

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

AREA DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO

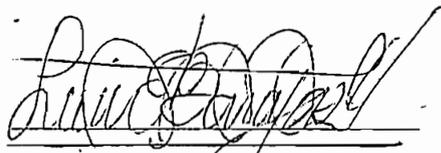
"OBTENCION PRACTICA DE UN MODELO MATEMATICO  
A PARTIR DEL METODO DE CUASILINEARIZACION Y DE  
MINIMOS CUADRADOS"

AMPARO MENA ROSALES

1988



Certifico que esta Tesis  
fue realizada en su  
totalidad por la  
Srta. Amparo Mena Rosales.



Ing. Luis Barajas.

Este Trabajo lo  
dedico a mis Padres  
que me han apoyado  
en todo momento.

## INTRODUCCION

El objetivo de la presente Tesis, Identificación de Parámetros por el Método de los Mínimos Cuadrados es encontrar el modelo matemático representado por una ecuación diferencial de primero o segundo orden, en su forma más simple y de manera aproximada.

Se parte de datos tomados experimentalmente, los cuales deberán corresponder a la respuesta del sistema a una excitación paso. Estos datos son procesados en el programa digital, de tal forma que a partir de ellos se obtendrá la ecuación diferencial, es decir, su modelo matemático.

En los primeros capítulos, se da una explicación teórica del proceso a seguirse y se deduce las fórmulas matemáticas utilizadas; luego se analiza los algoritmos utilizados en el programa, y por último se da los resultados obtenidos en el programa digital.

Cabe anotar, que los modelos matemáticos que se obtienen son únicamente modelos aproximados, ya que se supone que todos los sistemas se pueden aproximar a ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden; en el desarrollo de la tesis se confirma que esta suposición es válida y se llega a un equilibrio entre exactitud y simplicidad; esto es si tratamos de tener modelos

matemáticos con ecuaciones diferenciales de orden superior, se tendrían resultados muy complejos que complicarían a la interpretación del modelo matemático.

Se debe tener en cuenta que existen limitaciones en el programa, ya que los datos ingresados deberán ser reales, es decir, que si estos son incongruentes el modelo encontrado no será correcto.

El modelo matemático de un sistema, es la base para poder realizar el adecuado control del mismo. Se espera que esta Tesis sea un paso para estudios posteriores en el Área de Electrónica y Control.

## CAPITULO I

### DESCRIPCION DE LOS METODOS A UTILIZARSE

1.1.- MODELO MATEMATICO:  $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = U$

1.2.- DETERMINACION DE LOS PARAMETROS M, K

1.3.- DETERMINACION DEL PARAMETRO C

1.4.- CASO PARTICULAR:  $C\dot{X} + KX = U$

## CAPITULO I

### DESCRIPCION DE LOS METODOS A UTILIZARSE

#### 1.1 MODELO MATEMATICO

##### (1.1.1) Generalidades. -

Para <sup>LA</sup> el <sup>PLANNIFICACION</sup> diseño del control, de un sistema es necesario tener un modelo que describa el funcionamiento de este. Luego se debería tener el conocimiento de física, química y otras ciencias que han desarrollado teorías sobre el funcionamiento <sup>DE LOS SISTEMAS</sup> de circuitos eléctricos, motores, fluidos e infinidad de sistemas; pero existe un camino alternativo mucho menos complejo que es el de excitar la planta y tomar <sup>MEDIR</sup> <sup>DE LAS RESPUESTAS</sup> mediciones de la respuesta, es decir, que se tendrían datos de entrada / salida.

El proceso de construir un modelo, y de estimar los valores de los parámetros que definen ese sistema, a partir de valores de entrada y salida se lo conoce como Identificación de Sistemas.

Al realizar la modelación de un sistema físico, se puede ver que existen varias formas para hacerlo, es decir, que existen varios tipos de modelos. Se los puede clasificar de la siguiente manera:

### 1.1.2 Modelos a pequeña escala.-

Los modelos a pequeña escala son modelos físicos que representan a alguna planta o proceso ya sea mecánico, eléctrico, térmico, hidráulico etc.

Este tipo de modelos son aplicables a laboratorios donde se realiza investigación. En los modelos a pequeña escala se podrá medir parámetros para a partir de estos implementar el control en sistemas reales. El modelo a pequeña escala debe representar en manera exacta el sistema real, para que cualquier tipo de mediciones que se hagan en este puedan ser utilizadas en las aplicaciones en el sistema físico que se esta modelando.

### 1.1.3 Modelos matemáticos.-

#### Modelo analítico.-

Los modelos analíticos son una abstracción de los sistemas físicos reales, Pueden ser de dos tipos:

- modelos analíticos continuos, estos se obtienen a partir de la descripción de los componentes básicos de los sistemas, de las leyes físicas que rigen el fenómeno, y de la interconexión entre los componentes básicos.

- modelos analíticos discretos, este tipo de modelo se estructura en base a datos muestreados de entrada y salida, que deberán ser procesados mediante algún algo-

ritmo computacional, un ejemplo de este tipo de modelo es el MODELO ARMA.]

#### Modelos numéricos.-

Estos consisten de una tabla de valores, que describen desplazamientos o movimientos. Se los puede aplicar al control numérico de máquinas, herramientas, <sup>o cualquier</sup> como son el <sup>otro fenómeno</sup> torno, fresadores etc.]

Para el análisis en este trabajo, se va a determinar un modelo matemático, este modelo estará descrito por medio de ecuaciones diferenciales, se tratará de buscar los parámetros de las ecuaciones diferenciales que definan en mejor forma al modelo.

## 1.2 Modelo matemático: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$ .-

Para la identificación de parámetros de un sistema se debe obtener un modelo a base de mediciones de entrada y salida de la planta que se está identificando. Se debe buscar los parámetros que identifiquen en mejor forma a la planta. Los modelos pueden ser planteados por medio de variables de estado, en función de transferencia o por medio de ecuaciones diferenciales; una vez planteado el modelo se debe encontrar los parámetros, esto se conoce como identificación paramétrica.

Muchos sistemas dinámicos sean estos eléctricos, térmicos, hidráulicos, económicos etc., pueden ser representados por medio de ecuaciones diferenciales.

La descripción matemática de un sistema es conocido como modelo matemático. El desarrollo del modelo es la parte más importante de todo análisis. El modelo puede ser de distintas formas, una determinada representación será más adecuada que otra en determinadas ocasiones.

Por ejemplo, un modelo bastante complejo podría ser representado por medio de una ecuación diferencial de tercer o cuarto orden, o aún más por una de un orden mucho superior, pero en este caso el modelo resultante sería bastante complejo, y se tendría un gran número de parámetros a determinar y el modelo sería muy difícil de analizar.

En la mayoría de los casos es suficiente obtener un modelo con una ecuación diferencial de primero o segundo orden, ya que de esta forma se tendrá un modelo bastante simplificado el que será muy fácil de analizar.

Al obtener un modelo se debe llegar a un compromiso entre simplicidad y exactitud, es decir, que la simplicidad del modelo debe estar ligada a la exactitud que obtenemos en la respuesta de este.

Cuando se desarrolla un modelo simplificado, se debe ignorar ciertas características del sistema, o imponerse determinadas restricciones, si se quiere representar un sistema por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias se deberá desprestigiar ciertas alinealidades para evitar las derivadas parciales ya que esto implicaría que el modelo se vuelva más complejo, pero a la vez este sería más exacto. Por tanto, el momento que se está diseñando un modelo se debe tener en cuenta que es lo que se desea mayor exactitud o mayor simplicidad.

Si al imponerse ciertas restricciones, estas no influyen sobre la respuesta se lograría un balance entre exactitud y simplicidad.

Generalmente al diseñar un modelo, en primer lugar se debe obtener una representación simple para poder entender el comportamiento del sistema, luego se puede buscar

la exactitud del mismo.

En la práctica no es posible obtener un modelo matemático exacto de un sistema complejo, pero si se llega a suposiciones correctas sobre las propiedades que tiene este sistema.

Una forma muy utilizada para representar un sistema físico es por medio de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Para la identificación paramétrica tenemos distintos métodos que dependerán del modelo que se ha planteado.

Una división muy general podría ser:

- identificación paramétrica discreta.
- identificación paramétrica continua.

Ambos tipos de identificación son similares, la diferencia que tienen es que en el primer caso se dará un modelo discreto, y en el otro será un modelo continuo.

Cuando se realiza la identificación se trata de obtener el modelo con el menor número de parámetros. Luego una ventaja de utilizar la identificación paramétrica continua es que el número de parámetros a identificarse es mucho menor. Cuando se utiliza el método discreto se deben identificar un gran número de parámetros, podemos ver por ejemplo, el modelo ARMA, muy utilizado para este

tipo de identificación, el número de parámetros que se debe encontrar:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ 1 \\ x(k+1) \\ 2 \\ x(k+1) \\ 3 \\ x(k+1) \\ 4 \\ x(k+1) \\ 5 \\ x(k+1) \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver en este modelo se deben indentificar

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Los criterios más utilizados para la identificación son:

- Estimación por mínimos cuadrados (LS)
- Estimación por la mejor aproximación lineal (BLUE), por sus siglas en inglés.
- Estimación por la máxima probabilidad (MLE), por sus siglas en inglés.
- Mínimos cuadrados recursivos.
- Mínimos cuadrados estocásticos.

Con esta descripción se quiere dar únicamente una idea general de los métodos que existen para la identificación de parámetros.

En el presente trabajo se está realizando una iden-

tificación paramétrica continua y se utilizará el método de los mínimos cuadrados. Se considerará además que los modelos serán lineales e invariantes en el tiempo.

En muchos casos la representación de un sistema físico por medio de una ecuación diferencial de segundo orden es bastante correcta. Representado en la siguiente forma:

$$1.1 \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

donde;

M, C, K son los parámetros constantes de la ecuación diferencial, que se quiere determinar;

U(t) es la señal de entrada o causa conocida,

X(t) es la variable de salida del sistema;

t es la variable de tiempo.

Para obtener un modelo simplificado que represente a un sistema complejo basta una representación con ecuaciones diferenciales de primero o segundo orden porque:

- si se analiza los patrones gráficos de respuesta se puede ver que casi todos tienden a la respuesta de una ecuación diferencial de segundo orden en los tres casos posibles si el sistema es estable como se ve en la

FIGURA 1.1; o a un sistema de primer orden como se ve en la FIGURA 1.2.

FIGURA 1.1 RESPUESTA DE UNA ECUACION DE SEGUNDO ORDEN

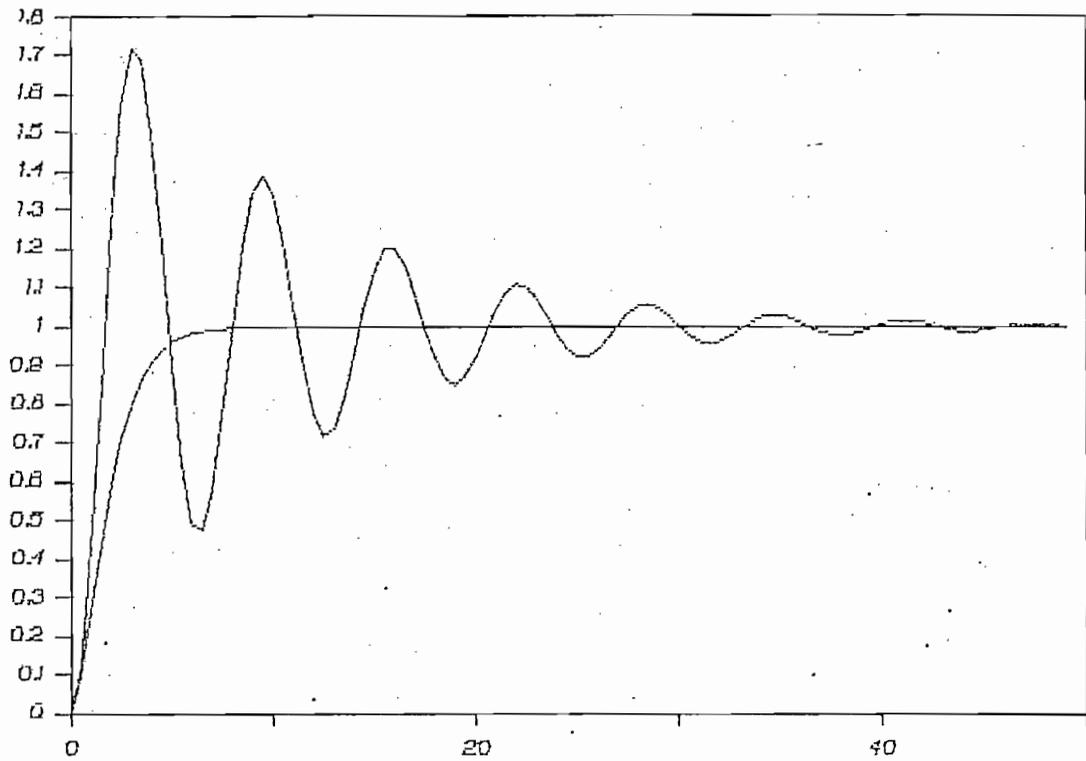
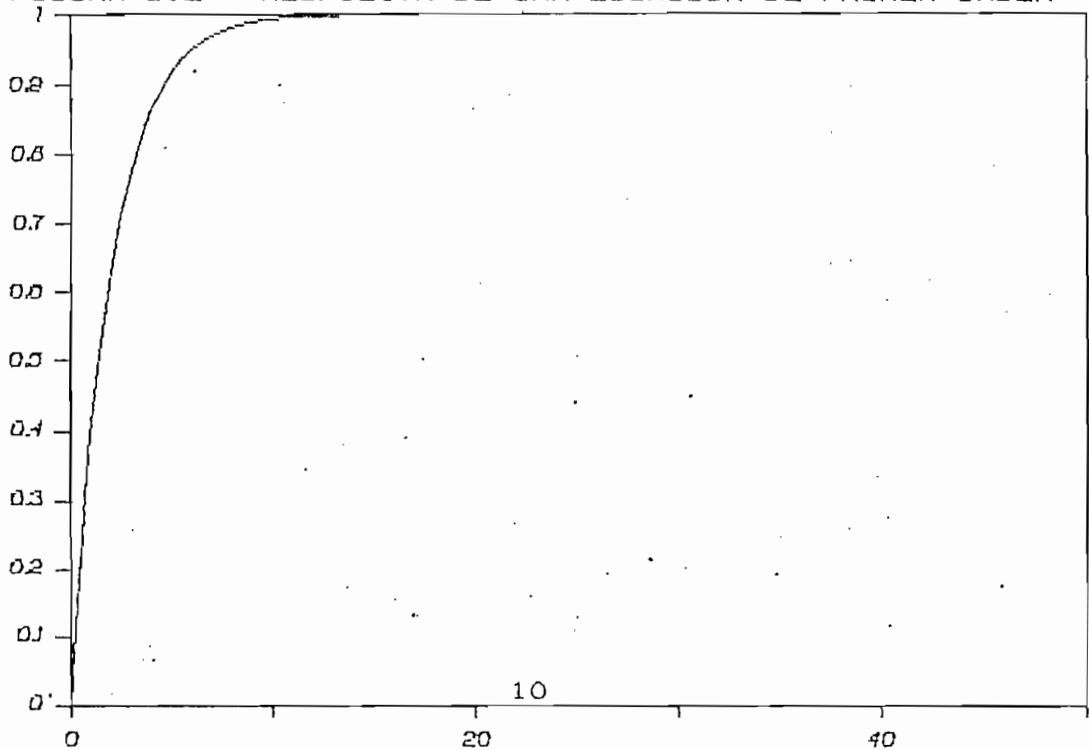


FIGURA 1.2 RESPUESTA DE UNA ECUACION DE PRIMER ORDEN



- al realizar el análisis de las ecuaciones diferenciales y se toma la transformada de Laplace y se ubica en el eje real los polos y ceros de la función, que corresponden a los valores propios, los únicos que tienen influencia son aquellos que se encuentran cerca del eje imaginario, los demás pueden ser despreciados; por esta razón una ecuación de segundo o primer orden son suficientes para plantear el modelo.

Para un sistema de tercer orden se tiene la siguiente función de transferencia:

$$1.2 \quad C(s) = \frac{K (s t z_1) (s t z_2) \dots (s t z_m)}{(s t p_1) (s t p_2) \dots (s t p_n)}$$

Si todos los polos de lazo cerrado quedan en el semiplano izquierdo de  $S$ , las magnitudes relativas de los residuos determinan la importancia relativa de los componentes en la forma desarrollada de  $C(s)$ . Si existe un cero cerca de un polo, el residuo de este polo se hace pequeño y el coeficiente en término de respuesta transitoria correspondiente a este polo también se hace pequeño. Si hay un polo ubicado muy lejos del origen, el residuo en este polo puede ser pequeño. Los transitorios correspon-

dientes a este polo remoto son bastante pequeños y duran poco tiempo. Los términos de  $C(s)$  que tienen un residuo pequeño contribuyen muy poco a la respuesta transitoria y pueden ser despreciados. Por lo tanto, un sistema de orden superior puede ser aproximado a uno de orden más bajo.

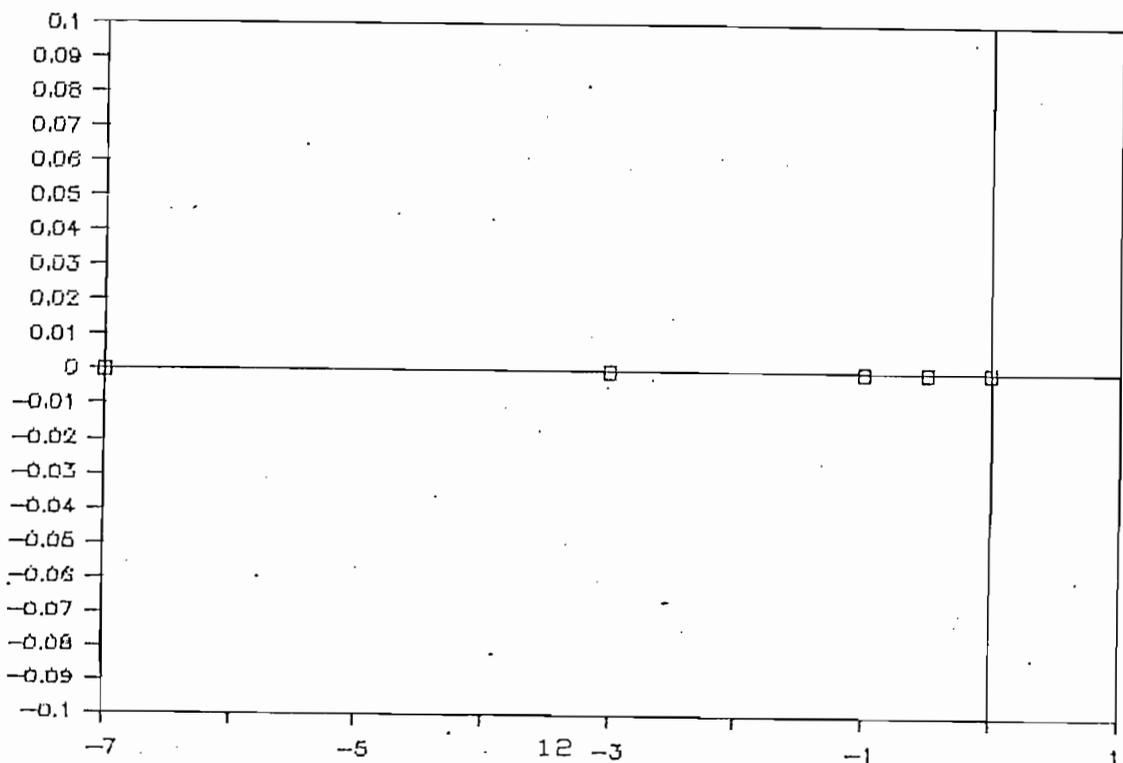
Se puede plantear un ejemplo matemático que aclare esta situación:

Se tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.5)(s+1)(s+7)(s+3)}$$

Uno de los polos está muy lejos del origen, los otros dos son cercanos a él. Por tanto el polo que se encuentra lejano al origen puede ser despreciado, así quedará reducido el orden del sistema. FIGURA 1.3

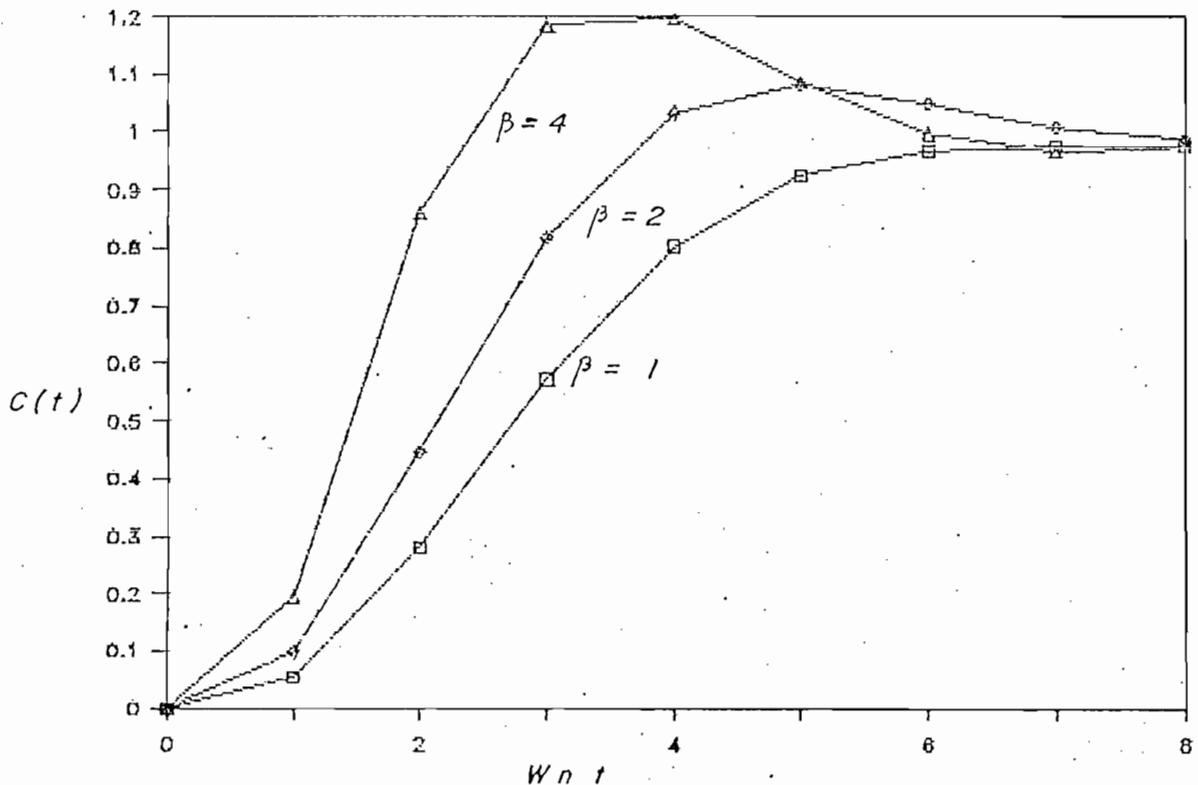
FIGURA 1.3 REPRESENTACION DE LOS POLOS EN EL PLANO S



Esto sirve para justificar la suposición que se tendrá un modelo preciso y sencillo con ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden.

Si se tiene un sistema de tercer orden en el que no es posible llevar a cabo la simplificación de los polos para la reducción del orden; se podrá ver que también en este caso es posible la representación por medio de un modelo de segundo orden. En la FIGURA 1.4 se puede ver la respuesta típica de una ecuación diferencial de tercer orden, se ve que el patrón de respuesta es similar al de la FIGURA 1.1 de la ecuación de segundo orden.

FIGURA 1.4 RESPUESTAS DE UNA ECUACION DE TERCER ORDEN



El tiempo de respuesta en la ecuación de tercer orden dependerá de la ubicación de los polos en el plano  $S$ . El polo real reduce el máximo sobreimpulso aumentando el tiempo de establecimiento del sistema.

En el capítulo cuarto se presenta un ejemplo de un sistema de tercer orden, que tiene un polo real, del que se encontrará un modelo de segundo orden, y se realiza un análisis de la respuesta obtenida.

El modelo de segundo orden, en este caso, será una aproximación del sistema de tercer orden, se puede comparar la respuestas de dichos sistemas a una entrada escalón unitaria. (Capítulo IV, Ejemplo # 4).

Para el desarrollo de esta tesis se ha tomado la función de entrada  $U(t)$  como una función paso de amplitud  $A$ .

También se ha considerado condiciones iniciales nulas.

$M$ ,  $C$ ,  $K$  son los parámetros de la ecuación diferencial que se debe determinar, para esto se parte de unos valores iniciales de estos parámetros que serán determinados a partir de las características del sistema como se verá más adelante.

### 1.3 Determinación de los parámetros M,K.-

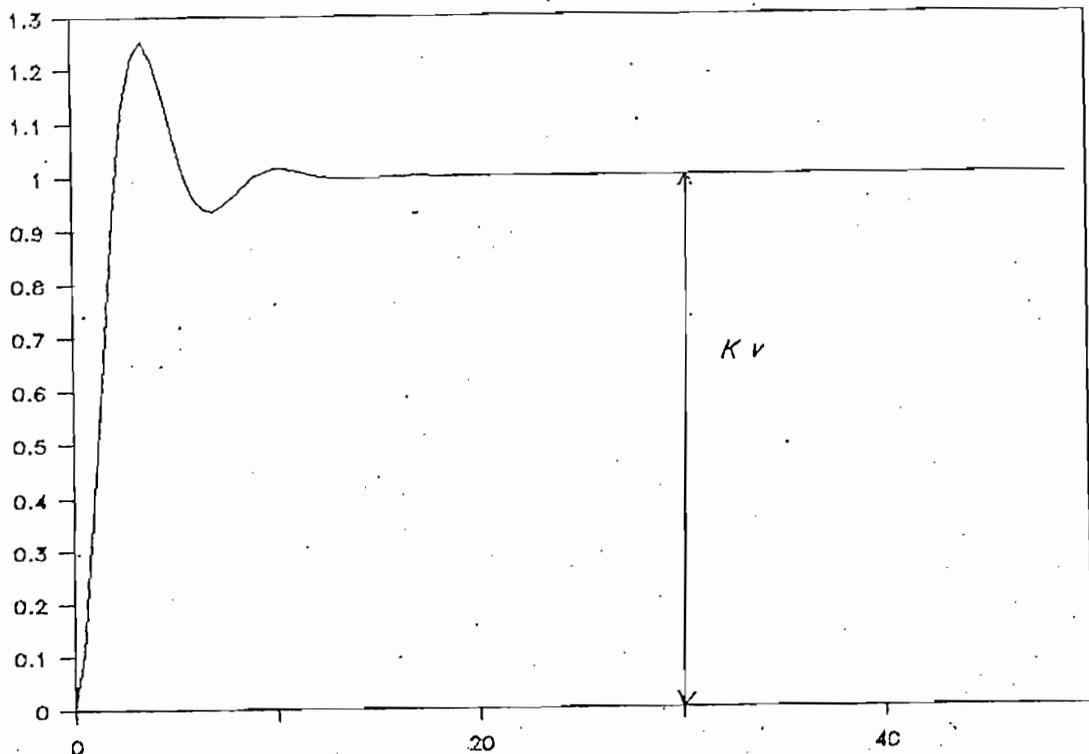
#### 1.3.1 Determinación del parámetro K.-

Para la determinación del parámetro K de la ecuación diferencial de segundo grado se parte de la ecuación 1.1:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

Tomando la transformada de Laplace, considerando las condiciones iniciales nulas, y tomando en cuenta la constante  $K_v$  que se lo define como el valor en el cual la función se estabiliza, como se puede ver en la FIGURA 1.5. La constante  $K_v$  no tiene nada que ver con la definición de  $K_v$  como el coeficiente estático de error de velocidad para una entrada rampa.

FIGURA 1.5 DEFINICION DE LA CONSTANTE  $K_v$



Tomando la transformada de Laplace se tiene:

La ecuación diferencial de segundo orden es:

$$1.3 \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

donde;

M, C, K, son los parámetros de la ecuación diferencial;

U(t) es la señal de entrada paso conocida, de amplitud U

La transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas es:

$$1.4 \quad Ms^2x + Csx + Kx = U(s)$$

La transformada de Laplace de una señal paso de amplitud U es: U/s.

sacando factor común se tiene:

$$1.5 \quad x(Ms^2 + Cs + K) = U(s)$$

la función de transferencia es:

$$1.6 \quad \frac{x(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Por definición la constante Kv es igual a:

$$1.7 \quad K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \cdot \frac{U}{s}$$

$$1.8 \quad K_v = U / K$$

despejando;

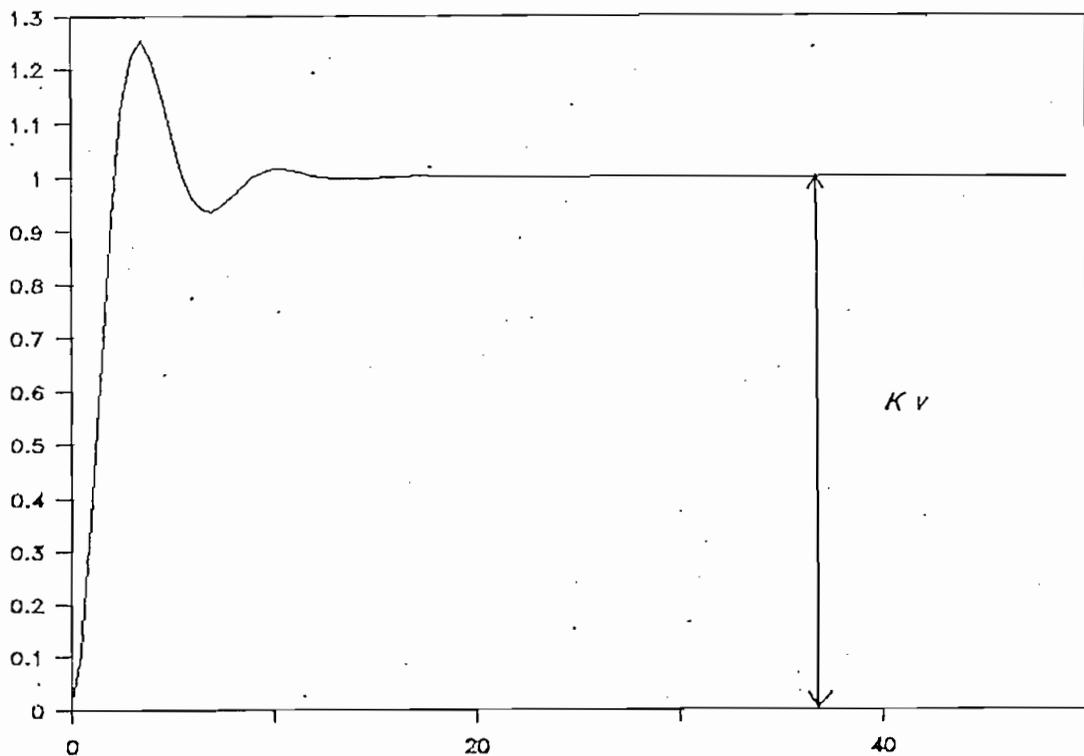
$$1.9 \quad K = U / K_v$$

Se ha determinado en una manera bastante exacto el valor del parámetro K.

Para encontrar el valor de  $K_v$ , se tomará la parte de la curva en la que ya se estabiliza el sistema, ya que caso contrario se tendría un valor erróneo de este parámetro.

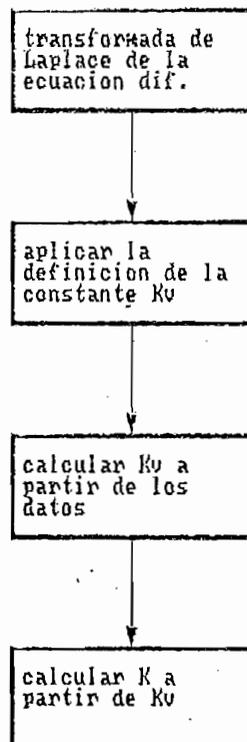
Ver FIGURA 1.6

FIGURA 1.6 DEFINICION DE LA CONSTANTE  $K_v$



Por este motivo, dentro del programa se chequea en primer lugar que la curva se haya estabilizado para de ahí calcular el respectivo parámetro; todo sistema real tiende a estabilizarse luego de un transitorio por lo cual si es posible determinar el parámetro de esta manera.

A continuación se presenta un diagrama de bloques del algoritmo para determinar el parámetro K:



El algoritmo para determinar este parámetro es el siguiente:

1.- Se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de segundo orden y tenemos la siguiente expresión:

$$1.10 \quad X(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \frac{A}{s}$$

donde A es la amplitud de la señal.

$$A = U$$

2.- Por definición se tiene; (como se indicó anteriormente):

$$1.11 \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{X(s)}{U(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

Por tanto ,

$$1.12 \quad K_v = A / K$$

3.- A partir de los valores iniciales debemos calcular el valor de  $K_v$ , para esto se hace un promedio de los últimos valores, cuando la respuesta es ya estable.

4.- Una vez conocido el valor de  $K_v$  se puede calcular fácilmente el valor del parámetro K del modelo correspondiente.

El primer valor a calcularse será siempre el parámetro  $K$  ya que a partir de este se calculará los valores iniciales de los parámetros  $M$ ,  $C$ .

Como datos iniciales se tendrá una tabla de valores de entrada salida para una función paso, del sistema a identificarse.

Se parte de estos valores iniciales de entrada y salida para el cálculo de este parámetro.

### 1.3.2 Cálculo del parámetro $M$ .-

Como se citó anteriormente existen otros métodos para el cálculo de parámetros de un modelo en general. Para calcular los parámetros de una ecuación diferencial se puede utilizar otros métodos, esto es por ejemplo, tomando la transformada de Laplace, identificar los parámetros de esta ecuación y luego tomar la transformada inversa para obtener los valores requeridos; se podría también cambiar a variables de estado, hacer la identificación respectiva para luego volver a la descripción por ecuaciones diferenciales, pero como se puede ver cualquiera de estos métodos serían más largos.

Tanto para el cálculo del parámetro  $M$  como  $C$  se utilizará el método de los mínimos cuadrados.

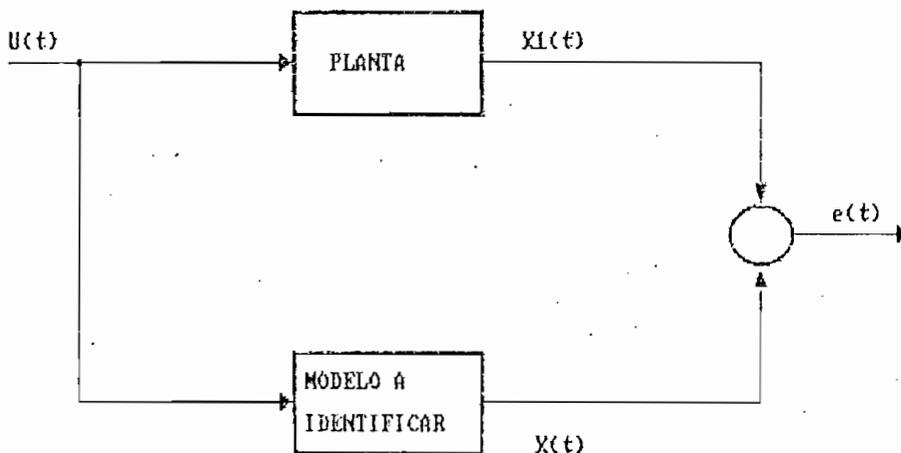
Para poder utilizar este método es necesario conocer el valor inicial del parámetro.

Se parte de la suposición de condiciones iniciales nulas y tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de segundo orden. Se tomará las definiciones de máximo sobreimpulso y tiempo pico para calcular este valor.

La deducción matemática del cálculo del valor inicial así como el algoritmo utilizado serán descritos en detalle en el siguiente capítulo.

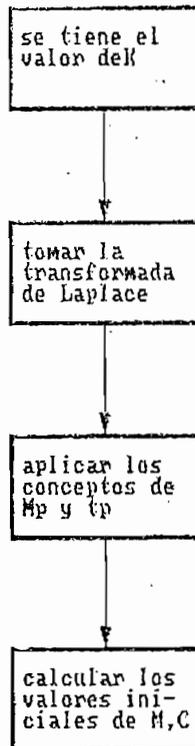
Una vez que se ha identificado el valor inicial del parámetro se puede identificar el valor verdadero de dicho parámetro, para ello, como se dijo anteriormente, se utilizará el método de los mínimo cuadrados.

En forma general el sistema será de la siguiente forma:



Se tiene la planta cuyos parámetros se debe identificar, y se tiene planteado un modelo, en este caso una ecuación diferencial de segundo orden, que en un primer instante tendrá como parámetros a los valores iniciales calculados, luego durante el proceso estos valores irán cambiando hasta encontrar los parámetros que identifiquen en mejor forma al sistema.

