para determinado punto Z_1 del L.G.R., lo cual puede conseguirse a partir de la ec. (2.3.18), que puede escribirse como:

$$|A(Z)| = K \frac{\prod_{r=1}^m |(Z_1 - Z_r)|}{\prod_{r=1}^n |(Z_1 - P_r)|} = 1 \quad (2.3.87)$$

de donde:

$$K = \frac{\prod_{r=1}^n |(Z_1 - P_r)|}{\prod_{r=1}^m |(Z_1 - Z_r)|} \quad (2.3.88)$$

que puede escribirse como:

$$K = \frac{\sum_{r=1}^n |b_{1r}|}{\sum_{r=1}^m |a_{1r}|} \quad (2.3.89)$$

donde: b_{1r} es la longitud del vector que va desde el polo P_r al punto Z_1 .

a_{1r} es la longitud del vector que va desde el cero Z_r al punto Z_1 .

11. INTERSECCION DEL L.G.R. CON LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

En la intersección del L.G.R. con la circunferencia unitaria se tiene el valor de ganancia crítica. La determinación del K crítico puede efectuarse mediante el criterio de Routh-Hourwitz para sistemas discretos, que hace uso previo de la transformación bilineal de la ecuación (2.3.90), que mapea el contorno de la circunferencia unitaria del plano Z en un eje imaginario $j\omega_r$.

$$Z = \frac{r + 1}{r - 1} \quad (2.3.90)$$

Luego de aplicarse esta transformación bilineal, se puede proceder mediante el criterio de Routh-Hourwitz sin ninguna modificación, determinándose de esta manera el valor de ganancia crítica. Igualmente, podría determinarse el valor de ganancia crítica mediante el criterio de Jury ó mediante la forma tabular de Raible; debe anotarse

que todos estos métodos fueron convenientemente estudiados en el capítulo anterior.

Para la determinación del valor de ganancia crítica en el programa implementado, se procede de una manera gráfica, que se explicará adecuadamente en el capítulo III.

A continuación y a manera de ejemplos se desarrolla el Lugar Geométrico de las Raíces para dos sistemas de control:

Ejemplo 1.-

En la Fig. 2.3.10 se presenta el sistema de control digital para un vehículo espacial, cuyo L.G.R. va a calcularse.

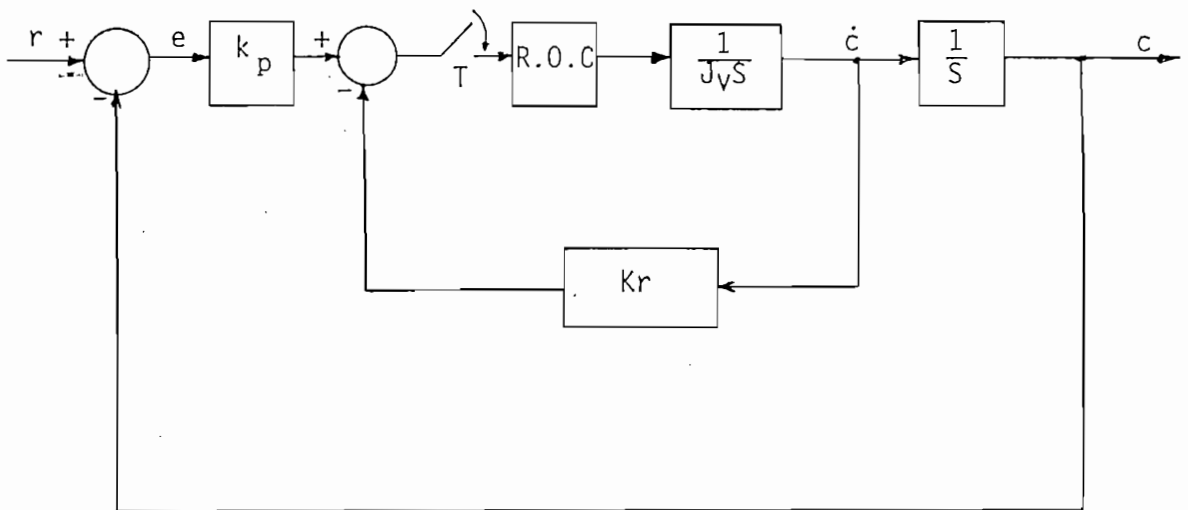


Fig. 2.3.10. Sistema de control digital para vehículo espacial.

La función de transferencia de lazo abierto del sistema viene dada por:

$$G(Z) = \frac{C(Z)}{E(Z)} = \frac{K_p z \left\{ G_h(S) \frac{1}{J_V S^2} \right\}}{1 + K_r z \left\{ G_h(S) \frac{1}{J_V S} \right\}} \quad (2.3.91)$$

donde $G_h(S)$ es la F.T. en S del R.O.C.

$$\text{entonces: } z \left\{ G_h(S) \frac{1}{J_V S^2} \right\} = (1 - Z^{-1}) z \left\{ \frac{1}{J_V S^3} \right\} = \frac{T^2}{2 J_V} \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$$

$$z \left\{ G_h(S) \frac{1}{J_V S} \right\} = (1 - Z^{-1}) z \left\{ \frac{1}{J_V S^2} \right\} = \frac{T}{J_V(z - 1)}$$

Por tanto:

$$G(Z) = \frac{T^2 K_p (z + 1)}{2 J_V Z^2 + (2K_r T - 4 J_V)Z + 2J_V - 2K_r T}$$

en donde: T : Período de muestreo en segundo.

K_p : Ganancia del sensor de posición.

K_r : Ganancia del sensor proporcional.

J_V : Momento de inercia del vehículo.

Si se tiene que: $K_p = K$

$$J_V = 41822 \text{ Kg.m}^2$$

$$K_r = 3.17 \times 10^5$$

$$T = 0.1 \text{ seg.}$$

Entonces:
$$G(Z) = \frac{1.2 \times 10^{-7} K(z + 1)}{(z - 1)(z - 0.242)}$$

Y la ecuación característica del sistema es:

$$1 + G(Z) = 0$$

Esto es:

$$1 + K \frac{1.2 \times 10^{-7} (z + 1)}{(z - 1)(z - 0.242)} = 0$$

De inmediato se procede al cálculo del L.G.R. tomando en consideración cada una de las reglas que rigen su construcción:

1) Puntos de origen del L.G.R.

El L.G.R. se inicia en los polos de lazo abierto del sistema, esto es en los polos de $G(Z)$.

Para este caso, el L.G.R. se inicia en $P_1 = 1$

$$P_2 = 0.242$$

2) Puntos donde termina el L.G.R.

El L.G.R. termina en los ceros de la función de lazo abierto del sistema.

Para este caso, un ramal del L.G.R. termina en el punto $z_1 = 1$.

3) Número de ramas.

Puesto que $P > Z$, se tiene que el número de ramas es:

$$N = P - Z$$

Esto es, el L.G.R. consta de dos ramales: el uno termina en el cero de lazo abierto Z_3 y el otro termina en un cero infinito.

4) El L.G.R. es totalmente simétrico respecto al eje real.

5) Asíntotas.

Los ángulos con que parten las asíntotas son:

$$\Phi_k = \frac{(2k + 1)}{P - Z} \pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, P-Z-1$$

de donde: $\Phi_1 = \pi$

$$\Phi_2 = 3\pi$$

Esto es, las asíntotas coinciden con el eje real negativo.

6) Intersección de las asíntotas.

Para este ejemplo este cálculo no tiene importancia, pero sin embargo idealmente las asíntotas se separan en el punto:

$$R_e = \frac{1 + 0.242 + 1}{1} = 2.242$$

7) L.G.R. sobre el eje real.

Puesto que se tiene dos polos y un cero reales y diferentes, el L.G.R. sobre el eje real está a la izquierda de un número impar de polos y ceros. Para este caso el eje real forma parte del L.G.R. entre los polos $P_1 = 1$ y $P_2 = 0.242$ y a la izquierda del cero $Z_1 = -1$.

8) Angulos de partida y de llegada del L.G.R.

El ángulo de partida o llegada viene dado por:

$$\beta = 180^\circ + \alpha$$

- Para el polo P_1 :

$$\alpha_1 = 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$

Entonces el ángulo de partida es:

$$\beta_1 = 180^\circ$$

- Para el polo P_2 :

$$\alpha_2 = 0^\circ - 180^\circ = -180^\circ$$

Entonces el ángulo de partida es:

$$\beta_2 = 0^\circ$$

- Para el cero Z_1 :

$$\alpha_3 = - (180^\circ + 180^\circ) = - 360^\circ$$

Entonces el ángulo de llegada es:

$$\beta_3 = 180^\circ - 360^\circ = - 180^\circ$$

9) Puntos de separación del L.G.R. en el eje real.

Estos puntos se obtienen mediante el método analítico, que consiste en resolver la ecuación $\frac{dK}{dZ} = 0$.

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + G(Z) = 1 + K \frac{1.2 \times 10^{-7}(z + 1)}{(z - 1)(z - 0.242)} = 0$$

de donde:

$$K = - \frac{(z - 1)(z - 0.242)}{1.2 \times 10^{-7}(z + 1)}$$

por tanto:

$$\frac{dK}{dZ} = \frac{1}{1.2 \times 10^{-7}} \frac{d}{dZ} \left(\frac{Z^2 - 1.242.Z + 0.242}{z + 1} \right) = 0$$

$$0 = \frac{(2Z - 1.242)(z + 1) - (Z^2 - 1.242Z + 0.242)}{(z + 1)^2}$$

$$Z^2 + 2Z - 1.484 = 0$$

Siendo los puntos de separación:

$$Z_a = - 2.576$$

$$Z_b = 0.576.$$

10) Intersección del L.G.R. con la circunferencia unitaria.

La obtención del valor de ganancia crítica para este ejemplo va a hacerse mediante la aplicación del criterio de Routh-Hourwitz, posterior a la transformación bilineal correspondiente.

$$1 + G(Z) = (z - 1)(z - 0.242) + 1.2 \times 10^{-7} K_p(z + 1) = 0$$

reemplazando $z = \frac{r+1}{r-1}$ en la ecuación anterior:

$$\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2 - \left(\frac{r+1}{r-1}\right) (1.242 - 1.2 \times 10^{-7} K_p) + 1.2 \times 10^{-7} K_p + 0.242 = 0$$

$$(r+1)^2 - (r+1)(r-1)(1.242 - 1.2 \times 10^{-7} K_p) + (r-1)^2 (1.2 \times 10^{-7} K_p + 0.242) = 0$$

$$r^2 + 2r + 1 - (r^2 - 1)(1.242 - 1.2 \times 10^{-7} K_p) + (r^2 - 2r + 1)(1.2 \times 10^{-7} K_p + 0.242) = 0$$

de donde:

$$1.2 \times 10^{-7} K_p r^2 + (1.516 - 2.4 \times 10^{-7} K_p)r + 2.484 = 0$$

El criterio de Routh-Hourwitz aplicado a un sistema de segundo orden,

indica que para que dicho sistema sea estable todos los coeficientes de la ecuación característica respectiva deben ser todos de igual signo. Esto se cumple si la ganancia K es mayor que cero. El valor de ganancia crítica, para este caso, se obtiene al igualar el coeficiente del término de primer orden a cero, esto es:

$$1.516 - 2.4 \times 10^{-7} K_p = 0$$

de donde: $K \text{ crítica} = 0.63 \times 10^7$

Finalmente, en la Fig. 2.3.11 se indica el L.G.R. correspondiente al sistema de control digital de la Fig. 2.3.10

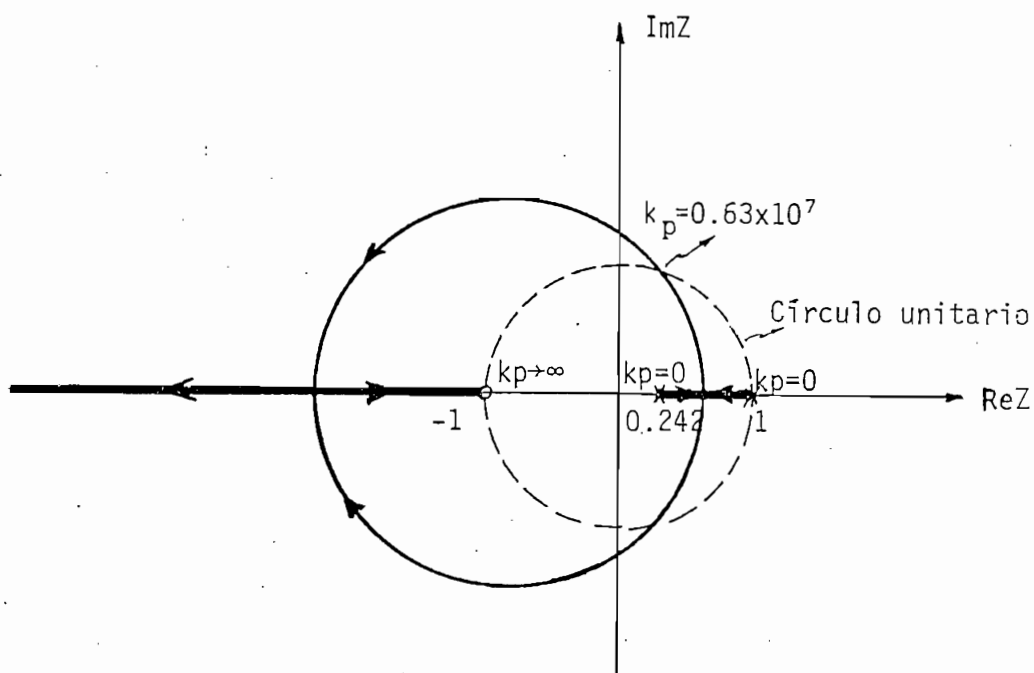


Fig. 2.3.11. L.G.R. para el sistema de control digital de la Fig. 2.3.10

Ejemplo 2.-

A continuación se procede a determinar el L.G.R. para un sistema cuya función de lazo abierto viene dada por:

$$GH(Z) = \frac{0.13 K(z + 1.31)(z + 0.054)}{z(z - 1)(z - 0.368)} \quad (2.3.92)$$

Por tanto se tiene:

POLOS DE LAZO ABIERTO : $P_1 = 1$

$$P_2 = 0.368$$

$$P_3 = 0$$

CEROS DE LAZO ABIERTO : $Z_1 = - 1.31$

$$Z_2 = - 0.054$$

Debido a la cercanía entre el polo P_3 y el cero Z_2 , puede considerarse que se cancelan mutuamente, además, no influyen para nada en la estabilidad del sistema. Por tanto, solo se considera que se tienen dos polos (P_1 y P_2) y un cero (Z_1) de lazo abierto.

A continuación se desarrollan cada una de las reglas para la construcción del L.G.R.:

1) Puntos de origen del L.G.R.

El L.G.R. parte desde los puntos: $P_1 = 1$

$$P_2 = 0.368$$

2) Puntos donde termina el L.G.R.

El L.G.R. (1 ramal) termina en el punto: $Z_1 = - 1.31$

3) Número de ramas.

Se tiene 2 ramas, ya que:

$$N = P = 2$$

4) El L.G.R. es totalmente simétrico respecto al eje real.

5) Asíntotas.

Este caso es similar al anterior ejemplo, por lo que repetir el análisis no es conveniente.

6) Intersección de las asíntotas.

No es necesario determinar dicho punto de intersección ya que las asíntotas coinciden con el eje real.

7) L.G.R. sobre el eje real.

El L.G.R. está sobre el eje real entre los polos P_1 y P_2 y a la izquierda del cero Z_1 .

8) Angulos de partida y de llegada del L.G.R.

Este análisis es similar al ejemplo anterior.

9) Puntos de separación del L.G.R. en el eje real.

La ecuación característica del sistema, suponiendo la cancelación de P_3 y Z_2 es:

$$1 + K \frac{0.13 (z + 1.31)}{(z - 1)(z - 0.368)} = 0$$

de donde:

$$K = - \frac{z^2 - 1.368 z}{0.13}$$

Para encontrar los puntos de separación debe resolverse la ecuación:

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

$$\text{Esto es: } \frac{dK}{dz} = - \frac{1}{0.13} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 - 1.368 z + 0.368}{z + 1.31} \right) = 0$$

de donde se obtiene:

$$z^2 + 2.62 z - 2.1601 = 0$$

Por tanto los puntos de separación son:

$$z_a = 0.6588$$

$$z_b = - 3.2788$$

10) Intersección del L.G.R. con la circunferencia unitaria.

La ecuación característica es:

$$z^2 + (0.13 K - 1.368)z + 0.368 + 0.1703 K$$

El valor de ganancia crítica va a obtenerse en este caso mediante el criterio de Jury, que establece las siguientes condiciones para la estabilidad de un sistema:

$$F(1) > 0$$

$$F(-1) \begin{cases} > 0 \text{ n par} \\ < 0 \text{ n impar} \end{cases}$$

$$|a_0| < a_n$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|$$

etc.

Para un sistema de segundo orden, $n = 2$, se debe cumplir que:

$$F(1) > 0$$

$$F(-1) > 0$$

$$|a_0| < a_n$$

Para este ejemplo:

$$F(1) = 1 + 0.13 K - 1.368 + 0.368 + 0.1703 K > 0$$

$$F(1) = 0.3003 K > 0$$

de donde se obtiene que $K > 0$

$$F(-1) = 1 - 0.13 K + 1.368 + 0.368 + 0.1703 K > 0$$

$$F(-1) = 2.7360 + 0.0403 K > 0$$

lo cual se cumple para cualquier valor de $K > 0$.

Debe además cumplirse que:

$$|a_0| < a_n$$

$$\text{esto es: } 0.368 + 0.1703 K < 1$$

$$0.1703 K < 0.6320$$

$$K < 3.7$$

Por tanto, el valor de ganancia crítica es:

$$K_{\text{crítica}} = 3.7$$

En la Fig. 2.3.12. se presenta el L.G.R. correspondiente al sistema de control en estudio.

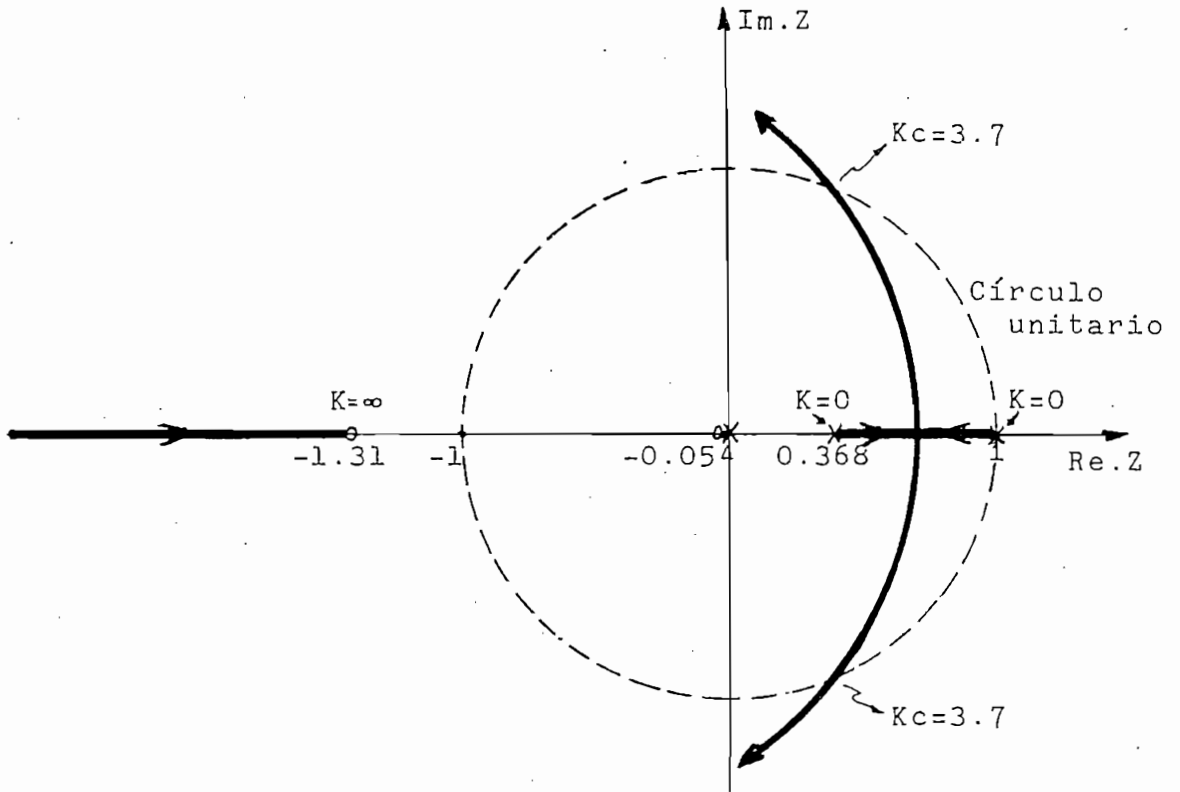


FIGURA 2.3.12

DIAGRAMA DEL LUGAR DE LAS RAICES
 PARA LA F.T. DESCRITA POR (2.3.92)

C A P I T U L O I I I

CONSTRUCCION Y DESCRIPCION DEL PROGRAMAIntroducción:

En vista de las características propias del equipo utilizado en la elaboración de los programas, esto es su reducida memoria RAM, se hizo necesario la segmentación de los programas, haciéndose uso de técnicas de programación modular y de aprovechamiento de memoria. Sin embargo de esto, la carga de los diferentes programas auxiliares al programa Maestro se hace automáticamente a medida que son necesarios, mediante instrucciones APPEND, que permiten añadir líneas de programa a la memoria del computador desde el disco respectivo, sin que los datos residentes en memoria se pierdan o se alteren; de esta forma, el usuario no necesita realizar ninguna instrucción de traída una vez que el programa Maestro radica en memoria.

3.1. DESCRIPCION GENERAL DEL SISTEMA

La unidad utilizada en la elaboración de los programas es la Microcomputadora TEKTRONIX 4051, cuya disponibilidad de memoria RAM para programas y datos es de 30530 bytes y su sistema operativo se encuentra en memorias ROM.

El lenguaje utilizado por esta microcomputadora es el Beginners All Purpose Code, comunmente conocido como BASIC, aplicado a dicho sistema. Utiliza dos tipos de variables: numéricas (A0,, Z9) y lite

rales (A\$,....., Z\$).

El computador en si mismo, internamente, consta básicamente de memoria ROM, memoria RAM y la Unidad Central de Proceso (CPU); además la memoria del computador es volátil.

Para la comunicación con el mundo exterior se dispone de diferentes equipos periféricos de entrada/salida, cada uno de los cuales tiene su dirección respectiva, y son:

- Pantalla de almacenamiento permanente, cuyo número de dirección es 32, pudiendo en ella escribirse 35 renglones de 72 columnas.
- Teclado, cuya dirección es 31.
- Grafizador 4662 o plotter, de muy alta resolución, con área útil de 10 x 15 pulgadas, su dirección es 1.
- Cinta, que hace uso de cassettes de 300 Kbytes, cuya dirección es 33.
- Unidad de discos 4907 que consta de tres drives, cada uno de los cuales maneja un disco de 630 Kbytes.
- Impresor 4641, cuya dirección es 51 y puede imprimir 180 caracteres por segundo, aceptando papel de hasta 132 columnas.

Cabe recalcar que la cinta y la unidad de discos son dispositivos auxi

liares en el almacenamiento de información y permiten de esta manera un gran incremento y una optimización en cuanto al uso de memoria ya que es factible el intercambiar información entre la unidad de discos, cinta y memoria del computador.

En la margen superior derecha del teclado se tiene 20 teclas definibles que al ser presionadas provocan una transferencia inmediata de la ejecución del programa a instrucciones numeradas con múltiplos de 4 en caso de existir dichas instrucciones.

A la derecha de la pantalla existe señales luminosas para indicar el estado de operación del computador, como son:

POWER : El equipo está encendido.

BUSY : La unidad está ejecutando un programa.

BREAK : Se suspende la ejecución del programa.

I/O : La unidad está esperando o entregando un dato.

3.2. DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Todo el programa consta del Programa Maestro o Principal y de 7 programas auxiliares o subprogramas, que a partir de los datos generales como son grado y coeficientes del numerador y denominador de la función de lazo abierto del sistema, dan como resultado el gráfico - del Lugar Geométrico de las Raíces y un análisis general del mismo, que incluye la evaluación de la ganancia de un punto del L.G.R., de terminación de la ganancia crítica, determinación de los puntos del L.G.R. dado el valor de ganancia, análisis de estabilidad absoluta,

gráficos de respuesta en el tiempo y en la frecuencia. Vale anotar además que se dispone de un archivo que permite graficar el círculo unitario una vez graficado el L.G.R. en el plano Z. Dicho círculo unitario nos indica la zona de estabilidad de los sistemas discretos, y es de gran utilidad en cuanto al análisis de la estabilidad del sistema.

Considerando que el Lugar Geométrico de las Raíces es totalmente si métrico respecto al eje real, el programa calcula solamente el grá fico en la parte superior del plano Z, procediéndose luego a grafi car su imagen en la parte inferior del mismo.

Los coeficientes del numerador y denominador de la función de lazo abierto del sistema pueden introducirse de diferentes formas, como factores (raíces) y como coeficientes, en este último caso se tiene además la opción de ingresar los coeficientes como función del período de muestreo.

Si se desea, el programa entrega el listado de las variables utiliza das en la elaboración del L.G.R. y que no deben ser alteradas para que no se originen errores.

Una vez elaborado el L.G.R. respectivo, se tiene una segunda parte del programa total, que es un análisis general del mismo, teniendo-se las siguientes opciones:

- Determinación del valor de ganancia dado un punto del L.G.R., dicho punto puede ingresarse por teclado o a través del plotter, debien-

do previamente colocarse la mirilla del plotter sobre el punto correspondiente que se desea evaluar su ganancia.

- Obtención del valor de ganancia crítica, esto es se evalúa el valor de ganancia de los puntos de corte de los ramales del L.G.R. con la circunferencia unitaria, entregándose además las coordenadas de dichos puntos.
- Dado el valor de ganancia pueden determinarse los puntos del L.G.R. que tienen dicho valor de ganancia.
- Se tiene la opción de cambiar los límites del plano de datos sobre el que se grafica el L.G.R. respectivo, para permitir mayor información sobre determinado sector de interés del gráfico.
- Dado el valor de ganancia K se puede analizar la estabilidad absoluta del sistema, esto es, determinar si es o no estable, o si se encuentra en el límite de estabilidad. Dicho análisis se basa en el criterio tabular de Raible.
- Se tiene también la opción de graficar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo para determinado valor de ganancia, pudiendo escogerse que dicha respuesta sea a entrada paso o a entrada impulso.
- Igualmente se tiene la posibilidad de obtener la respuesta de frecuencia del sistema en función del diagrama de Magnitud y del diagrama de fase mediante la transformación $Z = e^{j\omega T}$.

- Por demás está señalar que adicionalmente todos los datos entregados por los programas pueden listarse en la impresora, así como los diferentes gráficos y datos generales del L.G.R.

Finalmente cabe aclarar que cuando se introduce la información en forma defectuosa o se genera algún error dentro del programa en ejecución, inmediatamente sale el mensaje de error correspondiente, muchos de los cuales están explicados como ser corregidos en el Apéndice A, en el manual de errores, para hacer posible que el programa siga ejecutándose.

3.2.1. Diagrama de Bloques

En la Fig. 3.2.1. se presenta en forma esquemática y sintetizada el diagrama de bloques del programa implementado.

El programa fue construido utilizando técnicas de programación modular y de aprovechamiento de memoria, y consta de un programa principal y siete programas auxiliares, los cuales son cargados a memoria del computador desde diskette a medida que son necesarios.

Básicamente el programa total, como se observa en la Fig. 3.2.1. en que se indica el diagrama de bloques, se divide en dos grandes procesos que son:

- a) Construcción del L.G.R.
- b) Análisis General del L.G.R.

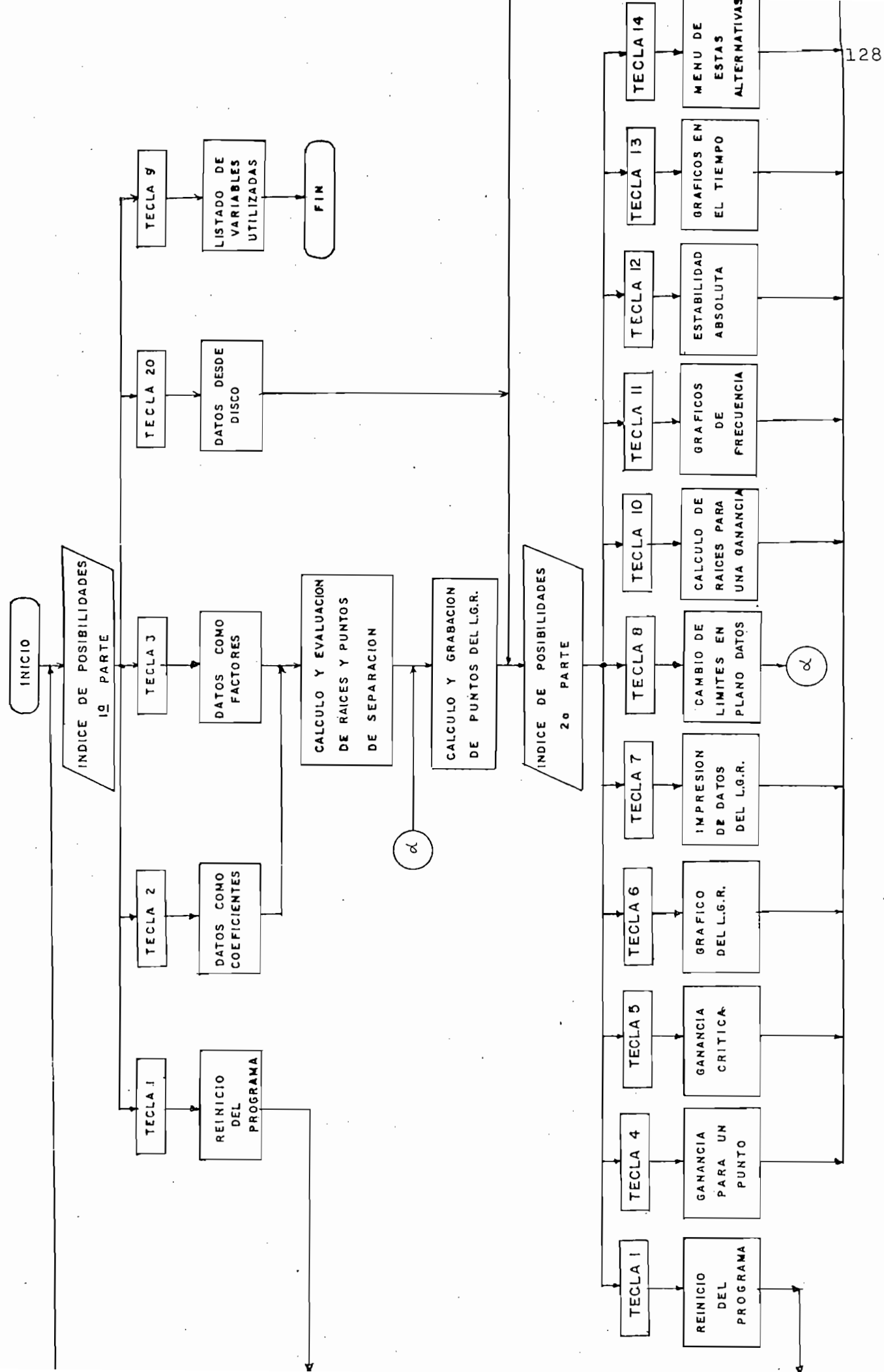


Fig. 3.2.1. DIAGRAMA DE BLOQUES

En cuanto a la construcción del L.G.R. y puesto que la función de lazo abierto del sistema, $A(z)$, puede ser descrita como una relación de polinomios racionales o como una relación de factores (ec. 2.3.9. y 2.3.14 respectivamente), el programa acepta que los datos de dicha función de transferencia puedan ser ingresados como factores o como coeficientes, pudiendo ser estos últimos función del período de muestreo. Previo al ingreso de los coeficientes que forman el numerador y el denominador se analizan los grados respectivos de los mismos para que no excedan a un máximo de 7 y que además el grado del numerador no sea mayor al del denominador. Con la tecla definible 2 se escoge la opción de entrada de los datos como coeficientes, en tanto que con la tecla 3 se escoge la opción de los datos como factores.

Mediante la tecla 9, se puede solicitar el listado de las variables utilizadas en la elaboración del L.G.R. respectivo.

Otra opción de la primera parte es el ingreso de datos desde el diskette, debiendo el archivo correspondiente ser del L.G.R., ya que caso contrario sale un mensaje de error.

A continuación se indica las opciones a escogerse en la primara parte, y que aparecen en la pantalla del computador:

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA SISTEMAS DISCRETOS

POSIBILIDADES:

- TECLA 1 == REINICIAR EL PROGRAMA (RUN)
- TECLA 2 == DATOS COMO COEFICIENTES
- TECLA 3 == DATOS COMO FACTORES (RAICES)
- TECLA 4 == LISTADO DE VARIABLES EN USO
- TECLA 20 == ENTRADA DE DATOS DESDE DISCO

Escoja TECLA

FIG. 3.2.2. ALTERNATIVAS DE TRABAJO INICIALES PARA EL PROGRAMA DEL L.G.R. PARA SISTEMAS DISCRETOS.

Una vez construido el L.G.R. y en lo concerniente al Análisis General del mismo, se tiene a disposición del usuario las siguientes alternativas que aparecen en pantalla y se indican a continuación:

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA SISTEMAS DISCRETOS

POSIBILIDADES:

- TECLA 1 == REINICIO DEL PROGRAMA (RUN)
- TECLA 4 == DADO UN PUNTO, OBTENER SU GANANCIA
- TECLA 5 == OBTENCION DEL VALOR DE K CRITICO
- TECLA 6 == GRAFICO DEL L.G.R.
- TECLA 7 == IMPRESION DE DATOS DEL L.G.R.
- TECLA 8 == CAMBIAR LIMITES EN PLANO DE DATOS
- TECLA 10 == DADA K, OBTENER LOS PUNTOS EN LGR
- TECLA 11 == RESPUESTA DE FRECUENCIA, GRAFICOS
- TECLA 12 == ESTABILIDAD ABSOLUTA
- TECLA 13 == RESPUESTA EN EL TIEMPO, GRAFICOS
- TECLA 14 == MENU DE ESTAS ALTERNATIVAS

Escoja TECLA

FIG. 3.2.3. ALTERNATIVAS A ESCOGERSE PARA EL ANALISIS GENERAL DEL L.G.R. PARA SISTEMAS DISCRETOS.

Debe anotarse que para este estudio del L.G.R. a más del programa Maestro general "@GVAV12/LGRZPM", el programa "@GVAV12/LGRZAG" se comporta como un segundo programa Maestro, ya que permite el mismo la carga de diferentes programas de acuerdo a las opciones escogidas, como son los programas "@GVAV12/LGRZGRF", "@GVAV12/LGRZEAT", "@GVAV12/LGRZAFR", que permiten graficar el L.G.R., analizar la estabilidad absoluta del sistema para determinado valor de ganancia, la obtención de los gráficos de la respuesta en el tiempo a entradas paso e impulso, y también la construcción de los diagramas de magnitud (en decibelios) y ángulo como función de la frecuencia.

3.2.2. Funcionamiento

A continuación se va a proceder a explicar en forma general como funciona el programa, ya que en los siguientes puntos de este capítulo se procede a dar una explicación más detallada de las funciones que cumpla cada uno de los programas. Igualmente, la forma de operar la unidad para lograr el correcto funcionamiento de los programas se indica en el Manual de Utilización del Programa, que se da en el Apéndice A.

Una vez que el programa Maestro radica en memoria, este se encarga de distribuir las tareas correspondientes a cada uno de los subprogramas que el mismo se encarga de traer desde diskette a la memoria del computador.

El programa Maestro "@GVAV12/LGRZPM" para el ingreso de datos carga el programa "@GVAV12/LGRZED", el cual permite como ya se dijo que

los datos puedan ingresarse como factores y como coeficientes, pudiendo ser estos función del período de muestreo; analiza y verifica a la vez la validez de los datos que se introducen mediante la lectura y validación de grados del numerador y denominador. Una vez que los datos han sido ingresados, se calcula las raíces de los polinomios, enviando la ejecución del programa hacia el programa Maestro que tiene incorporado una subrutina de cálculo de las raíces de un polinomio entero, propia del sistema TEKTRONIX 4051.

Seguidamente se trae desde el disco respectivo el programa "GVAV12/LGRZCE" que reemplaza en memoria al "GVAV12/LGRZED", y que permite la evaluación y clasificación de raíces repetidas y canceladas, así como clasifica los polos y ceros de la función de lazo abierto. Igualmente, establece el plano de datos; se obtiene el polinomio a partir de sus factores si los datos ingresados han sido las raíces del numerador y denominador, esto es los ceros y polos respectivamente. Se evalúan además los puntos de separación al resolver la ecuación $\frac{dK}{dZ} = 0$ e igualmente se los clasifica. Con todos estos datos se vuelve al programa Maestro para el cálculo del L.G.R. desde los puntos de separación, grabándose en archivo los puntos correspondientes. Igualmente se calculan y se graban los puntos pertenecientes al L.G.R. sobre el eje real.

Una vez concluida la grabación del L.G.R. respectivo, se carga desde la unidad de discos a memoria el programa de Análisis General del L.G.R. "GVAV12/LGRZAG".

A continuación en la Fig. 3.2.4. se indica el uso y distribución de

memoria con los programas utilizados hasta el momento; en dicho gráfico puede visualizarse perfectamente como es que cada programa que va siendo requerido reemplaza al anterior, pero siempre con el programa Maestro en memoria.

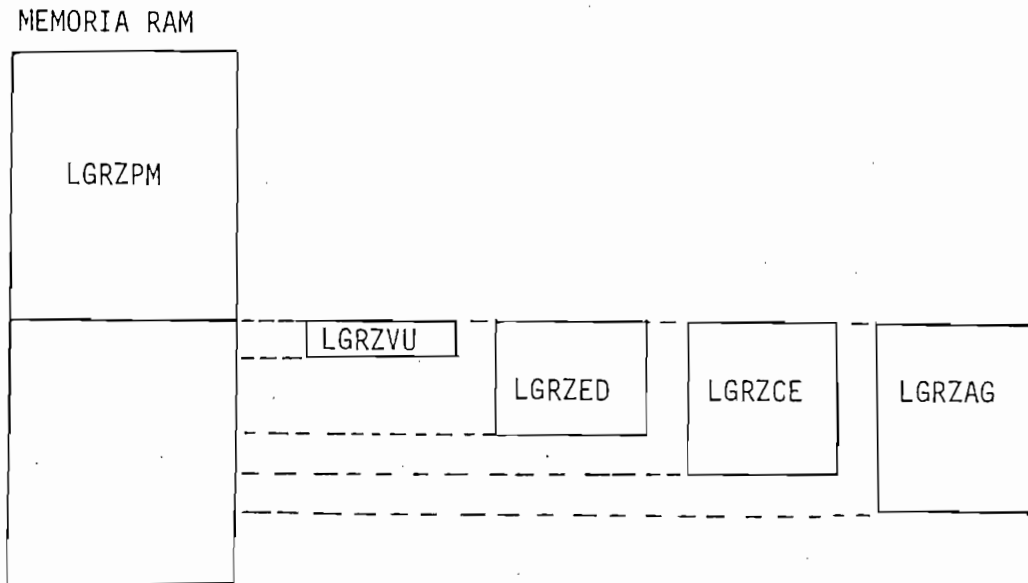


Fig. 3.2.4. Uso y distribución de memoria con los programas de la primera parte.

El programa "GVAV12/LGRZAG" permite ejecutar las opciones de la segunda parte, esto es, permite un estudio o análisis general del L.G.R. El programa en sí mismo, permite evaluar la ganancia de un punto cualquiera del L.G.R., mediante una subrutina que forma parte del programa Maestro; permite igualmente determinar la ganancia crítica y el margen de ganancia mediante el uso de la misma subrutina; consta además de una subrutina que permite la impresión de datos generales y otras como son la de apertura del archivo de puntos, de pedido de respuestas en papel, etc.

El programa "GVAV12/LGRZAG" permite la carga de tres programas auxiliares, que son: "GVAV12/LGRZGRF", que es el que permite graficar el L.G.R. construido; "GVAV12/LGRZEAT", el cual permite realizar un análisis de estabilidad absoluta del sistema para un valor de ganancia dado, así como permite graficar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo a entradas tipo paso e impulso; finalmente el programa "GVAV12/LGRZAFR" permite graficar la respuesta de frecuencia del sistema, expresada en gráficos de magnitud en decibelios y fase en grados como función de la frecuencia ω . Una vez terminada la ejecución de alguna alternativa que necesite que se cargue en memoria un programa adicional, dicho programa es sustituido por el original "GVAV12/LGRZAG".

A continuación en la Fig. 2.3.5. se indica la forma en que los programas de la segunda parte son cargados en memoria para permitir la ejecución de las diferentes opciones.

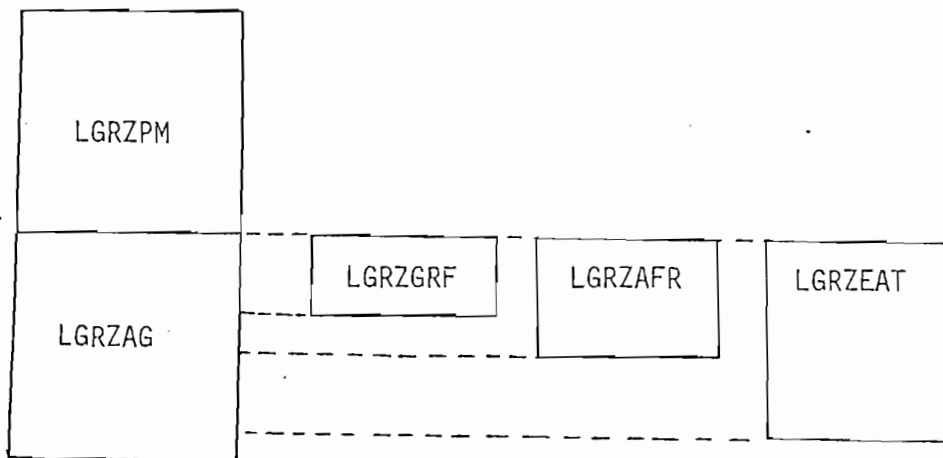


Fig. 3.2.5. Uso y distribución de memoria con los programas de la segunda parte.

3.3. EL PROGRAMA PRINCIPAL("@GVAV12/LGRZPM")

El programa principal o programa maestro indica inicialmente en pantalla las posibilidades de la primera parte para el ingreso de los datos del problema a resolverse.

Si se ha escogido el ingreso de datos como coeficientes o como factores, carga en memoria el programa "@GVAV12/LGRZED". Una vez ingresados los datos, reemplaza este último programa por el "@GVAV12/LGRZCE", que permite el cálculo y evaluación de raíces. Cuando se ha ejecutado totalmente este programa, es reemplazado en memoria por el "@GVAV12/LGRZAG" que permite un análisis general del L.G.R.

Si el ingreso de datos se desea hacer por disco, el programa maestro analiza si el archivo respectivo que desea cargarse es efectivamente de datos de algún L.G.R. previamente calculado, para permitir su lectura. Luego de haber aceptado toda la información del archivo, se carga el programa de análisis general del L.G.R. para permitir ejecutar las opciones de la segunda parte.

Si la opción escogida ha sido listar las variables utilizadas en la ejecución del L.G.R., carga en memoria el programa "@GVAV12/LGRZVU" que permite ejecutar dicha opción.

El programa principal indica en pantalla las opciones de la segunda parte, y juntamente con el programa de análisis general permite la carga de los programas auxiliares necesarios para dicho análisis.

Cuando se ha obtenido el L.G.R. de un caso particular, los datos y puntos calculados son grabados en disco, solicitándose previamente la unidad en que está el disco y el nombre del archivo de resultados. En dicho archivo se almacenan los puntos del L.G.R. en tanto que los datos generales como son coeficientes del numerador y denominador de la función de lazo abierto, los polos y ceros de la misma, puntos de separación, escalas, etc, los almacena en un archivo que crea paralelamente al inicial, con prefijo "RL/". El archivo de puntos del L.G.R. es de acceso secuencial, en tanto que el de datos generales es de acceso directo.

Dentro del programa maestro está la rutina que permite calcular el L.G.R. desde los puntos de separación del eje real, grabándolos en el archivo respectivo, luego de comprobar que son puntos del L.G.R. mediante la subrutina de evaluación correspondiente. Igualmente, esta rutina permite el cálculo del lugar de las raíces desde polos o ceros complejos.

Consta además de una subrutina que permite la evaluación del valor de ganancia para cualquier punto perteneciente al L.G.R. y calcula también la diferencia en suma de argumentos para cumplir con la ecuación de fase, ya que como se sabe, para que un punto sea del L.G.R. debe cumplir con esta ecuación, esto es con $\pm 180^\circ (2q + 1)$; para lograr esto, la diferencia de argumentos debe ser baja, y el punto puede considerarse como perteneciente al L.G.R.. En el cálculo del L.G.R. se los acepta con diferencias menores a 1° .

Otra subrutina incorporada al programa maestro es la del cambio de

límites del plano de datos sobre el que se grafica el L.G.R., lo cual permite una ampliación de algún sector de mayor interés. Debe anotarse que puede cambiarse cualquiera de los ejes, pero solo uno a la vez; además el eje imaginario es siempre simétrico. Una vez que se da la instrucción de cambio de límites, se procede a recalcular los puntos del L.G.R. y grabarlos en archivo, el cual puede ser el mismo o diferente al inicial. Luego de terminado todo el proceso se carga en memoria el programa de análisis general.

Permite también la lectura de los puntos del eje real que pertenecen al L.G.R., que son calculados en el programa "GVAV12/LGRZCE", para grabarlos en el archivo de puntos correspondiente.

Finalmente, el programa maestro consta de una subrutina propia del sistema TEKTRONIX, que permite la evaluación de las raíces de un polinomio entero.

3.4. SUBRUTINAS

En este punto se va a proceder a describir cada uno de los programas auxiliares de la primera parte, esto es los programas de entrada de datos, cálculo y evaluación de raíces, análisis general del L.G.R. y listado de variables utilizadas.

3.4.1. Entrada de datos ("GVAV12/LGRZED")

El programa auxiliar de entrada de datos permite ingresar el grado del numerador y denominador de la función de transferencia de lazo

abierto del sistema. analizando que el grado del numerador no sea mayor al del denominador, y que este último no exceda a 7. Previamente se solicita ingresar el número de ϵ adecuado para los cálculos, y debe escogerse en función de los datos que van a ser ingresados.

Si los datos son ingresados como coeficientes, se tiene además la opción de que sean función del período de muestreo, en cuyo caso el polinomio respectivo debe cumplir con la forma que se indica en pantalla, debiendo previamente ingresarse el período de muestreo. Si el ingreso de coeficientes se da en la forma normal, esto es numérica, en pantalla aparece la información respectiva.

Los datos también pueden ingresarse como factores (raíces), solicitándose el valor real y el imaginario tanto de ceros como de polos. Si se ingresa una raíz compleja, se genera su conjugada.

El programa verifica también que el valor de ganancia estática total cumpla con ser menor a 10000 y mayor a cero.

3.4.2. Cálculo y evaluación de raíces y puntos de separación

("@GVAV12/LGRZCE")

Primeramente, si la función de transferencia de lazo abierto ingresada tiene un solo polo, esto es se tiene el L.G.R. de una sola raíz, este mismo programa permite graficar dicho lugar de las raíces, solo en pantalla; y además da la información sobre el valor de ganancia crítica, así como el punto de corte del L.G.R. con la

circunferencia unitaria, en caso de existir dicho cruce, caso contrario entrega la información respectiva.

Este subprograma permite también el ordenamiento de polos y ceros en orden descendente de valores, evaluando además si estos son repetidos ó si se cancelan entre ellos. Cosa similar ocurre con los puntos de separación del L.G.R. desde el eje real, analiza su validez y determina su multiplicidad, lo que permite conocer los ángulos con que el L.G.R. abandona el eje real desde dichos puntos, que son obtenidos por este mismo programa al resolver la ecuación $\frac{dK}{dZ}=0$

El programa no procesa casos que originen cinco o más polos o ceros múltiples, puesto que son casos poco comunes y pueden además provocar errores en el discernimiento de los puntos que pertenecen al lugar de las raíces.

Este programa tiene además una subrutina que permite la obtención de un polinomio desde sus factores; finalmente también determina el plano de datos sobre el que se va a graficar el L.G.R.

3.4.3. Listado de variables en uso ("GVAV12/LGRZVU")

Este programa permite listar las variables utilizadas en el cálculo del L.G.R. tanto en pantalla como en papel. A continuación se presenta en la Fig. 3.4.1. un listado de las principales variables involucradas en el cálculo del lugar de las raíces.

VARIABLES EN USO

ARREGLOS :

F -- N1+D1 raices del sistema (polos y ceros)
 Nivel 1 Parte real
 Nivel 2 Parte imaginaria
 Nivel 3 Indicativo de polo o cero
 Nivel 4 Numero de veces
 Nivel 5 Validez (0=no, 1=si, 2=cancelado)

S -- N puntos de separacion en eje real
 Nivel 1 Parte real
 Nivel 2 Parte imaginaria
 Nivel 3 Numero de veces
 Nivel 4 Validez

C0 -- Coeficientes del numerador(zeros) en orden descendente de potencias.
 C1 -- Coeficientes del denominador (polos)
 C2 -- coeficientes de la ecuacion de los puntos de separacion.
 C3 -- Coeficientes de la derivada del numerador
 C4 -- Coeficientes de derivada del denominador
 T -- Valores transitorios de trabajo
 X -- Puntos en eje real o ptos. por curva

INTERRUPTORES :

S0 -- De entrada de datos, calculo y final.
 S1 -- Para clasificaciones y LGR desde complejas
 S2 -- De existir polos o zeros complejos
 S3 -- De existir LGR solo en eje real
 B4 -- De tipo de entrada y sto triple de sep.

INDICES : I, I1, I2
 VARIABLES NUMERICAS (primer caracter) : A, E, K, T, X, Y
 L, H, G, Q, J
 B, M, Z, W, D

VARIABLES ALFANUMERICAS : F\$, L\$, Q\$, R\$, T\$, X\$
 Y\$, Z\$, E\$, C\$, D\$

=====

Fig. 3.4.1. Variables utilizadas en el cálculo y análisis del Lugar de las Raíces para Sistemas Discretos.

3.4.4. Análisis general del L.G.R. ("GVAV12/LGRZAG")

Este programa juntamente con el programa maestro y con los programas auxiliares de graficación del L.G.R., análisis de estabilidad

absoluta, respuesta en el tiempo y análisis de frecuencia permite un estudio completo del L.G.R.

El programa en si tiene primeramente las instrucciones necesarias que permiten la carga de los subprogramas que complementan el análisis general y estudio del lugar de las raíces.

Las subrutinas de este subprograma son:

- EVALUACION DE UN PUNTO: Esta subrutina permite conocer el valor de ganancia de un punto del L.G.R.. Dicho punto puede ser ingresado por teclado o por el plotter. A más de entregar el valor de ganancia del punto, entrega la diferencia en suma de argumentos - del mismo, expresado en grados. Dicha diferencia debe tender a cero grados para que el punto pertenezca al L.G.R.. En la construcción del lugar de las raíces se considera que el punto pertenece al mismo si dicha diferencia es menor a 1° .
- OBTENCION DEL VALOR DE GANANCIA CRITICA: Esta subrutina se analiza en el numeral 3.4.5.
- IMPRESION DE DATOS GENERALES: La impresión de los datos puede realizarse en papel o indicarse en la pantalla. Los datos que se imprimen entre otros son los siguientes:
 - Ganancia estática.
 - Grado del numerador y del denominador.
 - Coeficientes del numerador y denominador.

- Polos y ceros de lazo abierto.
- Puntos de separación, etc.

Todo esto se complementa con la impresión del archivo de resultados, fecha de realización del L.G.R. y títulos generales.

- OBTENCION DE LOS PUNTOS DEL L.G.R. DADO EL VALOR DE GANANCIA: Dado el valor de ganancia, si se desea encontrar los puntos del L.G.R. que tienen esta ganancia, debe resolverse la ecuación característica del sistema, esto es:

$$1 + K \frac{N(Z)}{D(Z)} = 0 \quad (3.4.1)$$

o lo que es lo mismo:

$$D(Z) + K.N(Z) = 0 \quad (3.4.2)$$

Las raíces de esta ecuación se obtienen mediante la subrutina de evaluación de polinomios correspondiente, que radica en el programa maestro.

- SUBRUTINAS GENERALES: Como subrutinas generales de este programa se tiene la apertura del archivo de puntos del L.G.R., lo cual es útil para graficar el mismo, así como para evaluar la ganancia crítica. Otra subrutina es la de pedido de respuestas en papel, en cuyo caso previamente se procede a la impresión de cabezas y títulos respectivos.

- GRAFICO DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES ("GVAV12/LGRZGRF") :
Para hacer posible la realización del gráfico, el programa de análisis general carga en memoria el programa correspondiente, que permite obtener dicho gráfico en pantalla o en el plotter. Las escalas para el gráfico, así como el plano de datos se generan automáticamente. Si la escala automática calculada no es satisfactoria, se puede alterarla cambiando el valor de la variable E8, sin que afecte este cambio a los resultados.

Primeramente se enmarca el gráfico y se dibuja el plano inferior para luego graficar el plano superior. Seguidamente se ponen las marcas "X" para polos y " " para ceros, a continuación se grafica el círculo unitario, que es la zona de estabilidad de los sistemas discretos. Dicho círculo se grafica a partir de un archivo secuencial creado para tal efecto y que es el "GVAV12/CIRC". Luego de esto se imprime en la parte superior del gráfico el título y la fecha de realización. En la parte inferior se imprime la escala respectiva y el nombre del archivo correspondiente.

Finalmente, el programa averigua si desea repetir el gráfico y pregunta también si desea que quede almacenado el L.G.R.; en caso de querer que no se guarde dicho lugar de las raíces, se destruyen los archivos correspondientes.

3.4.5. Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces. Explicación

Para que un punto sea del L.G.R. debe cumplir con las ecuaciones de fase y de magnitud. A partir de la Fig. 3.4.2. se establecen estas condiciones con la ayuda de la Geometría Analítica. En dicha figu

ra, Z_i y P_j simbolizan los ceros y polos de un sistema, en tanto que Z_1 es un punto cualesquiera del plano Z .

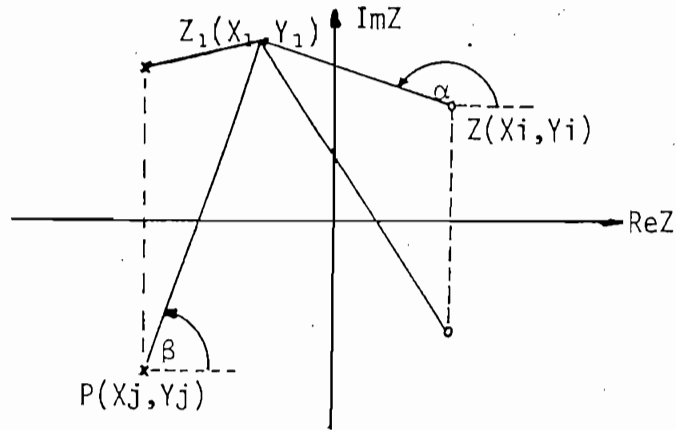


Fig. 3.4.2. Evaluación en un punto en el plano Z .

La pendiente de la recta $Z_i Z_1$ es:

$$m_1 = \frac{Y_1 - Y_i}{X_1 - X_i} \quad (3.4.3)$$

pero:

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.4.4)$$

por tanto:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y_1 - Y_i}{X_1 - X_i} \quad (3.4.5)$$

Igualmente se tendrá que:

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y_1 - Y_j}{X_1 - X_j} \quad (2.3.6)$$

como:

$$\alpha = \left| \frac{Z_1 + Z_i}{Z_1 + P_j} \right| \quad \text{y} \quad \beta = \left| \frac{Z_1 + P_j}{Z_1 + Z_i} \right| \quad (3.4.7)$$

entonces:

$$\boxed{Z_1 + Z_i} = \text{arc tg } \frac{Y_1 - Y_i}{X_1 - X_i} \quad \text{y} \quad \boxed{Z_1 + P_j} = \text{arc tg } \frac{Y_1 - Y_j}{X_1 - X_j} \quad (3.4.8)$$

Por tanto, la ecuación de fase quedaría:

$$\sum_{i=1}^{N1} \text{arc tg } \frac{Y_1 - Y_i}{X_1 - X_i} - \sum_{j=1}^{D1} \text{arc tg } \frac{Y_1 - Y_j}{X_1 - X_j} = (2q + 1)180^\circ \quad (3.4.9)$$

además:

$$|Z_1 + Z_i| = \sqrt{(X_1 - X_i)^2 + (Y_1 - Y_i)^2} \quad (3.4.10)$$

$$\text{y} \quad |Z_1 + P_j| = \sqrt{(X_1 - X_j)^2 + (Y_1 - Y_j)^2} \quad (3.4.11)$$

Por tanto, la ecuación de magnitud quedaría:

$$K \prod_{i=1}^{N1} \sqrt{(X_1 - X_i)^2 + (Y_1 - Y_i)^2} \prod_{j=1}^{D1} \sqrt{(X_1 - X_j)^2 + (Y_1 - Y_j)^2} = 1 \quad (3.4.12)$$

El programa de construcción del L.G.R. verifica que se cumpla la ec. (3.4.9) con un error menor a 1° y luego calcula la ganancia K para este punto con la ec. (3.4.12). Para esto se toma en cuenta que el nivel 4 de la matriz F indica la multiplicidad y el nivel 3 indica con un 0 si es cero y con un 1 si es polo. Por tanto se puede hacer:

$$T\emptyset = F(4,n) \cdot (-1)^{F(3,n)} \quad (3.4.13)$$

además, si:

$$T1 = X1 - Xn \quad (3.4.14)$$

$$T2 = Y1 - Yn \quad (3.4.15)$$

Entonces la ec. (3.4.9) puede expresarse como:

$$A2 = \sum_{n=1}^{N1+D1} T\emptyset \cdot \text{ATN}(T2/T1) \quad (3.4.16)$$

donde se busca que A2 sea muy cercano a $\pm 180^\circ$; con lo que puede obtenerse la ganancia K, que a partir de la ec. (3.4.12) puede expresarse como:

$$K = \sum_{n=1}^{N1+D1} (T1^2 + T2^2)^{-T\emptyset/2} \quad (3.4.17)$$

La búsqueda de los puntos del L.G.R. se realiza a partir de los puntos de separación válidos sobre el eje real o desde raíces complejas. Los puntos del L.G.R. se encuentran buscando de 5 posibles en abanico (a,b,c,d y e), dos a cada lado de c, que es el punto que sigue la trayectoria del punto inmediatamente anterior. Esto se observa en la Fig. 3.4.3.

Al ángulo A1 entre estos puntos es constante el momento de ejecución; el radio E2 aumenta o disminuye dinámicamente con la tendencia del cumplimiento de la ec. (3.4.9) para el punto más aproximado (el valor promedio de E2 es 1/140 de la longitud del eje real). El número de puntos rastreados y la abertura entre ellos es susceptible de

alterarse fácilmente en el programa.

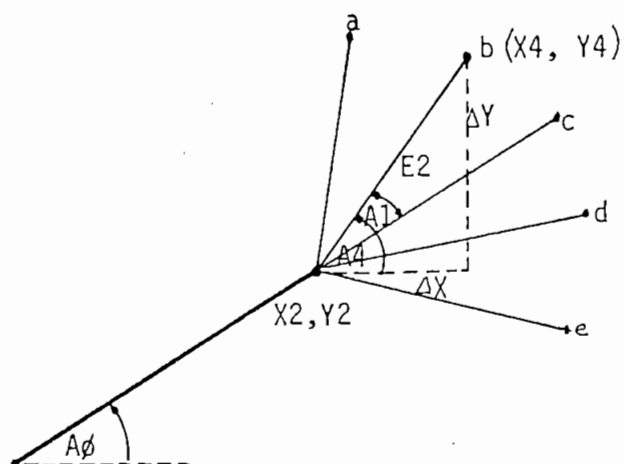


Fig. 3.4.3. Evaluación de cinco posibles puntos del L.G.R. en abanico con separación A_1 grados.

De la figura anterior, tenemos:

$$A_4 = A_0 + A_1 \quad (3.4.18)$$

$$X_4 = X_2 + \Delta X \quad (3.4.19)$$

$$Y_4 = Y_2 + \Delta Y \quad (3.4.20)$$

Pero:

$$\Delta X = E_2 \cdot \cos A_4 \quad (3.4.21)$$

$$\Delta Y = E_2 \cdot \sen A_4 \quad (3.4.22)$$

Por tanto:

$$X_4 = X_2 + E_2 \cdot \cos A_4 \quad (3.4.23)$$

$$Y_4 = Y_2 + E_2 \cdot \sen A_4 \quad (3.4.24)$$

Cuando se obtiene un posible punto del L.G.R. se analiza si es o no necesario alterar E2 para obtener un mejor resultado. Una vez definido un punto como del L.G.R., se graba en archivo y el ángulo A_4 se transforma en el nuevo A_0 ; los valores X_4 , Y_4 serán los nuevos X_2 , Y_2 . Este proceso se repite hasta rebasar los límites del plano de datos, llegar a una raíz compleja o a otro punto de separación.

El número de puntos por cada ramal independientemente se almacena en el arreglo X para facilitar posteriormente la lectura y graficación de los puntos del L.G.R.

3.5. CALCULO DE LA GANANCIA CRITICA

Esta es una subrutina incorporada en el programa de análisis general del L.G.R. Permite obtener los valores de ganancia de los puntos de corte de los diferentes ramales con la circunferencia unitaria. Igualmente se entrega la diferencia en suma de argumentos de cada punto de corte, así como las coordenadas del mismo.

La determinación del punto de cruce del ramal del L.G.R. con el círculo unitario se lo hace de manera gráfica, ya que se determinan dos puntos del L.G.R. inmediatos, el uno interior y el otro exterior al círculo unitario. Una vez determinados estos puntos se encuentra el punto de corte, esto es el que tiene la ganancia crítica mediante una aproximación geométrica, que consiste en tomar el punto medio de la recta que une estos dos puntos y se lo evalúa como punto de la circunferencia. Este proceso se repite hasta que dicho punto tenga un error menor a 0,001, lo cual es realmente des

preciable. Esto se aprecia de mejor manera en la Fig. 3.5.1.

Los puntos interior y exterior inmediatos al círculo unitario son $L1$ y $L2$; a partir de estos se obtiene el punto medio y se evalúa si cumple con el error fijado para ser el punto de ganancia crítica. Si el punto medio no cumple con el error prefijado, se toman como puntos $L1$ y $L2$ los dos puntos interior y exterior al círculo que estén más inmediatos, repitiéndose este proceso hasta determinar el punto deseado.

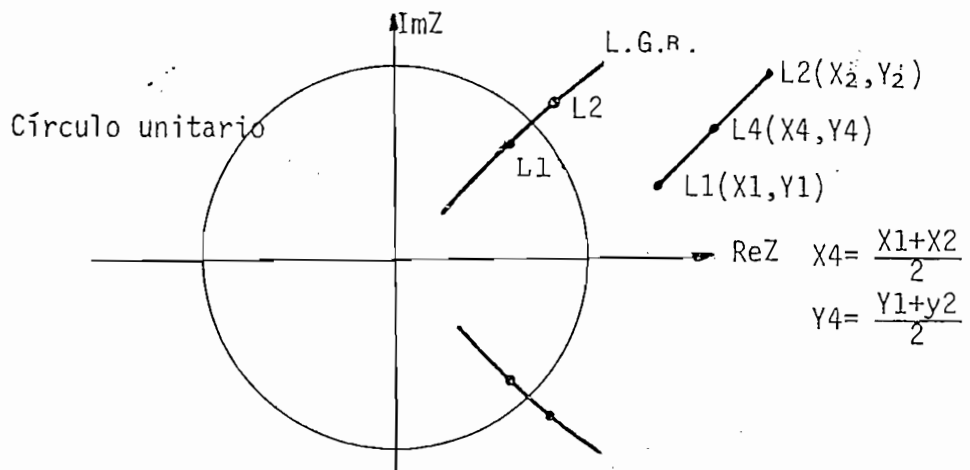


Fig. 3.5.1. Cálculo del punto de ganancia crítica (Escala Ampliada)

Una vez determinado el punto, se calcula la ganancia crítica mediante la subrutina de evaluación de ganancia de un punto, que está incorporado en el programa maestro.

El proceso se repite para todos los ramales del L.G.R. que cruzan la circunferencia unitaria, sean complejos o reales. Si ningún ramal cruza la circunferencia, se genera el mensaje correspondiente.

El valor de ganancia crítica es:

$$K_c = K_1/K_0 \quad (3.5.1)$$

donde: K_1 es la ganancia del punto

K_0 es la ganancia estática

Igualmente, se entrega el margen de ganancia, que se determina de la siguiente manera:

$$MG = K_c/K_0 \quad (3.5.2)$$

Vale anotar que estos valores se calculan para todos los puntos de cruce del L.G.R. con la circunferencia unitaria, pero deberá analizarse cada caso para conocer exactamente cual de estos valores es el correcto.

3.6. RESPUESTA EN EL TIEMPO Y ESTABILIDAD ABSOLUTA ("@GVAV12/LGRZEAT")

3.6.1. Respuesta en el tiempo

El subprograma de respuesta del sistema en el dominio del tiempo nos dá dos opciones a escoger:

- Respuesta a función PASO
- Respuesta a función IMPULSO

Para la obtención de la respuesta del sistema a una entrada determi

nada, es necesario la conformación de la función de transferencia de lazo cerrado, esto es:

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \text{F.T. lazo cerrado} \quad (3.6.1)$$

Una vez ingresado el valor de ganancia, el programa realiza la es tr ucturación de la función de transferencia de lazo cerrado, tom an do en consideración que el lazo de realimentación negativa es uni taria.

Si la entrada que se considera es la función impulso, y puesto que su transformada Z es igual a su amplitud, para obtener la respues ta del sistema se procede a realizar la división del numerador al terado por la amplitud de la función impulso para el denominador de la F.T. de lazo cerrado.

Si por el contrario la entrada considerada es la función paso, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema se multiplica por la transformada Z de la función paso, que es:

$$z \{K.u(t)\} = \frac{K.Z}{K-1} \quad (3.6.2)$$

donde: $u(t)$: función paso unitaria.

K : amplitud de la función paso.

Esto es, se tiene que la respuesta del sistema en el dominio del tiempo es:

$$r(t) = z^{-1} \left\{ \frac{C(Z)}{R(Z)} \cdot \frac{KZ}{Z-1} \right\} = z^{-1} \left\{ \frac{C_T(Z)}{R_T(Z)} \right\} \quad (3.6.3.)$$

El programa obtiene la respuesta en el tiempo mediante la división del polinomio numerador $C_T(Z)$ para el denominador $R_T(Z)$, esto es, mediante el método de expansión en series de potencia.

Se tiene la opción de listar los resultados tanto en pantalla como en la impresora, así como obtener el gráfico en pantalla o en el plotter.

3.6.2. Análisis de estabilidad absoluta

En cuanto se refiere a este programa de análisis de estabilidad ab soluta, este se encarga, una vez dado el valor de ganancia respec tivo, de conformar la ecuación característica del sistema y estu diar la ubicación de las raíces de la misma. Si todas ellas están dentro del círculo unitario, el sistema es estable; si existen raí ces sobre la circunferencia unitaria e interiores a esta, el sistema está en el límite de estabilidad y se dice que es un caso singu lar; finalmente, si existen raíces exteriores al círculo unitario, el sistema es inestable. Toda esta información nos proporciona es te programa.

Este análisis se realiza mediante el método tabular de Raible, que se explicó en el Capítulo I.

Se tiene la opción de listar los resultados en pantalla o en impre sora con los datos de ganancia y coeficientes de la ecuación carac

terística incorporados.

3.7 RESPUESTA DE FRECUENCIA ("@GVAV12/LGRZAFR")

Este programa permite obtener los gráficos de magnitud en decibelios y fase como función de la frecuencia ω , utilizando la transformación

$$Z = e^{j\omega T} \quad (3.7.1)$$

donde: T es el período de muestreo.

Debe ingresarse previamente el valor de la ganancia para el que se resuelve el programa. La información que traen estos gráficos es repetitiva o periódica. La información de la franja principal $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ se repite en las franjas complementarias, que están cada ω_s a partir de $\omega_s/2$, esto es: $(\omega_s/2, 3\omega_s/2)$, $(3\omega_s/2, 5\omega_s/2)$, etc. Es por esto que se presenta las opciones de tener el gráfico solo en la franja principal, entre 0 y la frecuencia de muestreo sobre 2 $(0, \omega_s/2)$, o puede ingresarse el valor de frecuencia superior si se desea observar la periodicidad del gráfico. La frecuencia inicial en ningún caso puede ser superior a $\omega_s/2$, cuyo valor se indica en pantalla.

Respecto a las franjas principal y complementarias, en cuanto al espectro de frecuencia, su análisis está dado en el Capítulo I.

El programa entrega los valores de frecuencia en rad/seg, magnitud

en decibelios y fase en grados, así como los valores de ganancia y los coeficientes de la función de transferencia de lazo abierto.

C A P I T U L O I V

EJEMPLOS DE UTILIZACION DEL PROGRAMA IMPLEMENTADOIntroducción

En el presente capítulo se desarrollan diferentes ejemplos que buscan:

- Probar la validez de los programas implementados, tanto en la construcción misma del Lugar de las Raíces así como en su análisis, en cuanto se refiere a la determinación de la ganancia crítica, análisis de estabilidad absoluta, respuesta en el dominio del tiempo, respuesta en el dominio de la frecuencia como sistema muestreado, etc.
- Explotar al máximo las diferentes opciones del programa.

A continuación y como primer ejemplo se presenta un análisis completo de la construcción del L.G.R. y su respectivo estudio.

EJEMPLO No. 1.

- a) Dibujar el L.G.R. del sistema de control digital de un vehículo espacial, desarrollado analíticamente en el Capítulo II a manera de complemento de las reglas que rigen la construcción del Lugar de las Raíces. Realizar la comparación respectiva. Analizar el L.G.R. obteniendo el valor de ganancia crítica, respues-

ta en el tiempo, análisis de estabilidad, respuesta de frecuencia como sistema muestreado, etc.

- b) Determinar el valor de ganancia para que la razón de amortiguamiento sea $\xi = 0.5$. Determinar igualmente la frecuencia natural no amortiguada si el período de muestreo es $T = 0.1$ segundos.

El sistema de control digital es:

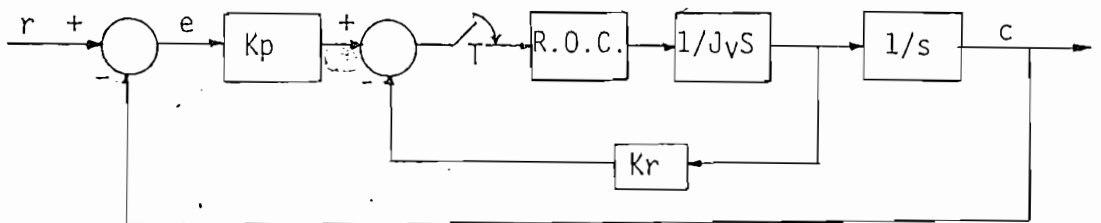


Fig. 4.1. Sistema de control digital de un vehículo espacial.

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(Z) = \frac{1.2 \times 10^{-7} K(Z + 1)}{(Z - 1)(Z - 0.242)}$$

Esto para: $T = 0.1$ seg.

$$K_r = 3.17 \times 10^5$$

$$J_v = 41822 \text{ Kg.m}^2$$

$$K_p = K$$

Para el ingreso de datos se tiene dos alternativas, como factores o como coeficientes. El ingreso se lo hace como factores, por lo que los parámetros que se toman en cuenta para el programa son:

Epsilon de trabajo = 1 (bajo)
 Grado del numerador = 1
 Grado del denominador = 2
 Ganancia del numerador K = 1.2×10^{-7}

RAICES DEL NUMERADOR (CEROS)

CERO (1) PARTE REAL = -1
 PARTE IMAG. = 0

RAICES DEL DENOMINADOR (POLOS)

POLO (1) PARTE REAL = 1
 PARTE IMAG. = 0
 POLO (2) PARTE REAL = 0.242
 PARTE IMAG. = 0

Archivo de resultados : TESIS1

Una vez procesados estos datos se construye el L.G.R. respectivo - que se indica en la Fig. 4.2. Como puede observarse, el L.G.R. construido es totalmente similar al dibujado analíticamente en el capítulo II.

b) En la Fig. 4.3. a más del L.G.R. y del círculo unitario, se tiene la curva correspondiente a una razón de amortiguamiento $\zeta = 0.5$. Teniendo este gráfico en el plotter, puede ingresarse el punto de cruce del L.G.R. y la curva de razón de amortiguamiento constante (presionando la tecla definible 4 del índice de posibilidades de análisis del L.G.R.) para evaluar su ganancia. Una vez ingresado el punto, el valor de ganancia resulta ser $2.4155 \cdot 10^{-8}$ y la diferencia es suma de argumentos es 1.002 grados. Este valor de ganancia debe dividirse para K_0^2 , obteniéndose el valor de ganancia total de $1.65 \cdot 10^6$.

La frecuencia W que corresponde a este valor de ganancia se determina a partir del ángulo θ indicado en la Fig. 4.3. que se determina a partir de las coordenadas del punto evaluado y del período de muestreo $T = 0.1$ seg.

Esto es:

$$\theta = \text{arc tg } \frac{X4}{Y4}$$

donde: $X4 = 0.527444$

$Y4 = 0.417234$

entonces: $\theta \approx 38$ grados.

$$WT = \theta = 38 \text{ grados} = 0.66 \text{ rad.}$$

por tanto: $W = 6.6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

La frecuencia natural no amortiguada viene expresada por:

$$W_n = \frac{W}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

de donde.

$$W_n = \frac{6.6 \text{ rad/seg.}}{\sqrt{1 - 0.5^2}} = 7.62 \text{ rad/seg.}$$

Debe anotarse que tanto el valor de ganancia del punto, como sus coordenadas son fácilmente obtenidas con la ayuda del programa implementado.

Los resultados se indican en las hojas siguientes.

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 07-NOV-84

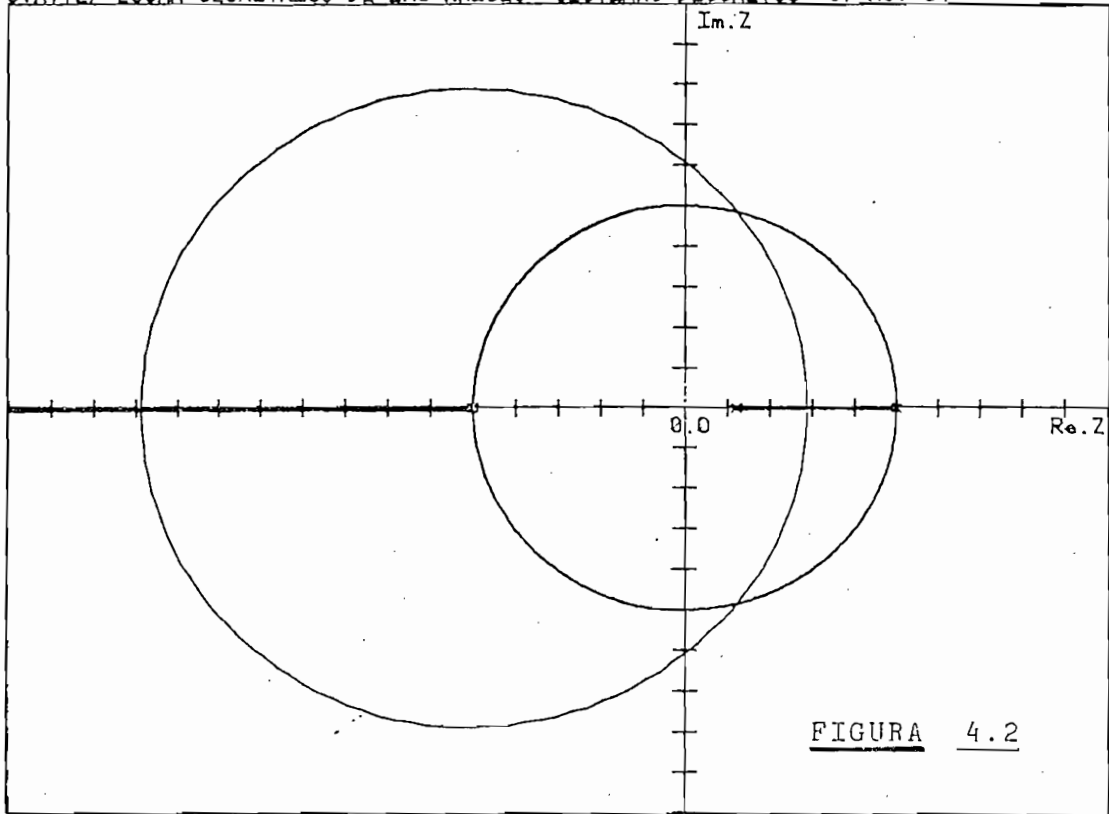


FIGURA 4.2

x=POLO o=CERO | División = 0.2 Unidades

Archivo:TESIS1

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 07-NOV-84

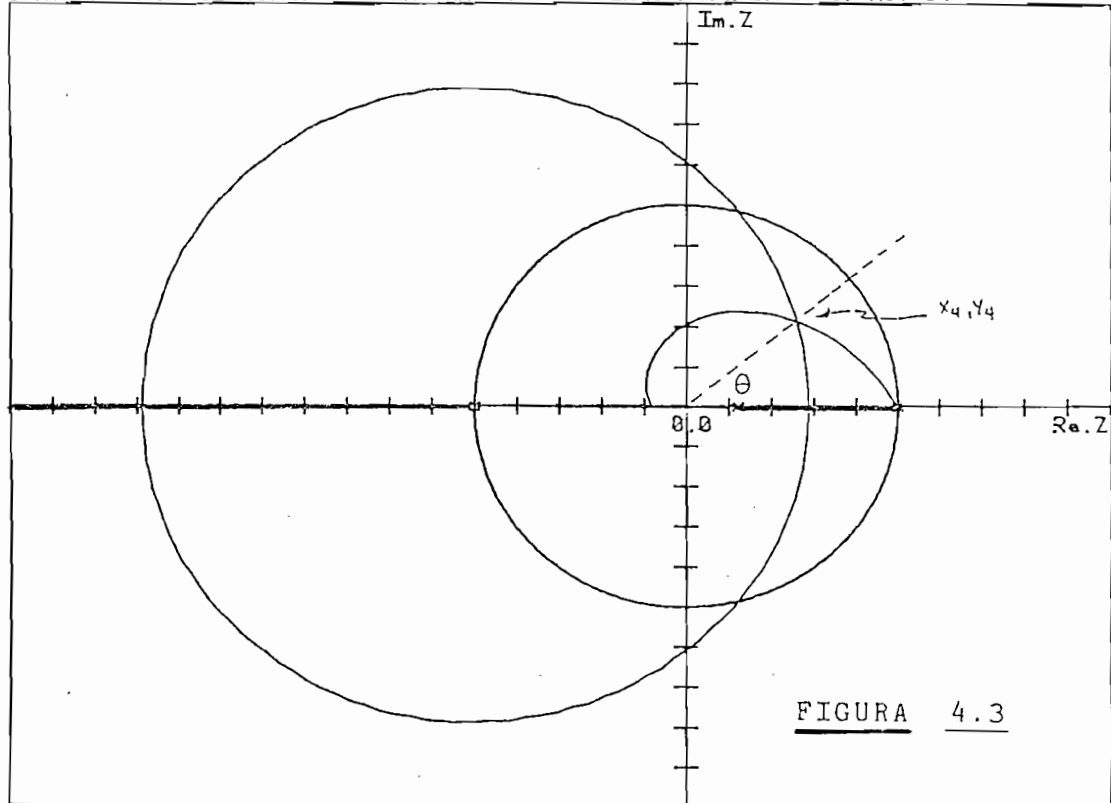


FIGURA 4.3

x=POLO o=CERO | División = 0.2 Unidades

Archivo:TESIS1

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 31-OCT-84 00:24:48

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS1

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estática 1.2E-7
 Grado del numerador 1
 Grado del denominador 2

Coefficientes del numerador :

***1 **0
 1.00 1.00

Coefficientes del denominador :

***2 ***1 **0
 1.00 -1.24 0.24

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.24	0.00	POLO	
-1.00	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.58	SI
2	-2.58	SI

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 31-OCT-84 00:25:06

LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS1

Diferencia en suma de argumentos = 0,170050 rados

Ganancia Crítica $K_c = 0,755$

Margen de Ganancia $M_G = 6294417,374$

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es: EJE REAL : 0,244775490386
 EJE IMAG.: 0,969685480104

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 07-NOV-84 13:06:21

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS

Archivo : TESIS1

ANALISIS DE ESTABILIDAD ABSOLUTA, (CRITERIO DE RAIBLE)
 =====

VALOR DE GANANCIA TOTAL = 1.2

VALOR DE GANANCIA DINAMICA = 10000000

COEFICIENTES DE LA ECUACION CARACTERISTICA

z**2	z**1	z**0
1.00	-0.04	1.44

ANALISIS DE ESTABILIDAD

EXISTEN 0 RAICES ESTABLES Y

2 RAICES INESTABLES

EL SISTEMA ES INESTABLE

ANALISIS DE ESTABILIDAD ABSOLUTA, (CRITERIO DE RAIBLE)
 =====

VALOR DE GANANCIA TOTAL = 0.6

VALOR DE GANANCIA DINAMICA = 5000000

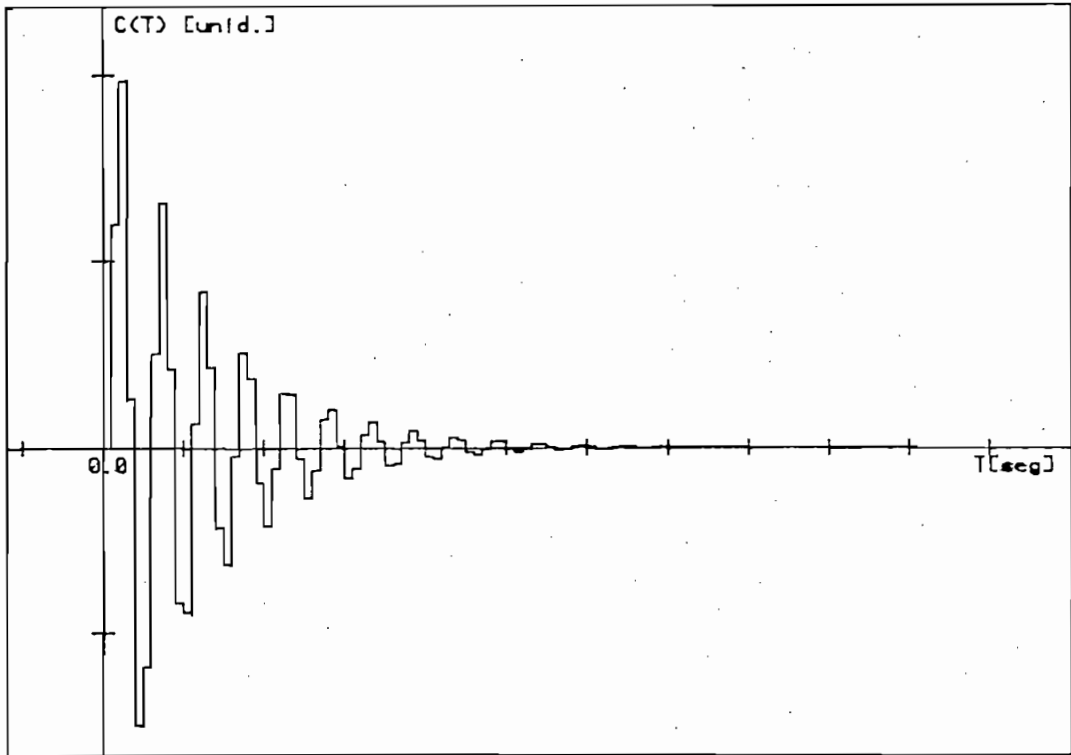
COEFICIENTES DE LA ECUACION CARACTERISTICA

z**2	z**1	z**0
1.00	-0.64	0.84

ANALISIS DE ESTABILIDAD

EL SISTEMA ES ESTABLE

RESPUESTA A ENTRADA IMPULSO

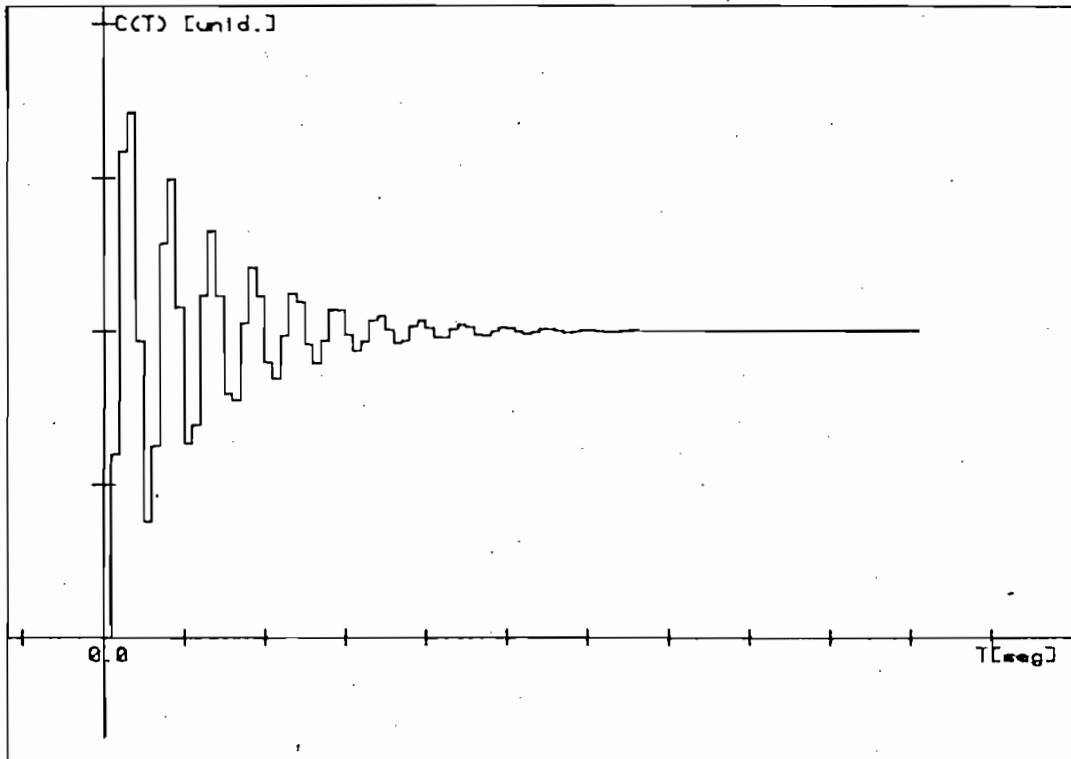


EJE X: 1Div.= 10.0

EJE Y: 1Div.= 0.50

ARCHIVO : TESIS1

RESPUESTA A ENTRADA PASO

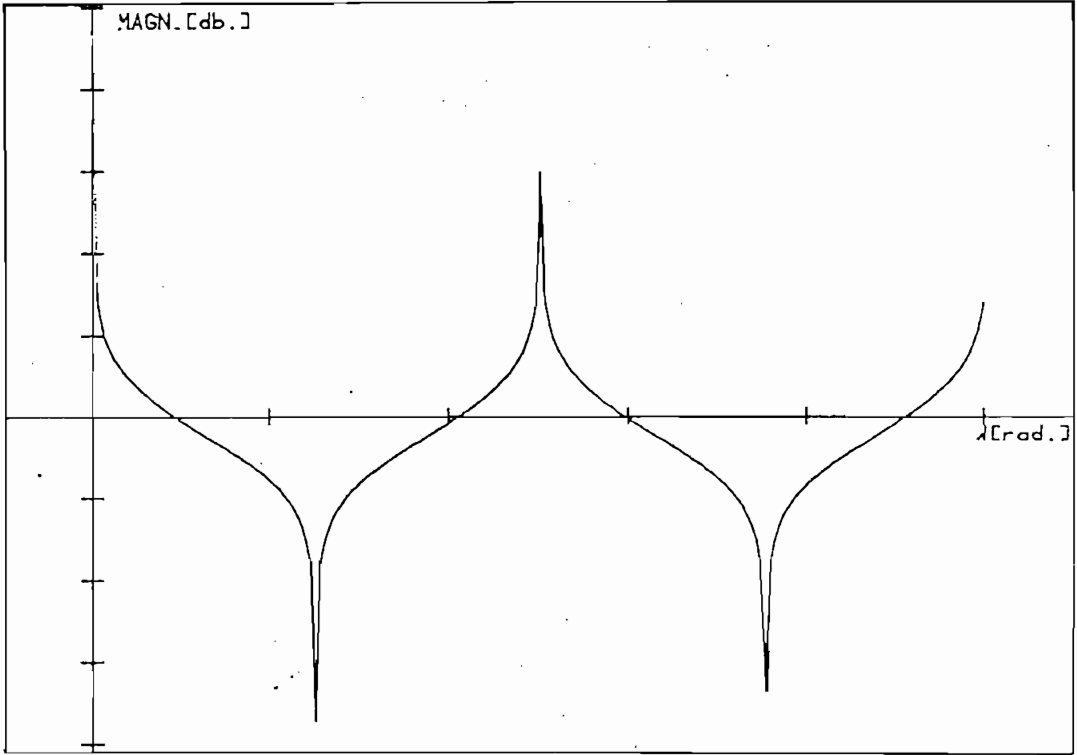


EJE X: 1Div.= 10.0

EJE Y: 1Div.= 0.50

ARCHIVO : TESIS1

MAGNITUD EN DECIBELIOS

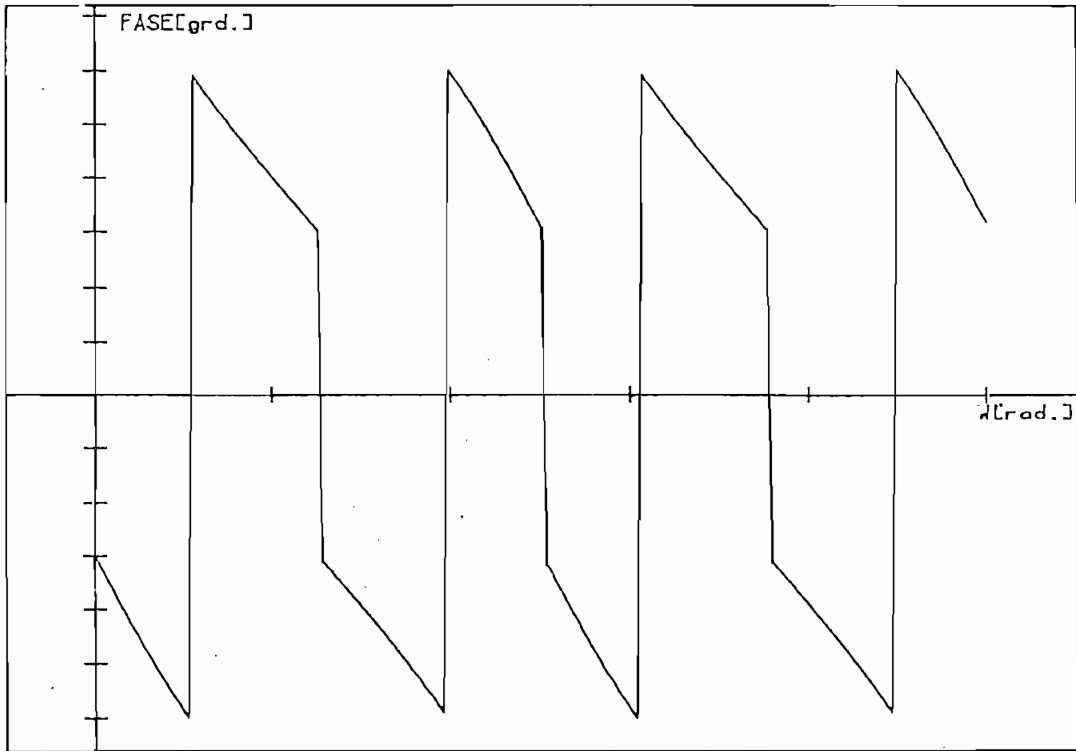


EJE X:1 Div.=1.00

EJE Y:1 Div.=20.00

ARCHIVO : TESIS1

DIAGRAMA DE ANGULO



EJE X:1 Div.=1.00

EJE Y:1 Div.=30.00

ARCHIVO : TESIS1

OBSERVACIONES AL EJEMPLO 4.1.