A continuación se presenta un diagrama de bloques que explican de mejor manera esta situación:



El desarrollo matemático, y la explicación detallada del algoritmo utilizado será expuesto en el siguiente capítulo.

### 1.3.3 Determinación del parámetro C.-

El siguiente capítulo se hará un estudio detallado del procedimiento a seguir en la determinación del parámetro C, de las condiciones que deben considerarse, la justificación matemática del algoritmo y el algoritmo propiamente dicho.

Para la identificación del parámetro es necesario la determinación de un valor inicial, que será calculado a partir de la respuesta inicial del sistema, y en base a los conceptos de máximo sobreimpulso y tiempo pico. El desarrollo matemático se presenta en el siguiente capítulo.

En el capítulo segundo se dará en una forma detallada el procedimiento para encontrar el parámetro C, aplicando el método de los mínimos cuadrados así como para el parámetro M.

#### 1.4 Caso particular de la ecuación de primer orden.-

Como se citó anteriormente, una planta puede ser representada por una ecuación diferencial, cuyo orden dependerá de la complejidad del sistema. Luego si una vez analizada la respuesta que da el sistema, y su gráfico se asemeja al de una ecuación diferencial de primer orden se puede plantear el modelo con este tipo de ecuación.

Un sistema también puede ser representado por medio de una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$1.13 \quad C \dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

donde;

C, K son los parámetros de la ecuación diferencial de primer orden a determinarse;

U(t) es la función de entrada conocida.

Sería un caso particular de la ecuación de segundo orden en la que el parámetro M = 0.

El algoritmo que se utiliza en este caso es bastante similar al utilizado en el caso anterior, el parámetro K se lo calcula siguiendo el mismo principio que en la ecuación de segundo orden.

Para el cálculo del parámetro K se tiene el siguiente procedimiento:

Se lo ilustrará por medio de un diagrama de bloques, que se presenta a continuación:



El algoritmo utilizado es el siguiente:

Se tiene la ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$1.14 \quad C \dot{x}(t) + K x(t) = U(t)$$

Se toma la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$1.15 \quad C s X(s) + K X(s) = U(s)$$

sacando factor común:

$$1.16 \quad X(s) (C s + K) = U(s)$$

La función de transferencia será:

$$1.17 \quad \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{C s + K}$$

ya que

$$1.18 \quad U(s) = U / s$$

es la transformada de Laplace de la función paso de amplitud U.  $U = A$

Aplicando el teorema del límite del valor final tenemos:

$$1.19 \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{C s + K} \cdot \frac{A}{s}$$

de donde

$$1.20 \quad K_v = A / K$$

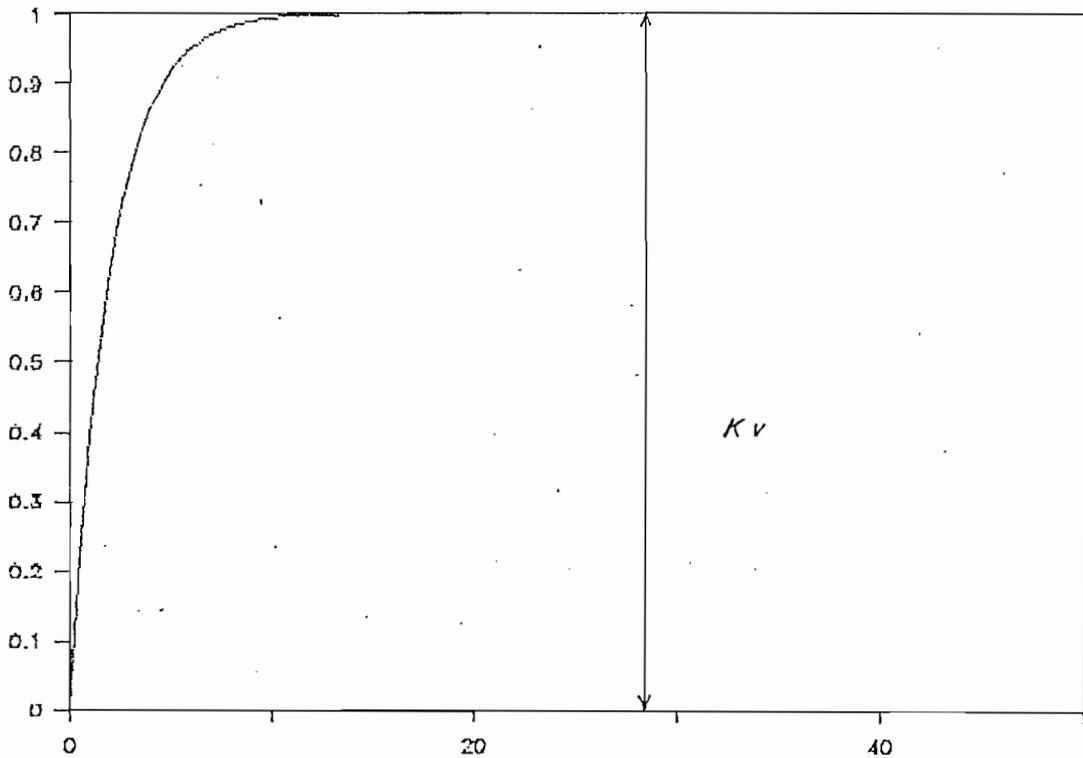
y

$$1.21 \quad K = A / K_v$$

El valor calculado del parámetro K es muy exacto.

El significado que tiene  $K_v$  en este caso se lo puede ver en la FIGURA 1.7

FIGURA 1.7 DEFINICION DE LA CONSTANTE  $K_v$



Se debe también calcular un valor inicial para el parámetro  $C$  para lo cual se parte de la suposición que se tiene condiciones iniciales nulas y se toma la transformada de Laplace:

Partiendo de la ecuación:

$$1.13 \quad C \dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

Se toma la transformada de Laplace de esta ecuación y se tendrá:

$$1.22 \quad X(s) = \frac{U}{s(Cs + K)}$$

Si se divide la ecuación 1.22 para  $K$  tenemos:

$$1.23 \quad X(s) = \frac{U/K}{C/K s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

se define una entrada escalón

$$1.24 \quad U' = U/K$$

reemplazamos en 1.23 :

$$1.25 \quad X(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{U'}{s}$$

dividiendo en fracciones parciales a 1.25:

$$1.26 \quad X(s) = U' \left( \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \right)$$

tomamos la transformada inversa de Laplace en la ecuación

1.26:

$$1.27 \quad X(t) = U'(1 - e^{-t/T})$$

Si  $t = T$  entonces:

$$1.28 \quad X(T) = (1 - e^{-1}) U'$$

entonces;

$$1.29 \quad X(T) = 0.632 \quad U/K$$

Se conoce el valor de la entrada  $U$ , el valor de  $K$  que ya ha sido calculado, luego se puede encontrar el valor de  $T$  que corresponda a ese valor calculado de la función.

Una vez conocido  $T$  se calcula el valor inicial de  $C$  ya que:

$$1.30 \quad T = C / K$$

$$1.31 \quad C = K \times T$$

que se lo obtiene de las ecuaciones 1.23 y 1.25.

Despejando se tiene el valor inicial de  $C$  que servirá en el proceso de identificación utilizando el método de los mínimos cuadrados que será explicado en detalle en el próximo capítulo.

Hay ciertos sistemas físicos en los que no es necesario la representación por ecuaciones diferenciales de segundo orden sino que un modelo con una ecuación de primer orden es suficiente, esto se debe a las características que tenga el sistema, ya que su respuesta puede ser ajustable a este tipo de ecuación.

Como se ha dicho anteriormente se debe tratar que el modelo matemático sea simple y preciso, es por eso, que se puede escoger una ecuación de orden inferior para representar al sistema teniendo siempre en cuenta el compromiso que debe existir entre precisión y simplicidad.

Al representar el sistema por medio de una ecuación diferencial de primer orden se tiene una gran ventaja, ya que solo existen dos parámetros a determinarse, el parámetro  $K$  es muy fácil de determinar, únicamente se necesita un algoritmo para determinar el parámetro  $C$ , luego el programa será más rápido. Luego si el sistema puede ser representado por una ecuación diferencial de primer orden, es preferible escoger este tipo de modelo

ya que se tiene seguridad de su precisión además de su simplicidad.

Cuando de antemano se sabe que el sistema es algo más complejo será preciso escoger una ecuación de segundo orden como su modelo ya que en este caso el modelo podrá ser bastante simple pero su respuesta será incorrecta.

Por tanto se debe tener un criterio para escoger el camino que se desea seguir; dentro del programa que se presenta en esta tesis se da la opción de escoger el tipo de modelo a identificarse y está en manos del operador el paso a seguirse.

Es necesario anotar que los coeficientes son constantes e invariantes en el tiempo de esta manera tenemos un modelo matemático bastante sencillo.

A pesar de que la única diferencia en los dos tipos de modelos que se está analizando es el parámetro  $M$ , se utilizan diferentes subrutinas para la identificación de los parámetros, ya que siendo  $M=0$  se obtiene divisiones para cero que causan graves errores, el método es el mismo pero los algoritmos son distintos esto lo veremos claramente en el capítulo tercero en el que se analiza el programa digital.

## CAPITULO II

### METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS Y

### CUASILINEARIZACION

2.1.- ALGORITMO A UTILIZARSE PARA LA DETERMINACION DEL PARAMETRO C.

2.2.- REAJUSTE DE LOS PARAMETROS M,K A PARTIR DEL PARAMETRO C.

## CAPITULO 2

### METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS Y CUASILINEARIZACION

2.1 Algoritmo a utilizarse en la determinación del parametro C.

Para la determinación del parámetro C, como se citó en el capítulo anterior, se utilizará el método de los mínimos cuadrados, el que trata de minimizar el índice de comportamiento, se debe hacer una deducción matemática del mismo.

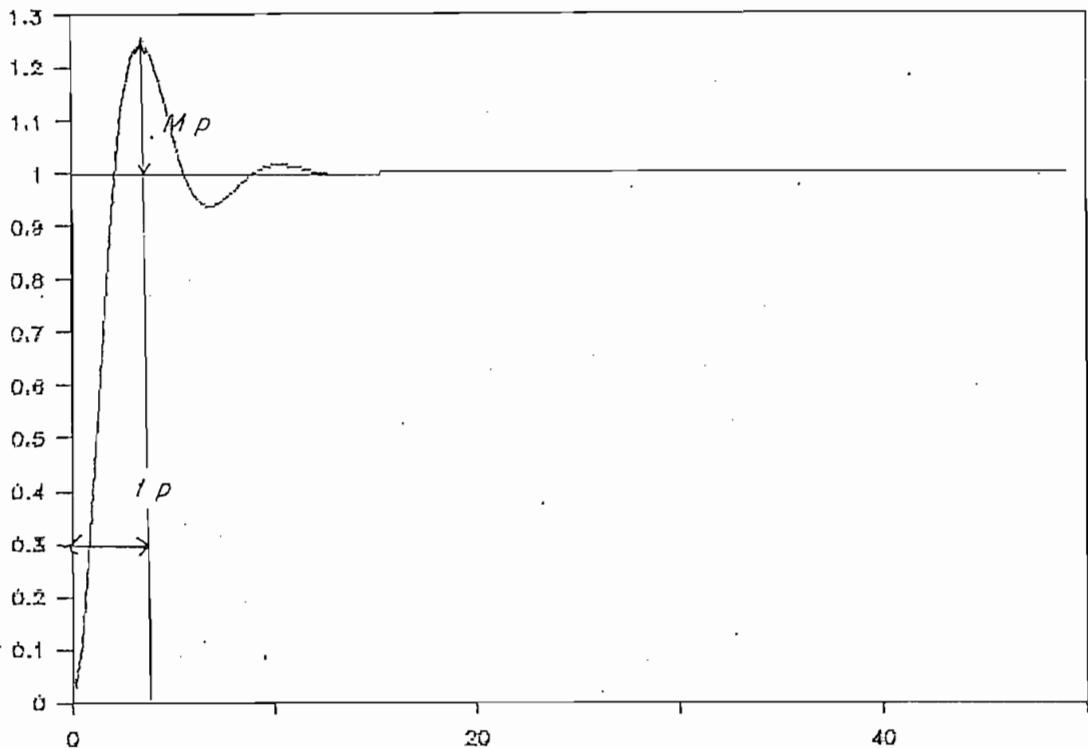
2.1.1 Cálculo del valor inicial de los parámetros C y M.-

Antes de realizar la deducción matemática se debe tener en claro ciertos conceptos básicos:

Máximo sobreimpulso. ( $M_p$ ) es el valor pico máximo de la curva de la respuesta medido desde la unidad. Tiempo pico ( $t_p$ ) es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico de sobreimpulso.

Ver FIGURA 2.1 donde se muestra claramente el significado de estos parámetros.

FIGURA 2.1 . DEFINICION DE MAXIMO SOBREIMPULSO  
Y TIEMPO PICO



En la forma general de la Transformada de Laplace de una ecuación de segundo orden se tienen ciertos parámetros:

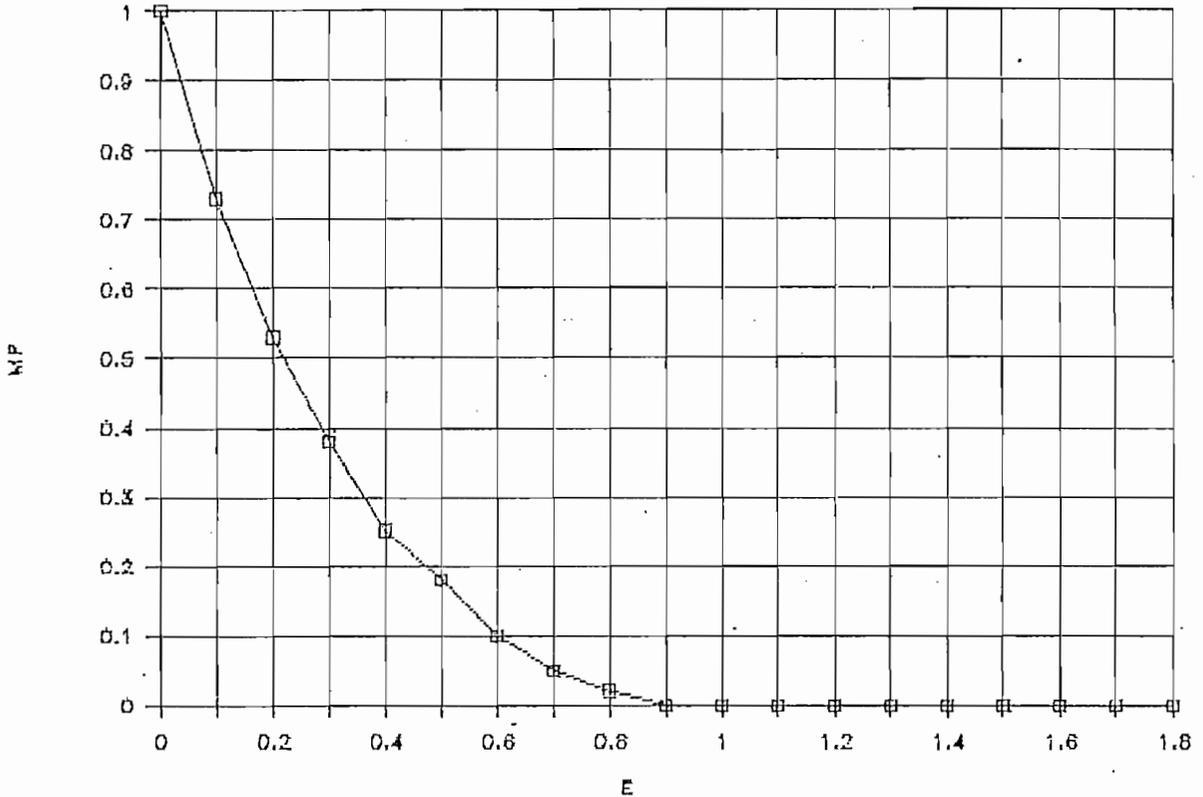
$$X(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2}$$

donde  $W_n$  es conocida como la frecuencia natural no amortiguada, y  $\zeta$  es la relación de amortiguamiento del sistema; el valor que tome  $\zeta$  es muy importante en la respuesta del sistema, ya que de su valor depende el máximo sobreimpulso; para un mayor valor de  $\zeta$ , el  $M_p$  (máximo sobreimpulso) será menor.

En la FIGURA 2.3 se puede ver las respuesta de un sistema de segundo orden para distintos valores de E.

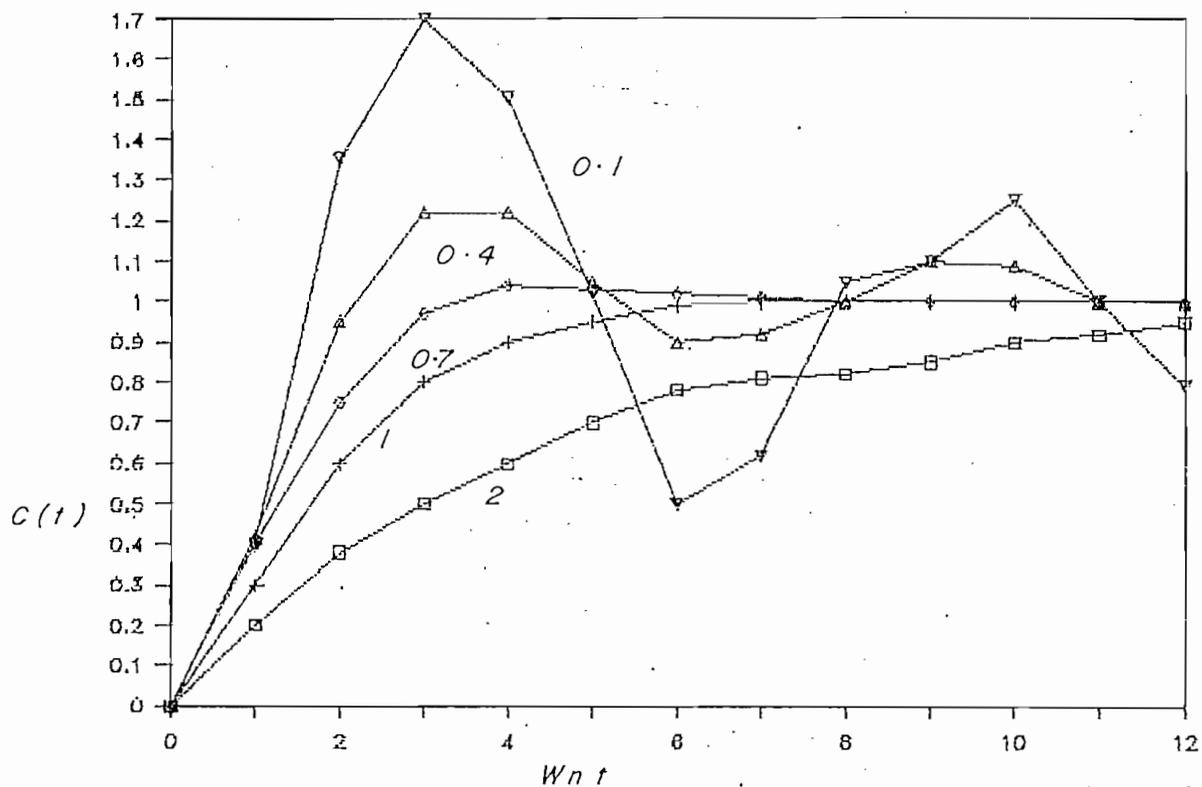
En la FIGURA 2.2 se puede ver la relacion entre el  $M_p$  y E.

FIGURA 2.2 RELACION ENTE  $M_p$  Y E



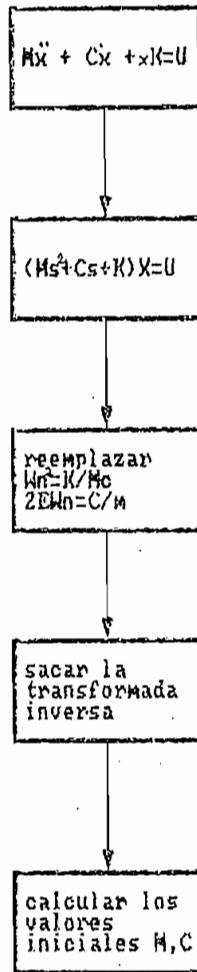
De  $\omega_n$  depende el tiempo de establecimiento del sistema, luego para tener una respuesta rápida se debe tener un  $\omega_n$  grande.

FIGURA 2.3 RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN  
PARA DISTINTOS VALORES DE  $\zeta$



El valor inicial del parámetro  $M$  será calculado en base a los conceptos de tiempo pico y máximo sobreimpulso. Ver FIGURA 2.1

En un diagrama de bloques se puede ver la secuencia de operaciones a seguirse:



Se tiene el siguiente desarrollo:

La ecuación diferencial es:

$$2-1 \quad M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

donde;

M, C, K, son los parámetros de la ecuación diferencial

a identificarse;

$U(t)$  es la señal de entrada conocida; de amplitud  $U$

Tomando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas se llega a la siguiente función de transferencia:  $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$ ;

$$2.2 \quad X(s) = \frac{U}{Ms^2 + Cs + K} \cdot \frac{1}{s}$$

Dividimos todo para el parámetro  $M$ , y tenemos:

$$2.3 \quad X(s) = \frac{U / M}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \cdot \frac{1}{s}$$

Si reemplazamos de la siguiente forma  $U(s)$  tenemos:

definimos:

$$2.4 \quad U' = U / K$$

es decir, que el valor de la señal de entrada es  $U/K$ , esto será utilizado únicamente para las deducciones matemáticas.

reemplazando en 2.2:

$$2.5 \quad \frac{X(s)}{U'/s} = \frac{K / M}{s^2 + C/Ms + K/M} \cdot \frac{U'}{s}$$

Como se puede ver, esta es la forma general de la transformada de Laplace para una ecuación diferencial de segundo orden.

Definiendo

$$2.6 \quad W_n^2 = K/M \quad 2EW_n = C/M$$

Luego reemplazando la definición de 2.6 en "2.5" se tiene:

$$2.7 \quad X(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2EW_n s + W_n^2} \cdot \frac{U'}{s}$$

Tomando la transformada inversa de 2.7 y se tiene:

$$2.8 \quad X'(t) = \frac{U' (1 - e^{-EW_n t}) \text{sen}(W_d t + \text{tg}^{-1}(\sqrt{1-E^2}/E))}{\sqrt{1-E^2}}$$

donde

$$2.9 \quad W_d = W_n \sqrt{1-E^2}$$

Por la definición de Máximo sobreimpulso y de tiempo pico se tiene:

$$2.10 \quad M_p = X(t_p) - U'$$

$$2.11 \quad t_p = \pi / W_d$$

reemplazando  $x(tp)$  con 2.8 se tendrá:

$$2.12 \quad M_p = U' \frac{(1 - \frac{e^{-E W_n \pi i / W d}}{\sqrt{1 - E^2}}) \operatorname{sen}(P l t \operatorname{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1 - E^2}}{E}))}{\sqrt{1 - E^2}} - U'$$

realizando las simplificaciones respectivas se tiene:

$$2.13 \quad M_p = U' e^{-E \pi i / \sqrt{1 - E^2}}$$

$$2.14 \quad M_p / U' = e^{-E \pi i / \sqrt{1 - E^2}}$$

Con los datos de entrada se puede sacar el valor del  $M_p$ , como se conoce ya el valor de  $K$  se puede sacar  $U'$  con el valor de  $U$  que es dato; despejando de 2.14 se saca el valor de  $E$ .

A partir de la fórmula de tiempo pico, el valor de tiempo pico se conoce de los datos de entrada, y como el valor de  $E$  ya ha sido calculado se halla el valor de  $W_n$ .

De las definiciones anteriores se encuentra los valores iniciales de  $M$  y  $C$  con las siguientes igualdades.

$$2.15 \quad C = 2 E W_n M$$

$$2.16 \quad M = K / W_n^2$$

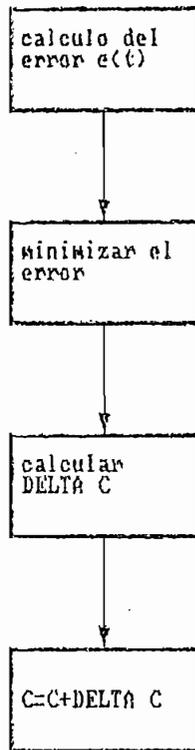
De la ecuación 2.15 se puede ver que el parámetro  $C$  depende directamente del valor de la relación de amortiguamiento del sistema  $E$ ; es por esta razón que el parámetro  $C$  es considerado como el parámetro crítico a determinarse, ya que una pequeña variación de  $C$  variará la respuesta del sistema; referirse a la explicación dada al inicio del numeral 2.1.2 en el que se plantea claramente los efectos de  $E$  en la respuesta del sistema.

De la ecuación 2.16 se ve que el parámetro  $M$  depende del valor de la frecuencia natural no amortiguada  $W_n$ , por lo que al variar el parámetro  $M$  variará el tiempo de establecimiento del sistema.

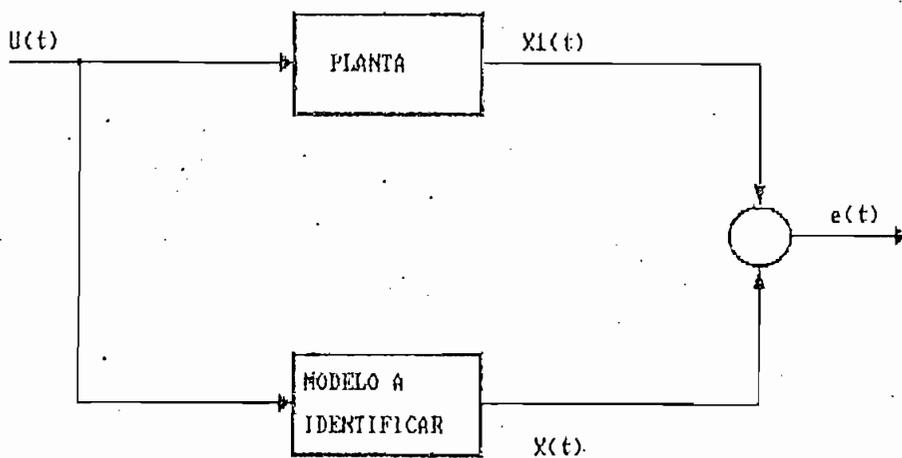
### 2.1.2 Deducción matemática del algoritmo para el cálculo del parámetro $C$ .

Una vez que han sido determinados los valores iniciales de  $M$ , y de  $C$  se puede aplicar el algoritmo para el cálculo del valor de  $C$  que identifica al sistema en mejor forma.

En el siguiente diagrama de bloques se muestra de manera simplificada el proceso matemático a seguirse:



En el siguiente diagrama se muestra la planta de la cual queremos obtener el modelo, el modelo a identificar, que estan alimentados por la misma señal  $U(t)$ , la diferencia entre las respuestas del sistema nos darà el error  $e(t)$ :



Se tiene el siguiente desarrollo matemático:

Se define el error  $e(t)$  como la diferencia de las salidas del modelo a identificarse y la salida de la planta:

$$2.17 \quad e(t) = x(t) - x_1(t)$$

donde:

$e(t)$  es la diferencia entre las respuestas de la planta y el modelo,

$X_1(t)$  es la función conocida, respuesta del sistema;

$X(t)$  es la respuesta con los valores iniciales del modelo a identificarse.

Se desea minimizar este error, y para ello se utilizará el método de los mínimos cuadrados.

Sea  $F$  un índice de comportamiento integral cuadrático definido de la siguiente manera:

$$2.18 \quad F = \int_0^t (x(t) - x_1(t))^2 dt$$

$x(t)$  deber ser tal que minimice el índice de comportamiento  $F$ .

Descomponiendo la función conocida  $x_1(t)$  :

$$2.19 \quad x_1(t) = x_1(C_0) + \frac{dx_1}{dC_1} \bigg|_{C_0} \Delta C$$

reemplazando la ecuación 2.19 en 2.18 y tenemos:

$$2.20 \quad F = \int_0^t (x(t) - (x_1(t) + b \Delta C_1))^2 dt$$

donde;

$$2.20' \quad b = \frac{dx_1}{dC_1} \Big|_{C_0}$$

se deriva F con respecto a C1 para encontrar el valor de  $\Delta C_1$  que haga mínimo al índice de comportamiento.

$$2.21 \quad \frac{dF}{dC_1} = 0 = \int_0^t 2(x - (x_1 + b \Delta C_1)) b dt$$

separando en dos integrales:

$$2.22 \quad \int_0^t (x - x_1) b dt - \int_0^t b^2 \Delta C_1 dt = 0$$

despejando  $\Delta C_1$  :

$$2.23 \quad \Delta C_1 = \frac{\int_0^t (x - x_1) b dt}{\int_0^t b^2 dt}$$

Se sabe además que :

$$2.24 \quad C = C_1 \Delta C_1$$

Se debe encontrar el valor de  $b$  para ello se sigue el siguiente procedimiento:

Se parte de que el modelo que identifica a la planta es de la forma:

$$2.25 \quad M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U(t)$$

se supone que  $M$ ,  $C$ ,  $K$  son los valores que se ha calculado para los parámetros hasta ese instante. Los valores de los parámetros van a variar cada vez que se calcule de nuevo.

Se toma la derivada con respecto a  $C$  de la ecuación diferencial que define al modelo, 2.25 esto es:

$$2.26 \quad M \frac{d\ddot{x}_1}{dC} + C \frac{d\dot{x}_1}{dC} + K \frac{dx_1}{dC} + \dot{x}_1 = 0$$

donde  $\ddot{x}_1$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $x_1$  son valores constantes y conocidos ya que  $x_1$  son los valores que se da como datos.

En la ecuación 2.20 se ha definido  $b$  como:

$$b = \left. \frac{dx_1}{dC} \right|_{C_0}$$

reemplazando este valor en 2.26:

$$2.27 \quad M\ddot{b} + C\dot{b} + Kb + \ddot{x}_1 = 0$$

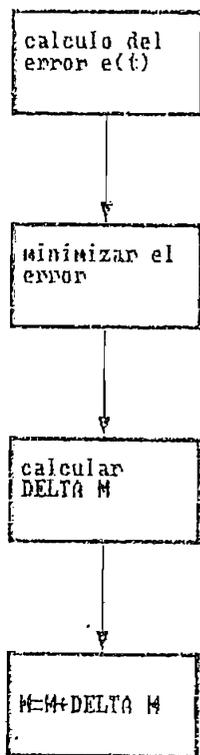
El valor de  $\ddot{x}_1$  se lo puede encontrar a partir de los valores conocidos de  $x_1$ .

Esta ecuación diferencial se la resolverá utilizando el algoritmo de Runge Kutta, que será explicado posteriormente y se obtendrá una tabla de valores para  $b$ , es decir la función respectiva, estos valores se los utilizará para poder calcular el valor de DELTA C.

2.1.3 Deducción matemática algoritmo para el cálculo del parámetro M.-

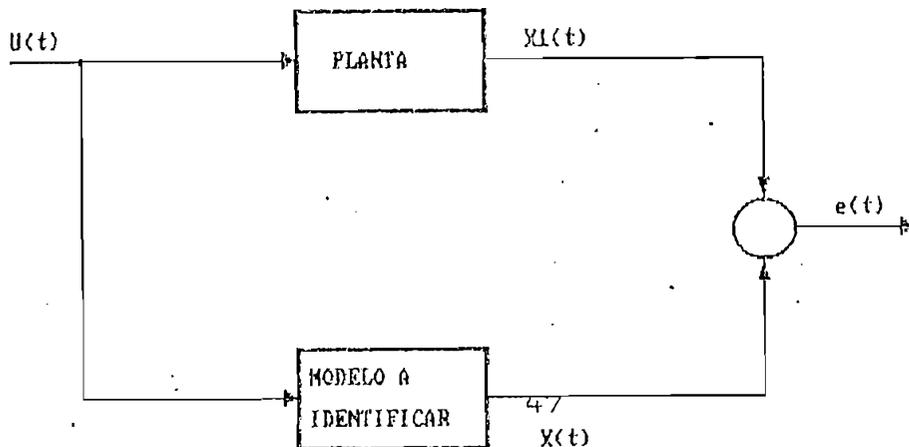
Una vez que ha sido determinado el valor inicial de M se debe aplicar el algoritmo para el cálculo del valor de M que permitirá que el modelo se ajuste de mejor forma a la planta real. La deducción es muy similar a la utilizada para el parámetro C, en el punto anterior.

En forma simplificada el diagrama de bloques del procedimiento a seguirse es el siguiente:



El desarrollo matemático a seguirse es el siguiente:

Partiendo del diagrama que se indica a continuación como se lo hizo en el literal 2.1.3



Se define el error  $e(t)$  como la diferencia de las salidas del modelo a identificarse y la salida de la planta:

$$2.28 \quad e(t) = x(t) - x_1(t)$$

se quiere minimizar este error, y para ello se utilizará el mismo método que se utilizó para identificar el parámetro  $C$ .

Sea  $F$  un índice de comportamiento integral cuadrático definido de la siguiente manera:

$$2.29 \quad F = \int_0^t (x(t) - x_1(t))^2 dt$$

$x(t)$  deber ser tal que minimize el índice de comportamiento  $F$ .

Descomponiendo la función conocida  $x_1(t)$  :

$$2.30 \quad x_1(t) = x_1(M_0) + t \frac{dx}{dM} \bigg|_{M_0} \Delta M$$

reemplazando la ecuación 2.30 en 2.29:

$$2.31 \quad F = \int_0^t (x - (x_1(t) + a \Delta M))^2 dt$$

donde  $a$ ;

$$2.32 \quad a = \frac{dx_i}{dM_i} / M_0$$

derivando F con respecto a M1 para encontrar el valor de M que haga mínimo al índice de comportamiento.

$$2.33 \quad \frac{dF}{dM_i} = 0 = \int_0^t 2(x - x_i) a dt$$

separando en dos integrales:

$$2.34 \quad \int_0^t (x - x_i) a dt = \int_0^t a^2 dt \Delta M$$

despejando  $\Delta M_1$ :

$$2.35 \quad \Delta M_i = \frac{\int_0^t (x - x_i) a dt}{\int_0^t a^2 dt}$$

Se sabe además que :

$$2.36 \quad M = M + \Delta M_i$$

Se debe encontrar el valor de a para ello se sigue el siguiente procedimiento:

El modelo que identifica a la planta es de la forma:

$$2.37 \quad M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U(t)$$

se supone que M, C, K son los valores calculados para los parámetros hasta ese instante. Los valores de los

parámetros van a variar cada vez que se calcule de nuevo.

Se toma la derivada con respecto a M de la ecuación diferencial que define al modelo, esto es:

$$2.38 \quad M \frac{d\ddot{x}_1}{dM} + \ddot{x}_1 + C \frac{d\dot{x}_1}{dM} + K \frac{dx_1}{dM} = 0$$

donde  $\ddot{X}_1$  y  $\dot{X}_1$  son valores constantes y conocidos ya que  $X_1$  son los valores que se tiene como datos.

En la ecuación 2.32 se ha definido a como:

$$a = \left. \frac{dx}{dM} \right|_{M_0}$$

reemplazando este valor en 2.38:

$$2.39 \quad M \ddot{a} + C \dot{a} + K a + \ddot{x}_1 = 0$$

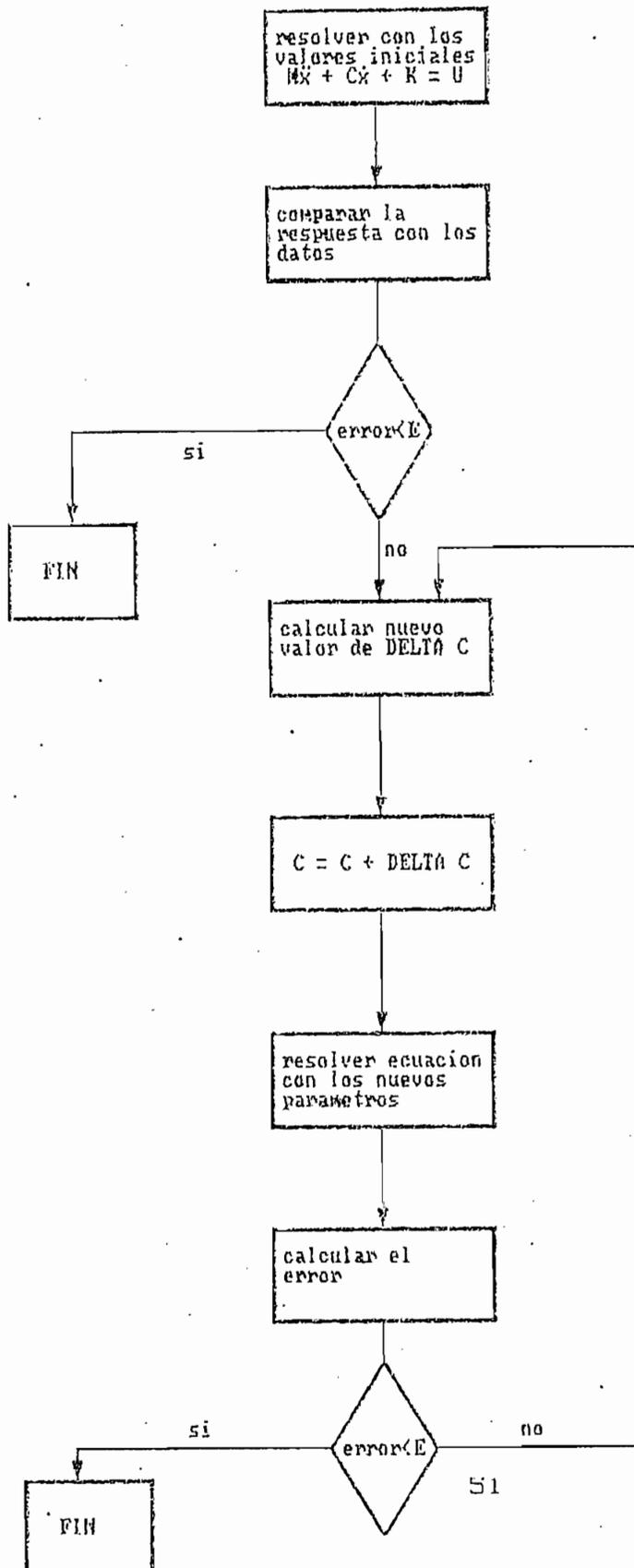
El valor de  $\ddot{X}_1$  se lo puede encontrar a partir de los valores conocidos de  $X_1$  y  $\dot{X}_1$ .

Para hallar la función que define a se debe resolver la ecuación diferencial anterior, lo que se hará por el Método de Runge Kutta que será analizado en el siguiente capítulo. Una vez que se ha encontrado el valor de a se reemplazará en la fórmula 2.33 para calcular el valor de  $\Delta M$ .

2.1.4 Algoritmo para la identificación del parámetro C para la ecuación de segundo grado.-

$$2.40 \quad M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$$

Diagrama de Bloques.-



Los pasos a seguirse son los siguientes:

1.- Resolver la ecuación diferencial  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$ ; donde el valor de K ha sido calculado previamente, así como los valores iniciales de M y C, el proceso de cálculo de estos parámetros está explicado muy detalladamente en el capítulo anterior.

Más adelante se presentará el algoritmo para la resolución de la ecuación diferencial; el método utilizado es el de Runge Kutta.

2.- Se compara esta respuesta con la respuesta original si se obtiene un error menor al prefijado, se ha encontrado el valor del parámetro C, caso contrario se continúa.

3.- Calcular el nuevo valor de C a partir del valor anterior mediante el siguiente proceso:

a.- Resolver la ecuación diferencial intermedia:

$$2.41 \quad M\ddot{b} + C\dot{b} + Kb + \dot{x}_1 = 0$$

donde  $b = v(t)$

Los valores de M, C, K son los valores calculados de M, C, K; y el valor de  $\dot{x}_1$  se lo obtiene de los datos iniciales.

M, C, K son valores calculados de los parámetros aunque no necesariamente los definitivos; N1 es el número de puntos.

Como se lo dedujo anteriormente, ecuación 2.33 la fórmula para calcular la variación de C es:

$$2.42 \quad \Delta C = \frac{\int_0^t (x - x_1) b dt}{\int_0^t b^2 dt}$$

Para resolver las integrales tanto del numerador como del denominador se utiliza la Regla de Simpson:

$$2.43 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \dots)$$

donde,

$$h = (b - a)/2n \quad \text{y} \quad f_j = f(x_j)$$

En este caso el valor de  $b-a = n$  ya que se esta integrando en todo el intervalo que se tienen los datos, el número de datos es n.

Se tendrá que:

$$2.44 \quad A1 = \int_0^t (x - x_1) b dt$$

$$2.45 \quad B1 = \int_0^t b^2 dt$$

d.- cálculo de la variación del parámetro C.

$$\text{DELTA} = A1/B1$$

e.- cálculo del nuevo valor de C.

$$C = C + \text{DELTA}$$

4.- Se tiene ya el nuevo valor de C, resolver la ecuación diferencial con el nuevo valor, regresar al punto 2.

5.- Para calcular el error con el siguiente algoritmo:

Como se ha visto el método de los mínimos cuadrados trata de minimizar el índice de comportamiento F, luego se busca los parámetros que hagan a  $F = 0$ , por tanto se considerará que se han encontrado los parámetros del modelo cuando  $F \leq EC$ , donde EC viene a ser la precisión con la que se harán los cálculos.

De ecuación 2.21 se tiene que  $dF$  será igual a:

$$2.46 \quad \frac{dF}{dC} = \int_0^t 2(x - (x_1 + b \Delta C)) b dt = \text{error}$$

despejando;

$$2.47 \quad \text{error} = \int_0^t (x - x_1) b dt - \int_0^t b^2 \Delta C dt$$

Se resuelve las integrales de la ecuación para encontrar el valor de error.

En este caso se utilizará la regla de Simpson para el cálculo de las integrales, utilizando la ecuación 2.43 .

Si ERROR es menor o a lo mas igual que EC se dice que se ha encontrado el valor de C.

Caso contrario calcular un nuevo C.

Nota.- En el programa digital el parámetro C se lo calcula en dos fases, primero con un error  $E_1$ , una vez que C satisfaga esta condición se calcula M con un error  $E_r$ ; y luego nuevamente se regresa a calcular C con el nuevo error  $E_{r2}$ , siempre  $E_{r2} < E_{r1}$ .

6.- Si se ha encontrado el valor de C con la precisión deseada se pasará a calcular el siguiente parámetro.

#### 2.1.5 Algoritmo para el cálculo del parámetro M.-

De manera muy similar al algoritmo del cálculo del parámetro C, se tiene el siguiente diagrama:

resolver con los valores iniciales de los parametros  
 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$

comparar respuesta con los datos



SI  
FIN

NO  
calcular el nuevo valor de DELTA M

$M = M + \text{DELTA } M$

resolver la ecuacion con los nuevos parametros

calcular el error



SI  
fin

NO

$$2.48 \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

Los pasos a seguirse para la identificación de este parámetro son los siguientes:

1.- Resolver la ecuación diferencial  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$ ; donde el valor de  $K$  ha sido calculado previamente, así como los valores iniciales de  $M$  y  $C$ , el proceso de cálculo de estos parámetros está explicado muy detalladamente en los puntos anteriores.

Más adelante se presentará el algoritmo para la resolución de la ecuación diferencial; el método utilizado es el de Runge Kutta.

2.- Comparar esta respuesta con la respuesta original si se obtiene un error menor al prefijado, (5), se ha encontrado el valor del parámetro  $M$ , caso contrario continuar.

3.- Calcular el nuevo valor de  $M$  a partir del valor anterior mediante el siguiente proceso:

a.- Resolver la ecuación diferencial intermedia:

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + Ka + \ddot{x}_i = 0$$

donde  $a = v(t)$

Los valores de M,C,K son los valores calculados de M, C, K; y el valor de  $\bar{X}_1$  se lo obtiene de los datos iniciales.

M, C, K son valores calculados de los parámetros aunque no necesariamente los definitivos; N1 es el número de puntos.

Como se dedujo anteriormente, ecuación 2.33 la fórmula para calcular la variación de M es:

$$\Delta M = \frac{\int_0^t (x - x_1) a dt}{\int_0^t a^2 dt}$$

El cálculo de DELTA M es muy similar al cálculo de DELTA C, la diferencia se encuentra en la ecuación diferencial intermedia que se debe resolver en cada caso, esto es el valor de a para el caso del parámetro M; y de b para el parámetro C.

Se tiene que:

$$2.49 \quad A I = \int_0^t (x - x_1) a dt$$

$$2.50 \quad B I = \int_0^t a^2 dt$$

b.- cálculo de la variación del parámetro M.

$$\text{DELTA} = A I / B I$$

c.- cálculo del nuevo valor de M.

$$M = N + \text{DELTA}$$

4.- Calculado ya el nuevo valor de M, resolver la ecuación diferencial con el nuevo valor, regresar al punto 2.

5.- Para calcular el error con el siguiente algoritmo:

Como se ha visto el método de los mínimos cuadrados trata de minimizar el índice de comportamiento F, luego se busca los parámetros que hagan a  $F = 0$ , por tanto se considerará que se han encontrado los parámetros del modelo cuando  $F \leq EC$ , donde EC viene a ser la precisión con la que se harán los cálculos.

De ecuación 2.21 se tiene que  $dF$  será igual a:

$$2.51 \quad \frac{dF}{dM} = \int_0^t 2(x - (x_1 - a \Delta M)) \, dt$$

despejando;

$$2.52 \quad error = \int_0^t (x_1 - x) \, dt - \int_0^t a^2 \Delta M \, dt$$

Igualmente, el cálculo del error en el parámetro M es similar que para el parámetro C, la variación está en la ecuación diferencial intermedia que se debe resolver.

Se resuelve las integrales de la ecuación para encontrar el valor de error.

Si ERROR es menor o a lo mas igual que EM se dice que se ha encontrado el valor de M.

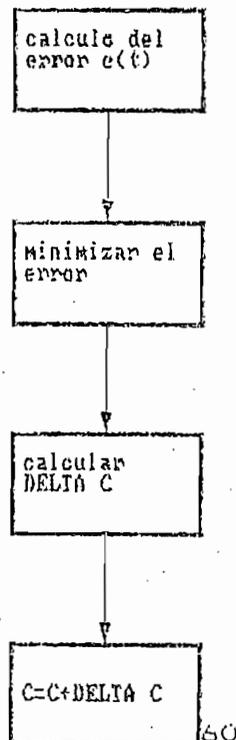
Caso contrario calcular un nuevo  $M$ .

6.- Si ha encontrado el valor de  $M$  con la precisión deseada pasar a calcular el siguiente parámetro.

2.1.6 Deducción matemática del algoritmo para la identificación del parámetro  $C$  en la ecuación de primer orden.-

Una vez que se han determinado el valor de  $K$  y el valor inicial de  $C$ , se puede aplicar el algoritmo para el cálculo del parámetro  $C$  que identifique al sistema en mejor forma.

En un diagrama de bloques se mostrará de manera simplificada el proceso matemático a seguirse:



Se tiene el siguiente desarrollo matemático:

Se define el error  $e(t)$  como la diferencia entre la salida del modelo a identificarse y la salida de la planta:

$$2.53 \quad e(t) = x(t) - x_1(t)$$

donde:

$e(t)$  es la diferencia entre las respuestas de la planta y el modelo,

$x_1(t)$  es la función conocida respuesta del sistema;

$x(t)$  es la respuesta con los valores iniciales del modelo a identificarse.

Se desea minimizar este error, y para ello se utilizará el método de los mínimos cuadrados.

Sea  $F$  un índice de comportamiento integral cuadrático definido de la siguiente manera:

$$2.54 \quad F = \int_0^t (x(t) - x_1(t))^2 dt$$

$x(t)$  deber ser tal que minimize el índice de comportamiento  $F$ .

Descomponiendo la función conocida  $x_1(t)$  :

$$2.55 \quad x_1(t) = x_1(C_0) + \frac{dx_1}{dC} \Delta C_1$$

reemplazando la ecuación 2.50 en 2.49 y tenemos:

$$2.56 \quad F = \int_0^t (x(t) - (x_1(t) + b^2 \Delta C_1)) dt$$

donde;

$$2.57 \quad b = \left. \frac{dx_1}{dC} \right|_{C_0}$$

se deriva  $F$  con respecto a  $C_1$  para encontrar el valor de  $C$  que haga mínimo al índice de comportamiento.

$$2.58 \quad \frac{dF}{dC_1} = 0 = \int_0^t 2(x - (x_1 + b \Delta C_1)) b dt$$

separando en dos integrales:

$$2.59 \quad \Delta C_1 = \frac{\int_0^t (x - x_1) b dt}{\int_0^t b^2 dt}$$

despejando  $\Delta C_1$  :

$$2.60 \quad C = C + \Delta C_1$$

Se sabe además que :

$$2.61 \quad C = C / \Delta C,$$

Se debe encontrar el valor de  $b$  para ello se sigue el siguiente procedimiento:

Se parte de que el modelo que identifica a la planta es de la forma:

$$2.62 \quad C \dot{x} + Kx = U(t)$$

se supone que  $C$ ,  $K$  son los valores que se ha calculado para los parámetros hasta ese instante. Los valores de los parámetros van a variar cada vez que se calcule de nuevo.

Se toma la derivada con respecto a  $C$  de la ecuación diferencial que define al modelo, 2.57 esto es:

$$2.63 \quad \dot{x}_1 + C \frac{d\dot{x}_1}{dC} + K \frac{dx_1}{dC} = 0$$

donde  $\dot{x}_1$   $x_1$  son valores constantes y conocidos ya que  $x_1$  son los valores que se da como datos.

En la ecuación 2.56 se ha definido  $b$  como:

$$b = \frac{dx}{dC}$$

reemplazando este valor en 2.63:

$$2.64 \quad C \dot{b} + K b + x_1 = 0$$

El valor de  $X_1$  se lo puede encontrar a partir de los valores conocidos de  $X_1$ .

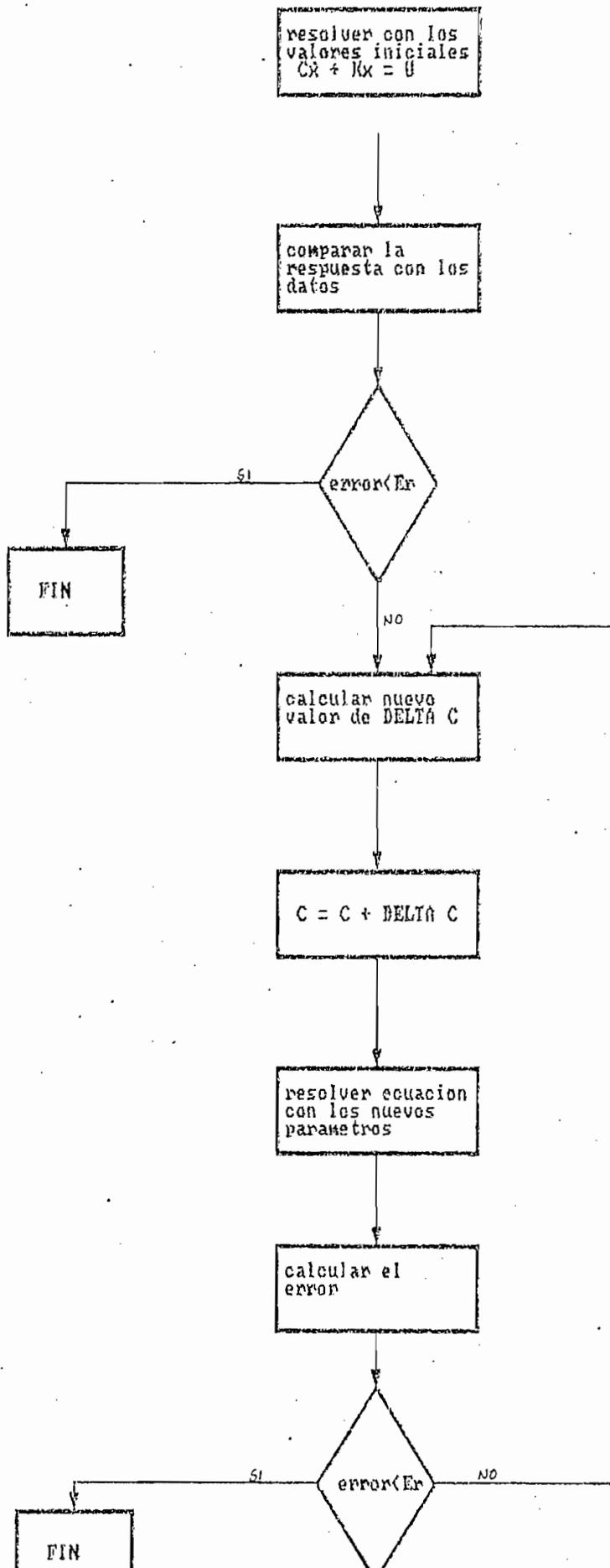
Esta ecuación diferencial se la resolverá utilizando el algoritmo de Runge Kutta, que será explicado posteriormente y se obtendrá una tabla de valores para  $b$ , es decir la función respectiva, estos valores se los utilizará para poder calcular el valor de DELTA C.

2.1.7 Algoritmo para determinar el parámetro C en la ecuación diferencial de primer orden.-

$$2.65 \quad C \dot{x}(t) + Kx(t) = U(t)$$

Los pasos a seguirse para la identificación de este parámetro se analizará en el siguiente diagrama de bloques.

Diagrama de Bloques



Los pasos a seguirse son los siguientes:

1.- Resolver la ecuación diferencial  $Cx + Kx = U$ ;  
donde el valor de K ha sido calculado previamente, así como el valor inicial C, el proceso de cálculo de estos parámetros está explicado muy detalladamente en el capítulo anterior.

Más adelante se presentará el algoritmo para la resolución de la ecuación diferencial; el método utilizado es el de Runge Kutta.

2.- Se compara esta respuesta con la respuesta original si se obtiene un error menor al prefijado, (5), se ha encontrado el valor del parámetro C, caso contrario se continúa.

3.- Calcular el nuevo valor de C a partir del valor anterior mediante el siguiente proceso:

a.- Resolver la ecuación diferencial intermedia:

$$2.66 \quad Cb' + Kb + X_1 = 0$$

donde  $b = v(t)$

Los valores de C, K son los valores calculados de C, K; y el valor de  $X_1$  se lo obtiene de los datos iniciales.

C, K son valores calculados de los parámetros aunque

no necesariamente los definitivos; N1 es el número de puntos.

Como se lo dedujo anteriormente, ecuación 2.54 la fórmula para calcular la variación de C es:

$$2.67 \Delta C = \frac{\int_0^t (x - x_i) b dt}{\int_0^t b^2 dt}$$

En forma análoga a la deducción para calcular el parámetro C en el modelo de segundo orden, se debe resolver las integrales, pero en este caso varía la ecuación que define a.b.

b.- cálculo de la variación del parámetro C.

$$\text{DELTA} = \Delta C$$

e.- cálculo del nuevo valor de C.

$$C = C + \text{DELTA}$$

4.- Se tiene ya el nuevo valor de C, resolver la ecuación diferencial con el nuevo valor, regresar al punto 2.

5.- Para calcular el error con el siguiente algoritmo:

Como se ha visto el método de los mínimos cuadrados trata de minimizar el índice de comportamiento  $F$ , luego se busca los parámetros que hagan a  $F = 0$ , por tanto se considerará que se han encontrado los parámetros del modelo cuando  $F \leq EC$ , donde  $EC$  viene a ser la precisión con la que se harán los cálculos.

De ecuación 2.21 se tiene que  $dF$  será igual a:

$$2.68 \quad \frac{dF}{dC} = \int_0^t 2(x - (x_1 + b \Delta C)) b dt$$

despejando:

$$2.69 \quad error = \int_0^t (x - x_1) b dt - \int_0^t \Delta C b^2 dt$$

Se resuelve las integrales de la ecuación para encontrar el valor de error, similarmente a lo que se hizo con los parámetro en el modelo de segundo orden.

Si  $ERROR$  es menor o a lo mas igual que  $EC$  se dice que se ha encontrado el valor de  $C$ .

Caso contrario calcular un nuevo C.

6.- Si se ha encontrado el valor de C con la precisión deseada se ha identificado el modelo.

### 2.1.6 Métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales.-

La ecuación diferencial de primer orden es de la forma:

$$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0$$

asumiendo que  $f$  es tal que tiene solución única en algún intervalo que contenga a  $x_0$  tiene varios métodos numéricos para encontrar una solución.

Uno de los métodos muy conocidos es el método de Euler Cauchy, geométricamente es una aproximación de la curva de  $y(x)$  mediante polígonos cuyo primer lado es la tangente a la curva en  $x_0$ . El valor práctico de este método es limitado pero es bastante sencillo.

Un método que es mucho más exacto es el método de Runge Kutta que tiene mucha importancia práctica, cuyo algoritmo se aplicará en este trabajo y se explicará más

adelante el método.

Para la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden es necesario conocer dos condiciones iniciales, que en este caso se las considera nulas.

Se tiene una ecuación de la forma:

$$My'' + Cy' + Ky = U$$

se despeja de tal forma que:

$$y'' = f(x, y', y)$$

Existen varios métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Uno de los métodos más sencillos es el Método de Euler o de la Recta Tangente, pero no es muy exacto. Otro método es el Euler Mejorado con el que se obtienen mejores resultados. El método de Los tres términos de la serie de Taylor que es bastante similar a los anteriores.

Un método bastante exacto es el de Runge Kutta que es una generalización del método de Runge Kutta para resolver la ecuación diferencial de primer orden.

### 2.1.6.1 Algoritmo para la resolución de la ecuación diferencial de primer orden.

En cada paso de este método se calculan en primer lugar cuatro cantidades auxiliares:

$$\begin{aligned} 2.70 \quad A_n &= h f ( X_n, Y_n ) \\ B_n &= h f ( X_n + \frac{1}{4}h, Y_n + \frac{1}{4}A_n ) \\ C_n &= h f ( X_n + \frac{2}{4}h, Y_n + \frac{2}{4}A_n ) \\ D_n &= h f ( X_n + \frac{3}{4}h, Y_n + \frac{3}{4}A_n ) \end{aligned}$$

y a continuación el nuevo valor será:

$$2.71 \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{4}h ( A_n + 2B_n + 2C_n + D_n )$$

Donde  $h$  es el incremento que no debe ser mayor que cierto valor  $H$  el cual depende de la exactitud. Generalmente se encuentra entre 0.1 y 0.5 aproximadamente.

El error al utilizar este método es muy pequeño; se dice que este es un método de cuarto orden.

Se ha escogido este método para el desarrollo de esta tesis ya que no requiere un procedimiento de arranque especial, produce ligeras demandas de memoria, no requiere estimación y usa varias veces el mismo procedimiento directo de cálculo.

2.1.6.2 Algoritmo para la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden.-

El Método de Runge Kutta es un método de cuarto orden, lo que significa que las fórmulas de Taylor para  $y$  i  $y'$  se dan exactamente los primeros términos hasta el término que contiene  $h^4$  inclusive.

En el paso general del método, primero se calculan las cantidades auxiliares:

$$\begin{aligned} 2.72 \quad A_n &= \frac{1}{2} h f(X_n, Y_n, Y'_n) \\ B_n &= \frac{1}{2} h f(X_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \beta_n, Y'_n + A_n) \end{aligned}$$

donde;

$$\beta_n = \frac{1}{2} h f(Y_n + \frac{1}{2} A_n)$$

$$\begin{aligned} 2.73 \quad C_n &= \frac{1}{2} h f(X_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \beta_n, Y'_n + B_n) \\ D_n &= \frac{1}{2} h f(X_n + h, Y_n + \gamma_n, Y'_n + 2C_n) \end{aligned}$$

donde;  $\gamma_n = \frac{1}{2} h (Y'_n + C_n)$

$$2.74 \quad Y_n = \sum h(Y'_n + C_n)$$

luego se tendrá el nuevo valor:

$$2.75 \quad Y_{n+1} = Y_n + h(Y'_n + K_n)$$

donde;

$$2.76 \quad K_n = \frac{1}{3} (A_n + B_n + C_n)$$

y además se tiene:

$$2.77 \quad Y'_{n+1} = Y'_n + K_n^*$$

donde;

$$2.78 \quad K_n^* = (A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \cdot \frac{1}{3}$$

h es similar al definido para la ecuación diferencial de primer orden, h viene a ser el incremento, y n el número de iteraciones o valores de la función que se quiere encontrar.

Se obtiene pues de esta manera una tabla de valores para X, Y, Y'

## 2.2 REAJUSTE DE LOS PARAMETROS M,C A PARTIR DEL PARAMETRO C.

Una vez que se ha determinado el parámetro C con una precisión inicial se pasa a determinar el parámetro M con el algoritmo expuesto en el capítulo anterior, que como se ha visto es muy similar al utilizado para el cálculo del parámetro C. Se fija una determinada precisión para este parámetro, cuando se haya cumplido esta condición de error, se habrá obtenido el valor adecuado del parámetro M. Luego regresar nuevamente a calcular el parámetro C pero con este nuevo valor de M que permitirá un cálculo más preciso, luego se deberá fijar un nuevo valor de error que siempre deberá ser menor que en la primera corrida del programa.

En lo que se refiere al parámetro K, no necesitará ningún reajuste ya que este se lo ha calculado aplicando el teorema del valor final, el cual como ya se conoce es muy exacto siempre que la respuesta se estabilice luego de un determinado tiempo. Para el desarrollo se está tomando en cuenta sistemas reales, por tanto, luego de un transitorio, o de un pico, este tiende a tomar un valor estable, cuya magnitud depende de la entrada.

## CAPITULO III

### PROGRAMA DIGITAL

- 3.1.- SIMULACION DEL SISTEMA FISICOS
- 3.2.- PROGRAMA QUE PERMITE LA DETERMINACION DE LOS PARAMETROS A PARTIR DE LA SIMULACION.

## CAPITULO III

### PROGRAMA DIGITAL

#### 3.1 SIMULACION DEL SISTEMA FISICO

##### 3.1.1 Generalidades.

Como datos de entrada se tiene una tabla de valores que definen la repuesta del sistema a una determinada excitación paso. En primer lugar, intepolar estos datos de entrada de manera que se obtenga los valores correpondientes a un determinado intervalo que el programa necesita conocer los datos.

Luego con una adecuada interpolación se obtiene la curva correspondiente a estos datos, y a partir de esta se determina los parámetros del sistema.

A partir de una tabla de valores de una función  $f(x)$ , se necesita una tabla de valores de  $f(x)$  para valores de  $x$  con un determinado intervalo. Este problema será resuelto por medio de la interpolación.

Existen varios métodos de interpolación, un método muy sencillo es el de interpolación lineal, en el cual se aproxima la curva de  $f$  mediante una cuerda en dos valores conocidos de  $x$ , y adyacentes. Este método será adecuado

cuando los valores de  $x$  en la tabla esten muy próximos.

Otro método muy conocido es el de la interpolación cuadrática en el que se aproxima la curva de la función  $f$  por la parábola cuadrática que pasa por los puntos, con este método se obtiene una fórmula más exacta.

Se llega a aproximaciones mucho más exacta si se utilizan polinomios de grado superior, este método se llama método de interpolación de Newton, este método es mucho más exacto.

En este caso se utilizará el método de interpolación seccional cúbica en el cual se toma tres puntos, para cada segmento vamos a encontrar un polinomio de tercer grado, este tipo de interpolación se llama también de los splines cúbicos.

Con  $N+1$  puntos que definen  $N$  intervalos de dos puntos; para cada intervalo se encuentra un polinomio de tercer grado que interpole los datos dados; se requiere que en el punto de quiebre haya continuidad de la primera y segunda derivada.

A continuación se presentará un diagrama de bloques que explica claramente el funcionamiento de este programa.

DIAGRAMA DE BLOQUES



### 3.1.2 Algoritmo para la interpolación seccional cúbica.-

- 1.- A partir de una tabla con N puntos de los cuales se desea hacer la respectiva interpolación.
- 2.- Se toma grupos de tres puntos para hallar un polinomio de tercer grado que defina estos puntos.
- 3.- El procedimiento es el siguiente:

Los polinomios son de la forma:

$$3.1 \quad P_i(x) = C_{1i} + C_{2i}(x-x_i) + C_{3i}(x-x_i)^2 + C_{4i}(x-x_i)^3$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Con los puntos repetidos se encuentra los polinomios de colocación utilizando las diferencias divididas.

$$3.2 \quad P_i(x) = f[x_i] + f[x_i, x_{i+1}](x-x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x-x_i)^2 + f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x-x_i)^2(x-x_{i+1})$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad x - x_{i+1} = (x-x_i) - \Delta x_i$$

$$P_i(x) = y_i + y_i'(x-x_i) + f[x_i, x_i, x_{i+1}](x-x_i)^2 + f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x-x_i)^2[(x-x_i) - \Delta x_i]$$

$$P_i(x) = A + B(x-x_i) + C(x-x_i)^2 + D(x-x_i)^3$$

$$A = C_{1i} = y \quad B = C_{2i} = y'$$

$$C = C_{3i} = f[x_i, x_i, x_{i+1}] - f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \cdot \Delta x_i$$

$$D = C_{4i} = f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

A partir de 'Yi' se obtiene el valor de Cxi

Luego de esta formulación existirán  $N-1$  ecuaciones con  $N+1$  incógnitas, esto implica que no hay una única solución.

El sistema de ecuaciones que resulta es de la siguiente forma:

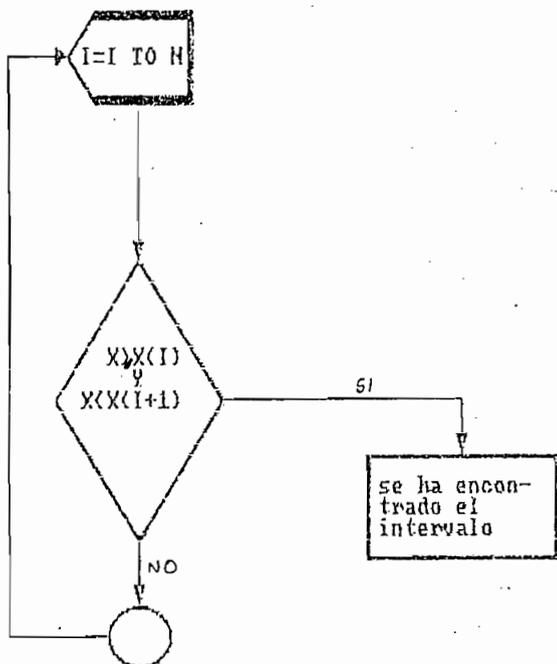
$$\begin{aligned}
 3.3 \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots &= b_1 \\
 a_2 y_2 + a_3 y_3 &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{n+1} y_{n+1} &= b_{n+1}
 \end{aligned}$$

El método de simplificación de Gauss es muy útil para simplificar esta matriz.

El problema se presenta cuando dado un valor de  $x$  hallar el valor de  $f(x)$ . Existen varios procedimientos para esto:

a.- Ir averiguando si  $x$  está en cada uno de los intervalos analizados, comenzando desde el primer intervalo.

Como se muestra en el siguiente diagrama:



Este es un método simple, efectivo pero lento.

b.- Sacar  $X_k$  tal que  $k$  sea el punto medio de los subíndices

$$3.4 \quad K = INT \left( \frac{I + N + 1}{2} \right)$$

Se debe ver que la  $X$  dada no sea  $X_k$ .

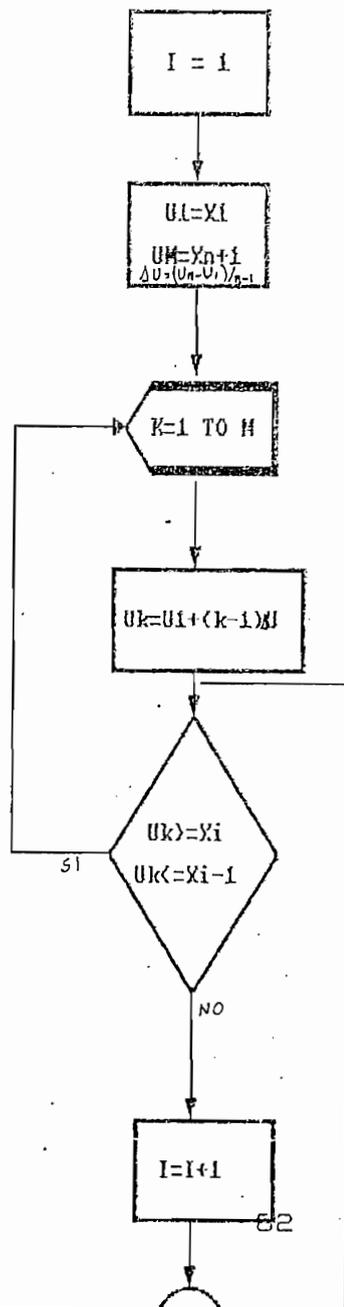
Se compara el  $X$  dado con el  $X_k$  y se fija dentro de un intervalo;  $X$  estará entre  $X_k$  y  $X_{n+1}$  o entre  $X_1$  y  $X_k$ .

Una vez hallado el intervalo, se busca un nuevo  $X_k$  en el intervalo que se está analizando. Repetir este proceso varias veces.

c.- variando  $X$  uniformemente, se llega al siguiente dia-

grama de bloques que nos explica claramente el procedimiento. Este método se lo utilizará cuando se fije un intervalo para encontrar valores de  $x$  que se necesite en una determinada función.

A continuación se presenta el diagrama de bloques respectivo:



El programa de interpolación debe seguir cierto proceso: Una vez que se ha ingresado la tabla de valores, se debe calcular las derivadas en los diversos puntos y se los almacena en un vector  $C(2,1)$ .

Cuando se ha calculado las derivadas se debe hacer la reducción de la matriz de coeficientes, para luego hacer la evaluación regresiva de incógnitas.

Los polinomios de interpolación estarán listos luego de este proceso. A continuación se debe calcular los valores de la función para un determinado  $x$ .

Se hace el cálculo de  $X$  variándola en intervalos fijos de 0.5 pero el cálculo será en forma independiente para cada  $X$ , es decir, que se utilizará la subrutina de evaluación de un  $X$  aleatorio en un determinado intervalo, pero se repetirá este proceso para los valores sucesivos de  $X$ . Lo hacemos de esta manera por ser la manera más exacta de cálculo.

Una vez calculado los valores, graficamos de la función respectiva.

Una vez que hemos conseguido la nueva tabla de valores se pasará a ser los cálculos de los parámetros que definen al sistema.

3.2 Programa que permite la determinación de los parámetros a partir de la simulación.-

### 3.2.1 Generalidades

Con este programa se realizará la identificación de los parámetros de un sistema, utilizando el método de los mínimos cuadrados y la cuasilinearización, enunciado en los capítulos anteriores.

Se ha considerado condiciones iniciales nulas, siendo esta suposición válida .

Se permitirá al usuario escoger el tipo de representación que desee es decir de una ecuación diferencial de primero o segundo orden dependiendo del tipo de sistema a identificarse. Si la respuesta que se tiene como dato se ajusta a la ecuación de primer orden bastará con hacer este tipo de modelo; caso contrario se escogerá la ecuación de segundo orden para tener una mayor precisión.

Se puede escoger también la precisión que se desee en el cálculo de los parámetros, pero en el caso de que no se pueda cumplir con esa opción, el programa alertará al usuario para que escoja otro valor.

En primer lugar se calculará los valores iniciales de los parámetros M,C,K, para a partir de estos valores realizar el resto de cálculos. En los capítulos anteriores se explicó detalladamente los algoritmos utilizados para

estos cálculos. En el presente capítulo solo se explicará de manera general los pasos a seguirse en el programa.

Una vez que se ha calculado los valores iniciales, empezará el cálculo del parámetro C, con una precisión inicial no muy alta para luego calcular el parámetro M a partir del valor calculado del parámetro C, una vez conseguido este parámetro se calculará nuevamente el parámetro C con mayor precisión que será la fijada por el usuario.

El programa principal consta de varias partes:

- MENU DE TECLAS.- en el que se especifica las funciones de ciertas teclas principales en el uso del programa.
- ingreso de datos.- presenta varias opciones para el ingreso de dato, es decir, ingresar los datos con un intervalo determinado o ingresarlos forma aleatoria.
- interpolación.- en esta parte del programa, como se explicó en el punto anterior, se busca los valores de la función para un intervalo fijo de  $x$ .
- identificación de parámetros.- esta es la parte principal del programa permite obtener la representación del sistema que se busca.