Debe resaltarse por su importancia las facilidades que se tienen con el programa para diseñar sistemas de control de segundo orden debido a la posibilidad de graficarse sobre el L.G.R. las curvas de razón de amortiguamiento constante. Precisamente, combinando este hecho con la posibilidad de evaluar la ganancia de un punto ingresado por el plotter, puede realizarse un estudio más completo en cuanto se refiere a la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema de segundo orden. Esto es, puede concluirse que el programa presta las facilidades correspondientes para realizar diseño de sistemas de control.

EJEMPLO 4.2.

- a) Dado el modelo estandarizado de un sistema de control de rastreo de antena en la Fig. 4.4., encontrar el sistema discreto equivalente y graficar el L.G.R. respectivo.

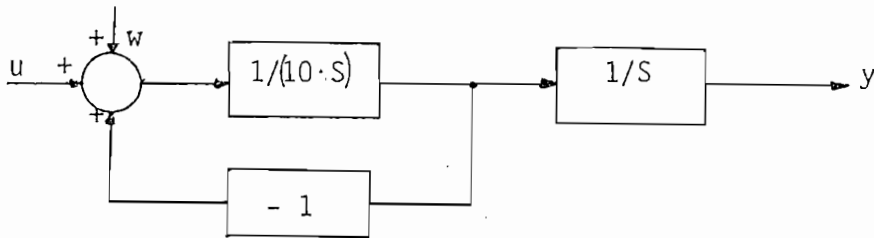


Fig. 4.4. Modelo estandarizado de un control de rastreo de antena.

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(S) = \frac{1}{10 S} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{10 S}}$$

$$G(S) = \frac{\frac{1}{10}}{S(S + \frac{1}{10})}$$

La función de transferencia de lazo abierto discretizada es, (incluido el R.O.C.):

$$G(Z) = \frac{Z - 1}{Z} z \left\{ \frac{G(S)}{S} \right\} = \frac{Z - 1}{Z} z \left\{ \frac{\frac{1}{10}}{S^2 (S + \frac{1}{10})} \right\}$$

Para $T = 1$ segundo, se tiene:

$$G(Z) = 0.04837 \frac{Z + 0.9672}{(Z - 1)(Z - 0.9048)}$$

Esto es: $G(Z) = K \frac{Z + 0.9672}{(Z - 1)(Z - 0.9048)}$

El L.G.R. para este F.T. se tiene en el Archivo TESIS20.

b) A partir de este L.G.R. y mediante el empleo de los compensadores $D_1(Z)$ y $D_2(Z)$, graficar los nuevos Lugares de las raíces:

$$D_1(Z) = \frac{Z - 0.5}{Z + 0.6}$$

$$D_2(Z) = \frac{Z - 0.8}{Z + 0.8}$$

$$G_1(Z) = D_1(Z) \cdot G(Z)$$

$$G_2(Z) = D_2(Z) \cdot G(Z)$$

Los resultados para $G_1(Z)$ se indican en el Archivo TESIS21 en tanto que para $G_2(Z)$ se tiene en el Archivo TESIS22.

- c) Dada la F.T. de lazo abierto $G_3(Z)$ que es el modelo discreto del sistema de la Fig. 4.4., discretizado y compensado mediante aplicación de la transformada W , dibujar el L.G.R. respectivo.

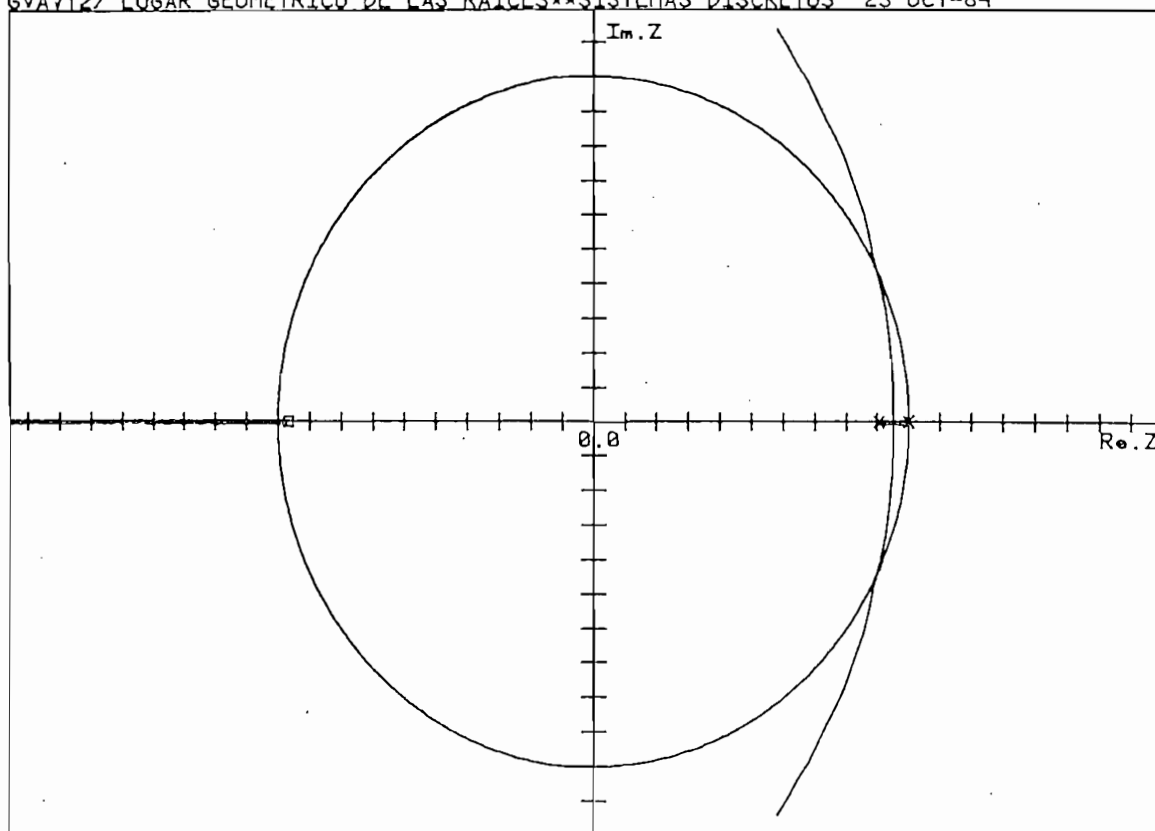
$$G_3(Z) = 0.758 \frac{Z + 0.967}{(Z - 1)(Z + 0.5)}$$

Los resultados de esta F.T. se indican en el Archivo TESIS23.

Para todos los casos presentar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo y comentar los resultados.

A continuación se presentan los resultados obtenidos.

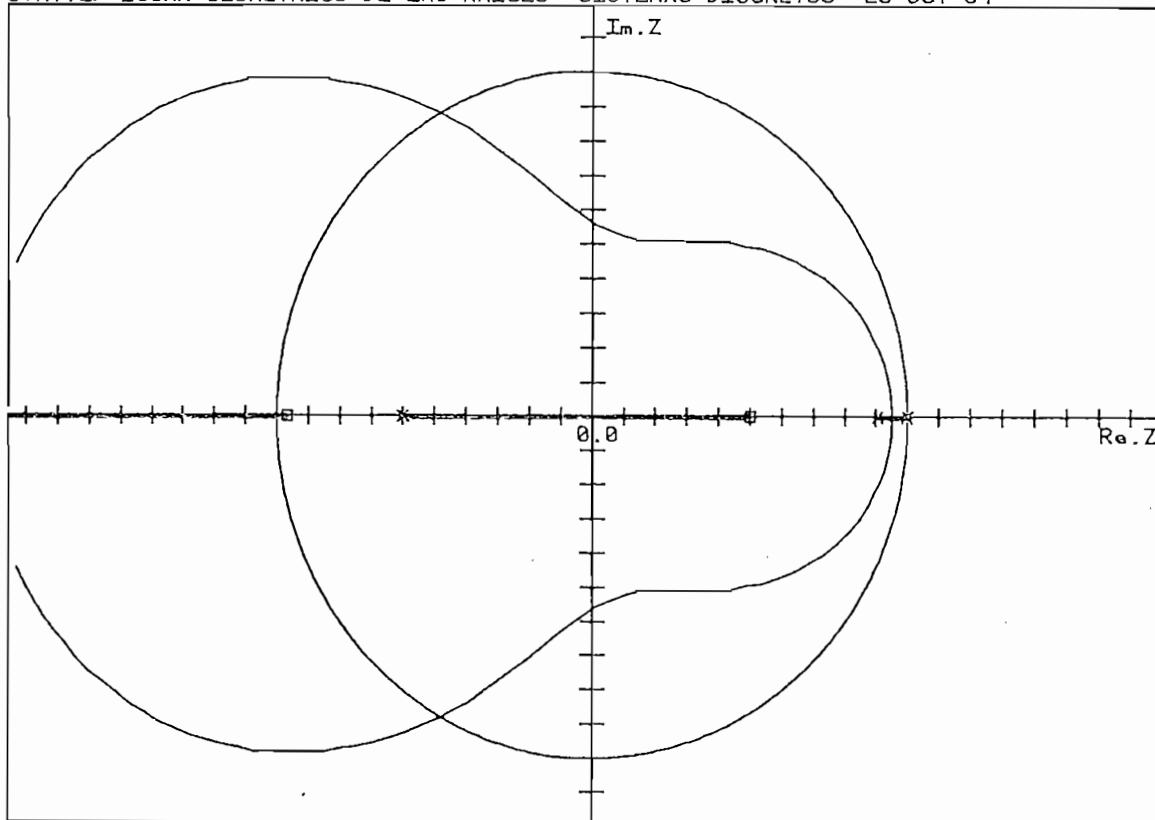
GVA712/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades

Archivo:TESIS20

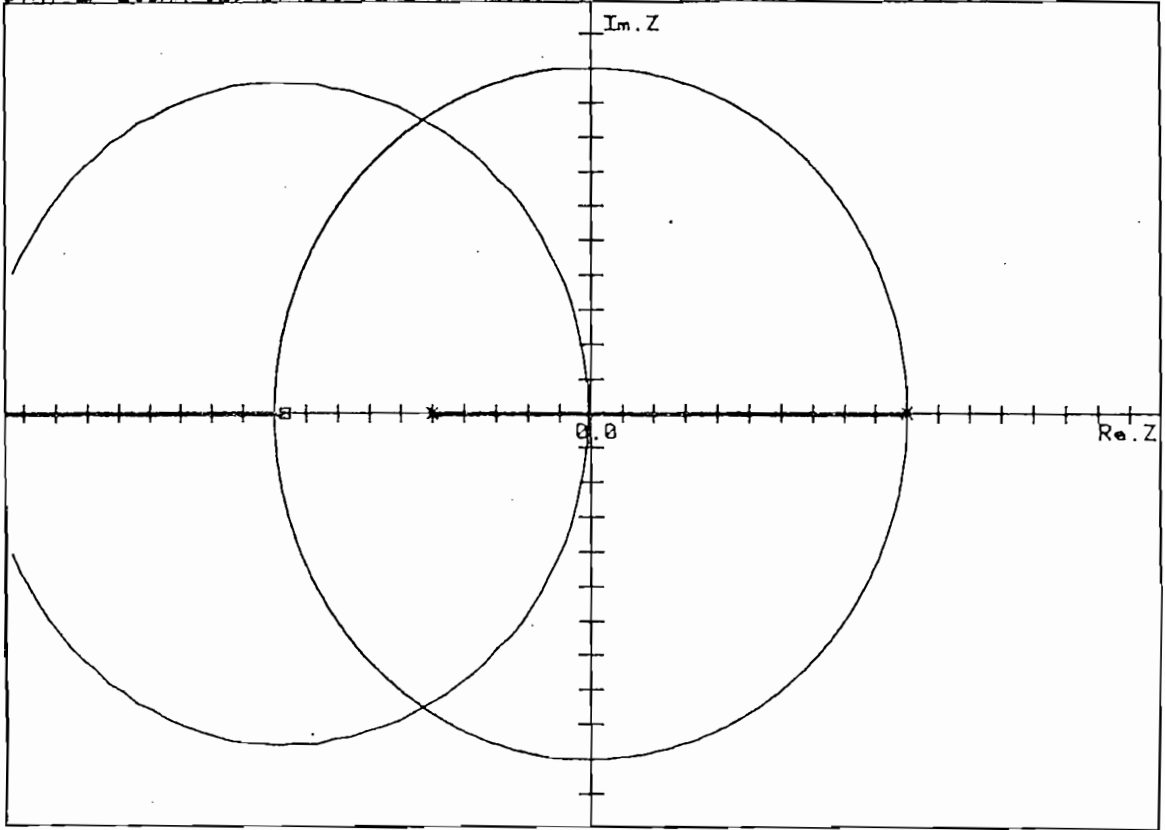
GVA712/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades

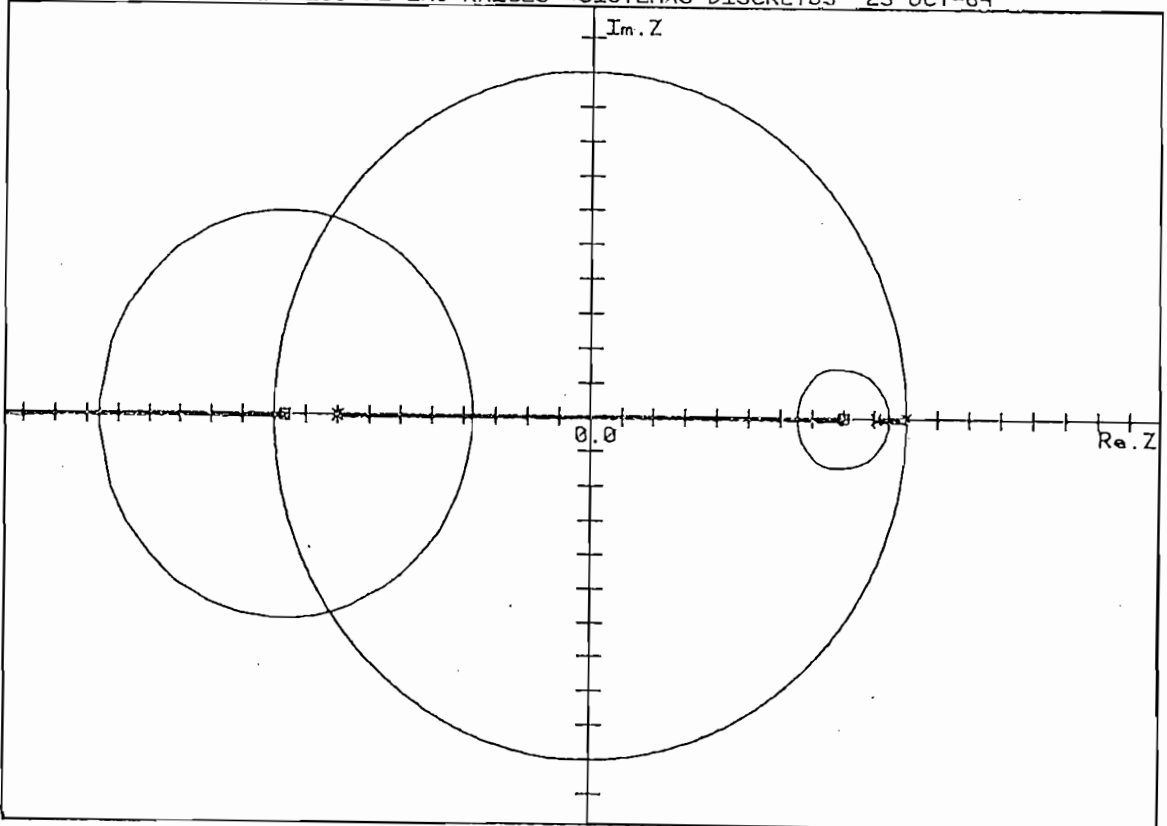
Archivo:TESIS21

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:TESIS23

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:TESIS22

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:44:14

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS20

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 1
Grado del numerador 1
Grado del denominador 2

Coefficientes del numerador :

***1 z**0
1.00 0.97

Coefficientes del denominador :

***2 z**1 z**0
1.00 -1.90 0.90

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.90	0.00	POLO	
-0.97	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.95	SI
2	-2.89	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:45:35

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS20

El L.G.R Corta el circulo unitario sobre eje real

Diferencia en suma de argumentos = 0.000000 grados

Ganancia Critica Kc = 116.146

Margen de Ganancia MG = 116.146

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es: EJE REAL : -1
 EJE IMAG.: 0

=====

Diferencia en suma de argumentos = 0.842302 grados

Ganancia Critica Kc = 0.105

Margen de Ganancia MG = 0.105

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es: EJE REAL : 0.896562515084
 EJE IMAG.: 0.442918468876

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:38:23

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS21

 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 1
 Grado del numerador 2
 Grado del denominador 3

Coefficientes del numerador :

***2 ***1 **0
 1.00 0.47 -0.48

Coefficientes del denominador :

***3 ***2 ***1 **0
 1.00 -1.30 -0.24 0.54

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POL0	
0.90	0.00	POL0	
0.50	0.00	CERO	
-0.60	0.00	POL0	
-0.97	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.95	SI
4	-1.94	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:38:45

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS21

El L.G.R Corta el círculo unitario sobre eje real

Diferencia en suma de argumentos = 0.000000 grados

Ganancia Critica Kc = 30.972

Margen de Ganancia MG = 30.972

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es: EJE REAL : -1
 EJE IMAG.: 0

=====

Diferencia en suma de argumentos = 0.107906 grados

Ganancia Critica Kc = 1.887

Margen de Ganancia MG = 1.887

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es: EJE REAL : -0.475776811309
 EJE IMAG.: 0.879496229692

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:42:43

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS22

 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 1
 Grado del numerador 2
 Grado del denominador 3

Coefficientes del numerador ;

 **2 **1 **0
 1.00 0.17 -0.77

Coefficientes del denominador ;

 **3 **2 **1 **0
 1.00 -1.10 -0.62 0.72

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.90	0.00	POLO	
0.80	0.00	CERO	
-0.80	0.00	POLO	
-0.97	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.94	SI
2	0.65	SI
3	-0.37	SI
4	-1.56	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 30-OCT-84 23:43:01

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS22

El L.G.R Corta el círculo unitario sobre eje real

Diferencia en suma de argumentos = 0.000000 grados

Ganancia Critica Kc = 12.905

Margen de Ganancia MG = 12.905

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : -1
EJE IMAG.: 0

=====

Diferencia en suma de argumentos = 0.146796 grados

Ganancia Critica Kc = 1.953

Margen de Ganancia MG = 1.953

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : -0.817550449327
EJE IMAG.: 0.575654725596

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:53:20

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS23

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estática 0.758
Grado del numerador 1
Grado del denominador 2

Coefficientes del numerador :

***1 z**0
1.00 0.97

Coefficientes del denominador :

***2 z**1 z**0
1.00 -0.50 -0.50

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POL0	
-0.50	0.00	POL0	
-0.97	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	-0.01	SI
2	-1.93	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:53:38

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS23

El L.G.R Corta el círculo unitario sobre eje real

Diferencia en suma de argumentos = 0.000000 grados

Ganancia Critica Kc = 30.488

Margen de Ganancia MG = 40.221

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : -1
EJE IMAG.: 0

=====

Diferencia en suma de argumentos = 0.155837 grados

Ganancia Critica Kc = 1.554

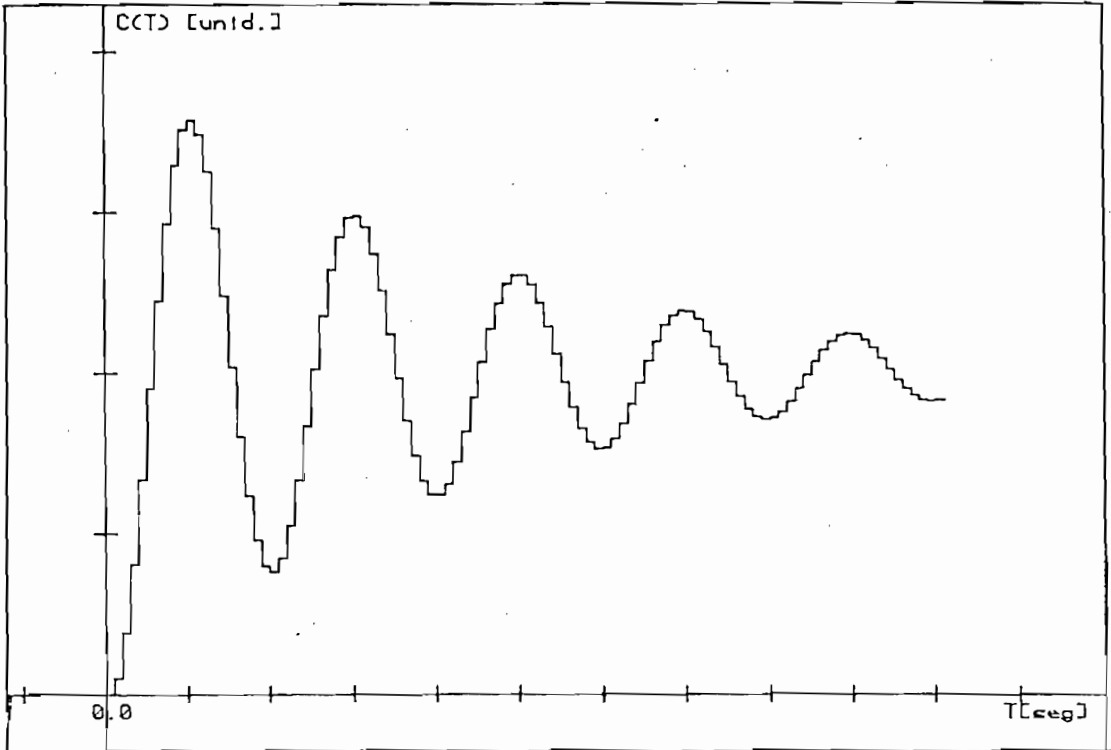
Margen de Ganancia MG = 2.050

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : -0.527974161928
EJE IMAG.: 0.84947444054

=====

RESPUESTA A ENTRADA PASO

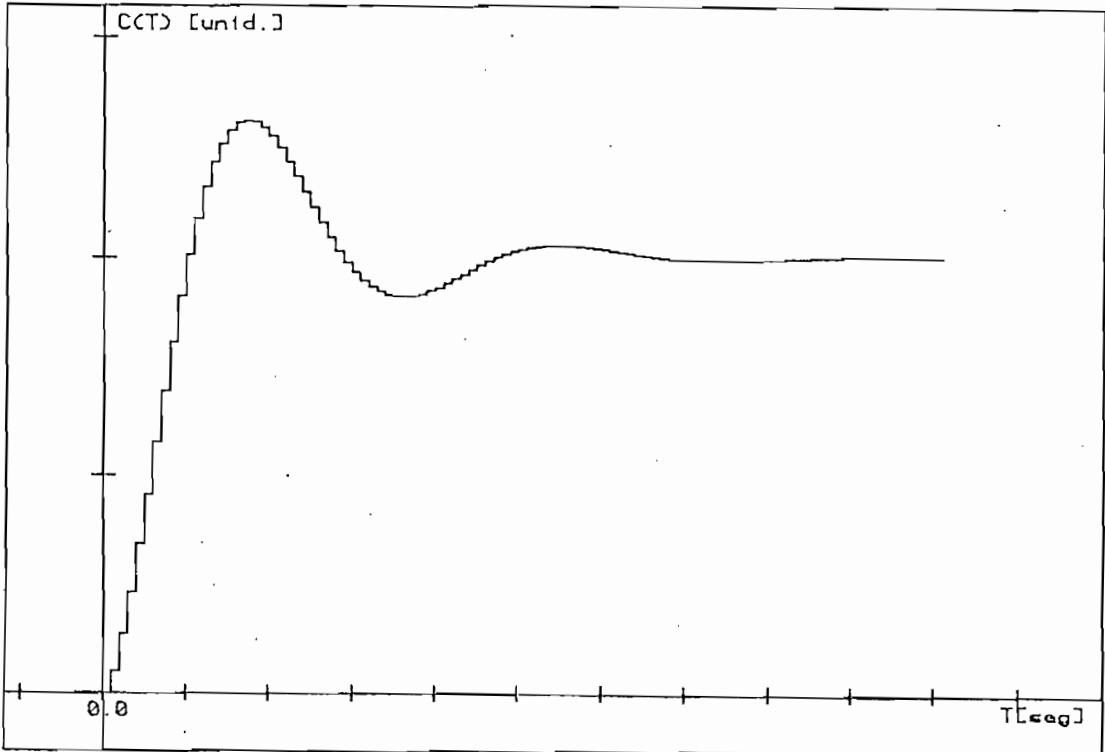


EJE X: 1Div.= 10.0

EJE Y: 1Div.= 0.50

ARCHIVO : TESIS20

RESPUESTA A ENTRADA PASO

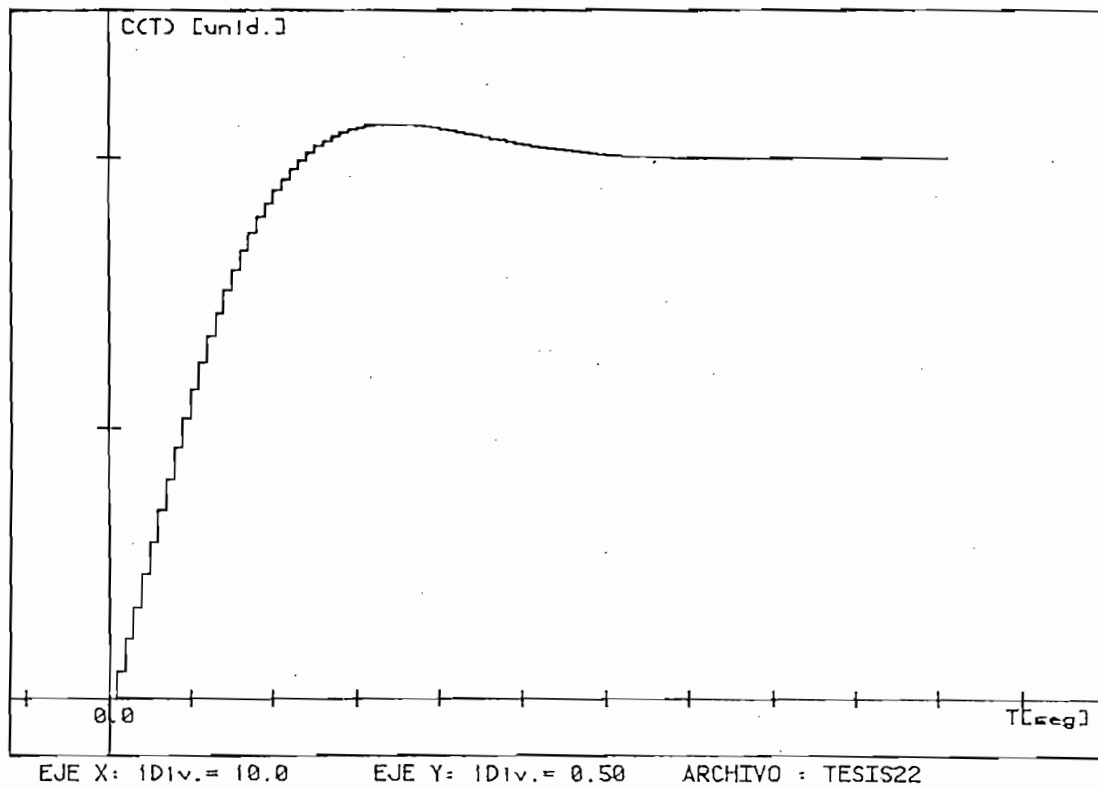


EJE X: 1Div.= 10.0

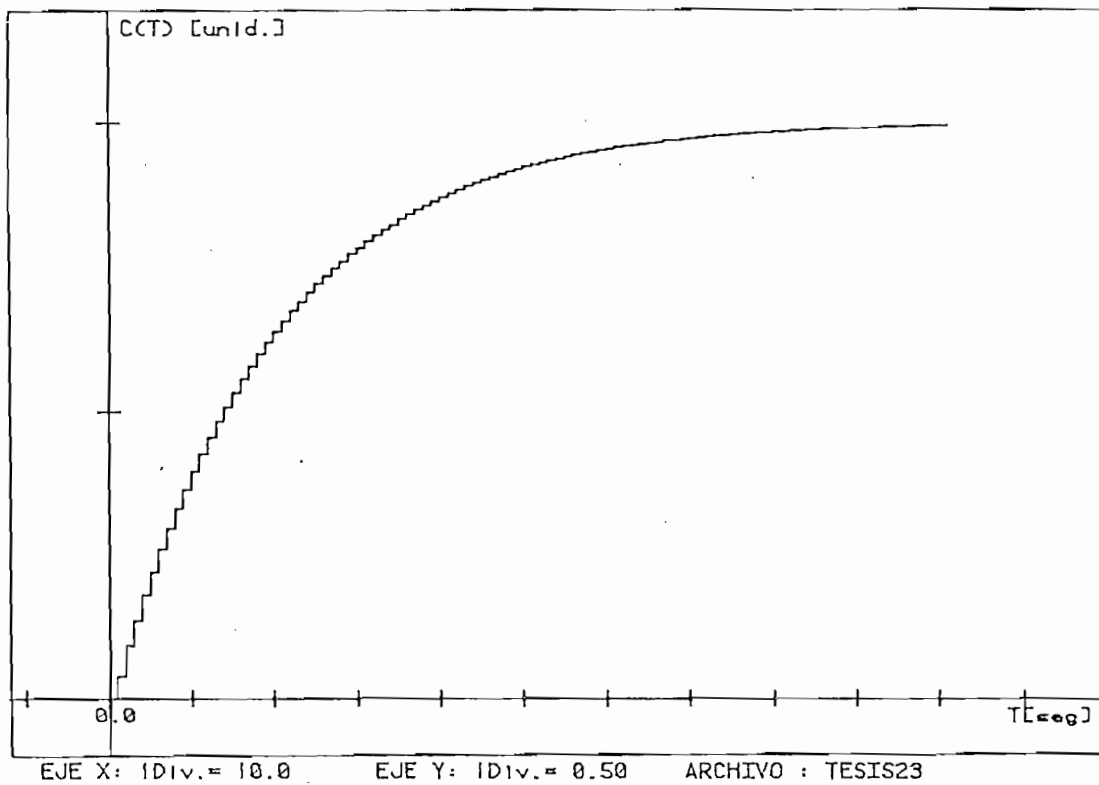
EJE Y: 1Div.= 0.50

ARCHIVO : TESIS21

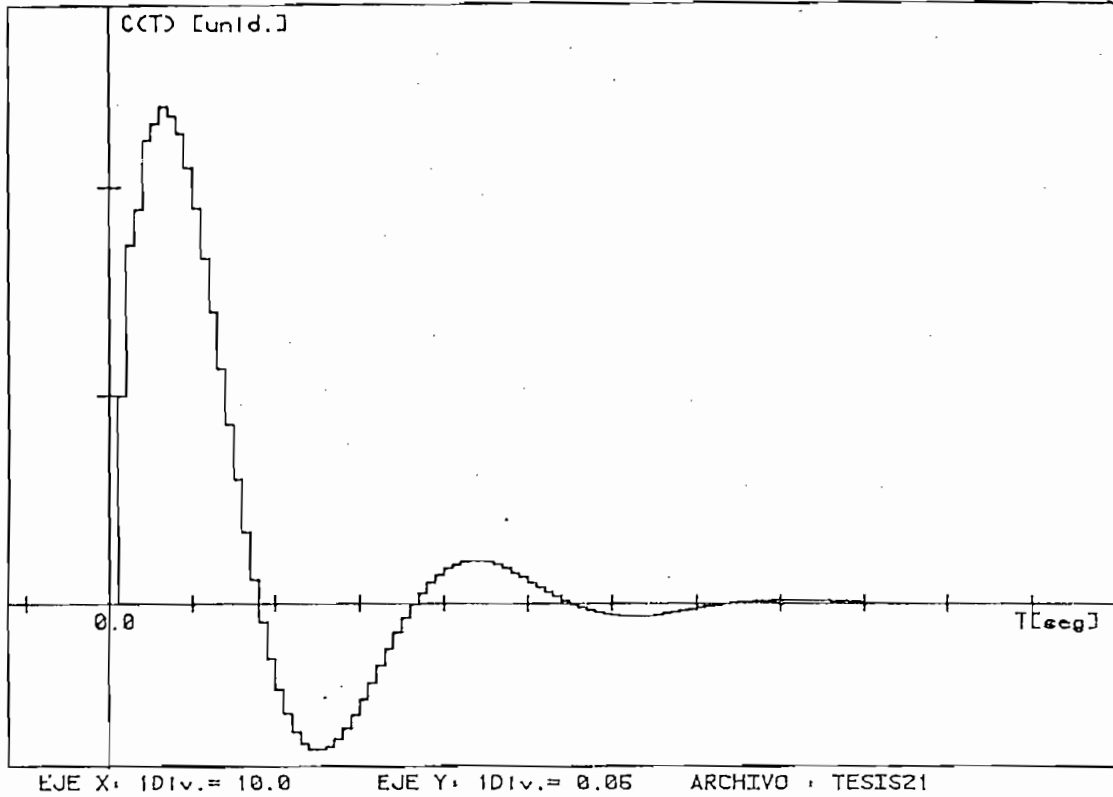
RESPUESTA A ENTRADA PASO



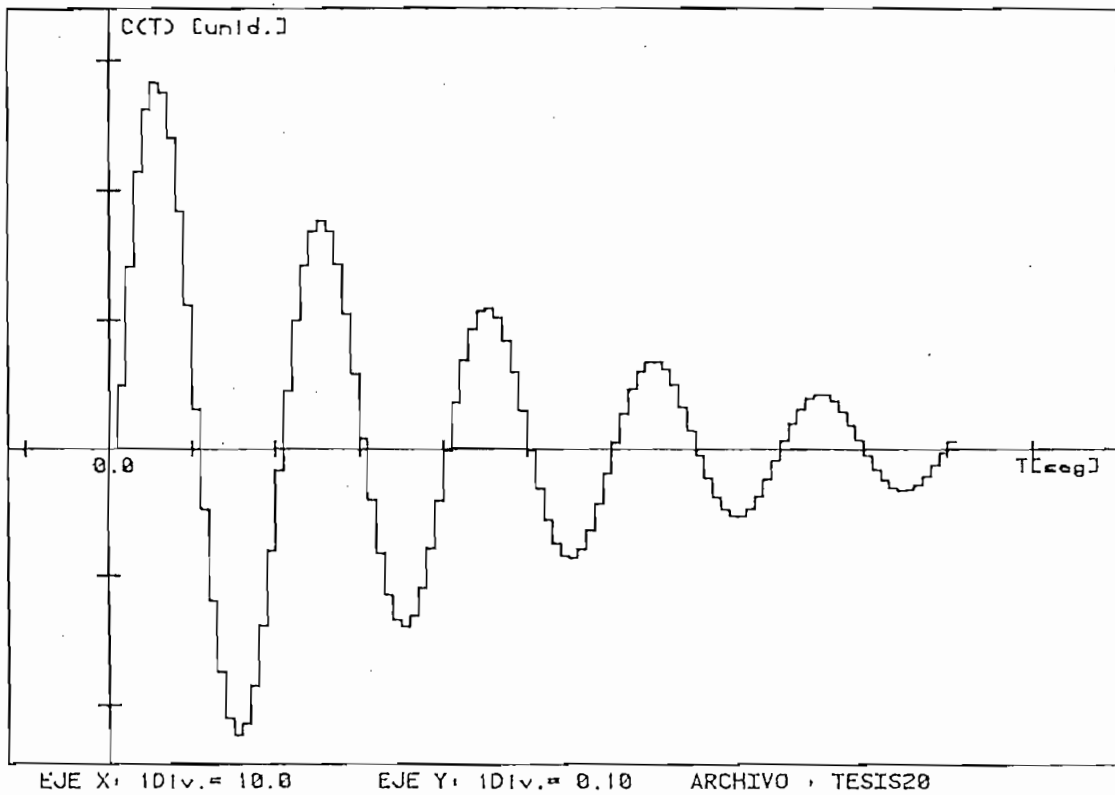
RESPUESTA A ENTRADA PASO



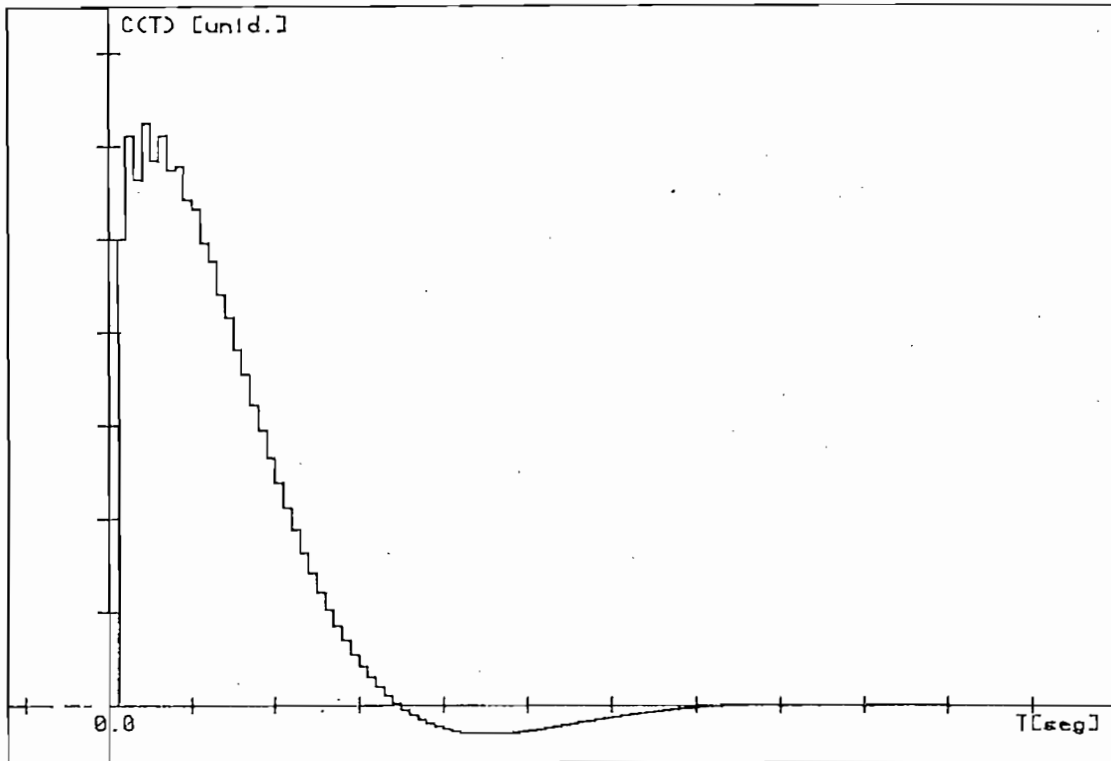
RESPUESTA A ENTRADA IMPULSO



RESPUESTA A ENTRADA IMPULSO



RESPUESTA A ENTRADA IMPULSO

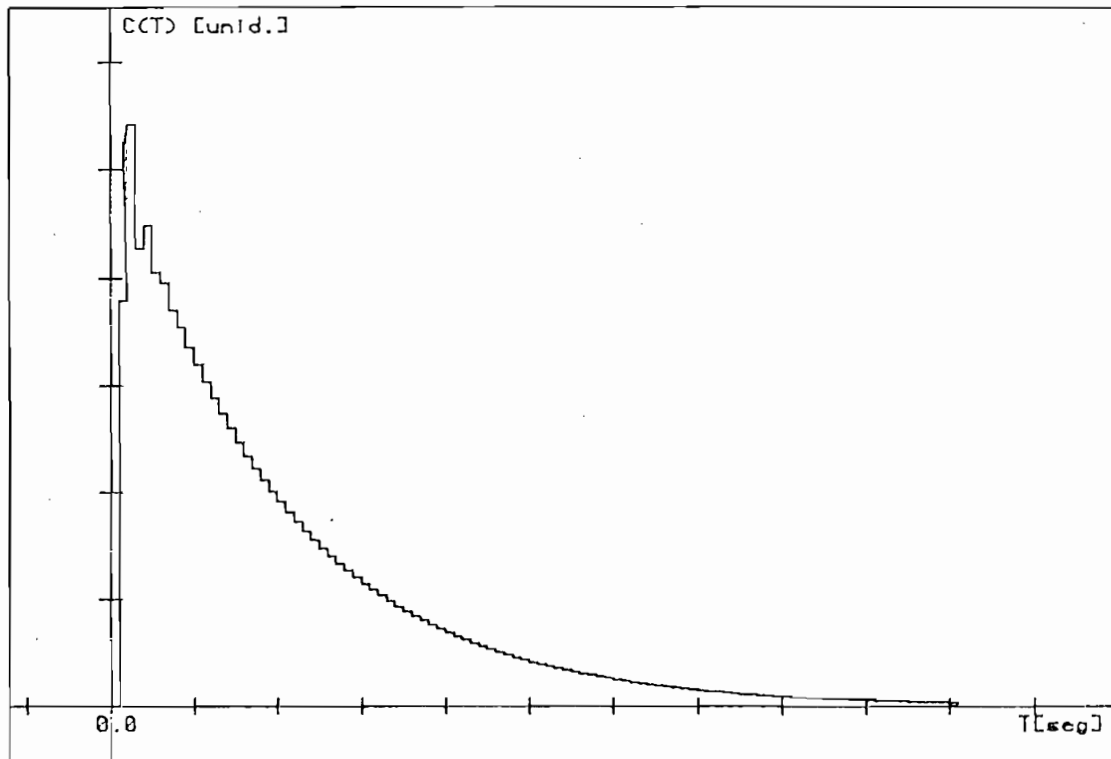


EJE X: 1Div.= 10.0

EJE Y: 1Div.= 0.01

ARCHIVO : TESIS22

RESPUESTA A ENTRADA IMPULSO



EJE X: 1Div.= 10.0

EJE Y: 1Div.= 0.01

ARCHIVO : TESIS23

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 05-NOV-84 11:51:22

LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS20

RESOLUCION DE $D(z) + K * N(z) = 0$

Ganancia estática 1

Ganancia dinámica 0,05

--Ganancia total 0,05

RAIZ	PARTE REAL	PARTE IMAG.
1	0,93	-0,31
2	0,93	0,31

LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS21

RESOLUCION DE $D(z) + K * N(z) = 0$

Ganancia estática 1

Ganancia dinámica 0,05

--Ganancia total 0,05

RAIZ	PARTE REAL	PARTE IMAG.
1	0,92	-0,16
2	0,92	0,16
3	-0,59	0,00

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 05--NOV--84 12:46:57
 Archivo : TESIS22

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS

RESOLUCION DE $D(z) + K * N(z) = 0$

Ganancia estática 1
 Ganancia dinámica 0.05
 -Ganancia total 0.05

RAIZ	PARTE REAL	PARTE IMAG.
1	0.93	0.07
2	0.93	-0.07
3	-0.80	0.00

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS23

RESOLUCION DE $D(z) + K * N(z) = 0$

Ganancia estática 0.758
 Ganancia dinámica 0.05
 -Ganancia total 0.0379

RAIZ	PARTE REAL	PARTE IMAG.
1	-0.49	0.00
2	0.95	0.00

OBSERVACIONES EL EJEMPLO 4.2.

A partir de estos ejemplos, puede observarse la utilidad que prestan los programas en cuanto permiten la evaluación práctica del efecto que causa en el sistema el añadir redes de compensación.

En estos ejemplos puede observarse que al añadir los compensadores $D_1(Z)$ y $D_2(Z)$ se mejoran las características dinámicas del sistema. Esto se comprueba al observar las respuestas en el dominio del tiempo para cada caso; lo propio sucede con el modelo discretizado mediante la transformación W . Todos los gráficos de respuesta en el tiempo están hechos para un mismo valor de ganancia ($K = 0.05$), y se presenta inclusive las raíces respectivas en cada L.G.R. para dicho valor de ganancia.

Puede concluirse finalmente que al añadir los compensadores correctos, puede mejorarse las características dinámicas del sistema como es el máximo sobre impulso, razón de amortiguamiento, tiempo de estabilización, etc. Esto es, el uso de compensadores ha permitido variar la ubicación de las raíces características del sistema dentro de la región de estabilidad de los sistemas discretos (círculo unitario), lo cual es fácilmente observable en los gráficos de los Lugares de las Raíces correspondientes.

Adicionalmente, debe explicarse que los valores de ganancia crítica y margen de ganancia entregados por el programa para estos ejemplos deben ser interpretados correctamente de acuerdo a la distribución de polos y ceros de lazo abierto y del gráfico mismo del

L.G.R. En los cuatro casos analizados para que el sistema sea estable, el valor de ganancia debe estar comprendido entre cero y el menor valor de ganancia calculado. El valor de ganancia crítica entregado en el punto $-1,0$ no tiene otro objetivo que el informar el valor de ganancia en un punto de cruce del L.G.R. con la circunferencia unitaria.

EJEMPLO 4.3.

Dada la función de transferencia $G_1(Z)$ que describe un sistema de control de temperatura en un tanque mediante mezclado, construir el L.G.R. respectivo.

$$G_1(Z) = 0.3935 K \frac{(Z + 0.6065)}{Z^2 (Z - 0.3679)}$$

Añadiendo a esta función de transferencia un control integral mediante $D_1(Z)$, expresado por:

$$D_1(Z) = \frac{Z}{Z - 1}$$

Se obtiene la F.T. $G_2(Z)$:

$$G_2(Z) = 0.3935 K \frac{(Z + 0.6065)}{Z(Z - 1)(Z - 0.3679)}$$

Si a $G_2(Z)$ se añade una compensación que cancela el polo $Z=0.3679$ y el cero $Z = -0.6065$ esto es:

$$D_2(Z) = \frac{Z - 0.3679}{Z + 0.6065}$$

Se obtiene la F.T. $G_3(Z)$:

$$G_3(Z) = 0.3935 \frac{K(Z+0.6065)(Z-0.3679)}{Z(Z-1)(Z-0.3679)(Z+0.6065)}$$

Esto es:

$$G_3(Z) = K \frac{0.3935}{Z(Z-1)}$$

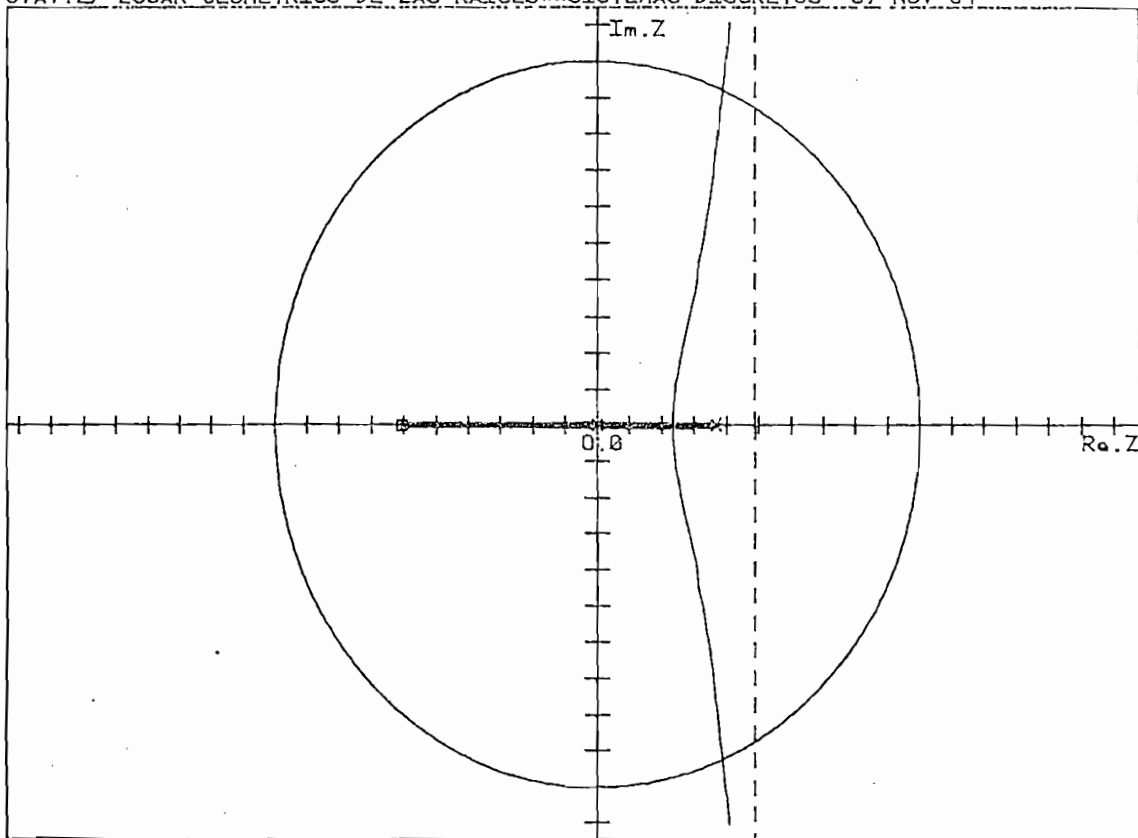
Los lugares de las raíces correspondientes se indican a continuación:

$G_1(Z)$ Archivo TESIS26

$G_2(Z)$ Archivo TESIS24

$G_3(Z)$ Archivo TESIS25

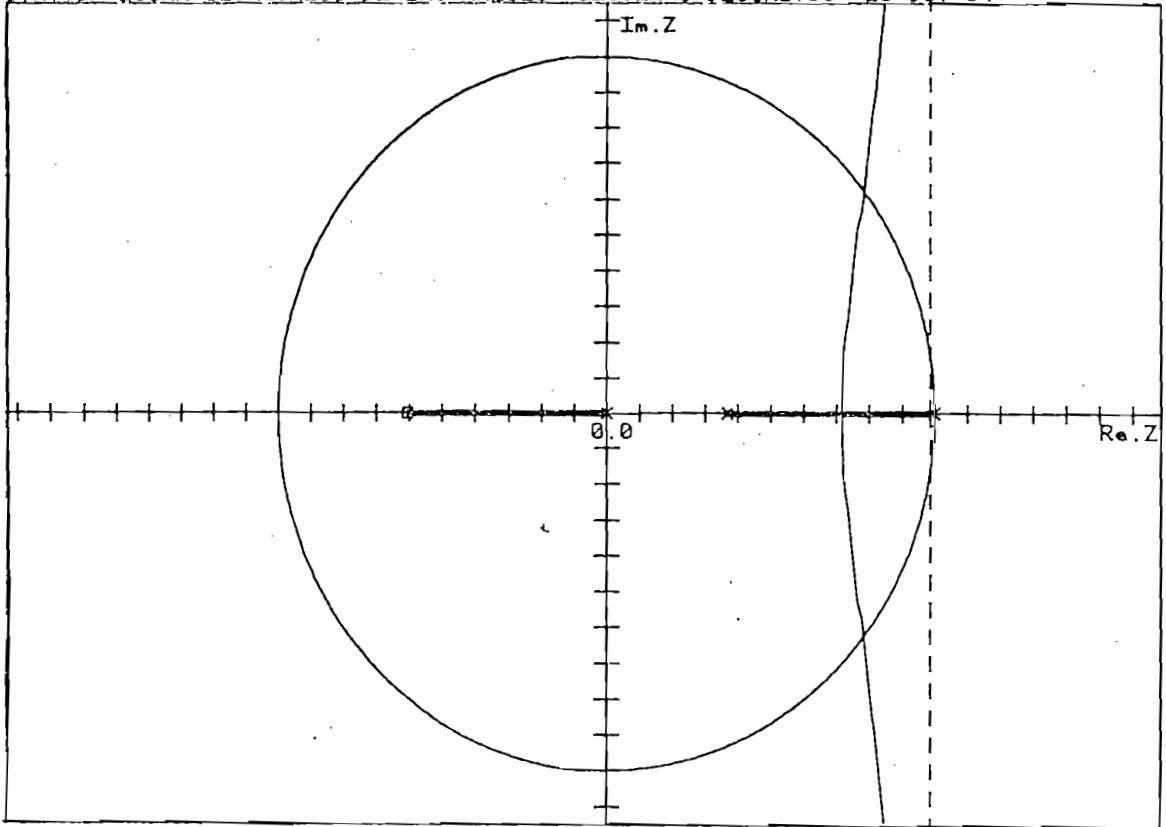
6VAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 07-NOV-84



x=POLO o=CERO | División = 0.1 Unidades

Archivo: TESIS26

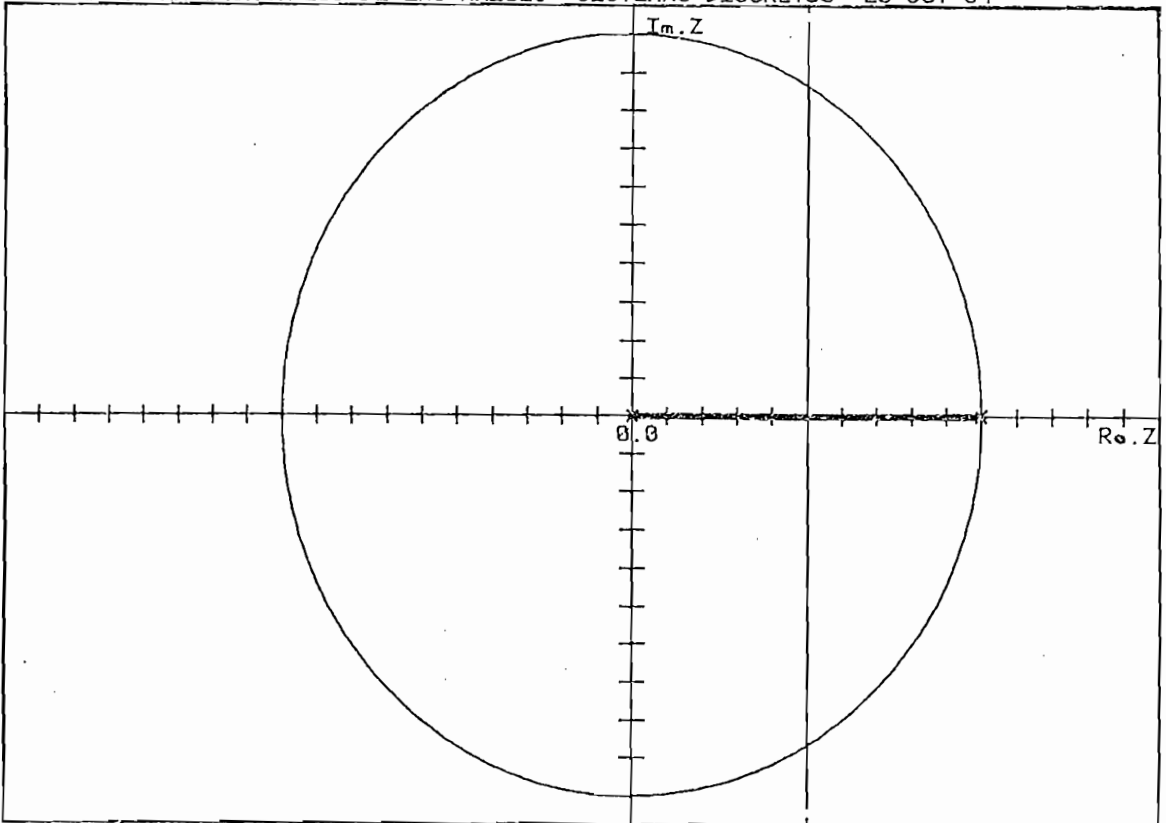
GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades

Archivo:TESIS24

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades

Archivo:TESIS25

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 07-NOV-84 13:28:38

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS26

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Genancia estetica 0,3935

Grado del numerador 1

Grado del denominador 3

Coefficientes del numerador :

***1 **0
1,00 0,61

Coefficientes del denominador :

***3 **2 **1 **0
1,00 -0,37 0,00 0,00

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imes.	Tipo	Observaciones
0,37	0,00	POLO	
0,00	0,00	POLO	Doble
-0,61	0,00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0,23	SI
2	0,00	NO
3	-0,96	NO

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 07-NOV-84 13:56:09

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS26

Diferencia en suma de argumentos = 0.286863 arados

Ganancia Critica Kc = 0.679

Margen de Ganancia MG = 1.726

NOTA : Para que un punto sea del LGR, la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : 0.3878262888
EJE IMAG. : 0.921340846502

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:54:36

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS24

 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 0.3935
 Grado del numerador 1
 Grado del denominador 3

Coefficientes del numerador :

z**1 z**0
 1.00 0.61

Coefficientes del denominador :

z**3 z**2 z**1 z**0
 1.00 -1.37 0.37 0.00

Folos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	FOL0	
0.37	0.00	FOL0	
0.00	0.00	FOL0	
-0.61	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.72	SI
2	0.14	NO
3	-1.09	NO

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:54:54

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS24

Diferencia en suma de argumentos = 0.173006 grados

Gainancia Critica Kc = 0.323

Margen de Gainancia MG = 0.822

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : 0.783168020168
EJE IMAG. : 0.621689315668

=====

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:55:44

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS25

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 1
Grado del numerador 0
Grado del denominador 2

Coefficientes del denominador :

***2 z**1 z**0
1.00 -1.00 0.00

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.00	0.00	POLO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.50	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 25-OCT-84 12:55:57

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS25

Diferencia en suma de argumentos = 0.000000 grados

Ganancia Critica Kc = 1.001

Margen de Ganancia MG = 1.001

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL ; 0.5
EJE IMAG.; 0.866466857143

=====

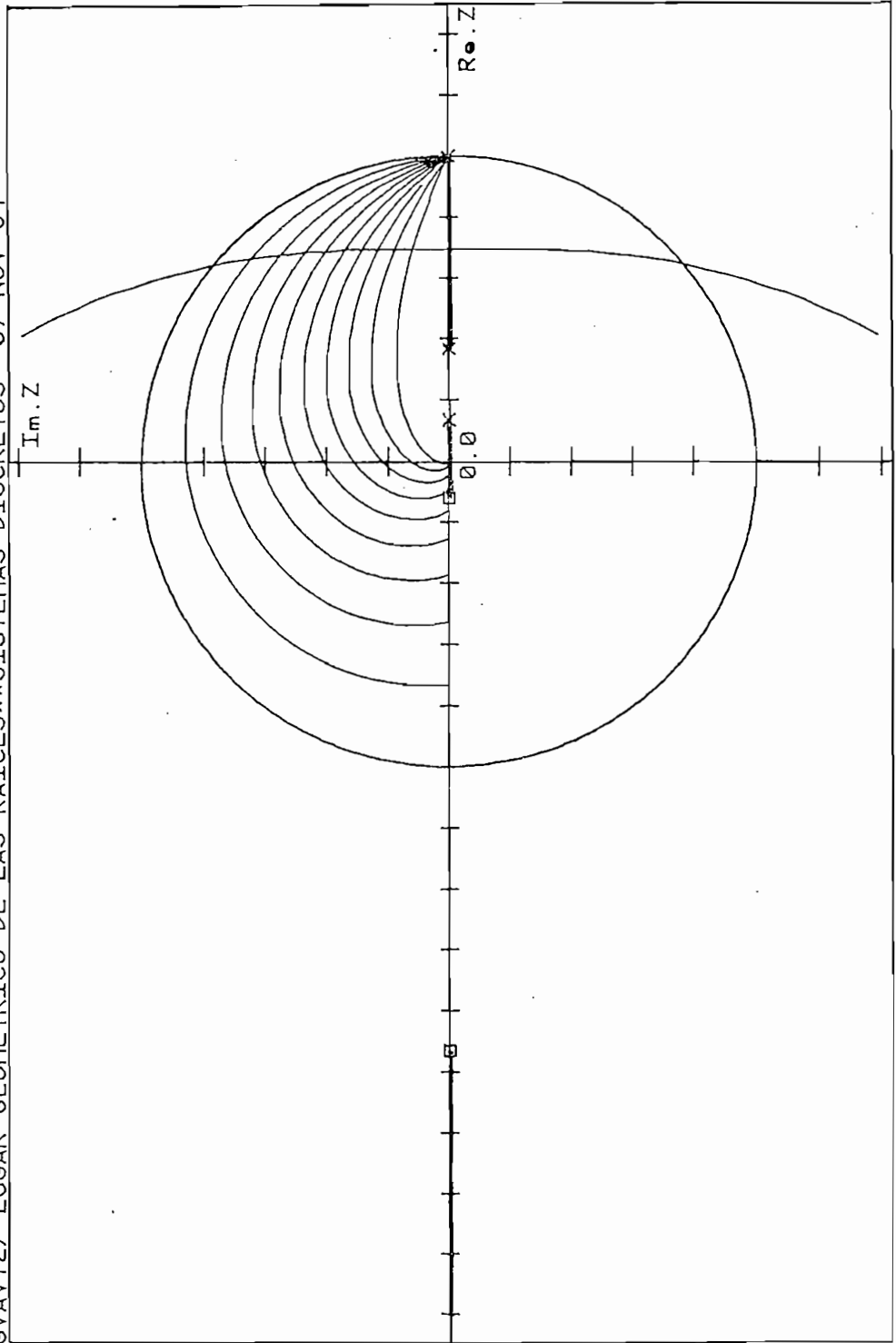
OBSERVACIONES AL EJEMPLO 4.3.

Este ejemplo permite confirmar la validez de los programas implementador al comprobarse que los resultados obtenidos son completamente similares a los entregados por los autores Franklin y David en el libro DIGITAL CONTROL OF DINAMIC SYSTEMS, Capítulo V.

EJEMPLO 4.4.

A continuación se entregan varios ejemplos que validan definitivamente el programa implementado. Varios de ellos comprueban los resultados entregados en la bibliografía consultada, en tanto que otros han sido elaborados para comprobar diferentes alternativas del programa.

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 07-NOV-84

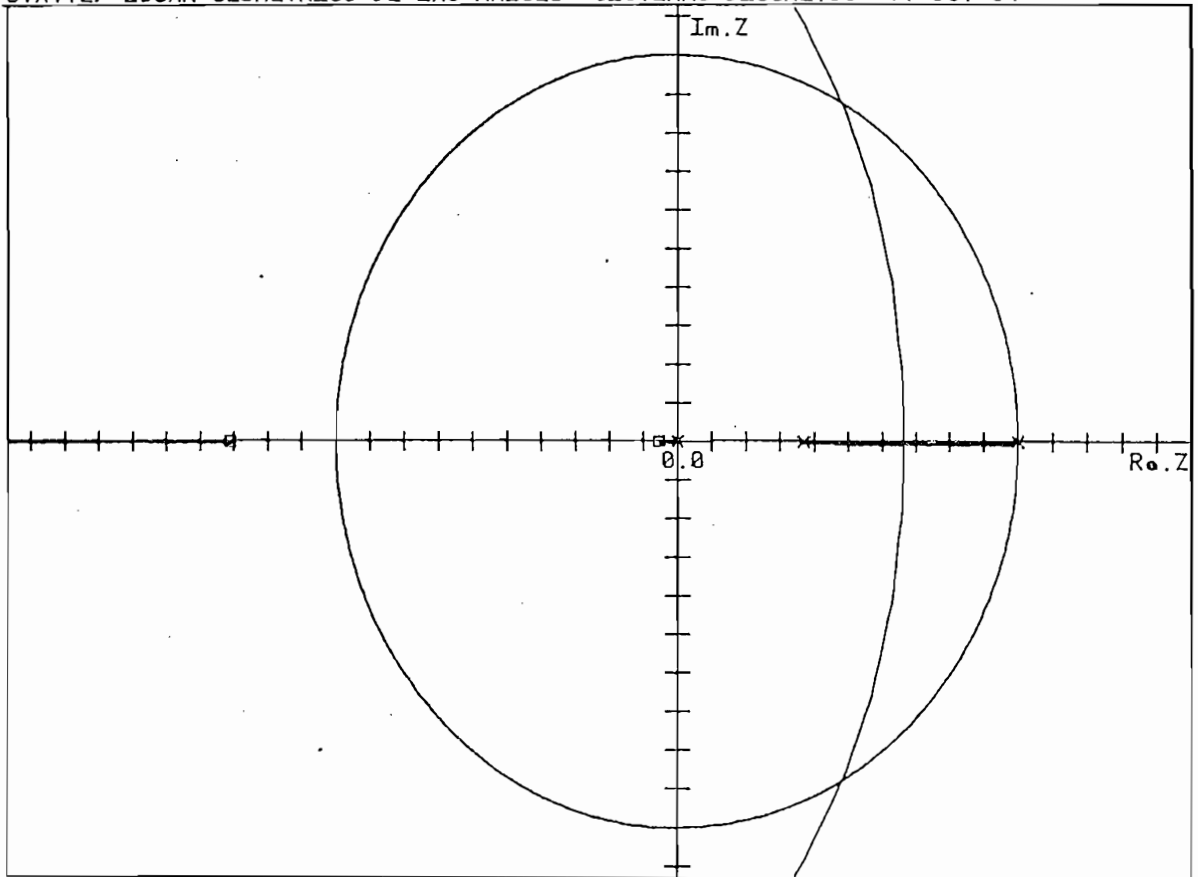


Archivo: TESIS0

1 División = 0.2 Unidades

x=POLO o=CERO

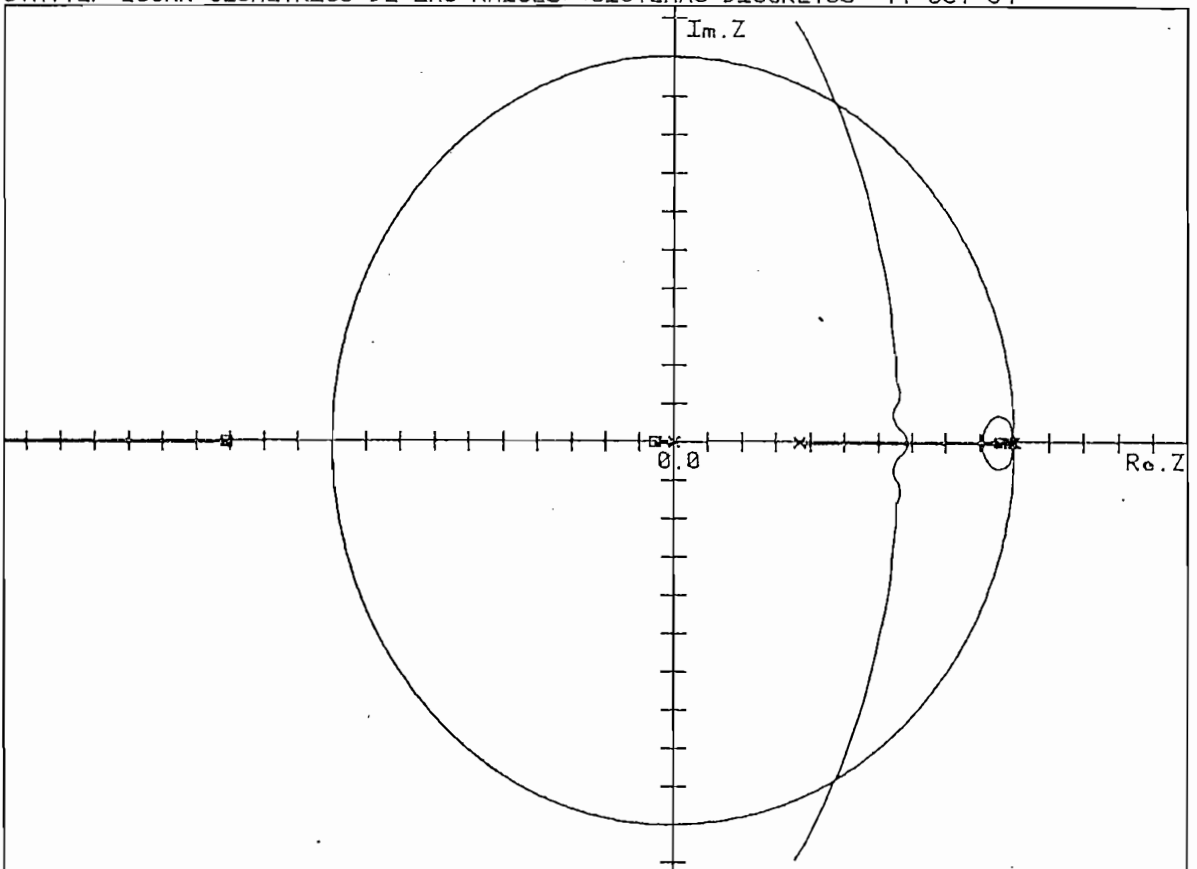
GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



x=POLO o=CERO | División = 0.1 Unidades

Archivo:TESIS8

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



x=POLO o=CERO | División = 0.1 Unidades

Archivo:TESIS5

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 0.13
 Grado del numerador 2
 Grado del denominador 3

Coefficientes del numerador :

***1 z**0
 1.00 1.36 0.07

Coefficientes del denominador :

***2 z**1 z**0
 1.00 -1.37 0.37 0.00

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imag.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.37	0.00	POLO	
0.00	0.00	POLO	
-0.05	0.00	CERO	
-1.31	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.66	SI
2	0.08	NO
3	-0.15	NO
4	-3.32	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 31-OCT-84 02:09:00

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo ; TESIS8

Diferencia en suma de argumentos = 0.097047 grados

Ganancia Critica Kc = 0.440

Margen de Ganancia MG = 3.385

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
 en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
 circunferencia unitaria es; EJE REAL : 0.480372895008
 EJE IMAG.: 0.876747851259

=====

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO GH(z)

Ganancia estatica 0.03029
Grado del numerador 3
Grado del denominador 4

Coefficientes del numerador :

***3 ***2 ***1 ***0
1.00 0.41 -1.23 -0.07

Coefficientes del denominador :

***4 ***3 ***2 ***1 ***0
1.00 -2.36 1.72 -0.36 0.00

Polos y ceros de lazo abierto:

Parte real	Parte imas.	Tipo	Observaciones
1.00	0.00	POLO	
0.96	0.00	CERO	Cancelado
0.99	0.00	POLO	Cancelado
0.37	0.00	POLO	
0.00	0.00	POLO	
-0.05	0.00	CERO	
-1.31	0.00	CERO	

Puntos de separación en el eje real :

#	Valor	Validez
1	0.99	SI
2	0.91	SI
3	0.68	SI
4	0.08	NO
5	-0.15	NO
6	-3.33	SI

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS DE CONTROL

FECHA : 07--NOV--84 12:15:45

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS Archivo : TESIS5

Diferencia en suma de argumentos = 0,169012 arados

Ganancia Critica Kc = 0,442 .

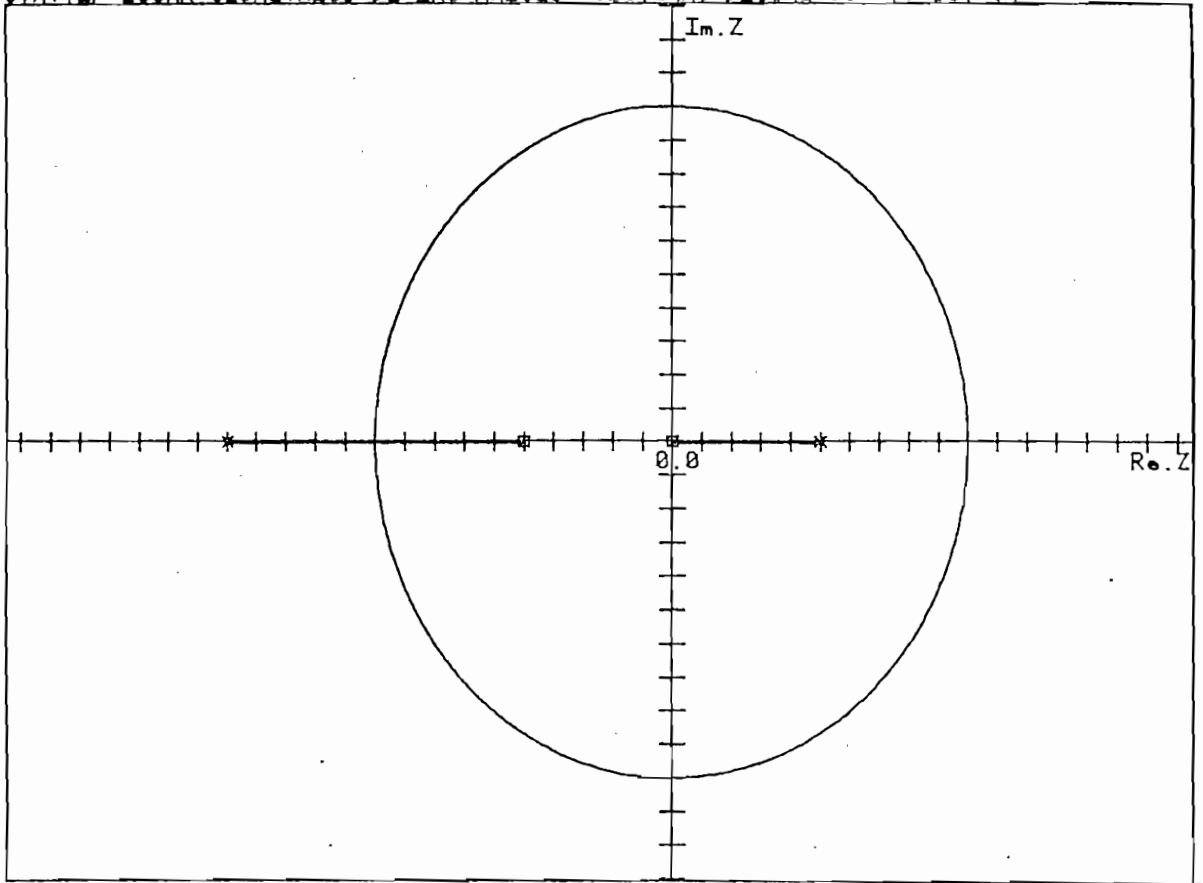
Margen de Ganancia MG = 14,602

NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia
en la suma de argumentos debe tender a cero

El punto de corte del L.G.R con la
circunferencia unitaria es: EJE REAL : 0,474885117473
EJE IMAG.: 0,879895422671

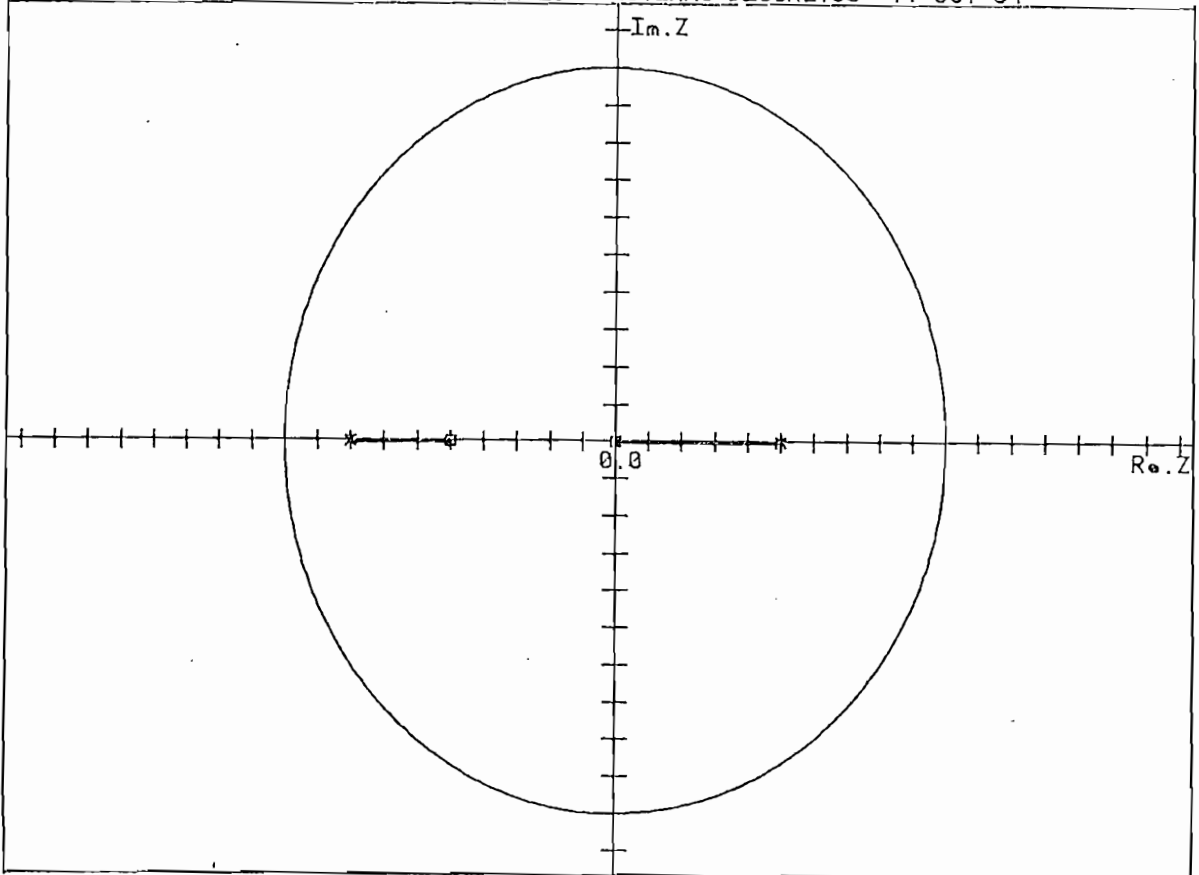
=====

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



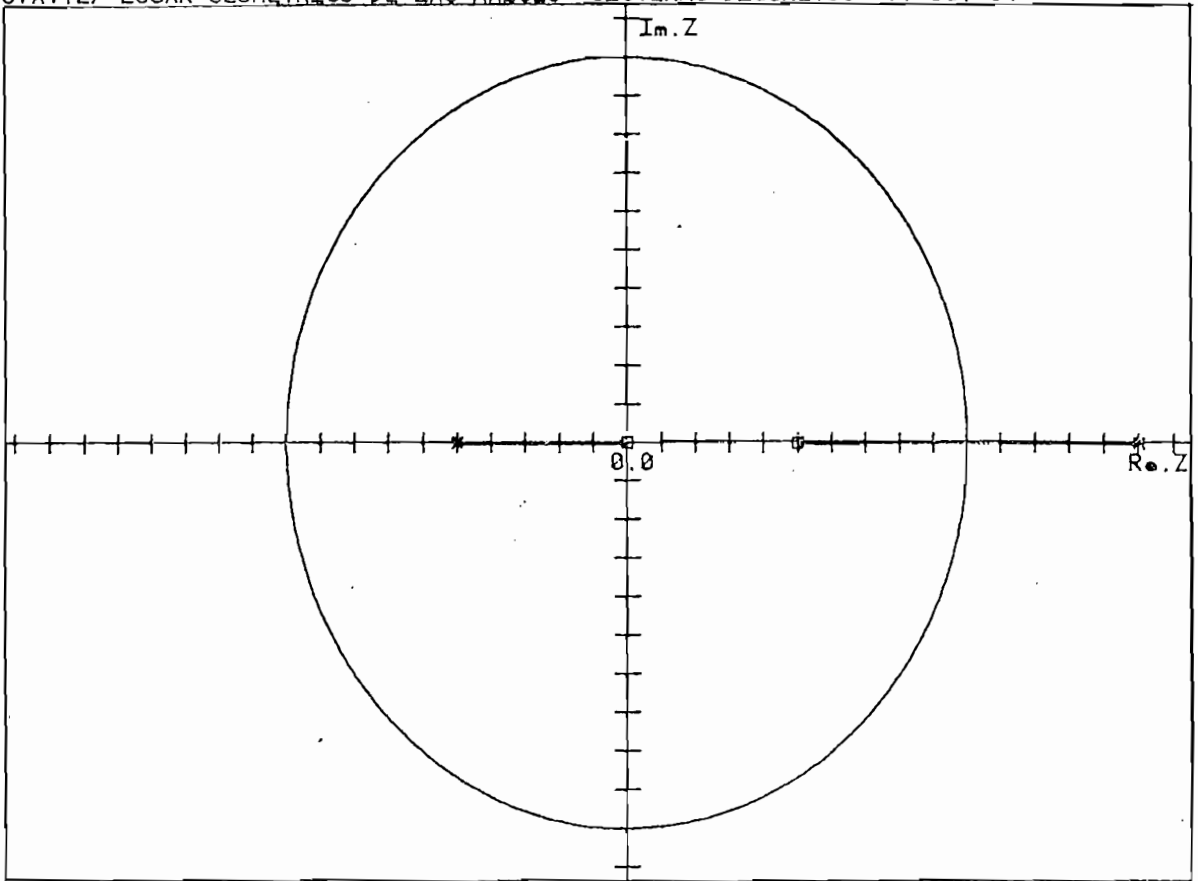
x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:REAL