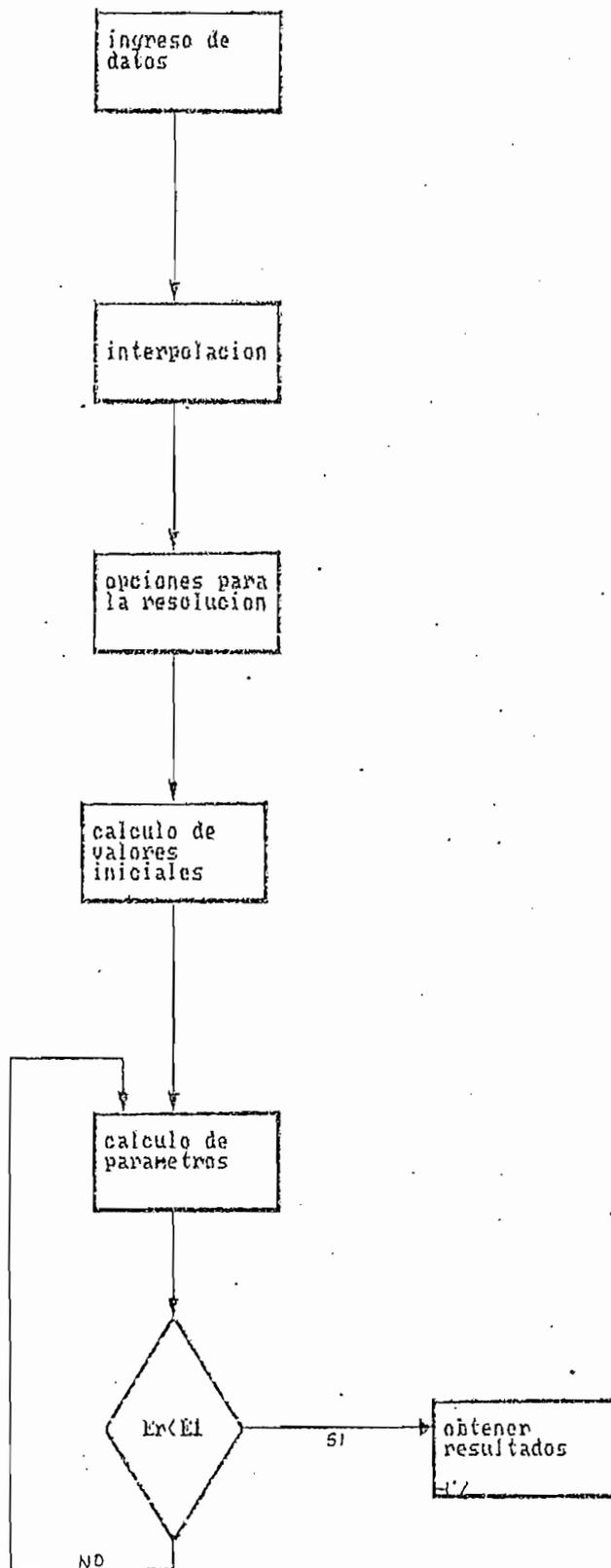
Dentro de esta parte del programa se obtendrá en forma gráfica las diferentes respuestas del sistema cuando se van calculando los distintos parámetros que identifican

al sistema; y se puede apreciar en forma clara las variaciones de la respuesta cuando los parámetros se acercan al valor real.

En el programa se obtendrá tanto una respuesta en forma gráfica así como tabla de datos de todos los valores, pero en cualquier forma es más conveniente el tener un gráfico ya que se aprecia los resultados en una forma clara.

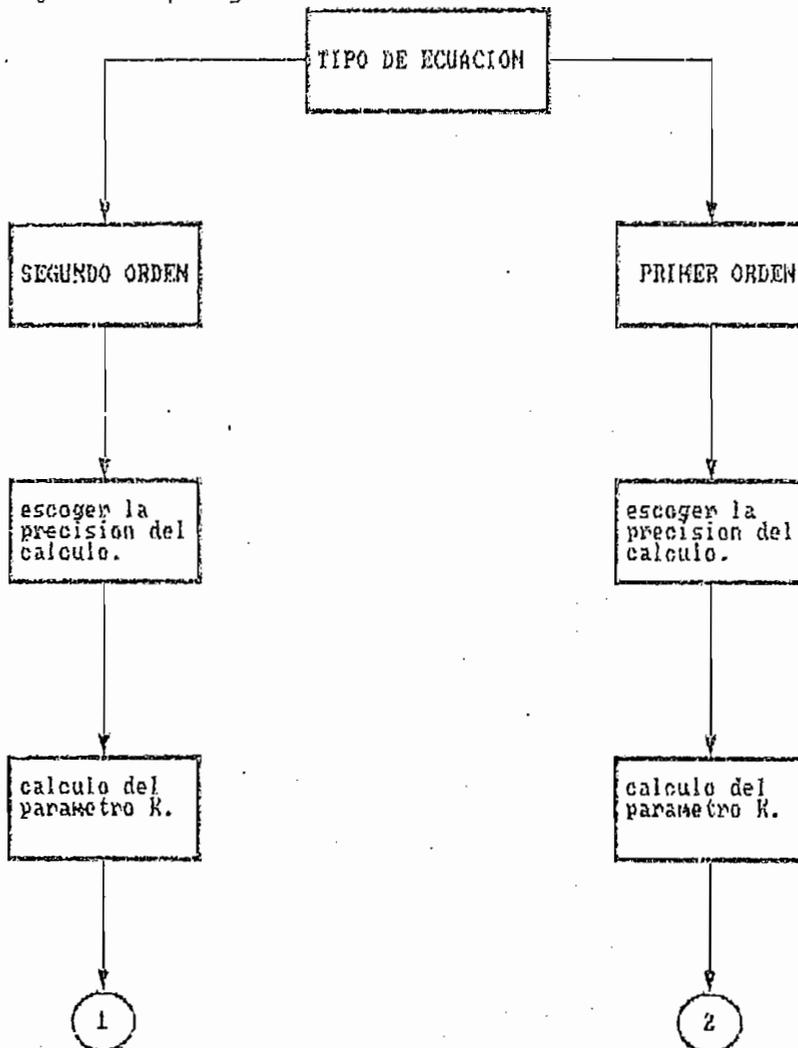
### 3.2.2 Diagramas de Bloques.

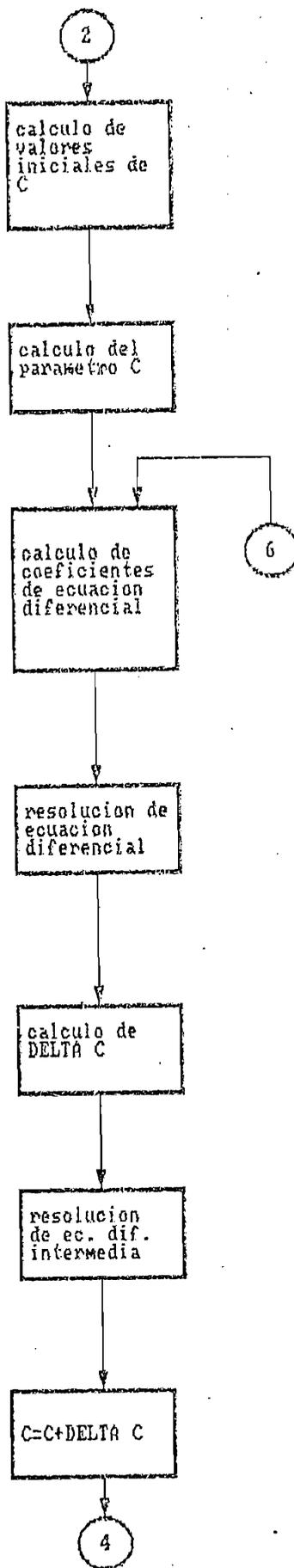
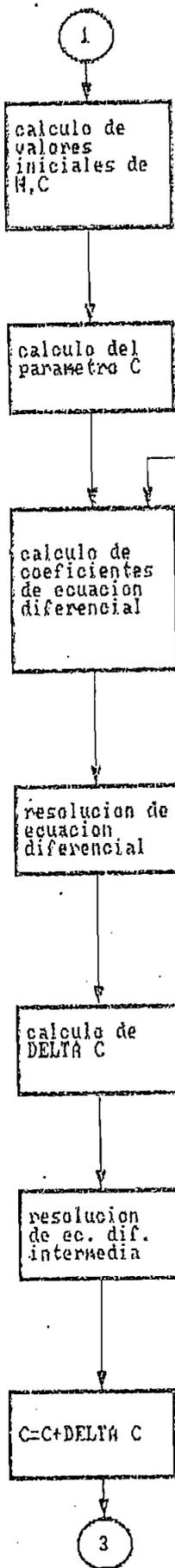
A continuación se presenta en forma general el diagrama de bloques del programa.

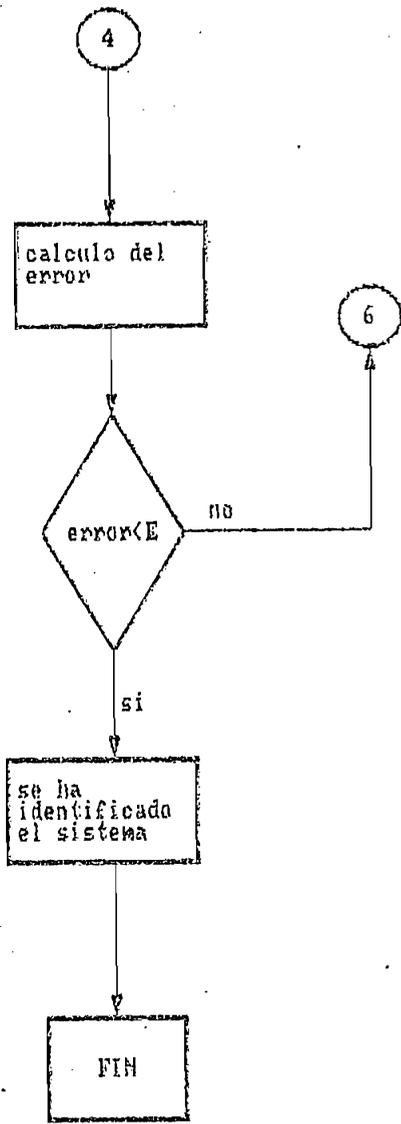
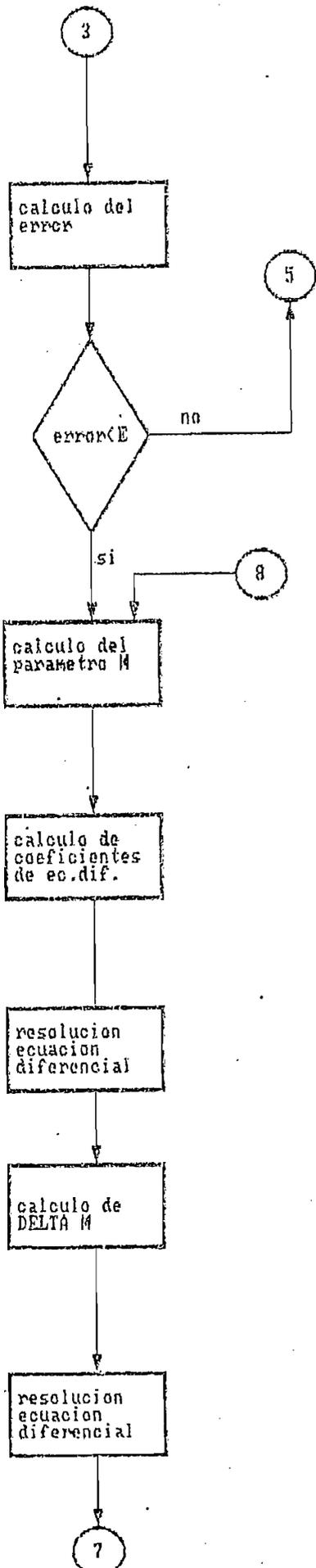


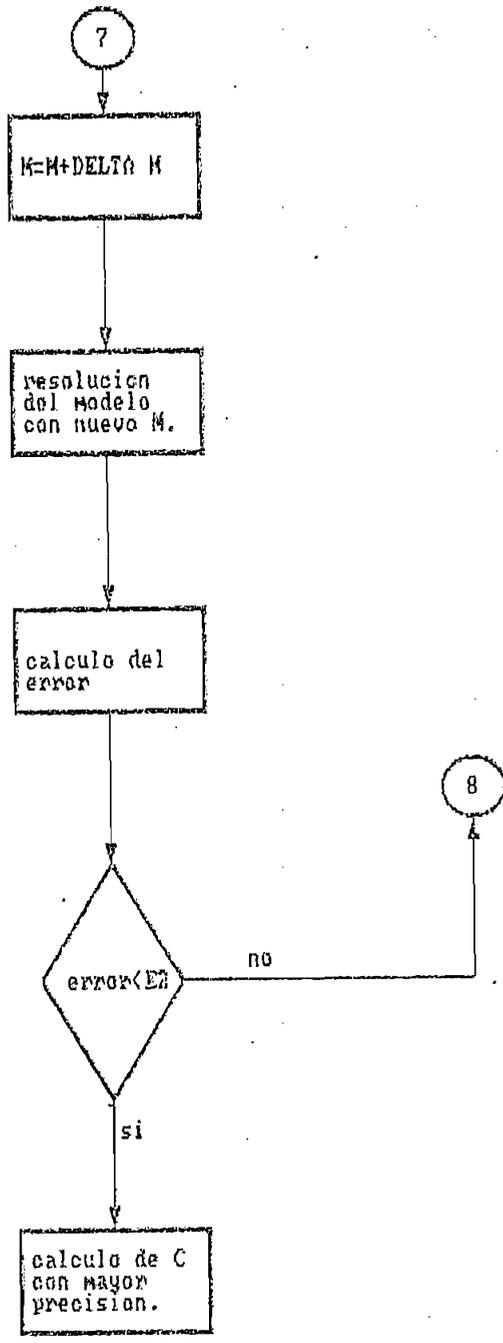
En el diagrama de bloques anterior, se presenta en rasgos generales el funcionamiento del programa, es decir, los pasos que se siguen hasta conseguir el modelo.

A continuación está en forma detallada el diagrama de flujo del programa de la identificación de parámetros.-









### 3.2.3 Funcionamiento del Programa.-

Para cargar el programa es necesario arrancar el computador con el diskette en el drive A, si se tiene el programa cargado en un disco fijo se deberá teclear la palabra IDENT. En el apèndice A se explica claramente los pasos para cargar el progama en una unidad de disco.

Una vez cargado el programa al computador, se presenta un MENU DE TECLAS, que permite:

F10	INICIO DEL PROGRAMA
F9	MENU
F8	INSTRUCCIONES GENERALES

En las instrucciones generales se da una brevisima explicaciòn del programa.

F10 permite iniciar el programa.

Una vez que se ha iniciado el programa, escoger la forma de ingresar los datos, el programa darà varias opciones:

DESEA INGRESAR LOS DATOS EN UN INTERVALO DE TIEMPO FIJO

- 1.- SI
- 2.- NO

ESCOJA UNA DE LAS OPCIONES

Si ese escoje la segunda opción se pasa directamente al ingreso de datos en una forma aleatoria. Con la primera opción se llega a otro menú:

1.- DESEA ESCOGER EL INTERVALO DE INGRESO DE DATOS?

2.- USAR EL PREFIJADO EN EL PROGRAMA

ESCOJA UNA OPCION

Si se escoje la primera opción se tendrá la siguiente opción:

INGRESAR EL INTERVALO

Luego se pasará al ingreso de datos según las opciones que se hayan escogido:

INGRESE EL NUMERO DE COORDENADAS QUE DESEA INGRESAR

INGRESE LAS COORDENADAS

Una vez que se han ingresado las coordenadas, se permite que el usuario verifique los datos que ha ingresado, en caso de que exista algún error podrá corregirlos.

Con este se termina el proceso de ingreso de datos, y comienza la subrutina de interpolación para el procesamiento adecuado de los datos. Se obtendrá un gráfico de las respuesta inicial del sistema que servirá al usuario como criterio para escoger el orden de la

ecuación diferencial que se ajustará al modelo.

Luego entrará a la subrutina para escoger el tipo de modelo que se desea, en este punto el usuario deberá tener mucho cuidado, ya que dependerá del sistema que se quiera identificar, de la exactitud y de la simplicidad que requiera, luego es el criterio del usuario, el tipo de modelo que escogerá:

QUE TIPO DE ECUACION DESEA

1.- PRIMER ORDEN

2.- SEGUNDO ORDEN

ESCOJA EL NUMERO CORRESPONDIENTE A LA OPCION QUE DESEE

Se permite al usuario escoger la precisión con la que se desea que se realicen los cálculos:

LA PRECISION DEL CALCULO ES MENOR QUE EL 0.1%

DESEA TENER MAYOR PRECISION?

1.- SI

2.- NO

Una vez que ha terminado esta subrutina, empieza el proceso de búsqueda del modelo, se irá identificando parámetro por parámetro como se explica detalladamente anteriormente en este CAPITULO.

El proceso en el programa es un poco largo, se pide al usuario que siga las indicaciones que aparecen el transcurso del programa como el caso de presionar una tecla para continuar, esto se da en el momento de la realización de los gráficos, en el que se deja momentaneamente el programa principal para entrar al programa LOTUS para la realización de los gráficos.

## CAPITULO IV

### EJEMPLOS MATEMATICOS DEL FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA

4.1.- RESULTADOS

4.2.- CONCLUSIONES

## CAPITULO IV

### EJEMPLOS MATEMATICOS DEL FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA.-

Para comprobar el funcionamiento del programa se plantead varios ejemplos que ilustren en una manera muy sencilla la validez del programa.

Se planteó un circuito eléctrico, R,L,C y un circuito R,C. Se tomaron estos ejemplos prácticos ya que utilizando los conceptos de los circuitos eléctricos se puede deducir la función de transferencia del sistema y compararla con el modelo obtenido por medio del programa.

Estos ejemplos, de circuitos eléctricos simples son muy útiles en cuanto se tiene un conocimiento real de su funcionamiento, de su función de transferencia, y del tipo de modelo que lo identifica mejor; por tanto servirán como parámetros de comparación para analizar la exactitud, y la validez del método utilizado.

Se alimentó a los circuitos con una señal paso y se midió el voltaje sobre el capacitor, tomando este como voltaje de salida. Obteniendo de esta manera una tabla de valores que servirán como datos de entrada para el programa de identificación, estos datos podrán ser ingresados ya sea en un intervalo constante, o de manera aleatoria, pero se dará mayor importancia a los valores en los que

hay mayor variación de la curva, para obtener una representación válida.

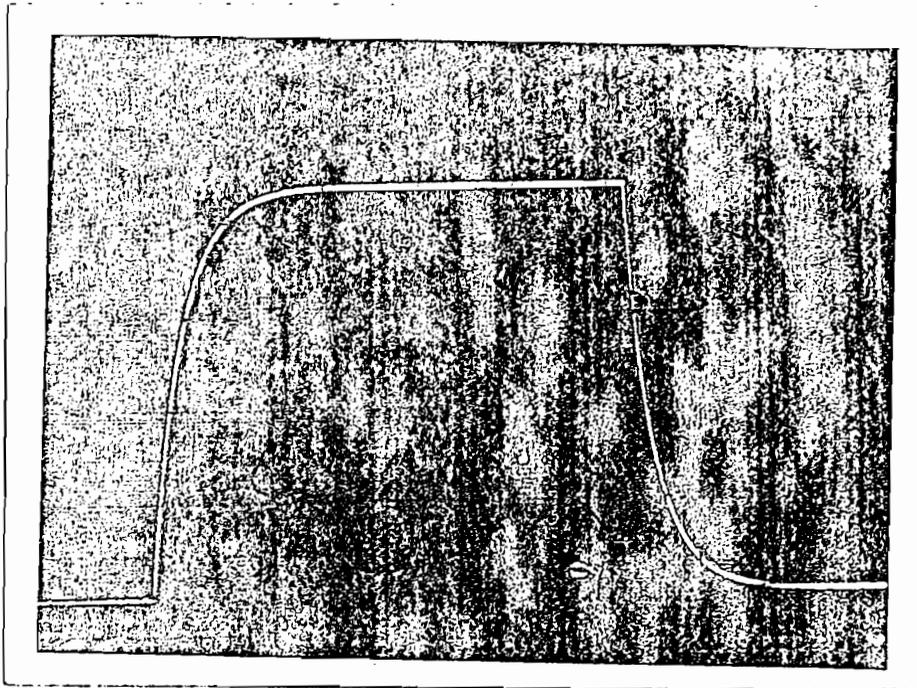
Una vez que se han ingresado los datos, el programa lleva a cabo una interpolación de los mismos para tener una envolvente de los datos de entrada. Se realizará también el cálculo de los valores iniciales de los parámetros a partir de los cuales se encontrará el modelo del sistema.

Al final se obtendrá el modelo matemático del sistema y la respuesta gráfica del mismo.

Para escoger el tipo de modelo que se desea, se debe analizar los datos de entrada que se conoce, de esta manera se determinará si el modelo para el sistema será de primero o segundo orden.

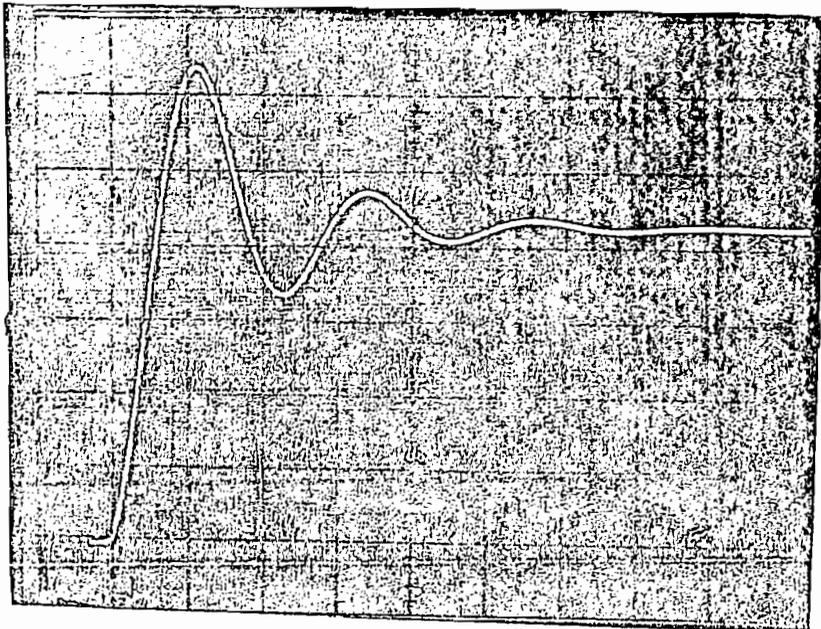
Para el circuito RLC se escogió un modelo de segundo orden ya que al analizar los resultados obtenidos en el laboratorio, FOTO 1; se ve claramente que es la respuesta de un sistema de este tipo.

FOTO 1



Para el circuito RC se buscó los dos modelos, ya que su respuesta puede ser similar tanto a un curva de primero como de segundo orden. FOTO 2

FOTO 2



Más adelante en este mismo capítulo se presentarán los resultados del programa, y la comprobación de su validez comparando los resultados obtenidos.

A un sistema de primer orden, se hallará su modelo por medio de una ecuación diferencial tanto de primer orden como con una de segundo orden para ver las diferencias que se presentan entre los dos modelos.

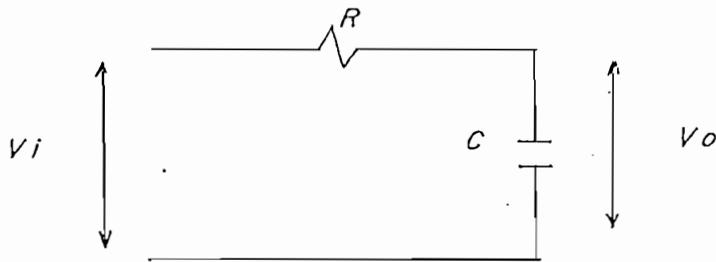
Finalmente se presentará un ejemplo algo más complejo pero a la vez más real, como es el caso de la respuesta de un motor de corriente continua en el momento del arranque, se verá la variación del voltaje sobre la armadura, y la variación de la velocidad hasta que se estabilizan. El proceso a seguirse es similar al de los ejemplos anteriores, se ingresará los datos para ir realizando paulatinamente los cálculos hasta determinar el modelo. Para este caso se buscará una representación de primero y de segundo orden para analizar las diferencias, y determinar cual se ajusta mejor al sistema real.

#### 4.1 Ejemplo # 1

El ejemplo #1 es un circuito RC cuyo diagrama se presenta a continuación:

Circuito RC.-

diagrama.-



### CIRCUITO RC

Resolviendo el circuito eléctrico, tomando la transformada de Laplace se tiene:

$$V_i(s) = I(s) (R + 1/s C)$$

$$V_o(s) = I(s) \cdot 1/s C$$

$$I(s) = s C V_o(s)$$

$$4.1 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CRs + 1}$$

de donde se puede concluir que:

$$\begin{aligned} M &= 0 \\ C &= CR \\ K &= 1 \end{aligned}$$

Se tiene:

Un capacitor de 5 uF

Una resistencia de 520 Ohm

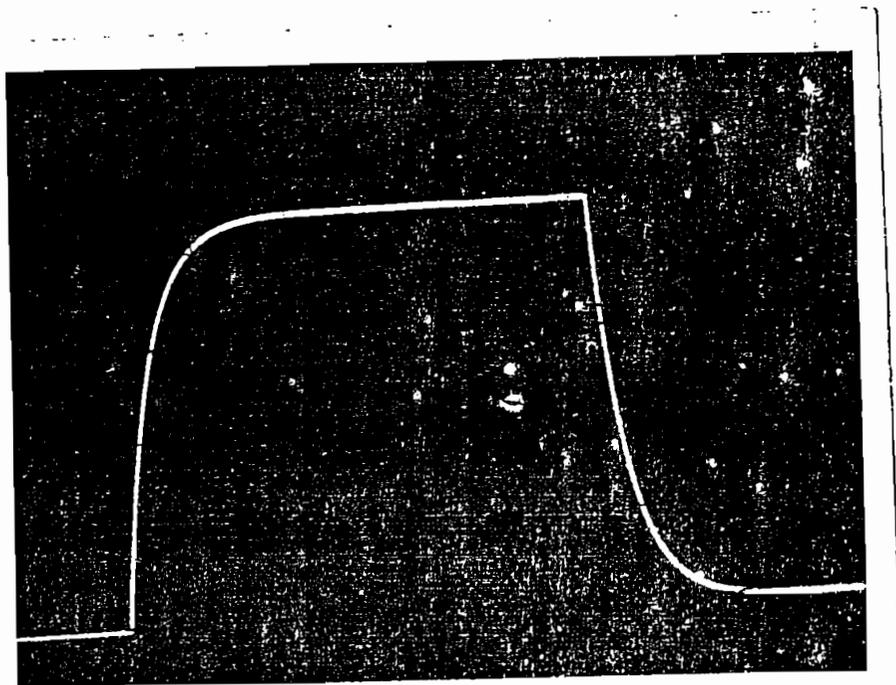
Como voltaje de alimentación una onda cuadrada de aproximadamente 2.2v.

Reemplazando los valores de capacitor y resistencia en la ecuación 4.1, la función de transferencia del sistema será:

$$C = CR = 5\mu f \cdot 520\text{ ohm}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{2.6 \cdot 10^{-3} s + 1}$$

La función obtenida en el laboratorio está en la FOTO 4.1; de donde se puede extraer una tabla de valores para el ingreso de datos en el programa.



Y: 0.5v/div  
X: 5ms/div

FOTO 4.1

En primer lugar se buscará un modelo de primer orden. Los valores de entrada en este ejemplo son los de la FIGURA 4.1.

Como se explicó al inicio de este capítulo, una vez que se ingresa los valores del problema, se lleva a cabo el proceso de interpolación, FIGURA 4.2; que contiene los valores de entrada.

Los resultados del programa digital se presentan a continuación:

La FIGURA 4.3 tiene la función con los valores iniciales de los parámetros, calculados en el programa:

$$C = 1.625E-3$$

$$K = 1$$

C, K son los valores iniciales de los parámetros.

Los valores de los parámetros se van ajustando en forma periódica hasta alcanzar una precisión dada; la que puede ser escogida por el operador, o bien a un valor constante fijado en el programa.

A continuación se presenta la secuencia gráfica hasta alcanzar el modelo esperado. FIGURA 4.4

FIGURA 4.1

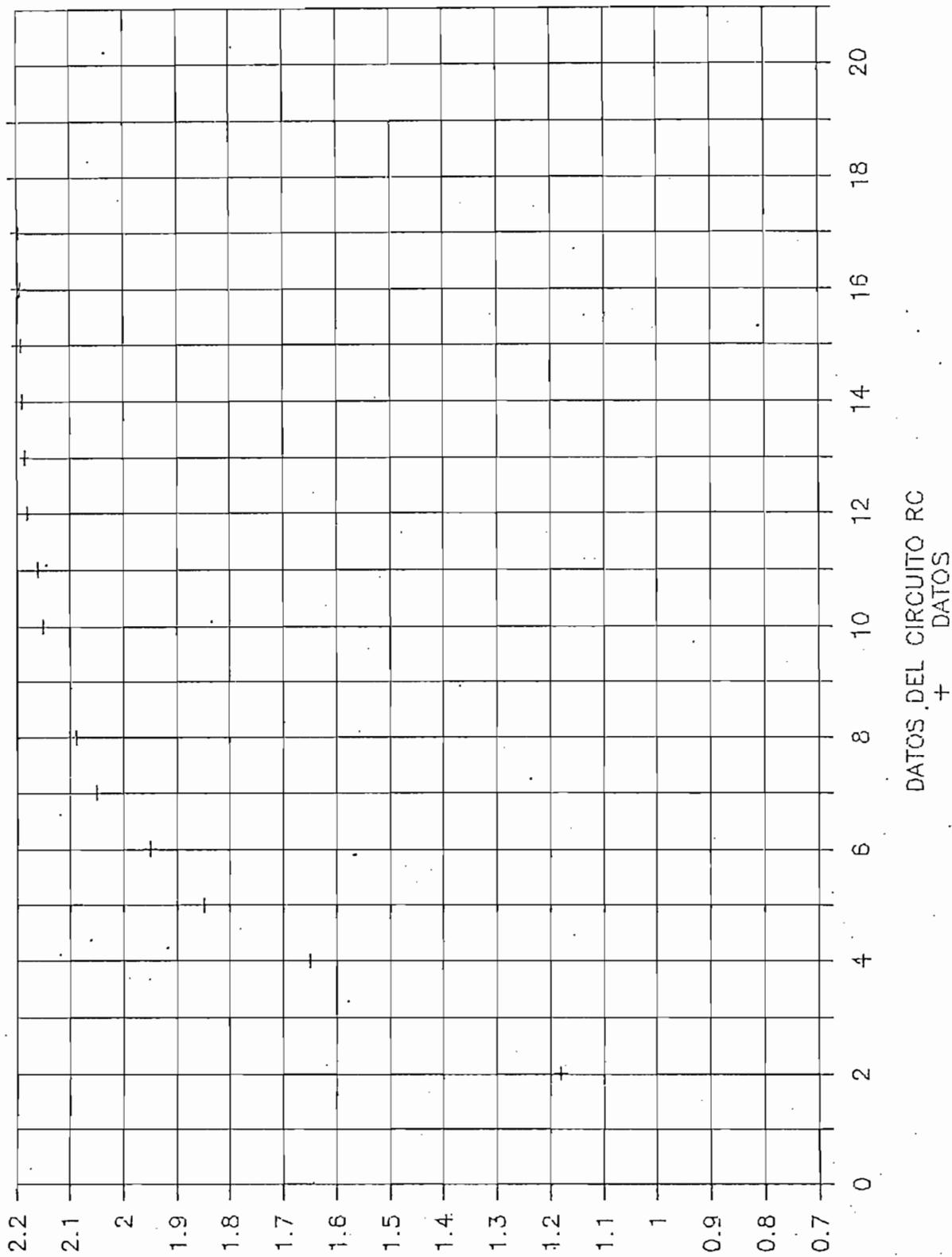
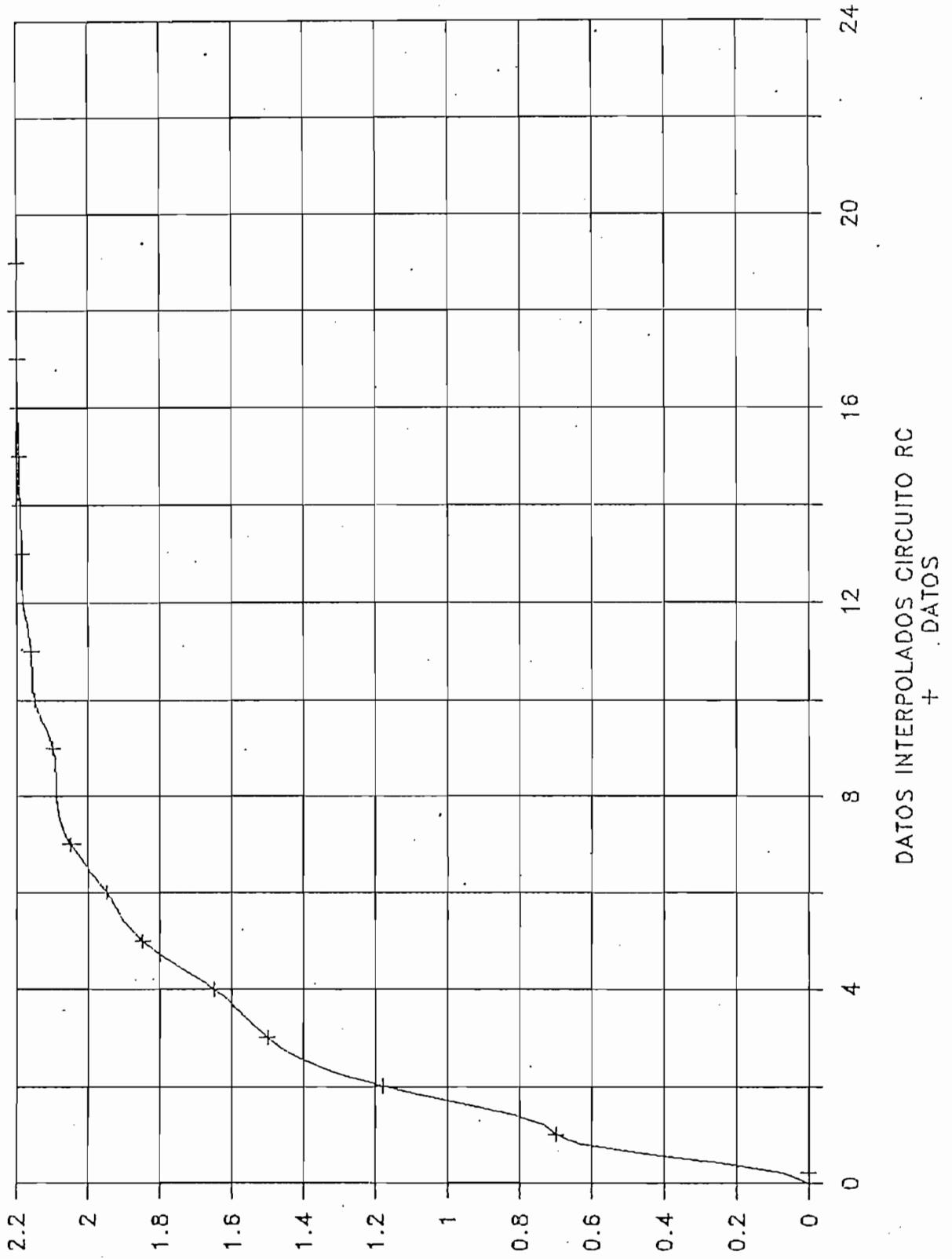


FIGURA 4.2



NUMBRE DEL ARCHIVO:FIG41

DATOS DEL CIRCUITO RC

X(t)	Y(t)
0	0
1	0.7
2	1.18
3	1.5
4	1.65
5	1.85
6	1.95
7	2.05
8	2.09
9	2.1
10	2.15
11	2.16
12	2.18
13	2.185
14	2.19
15	2.193
16	2.195
17	2.197
18	2.2
19	2.2
20	2.2

NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG43

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	1.62500E-03
"PARAMETRO M"	0.00000E+00
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0
"PRECISION EC"	0.000001
"PRECISION EM"	