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



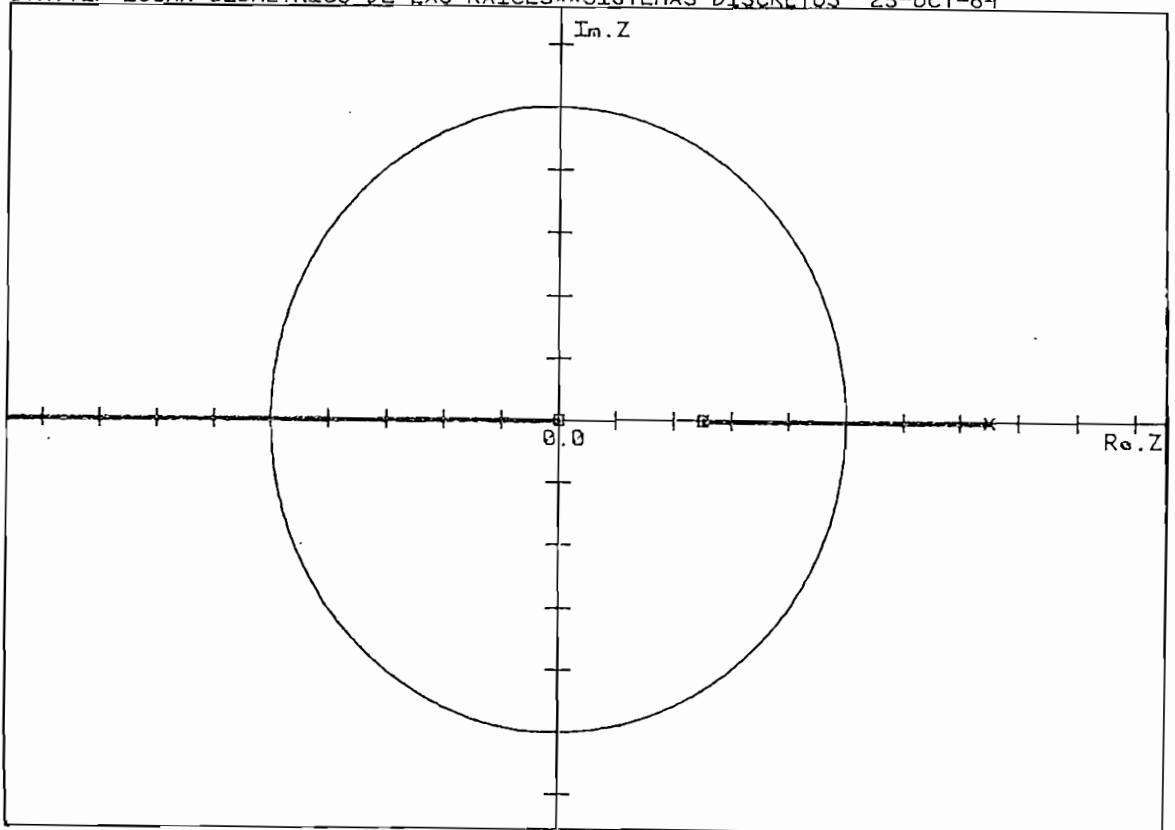
x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:REAL1

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



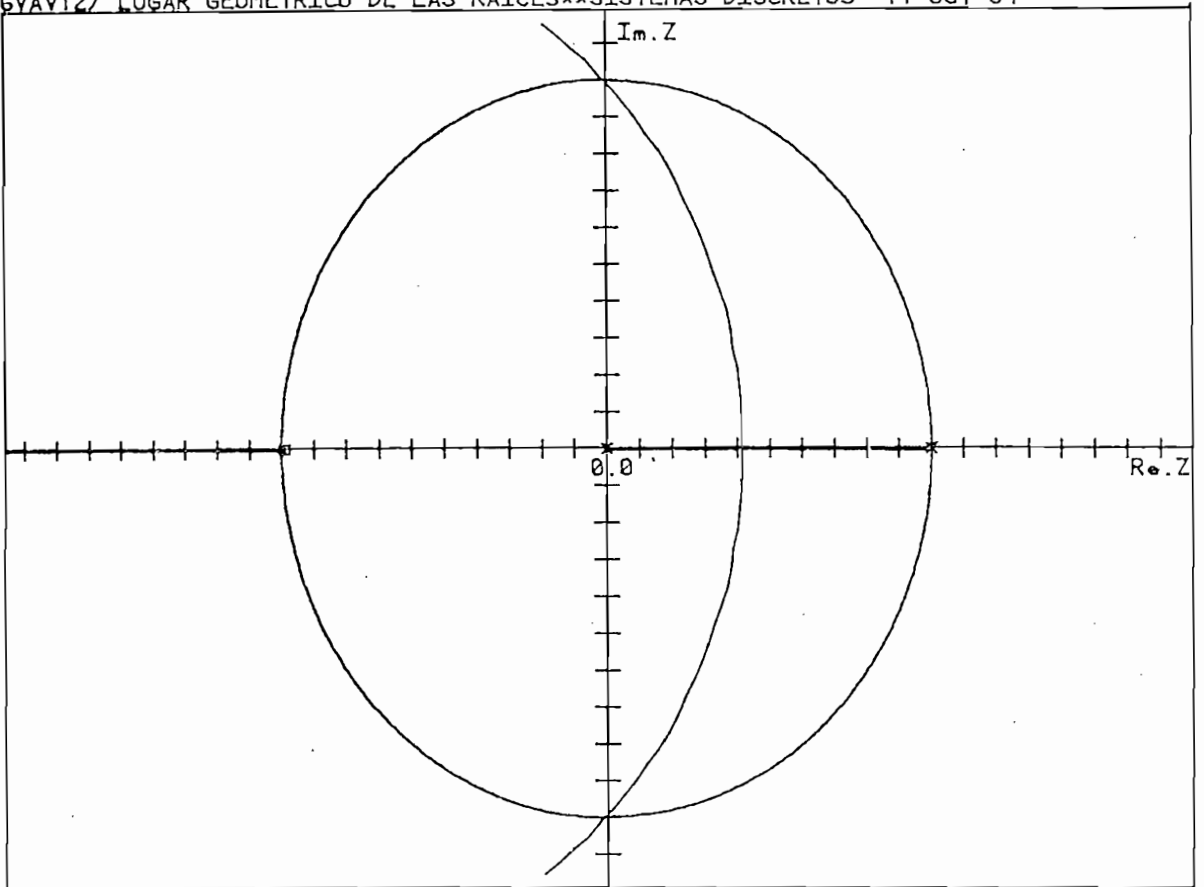
x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:REAL2

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 25-OCT-84



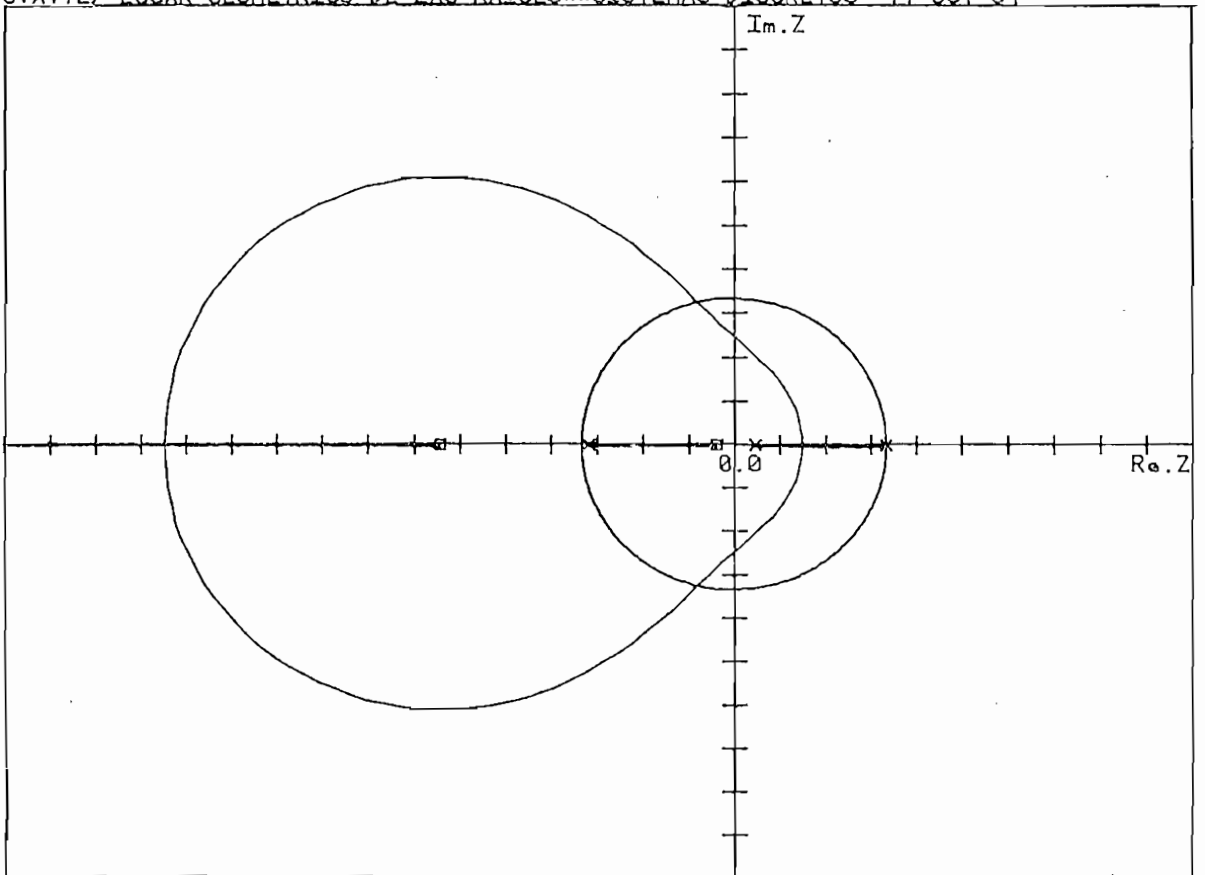
x=POLO o=CERO 1 División = 0.2 Unidades Archivo:REAL3

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



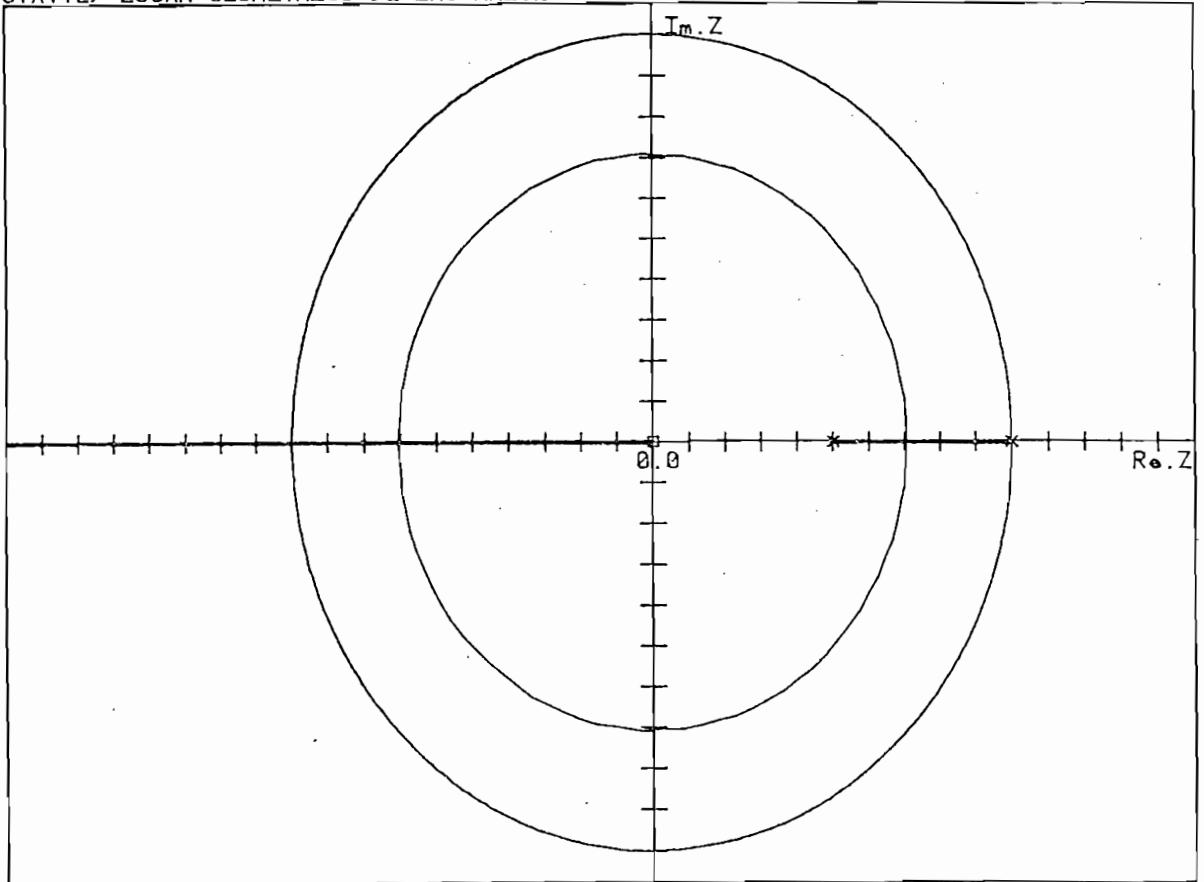
x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:TESIS3

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



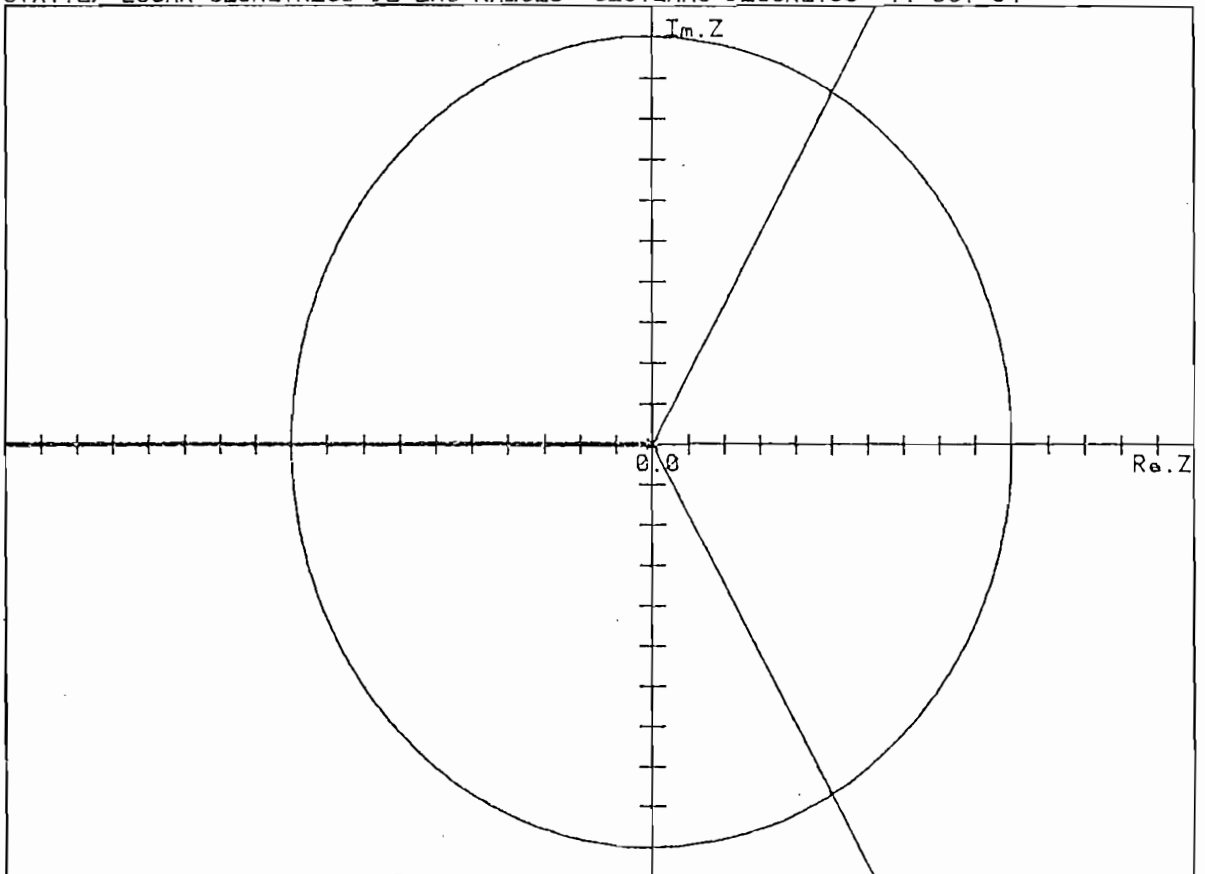
x=POLO o=CERO 1 División = 0.3 Unidades Archivo:TESIS4

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:TESIS7

GVAV12/ LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS 11-OCT-84



x=POLO o=CERO 1 División = 0.1 Unidades Archivo:TESIS9

C A P I T U L O V

CONCLUSIONES

Pese al gran adelanto observado durante los últimos años en el estudio de los sistemas discretos de control mediante el método de variables de estado, la importancia de la transformada Z es muy grande y no debe ser subestimada debido a que tiene aún gran vigencia - el análisis y diseño según la teoría de control clásico. Esta transformada es básica en el análisis y solución de problemas de control discreto y de muestreo de datos. Tal es así que mediante ella es posible expresar la ecuación característica de un sistema discreto como una función racional, lo cual permite a la vez utilizar el método del Lugar Geométrico de las Raíces en el estudio de estos sistemas.

El programa entregado en la presente tesis para graficar y analizar el L.G.R. de sistemas discretos en el plano Z viene a constituirse en una herramienta muy útil en aplicaciones de diseño y compensación de los mismos, por cuanto permite apreciar de manera objetiva y rápida la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema respecto a la variación de un parámetro, generalmente la ganancia de lazo abierto. Es evidente que este método es un enfoque poderoso y muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control, y continuará siendo uno de los procedimientos más utilizados dentro del estudio de la ingeniería de control.

Los ejemplos presentados en el capítulo IV nos indican que los re

sultados proporcionados por el programa son muy satisfactorios; además, permiten comprobar plenamente la relación directa existente entre la ubicación de las raíces en el plano Z y el funcionamiento del sistema en el dominio del tiempo, especialmente con la respuesta transitoria. Esto es, se ha investigado el movimiento de las Raíces en el plano Z a medida que varía un parámetro del sistema y su influencia en la respuesta y estabilidad del mismo.

Debe resaltarse el hecho de que el programa de respuesta del sistema en el dominio del tiempo a entradas paso e impulso presta una muy significativa ayuda en cuanto permite observar su comportamiento dinámico. Este subprograma, junto con el de análisis de estabilidad absoluta y la subrutina de determinación de la ganancia crítica permiten conocer de manera más profunda el comportamiento del sistema en cuanto se refiere a la estabilidad del mismo.

No se indican mayores comentarios respecto a los ejemplos presentados en el capítulo IV ya que estos fueron emitidos junto con cada ejemplo desarrollado.

En cuanto al lenguaje de programación utilizado, BASIC extendido, este presta las facilidades que el caso requiere, por cuanto permite dar un carácter conversacional a la ejecución del programa, de tal manera que el usuario tan solo debe seguir en forma adecuada las instrucciones que aparecen en pantalla para llegar a obtener los resultados adecuados.

Dentro de las limitaciones del programa están:

- Reducida memoria del equipo, lo cual influye en la obtención de gráficos de mayor resolución, como por ejemplo en la respuesta de frecuencia como sistema discreto, puesto que no pueden dimensionarse adecuadamente los arreglos que contienen los puntos para los gráficos. En caso de seleccionar un alto número de puntos para el gráfico, puede aparecer en pantalla el error de Memoria Completa (Memory Full).
- El programa sólo permite analizar sistemas en que el número de polos no exceda a siete y también no considera válidos los puntos que contienen más de cuatro raíces múltiples o más de tres puntos múltiples de separación. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, sistemas que contengan características superiores a estas limitaciones son muy poco comunes.

Finalmente puede concluirse que el desarrollo de esta tesis ha permitido profundizar los conocimientos adquiridos en los cursos dictados afines a este tema, así como también ha hecho posible conocer de manera más adecuada el funcionamiento del computador de la Facultad.

RECOMENDACIONES

En base a la experiencia adquirida durante el desarrollo de esta tesis, podría darse las siguientes recomendaciones:

- Implementar un programa que permita conocer la ubicación de las raíces, esto es conocer el valor de ganancia del sistema, a par

tir de criterios de desempeño y funcionamiento del sistema en el dominio del tiempo y de la frecuencia, así como implementar rutinas que hagan posible el cálculo de compensadores discretos de acuerdo a las necesidades de funcionamiento del sistema, todo lo cual sería de valiosa ayuda para diseño y compensación de sistemas de control.

- Durante el desarrollo del programa se observó la necesidad de construir diagramas de variación de las raíces de acuerdo a la variación del período de muestreo, lo cual es un asunto complejo debido a que el período de muestreo aparece en la función de transferencia discretizada elevado a diferentes exponentes y por tanto no es posible la aplicación de las leyes que rigen la construcción del L.G.R., las cuales son aplicables para cuando el parámetro que varía lo hace en una forma lineal. Sería muy interesante por tanto implementar los programas adecuados para permitir la construcción de estos diagramas.

En fin, la teoría referente al estudio de sistemas discretos es tan amplia que en verdad existen muchas cosas por hacer por lo que no es conveniente el citar más recomendaciones.

A P E N D I C E S

MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

1. Si el equipo se encuentra apagado, encenderlo de acuerdo a la siguiente secuencia:

1.1. Unidad de discos superior (1 y 2)

1.2. Unidad de discos inferior (0)

1.3. Computadora.

2. Si está encendida la luz indicativa del reloj ("CLOCK"), debe inicializarse el sistema de reloj desde el teclado con la siguiente instrucción:

CALL "SETTIM", "DD-~~MM~~-AA~~MM~~HH:MM:SS"

Presione la tecla RETURN

Siendo: DD : día

MM: mes (iniciales en inglés)

AA : año

∅ : espacio en blanco

HH : horas

MM : minutos

SS : segundos (opcional)

3. Coloque el disco de tesis en cualquiera de las unidades libres y cárguelo con las instrucciones:

3.1. CALL "UNIT", #

Presione la tecla RETURN

3.2. CALL "MOUNT", #, A\$

Presione la tecla RETURN

Siendo: # : número de la unidad donde se colocó el disco.

A\$ ó cualquier otra variable literal.

Si el disco fue colocado en la unidad 0, no es necesario ejecutar la instrucción 3.1.

4. Cargue a la memoria del computador el programa maestro mediante la instrucción:

OLD "GVAV12/LGRZPM"

Presione la tecla RETURN

5. Ejecute el programa con la instrucción:

RUN

Presione la tecla RETURN

ó simplemente presione la tecla definible 1.

6. Sigas las instrucciones que los programas le indican en la pantalla.

7. Si algún dato ha sido mal ingresado, en pantalla sale el error correspondiente que le indica la acción a tomar.

8. Cuando desee interrumpir la ejecución de algún programa, presione dos veces la tecla BREAK; para continuar asegúrese que los archivos estén cerrados ejecutando la instrucción.

CLOSE

Presione la tecla RETURN

Luego ejecute la instrucción:

RUN número de línea en que se interrumpió el programa.

Presione la tecla RETURN

9. Si en la pantalla aparece el mensaje de alistar el grafizador , debe proceder de la siguiente manera:
 - 9.1. Encienda el grafizador.
 - 9.2. Coloque papel y pluma.
 - 9.3. Fije los límites del tamaño del gráfico con las teclas SET.
 - 9.3. Presione la tecla RETURN.

NOTA: No se debe encender o apagar el grafizador cuando están abiertos archivos, tampoco deben sacarse los discos de las unidades correspondientes en este caso.

MANUAL DE ERRORES

A continuación se detallan los errores que pueden aparecer en pantalla cuando se están ejecutando los programas, su causa y la acción

a tomarse.

Para cualquier otro mensaje de error no contemplado en el presente listado, consulte el manual del sistema o de la unidad correspondiente.

ERROR 1 : Archivo XXX existe, se destruye (SIN O NO?):

Causa : El archivo XXX ha sido creado anteriormente.

Acción : Responder "SI" o "NO" de acuerdo a criterio propio e impotencia del archivo XXX.

ERROR 2 : Erros de épsilon, no hay punto de separación cercano.

Causa : Valor de épsilon introducido es inadecuado.

Acción : Reiniciar el programa (TECLA 1) e ingresar un valor de épsilon menor.

ARROR 3 : No existen datos todavía, PRIMERO INGRESELOS.

Causa : Se solicita cambiar límite en plano de datos sin existir datos previos.

Acción : Correr el programa (TECLA 1).

ERROR 4A : Archivo XXX no existe.

Causa : Se desea cargar datos desde discos, pero el archivo XXX no existe.

Acción : Ingresar el nombre correcto del archivo de puntos del L.G.R.

ERROR 4B : No existe o no está cerrado ARCHIVO de datos.

Causa : Se trata de realizar el análisis general del L.G.R. sin tener o sin terminar el cálculo del mismo.

Acción : Reiniciar el programa (TECLA 1) y verificar el trabajo.

ERROR 5 : Archivo XXX no es del L.G.R.

Causa : Se desea cargar datos por disco, pero el archivo XXX no es del L.G.R.

Acción : Reiniciar el programa (TECLA 1)

ERROR 6 : No hay raíces para 500 iteraciones y 5 valores.

Causa : No convergen los valores en la subrutina del cálculo de raíces.

Acción : Ninguna.

ERROR 7A : PRIMER coeficiente es cero * REPITA

Causa : El primer coeficiente del numerador o denominador de la F.T. de lazo abierto es cero.

Acción : Digitar el coeficiente correctamente.

ERROR 7B : PRIMER coeficiente es cero * REPITA

Causa : El primer coeficiente generado como función del período de muestreo es cero.

Acción : Ingresar correctamente los datos que hacen el primer coeficiente.

ERROR 8A : GANANCIA $K_0 = K$, FUERA DE LIMITES

Causa : Valor de ganancia estática determinada en el programa es negativo o mayor a 10000.

Acción: : Ninguna.

ERROR 8B : GANANCIA $K_0 = K$, FUERA DE LIMITES

Causa : Valor de ganancia estática es negativo o mayor a 10000.

Acción : Ingresar el valor correcto.

ERROR 8C : GANANCIA $K_0 = K$, FUERA DE LIMITES

Causa : El valor de ganancia estática determinado por el programa en el ingreso de coeficientes como función del período de muestreo es negativo o mayor a 10000.

Acción : Ninguna.

ERROR 8D : Error en el valor de ganancia, REPITA

Causa : El valor de ganancia ingresado para análisis de estabi-

lidad absoluta o respuesta en el tiempo es negativo o igual a 0.

Acción : Ingresar el valor correcto.

ERROR 8E : Error en el valor de ganancia, REPITA.

Causa : El valor de ganancia ingresado para el análisis de frecuencia es negativo o igual a 0.

Acción : Ingresar el valor correcto.

ERROR 9 : Por el grado del XXX no hay más conjugadas.

Causa : Al ingresar una raíz compleja, debido al grado del XXX (numerador o denominador) no puede generarse su conjugada.

Acción : Corregir el valor de la última raíz o reiniciar el programa.

ERROR 10 : GRADO-NUMERADO excede a máximo de "7"

Causa : El grado del numerador es negativo o mayor a 7.

Acción : Ingresar el valor correctamente.

ERROR 11 : GRADO-DENOMINADOR excede a máximo de "7"

Causa : El grado del denominador es negativo o mayor a 7.

Acción : Ingresar el valor correctamente.

ERROR 12 : GRADO-NUMERADOR excede a GRADO-DENOMINADOR.

Causa : Grado del numerador es mayor al del denominador.

Acción : Ingresar los valores correctos.

ERROR 13 : TODAS las raíces se han cancelado - FIN

Causa : Los polos y ceros se han cancelado mutuamente por lo que no puede construirse el L.G.R.

Acción : Ninguna.

ERROR 14 : n Raíces múltiples (no se contempla)

Causa : En un mismo punto existen n raíces que exceden al máxi

mo de 4 previsto.

ERROR 15 : n Ptos. de sep. múltiples.

Causa : En un mismo punto existen n puntos de separación que excede al máximo de 3 previsto.

Acción : Ninguna.

ERROR 16A : Error en el número digitado, REPITA.

Causa : Error en el escogitamiento de respuesta a función paso o impulso para gráfico en el tiempo.

Acción : Digitar el número correcto.

ERROR 16B : Error en el número digitado, REPITA.

Causa : Error en el escogitamiento del gráfico deseado en el análisis de frecuencia.

Acción : Digitar el número correcto.

ERROR 17A : El período de muestreo es ≤ 0 , REPITA.

Causa : En el ingreso de coeficientes como función del período de muestreo, este es negativo o igual a cero.

Acción : Ingresar el valor correcto.

ERROR 17B : El período de muestreo es ≤ 0 , REPITA

Causa : El período de muestreo ingresado para el análisis de frecuencia es negativo o igual a cero.

Acción : Ingresar el valor correcto.

ERROR 18 : Respuesta = * equivocada.

Causa : En el cambio de límites del plano de datos, el eje a cambiar ingresado es diferente a X o Y.

Acción : Ingresar el dato correcto.

```

1 REM ***** LGRZFM *****
2 REM ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
3 REM FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
4 GO TO 100
5 REM DEPARTAMENTO DE CONTROL
6 REM TESIS DE GRADO: LUGAR DE LAS RAICES PARA SISTEMAS DISCRETOS
7 REM GALO V. ACOSTA VALENCIA QUITO,NOVIEMBRE DE 1984
8 T1=1
9 GO TO 300
10 REM OBJETIVO: GRAFICAR EL LUGAR DE LAS RAICES PARA UN SISTEMA
11 REM DISCRETO Y REALIZAR EL ANALISIS CORRESPONDIENTE
12 T1=2
13 GO TO 300
14 REM METODO : LOS PUNTOS DEL L.G.R, SE DETERMINAN EN BASE
15 REM A LAS ECUACIONES DE FASE Y MAGNITUD
16 T1=1
17 GO TO 58
20 T1=2
21 GO TO 58
24 T1=3
25 GO TO 58
28 T1=4
29 GO TO 58
32 GOSUB 2740
33 GOSUB 3170
34 GOSUB 330
35 GO TO 400
36 GO TO 660
40 T1=5
41 GO TO 58
44 T1=7
45 GO TO 58
48 T1=6
49 T2=1
50 GO TO 58
52 T1=6
53 T2=2
54 GO TO 58
56 T1=8
58 IF S0=4 THEN 10000
80 GO TO 3270
100 INIT
110 CALL "USERLIB", "GVAV12"
120 DIM Z$(18),Y$(50),R$(50),X$(20),T$(17),L$(7)
130 CALL "TIME",Z$
140 DELETE 10001,30000
150 Y$="LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES**SISTEMAS DISCRETOS"
160 PRINT USING 170;Y$
170 IMAGE "LJJ",12X,50A,"",12X,50( "=")
180 PRINT " GVAV/",",Z$
190 PRINT "JJJJ POSIBILIDADES:"
200 PRINT "J TECLA 1 ==> REINICIAR EL PROGRAMA (RUN)"
210 PRINT "J TECLA 2 ==> DATOS COMO COEFICIENTES"
220 PRINT "J TECLA 3 ==> DATOS COMO FACTORES (RAICES)"

```

```

230 PRINT "J          TECLA 9 ==> LISTADO DE VARIABLES EN USO"
240 PRINT "J          TECLA 20 ==> ENTRADA DE DATOS DESDE DISCO"
250 PRINT "JJ         Escoja TECLA          "
260 PRINT "GG         -----"
270 S0=0
280 END
290 REM .....
300 REM          Entrada general de datos          (LGRZED)
310 T2=2
320 GOSUB 720
330 GOSUB 10000
340 REM .....
350 REM          Calculo y evaluacion de raices (LGRZCE)
360 T2=3
370 GOSUB 720
380 GOSUB 10000
390 REM  Generacion del LGR
400 GOSUB 1240
410 PRINT "JG          FIN DEL LGR  G"
420 CLOSE
430 S0=4
440 REM .....
450 REM          Graficacion, impresion y extras (LGRZAG)
460 T2=4
470 GOSUB 720
480 REM  Posibilidades de la segunda parte
490 PRINT USING 170;Y#
500 PRINT "J          POSIBILIDADES:"
510 PRINT "J          TECLA 1 ==> REINICIO DEL PROGRAMA (RUN)"
520 PRINT "J          TECLA 4 ==> DADO UN PUNTO, OBTENER SU GANANCIA"
530 PRINT "J          TECLA 5 ==> OBTENCION DEL VALOR DE K CRITICO"
540 PRINT "J          TECLA 6 ==> GRAFICO DEL L.G.R."
550 PRINT "J          TECLA 7 ==> IMPRESION DE DATOS DEL L.G.R."
560 PRINT "J          TECLA 8 ==> CAMBIAR LIMITES EN PLANO DE DATOS"
570 PRINT "J          TECLA 10 ==> DADA K, OBTENER LOS PUNTOS EN LGR"
580 PRINT "J          TECLA 11 ==> RESPUESTA DE FRECUENCIA, GRAFICOS"
590 PRINT "J          TECLA 12 ==> ESTABILIDAD ABSOLUTA"
600 PRINT "J          TECLA 13 ==> RESPUESTA EN EL TIEMPO, GRAFICOS"
610 PRINT "J          TECLA 14 ==> MENU DE ESTAS ALTERNATIVAS"
620 PRINT "JJ         Escoja TECLA          "
630 PRINT "GG         -----"
640 END
650 REM xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
660 REM          Listado de variables en uso          (LGRZVU)
670 T2=1
680 GOSUB 720
690 GOSUB 10000
700 END
710 REM =====
720 REM          SUPERPOSICION DE PROGRAMAS          S/R
730 DATA "LGRZVU", "LGRZED", "LGRZCE", "LGRZAG"
740 RESTORE 730
750 DELETE 10001,30000
760 TO=MEMORY

```

```

770 FOR I=1 TO T2
780 READ R#
790 NEXT I
800 APPEND R#;10000
810 RETURN
820 REM =====
830 REM                      Grabacion de datos de entrada                      S/R
840 REM X# --> Archivo SAM de pares de puntos
850 REM T# --> Archivo DAM de datos del LGR
860 L#="RL/"
870 DIM S$(300)
880 PRINT "GGGJUNIDAD donde esta el disco : ";
890 INPUT T3
900 IF T3>2 OR T3<0 THEN 880
910 CALL "UNIT",T3
920 PRINT ".JNOMBRE del archivo de resultados : ";
930 INPUT X#
940 T#=L#&X#
950 CALL "FILE",T3,X#,S#
960 IF S0=4 THEN 1220
970 IF S#="" THEN 1030
980 PRINT "JG ERROR1 Archivo ";X#;" existe, se destruye (SI O NO?): ";
990 INPUT R#
1000 IF R#<>"SI" THEN 920
1010 KILL X#
1020 KILL T#
1030 CREATE X#;10000,0
1040 CREATE T#;10,700
1050 OPEN X#;1,"F",S#
1060 OPEN T#;2,"F",S#
1070 WRITE #2,1;Y#
1080 WRITE #2,2;X0,X1,Y1,E1,E2,E8,E9,C9,A6
1090 WRITE #2,3;N1,D1,N,K0,S2
1100 IF N1<>0 THEN 1120
1110 C0=1
1120 WRITE #2,4;C0
1130 WRITE #2,5;C1
1140 WRITE #2,6;F
1150 WRITE #2,7;S
1160 WRITE #1;X9
1170 DELETE X9,X
1180 DIM X(9)
1190 X=0
1200 N3=0
1210 GOSUB 2470
1220 RETURN
1230 REM.....
1240 REM                      Calculo del LGR desde los ptos. de separacion
1250 S0=3
1260 PRINT "J                      Estoy grabando los puntos del LGR"
1270 S1=0
1280 SET DEGREES
1290 B4=0
1300 FOR I=1 TO N

```



```

1310 IF S(4,I)=0 OR S(4,I)=2 OR ABS(S(2,I))>E1 THEN 2430
1320 IF S(3,I)<3 THEN 1340
1330 B4=1
1340 A0=180/(S(3,I)+1)
1350 X2=S(1,I)
1360 Y2=0
1370 GOSUB 1690
1380 X2=X2+E2*COS(A0)
1390 Y2=Y2+E2*SIN(A0)
1400 E=1000
1410 A1=7
1420 GOSUB 1690
1430 REM Busqueda de 5 puntos en abanico con angulo de A1 grados c/u
1440 FOR I2=1 TO 5
1450 A4=A0+(3-I2)*A1
1460 X4=X2+E2*COS(A4)
1470 Y4=Y2+E2*SIN(A4)
1480 GOSUB 1730
1490 IF E<=E3 THEN 1540
1500 X3=X4
1510 Y3=Y4
1520 A3=A4
1530 E=E3
1540 NEXT I2
1550 REM Evaluacion y correccion del Epsilon de distancia
1560 IF E>1 THEN 1610
1570 IF E=>0.5 THEN 1640
1580 IF E2=>10*E9 THEN 1640
1590 E2=1.2*E2
1600 GO TO 1640
1610 IF E2<=2*E9 THEN 1640
1620 E2=0.8*E2
1630 GO TO 1440
1640 X2=X3
1650 Y2=Y3
1660 A0=A3
1670 GO TO 1400
1680 REM ----- Grabacion de puntos del LGR (S/R) -----
1690 N2=N2+1
1700 WRITE #1:X2,Y2
1710 RETURN
1720 REM.....
1730 REM Evaluacion como punto del LGR S/R
1740 IF X4=>X1 OR X4<=X0 OR Y4=>Y1 THEN 1940
1750 IF S1=1 THEN 2030
1760 IF Y4=>E2/2 THEN 2010
1770 I1=1
1780 IF I+I1>N THEN 1990
1790 IF ABS(ABS(S(1,I+I1))-ABS(X4))=>E2 OR S(4,I+I1)=0 THEN 1810
1800 GO TO 1830
1810 I1=I1+1
1820 GO TO 1780
1830 X2=S(1,I+I1)
1840 Y2=0

```

```

1850 GOSUB 1690
1860 S(4,I+I1)=2
1870 IF S(3,I+I1)<>0,5 THEN 1900
1880 A0=120
1890 GO TO 1360
1900 IF S(3,I)<3 THEN 1940
1910 X2=S(1,I)
1920 A0=135
1930 GO TO 1360
1940 IF B4<>1 THEN 2420
1950 B4=0
1960 X2=S(1,I)
1970 GOSUB 2470
1980 GO TO 1900
1990 PRINT "JG ERROR2 Error en epsilon; no hay sto. de sep. cercano"
2000 END
2010 REM ..... Destino en raices complejas
2020 IF S2=0 THEN 2140
2030 IF Y4<=-(2*E9) THEN 2420
2040 FOR I1=1 TO N1+D1
2050 IF ABS(F(2,I1))<=E1 OR F(5,I1)=2 THEN 2130
2060 IF ABS(F(2,I1)-Y4)>E2 THEN 2130
2070 IF ABS(ABS(F(1,I1))-ABS(X4))>E2 THEN 2130
2080 F(5,I1)=3
2090 X2=F(1,I1)
2100 Y2=F(2,I1)
2110 GOSUB 1690
2120 GO TO 2420
2130 NEXT I1
2140 REM ..... Sumatorio de angulos y calculo de K
2150 A2=0
2160 K1=K0
2170 FOR I1=1 TO N1+D1
2180 IF F(5,I1)=2 OR (F(5,I1)=0 AND ABS(F(2,I1))<=E1) THEN 2320
2190 T0=F(4,I1)*-1^F(3,I1)
2200 T1=X4-F(1,I1)
2210 T2=Y4-F(2,I1)
2220 IF ABS(F(2,I1))<=E1 THEN 2240
2230 T0=T0/F(4,I1)
2240 IF T1<>0 THEN 2270
2250 A5=90
2260 GO TO 2300
2270 A5=ATN(T2/T1)
2280 IF T1=>0 THEN 2300
2290 A5=A5+180
2300 A2=A2+T0*A5
2310 N1=K1*(T1*T1+T2*T2)^(-T0/2)
2320 NEXT I1
2330 H9=0
2340 ON SIZE THEN 2380
2350 A2=A2-INT(ABS(A2)/360)*360*A2/ABS(A2)
2360 ON SIZE THEN 2380
2370 GO TO 2390
2380 H9=1

```

```

2390 E3=ABS(ABS(A2)-180)
2400 RETURN
2410 REM.....
2420 GOSUB 2470
2430 IF S1=1 THEN 2700
2440 NEXT I
2450 GO TO 2530
2460 REM.....
2470 REM          Grabacion de numero de puntos por curva          S/R
2480 N3=N3+1
2490 X(N3)=N2
2500 N2=0
2510 RETURN
2520 REM.....
2530 IF S2=0 THEN 2710
2540 REM..... LGR desde raices complejas
2550 S1=1
2560 P4=0
2570 FOR I=1 TO N1+D1
2580 IF NOT(F(2,I)>E1 AND F(5,I)<>3) THEN 2700
2590 F(5,I)=2
2600 X4=F(1,I)
2610 Y4=F(2,I)
2620 GOSUB 2140
2630 A0=E3*-1^F(3,I)*ABS(A2)/A2
2640 IF ABS(A2)<=180 THEN 2660
2650 A0=-A0
2660 F(5,I)=1
2670 X2=F(1,I)
2680 Y2=F(2,I)
2690 GO TO 1370
2700 NEXT I
2710 WRITE #2,8;N3,X
2720 CLOSE
2730 E2=5*E9
2740 RETURN
2750 REM =====
2760 REM          Cambio de limites en plano de datos          S/R
2770 IF S0>3 THEN 2800
2780 PRINT "JG ERROR3 No existen datos todavia; PRIMERO INGRESELOS"
2790 GO TO 190
2800 PRINT USING 170;Y$
2810 PRINT "J          CAMBIO DE LIMITES EN PLANO DE DATOS"
2820 PRINT "JFuede cambiar un solo eje; eje imaginario es simetrico"
2830 PRINT "JLOS LIMITES ACTUALES SON : "
2840 PRINT "J","X min. ","X max. ","Y max. "," ",X0,X1,Y1
2850 PRINT "JPara eje real ==> X          Para eje imaginario ==> Y"
2860 PRINT "J          Que eje desea cambiar ";
2870 INPUT R$
2880 IF R$<>"X" THEN 2930
2890 PRINT "JDisitar los limites en eje real (Xmin,Xmax) = ";
2900 INPUT X0,X1
2910 Y1=ABS(50/130*(X1-X0))
2920 GO TO 3010

```

```

2930 IF R#<>"Y" THEN 2990
2940 PRINT "JDigitar maximo para eje imasinario (Ymax) = ";
2950 INPUT Y1
2960 X1=ABS(Y1)
2970 X0=-80/50*ABS(Y1)
2980 GO TO 3010
2990 PRINT "JG ERROR18 Respuesta = ";R#;" equivocada"
3000 GO TO 2860
3010 WINDOW X0,X1,-Y1,Y1
3020 PAGE
3030 E9=ABS(X1-X0)/700
3040 I=0
3050 T2=ABS(X1-X0)/20
3060 IF T2=>1 THEN 3100
3070 I=I+1
3080 T2=10*T2
3090 GO TO 3060
3100 E8=INT(T2)
3110 IF I=0 THEN 3130
3120 E8=E8/10^I
3130 E2=5*E9
3140 S0=2
3150 RETURN
3160 REM Lectura de puntos en eje real
3170 N2=X(1)
3180 DELETE X9
3190 DIM X9(X(1))
3200 GOSUB 13780
3210 READ #1:X9
3220 CLOSE 1
3230 BELETE 10001,30000
3240 IO=MEMORY
3250 RETURN
3260 REM =====
3270 REM Carga de diskette de calculos anteriores
3280 J3=0
3290 PRINT "J * ENTRADA DE DATOS DESDE DISKETTE *"
3300 S0=4
3310 GOSUB 830
3320 IF S#<>" " THEN 3360
3330 PRINT "JG ERROR4A Archivo ";X#;" no existe"
3340 GOSUB 920
3350 GO TO 3320
3360 OPEN T#2,"R",S#
3370 READ #2,1;R#
3380 IF R#=#Y# THEN 3420
3390 PRINT "JG ERROR5 Archivo ";X#;" no es de LGR"
3400 CLOSE
3410 END
3420 DELETE X,C0,C1,F,S
3430 DIM X(9)
3440 READ #2,2;X0,X1,Y1,E1,E2,E8,E9,C9,A6
3450 READ #2,3;N1,D1,N,K0,S2
3460 DIM C0(N1+1),C1(D1+1),F(5,N1+D1),S(4,N)

```

```

3470 IF N1=0 THEN 3490
3480 READ #2,4;C0
3490 READ #2,5;C1
3500 READ #2,6;F
3510 READ #2,7;S
3520 READ #2,8;N3,X
3530 GO TO 430
3540 REM =====
3550 REM//////// Obtencion de las raices de un polinomio entero // S/R
3560 REM      TEKTRONIX PLOT 50      Mathematics Volumen 2
3570 DELETE P1,P2,Q1,Q2,F
3580 DIM P1(N),P2(N),Q1(N+1),Q2(N+1),F(14)
3590 E=E1/20
3600 FOR P0=1 TO N+1
3610 P7=N+1-P0+1
3620 Q1(P0)=T(P7)
3630 NEXT P0
3640 PRINT "          Estoy buscando las raices"
3650 GOSUB 3730
3660 RETURN
3670 REM  "Polynomial roots"  (Parametros)
3680 REM      Q1 -- Vector de N+1 coeficientes en orden ascendente
3690 REM      N  -- Grado del polinomio
3700 REM      P1 -- Raices (parte real)
3710 REM      P2 -- Raices (parte imaginaria)
3720 REM      E  -- Exactitud deseada
3730 F(9)=0
3740 P7=N
3750 P(7)=P7
3760 P(8)=P7+1
3770 P(6)=1
3780 Q7=P7+2
3790 FOR Q0=1 TO P7+1
3800 Q2(Q7-Q0)=Q1(Q0)
3810 NEXT Q0
3820 P(11)=0.00500101
3830 P(12)=0.010000101
3840 P(4)=0
3850 P8=P(11)
3860 P(11)=-10*P(12)
3870 P(12)=-10*P8
3880 P8=P(11)
3890 P9=P(12)
3900 P(4)=P(4)+1
3910 GO TO 3950
3920 F(9)=1
3930 P(13)=P8
3940 P(14)=P9
3950 F(5)=0
3960 F3=0
3970 F4=0
3980 F6=0
3990 Q3=1
4000 Q4=0

```

```

4010 P5=Q2(F7+1)
4020 IF P5=0 THEN 4490
4030 FOR P0=1 TO P7
4040 Q0=P7+1-P0
4050 Q8=Q2(Q0)
4060 Q5=P8*Q3-P9*Q4
4070 Q6=P8*Q4+P9*Q3
4080 P5=P5+Q8*Q5
4090 P6=P6+Q8*Q6
4100 P3=P3+P0*Q3*Q8
4110 P4=P4-P0*Q4*Q8
4120 Q3=Q5
4130 Q4=Q6
4140 NEXT P0
4150 P(10)=P3*P3+P4*P4
4160 IF P(10)=0 THEN 4400
4170 P(2)=(P6*P4-P5*P3)/P(10)
4180 P8=P8+P(2)
4190 P(3)=- (P5*P4+P6*P3)/P(10)
4200 P9=P9+P(3)
4210 IF ABS(P(2))+ABS(P(3))<E THEN 4280
4220 P(5)=P(5)+1
4230 IF P(5)<500 THEN 3960
4240 IF P(9)<>0 THEN 4280
4250 IF P(4)<5 THEN 3850
4260 PRINT "JG ERROR6 No hay raices para 500 iteraciones y 5 valores"
4270 END
4280 P0=N+2
4290 FOR Q0=1 TO P(8)
4300 Q7=P0-Q0
4310 Q8=Q1(Q7)
4320 Q1(Q7)=Q2(Q0)
4330 Q2(Q0)=Q8
4340 NEXT Q0
4350 Q7=P7
4360 P7=P(7)
4370 P(7)=Q7
4380 IF P(9)=0 THEN 3920
4390 GO TO 4430
4400 IF P(9)=0 THEN 3850
4410 P8=P(13)
4420 P9=P(14)
4430 P(9)=0
4440 IF ABS(P9)<10*E*ABS(P8) THEN 4520
4450 P(1)=P8+P8
4460 P(10)=P8*P8+P9*P9
4470 P7=P7-2
4480 GO TO 4560
4490 P8=0
4500 P(7)=P(7)-1
4510 P(8)=P(8)-1
4520 P9=0
4530 P(10)=0
4540 P(1)=P8

```

```

4550 P7=P7-1
4560 Q2(2)=Q2(2)+P(1)*Q2(1)
4570 Q7=P(1)
4580 Q8=P(10)
4590 FOR Q0=2 TO P7
4600 Q2(Q0+1)=Q2(Q0+1)+Q7*Q2(Q0)-Q8*Q2(Q0-1)
4610 NEXT Q0
4620 P1(P(6))=P8
4630 P2(P(6))=P9
4640 P(6)=P(6)+1
4650 IF P(10)=0 THEN 4690
4660 P9=-P9
4670 P(10)=0
4680 GO TO 4620
4690 IF P7>0 THEN 3820
4700 RETURN
4710 REM *****
10000 REM

```

```

10000 REM ***** LGRZED ***** S
10010 REM
10020 REM
10030 REM           Programa de entrada/verificacion de datos y
10040 REM           Calculo de raices de un polinomio.
10050 REM
10060 J3=0
10070 GOSUB T1 OF 10090,10730
10080 RETURN
10090 REM ===== Datos como coeficientes =====
10100 B4=0
10110 PRINT USING 170;Y#
10120 PRINT "J           *** ENTRADA COMO COEFICIENTES ***"
10130 GOSUB 11250
10140 PRINT "JSon los coef. funcion del Periodo de Muestreo T(S/N)=";
10150 INPUT R#
10160 IF R#="SI" OR R#="S" THEN 11570
10170 IF N1<.0 THEN 10210
10180 PRINT "JGANANCIA DEL NUMERADOR = ";
10190 INPUT K1
10200 GO TO 10290
10210 PRINT "JDIGITAR LOS COEFICIENTES DEL NUMERADOR"
10220 S0=0
10230 DIM T(N1+1),C0(N1+1)
10240 T0=1
10250 T1=N1
10260 T2=N1
10270 GOSUB 10420
10280 C0=T
10290 PRINT "JDIGITAR LOS COEFICIENTES DEL DENOMINADOR"
10300 S0=1
10310 T0=N1+1
10320 T1=D1
10330 T2=N1+D1
10340 K0=K1
10350 DELETE T
10360 DIM T(D1+1),C1(D1+1)
10370 GOSUB 10420
10380 C1=T
10390 DELETE T
10400 RETURN
10410 REM.....
10420 REM           Entrada de coeficientes (numerador o denominador)           S/R
10430 FOR I=1 TO T1+1
10440 PRINT "           Z**";T1+1-I;" = ";
10450 INPUT T(I)
10460 IF I>1 THEN 10540
10470 IF T(1)<>0 THEN 10500
10480 PRINT "JG ERROR7A PRIMER coeficiente es cero * REPITA"
10490 GO TO 10430
10500 K1=T(1)
10510 IF S0=0 THEN 10540
10520 K0=K0/K1
10530 IF K0<.0 OR K0>10000 THEN 10710

```



```

10540 T(I)=T(I)/K1
10550 NEXT I
10560 T(1)=1
10570 N=T1
10580 IF N>1 THEN 10630
10590 F(1,T0)=-T(2)
10600 F(2,T0)=0
10610 F(3,T0)=S0
10620 GO TO 10700
10630 GOSUB 3550
10640 FOR I=T0 TO T2
10650 F(1,I)=P1(I-T0+1)
10660 F(2,I)=P2(I-T0+1)
10670 F(3,I)=S0
10680 NEXT I
10690 DELETE P1,P2,Q1
10700 RETURN
10710 PRINT "JG ERRORESA GANANCIA Ko = ";K0;" FUERA DE LIMITES "
10720 END
10730 REM ===== Datos como factores (raices) =====
10740 B4=1
10750 PRINT USING 170;Y#
10760 PRINT "J *** ENTRADA COMD RAICES ***"
10770 GOSUB 11240
10780 PRINT "JGANANCIA TOTAL Ko = ";
10790 INPUT K0
10800 IF K0<10001 AND K0>0 THEN 10830
10810 PRINT "JG ERRORESB GANANCIA Ko = ";K0;" FUERA DE LIMITES "
10820 GO TO 10780
10830 IF N1=0 THEN 10900
10840 S0=0
10850 X#="NUMERADOR"
10860 T#="CERO"
10870 T1=N1
10880 T0=1
10890 GOSUB 10980
10900 S0=1
10910 X#="DENOMINADOR"
10920 T#="POLO"
10930 T1=N1+01
10940 T0=N1+1
10950 GOSUB 10980
10960 RETURN
10970 REM.....
10980 REM Entrads de raices (numerador o denominador) S/R
10990 REM
11000 PRINT "JDIGITAR LAS RAICES DEL ";X#;" (";T#;"S)"
11010 FOR I=10 TO T1
11020 PRINT " ";T#;" (";I-T0+1;") : PARTE REAL = ";
11030 INPUT F(1,I)
11040 PRINT " PARTE IMAGINARIA = ";
11050 INPUT F(2,I)
11060 F(3,I)=S0
11070 IF F(2,I)=0 THEN 11220

```

```

11080 IF I=T1 THEN 11160
11090 I=I+1
11100 F(1,I)=F(1,I-1)
11110 F(2,I)=-F(2,I-1)
11120 F(3,I)=S0
11130 PRINT " ;T%;" (" ;I-T0+1;") ; PARTE REAL = ";F(1,I)
11140 PRINT " PARTE IMAGINARIA = ";F(2,I)
11150 GO TO 11220
11160 PRINT "JG ERROR9 Por el grado del ";X%;" no hay mas conJusadas"
11170 PRINT "J SE EQUIVOCO SOLO EN EL ULTIMO ";T%;"? (SI O NO) = ";
11180 INPUT R#
11190 IF R#="SI" OR R#="S" THEN 11210
11200 GO TO 11000
11210 I=I-1
11220 NEXT I
11230 RETURN
11240 REM.....
11250 REM Lecture y validacion de grados S/R
11260 E1=0.05
11270 PRINT "J Epsilon Rango-de-trabajo Tipo"
11280 PRINT " # 1 0 a 1 bajo"
11290 PRINT " # 2 1 a 100 normal"
11300 PRINT " # 3 100 en adelante alto"
11310 PRINT "JNumero de Epsilon para sus calculos? = ";
11320 INPUT T1
11330 GO TO T1 OF 11350,11380,11370
11340 GO TO 11270
11350 E1=E1/10
11360 GO TO 11380
11370 E1=E1*10
11380 PRINT "JGRADO DEL NUMERADOR = ";
11390 INPUT N1
11400 IF N1<=7 AND N1>=0 THEN 11430
11410 PRINT "JG ERROR10 GRADO-NUMERADOR excede a maximo de "7""
11420 GO TO 11380
11430 PRINT "JGRADO DEL DENOMINADOR = ";
11440 INPUT D1
11450 IF D1<=7 AND D1>=0 THEN 11480
11460 PRINT "JG ERROR11 GRADO-DENOMINADOR excede a maximo de "7""
11470 GO TO 11430
11480 IF N1<=D1 THEN 11510
11490 PRINT "JG ERROR12 GRADO-NUMERADOR excede a GRADO-DENOMINADOR "
11500 GO TO 11380
11510 N1=INT(N1)
11520 D1=INT(D1)
11530 DELETE F,C0,C1,C2,C3,C4,T,S
11540 DIM F(S,N1+D1)
11550 F=1
11560 RETURN
11570 REM.....
11580 J3=1
11590 PRINT "J INGRESE EL PERIODO DE MUESTREO T = ";
11600 INPUT J2
11610 IF J2>=0 THEN 11640

```

```

11620 PRINT "JG ERROR 17A El periodo de muestreo es <=0,REPITA"
11630 GO TO 11590
11640 IF N1<>0 THEN 11680
11650 PRINT "JGANANCIA DEL NUMERADOR =" ;
11660 INPUT K1
11670 GO TO 11770
11680 PRINT "JDIGITAR LOS COEFICIENTES DEL NUMERADOR"
11690 S0=0
11700 DIM T(N1+1),C0(N1+1),M4(N1+1,8),M3(N1+1)
11710 T0=1
11720 T1=N1
11730 T2=N1
11740 GOSUB 12170
11750 GOSUB 11900
11760 C0=T
11770 PRINT "JDIGITAR LOS COEFICIENTES DEL DENOMINADOR"
11780 S0=1
11790 T0=N1+1
11800 T1=D1
11810 T2=N1+D1
11820 K0=K1
11830 DELETE T,M4,M3
11840 DIM T(D1+1),C1(D1+1),M4(D1+1,8),M3(D1+1)
11850 GOSUB 12170
11860 GOSUB 11900
11870 C1=T
11880 DELETE T,M4,M3
11890 RETURN
11900 REM .....
11910 FOR I=1 TO T1+1
11920 T(I)=M3(I)
11930 IF I>1 THEN 11980
11940 K1=T(1)
11950 IF S0=0 THEN 11980
11960 K0=K0/K1
11970 IF K0<0 OR K0>10000 THEN 12150
11980 T(I)=T(I)/K1
11990 NEXT I
12000 T(1)=1
12010 N=T1
12020 IF N>1 THEN 12070
12030 F(1,T0)=-T(2)
12040 F(2,T0)=0
12050 F(3,T0)=S0
12060 GO TO 12140
12070 GOSUB 3550
12080 FOR I=T0 TO T2
12090 F(1,I)=F1(I-T0+1)
12100 F(2,I)=F2(I-T0+1)
12110 F(3,I)=S0
12120 NEXT I
12130 DELETE F1,F2,Q1
12140 RETURN
12150 PRINT "JG ERROR8C GANANCIA K0 = ";K0;" FUERA DE LIMITES "

```

```

12160 END
12170 REM .....
12180 PRINT "J Los coef, deben tener la forma:"
12190 PRINT "JJJK1+K2*T^K3+K4*T^K5+K6*T^K7*(K8*T)JJJ"
12200 M4=0
12210 FOR I=1 TO T1+1
12220 PRINT "J PARA Z^";T1+1-I;","INGRESE:"
12230 PRINT " K1 = ";
12240 INPUT M4(I,1)
12250 PRINT " K2 = ";
12260 INPUT M4(I,2)
12270 IF M4(I,2)=0 THEN 12300
12280 PRINT " K3 = ";
12290 INPUT M4(I,3)
12300 PRINT " K4 = ";
12310 INPUT M4(I,4)
12320 IF M4(I,4)=0 THEN 12350
12330 PRINT " K5 = ";
12340 INPUT M4(I,5)
12350 PRINT " K6 = ";
12360 INPUT M4(I,6)
12370 IF M4(I,6)=0 THEN 12420
12380 PRINT " K7 = ";
12390 INPUT M4(I,7)
12400 PRINT " K8 = ";
12410 INPUT M4(I,8)
12420 IF I=1 AND M4(I,1)=0 AND M4(I,2)=0 AND M4(I,4)=0 THEN 12440
12430 GO TO 12480
12440 IF I=1 AND M4(I,6)=0 THEN 12460
12450 GO TO 12480
12460 PRINT "JGG ERROR7B PRIMER coeficiente es cero * REPITA"
12470 GO TO 12210
12480 NEXT I
12490 FOR I=1 TO T1+1
12500 Z1=0
12510 IF M4(I,6)=0 THEN 12570
12520 Z1=M4(I,6)+Z1
12530 IF M4(I,7)=0 THEN 12550
12540 Z1=Z1*J2^M4(I,7)
12550 IF M4(I,8)=0 THEN 12570
12560 Z1=Z1*EXP(J2*M4(I,8))
12570 IF M4(I,4)=0 THEN 12620
12580 IF M4(I,5)=0 THEN 12610
12590 Z1=Z1+M4(I,4)*J2^M4(I,5)
12600 GO TO 12620
12610 Z1=Z1+M4(I,4)
12620 IF M4(I,2)=0 THEN 12670
12630 IF M4(I,3)=0 THEN 12660
12640 Z1=Z1+M4(I,2)*J2^M4(I,3)
12650 GO TO 12670
12660 Z1=Z1+M4(I,2)
12670 Z1=Z1+M4(I,1)
12680 M3(I)=Z1
12690 NEXT I
12700 RETURN

```

```

10000 REM ***** LGRZCE *****
10010 REM          Calculo y evaluacion de raices y;
10020 REM          puntos de separacion
10030 T4=130
10040 DELETE X
10050 DIM X(14)
10060 X=0
10070 N2=0
10080 IF N1+D1>1 THEN 10200
10090 X0=-((3/2)*(ABS(F(1,1))+5)
10100 X1=-X0
10110 GOSUB 2910
10120 AXIS E8,E8
10130 MOVE @32:F(1,1),E9
10140 DRAW @32:X0,E9
10150 PRINT @32:" ",Y#
10160 PRINT "JJ LGR de una raiz en "F(1,1);" + 0Im.GGG"
10170 PRINT @32:"J      (1 div.="E8;" un.)"
10180 GOSUB 13130
10190 END
10200 REM ===== Clasificacion y banderas de raices =====
10210 S2=0
10220 S1=0
10230 FOR I=1 TO N1+D1-1
10240 IF ABS(F(2,I))<=E1 THEN 10260
10250 S2=1
10260 IF F(1,I)=>F(1,I+1) THEN 10290
10270 S1=1
10280 GOSUB 10870
10290 NEXT I
10300 IF S1=1 THEN 10220
10310 IF S2=0 THEN 10600
10320 REM----- Clasificacion por eje imaginario
10330 Y2=0
10340 T1=0
10350 T0=1
10360 FOR I2=1 TO N1+D1-1
10370 IF ABS(F(2,I2))<=Y2 THEN 10390
10380 Y2=ABS(F(2,I2))
10390 IF F(1,I2)-F(1,I2+1)>E1 THEN 10460
10400 IF S1=1 THEN 10440
10410 S1=1
10420 T0=I2
10430 GO TO 10590
10440 T1=I2+1
10450 GO TO 10590
10460 IF S1=1 AND T1-T0>1 THEN 10480
10470 GO TO 10590
10480 REM
10490 S1=0
10500 FOR I=T0 TO T1-1
10510 IF ABS(F(2,I))<=ABS(F(2,I+1)) THEN 10540
10520 S1=1
10530 GOSUB 10870

```

```

10540 NEXT I
10550 IF S1=1 THEN 10490
10560 REM
10570 T1=0
10580 T0=1
10590 NEXT I2
10600 REM ----- Evaluacion de raices repetidas w/o canceladas
10610 FOR I=1 TO N1+D1-1
10620 T1=F(1,I)-F(1,I+1)
10630 IF T1>E1 THEN 10840
10640 T1=ABS(F(2,I))-ABS(F(2,I+1))
10650 IF ABS(T1)>E1 THEN 10840
10660 F(5,I)=0
10670 T1=F(3,I)+F(3,I+1)
10680 IF T1=1 THEN 10710
10690 F(4,I+1)=F(4,I+1)+F(4,I)
10700 GO TO 10840
10710 IF F(4,I)=1 THEN 10810
10720 IF S1=1 THEN 10750
10730 S1=1
10740 T0=F(4,I)-1
10750 F(4,I)=F(4,I)-1
10760 F(5,I)=1
10770 F(5,I+1)=2
10780 F(5,I-T0)=2
10790 GOSUB 10870
10800 GO TO 10850
10810 F(5,I)=2
10820 F(5,I+1)=2
10830 I=I+1
10840 S1=0
10850 NEXT I
10860 GO TO 10960
10870 REM .....
10880 REM Intercambio de columnas S/R
10890 FOR I1=1 TO 5
10900 T2=F(I1,I)
10910 F(I1,I)=F(I1,I+1)
10920 F(I1,I+1)=T2
10930 NEXT I1
10940 RETURN
10950 REM .....
10960 REM ===== Plano de datos w evaluacion en eje real =====
10970 X0=3/2*F(1,N1+D1)
10980 X1=3/2*F(1,1)
10990 IF F(1,1)>2 THEN 11010
11000 X1=ABS(X0/5)+1.5
11010 IF F(1,N1+D1)<-2 THEN 11030
11020 X0=-X1/5-1.5
11030 Y1=47/144*(X1-X0)
11040 IF S2=0 THEN 11110
11050 Y2=3/2*Y1
11060 IF Y2<=Y1 THEN 11110
11070 T1=(144/47*Y2-ABS(X1-X0))/2

```

```

11080 X0=X0-T1
11090 X1=X1+T1
11100 Y1=Y2
11110 GOSUB 3010
11120 REM----- Busqueda de raices canceladas
11130 S3=0
11140 FOR I=1 TO N1+D1
11150 IF F(5,I)=2 THEN 11170
11160 S3=1
11170 NEXT I
11180 IF S3<>0 THEN 11220
11190 PRINT "JG ERROR13 TODAS las raices se han cancelado - FIN"
11200 END
11210 REM.....
11220 REM      Producto de las raices en numerador y denominador
11230 IF B4=0 THEN 11640
11240 DELETE C0,C1,T
11250 IF N1=0 THEN 11300
11260 DIM C0(N1+1),T(N1+1)
11270 T0=0
11280 GOSUB 11380
11290 C0=T
11300 DELETE T
11310 DIM C1(D1+1),T(D1+1)
11320 T0=1
11330 GOSUB 11380
11340 C1=T
11350 DELETE T
11360 GO TO 11640
11370 REM .....
11380 REM      Obtencion de un polinomio desde sus factores          S/R
11390 T=0
11400 T1=0
11410 T(1)=1
11420 IF T1<>1 THEN 11480
11430 FOR I=1 TO N1+D1
11440 IF F(3,I)<>T0 THEN 11460
11450 T(2)=F(1,I)
11460 NEXT I
11470 GO TO 11620
11480 FOR I=1 TO N1+D1
11490 IF F(3,I)<>T0 OR F(2,I)>E1 THEN 11610
11500 IF ABS(F(2,I))>E1 THEN 11560
11510 T1=T1+1
11520 FOR I1=T1+1 TO 2 STEP -1
11530 T(I1)=T(I1)-T(I1-1)*F(1,I)
11540 NEXT I1
11550 GO TO 11610
11560 T1=T1+2
11570 FOR I1=T1+1 TO 3 STEP -1
11580 T(I1)=T(I1)-2*T(I1-1)*F(1,I)+T(I1-2)*(F(1,I)^2+F(2,I)^2)
11590 NEXT I1
11600 T(2)=T(2)-2*T(1)*F(1,I)
11610 NEXT I

```

```

11620 RETURN
11630 REM .....
11640 PRINT " Ecuacion para los puntos de separacion dK(z)/dz=0 J"
11650 DELETE C2,C3,C4
11660 IF N1=0 THEN 11710
11670 DIM C3(N1)
11680 FOR I=1 TO N1
11690 C3(I)=(N1-I+1)*C0(I)
11700 NEXT I
11710 DIM C4(D1)
11720 FOR I=1 TO D1
11730 C4(I)=(D1-I+1)*C1(I)
11740 NEXT I
11750 IF N1>0 THEN 11790
11760 DIM C2(D1),T(D1)
11770 C2=-C4
11780 GO TO 11910
11790 DIM C2(N1+D1),T(N1+D1)
11800 C2=0
11810 FOR I=1 TO D1
11820 FOR I2=1 TO N1+1
11830 C2(I+I2-1)=C2(I+I2-1)+C4(I)*C0(I2)
11840 NEXT I2
11850 NEXT I
11860 FOR I=1 TO N1
11870 FOR I2=1 TO D1+1
11880 C2(I+I2-1)=C2(I+I2-1)-C3(I)*C1(I2)
11890 NEXT I2
11900 NEXT I
11910 DELETE C3,C4,S
11920 N=N1+D1-1
11930 T=C2
11940 IF ABS(C2(1))>E1 THEN 12080
11950 I1=0
11960 FOR I=1 TO N1+D1
11970 IF I1>0 OR ABS(C2(I))>E1 THEN 12050
11980 N=N-1
11990 IF N>0 THEN 12070
12000 N=1
12010 DIM S(4,1)
12020 S(2,1)=1000
12030 DELETE T
12040 GO TO 12380
12050 I1=I1+1
12060 T(I1)=C2(I)
12070 NEXT I
12080 DIM S(4,N)
12090 S=1
12100 IF N>1 THEN 12140
12110 S(1,1)=-T(2)/T(1)
12120 S(2,1)=0
12130 GO TO 12380
12140 GOSUB 3550
12150 DELETE T

```



```

12160 FOR I=1 TO N
12170 S(1,I)=P1(I)
12180 S(2,I)=P2(I)
12190 NEXT I
12200 DELETE P1,P2,Q1
12210 REM ----- Clasificacion y evaluacion de puntos de separacion
12220 S1=0
12230 FOR I=1 TO N-1
12240 IF S(1,I)=>S(1,I+1) THEN 12310
12250 S1=1
12260 FOR I1=1 TO 2
12270 T1=S(I1,I+1)
12280 S(I1,I+1)=S(I1,I)
12290 S(I1,I)=T1
12300 NEXT I1
12310 NEXT I
12320 IF S1=1 THEN 12220
12330 FOR I=1 TO N-1
12340 IF S(1,I)-S(1,I+1)>E1 THEN 12370
12350 S(4,I)=0
12360 S(3,I+1)=S(3,I+1)+S(3,I)
12370 NEXT I
12380 REM ----- Evaluacion de puntos de separacion en eje real
12390 B3=0
12400 I1=0
12410 FOR I=1 TO N1+D1
12420 IF F(5,I)=0 OR ABS(F(2,I))>E1 THEN 12800
12430 I1=I1+1
12440 IF I1>N THEN 12500
12450 IF S(4,I1)=0 OR ABS(S(2,I1))>E1 THEN 12430
12460 IF S(1,I1)>F(1,I)+E1 THEN 12680
12470 GO TO F(4,I) OF 12500,12540,12580,12640
12480 PRINT "JG ERROR14  "F(4,I) Raices multiples (no se contempla)"
12490 END
12500 GOSUB 13070
12510 B3=NOT(B3)
12520 I1=I1-1
12530 GO TO 12800
12540 REM ----- Raiz doble
12550 IF B3=0 THEN 12570
12560 S(4,I1)=0
12570 GO TO 12800
12580 REM ----- Raiz triple
12590 GOSUB 13060
12600 IF B3=0 THEN 12620
12610 S(3,I1)=0.5
12620 B3=NOT(B3)
12630 GO TO 12800
12640 REM ----- Raiz cuadruple
12650 IF B3=0 THEN 12670
12660 S(3,I1)=1
12670 GO TO 12800
12680 REM ===== Ptos. de separacion, no sobre raices
12690 IF B3=0 THEN 12730

```

```

12700 GO TO S(3,I1) OF 12430,12750,12780
12710 PRI "JG ERROR15 "S(3,I1);" Ptos de sep. multiples (no contempla)"
12720 END
12730 S(4,I1)=0
12740 GO TO 12430
12750 REM ----- Punto doble
12760 S(3,I1)=0.5
12770 GO TO 12430
12780 REM ----- Punto triple
12790 GO TO 12430
12800 NEXT I
12810 IF B3=0 THEN 12840
12820 GOSUB 13100
12830 GO TO 12880
12840 I1=I1+1
12850 IF I1>N THEN 12880
12860 S(4,I1)=0
12870 GO TO 12840
12880 C9=0
12890 A6=0
12900 IF D1<=N1+1 THEN 12970
12910 FOR I=1 TO N1+D1
12920 IF F(5,I)<>1 THEN 12940
12930 C9=C9-F(4,I)*F(1,I)*-1^F(3,I)
12940 NEXT I
12950 C9=C9/(D1-N1)
12960 A6=180/(D1-N1)
12970 DELETE X9
12980 IF N2<>0 THEN 13000
12990 N2=2
13000 DIM X9(N2)
13010 DIM X(N2)
13020 X9=X
13030 GOSUB 830
13040 RETURN
13050 REM .....
13060 REM Grabacion de puntos en eje real S/R
13070 N2=N2+1
13080 X(N2)=F(1,I)
13090 RETURN
13100 N2=N2+1
13110 X(N2)=-(-10^3)
13120 RETURN
13130 REM .....
13140 A1=0
13150 X4=-1
13160 Y4=0
13170 GOSUB 2140
13180 IF H9=1 THEN 13200
13190 GO TO 13250
13200 X4=1
13210 Y4=0
13220 GOSUB 2140
13230 A1=1

```

```

13240 IF H9=1 AND A1=0 THEN 13360
13250 PRINT "RETURN para continuar"
13260 INPUT A$
13270 PAGE
13280 PRINT "JDiferencia en suma de argumentos = ";E3;" grados"
13290 PRINT "JGanancia Critica Kc = ";K1/K0
13300 PRINT "JMargen de Ganancia MG = ";K1/(K0*K0)
13310 PRINT "JEl L.G.R corta al círculo unitario en:"
13320 PRINT "J                               EJE REAL = ";X4
13330 PRINT "J                               EJE IMAG.= ";Y4
13340 IF A1=1 THEN 13370
13350 GO TO 13200
13360 PRINT "JEl L.G.R, no corta el círculo unitario"
13370 RETURN

```

```

10000 REM ***** LGRZVU *****
10010 REM
10020 REM           Programa para listar todas las
10030 REM           variables que se utilizan
10040 REM
10050 REM .....
10060 T5=32
10070 PRINT "LDESEA EL LISTADO DE VARIABLES EN PAPEL? (SI O NO) ; ";
10080 INPUT R$
10090 IF R#<>"SI" THEN 10110
10100 T5=51
10110 LIST @T5:10140,10500
10120 T5=32
10130 RETURN
10140 REM           VARIABLES EN USO
10150 REM           ARREGLOS :
10160 REM           F  -- N1+D1 raices del sistema (polos y ceros)
10170 REM           Nivel 1 Parte real
10180 REM           Nivel 2 Parte imaginaria
10190 REM           Nivel 3 Indicativo de polo o cero
10200 REM           Nivel 4 Numero de veces
10210 REM           Nivel 5 Validez (0=no, 1=si, 2=cancelado)
10220 REM           S  -- N puntos de separacion en eje real
10230 REM           Nivel 1 Parte real
10240 REM           Nivel 2 Parte imaginaria
10250 REM           Nivel 3 Numero de veces
10260 REM           Nivel 4 Validez
10270 REM           C0 -- Coeficientes del numerador(zeros) en orden
10280 REM           descendente de potencias.
10290 REM           C1 -- Coeficientes del denominador (polos)
10300 REM           C2 -- coeficientes de la ecuacion de los puntos
10310 REM           de separacion.
10320 REM           C3 -- Coeficientes de la derivada del numerador
10330 REM           C4 -- Coeficientes de derivada del denominador
10340 REM           T  -- Valores transitorios de trabajo
10350 REM           X  -- Puntos en eje real o pto. por curva
10360 REM           INTERRUPTORES :
10370 REM           S0 -- De entrada de datos, calculo y final.
10380 REM           S1 -- Para clasificaciones y LGR desde complejas
10390 REM           S2 -- De existir polos o zeros complejos
10400 REM           S3 -- De existir LGR solo en eje real
10410 REM           B4 -- De tipo de entrada y pto triple de sep.
10420 REM           INDICES : I,I1,I2
10430 REM           VARIABLES NUMERICAS (primer caracter) : A,E,K,T,X,Y
10440 REM           L,H,G,Q,J
10450 REM           B,M,Z,W,O
10460 REM           VARIABLES ALFANUMERICAS : F$,L$,Q$,R$,T$,X$
10470 REM           Y$,Z$,B$,C$,D$
10480 REM
10490 REM
10500 REM =====

```

```

10000 REM ***** LGRZAG *****
10010 REM
10020 REM           Programa para evaluacion de un punto,
10030 REM           Calculo del valor de K critico
10040 REM           Dibujo del LGR e
10050 REM           Impresion de datos del calculo
10060 REM
10070 IF S0>3 THEN 10100
10080 PRINT "JG ERROR4B NO existe o no esta cerrado ARCHIVO de datos"
10090 GO TO 10165
10100 SET DEGREES
10110 GOSUB T1 OF 10540,10800,10350,12010,12700,10200,10440
10120 IF T1=8 THEN 10160
10130 PRINT "IIJJJJRETURN para continuar"
10140 INPUT R#
10150 IF T1=6 OR T1=3 OR T1=7 THEN 440
10160 PAGE
10170 T5=32
10180 GOSUB 13260
10190 GO TO 500
10200 REM =====
10210 REM Analisis de estabilidad absoluta y Grafico en el tiempo S/R
10220 GO TO T2 OF 10230,10250
10230 PRINT "TECLA 12K"
10240 GO TO 10270
10250 PRINT "TECLA 13K"
10260 GO TO 10270
10270 DATA "LGRZEAT"
10280 RESTORE 10270
10290 DELETE 10341,13170
10300 RENUMBER 15000,10,13180
10310 TO=MEMORY
10320 READ R#
10330 APPEND R#;10340
10340 REM
10350 REM =====
10360 REM           Graficacion del L.G.R.
10370 PRINT "TECLA 6K"
10380 DATA "LGRZGRF"
10390 RESTORE 10380
10400 DELETE 10441,13060
10410 TO=MEMORY
10420 READ R#
10430 APPEND R#;10440
10440 REM
10450 REM =====
10460 REM           Analisis de Frecuencia
10470 PRINT "TECLA 11K"
10480 DATA "LGRZAFR"
10490 RESTORE 10480
10500 DELETE 10541,13170
10510 TO=MEMORY
10520 READ R#
10530 APPEND R#;10540

```

```

10540 REM
10550 REM =====
10560 REM                      Evaluacion de un punto
10570 PRINT "TECLA 4K"
10580 GOSUB 10600
10590 GO TO 10750
10600 PRINT "¿Desea ingresar por el Plotter (SI O NO?) = ";
10610 INPUT R$
10620 IF R$ <> "SI" THEN 10680
10630 PRINT "¿Si NO tiene el grafico en la unidad, apreste la TECLA 6 ?"
10640 PRINT " o de no ponga el cursor en posicion y apreste RETURN"
10650 INPUT R$
10660 GIN @1;X4,Y4
10670 GO TO 10730
10680 PRINT "¿Ingreso del punto para evaluar ?"
10690 PRINT "           Parte real           = ";
10700 INPUT X4
10710 PRINT "           Parte imaginaria = ";
10720 INPUT Y4
10730 GOSUB 2140
10740 RETURN
10750 PRINT "¿Diferencia en suma de argumentos = "E3" grados"
10760 PRINT "¿Ganancia K del punto = "K1
10770 PRINT "¿NOTA : Para que un punto sea del LGR; la diferencia"
10780 PRINT "           en la suma de argumentos debe tender a cero"
10790 RETURN
10800 REM =====
10810 REM                      Obtencion del valor de K critico
10820 Y5=0
10830 H1=0
10840 PRINT "TECLA 5"
10850 GOSUB 13290
10860 GOSUB 13090
10870 I2=2
10880 X4=-1
10890 Y4=0
10900 GOSUB 2140
10910 IF H9=1 THEN 10930
10920 IF E3<1 THEN 11000
10930 X4=1
10940 Y4=0
10950 GOSUB 2140
10960 IF H9=1 AND NOT(N3>1) THEN 11930
10970 IF E3<1 THEN 11000
10980 IF NOT(N3>1) THEN 11930
10990 GO TO 11030
11000 PRINT @T5;"JEL L.G.R Corte el círculo unitario sobre eje real"
11010 GO TO 11770
11020 GOSUB 13290
11030 FOR I2=2 TO N3
11040 L3=0
11050 DELETE G1,G2
11060 DIM G1(20),G2(20)
11070 FOR I=1 TO X(I2)

```

```

11080 GOSUB 13120
11090 IF Y5=1 THEN 11970
11100 IF ABS(X4*X4+Y4*Y4-1)<0,1 THEN 11120
11110 GO TO 11150
11120 L3=L3+1
11130 G1(L3)=X4
11140 G2(L3)=Y4
11150 NEXT I
11160 IF L3<>0 THEN 11190
11170 NEXT I2
11180 IF L3=0 THEN 11930
11190 DELETE L1,L2
11200 DIM L1(L3+1),L2(L3+1)
11210 FOR I=2 TO L3+1
11220 L1(I)=G1(I-1)
11230 L2(I)=G2(I-1)
11240 NEXT I
11250 DELETE G1,G2
11260 FOR I=2 TO L3
11270 Q6=L1(I)
11280 FOR J=2 TO L3+1
11290 IF NOT(L1(J)<=Q6) THEN 11320
11300 Q6=L1(J)
11310 Q7=J
11320 NEXT J
11330 Q8=L1(Q7)
11340 L1(Q7)=L1(I)
11350 L1(I)=Q8
11360 Q8=L2(Q7)
11370 L2(Q7)=L2(I)
11380 L2(I)=Q8
11390 NEXT I
11400 L1(1)=L1(2)
11410 L2(1)=L2(2)
11420 H8=0
11430 FOR I=2 TO L3+1
11440 IF L1(I)^2+L2(I)^2<1 AND L1(I-1)^2+L2(I-1)^2>1 THEN 11480
11450 IF L1(I)^2+L2(I)^2>1 AND L1(I-1)^2+L2(I-1)^2<1 THEN 11480
11460 NEXT I
11470 H8=1
11480 IF H8=0 THEN 11500
11490 GO TO 11170
11500 L4=L1(I-1)
11510 L5=L2(I-1)
11520 L6=L1(I)
11530 L7=L2(I)
11540 DELETE L1,L2
11550 J8=0
11560 J8=J8+1
11570 Y4=(L7+L5)/2
11580 X4=(L6+L4)/2
11590 IF ABS(X4*X4+Y4*Y4-1)<1,0E-3 THEN 11760
11600 IF L5<L7 THEN 11680
11610 IF X4*X4+Y4*Y4>1 THEN 11650

```

```

11620 L6=X4
11630 L7=Y4
11640 GO TO 11740
11650 L4=X4
11660 L5=Y4
11670 GO TO 11740
11680 IF X4*X4+Y4*Y4>1 THEN 11720
11690 L4=X4
11700 L5=Y4
11710 GO TO 11740
11720 L6=X4
11730 L7=Y4
11740 IF J8>20 THEN 11930
11750 GO TO 11560
11760 GOSUB 2140
11770 H1=1
11780 PRINT @T5: USING 11790:E3
11790 IMAGE "JDiferencia en suma de argumentos = ",FD,6D," grados"
11800 PRINT @T5: USING 11810:K1/K0
11810 IMAGE "JGanancia Crítica Kc = ",FD,3D
11820 PRINT @T5: USING 11830:K1/(K0*K0)
11830 IMAGE "JMargen de Ganancia MG = ",FD,3D
11840 PRINT @T5:"J NOTA : Para que un punto sea del L.G.R; la diferencia"
11850 PRINT @T5:"          en la suma de argumentos debe tender a cero"
11860 PRINT @T5:"JE1 punto de corte del L.G.R con la"
11870 PRINT @T5:"circunferencia unitaria es;      EJE REAL : ";X4
11880 PRINT @T5:"          EJE IMAG.; ";Y4
11890 PRINT @T5: USING 11900:
11900 IMAGE //20T,40("=")
11910 IF X4=-1 AND Y4=0 THEN 10930
11920 GO TO 11950
11930 IF H1=1 THEN 11970
11940 PRINT @T5:"JJ El L.G.R. no corta la circunferencia unitaria"
11950 IF I2>N3 THEN 11970
11960 GO TO 11030
11970 CLOSE
11980 RETURN
11990 REM
12000 REM =====
12010 REM          Impresion de datos generales
12020 PRINT "TECLA 7"
12030 GOSUB 13290
12040 IF T5=51 THEN 12060
12050 GOSUB 13180
12060 PRINT @T5:"J          FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO ";
12070 PRINT @T5:"GH(z)J"
12080 PRINT @T5:"Ganancia estática ",K0
12090 PRINT @T5:"Grado del numerador ",N1
12100 PRINT @T5:"Grado del denominador",D1
12110 IF N1=0 THEN 12240
12120 PRINT @T5:"JCoeficientes del numerador :J"
12130 FOR I=1 TO N1
12140 PRINT @T5: USING 12150:"      z**",N1-I+1
12150 IMAGE FA,FD,S

```



```

12160 NEXT I
12170 PRINT @T5:"      z**0"
12180 FOR I=1 TO N1
12190 PRINT @T5: USING 12200;C0(I)
12200 IMAGE 6D,2D,S
12210 NEXT I
12220 PRINT @T5: USING 12230;C0(N1+1)
12230 IMAGE 6D,2D
12240 PRINT @T5:"JCoeficientes del denominador :J"
12250 FOR I=1 TO D1
12260 PRINT @T5: USING 12150:"      z**",D1-I+1
12270 NEXT I
12280 PRINT @T5:"      z**0"
12290 FOR I=1 TO D1
12300 PRINT @T5: USING 12200;C1(I)
12310 NEXT I
12320 PRINT @T5: USING 12230;C1(D1+1)
12330 R$="Observaciones"
12340 PRINT @T5:"JPolos y ceros de lazo abierto:"
12350 PRINT @T5: USING 12360:"Parte real","Parte imag.,""Tipo",R$
12360 IMAGE /,4X,FA,8X,FA,9X,FA,11X,FA,/
12370 FOR I=1 TO N1+D1
12380 IF F(5,I)=0 AND ABS(F(2,I))<=E2 THEN 12570
12390 R$=" "
12400 T$="POLO"
12410 IF F(3,I)=1 THEN 12430
12420 T$="CERO"
12430 IF F(5,I)<>2 THEN 12460
12440 R$="Cancelado"
12450 GO TO 12550
12460 IF ABS(F(2,I))<=E1 THEN 12490
12470 R$="Conjugado"
12480 GO TO 12550
12490 GO TO F(4,I) OF 12550,12500,12520,12540
12500 R$="Doble      "
12510 GO TO 12550
12520 R$="Triple      "
12530 GO TO 12550
12540 R$="Cuadruple"
12550 PRINT @T5: USING 12560;F(1,I),F(2,I),T$,R$
12560 IMAGE 5X,5D,2D,10X,5D,2D,11X,4A,11X,9A
12570 NEXT I
12580 PRINT @T5:"JPuntos de separacion en el eje real : "
12590 PRINT @T5: USING 12600;"#","Valor","Validez"
12600 IMAGE /,9X,FA,15X,FA,11X,FA,/
12610 FOR I=1 TO N
12620 IF ABS(S(2,I))>E1 THEN 12680
12630 R$="NO"
12640 IF S(4,I)=0 THEN 12660
12650 R$="SI"
12660 PRINT @T5: USING 12670;I,S(1,I),R$
12670 IMAGE 9X,1D,13X,5D,2D,12X,2A
12680 NEXT I
12690 RETURN

```

```

12700 REM =====
12710 REM          Resolver la ecuacion característica
12720 PRINT "TECLA 10"
12730 GOSUB 13290
12740 PRINT @T5:"J          RESOLUCION DE  $D(z) + K * N(z) = 0$ "
12750 PRINT @T5:"J Ganancia estática ",K0
12760 PRINT "JValor de ganancia (entre 0 y 10000) = ";
12770 INPUT K1
12780 IF K1<=0 OR K1>10000 THEN 12760
12790 K1=K0*K1
12800 DELETE T
12810 DIM T(D1+1)
12820 T=C1
12830 IF N1<>0 THEN 12860
12840 T(D1+1)=T(D1+1)+K1
12850 GO TO 12900
12860 T0=D1-N1
12870 FOR I=1 TO N1+1
12880 T(I+T0)=T(I+T0)+K1*C0(I)
12890 NEXT I
12900 K2=N
12910 N=D1
12920 GOSUB 3550
12930 N=K2
12940 PRINT @T5:"J Ganancia dinámica ",K1/K0;"K"
12950 PRINT @T5:"J -Ganancia total          ",K1;"K"
12960 PRINT @T5: USING 12970;"RAIZ","PARTE REAL","PARTE IMAG."
12970 IMAGE /,17X,FA,4X,FA,8X,FA
12980 FOR I=1 TO D1
12990 PRINT @T5: USING 13000:I,P1(I),P2(I)
13000 IMAGE 19X,FD,5X,4D,2D,10X,5D,2D
13010 NEXT I
13020 DELETE P1,P2,Q1,T
13030 PRINT "JDesee ingresar otras ganancias (SI O NO?) = ";
13040 INPUT R#
13050 IF R#="SI" THEN 12760
13060 RETURN
13070 REM =====
13080 REM          Subrutinas generales de LGRZAG
13090 REM Apertura de archivo de puntos
13100 OPEN X#;1:"R",S#
13110 RETURN
13120 REM Lectura de pares de puntos
13130 ON EOF (1) THEN 13160
13140 READ #1:X4,Y4
13150 GO TO 13170
13160 Y5=1
13170 RETURN
13180 REM Impresion de cabeceras y titulos
13190 CALL "TIME",Z#
13200 PRINT @T5:"LJESCUELA POLITECNICA NACIONAL          GALO ACOSTA V."
13210 PRINT @T5:"FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
13220 PRINT @T5: USING 13230;"SISTEMAS DE CONTROL","FECHA : ",Z#
13230 IMAGE FA,27X,FA,18A