FIGURA 4:3

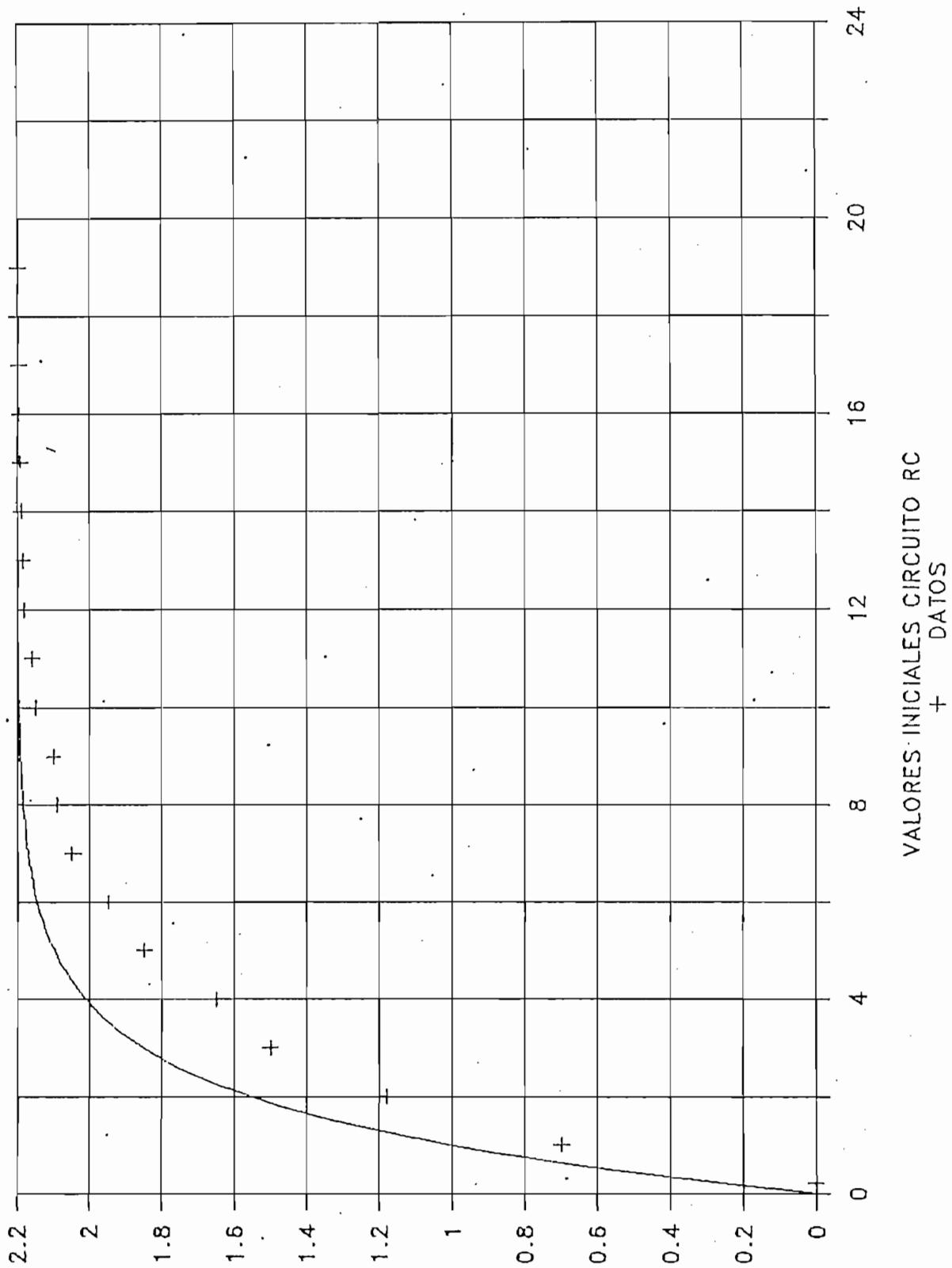
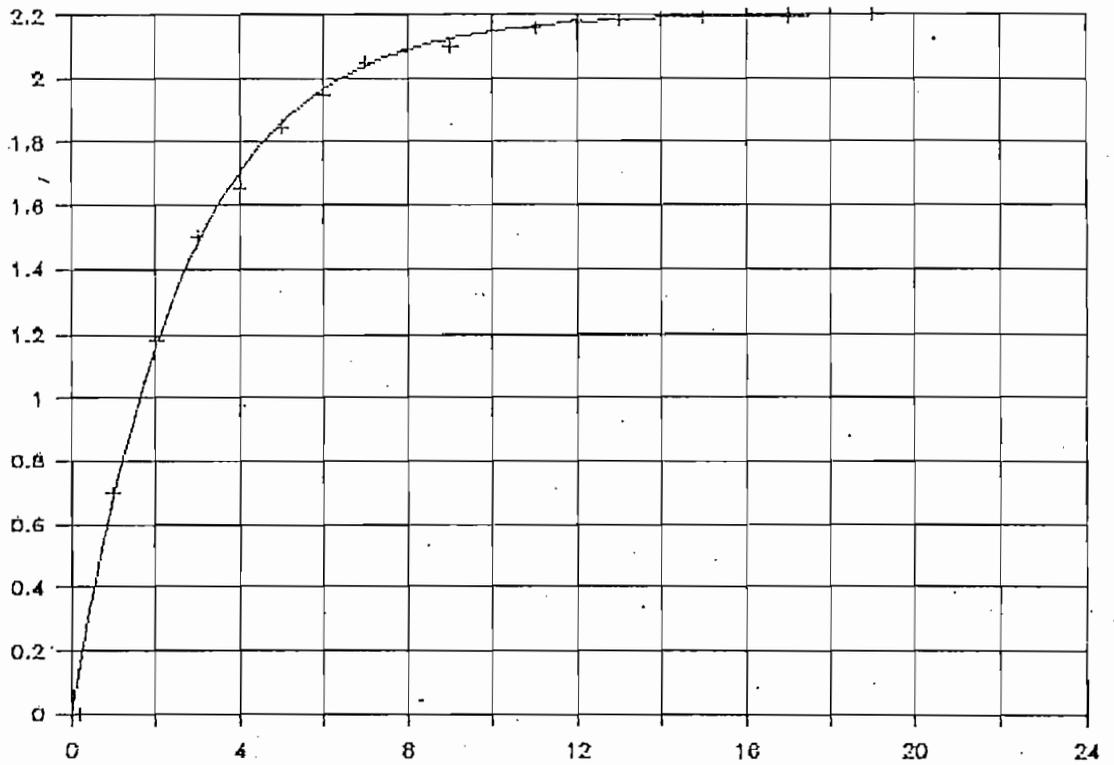


FIGURA 4.4A



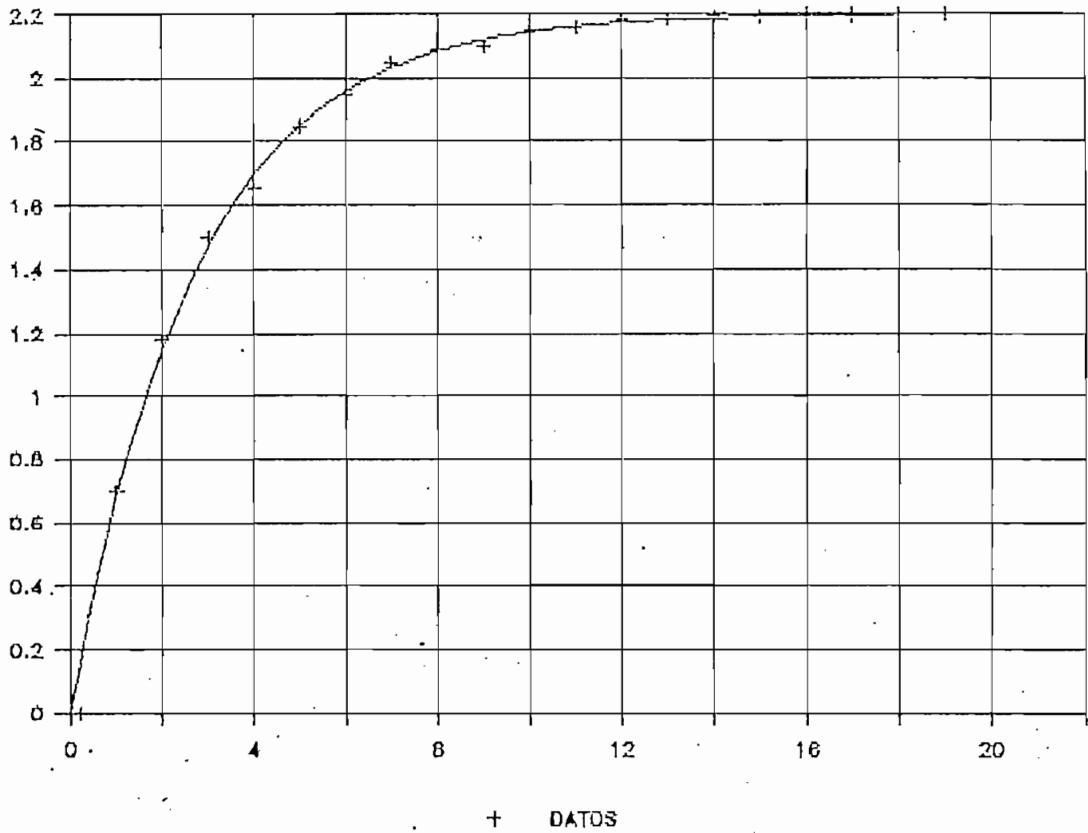
+ DATOS

NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG44A

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.67481E-03
"PARAMETRO M"	0.00000E+00
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.06318307
"PRECISION EC"	0.000001
"PRECISION EM"	

FIGURA 4.4B

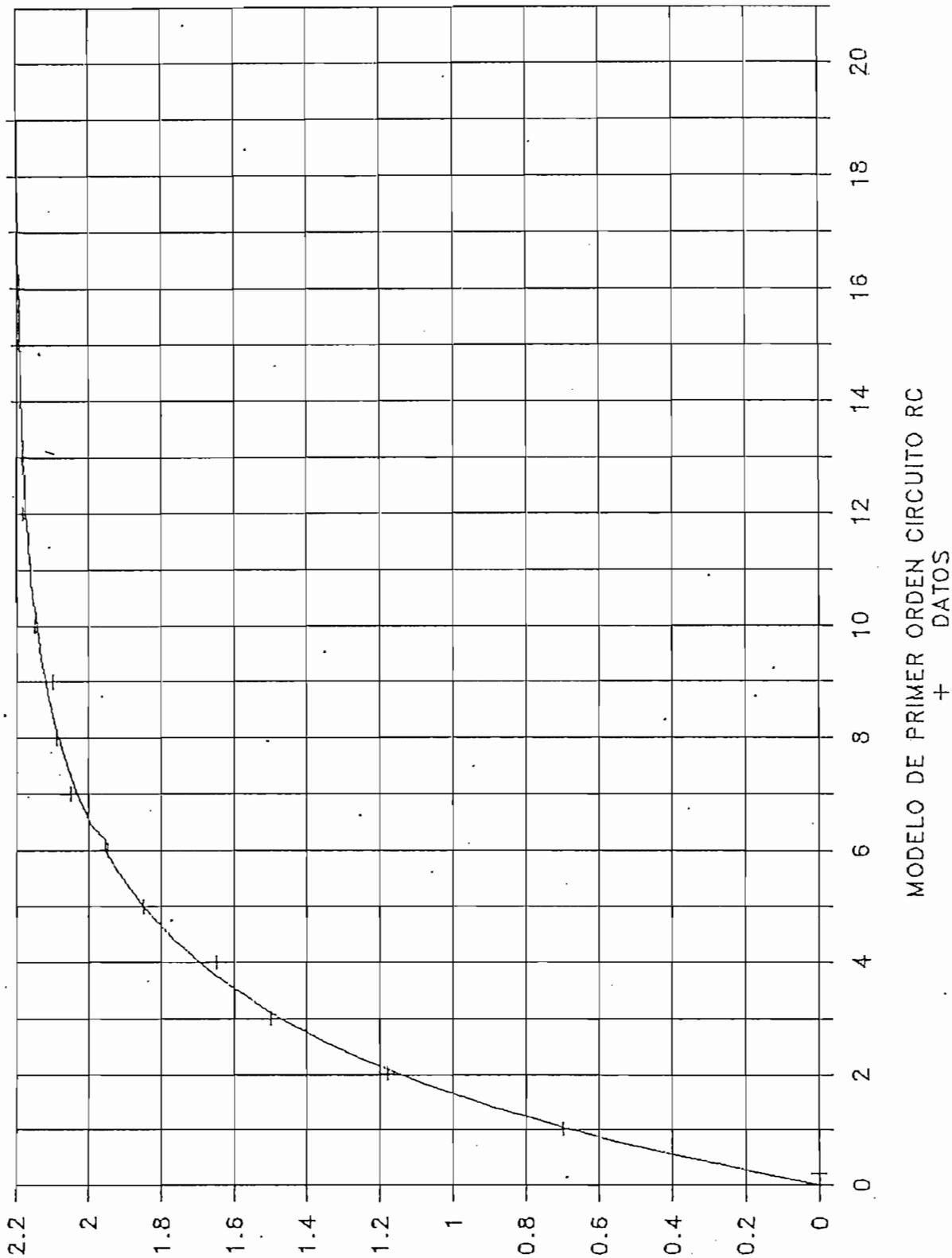


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG44B

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.71674E-03
"PARAMETRO M"	0.00000E+00
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.000013755
"PRECISION EC"	0.000001
"PRECISION EM"	

FIGURA 4:5



NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG45

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.75980E-03
"PARAMETRO M"	1.00000E-03
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.0000004302
"PRECISION EC"	0.0000025
"PRECISION EM"	0.00001

La figura 4.5 se tiene el modelo de primer orden del circuito RC con los parámetros:

$$C = 2.75 \text{ E-3}$$

$$K = 1$$

Reemplazando estos valores en la ecuación 4 tenemos la función de transferencia que describe al sistema:

$$4.2 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{2.75 \times 10^{-3} s + 1}$$

Se puede comparar la función de transferencia del modelo ecuación 4.2 con la original del sistema 4.1 para ver la validez del modelo obtenido.

En este ejemplo se ve claramente como a partir de unos valores iniciales calculados dentro de programa, se va ajustando los parámetros hasta encontrar el modelo con una determinada precisión. Se comprueba también la validez del método utilizado como se puede observar en los resultados obtenidos. Se comprueba además que es suficiente la representación de primer orden.

Con los mismos datos de entrada de la FIGURA 4.1 se puede hallar un modelo de segundo orden para este mismo siste-

ma; en este caso los valores iniciales de los parámetros son:

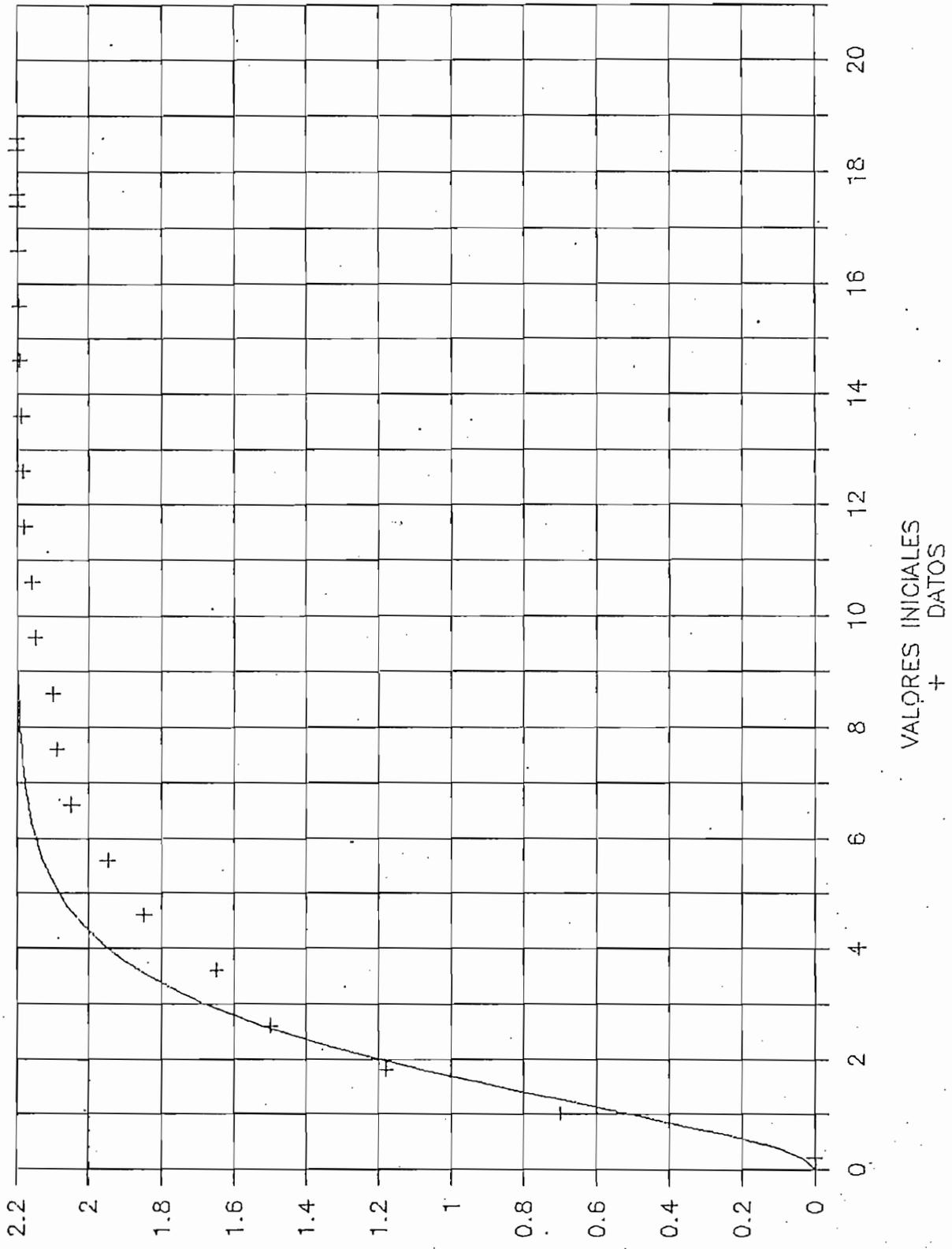
$$C = 2.164 \text{ E-3}$$

$$M = 1.21 \text{ E-6}$$

En la FIGURA 4.6 se presenta el modelo obtenido con los valores iniciales de los parámetros:

A continuación se presenta la secuencia gráfica hasta obtener el modelo de segundo orden:

FIGURA 4.5

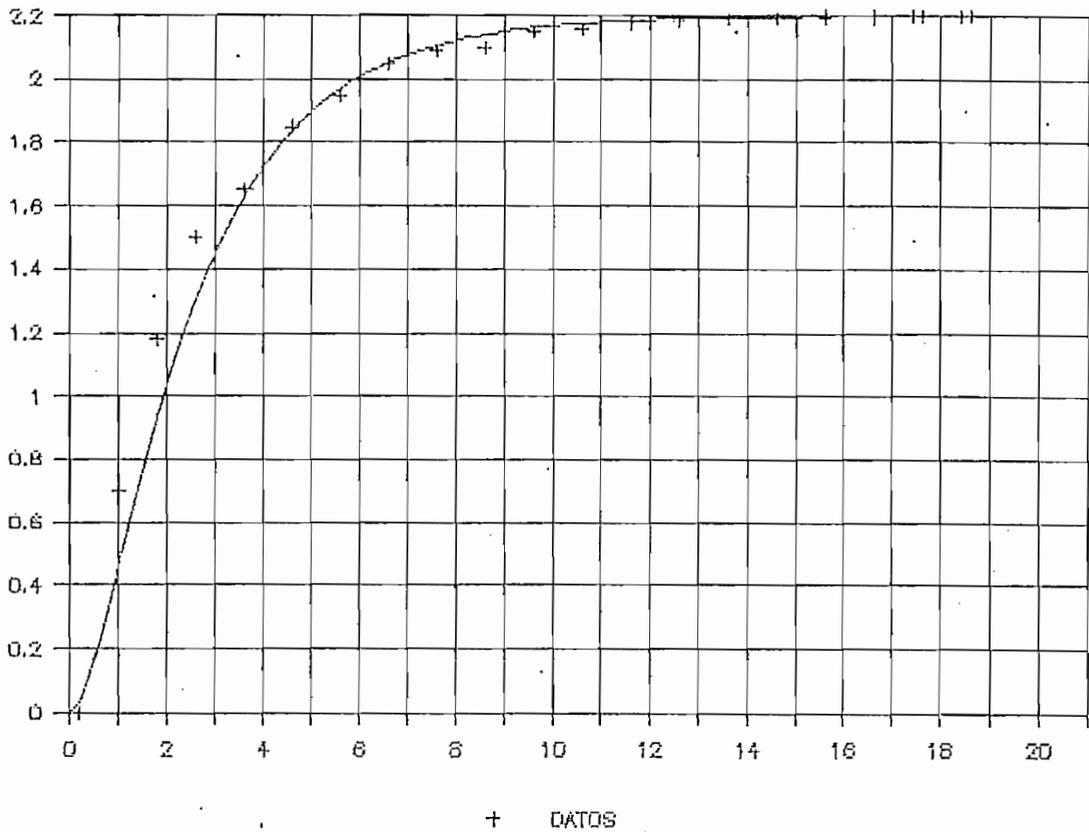


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG46

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.16176E-03
"PARAMETRO M"	1.21313E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.00001

FIGURA 4.7A

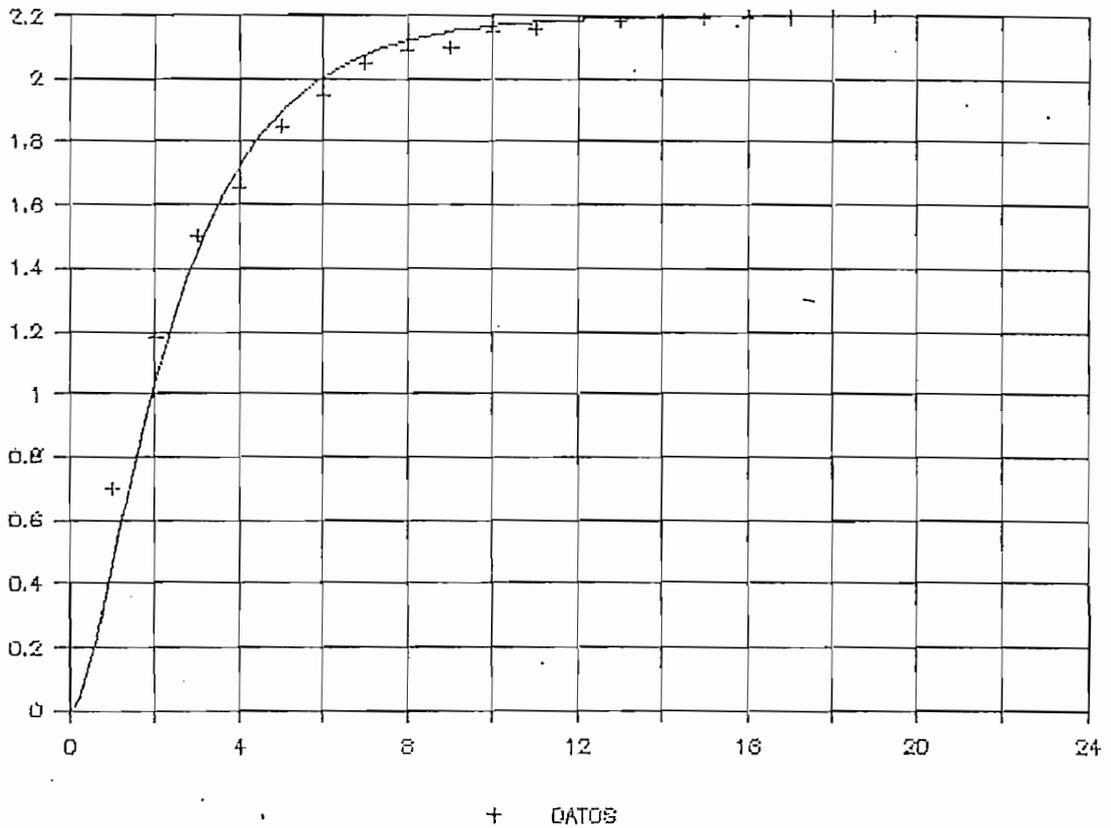


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG47A

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.75317E-03
"PARAMETRO M"	1.21313E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.03532859
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.00001

FIGURA 4.7B

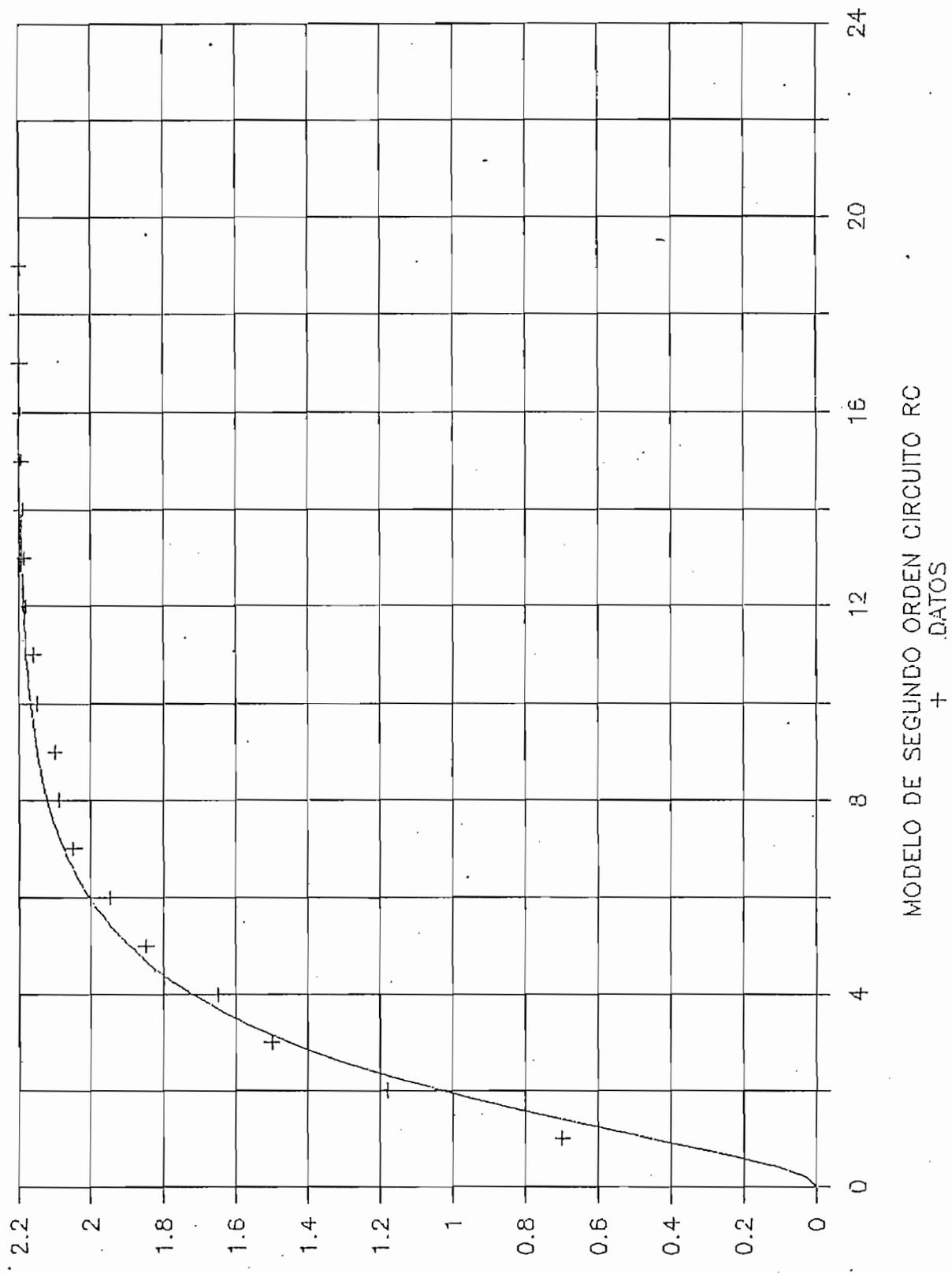


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG47B

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.75974E-03
"PARAMETRO M"	1.21313E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.0003915785
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.00001

FIGURA 4.8



MODELO DE SEGUNDO ORDEN CIRCUITO RC  
+ DATOS

NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG48

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	2.75980E-03
"PARAMETRO M"	1.21313E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.0000004302
"PRECISION EC"	0.0000025
"PRECISION EM"	0.00001

Los valores de los parámetros del modelo son:

$$M = 4.213492 \text{ E-6}$$

$$C = 2.759809 \text{ E-3}$$

$$K = 1$$

Reemplazando en la ecuación 4.1 se tiene la siguiente función de transferencia:

$$4.3 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{4.21 \cdot 10^{-6} s^2 + 2.75 \cdot 10^{-3} s + 1}$$

El gráfico del modelo de segundo orden para el circuito RC está en la FIGURA 4.8

Dado que el circuito RC da una función de transferencia de primer orden, y se está buscando un modelo de segundo orden no se puede hacer una comparación de los resultados numéricos, pero se puede analizar la respuesta gráfica que se presenta, para analizar la validez de los valores obtenidos.

Si se analiza el parámetro M del modelo de segundo orden se puede apreciar que es un valor bastante pequeño comparado con el valor que tiene C, por tanto se podría decir que es despreciable, en este caso, se tendría una representación de primer orden. Luego se comprobaría que la representación de primer orden es suficiente para este sistema. Para determinar cual de los dos modelos es más

exacta se deberá analizar la precisión con la que se realizaron los cálculos en ambos casos. Para el sistema de primer orden se utilizó un error de 0.0001, en cambio como en el modelo de segundo orden se calcula C en dos ocasiones, el error es de 0.000001.

Se busca el modelo de segundo orden únicamente con el fin de demostrar que el programa puede calcular tanto uno como otro tipo de modelo, y que depende de los criterios de selección del usuario para determinar cual será la respuesta más apropiada.

Si se compara el modelo de primer orden y de segundo orden, se verá que tanto el de primer orden como el de segundo tienen semejanza a la función de la planta original.

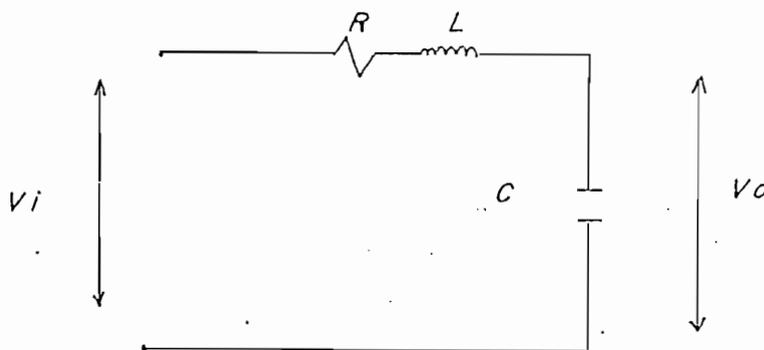
Con esto se quiere enfatizar la necesidad de analizar la planta de la que se busca el modelo, es decir, en base a los datos de entrada y salida que se conocen, determinar que tipo de modelo es el que se necesita, ya que el tener un modelo de orden superior no significa que se tendrá mayor exactitud, esto depende de la planta con la que se está trabajando.

### Ejemplo # 2.-

El segundo ejemplo es un circuito RLC como el que se presenta a continuación:

#### Circuito R, L, C.-

diagrama.-



CIRCUITO RLC

Se tiene:

Un capacitor de 1  $\mu\text{F}$

Una inductancia de 3.5 H

Una resistencia de 850 Ohm

Como alimentación una onda cuadrada de aproximadamente 4.4 V.

En primer lugar se hará la deducción de la función de transferencia de este sistema, aplicando los conocimientos de los circuitos eléctricos; se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_i(s) &= I(s)(R + Ls + 1/sC) \\
 V_o(s) &= I(s) 1/sC \\
 V_i(s) &= V_o(s) * (CRs + CLs^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$4.4 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}$$

La forma general de un modelo de segundo orden es:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

de donde

$$M = CL = 1\mu f \times 3.5 = 3.5 \times 10^{-6}$$

$$C = CR = 1\mu f \cdot 850 = 0.85 \times 10^{-3}$$

$$K = 1$$

luego la función de transferencia del circuito RLC será:

$$4.5 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{3.5 \times 10^{-6} s^2 + 0.85 \times 10^{-3} s + 1}$$

La curva que se halló en el laboratorio es la de la Foto 4.2; de donde se sacó los datos del problema a resolver.

El tiempo viene dado en milisegundos, y el voltaje en voltios.

El ingreso de datos se lo puede hacer de dos maneras distintas, una de ellas es a intervalos de tiempo fijo, y la otra de una manera aleatoria; se analizará las respuestas en los dos casos.

Los resultados obtenidos en el computador, ingresando los datos en un intervalo de tiempo fijo se presentan a continuación:

En la FIGURA 4.9 se representa los datos de entrada tomados en el laboratorio: Los datos interpolados en el programa de interpolación en la FIGURA 4.10.