```

```

13240 PRINT @T5: USING 13250:Y$, "Archivo : ", X$
13250 IMAGE /, FA, 6X, FA, FA
13260 PRINT @T5: USING 13270:
13270 IMAGE 72("-")
13280 RETURN
13290 REM Pedido de respuestas en papel
13300 PRINT "¿Desea los resultados en impresora (SI O NO?) = ";
13310 T5=32
13320 INPUT R$
13330 IF NOT(R$="SI" OR R$="S") THEN 13360
13340 T5=51
13350 GOSUB 13180
13360 RETURN

```

```

10440 REM ***** LGRZGRF *****
10450 REM
10460 REM                      Graficacion del LGR
10470 GOSUB 13090
10480 PRINT "¿Desea el GRAFICO en el PLOTTER? (SI O NO) = ";
10490 T5=32
10500 T4=130
10510 INPUT R$
10520 IF R$<>"SI" THEN 10580
10530 PRI "J ALISTE la unidad, COLOQUE papel y defina el CUADRO con las"
10540 PRINT "J          teclas SET;          para continuar aplaste RETURN"
10550 INPUT R$
10560 T5=1
10570 T4=150
10580 PAGE
10590 F#=SEG(Z#,1,9)
10600 S5=1
10610 WINDOW X0,X1,-Y1,Y1
10620 VIEWPORT 3,T4-3,97,3
10630 MOVE @T5:X0,Y1
10640 DRAW @T5:X1,Y1
10650 DRAW @T5:X1,-Y1
10660 DRAW @T5:X0,-Y1
10670 DRAW @T5:X0,Y1
10680 AXIS @T5:E8,E8
10690 MOVE @T5:0,-Y1+16*E9
10700 PRINT @T5:" Im.Z"
10710 MOVE @T5:0,0
10720 PRINT @T5:"JH0,0"
10730 RMOVE @T5:X1,0
10740 PRINT @T5:"JHHHHR, Z"
10750 IF D1<=N1+1 THEN 10890
10760 FOR I=0 TO D1-N1-1
10770 A0=A6*(2*I+1)
10780 IF A0=>180 THEN 10890
10790 X2=C9
10800 Y2=0
10810 MOVE @T5:X2,Y2
10820 X2=1.5*E2*COS(A0)
10830 Y2=1.5*E2*SIN(A0)
10840 FOR I1=1 TO 25
10850 RDRAW @T5:X2,Y2
10860 RMOVE @T5:X2,Y2
10870 NEXT I1
10880 NEXT I
10890 REM..... Dibujo del LGR sobre el eje real
10900 FOR I=1 TO X(1) STEP 2
10910 READ #1:X2,Y2
10920 MOVE @T5:X2,E9
10930 DRAW @T5:Y2,E9
10940 NEXT I
10950 REM..... Dibujo de cada curva del LGR
10960 IF N3=1 THEN 11050
10970 FOR I=2 TO N3

```

```

10980 READ #1:X2,Y2
10990 MOVE @T5:X2,Y2
11000 FOR I1=2 TO X(I)
11010 READ #1:X2,Y2
11020 DRAW @T5:X2,Y2
11030 NEXT I1
11040 NEXT I
11050 REM ..... Evaluacion de la imagen en eje imaginario
11060 IF S5<>1 THEN 11110
11070 S5=0
11080 CALL "REWIND",1
11090 VIEWPORT 3,T4-3,3,97
11100 GO TO 10750
11110 CLOSE
11120 FOR I=1 TO N1+D1
11130 IF F(5,I)<>0 OR ABS(F(2,I))>E2 THEN 11160
11140 IF F(2,I)>10*E9 THEN 11160
11150 GO TO 11180
11160 MOVE @T5:F(1,I)+3*E9,F(2,I)+3*E9
11170 GOSUB F(3,I)+1 OF 11200,11260
11180 NEXT I
11190 GO TO 11310
11200 REM ..... Dibujo de un zero como "o" ..... - S/R -
11210 RDRAW @T5:-6*E9,0
11220 RDRAW @T5:0,-6*E9
11230 RDRAW @T5:6*E9,0
11240 RDRAW @T5:0,6*E9
11250 RETURN
11260 REM ..... Dibujo de un polo como "x" ..... - S/R -
11270 RDRAW @T5:-6*E9,-6*E9
11280 RMOVE @T5:0,6*E9
11290 RDRAW @T5:6*E9,-6*E9
11300 RETURN
11310 REM
11320 REM *** DIBUJO DEL CIRCULO UNITARIO ***
11330 MOVE @T5:1,0
11340 OPEN "@GVAV12/CIRC";3,"R",S#
11350 FOR I=1 TO 181
11360 READ #3:H1,H2
11370 DRAW @T5:H1,H2
11380 NEXT I
11390 CALL "REWIND",3
11400 MOVE @T5:1,0
11410 FOR I=1 TO 181
11420 READ #3:H1,H2
11430 DRAW @T5:H1,-H2
11440 NEXT I
11450 CLOSE 3
11460 REM ..... Dibujo de titulos y denominaciones
11470 R#=" "
11480 MOVE @T5:X0,Y1+2*E9
11490 PRINT @T5:"GVAV12/";
11500 PRINT @T5:" ";Y#;"H";R#;"HHHH";F#
11510 MOVE @T5:X0,-Y1

```

```

11520 PRINT @T5:"J x=POLO o=CERO 1 DivisioH'n = ";E8;" Unidades";
11530 IF J3=0 THEN 11570
11540 PRINT @T5:" Archivo:";X#;
11550 PRINT @T5:" T= ";J2;"ses.;"K"
11560 GO TO 11890
11570 PRINT @T5:" Archivo:";X#;"K"
11580 HOME
11590 PRINT "JJCURVA DE AMORTIGUAMIENTO(SI o NO)= ";
11600 INPUT R#
11610 IF NOT(R#="SI" OR R#="S") THEN 11790
11620 PRINT "RAZON DE AMORTIGUAMIENTO= ";
11630 INPUT Z2
11640 H3=ASN(Z2)
11650 H4=TAN(H3)
11660 H2=0,0628318530718
11670 DELETE A1,A3
11680 DIM A1(50),A3(50)
11690 FOR I=1 TO 50
11700 A2=EXP(-I*H4*H2)
11710 A1(I)=A2*COS(I*H2*180/PI)
11720 A3(I)=A2*SIN(I*H2*180/PI)
11730 NEXT I
11740 MOVE @T5:1,0
11750 DRAW @T5:A1,A3
11760 IF T5<>32 THEN 11780
11770 HOME
11780 GO TO 11590
11790 PRINT "IIJJJRETURN para continuar"
11800 INPUT R#
11810 PRINT "LIJJJJJDESEA REPETIR EL GRAFICO (SI O NO?)= ";
11820 INPUT R#
11830 IF R#="SI" OR R#="S" THEN 10450
11840 PRINT "IJJJDESEA QUE QUEDE ALMACENADO ESTE L.G.R (SI O NO?)= ";
11850 INPUT R#
11860 IF R#="SI" OR R#="S" THEN 11910
11870 IF NOT(R#="NO" OR R#="N") THEN 11810
11880 KILL X#
11890 KILL T#
11900 GO TO 4
11910 RETURN

```

```

10340 REM ***** LGRZEAT *****
10350 REM
10360 REM      Analisis de estabilidad absoluta y
10370 REM      graficos de respuesta en el tiempo.
10380 H=1
10390 H1=0
10400 PRINT "L"
10410 PRINT "IJJJJJJJValor de GANANCIA (mayor a 0)= ";
10420 INPUT K1
10430 IF K1>0 THEN 10460
10440 PRINT "JG ERRORSD Error en el valor de ganancia, REPITA"
10450 GO TO 10410
10460 K1=K1*K0
10470 DELETE T
10480 DIM T(D1+1)
10490 T=C1
10500 T0=D1-N1
10510 IF N1<>0 THEN 10540
10520 T(D1+1)=T(D1+1)+K1
10530 GO TO 10570
10540 FOR I=1 TO N1+1
10550 T(I+T0)=T(I+T0)+K1*C0(I)
10560 NEXT I
10570 IF T(1)>0 THEN 10600
10580 T=-T
10590 H1=1
10600 GOSUB T2 OF 10620,11790
10610 RETURN
10620 PRINT "IJJESTABILIDAD ABSOLUTA"
10630 PRINT USING 10640;
10640 IMAGE 19T,20(=")
10650 B$="EL SISTEMA ESTA EN EL LIMITE DE ESTABILIDAD"
10660 C$="EL SISTEMA ES ESTABLE"
10670 D$="EL SISTEMA ES INESTABLE"
10680 GOSUB 15110
10690 PRINT @T5; USING 10700;
10700 IMAGE//10T"ANALISIS DE ESTABILIDAD ABSOLUTA, (CRITERIO DE RAIBLE)"
10710 PRINT @T5; USING 10720;
10720 IMAGE 10T,54(=")
10730 DIM A(D1+1,D1+2)
10740 FOR I=1 TO D1+1
10750 A(1,I)=T(I)
10760 NEXT I
10770 IF D1>1 THEN 10880
10780 A(1,1)=-A(1,2)/A(1,1)
10790 PRINT @T5;"JJ La uH'nica raiH'z es:";A(1,1);"J"
10800 IF ABS(A(1,1))<1 THEN 10840
10810 IF ABS(A(1,1))>1 THEN 10860
10820 PRINT @T5;"I";B$
10830 GO TO 10870
10840 PRINT @T5;"I";C$
10850 GO TO 10870
10860 PRINT @T5;"I";D$
10870 GO TO 11590

```

```

10880 A(1,D1+2)=A(1,D1+1)/A(1,1)
10890 B=A(1,D1+2)
10900 Y=0
10910 FOR I=1 TO D1
10920 A(2,I)=A(1,I)-B*A(1,D1+2-I)
10930 IF I>1 THEN 11000
10940 IF A(2,1)<0 THEN 11000
10950 IF A(2,1)=0 THEN 10980
10960 Y=Y+1
10970 GO TO 11000
10980 GOSUB 11640
10990 GO TO 10880
11000 NEXT I
11010 IF D1<2 THEN 11230
11020 M=D1
11030 FOR I=3 TO D1+1
11040 M=M-1
11050 A(I-1,D1+2)=A(I-1,D1+3-I)/A(I-1,1)
11060 B=A(I-1,D1+2)
11070 FOR J=1 TO M
11080 A(I,J)=A(I-1,J)-B*A(I-1,M+2-J)
11090 IF J>1 THEN 11160
11100 IF A(I,1)<0 THEN 11160
11110 IF A(I,1)=0 THEN 11140
11120 Y=Y+1
11130 GO TO 11160
11140 GOSUB 11640
11150 GO TO 10880
11160 NEXT J
11170 NEXT I
11180 IF H=2 THEN 11200
11190 GO TO 11230
11200 Y1=Y
11210 GOSUB 11660
11220 GO TO 10880
11230 IF H=3 THEN 11250
11240 GO TO 11260
11250 Y2=Y
11260 GOSUB 13520
11270 PRINT @T5: USING 11280:
11280 IMAGE//10T,"ANALISIS DE ESTABILIDAD",/,10T,23("-")
11290 IF H<>3 OR Y=D1 THEN 11340
11300 P$="CASO SINGULAR"
11310 PRINT @T5: USING 11320:P$
11320 IMAGE /10T,FA
11330 GO TO 11430
11340 IF Y<>D1 THEN 11370
11350 PRINT @T5: USING 11320:C$
11360 GO TO 11590
11370 PRINT @T5: USING 11380:Y
11380 IMAGE /10T,"EXISTEN ",FD," RAICES ESTABLES Y"
11390 PRINT @T5: USING 11400:D1-Y
11400 IMAGE /10T,FD," RAICES INESTABLES"
11410 PRINT @T5: USING 11320:D$

```



```

11420 GO TO 11590
11430 Z=ABS(Y2-Y1)
11440 IF Z<>0 THEN 11490
11450 PRINT @T5:"I";D$
11460 PRINT @T5: USING 11530:Y2
11470 PRINT @T5: USING 11550:D1-Y2
11480 GO TO 11590
11490 PRINT @T5: USING 11500:Z
11500 IMAGE /10T,"EXISTEN ",FD," RAICES SOBRE EL CIRCULO UNITARIO"
11510 IF Y2<Y1 THEN 11570
11520 PRINT @T5: USING 11530:Y1
11530 IMAGE/10T,FD," RAICES ESTABLES"
11540 PRINT @T5: USING 11550:D1-Z-Y1
11550 IMAGE/10T,FD," RAICES INESTABLES"
11560 GO TO 11590
11570 PRINT @T5: USING 11530:Y2
11580 PRINT @T5: USING 11550:D1-Z-Y2
11590 DELETE A,B$,C$,D$,R$
11600 PRINT "¡¡¡Desea repetir el análisis (SI O NO)?=" ;
11610 INPUT R$
11620 IF R$="SI" OR R$="S" THEN 10410
11630 GO TO 10130
11640 E=1.0E-3
11650 GO TO 11670
11660 E=-E
11670 H=H+1
11680 DIM A1(D1+1)
11690 FOR I=1 TO D1+1
11700 A(1,I)=A(1,I)*(1+(D1+1-I)*E)
11710 A1(I)=A(1,I)
11720 NEXT I
11730 A=0
11740 FOR I=1 TO D1+1
11750 A(1,I)=A1(I)
11760 NEXT I
11770 DELETE A1
11780 RETURN
11790 REM -----S/R
11800 PRINT "¡¡¡RESPUESTA EN EL TIEMPO"
11810 PRINT USING 11820:
11820 IMAGE 19T,22("=")
11830 PRINT "¡¡¡¡¡#1 ; RTA. A FUNCION PASO"
11840 PRINT "¡¡¡#2 ; RTA. A FUNCION IMPULSO"
11850 PRINT "¡¡¡¡¡Disite el NUMERO correspondiente: ";
11860 INPUT T2
11870 IF T2=1 OR T2=2 THEN 11900
11880 PRINT "¡¡¡ ERROR¡¡¡ Error en el número digitado,REPITA"
11890 GO TO 11830
11900 D=D1
11910 DELETE A3,A1,B1,B2
11920 DIM A3(N1+1)
11930 IF N1<>0 THEN 11960
11940 A3=K1
11950 GO TO 11970

```

```

11960 A3=K1*CO
11970 IF H1=0 THEN 11990
11980 A3=-A3
11990 GOSUB T2 OF 12020,12190
12000 GOSUB 12310
12010 RETURN
12020 PRINT "IJJAmplitud de la funcioH'n PASO = ";
12030 INPUT A2
12040 C4="PASO"
12050 DIM A1(D1+2),B1(D1+2),B2(D1+2)
12060 A1=0
12070 A3=A2*A3
12080 FOR I=1 TO N1+1
12090 A1(I)=A3(I)
12100 NEXT I
12110 B1(1)=T(1)
12120 B1(D1+2)=-T(D1+1)
12130 FOR I=2 TO D1+1
12140 B1(I)=T(I)-T(I-1)
12150 NEXT I
12160 B2=B1
12170 D=D+1
12180 RETURN
12190 PRINT "IJJAmplitud de la funcioH'n IMPULSO = ";
12200 INPUT A2
12210 C4="IMPULSO"
12220 DIM A1(D1+1),B1(D1+1),B2(D1+1)
12230 A3=A2*A3
12240 A1=0
12250 FOR I=1 TO N1+1
12260 A1(I)=A3(I)
12270 NEXT I
12280 B1=T
12290 B2=B1
12300 RETURN
12310 REM *** CALCULO ***
12320 PRINT "IJJIngrese el perioH'odo de muestreo T = ";
12330 INPUT J2
12340 IF J2<0 THEN 12320
12350 PRINT "IJJNuH'mero de teH'rminos para el GRAFICO = ";
12360 INPUT Z2
12370 DELETE C5
12380 DIM C5(Z2)
12390 FOR I=1 TO Z2
12400 C5(I)=A1(1)/B1(1)
12410 FOR I1=1 TO D
12420 A1(I1)=-C5(I)*B1(I1+1)+A1(I1+1)
12430 NEXT I1
12440 NEXT I
12450 M1=1.0E+100
12460 M2=-M1
12470 FOR I=1 TO Z2
12480 M1=M1 MIN C5(I)
12490 M2=M2 MAX C5(I)

```

```

12500 NEXT I
12510 REM *** GRAFICO ***
12520 GOSUB 15110
12530 IF T5=51 THEN 12580
12540 PRINT "IJJDesee ver resultados en la pantalla (SI O NO)= ";
12550 INPUT R$
12560 IF R$="SI" OR R$="S" THEN 12580
12570 GO TO 12740
12580 GOSUB 13570
12590 PRINT @T5:"IJJJPUNTOS DEL GRAFICO DE LA RTA. A UNA ENTRADA " ;C$
12600 PRINT @T5; USING 12610;C$,A2
12610 IMAGE //10T,"AMPLITUD DE LA FUNCION ",FA," = ",FD,2D
12620 PRINT @T5; USING 12630;
12630 IMAGE//20T,"VALORES EN EJE Y",S
12640 PRINT @T5; USING 12650;
12650 IMAGE5T,"VALORES EN EJE X"
12660 IF N1=D1 THEN 12700
12670 FOR I=1 TO D1-N1
12680 PRINT @T5; USING 12720;0,J2*(I-1)
12690 NEXT I
12700 FOR I=1 TO Z2
12710 PRINT @T5; USING 12720;C5(I),J2*(I-1)+(D1-N1)*J2
12720 IMAGE 20T,FD,8D,40T,FD,2D
12730 NEXT I
12740 REM *** SUBROUTINA PARA EL GRAFICO ***
12750 PRINT "IJJDATOS PARA GRAFICO"
12760 PRINT "IJJValor mAximo en EJE Y: ";M2
12770 PRINT "IJJValor miM'nimo en EJE Y: ";M1
12780 PRINT "IJJSeparacioH'n entre marcas en EJE Y: ";
12790 INPUT M3
12800 PAGE
12810 GOSUB 12830
12820 GO TO 13120
12830 PRINT "IJJDesee GRAFICO en papel (SI O NO?) = ";
12840 T5=32
12850 T4=130
12860 INPUT R$
12870 IF NOT(R$="SI" OR R$="S") THEN 12930
12880 PRINT "JALISTE la unidad;COLOQUE papel y defina el CUADRO con las"
12890 PRINT "J      teclas SET      ;      para continuar aplaste RETURNGG"
12900 INPUT R$
12910 T5=1
12920 T4=150
12930 PAGE
12940 W1=1.2*J2*Z2
12950 W0=-W1/10
12960 W3=1.2*M2
12970 IF M1<>0 THEN 13000
12980 W2=-W3/10
12990 GO TO 13030
13000 W2=-ABS(1.1*M1)
13010 IF ABS(W2)>M2/10 THEN 13030
13020 W2=-ABS(M2/10)
13030 WINDOW W0,W1,W2,W3

```

```

13040 WINDOW W0,W1,W2,W3
13050 VIEWPORT 5,T4-5,7,94
13060 MOVE @T5:W0,W2
13070 DRAW @T5:W1,W2
13080 DRAW @T5:W1,W3
13090 DRAW @T5:W0,W3
13100 DRAW @T5:W0,W2
13110 RETURN
13120 AXIS @T5:10*J2,M3,0,0
13130 MOVE @T5:0,W3
13140 PRINT @T5:'J C(T) [unid.]'
13150 MOVE @T5:0,0
13160 PRINT @T5:'JH0.0'
13170 RMOVE @T5:W1,0
13180 PRINT @T5:'JHHHHHHHT[señ]'.
13190 MOVE @T5:0,0
13200 IF T0<0 THEN 13280
13210 DRAW @T5:0,C5(1)
13220 DRAW @T5:J2,C5(1)
13230 FOR I=2 TO Z2
13240 DRAW @T5:(I-1)*J2,C5(I)
13250 DRAW @T5:I*J2,C5(I)
13260 NEXT I
13270 GO TO 13330
13280 DRAW @T5:T0*J2,0
13290 FOR I=1 TO Z2
13300 DRAW @T5:(T0+I-1)*J2,C5(I)
13310 DRAW @T5:(T0+I)*J2,C5(I)
13320 NEXT I
13330 HOME @T5:
13340 PRINT @T5: USING 13350:C$
13350 IMAGE/25T,"RESPUESTA A ENTRADA ",FA
13360 MOVE @T5:W0,W2
13370 PRINT @T5: USING 13380:10*J2;M3
13380 IMAGE /6T,"EJE X: 1Div.= ",FD.1D,30T,"EJE Y: 1Div.= ",FD.2D,S
13390 PRINT @T5: USING 13400:X$
13400 IMAGE 5T,"ARCHIVO : ",FA
13410 HOME
13420 INPUT R$
13430 PAGE
13440 PRINT "IJJJDesee repetir el grafico (SI O NO?)= ";
13450 INPUT R$
13460 IF R$="SI" OR R$="S" THEN 12810
13470 PRINT "IJJJDesee variar la GANANCIA (SI O NO?)= ";
13480 INPUT R$
13490 IF R$="NO" OR R$="N" THEN 10130
13500 T2=2
13510 GO TO 10410
13520 PRINT @T5:"JJJVALOR DE GANANCIA TOTAL = ",K1
13530 PRINT @T5:"JVALOR DE GANANCIA DINAMICA = ",K1/K0
13540 PRINT @T5: USING 13550:
13550 IMAGE/6T,"COEFICIENTES DE LA ECUACION CARACTERISTICA",/,6T,42("'-")
13560 GO TO 13790
13570 PRINT 'L'

```

```

13580 PRINT @T5: USING 13590:
13590 IMAGE //9T, "FUNCION DE TRANSFERENCIA LAZO CERRADO", /, 9T, 37( "=" )
13600 PRINT @T5: "JJJVALOR DE GANANCIA TOTAL = ", K1
13610 PRINT @T5: "JVALOR DE GANANCIA DINAMICA = ", K1/K0
13620 PRINT @T5: USING 13630:
13630 IMAGE//5T, "COEFICIENTES DEL NUMERADOR", /, 5T, 26( "-" )
13640 IF N1=0 THEN 13690
13650 FOR I=1 TO N1
13660 PRINT @T5: USING 13670: "      z**", N1-I+1
13670 IMAGE FA,FD,S
13680 NEXT I
13690 PRINT @T5: "      z**0"
13700 FOR I=1 TO N1
13710 PRINT @T5: USING 13720:A3(I)/K1
13720 IMAGE 7D,2D,S
13730 NEXT I
13740 IF N1=0 THEN 13770
13750 PRINT @T5: USING 13760:A3(N1+1)/K1
13760 IMAGE 7D,2D
13770 PRINT @T5: USING 13780:
13780 IMAGE//5T, "COEFICIENTES DEL DENOMINADOR", /, 5T, 28( "-" )
13790 FOR I=1 TO D1
13800 PRINT @T5: USING 13810: "      z**", D1-I+1
13810 IMAGE FA,FD,S
13820 NEXT I
13830 PRINT @T5: "      z**0"
13840 FOR I=1 TO D1
13850 PRINT @T5: USING 13860:T(I)
13860 IMAGE 7D,2D,S
13870 NEXT I
13880 PRINT @T5: USING 13890:T(D1+1)
13890 IMAGE 7D,2D
13900 RETURN

```

```

10540 REM ***** LGRZAFR *****
10550 REM
10560 REM           Analisis de Frecuencia
10570 REM Magnitud y Fase de G(z) como funcion de W
10580 REM Con  $Z=e^{(JWT)}$ 
10590 REM
10600 PRINT "L"
10610 PRINT USING 10620:
10620 IMAGE 25T,"ANALISIS DE FRECUENCIA",/,25T,22("=")
10630 PRINT "IJJValor de Ganancia (mayor a 0) = ";
10640 INPUT K1
10650 IF K1>0 THEN 10680
10660 PRINT "JG ERRORSE Error en el valor de ganancia,REPITA"
10670 GO TO 10630
10680 K1=K1*K0
10690 P1=180/PI
10700 DELETE 03,04,05,06,01
10710 PRINT "IJJIngrese el periodo de muestreo T = ";
10720 INPUT J2
10730 IF J2>0 THEN 10760
10740 PRINT "JGERROR El periodo de muestreo no puede ser <=0,REPITA"
10750 GO TO 10710
10760 PRINT "JJNOTA: La respuesta es repetitiva para valores "
10770 PRINT "J de frecuencia superiores a la de muestreo"
10780 PRINT "J sobre dos ( $\omega_s/2$ ),Esto es que la informaciH'on"
10790 PRINT "J de la franja principal se repite en las "-"
10800 PRINT "J complementarias"
10810 PRINT "IJJLa escala de frecuencia es LINEAL"
10820 PRINT "IJEEl valor inicial de frecuencia debe"
10830 PRINT "IJser menor a  $\omega_s/2 = \pi/J2$ "
10840 PRINT "IJValor inicial de frecuencia = ";
10850 INPUT L1
10860 IF L1> $\pi/J2$  OR L1<0 THEN 10820
10870 IF L1<>0 THEN 10890
10880 L1=1.0E-4
10890 PRINT "IJFrecuencia final : ( $\omega_s/2 \rightarrow \#1$ ), (Otro  $\rightarrow \#2$ ) = ";
10900 INPUT B3
10910 IF B3=1 THEN 10950
10920 PRINT "IJValor de frecuencia final = ";
10930 INPUT L2
10940 GO TO 10960
10950 L2= $\pi/J2 * 0.99$ 
10960 PRINT "IJJNuH'mero de puntos para el GRAFICO = ";
10970 INPUT Z2
10980 DIM 03(Z2),05(Z2),06(Z2),01(Z2)
10990 B3=(L2-L1)/(Z2-1)
11000 FOR I=1 TO Z2
11010 03(I)=L1+(I-1)*B3
11020 NEXT I
11030 GOSUB 13290
11040 PRINT @T5; USING 11050:
11050 IMAGE//20T,"ANALISIS DE FRECUENCIA",/,20T,22("=")
11060 PRINT @T5; USING 11070:
11070 IMAGE//9T,"FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO",/,9T,37("=")

```

```

11080 PRINT @T5;"J Genancia dinamica ";K1/K0;"K"
11090 PRINT @T5;"J Genancia Total ";K1;"K"
11100 PRINT @T5; USING 11110:
11110 IMAGE//4T,"COEFICIENTES DEL NUMERADOR",/,4T,26(=")
11120 IF N1<>0 THEN 11190
11130 DELETE C0
11140 DIM C0(1)
11150 C0=1
11160 PRINT @T5;" z**0"
11170 PRINT @T5;" 1,00"
11180 GO TO 11300
11190 FOR I=1 TO N1
11200 PRINT @T5; USING 11210:" z**",N1-I+1
11210 IMAGE FA,FD,S
11220 NEXT I
11230 PRINT @T5;" z**0"
11240 FOR I=1 TO N1
11250 PRINT @T5; USING 11260:C0(I)
11260 IMAGE 6D,2D,S
11270 NEXT I
11280 PRINT @T5; USING 11290:C0(N1+1)
11290 IMAGE 6D,2D
11300 PRINT @T5; USING 11310:
11310 IMAGE//4T,"COEFICIENTES DEL DENOMINADOR",/,4T,28(=")
11320 FOR I=1 TO D1
11330 PRINT @T5; USING 11340:" z**",D1-I+1
11340 IMAGE FA,FD,S
11350 NEXT I
11360 PRINT @T5;" z**0"
11370 FOR I=1 TO D1
11380 PRINT @T5; USING 11390:C1(I)
11390 IMAGE 6D,2D,S
11400 NEXT I
11410 PRINT @T5; USING 11420:C1(D1+1)
11420 IMAGE 6D,2D
11430 PRINT @T5; USING 11440:
11440 IMAGE/6X,"FREC.[rad,]",6X,"MAGNITUD",6X:"MAGN,[db,]",10X,"FASE",//
11450 SET RADIANS
11460 FOR I=1 TO Z2
11470 Q1(I)=Q3(I)*J2
11480 Q1=K1*C0(N1+1)
11490 Q9=0
11500 Q3=C1(D1+1)
11510 Q4=0
11520 FOR I1=1 TO N1
11530 Q1=Q1+K1*C0(I1)*COS((N1+1-I1)*Q1(I))
11540 Q9=Q9+K1*C0(I1)*SIN((N1+1-I1)*Q1(I))
11550 NEXT I1
11560 FOR I1=1 TO D1
11570 Q3=Q3+C1(I1)*COS((D1+1-I1)*Q1(I))
11580 Q4=Q4+C1(I1)*SIN((D1+1-I1)*Q1(I))
11590 NEXT I1
11600 Q5=Q3*Q3+Q4*Q4
11610 Q6=(Q1*Q3+Q9*Q4)/Q5

```

```

11620 Q7=(Q9*Q3-Q1*Q4)/Q5
11630 Q4=SQR(Q6*Q6+Q7*Q7)
11640 Q5(I)=20*LGT(Q4)
11650 Q6(I)=P1*SGN(Q7)*ACS(Q6/Q4)
11660 PRINT @T5; USING 11670;Q3(I),Q4,Q5(I),Q6(I)
11670 IMAGE10T,FD,3D,25T,FD,3D,40T,FD,3D,56T,FD,3D
11680 NEXT I
11690 PRINT "IJJRETURN Para continuar"
11700 INPUT R#
11710 PRINT "LIJJJPosibilidades:"
11720 PRINT "IJJ #1 --> MAGNITUD EN DECIBELIOS"
11730 PRINT "IJJ #2 --> DIAGRAMA DE ANGULO"
11740 PRINT "IJJ #3 --- FINALIZAR PROGRAMA"
11750 PRINT "IJ Escoja nuH'mero correspondiente : ";
11760 INPUT T2
11770 IF T2=1 OR T2=2 OR T2=3 THEN 11800
11780 PRINT "JG ERROR16B Error en el nuH'mero digitado,REPITA"
11790 GO TO 11750
11800 IF T2<>3 THEN 11820
11810 RETURN
11820 T5=32
11830 T4=130
11840 PRINT "IJJ Desea GraH'fico en el PLOTTER (SI O NO?)= ";
11850 INPUT R#
11860 IF NOT(R#="SI" OR R#="S") THEN 11920
11870 PRINT "J GGAliste la unidad,COLOQUE papel y defina el cuadro"
11880 PRINT " con las teclas SET; para continuar apaste RETURN"
11890 INPUT R#
11900 T5=1
11910 T4=150
11920 DELETE C5
11930 DIM C5(Z2)
11940 IF T2=2 THEN 11990
11950 C5=Q5
11960 C#="MAGN.[db,]"
11970 B#="MAGNITUD EN DECIBELIOS"
11980 GO TO 12020
11990 C5=Q6
12000 C#="FASE[erd,]"
12010 B#="DIAGRAMA DE ANGULO"
12020 M1=1.0E+100
12030 M2=-M1
12040 FOR I=1 TO Z2
12050 M1=M1 MIN C5(I)
12060 M2=M2 MAX C5(I)
12070 NEXT I
12080 W1=Q3(Z2)+L2/10
12090 W0=Q3(1)-L2/10
12100 W3=1.2*M2
12110 IF M1<>0 THEN 12140
12120 W2=-W3/5
12130 GO TO 12190
12140 W2=-ABS(1.1*M1)
12150 IF ABS(W2)>M2/5 THEN 12190

```



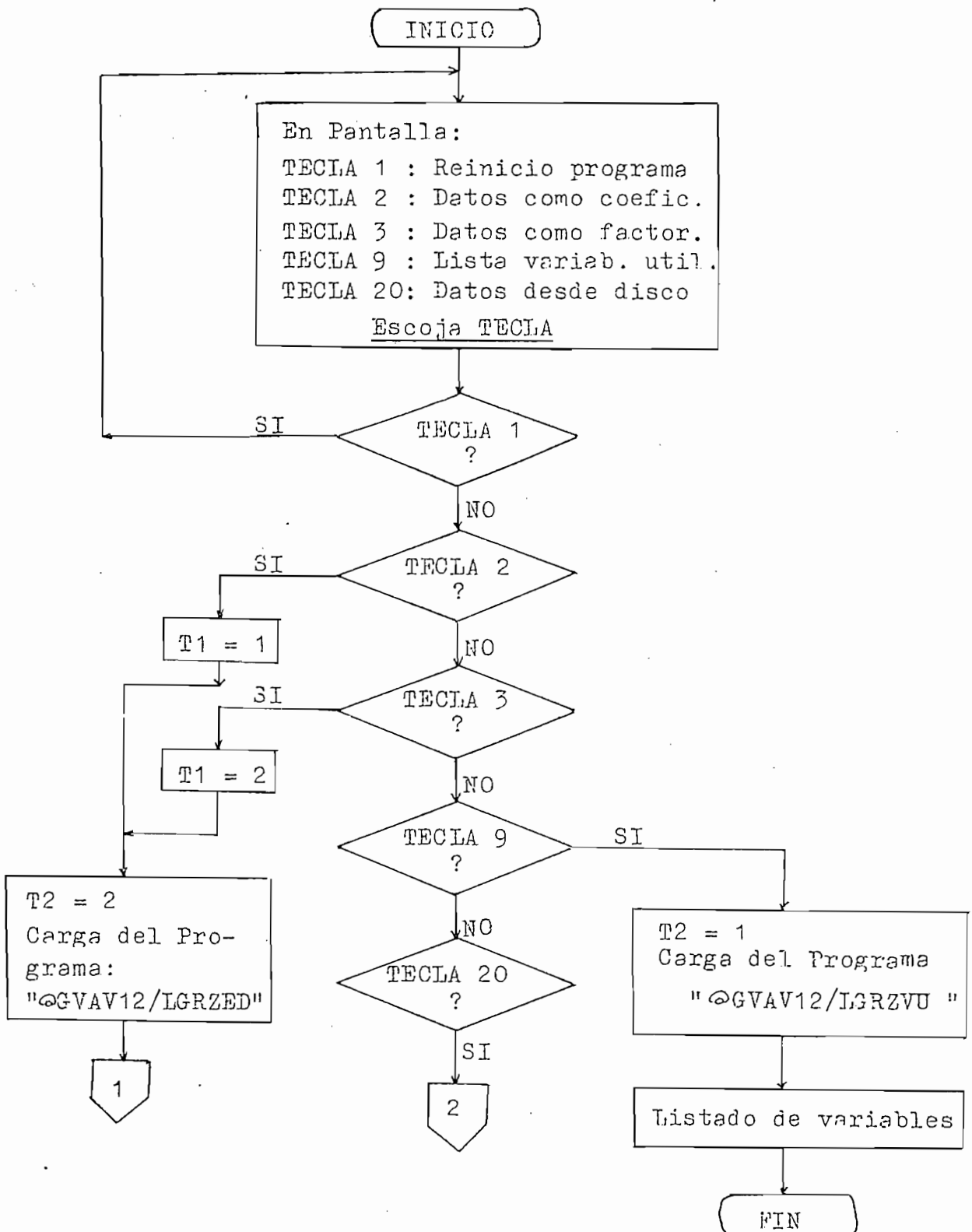
```

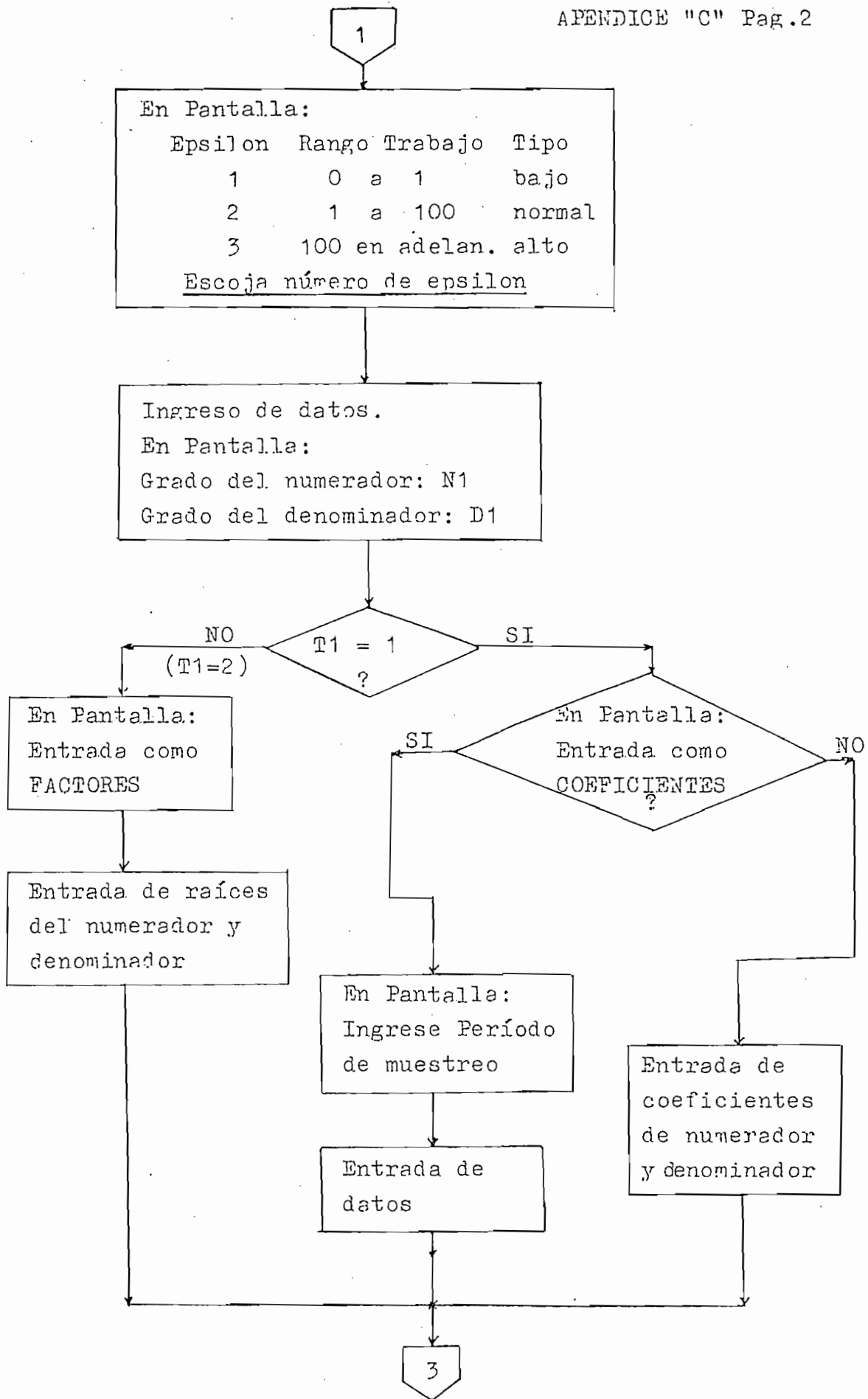
12160 W2=-ABS(M2/5)
12170 PRINT "IJJRETURN Para continuar"
12180 INPUT R#
12190 PRINT "LIJJDATOS PARA EL GRAFICO"
12200 PRINT "IJJValor m#H'ximo en EJE Y: ";M2
12210 PRINT "IJJValor miH'nimo en EJE Y: ";M1
12220 PRINT "IJJSeparacioH'n entre marcas EJE Y: ";
12230 INPUT M3
12240 PRINT "IJJValor m#H'ximo de frecuencia: ";L2
12250 PRINT "IJJSeparacioH'n entre marcas EJE X: ";
12260 INPUT L3
12270 GO TO 12310
12280 WINDOW W0,W1,W2,W3
12290 VIEWPORT 5,T4-5,7,94
12300 RETURN
12310 PAGE
12320 GOSUB 12280
12330 MOVE @T5:W0,W2
12340 DRAW @T5:W1,W2
12350 DRAW @T5:W1,W3
12360 DRAW @T5:W0,W3
12370 DRAW @T5:W0,W2
12380 AXIS @T5:L3,M3,0,0
12390 MOVE @T5:W1,0
12400 PRINT @T5:"JHHHHHHHWIrad,J"
12410 MOVE @T5:0,W3
12420 PRINT @T5:"J " ;C#
12430 MOVE @T5:03(1),C5(1)
12440 DRAW @T5:03,C5
12450 HOME @T5:
12460 PRINT @T5: USING 12470;B#
12470 IMAGE/20X,FA
12480 MOVE @T5:W0,W2
12490 PRINT @T5: USING 12500;INT(L2/10)
12500 IMAGE/6T,"EJE X:1 Div,=",FD,2D,S
12510 PRINT @T5: USING 12520;M3
12520 IMAGE 6T,"EJE Y:1 Div,=",FD,2D,S
12530 PRINT @T5: USING 12540;X#
12540 IMAGE 6T,"ARCHIVO : ",FA
12550 HOME
12560 INPUT R#
12570 GO TO 11710

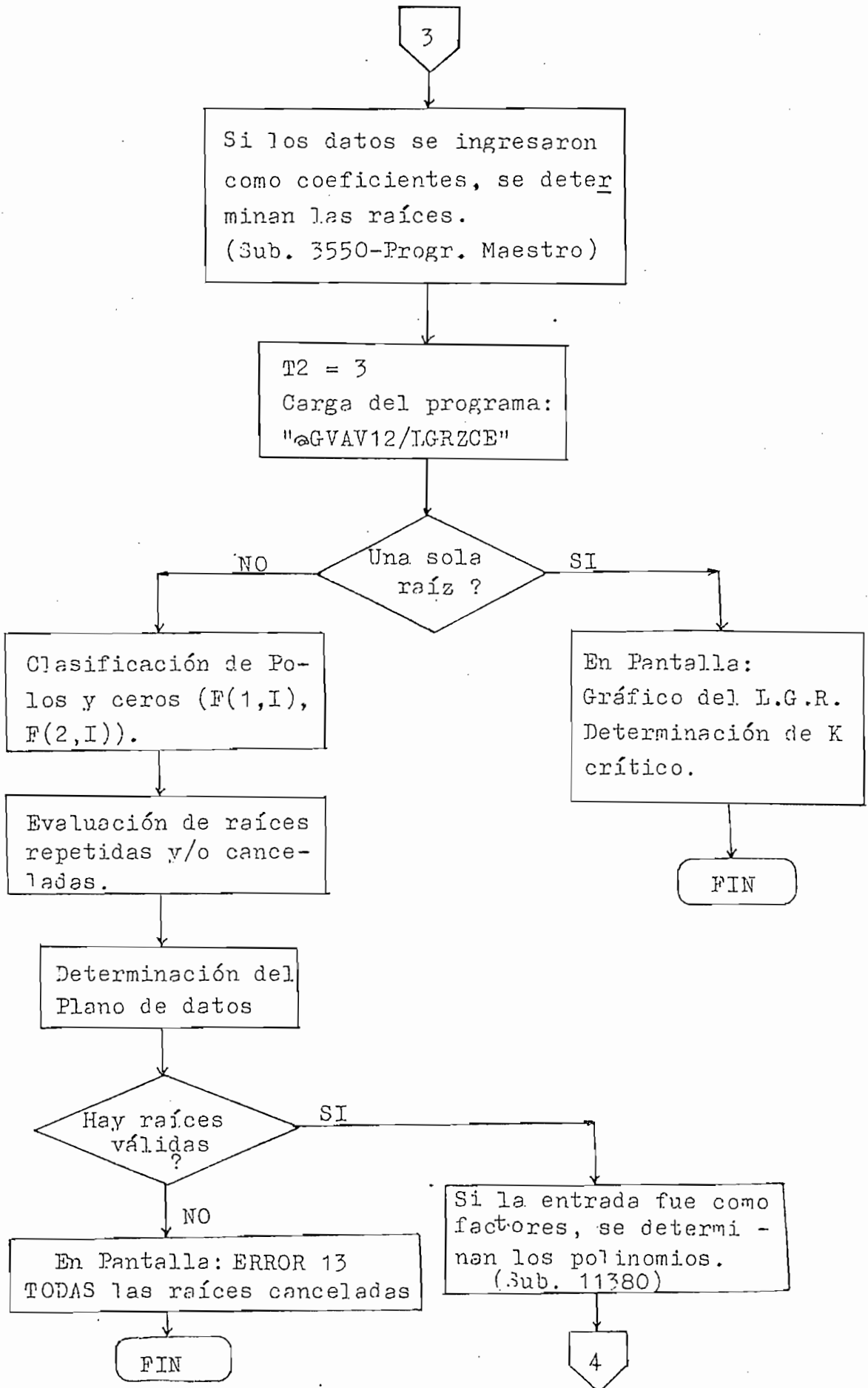
```

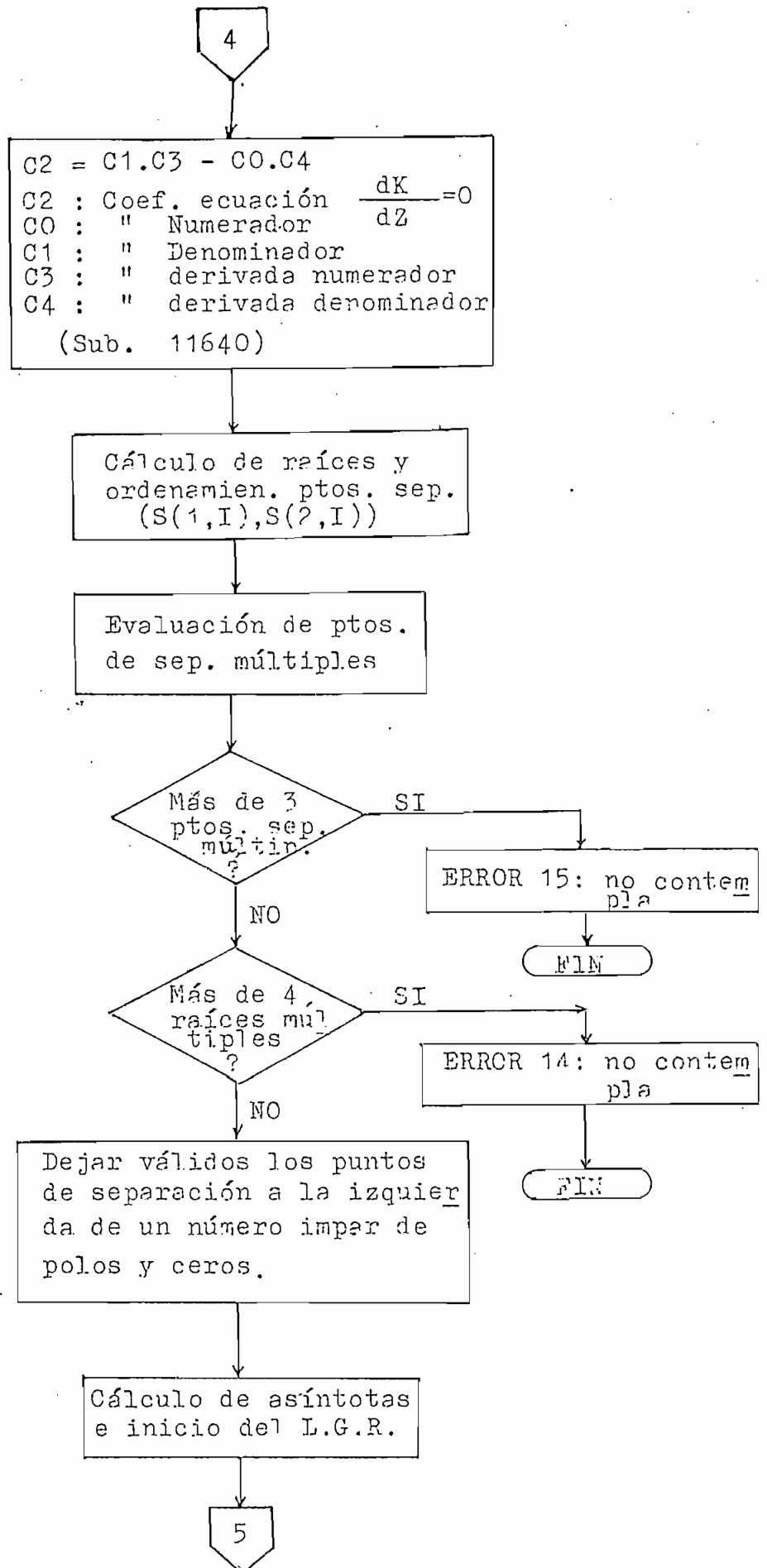
CONSTRUCCION DEL LUGAR

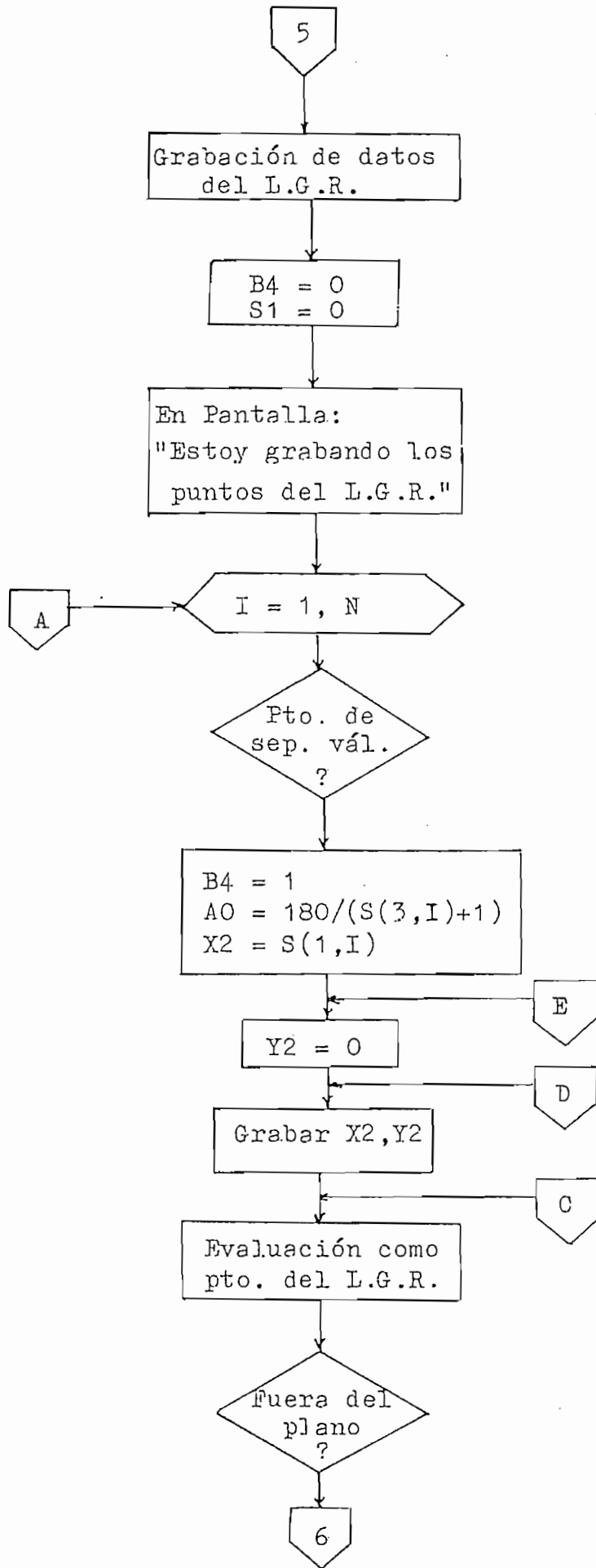
GEOMETRICO DE LAS RAICES - DIAGRAMAS DE FLUJO

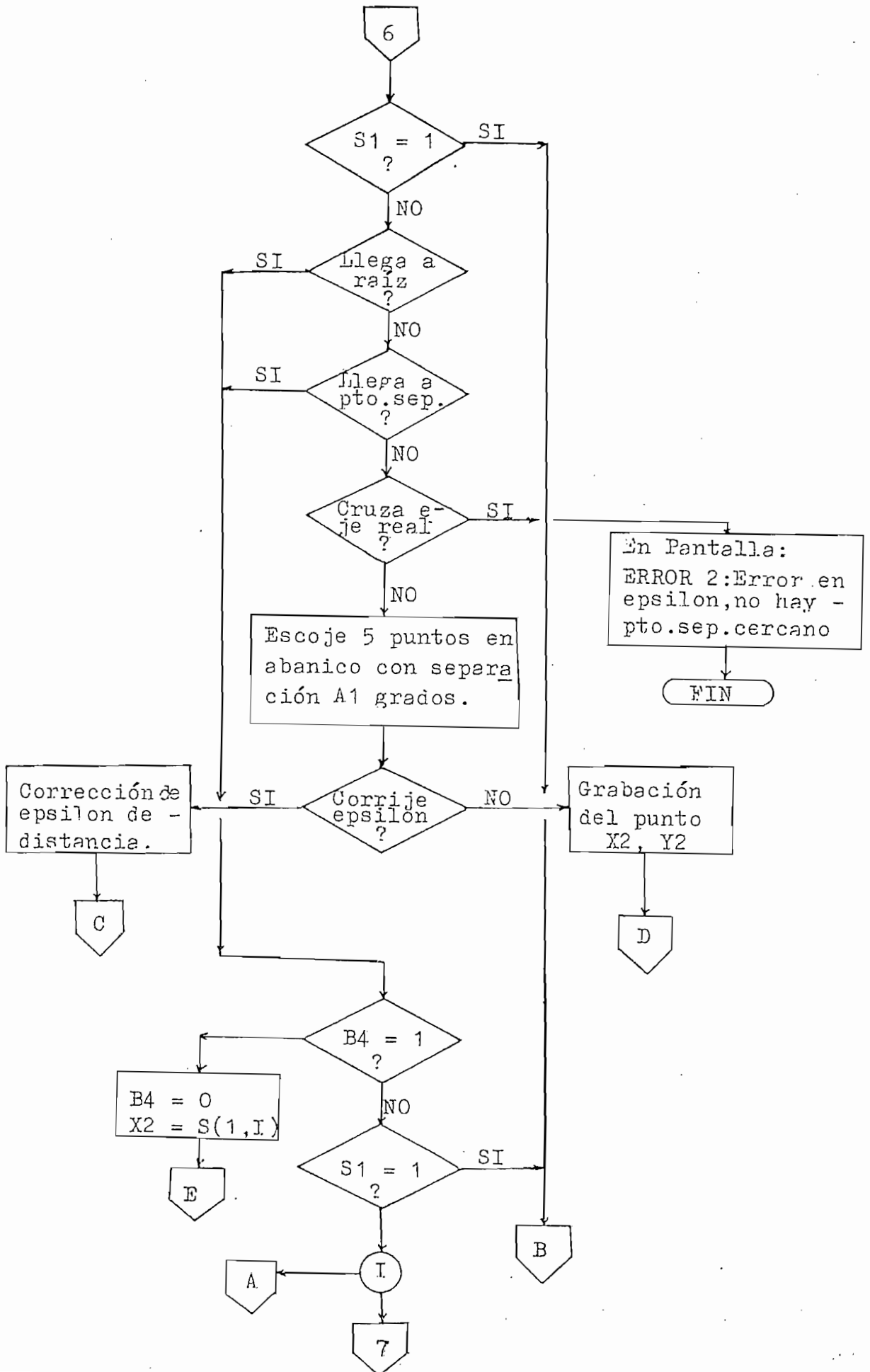


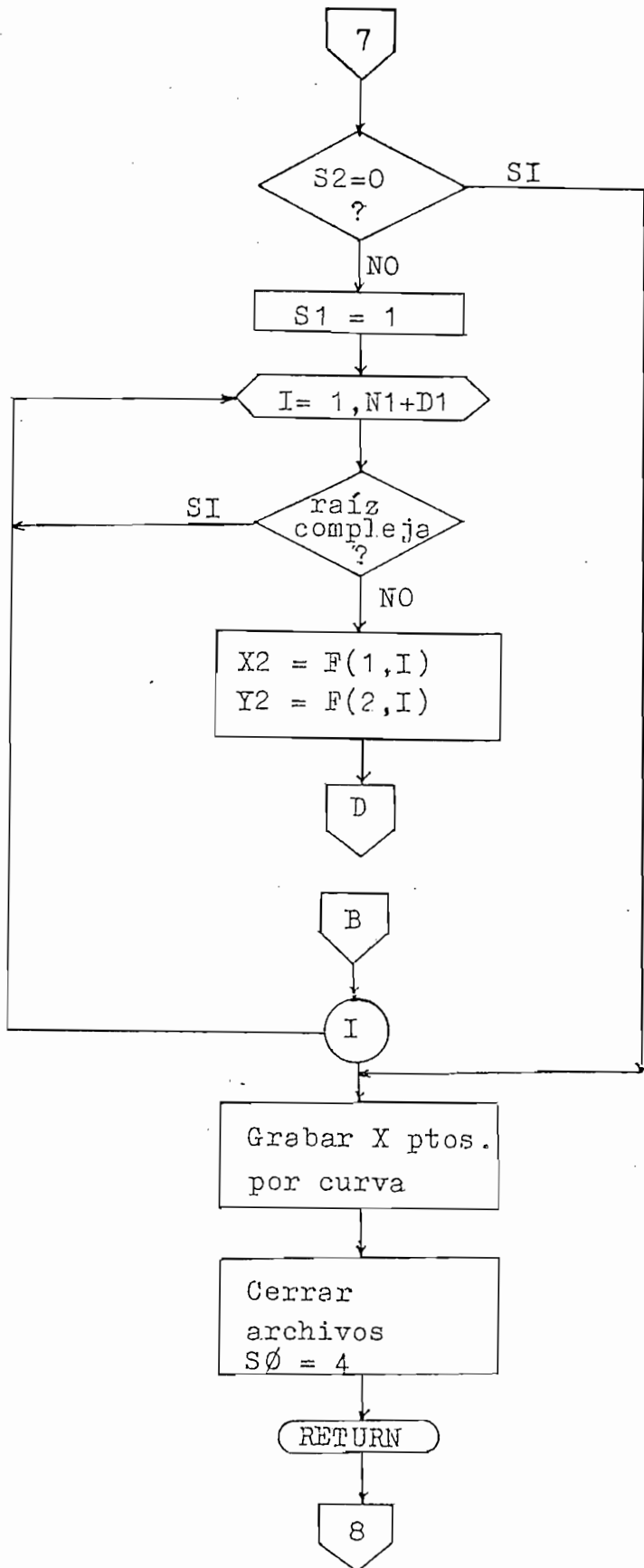


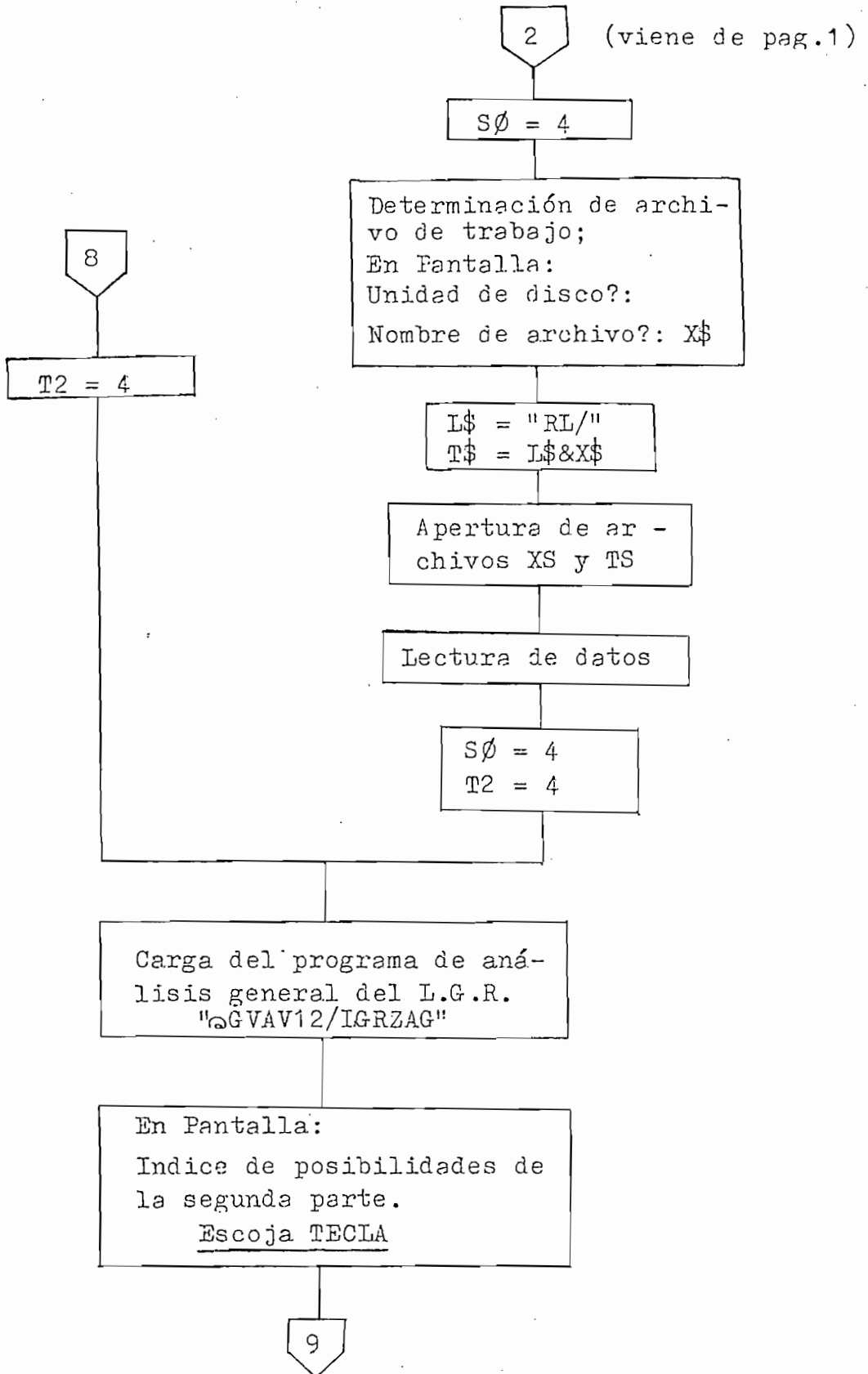


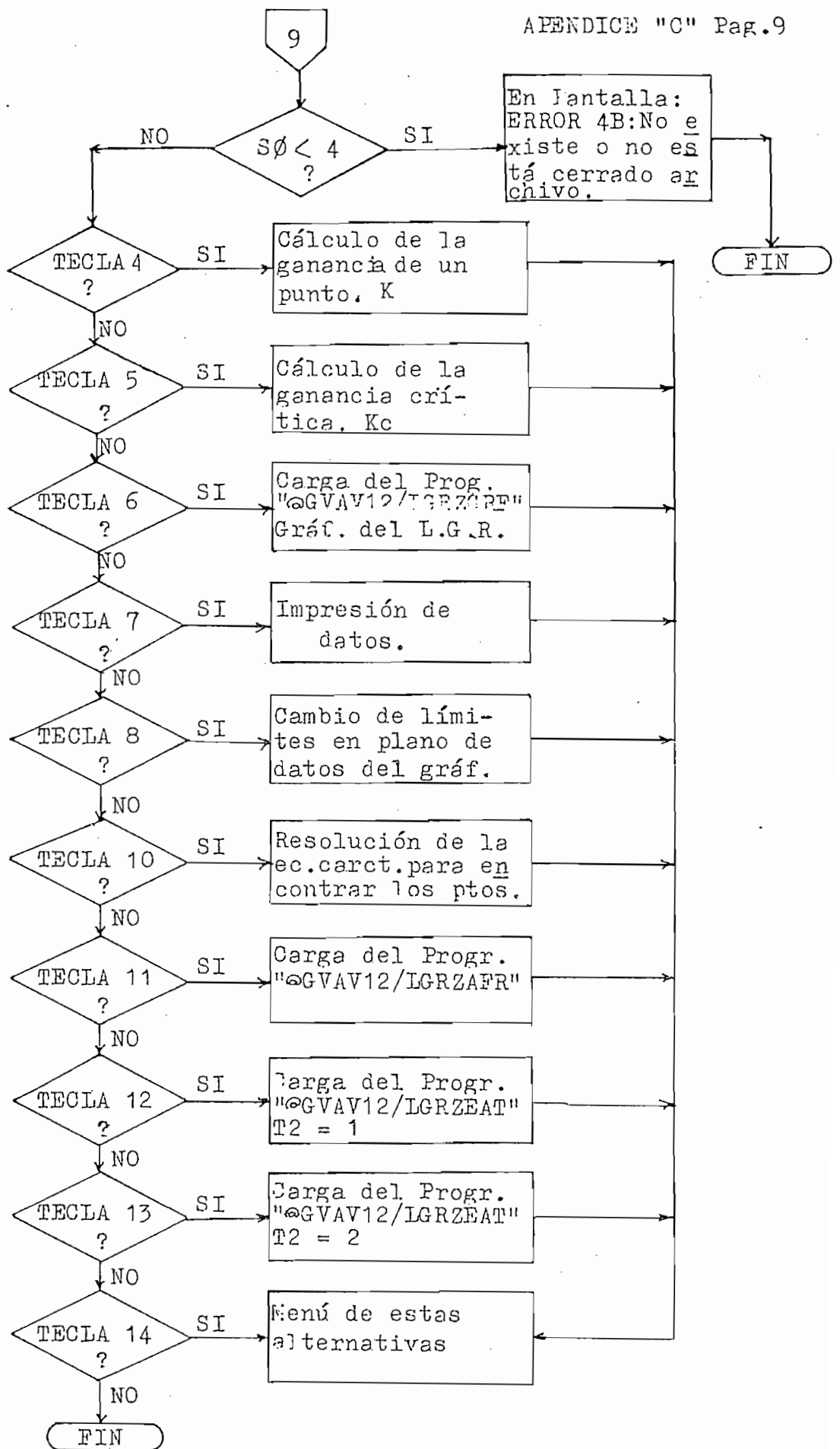






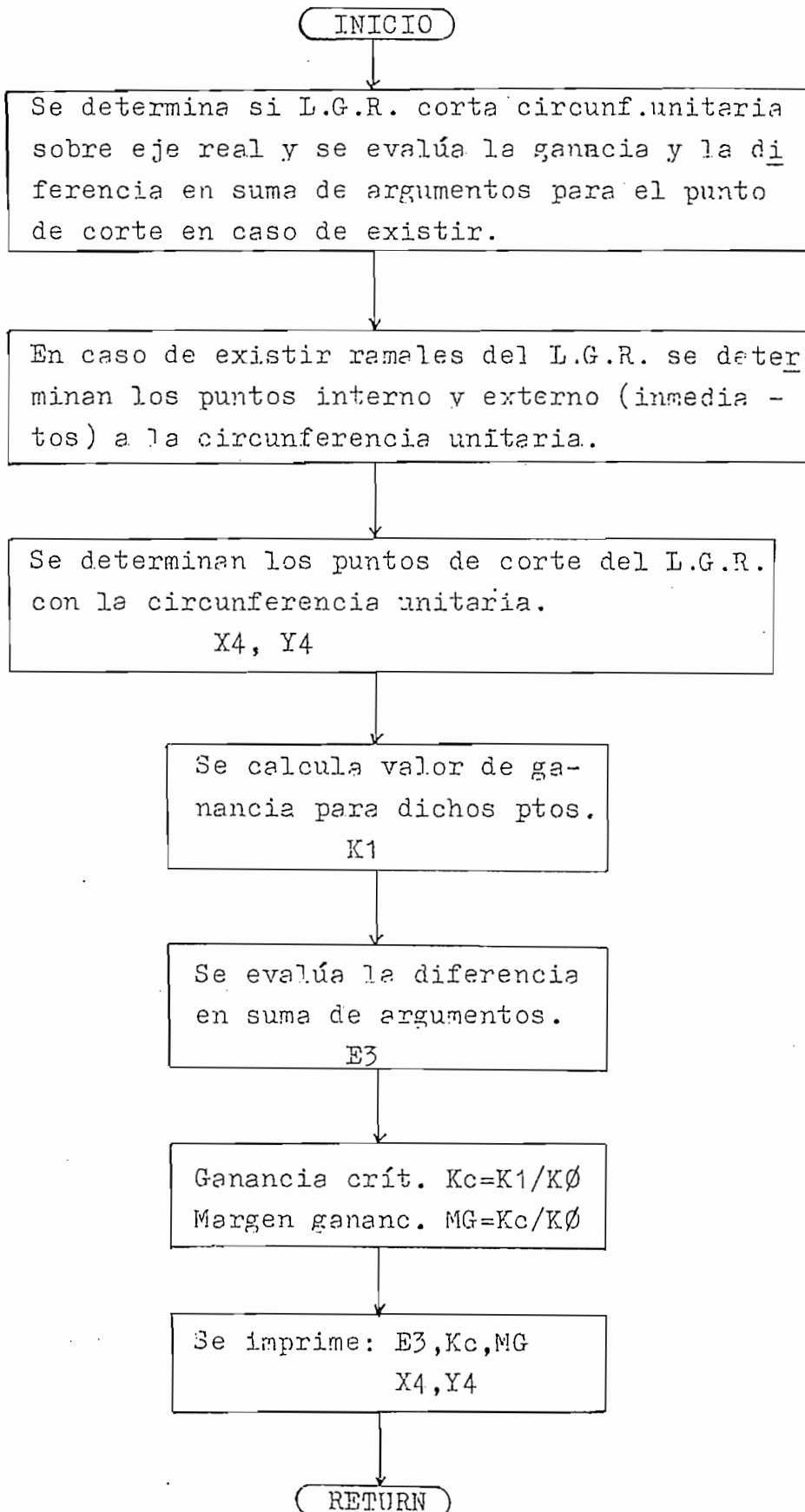






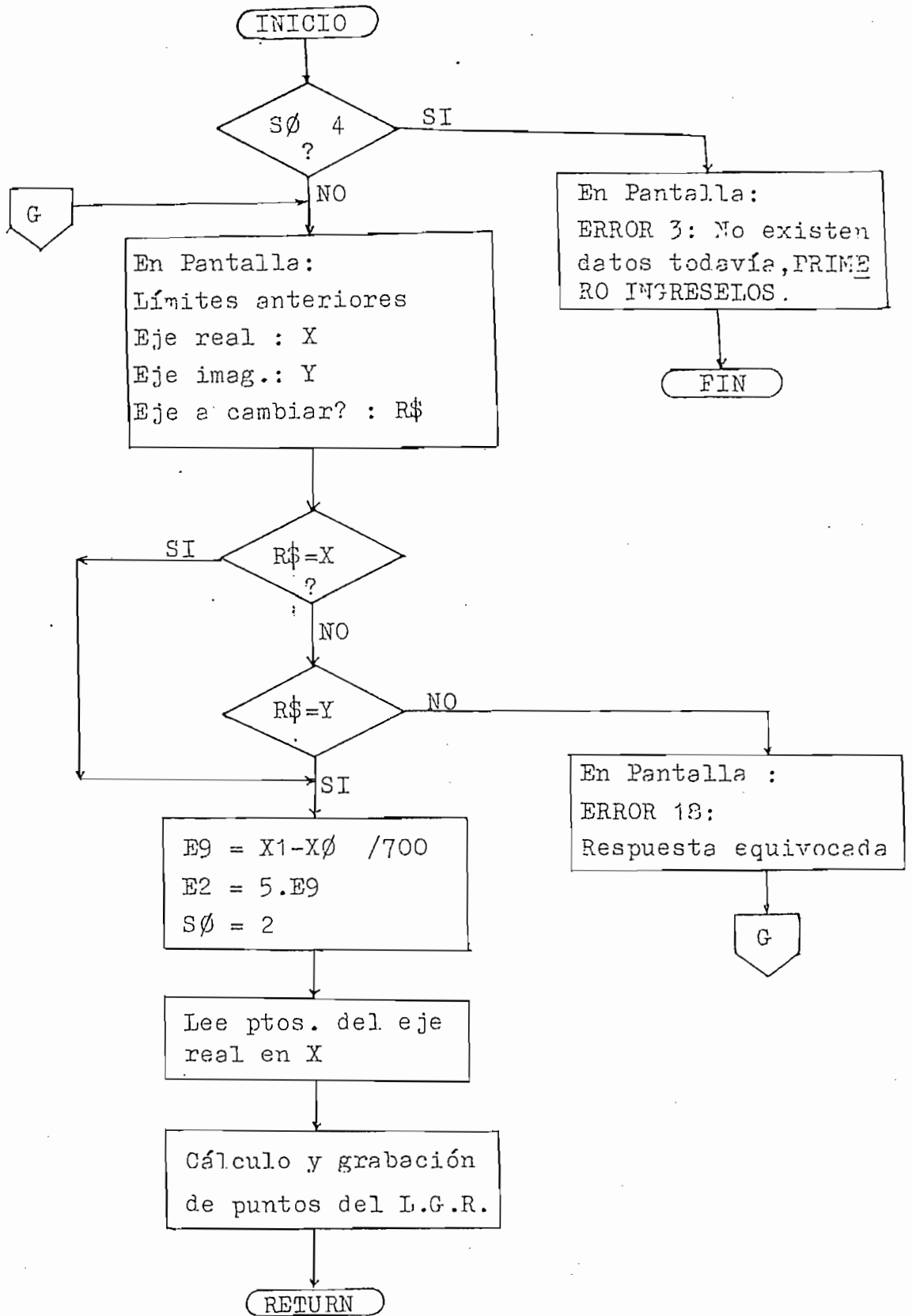
DETERMINACION DEL VALOR DE

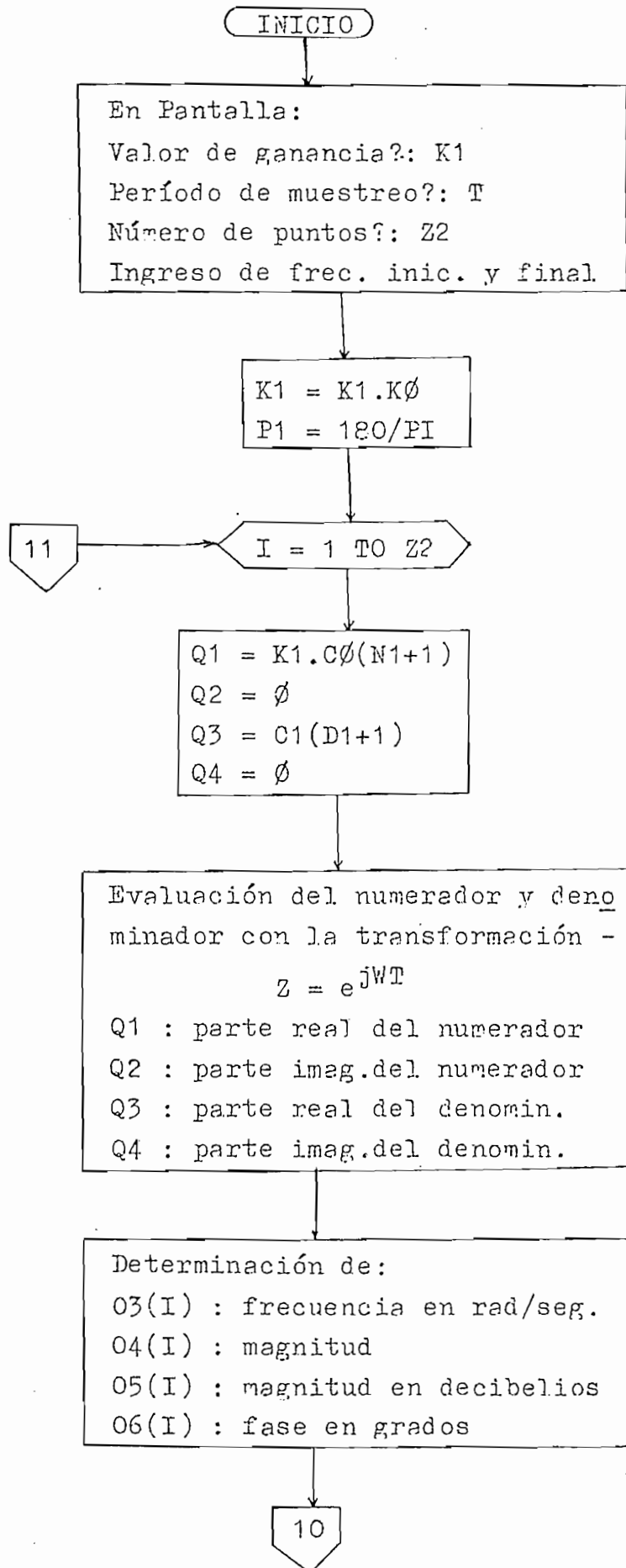
GANANCIA CRITICA Kc

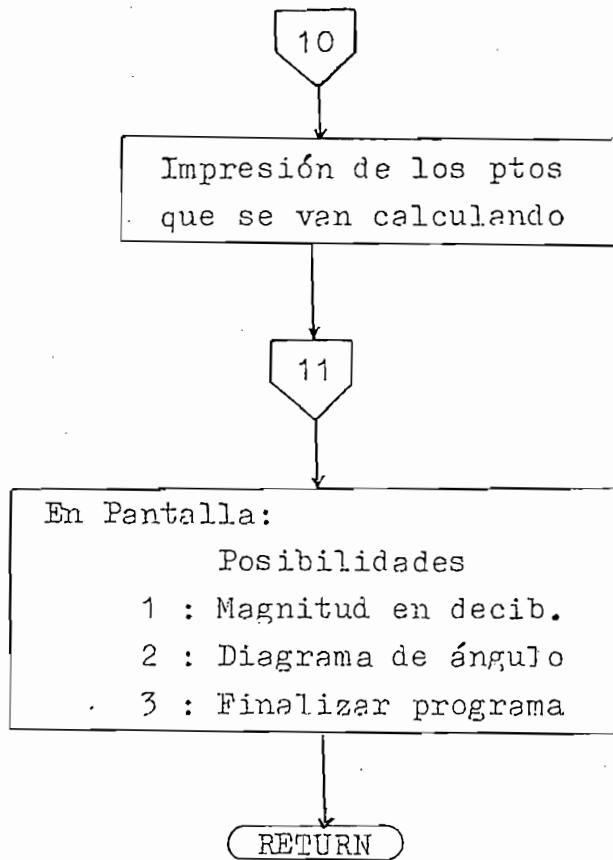


CAMBIO DE LIMITES EN

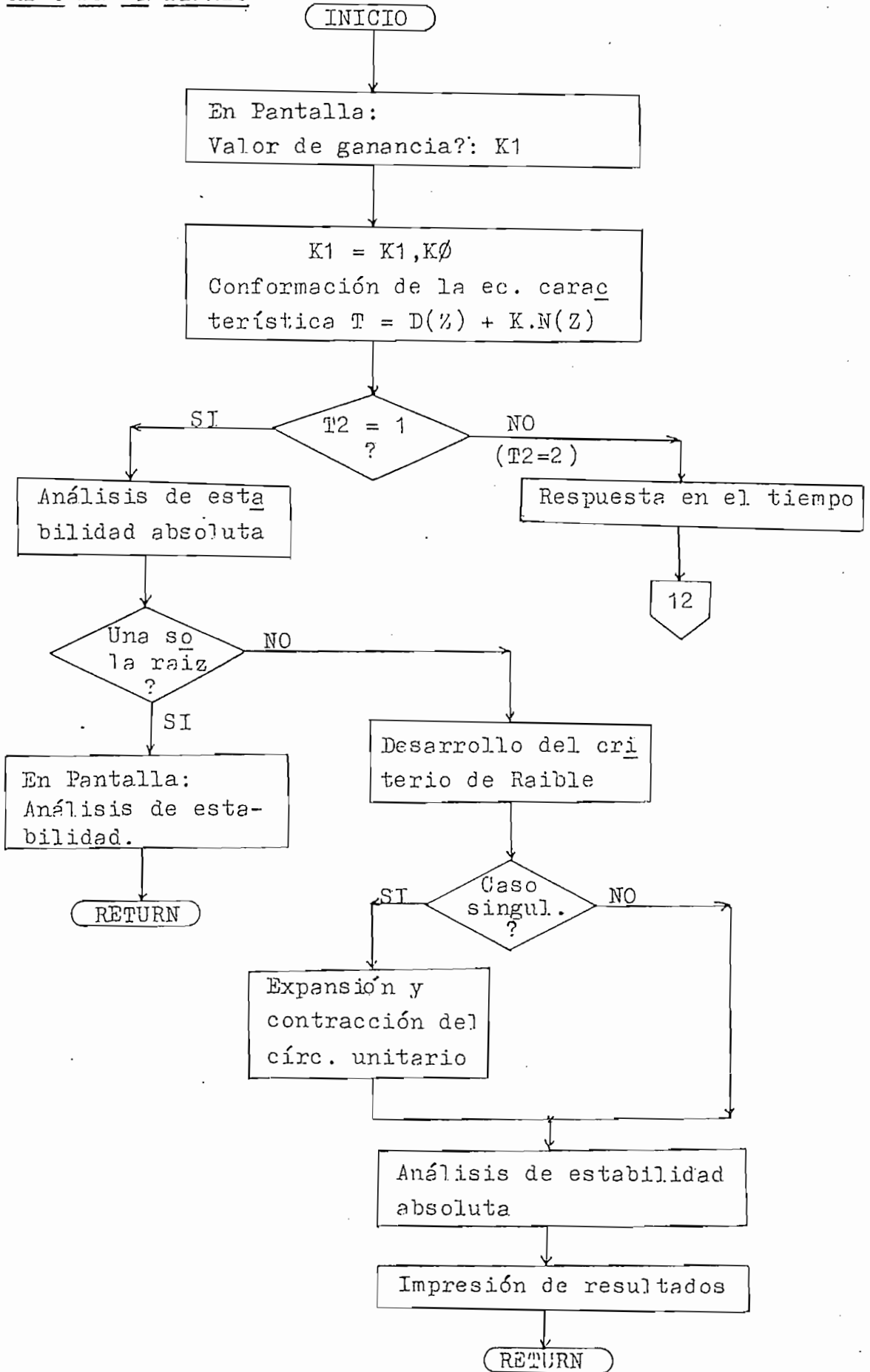
EL PLANO DE DATOS

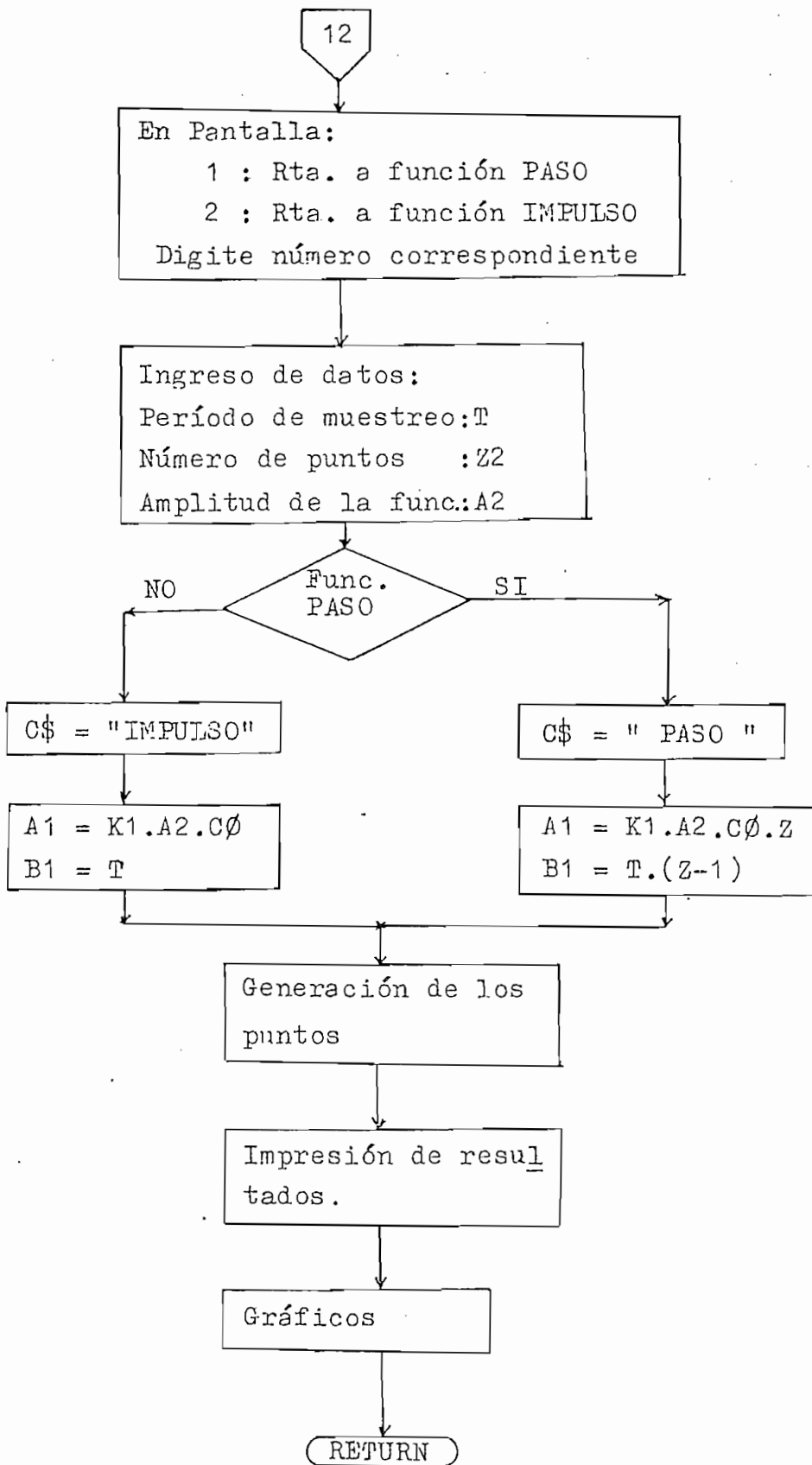






Y RTA. EN EL TIEMPO





BIBLIOGRAFIA

- TUO, Julius.- "Digital and Sampledata Control Systems", Mac Graw Hill Electrical and Electronic Engineering Series, 1959.
- KUO, Benjamín.- "Digital Control Systems", Holt-Saunders International Editions, 1980.
- OGATA, Katsuhiko.- "Ingeniería de Control Moderna", Prentice Hall , 1974.
- DORF, Richard.- "Sistemas Automáticos de Control", Fondo Educativo Interamericano S.A., 1978.
- KUO, Benjamín.- "Sistemas Automáticos de Control", Compañía Editorial Continental S.A., 1973.
- DIESTEFANO, STUBBERUD y WILLIAMS.- "Retroalimentación y Sistemas de Control", Mc Graw Hill, 1978.
- FRANKLIN y DAVID.- "Digital Control of Dinamic Systemas", Addison - Wesley Publishing Company, 1980.
- BOGNER y CONSTANTINIDES.- "Introduction to Digital Filtering", Wiley-Interscience Publication, 1975.
- PAZMIÑO ASTUDILLO, Jorge.- "Programa para el estudio de estabilidad, criterio del Lugar Geométrico de las Raíces", Tesis de Grado, E.P.N. 1981.