Los valores iniciales de los parámetros son:

$$M = 3.43 \text{ E-6}$$

$$C = 9.018 \text{ E-4}$$

$$K = 1$$

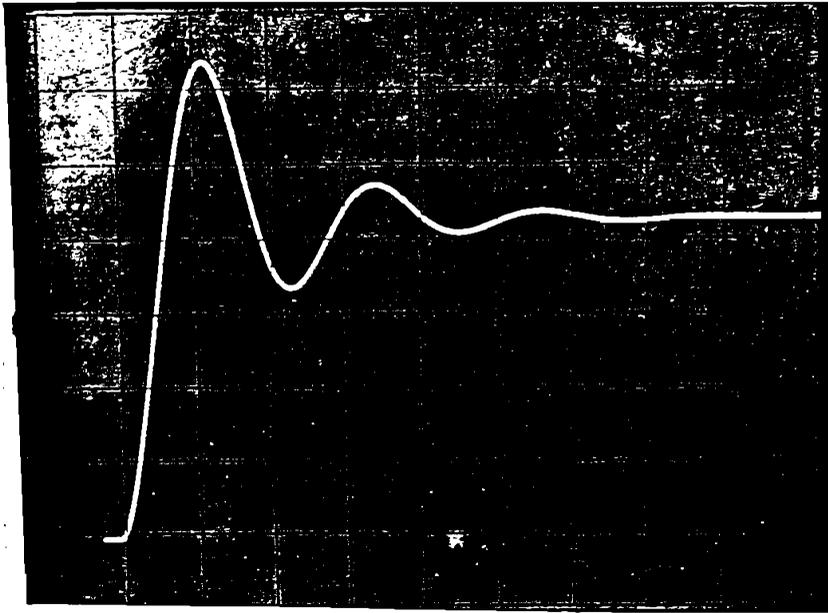
La respuesta gráfica con valores iniciales se encuentra en la FIGURA 4.11

Por último la FIGURA 4.12 representa el modelo obtenido; los parámetros del modelo son:

$$C = 8.54 \text{ E-4}$$

$$M = 3.431 \text{ E-6}$$

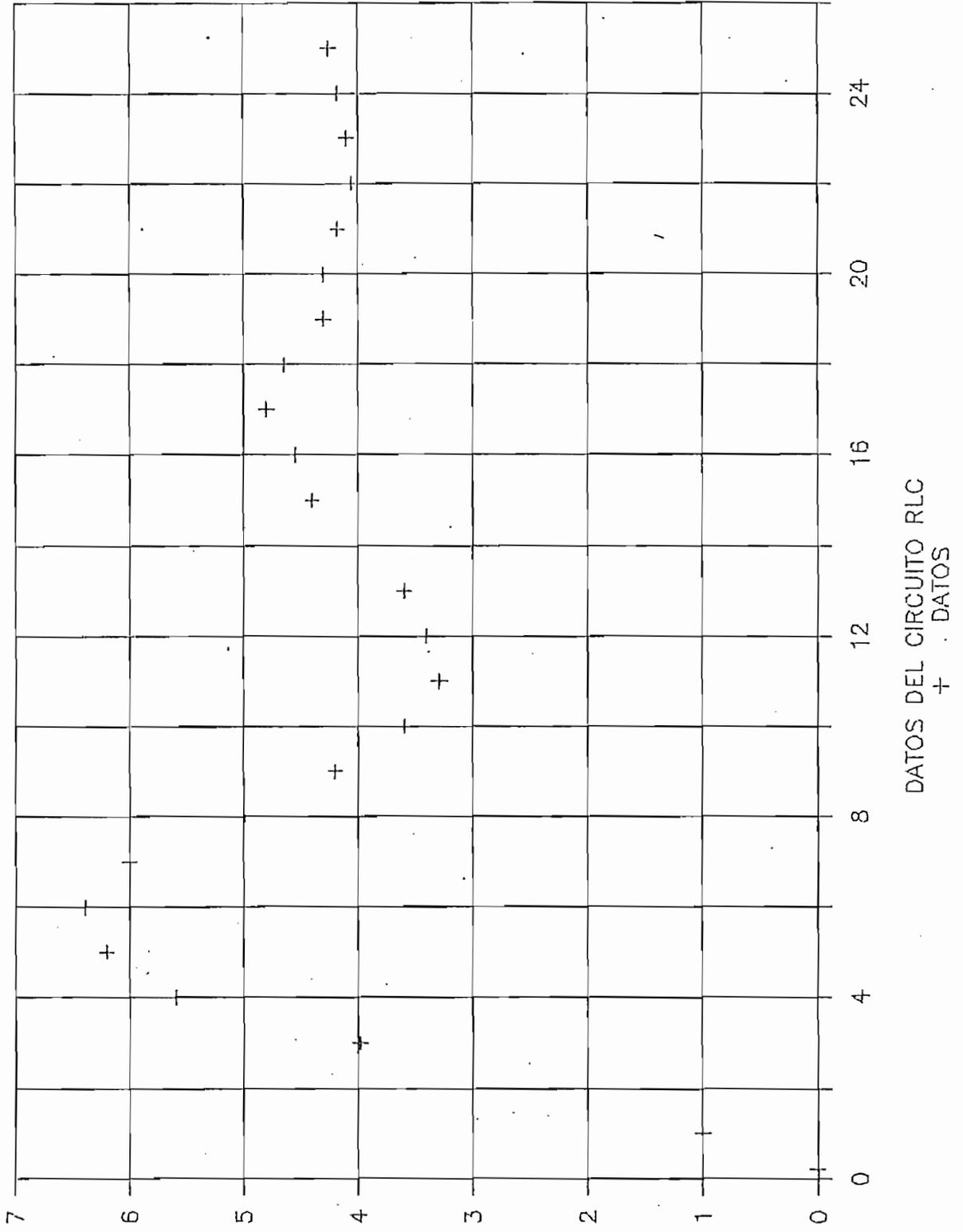
$$K = 1$$



Y: 1V/div  
X: 5ms/div

FOTO 4.2

FIGURA 4.9

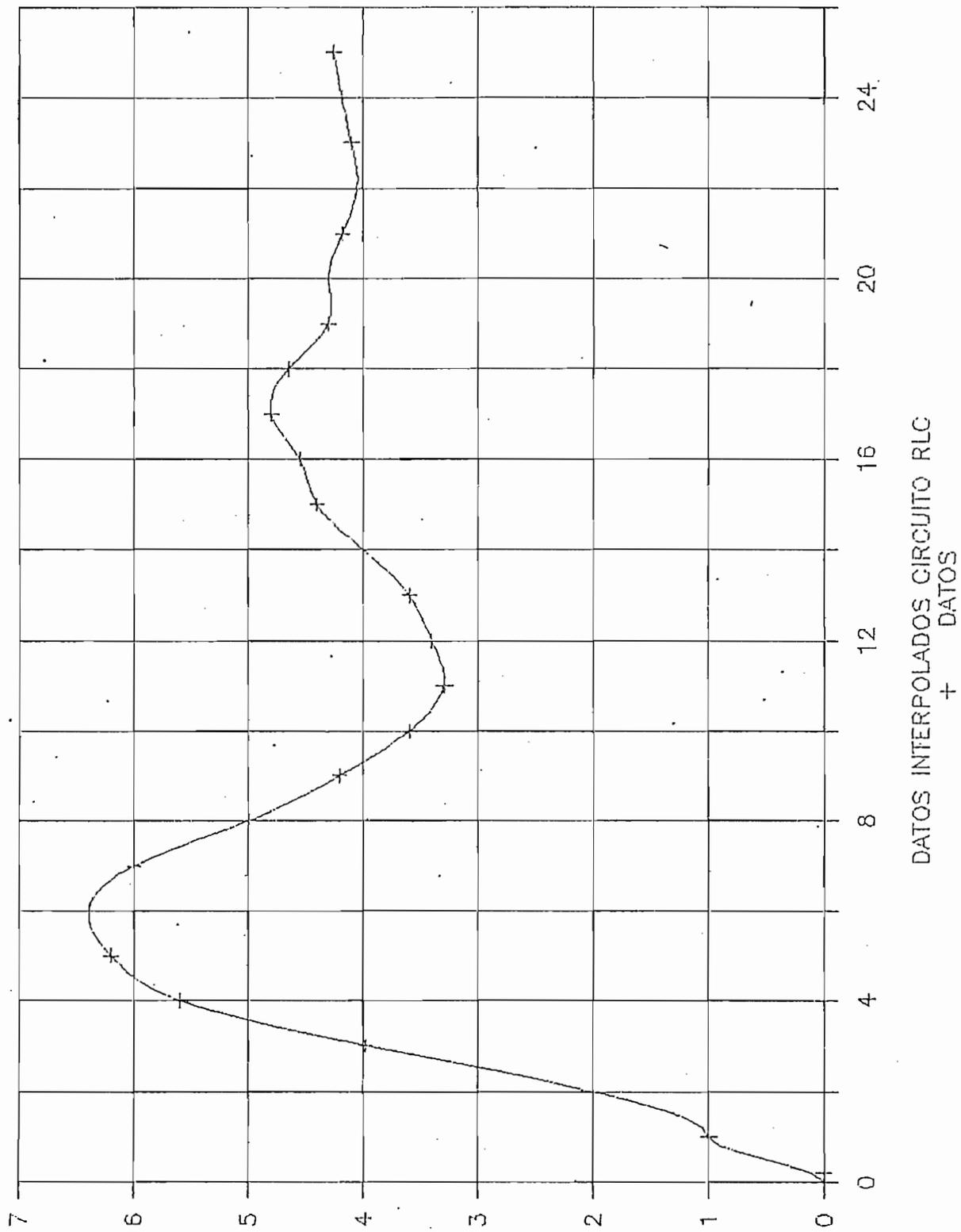


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG49

DATOS CIRCUITO RCL

X(t)	Y(t)
1	1
2	2
3	3.98
4	5.6
5	6.2
6	6.4
7	6
8	5
10	3.6
11	3.3
12	3.4
13	3.6
14	4
15	4.4
16	4.55
17	4.8
18	4.65
19	4.3
20	4.3
21	4.18
22	4.05
23	4.1
24	4.18
25	4.25
26	4.3
27	4.38
28	4.4
29	4.38
30	4.4
31	4.38
32	4.36
33	4.38
34	4.4

FIGURA 4:10

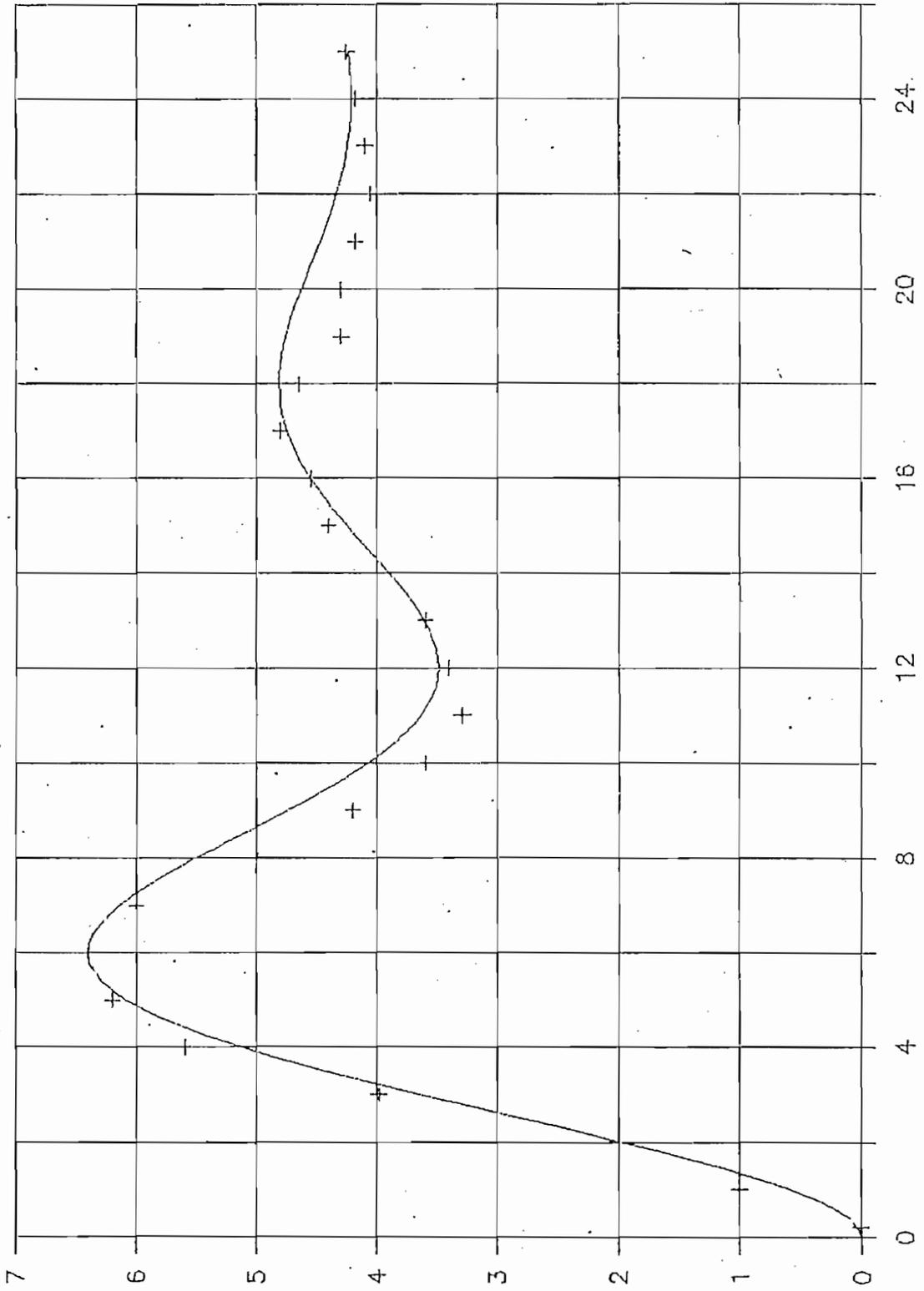


NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG411

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	9.01844E-04
"PARAMETRO M"	3.43142E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.00001

FIGURA 4.11



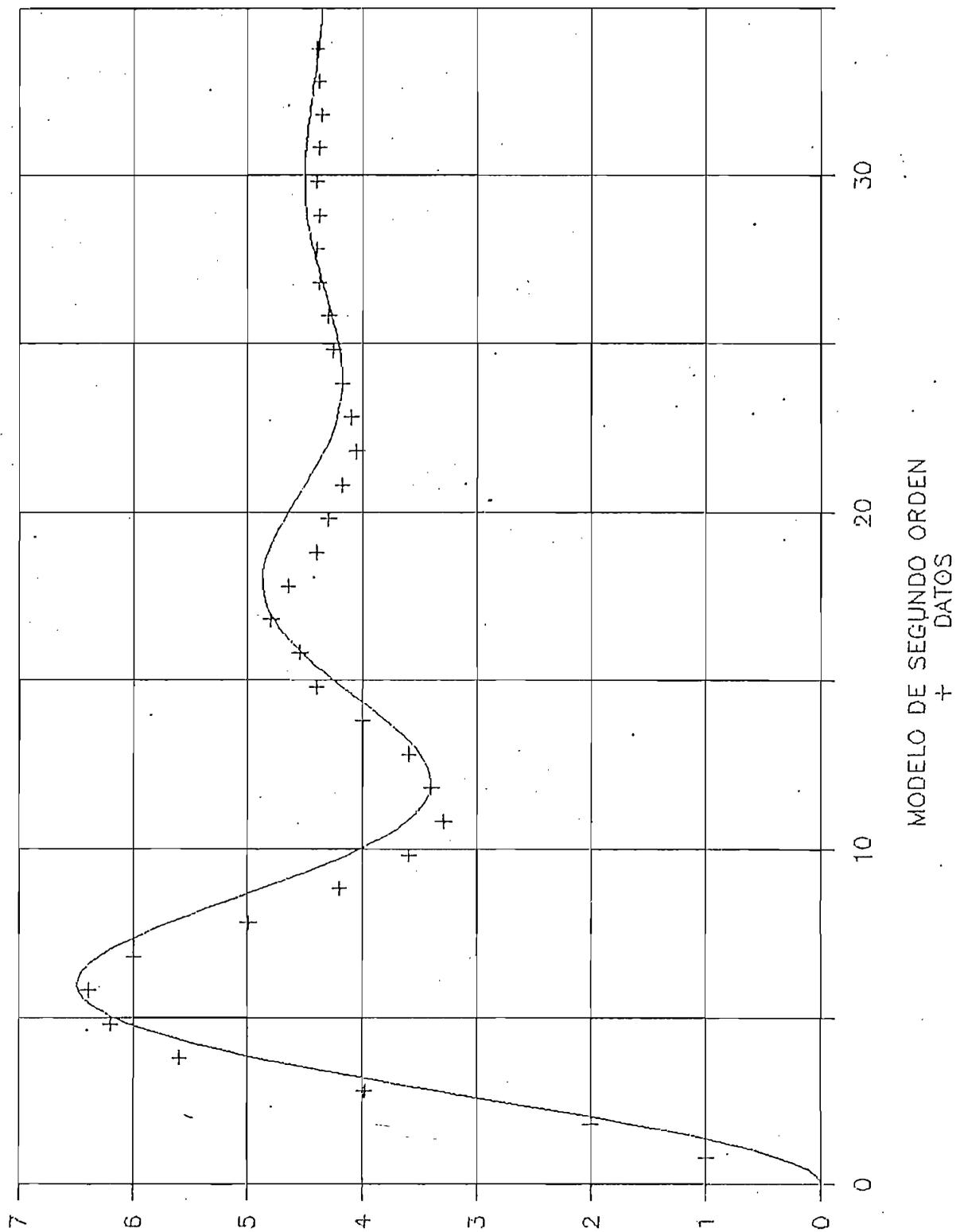
VALORES INICIALES CIRCUITO RLC  
+ DATOS

NOMBRE DEL ARCHIVO:FIG412

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	8.54399E-04
"PARAMETRO M"	3.43143E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.0000023981
"PRECISION EC"	0.0000025
"PRECISION EM"	0.00001

FIGURA 4.12



Reemplazando estos valores en la ecuación 4 se tiene la siguiente función de transferencia:

$$4.6 \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{3.43 \cdot 10^{-6} s^2 + 8.54 \cdot 10^{-4} s + 1}$$

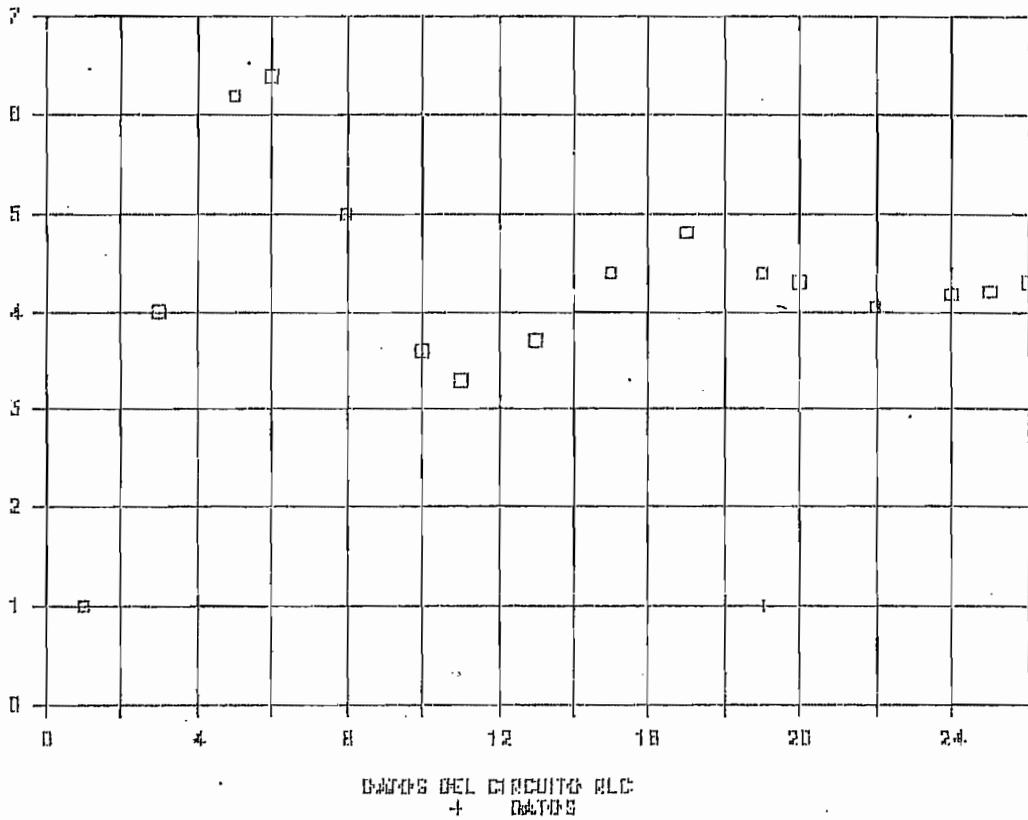
Se puede comparar la ecuación 4.6 que representa el modelo del sistema con la ecuación 4.5 que es la función de transferencia del sistema real. Se puede llegar a la conclusión que el modelo obtenido tiene bastante precisión.

Por medio de los gráficos obtenidos se puede comprobar la validez del modelo.

En este caso no sería correcto buscar un modelo de primer orden ya que los datos iniciales muestran la respuesta típica de un modelo de segundo orden.

Los datos ingresados en forma aleatoria se presentan en la FIGURA 4.13; luego de interpolar estos valores se tiene la FIGURA 4.14. Siguiendo el mismo proceso que en los ejemplos anteriores se encuentran los valores iniciales de los parámetros M,C,K:

FIGURA 4.13



X	Y
1	1
3	4
5	6.2
6	6.4
8	5
10	3.6
11	3.3
13	3.7
15	4.4
17	4.8
20	4.3
22	4.05
24	4.18
25	4.2
26	4.3
27	4.4

FIGURA 4.14

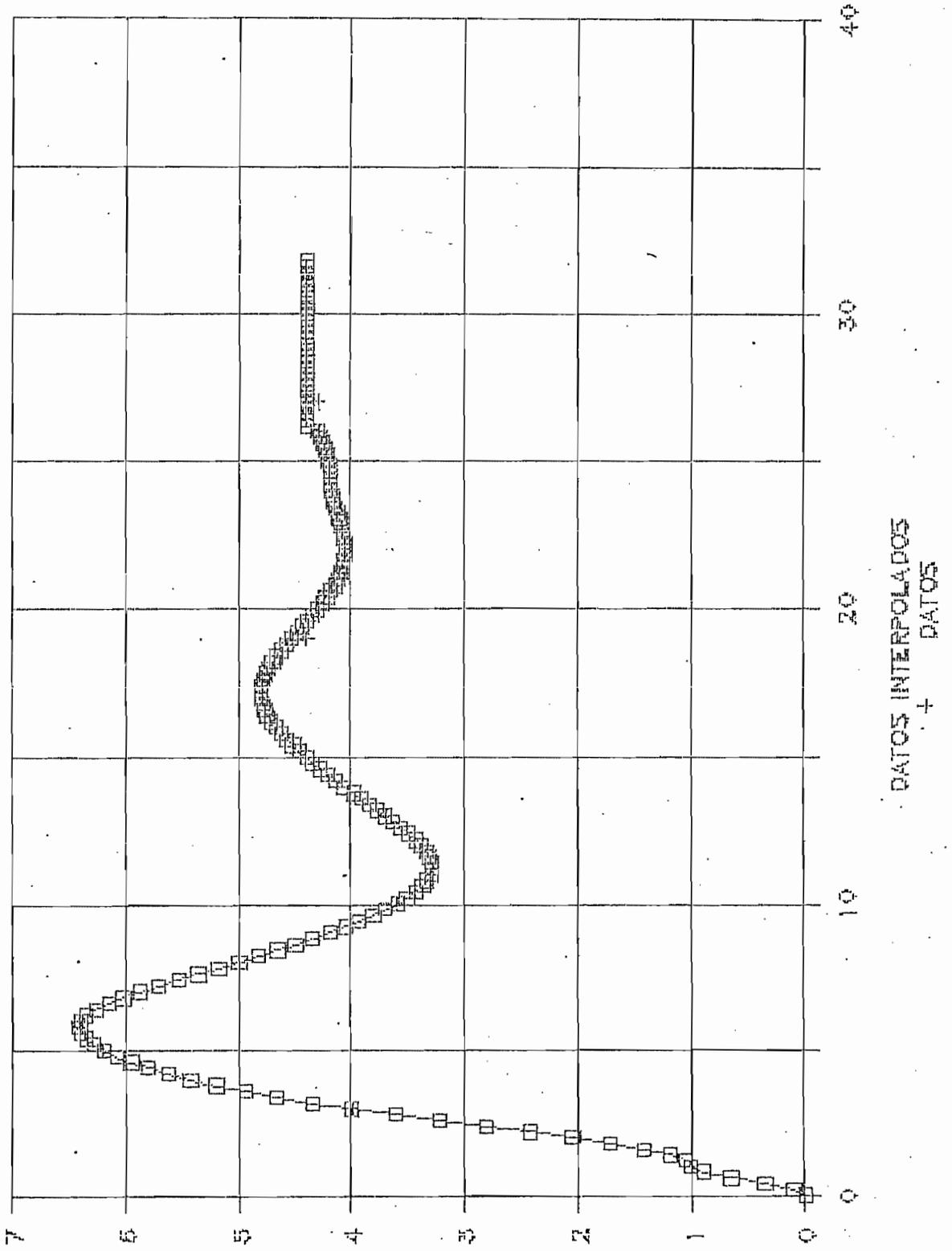


FIGURA 4.15

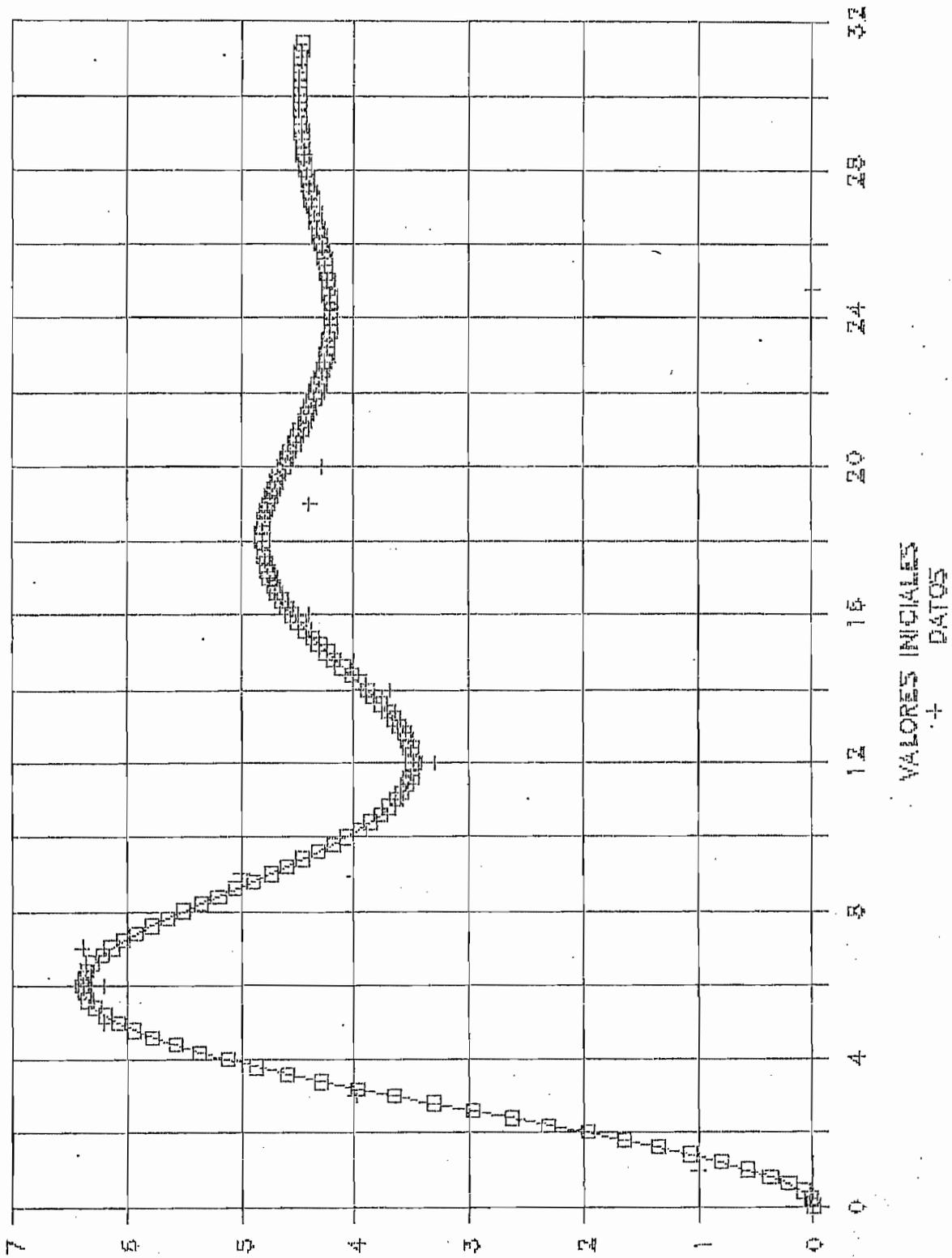
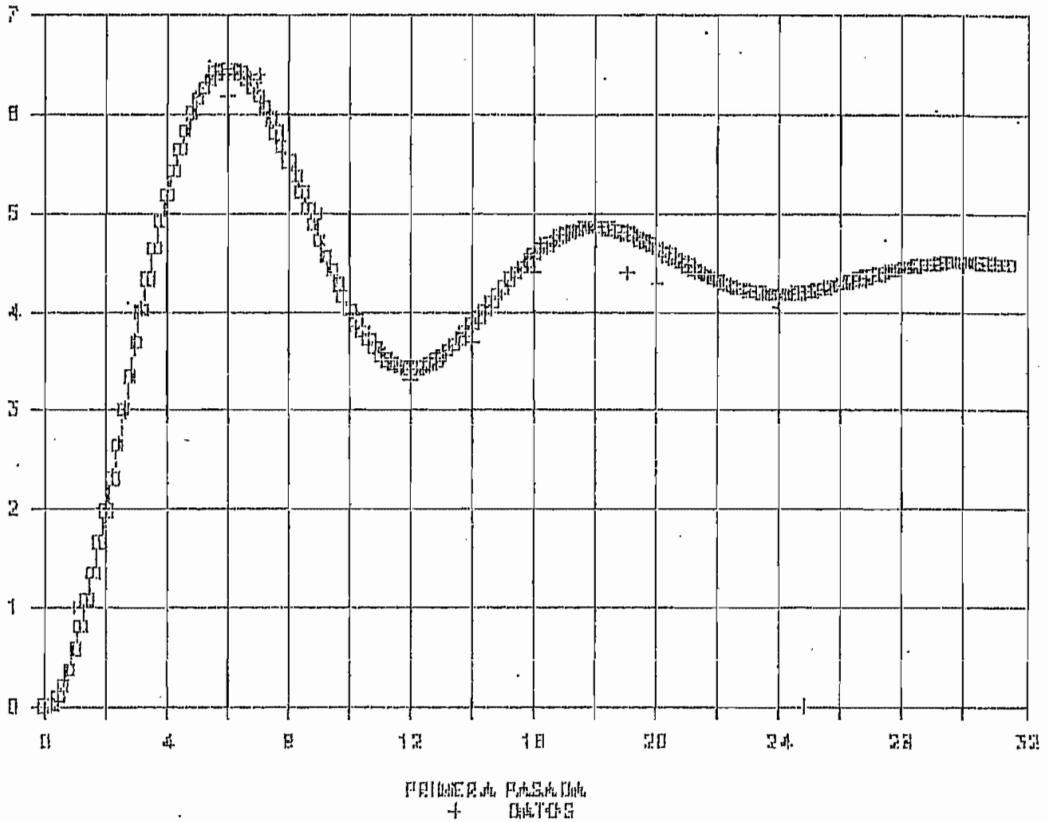


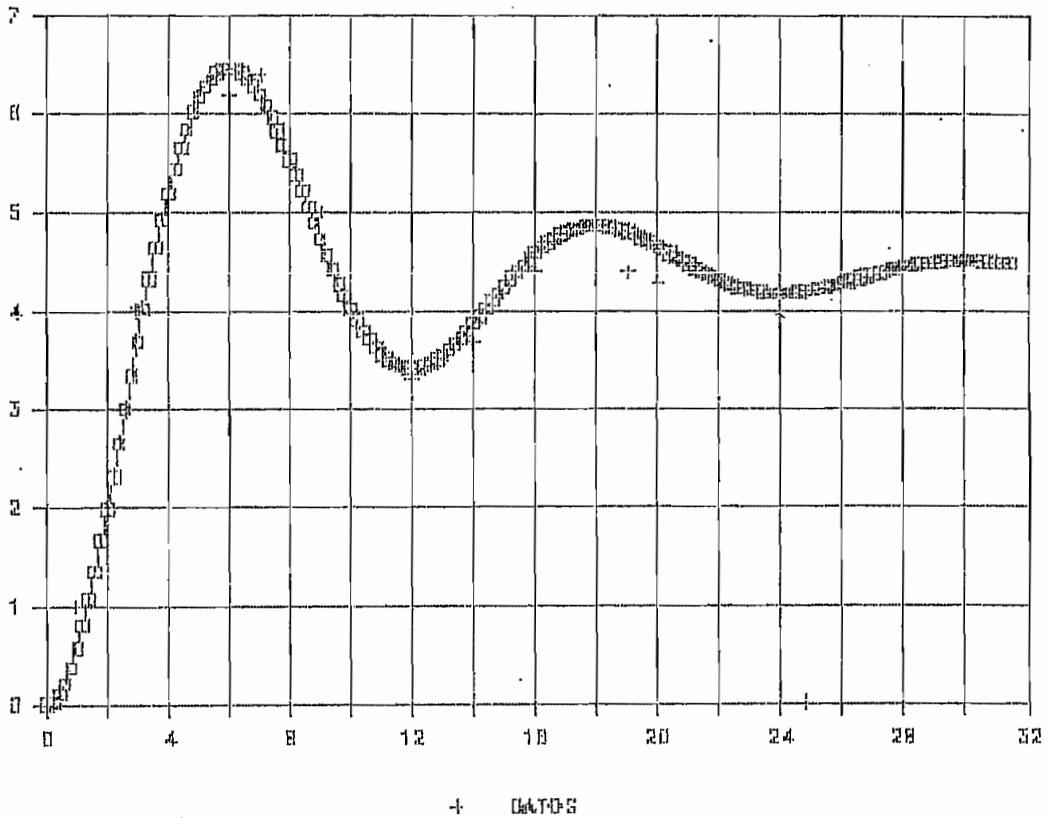
FIGURA 4.16



"PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	8.63396E-04
"PARAMETRO M"	3.43142E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.001832388
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.000001

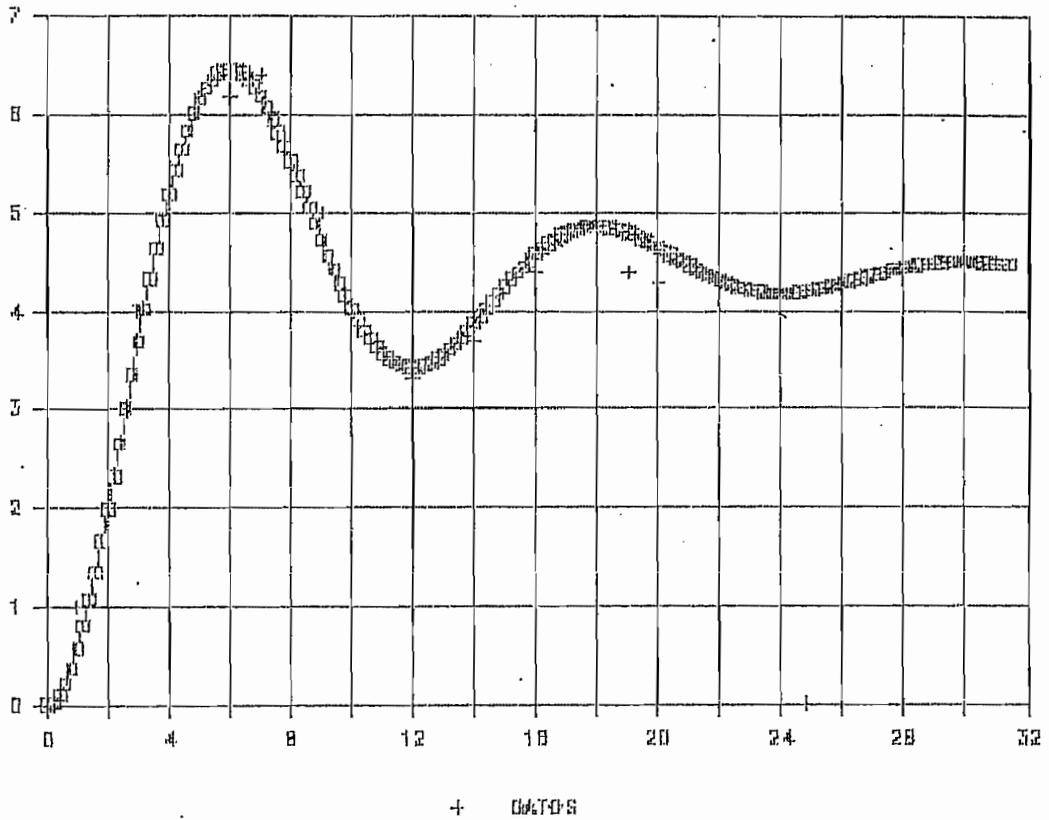
FIGURA 4.17



"PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	8.63396E-04
"PARAMETRO M"	3.43142E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.000018934
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.000001

FIGURA 4.18



"PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	8.63396E-04
"PARAMETRO M"	3.43141E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.000058395
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.000001

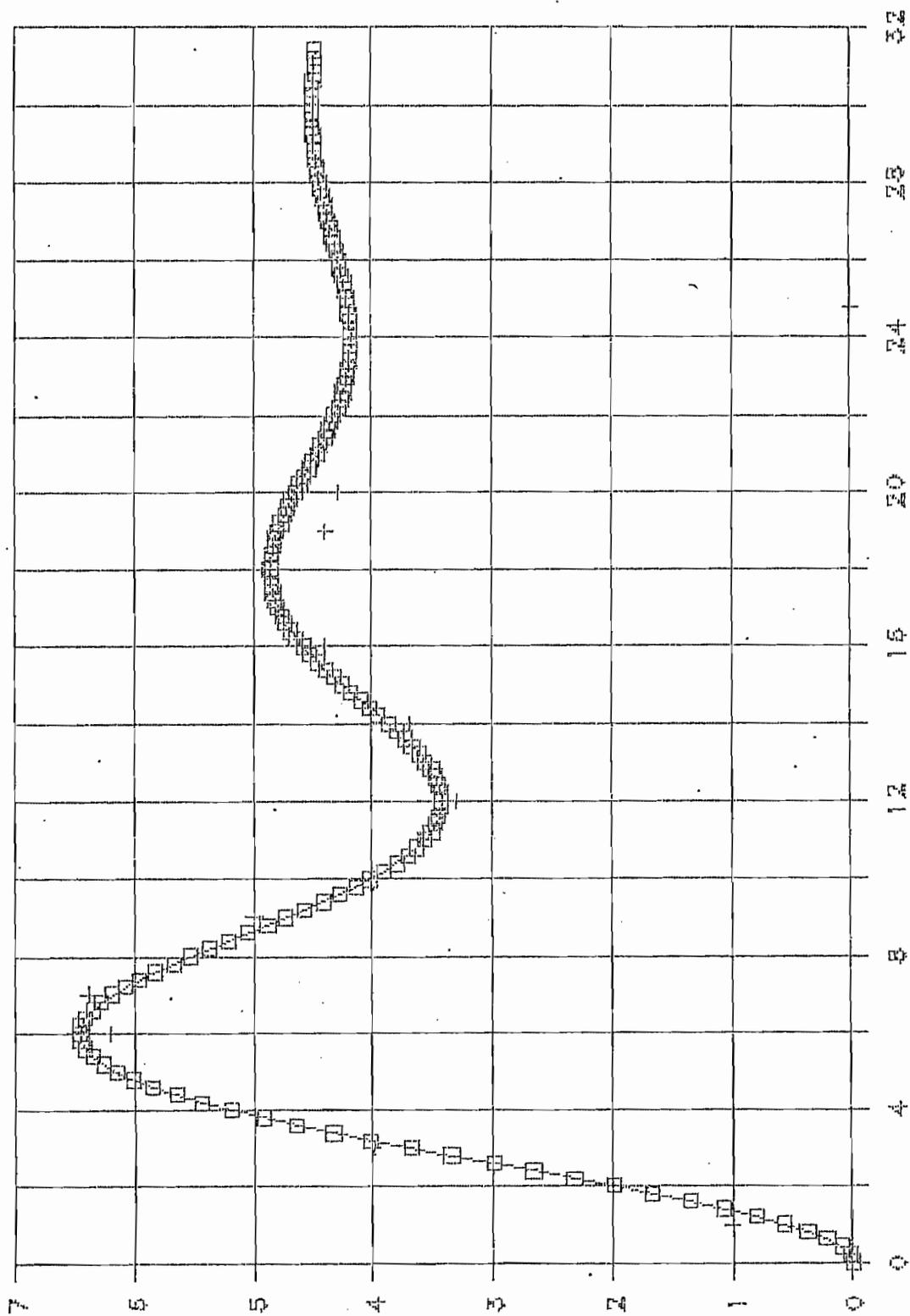
PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	9.01844E-04
"PARAMETRO M"	3.43142E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.00000028
"PRECISION EC"	0.0000001
"PRECISION EM"	0.000001

MODELO DE SEGUNDO ORDEN DEL CIRCUITO RLC

"PARAMETRO C"	8.63393E-04
"PARAMETRO M"	3.43140E-06
"PARAMETRO K"	0.9999999
"ERROR"	0.0000002742
"PRECISION EC"	0.0000005
"PRECISION EM"	0.000001

FIGURA 4.19



MODELO DEL CIRCUITO RLC  
+  
DATOS

Por último se obtendrá el modelo de segundo orden  
FIGURA 4.16

Cuando se ingresa los datos en forma aleatoria, se deberá tener en cuenta las variaciones críticas de la curva el momento que se ingresan los datos, por ejemplo, los puntos hasta que la curva comienza a estabilizarse, especialmente la coordenada donde se da el pico máximo, ya que esta sirve para calcular los valores iniciales de los parámetros.

Si se ingresan puntos al azar sin tomar en cuenta lo citado anteriormente, se encontrará un modelo erróneo, ya que fallarán desde los valores iniciales de los parámetros, el sistema posiblemente no será convergente.

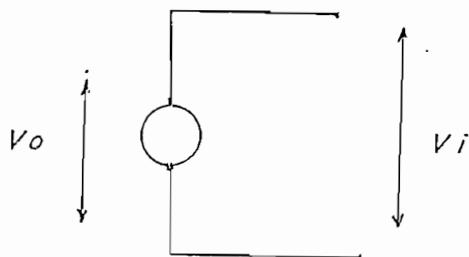
Se puede comprobar si los datos ingresados son convenientes con la curva de interpolación, ya que esta debe tener una forma similar a la función de entrada. Si al obtener la curva de interpolación, se aprecia una gran diferencia con el modelo, se deberán ingresar nuevamente los datos de una manera más continua.

Por tanto, se puede concluir que la precisión del modelo obtenido dependerá fundamentalmente de los datos de entrada.

### Ejemplo #3

#### Circuito de un Motor de Corriente Continua.-

diagrama.-

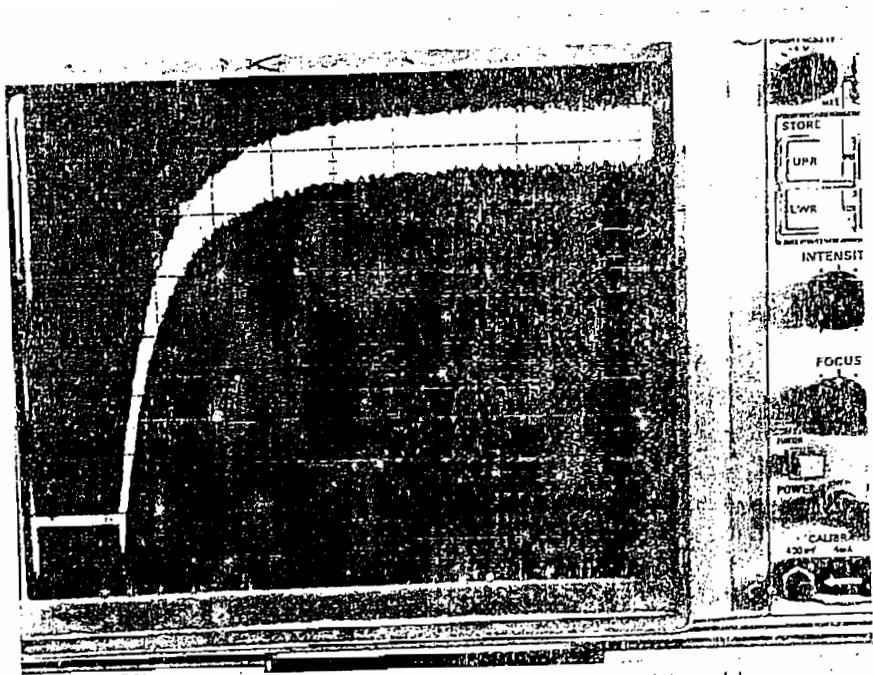


#### CIRCUITO MOTOR DC

La función obtenida en el laboratorio se presenta en la FOTO 4.3; de la que se puede obtener una tabla de valores para resolver el problema.

Los resultados del programa se presentan a continuación:

La FOTO 4.3 presenta la función que se obtuvo en el laboratorio, del voltaje de salida del motor de corriente continua en el momento del arranque.



X: 2s/div  
Y: 5v/div

FOTO 4.3

En la FIGURA 4.20 están los datos de entrada tomados de la FOTO 4.3.

En la FIGURA 4.21 se tiene la curva correspondiente a la valores obtenidos en la interpolación de los datos iniciales. La FIGURA 4.22 presenta los valores iniciales del modelo calculado en el programa para el modelo de segundo orden.

Los valores iniciales de los parámetros del modelo son:

$$M = 4.920263$$

$$C = 7.991889$$

$$K = 4$$

La FIGURA 4.23 representa el modelo de segundo orden del sistema.

El modelo de segundo orden es:

$$M = 4.924361$$

$$C = 7.165446$$

$$K = 4$$

La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{4.92s^2 + 7.16s + 4}$$

Para el motor de corriente continua se buscó un modelo de primer orden. La FIGURA 4.24 presenta la respuesta con los valores iniciales de los parámetros.

Los valores iniciales de los parámetros son:

$$L = 4$$

$$K = 4$$

En función de transferencia se tendrá:

$$G(s) = \frac{1}{4s + 4}$$

La FIGURA 4.25 representa la respuesta del modelo de primer orden del motor de corriente continua.

Los valores de los parámetros del modelo son:

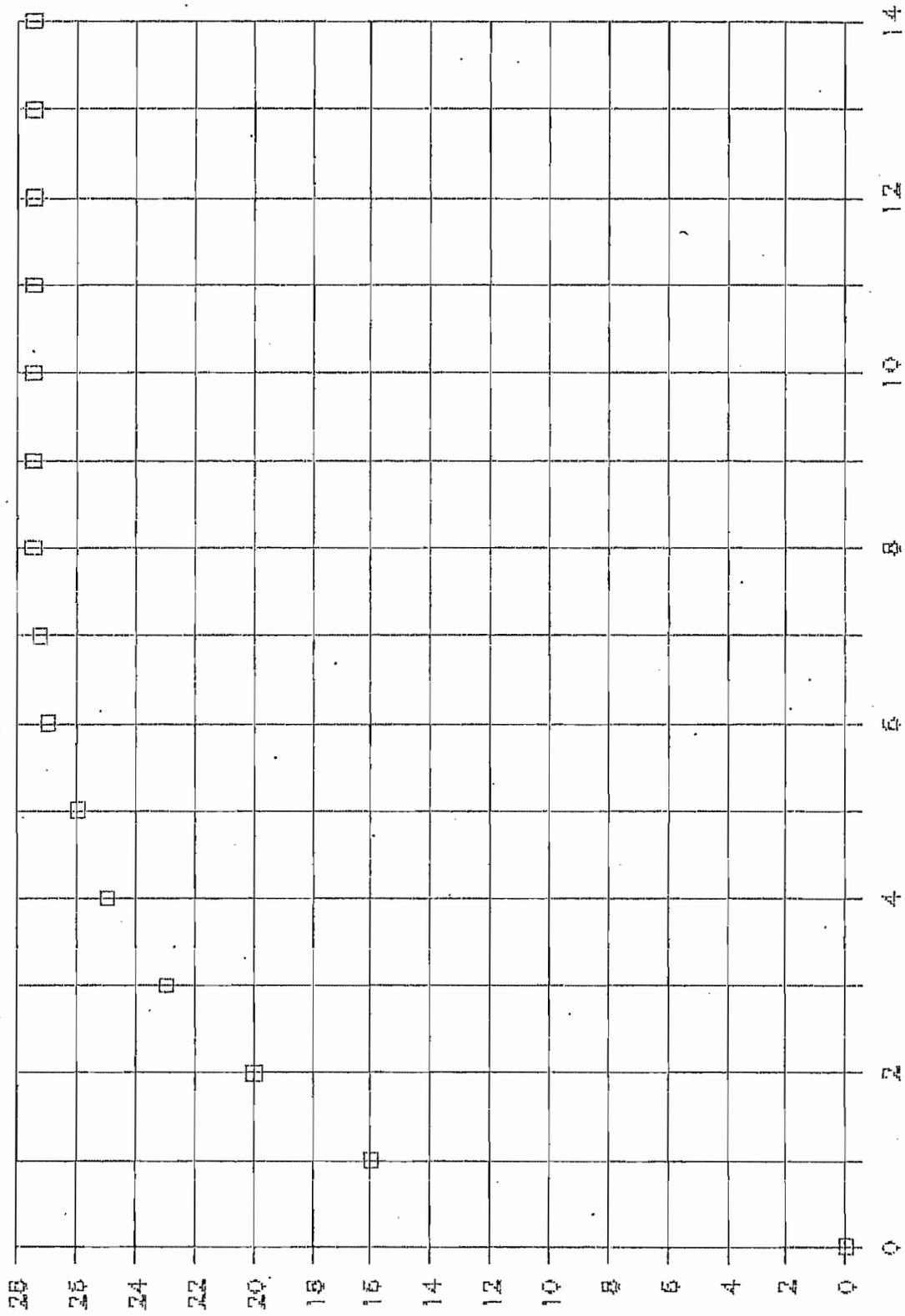
$$M = 4$$

$$C = 5.906143$$

En forma de función de transferencia se tendrá:

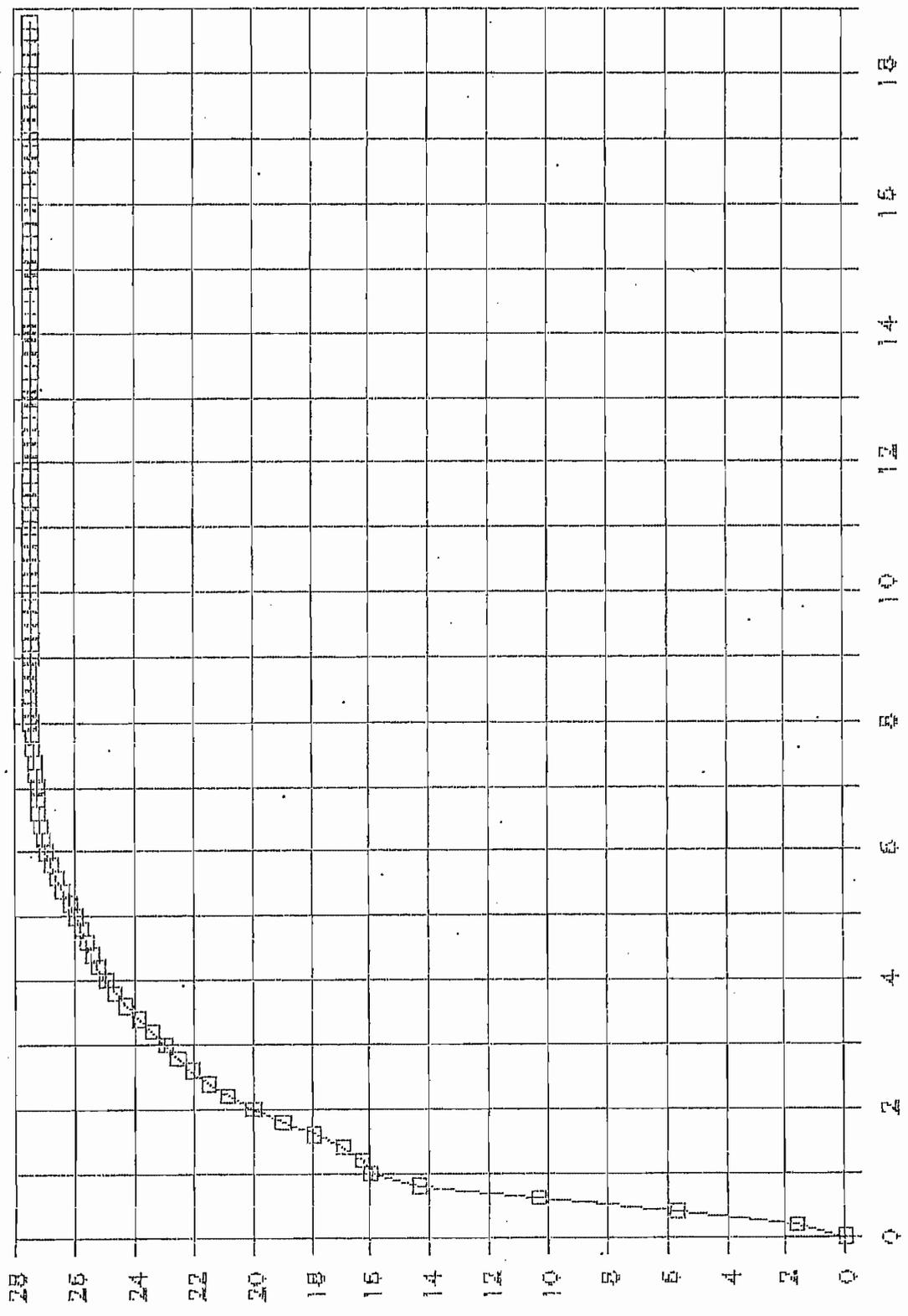
$$G(s) = \frac{1}{5.9s + 4}$$

FIGURA 4.20



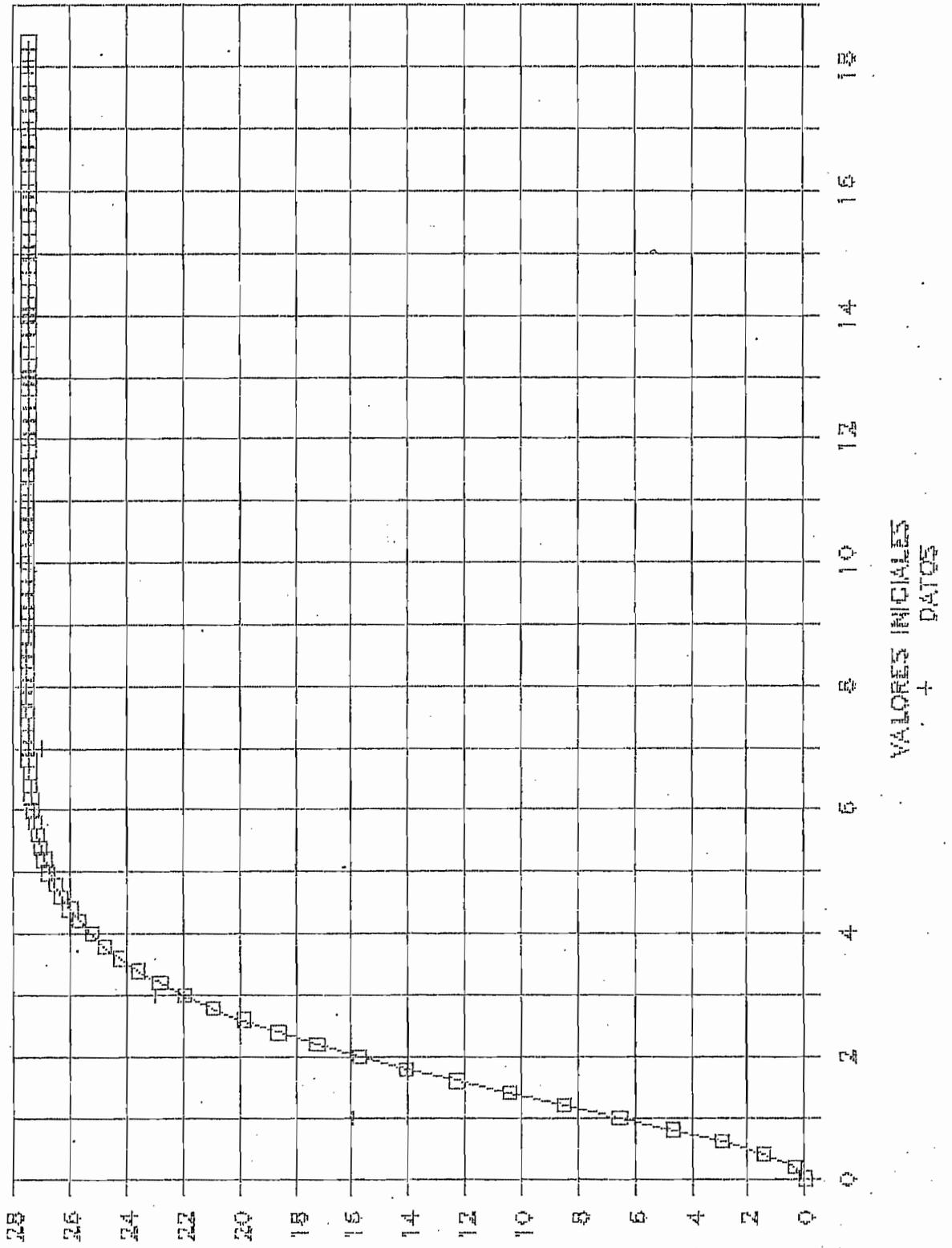
DATOS DE ENTRADA

FIGURA 4.21



INTERPOLACION DE DATOS  
+  
DATOS

FIGURA 4.22

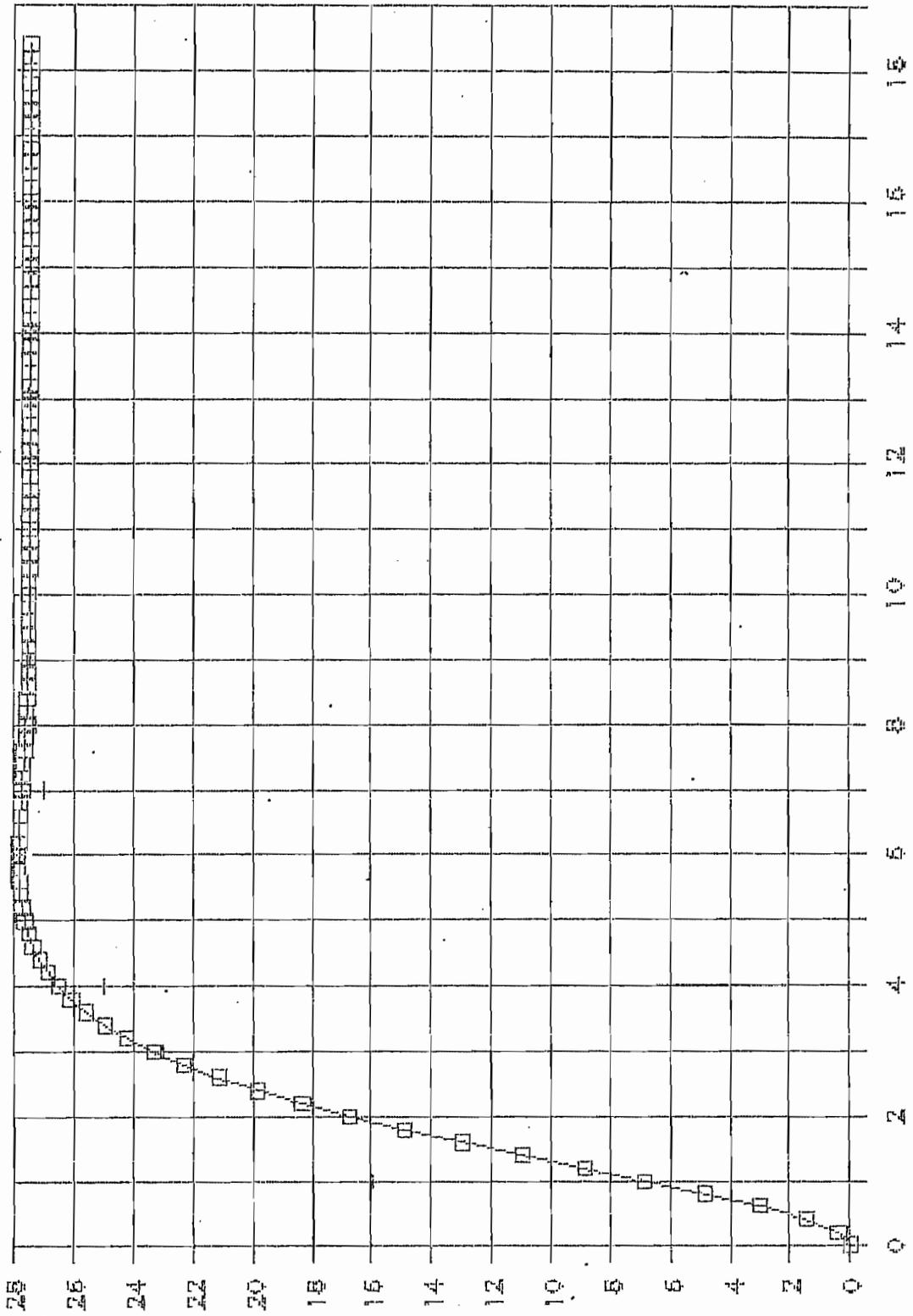


VALORES INICIALES PARA EL MODELO DE SEGUNDO ORDEN

"PARAMETRO C"	7.991889
"PARAMETRO M"	4.928263
"PARAMETRO K"	4
"ERROR"	0
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.000001

NUMBRE DE ARCHIVO: FIG422

FIGURA 4.23



MODELO DE SEGUNDO ORDEN DEL MOTOR  
+ DATOS

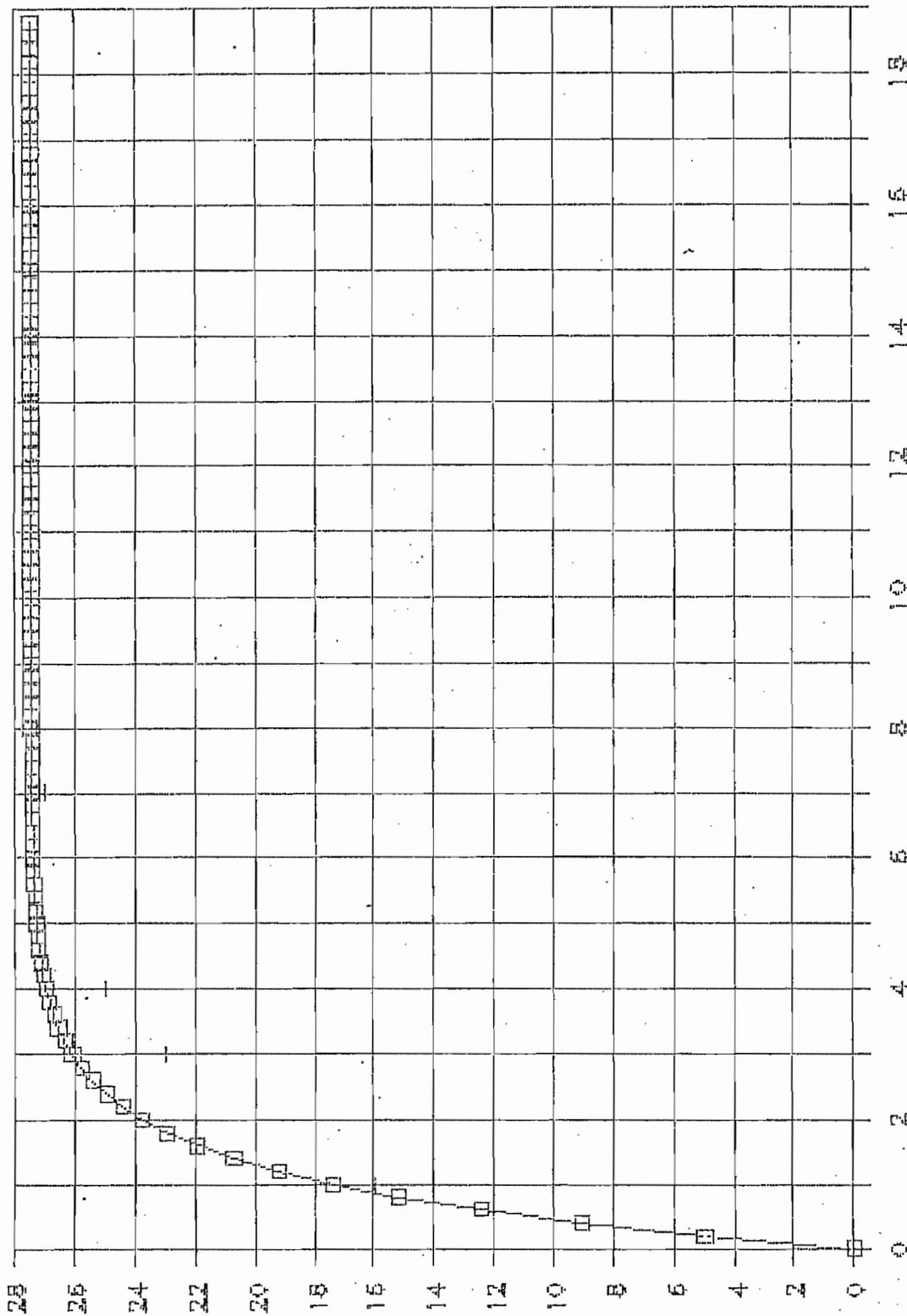
PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA

MODELO DE SEGUNDO ORDEN

"PARAMETRO C"	7.165446
"PARAMETRO M"	4.924361
"PARAMETRO K"	4
"ERROR"	0.000005
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.000001

NOMBRE DE ARCHIVO: FIG423

FIGURA 4.24



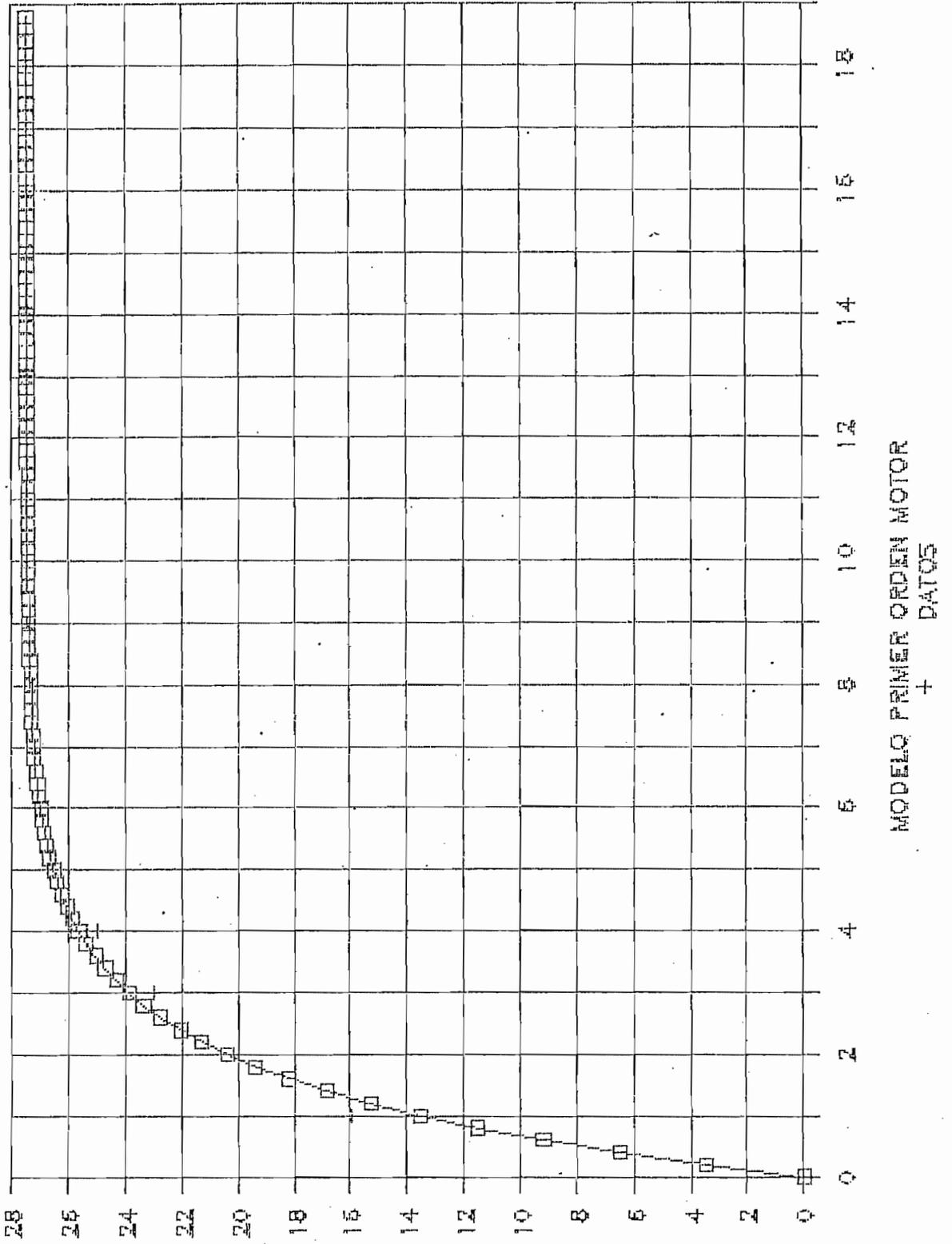
VALORES INICIALES PRIMER ORDEN  
+ DATOS

VALORES INICIALES PARA EL MODELO DE PRIMER ORDEN

"PARAMETRO C"	4
"PARAMETRO M"	
"PARAMETRO K"	4
"ERROR"	0.000005
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	

NUMBRE DE ARCHIVO: FIG424

FIGURA 4.25



MODELO DE PRIMER ORDEN

"PARAMETRO C" 5.906143

"PARAMETRO M" 0

"PARAMETRO K" 4

"ERROR" 0.000037

"PRECISION EC" 0.0001

"PRECISION EM"

NOMBRE DE ARCHIVO: FIG425

En este ejemplo se ha buscado el modelo matemático con una ecuación diferencial de primero y de segundo orden, a partir de los valores iniciales de los parámetros se calculo los valores de M,C,K del modelo matemático correspondiente. Como se ha citado anteriormente, al escoger el orden del modelo, se debe llegar a un compromiso entre exactitud y simplicidad; con una ecuación diferencial de primer orden tenemos un modelo bastante sencillo que representa la variación del voltaje del motor en el momento del arranque, esto es hasta alcanzar la velocidad nominal del motor.

Al tomar los datos experimentales en el laboratorio, la respuesta del sistema se vio afectada por un pequeño rizado de la onda, como se puede ver en la FOTO 4.3; para sacar la tabla de valores a ingresar en el programa digital se tomaron valores aproximados.

Con este ejemplo se desea dar una idea de las aplicaciones que se puede tener este programa, es decir, que se pueden tomar datos de diversos sistemas para encontrar su modelo matemático. Mientras más precisos sean los datos de entrada, mayor exactitud tendrá el modelo encontrado.

#### Ejemplo # 4

#### Ecuación de tercer orden.-

A continuación se va a presentar un ejemplo de un modelo de tercer orden, se parte de la función de transferencia de un modelo típico de tercer orden, y se encontrará un modelo de segundo orden, cuya respuesta sea muy similar a la original.

Tenemos la función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s^2 + 1s + 1)(s + 1)}$$

de la que se ha sacado la respuesta a una función paso unitario, utilizando los métodos de transformación conocidos, la respuesta es:

$$C(t) = 1 - 1.15e^{-0.5t} \text{sen } 0.866t - e^{-t}$$

El gráfico de esta respuesta está en la FIGURA 4.26, de la que se ha obtenido la siguiente tabla de valores, que serán los datos del ejemplo:

Tabla de Valores.-

t (mseg)	c(t)
0	0.0
1	0.098613
2	0.445384
3	0.816970
4	1.031214
5	1.081204
6	1.048413
7	1.006731
8	0.986949
9	0.987071
10	.9945691
11	1.000461
12	1.002350
13	1.001674
14	1.000449
15	0.999736

Estos datos se los ingresó al programa para buscar un modelo de segundo orden cuya respuesta sea similar a la de este sistema.

En la FIGURA 4.27 se puede observar la curva de los valores interpolados. Luego en la FIGURA 4.28 se tiene la respuesta con valores iniciales.

Los valores iniciales son:

$$M = 1.545725E-6$$

$$C = 1.552393E-3$$

$$K = 1$$

En la FIGURA 4.29 se encuentra el modelo segundo orden que identifica al sistema de tercer orden de este ejemplo.

Los valores del modelo de segundo orden son:

$$M = 1.545725E-6$$

$$C = 1.747828E-3$$

$$K = 1$$

Si se analiza los gráficos obtenidos, es decir, la FIGURA 4.26 de los datos del problema, con la FIGURA 4.29 del modelo de segundo orden, se puede ver que son muy similares, esto es que la ecuación de segundo orden da una respuesta similar al sistema de tercer orden.

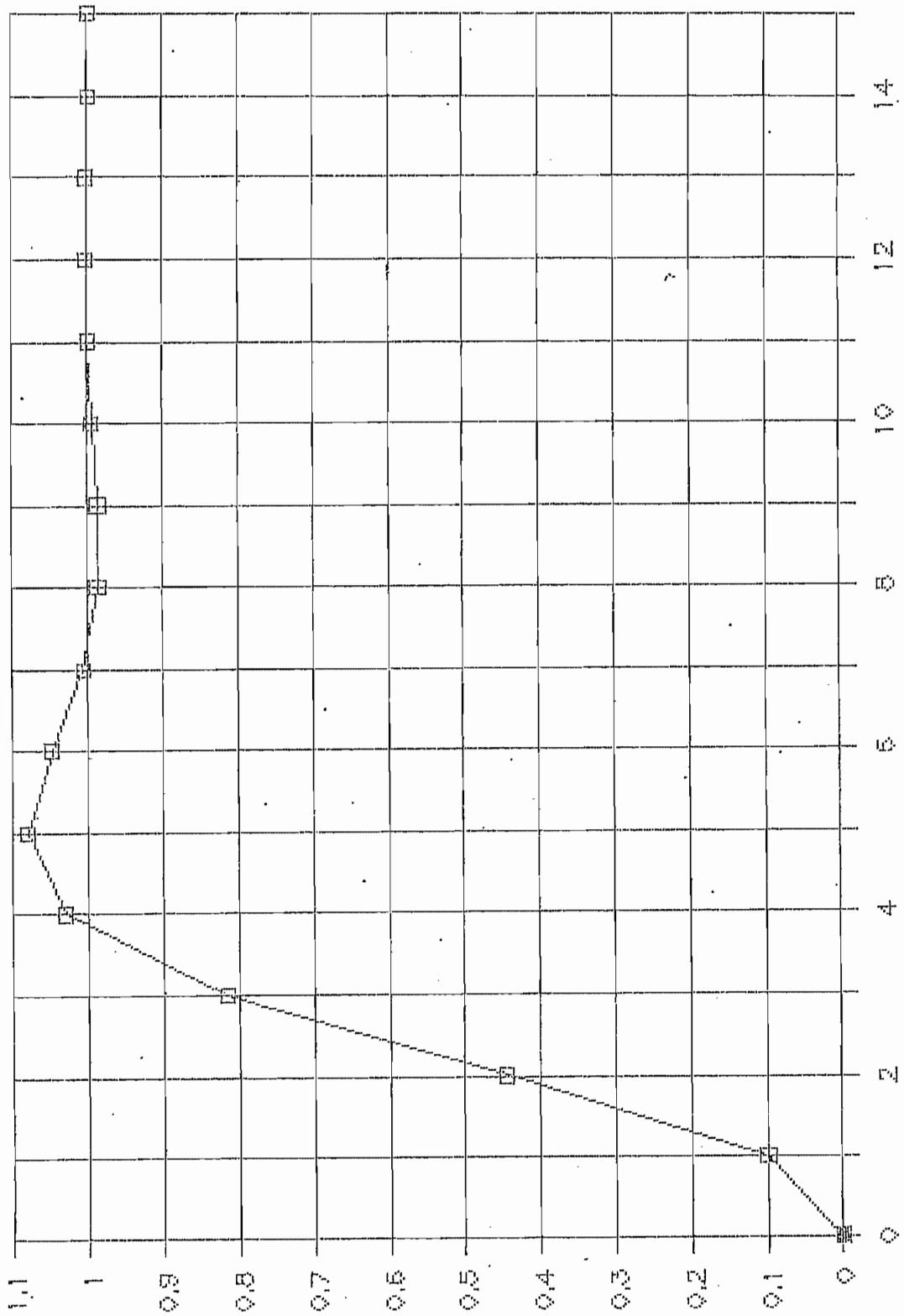
Se debe tener en cuenta que el modelo encontrado es únicamente una aproximación del sistema objeto, ya que de ningún modo el sistema de tercer orden tiene polos que puedan ser despreciados para reducirlo a segundo orden,

pero la respuesta del ambos sistema a una entrada paso unitaria, en este caso, es semejante.

Con esto se podría decir que el comportamiento de los dos sistemas sería igual, manteniendo siempre las mismas condiciones.

Esto no quiere decir que un sistema de tercer orden es exactamente igual a uno de segundo, pero si se puede afirmar que se tendrá una buena aproximación con el modelo encontrado.

FIGURA 4.26



EQUACION DE TERCER ORDEN

FIGURA 4.27

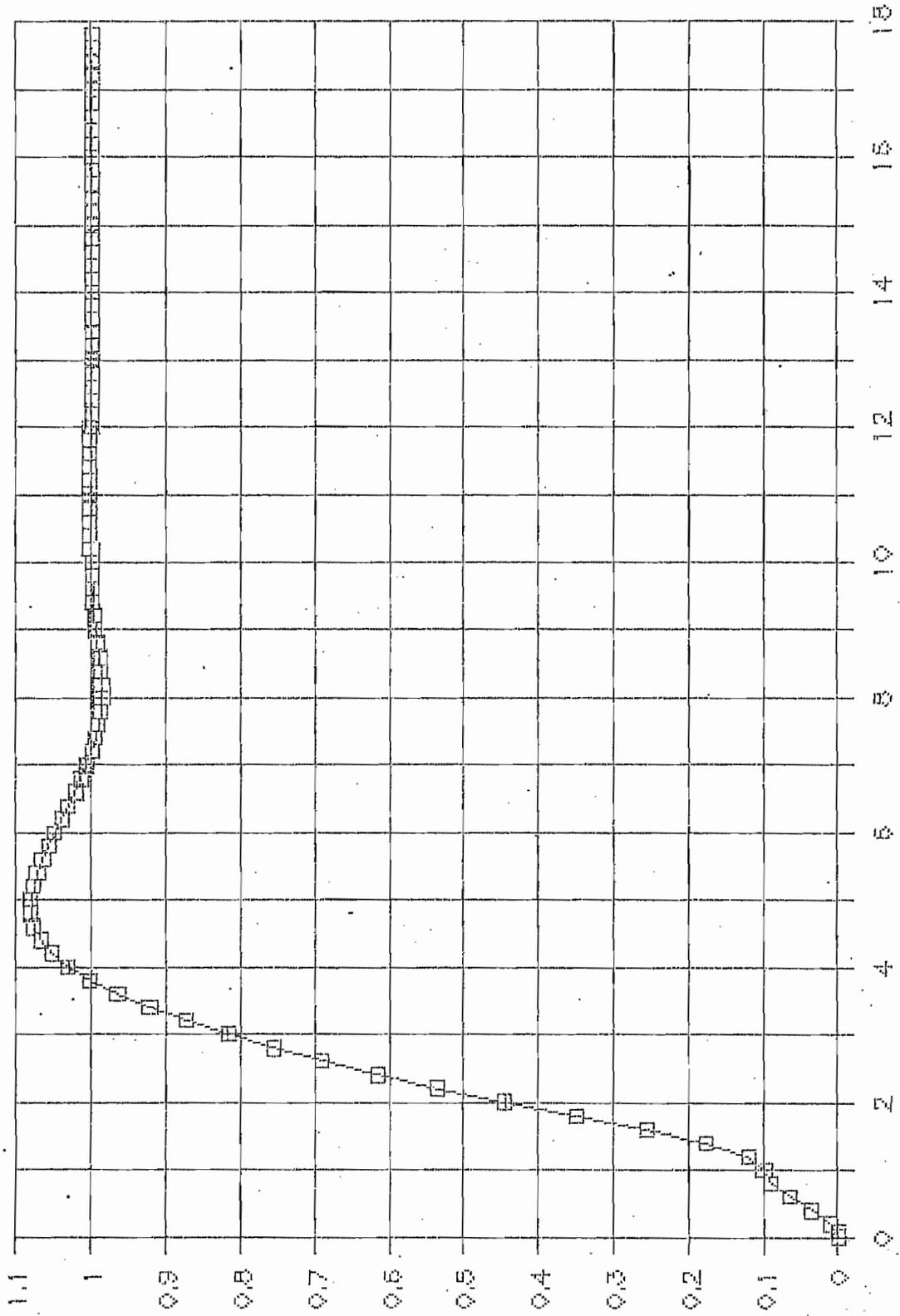
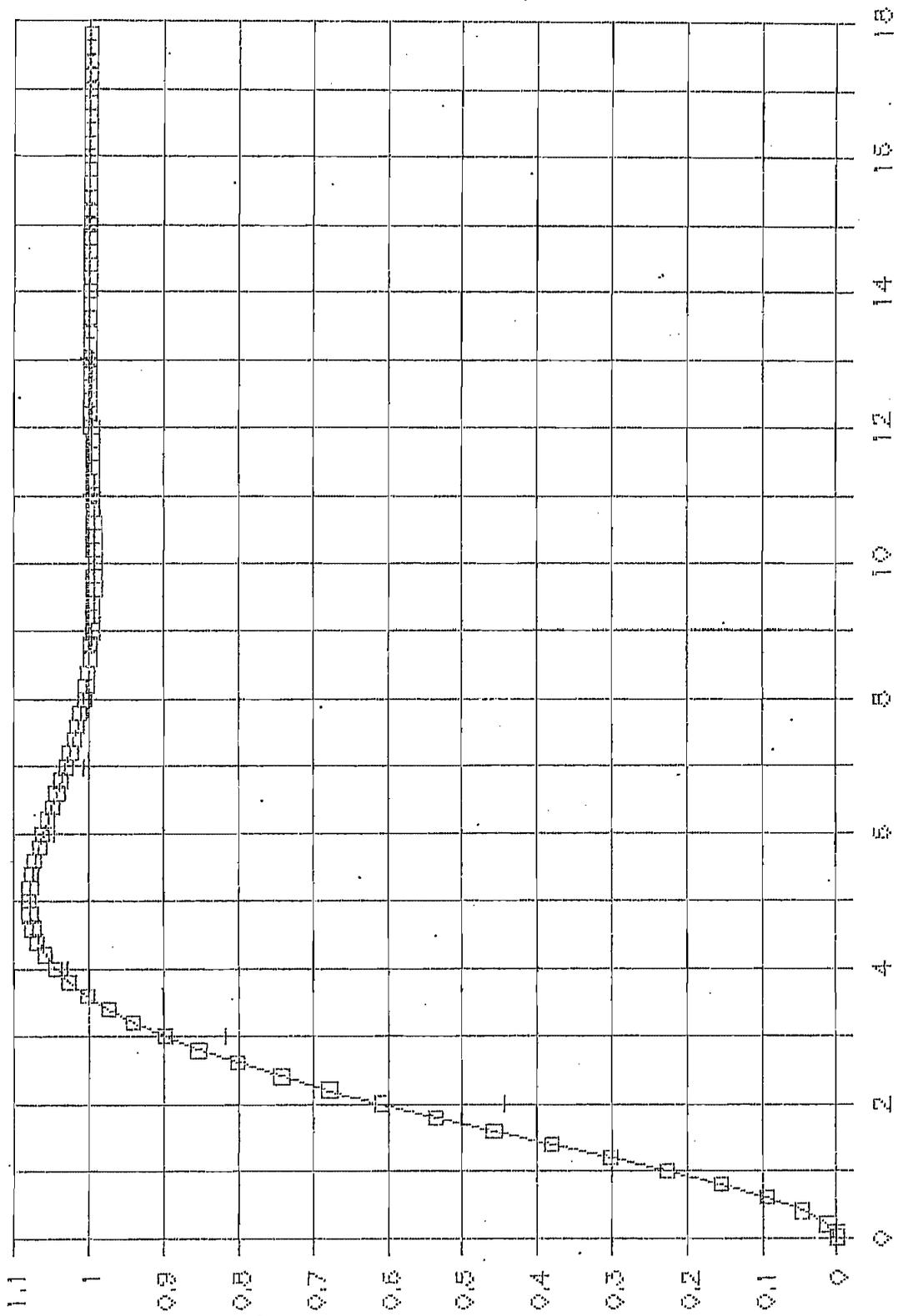
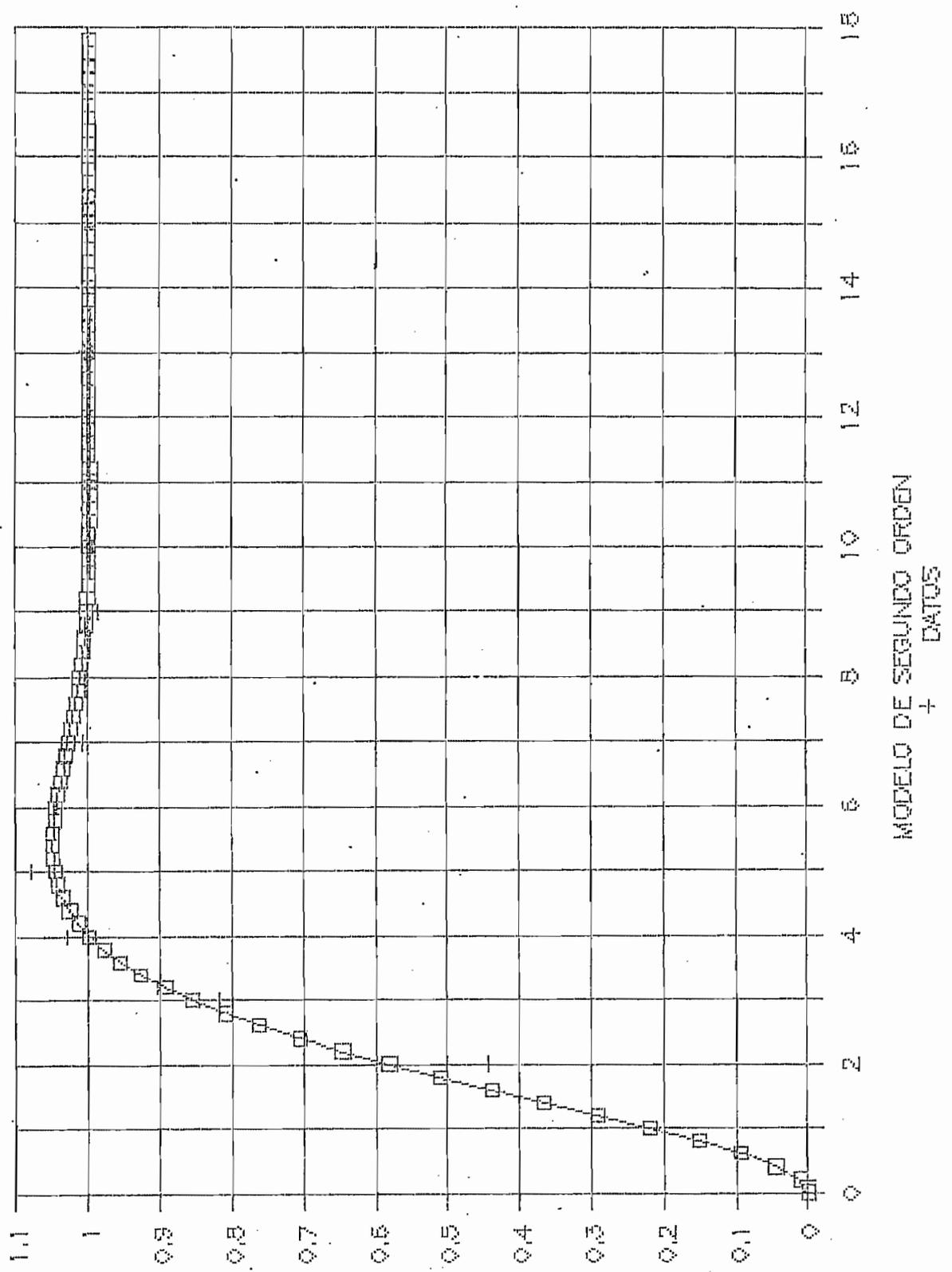


FIGURA 4.28



VALORES INICIALES EG. TERCER ORDEN  
+ DATOS

FIGURA 4.29



ARCHIVO:TERINI.PRN

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	1.55239E-03
"PARAMETRO M"	1.54572E-06
"PARAMETRO K"	1
"ERROR"	0
"PRECISION EC"	0.0001
"PRECISION EM"	0.00001

ARCHIVO:TERMOD.PRN

PARAMETROS Y PRECISION DEL SISTEMA"

"PARAMETRO C"	1.71870E-03
"PARAMETRO M"	1.54686E-06
"PARAMETRO K"	1
"ERROR"	0.0000014867
"PRECISION EC"	0.0000025
"PRECISION EM"	0.00001

#### 4.2 CONCLUSIONES.-

De los ejemplos citados anteriormente, se ve la importancia que tiene el escoger el tipo de modelo para cada uno de los sistemas; en el ejemplo #1, se ve claramente que el tipo de modelo mas apropiado es uno de segundo orden, ya que la respuesta real tiene la forma típica de una ecuación de segundo orden. En el caso del ejemplo #2, se ve que tanto el modelo de primer orden como el de segundo satisfacen las condiciones del sistema. Pero en el tercer ejemplo se ve que el modelo de primer orden se ajusta de mejor forma a la curva original.

Se ha visto que con el método utilizado es muy sencillo y además es posible encontrar modelos matemáticos simples de diversos sistemas físicos.

Los sistemas físicos pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ya sea de primero o de segundo orden. Con la interfase adecuada se puede acoplar un modelo o sistema físico para la determinación de sus parámetros respectivos, esta etapa esta fuera del alcance de este trabajo, pero podría ser realizado en estudios posteriores teniendo como base el trabajo realizado en esta Tesis.

## APENDICE A

### MANUAL DE UTILIZACION DEL PROGRAMA

- INTRODUCCION
- CONFIGURACION NECESARIA
- FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA

## **INTRODUCCION.-**

Este programa digital para la identificación de parámetros por el método de los mínimos cuadrados, permite encontrar modelos matemáticos aproximados de primero y de segundo orden, según las condiciones del problema y de las necesidades del usuario en cuanto a simplicidad y exactitud.

Para un conocimiento de los algoritmos utilizados para la realización del programa se recomienda referirse a los capítulos uno y dos de esta Tesis.

El programa está realizado en lenguaje BASIC, y se utiliza las facilidades del programa LOTUS para la realización de gráficos.

Se recomienda que antes de utilizar el programa se revise la parte teórica de la TESIS.

## **CONFIGURACION.-**

Para poder correr este programa es necesario ciertos requerimientos especiales tanto de hardware como de software que se detallarán a continuación.

### **Hardware.-**

El programa fue desarrollado en un computador IBM XT de 512 KB. y disco fijo de 20MB. Se lo puede correr en

un computador personal IBM o compatible con un mínimo de 256 KB, esta cantidad de memoria es necesaria debido a que se utilizan las facilidades del programa LOTUS versión 2, para la realización de los gráficos. El computador podrá tener un monitor color gráficos, ya que en el programa digital se utiliza tanto los gráficos como las opciones de color que trae consigo el lenguaje basic; también se da la posibilidad de utilizar un monitor monocromático pero con la posibilidad de realizar gráficos. El programa puede trabajar tanto en diskettes como puede ser instalado en un disco fijo.

Este manual de utilización incluye dos diskettes, el diskette #1, es utilizado si la configuración del computador es con monitor color; caso contrario, si se tiene un monitor monocromático con capacidad para gráficos se utilizará el diskette #2.

#### **Software.-**

En cuanto al software, es necesario disponer del programa LOTUS versión 2. Se debe disponer además de la versión del DOS 3.2 que tiene el programa BASICA 3.0.

Para el programa LOTUS se lo accesa desde el programa principal en BASIC mediante la función SHELL, que permite salir momentaneamente del programa principal hacia cualquier otro programa, sin perder la información del programa principal.

## Iniciación del Programa.-

Como se ha explicado detalladamente en el CAPITULO III de la tesis el programa consta de varias partes para el procesamiento de los datos y luego para la obtención del modelo.

A continuación se explicará en forma detallada el proceso para cargar el programa en el computador y luego la utilización del mismo.

### a.- Grabar el programa en disco fijo.-

Se debe seguir los siguientes pasos:

- crear un subdirectorío en la unidad C

```
C> MD MINIMOS
```

```
C> CD MINIMOS
```

- pasar a la unidad A donde estará en diskette del programa correspondiente a la configuración del computador que se este utilizando

```
C> A:
```

```
A>
```

- copiar el programa en el subdirectorío MINIMOS

```
A>COPY *.* C:\MINIMOS
```

- crear en la unidad C un archivo .BAT para correr el programa:

C> CD\

C> COPY CON IDENT.BAT

- CD\MINIMOS

- MINIMO^C

- En la unidad C tendrá un archivo BAT que permite ejecutar el programa en forma directa.

Para arrancar el programa desde la unidad C unicamente tecleamos la palabra IDENT.

**b.-Para trabajar con la unidad de drive.-**

Si se trabaja directamente en el drive, se debe iniciar el sistema, es decir encender el computador, con el diskette correspondiente a la configuración, en la unidad A. La ejecución del programa será automáticamente.

**Funcionamiento del Programa.-**

Una vez que se ha cargado el programa en cualquiera de las opciones anteriores se tendrá:

1.- Se mostrará la siguiente pantalla de presentación de la Tesis, en la que se indica el nombre de la tesis y el del autor.

Como se la puede ver a continuación:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

IDENTIFICACION DE PARAMETROS POR EL METODO DE LOS  
MINIMOS CUADRADOS PARA MODELOS DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN

AMPARO MENA ROSALES

2.- Luego se presentará una pantalla con el MENU DE

TECLAS que pide escoger la opción a seguirse:

F8 INSTRUCCIONES GENERALES, se da una brevísimas explicación del programa.

F9 MENU, lleva nuevamente a la misma pantalla de MENU

F10 INICIO DEL PROGRAMA, inicia el funcionamiento del programa.

## MENU DE TECLAS

PARA INICIAR EL PROGRAMA

F8 INSTRUCCIONES GENERALES

F9 MENU DE TECLAS

F10 INICIO DEL PROGRAMA

ESCOJA UNA OPCION

Si se presiona F10 se entra a la ejecución del programa y se tiene los siguientes MENUS:

Ingreso de Datos

El programa presenta varias opciones:

```
-----  
: DESEA INGRESAR LOS DATOS EN UN INTERVALO DE  
: TIEMPO FIJO  
: 1.- SI  
: 2.- NO  
: ESCOJA UNA DE LAS OCIONES  
:-----
```

Si se escoje la segunda opción se pasa directamente al ingreso de datos en una forma aleatoria. Con la primera opción se pasa a otro menú:

```
EL INTERVALO DE INGRESO DE DATOS ES 1

1.- DESEA ESCOGER EL INTERVALO DE INGRESO DE DATOS

2.- USAR EL PREFIJADO EN EL PROGRAMA

ESCOJA UNA OPCION
```

Si se escoge la primera opción se tendrá la siguiente opción:

```
SE RECOMIENDA QUE EL INTERVALO MAXIMO SEA 1 PARA
PARA EL ADECUADO FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA

INGRESAR EL INTERVALO
```

Luego se pasará al ingreso de datos según las opciones que se hayan escogido:

EL NUMERO MINIMO DE COORDENADAS A INGRESAR ES 15.

INGRESE EL NUMERO DE COORDENADAS

Luego se pide al usuario que escoja las unidades en las que estàn los datos de entrada:

EL TIEMPO VIENE EN :

1.- SEGUNDOS

2.- MILISEGUNDOS

ESCOJA UNA OPCION

En este momento se deberán ingresar los datos de entrada del ejemplo que se desee encontrar el modelo.

Se permite al usuario escoger la precisión con la que se desea que se realizen los cálculos:

```
-----  
: LA PRECISION DEL CALCULO ES MENOR QUE EL 0.1%  
: DESEA TENER MAYOR PRECISION?  
: 1.- SI  
: 2.- NO  
:-----
```

Una vez que ha terminado esta subrutina, empieza el proceso de búsqueda del modelo, se irá identificando parámetro por parámetro como se explica detalladamente en el CAPITULO III de la tesis.

El proceso en el programa es un poco largo, se pide al usuario que siga las indicaciones que aparecen el transcurso del programa como el caso de presionar una tecla para continuar, esto se da en el momento de la realización de los gráficos, en el que se deja momentaneamente el programa principal para entrar al programa LOTUS para la realización de los gráficos.

Cada vez que se produce un cálculo de parámetros, se muestra en pantalla estos valores. Cuando se han encon-

trado los valores que se ajustan al modelo el programa habrá terminado.

Si el programa no converge con la precisión escogida se pide al usuario que escoja una nueva precisión para realizar los cálculos del modelo.

Se tiene el siguiente menú:

```
-----  
: HA SOBREPASADO EL NUMERO DE ITERACIONES :  
: DESEA ENCONTRAR EL MODELO CON OTRA PRECISION :  
: 1.- SI :  
: 2.- NO :  
: ESCOJA UNA OPCION :  
:-----
```

Si se escoge una nueva precisión se deberá correr nuevamente todo el programa, es decir, que se deberán ingresar nuevamente los datos.

Existen palabras reservadas dentro del programa que no podrá ser utilizadas como nombre de archivo de datos en el Programa Lotus estas son:

VALORINI, DATOS, INT, MOD, ALEAT, INTER, PARAME, VALOR, DIAG.

El nombre de archivo que se escoja al inicio del programa servirá como nombre de archivo de los datos como del gráfico correspondiente a ese momento; el nombre de archivo aparecerá al inicio de la hoja de datos.

## APENDICE B

- IMPRESION DE ARCHIVOS DE DATOS
- IMPRESION DE GRAFICOS

## IMPRESION DE ARCHIVOS DE DATOS

Los archivos de datos pueden ser impresos dentro del programa en dos ocasiones, una cuando se calculan los valores, y otra cuando se ingresa a LOTUS para realizar los gráficos; desde LOTUS se puede mandar la impresión directamente a la impresora o mandarlo a un archivo para imprimirlo posteriormente.

Los archivos de impresión tienen siempre la terminación .PRN. Se los puede imprimir desde el sistema operativo DOS, con el comando PRINT. El formato es el siguiente:

En el prompt A> se escribe:

```
A>          PRINT <nombre del archivo>
```

y luego presionamos la tecla enter.

En la hoja saldrá en primer lugar el nombre del archivo que se está imprimiendo, y luego los valores.

El comando PRINT es uno de los archivos del sistema operativo DOS que permite la impresión de archivos con terminación .PRN. creados en el programa LOTUS.

Si se ha escogido la opción de imprimir directamente desde LOTUS al impresor, no se creará el archivo de impresión en el disco o diskette que se este utilizando.

## IMPRESION DE GRAFICOS

Para imprimir los gráficos se utilizará el programa PRINTGRAH, es la única forma que se podrá obtener los gráficos impresos ya que estos fueron creados en LOTUS.

PRINTGRAH es un programa auxiliar que permite la impresión de gráficos. Para iniciarlo se debe seguir el siguiente proceso:

1.- En el drive A se introduce el diskette del programa que tiene como nombre PROGRAMA,

2.- En el prompt A> escribimos:

```
A>PGRAPH
```

3.- Se presenta un MENU , para seleccionar un comando presionar la primera letra del nombre del comando, se escoje la opción IMAGE SELECT, que permite escojer los gráficos a imprimirse.

4.- Aparece en la pantalla la lista de gráficos, para seleccionar, se posiciona el cursor sobre el archivo correspondiente y se presiona la barra espaciadora, si se desea ver el gráfico seleccionado se presiona la tecla de función F10, para regresar se presiona la tecla ESC.

5.- Para quitar la marca de selección, se posiciona el cursor sobre ese archivo y se presiona nuevamente la barra espaciadora.

6.- Los gráficos pueden ser realizados en dos tamaños; FULL o HALF, para escoger el seleccionamos del menu el

comando SETTINGS, dentro de este IMAGE, luego SIZE y aquí se encuentran las opciones de FULL o HALF, se escogerá la que se desee. Para salir QUIT.

7.- Los archivos a imprimirse deberán estar dentro del subdirectorío DATOS1 en el diskette etiquetado DATOS.

8.- Se deberá hacer el cambio de diskettes en el drive cada vez que el programa lo solicite.

9.- Una vez seleccionado el archivo y el tamaño del gráfico se selecciona la opción ALIGN y luego GO y se imprimirá el gráfico en el impresor. Si se desea imprimir el gráfico en un plotter referirse al literal # 11.

10.- Para terminar el programa de impresión seleccionar la opción EXIT, luego se confirma con YES.

11.- Si la impresión se la va a realizar en un plotter, se tiene la ventaja de una mayor nitidez en el gráfico, el procedimiento a seguirse es similar a lo citado anteriormente pero se debe cambiar la interface de impresión para lo que se realiza el siguiente procedimiento:

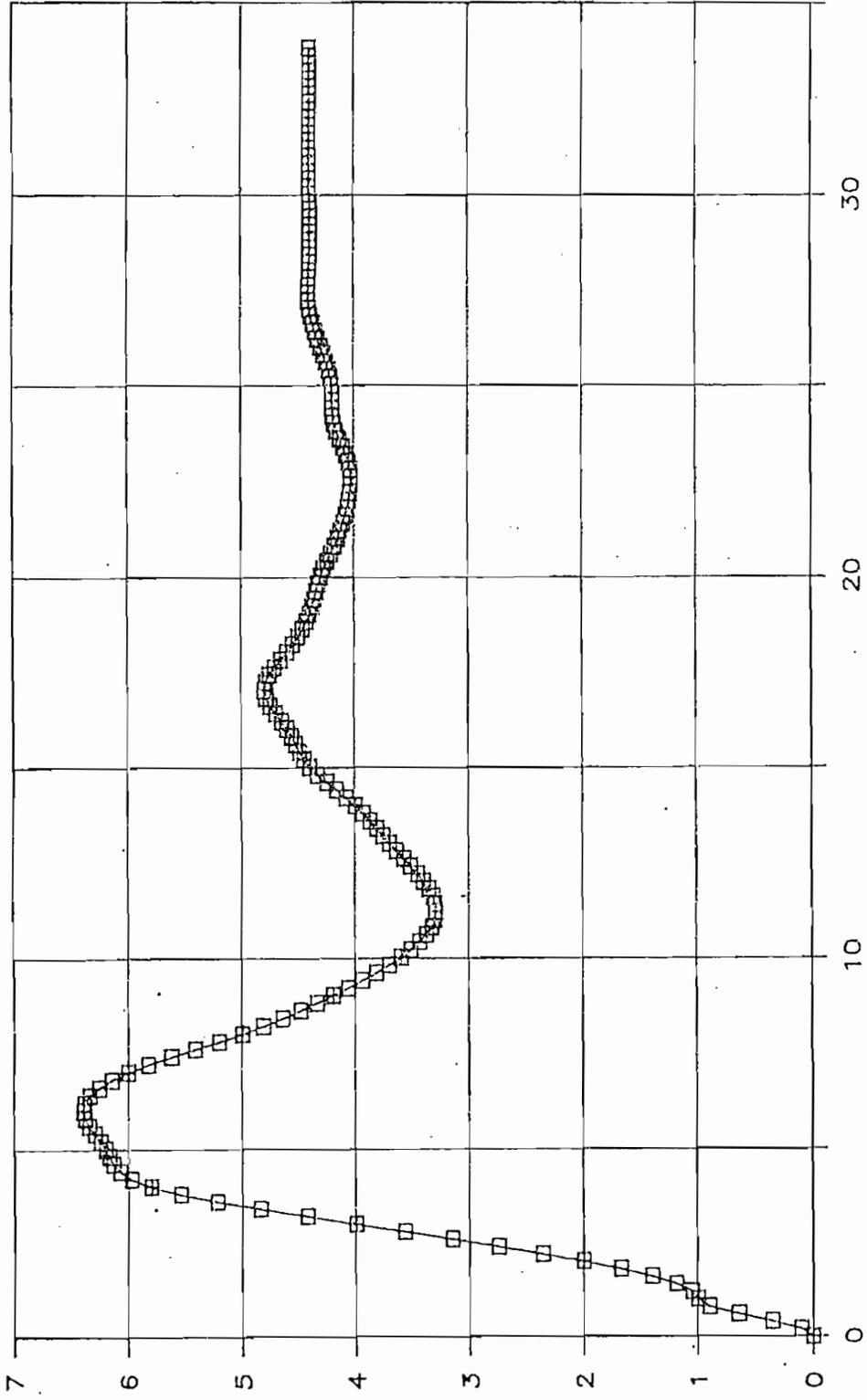
- En primer lugar se deberá tener el driver que incluya la opción para la interfase serial y para el plotter.

- Dentro del programa PGRAPH seleccionamos SETTINGS, luego HARDWARE, luego INTERFACE, donde se escogerá la serial. Se escogerá luego el tipo de plotter.

- Los comandos para la impresión son exactamente igual que la opción en impresora.

A continuación se presenta los gráficos del Ejemplo # 2 del capítulo cuarto realizados en el plotter, se puede ver la precisión y nitidez de estos gráficos comparados con los que se realizan en una impresora.

FIGURA 4.10



INTERPOLACION DE LOS VALORES DEL RLC

FIGURA 4.11

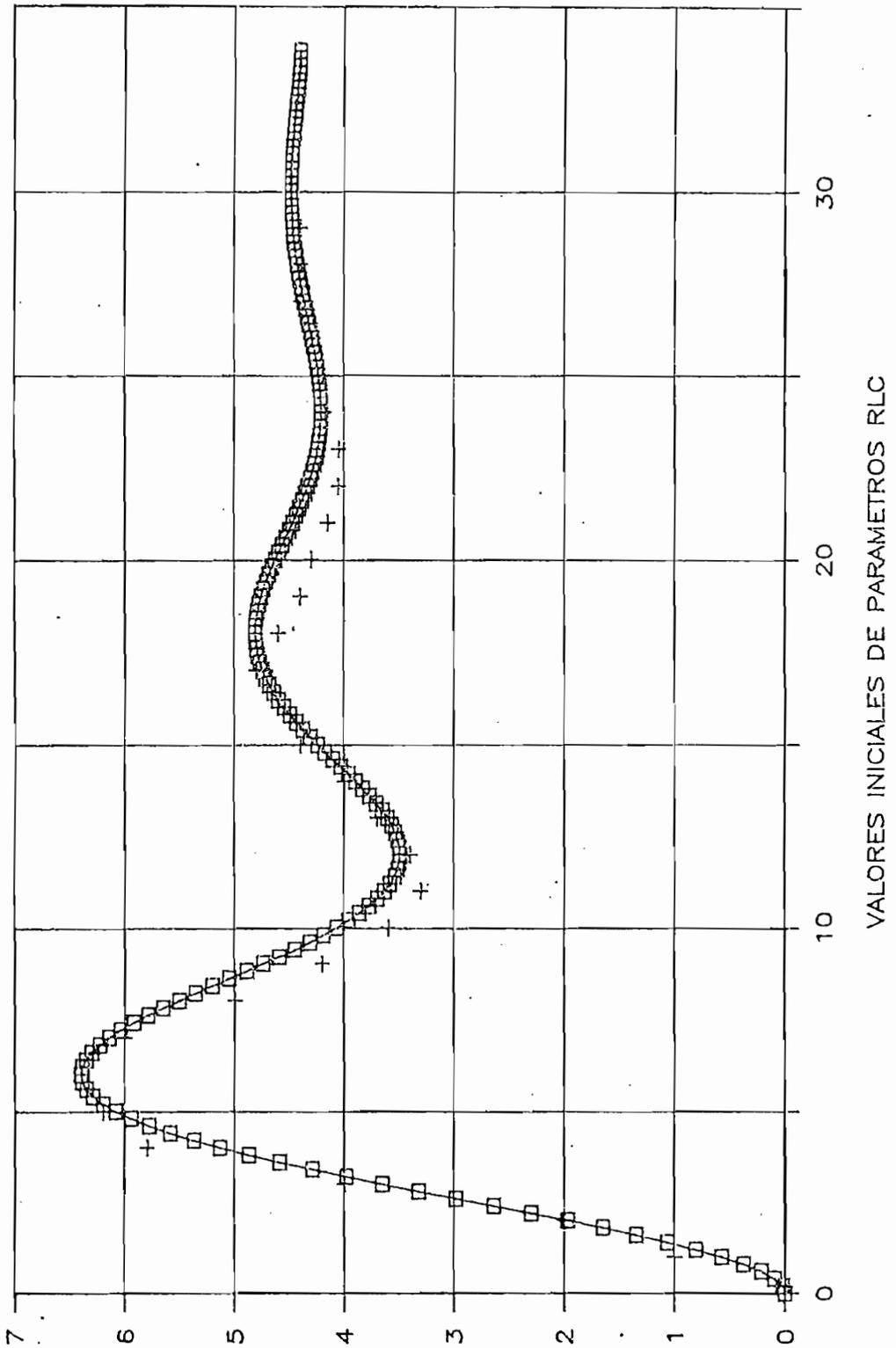
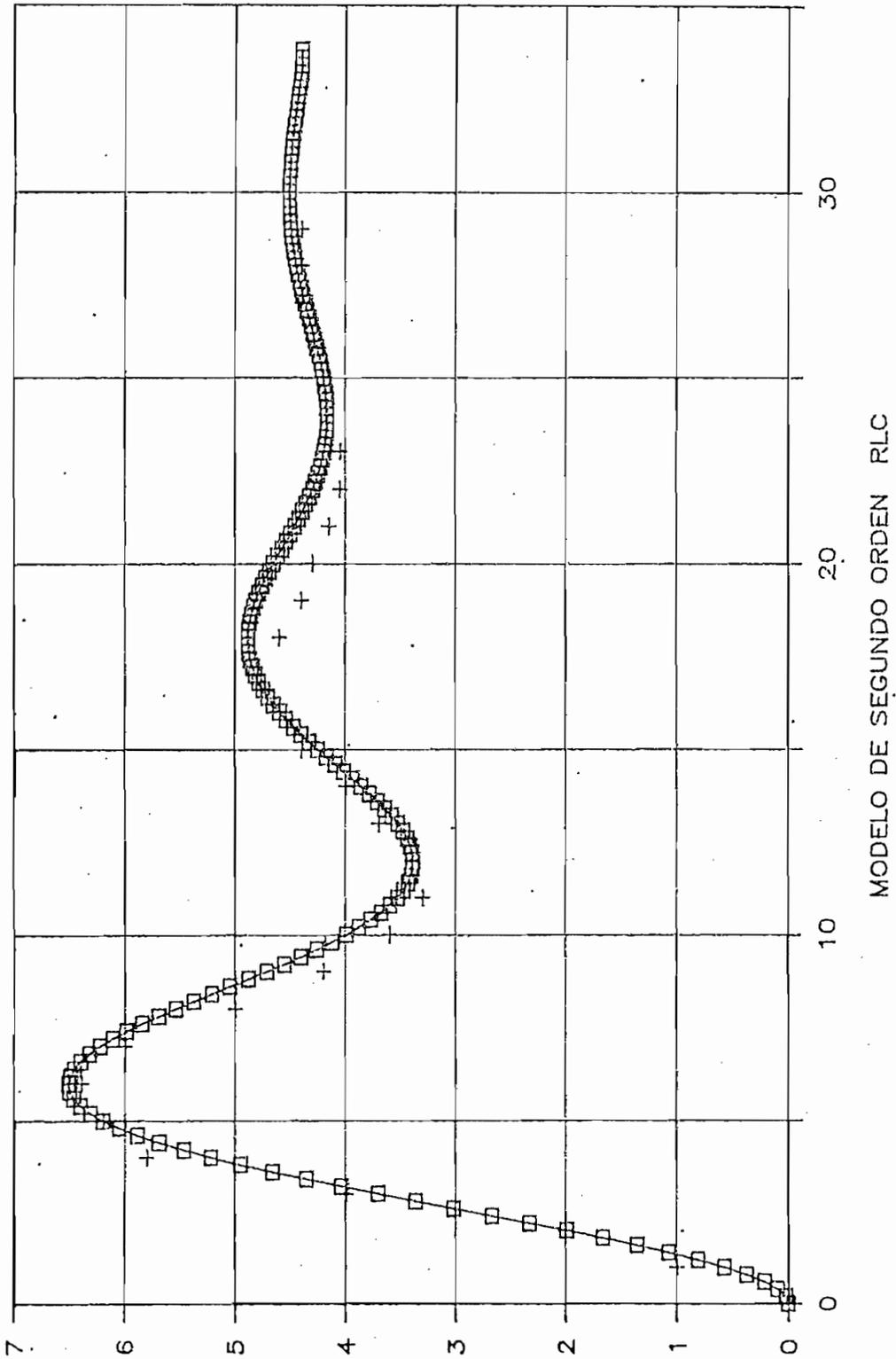


FIGURA 4.12



## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Katsuhiko Ogata, "Ingenieria de Control Moderno", Buenos Aires, Argentina.
- 2.- Astrom Karl, "Introduction to Control Theory", New York, Academic Press, 1970.
- 3.- Sage Andrew, "Optimum Systems Control", Eaglewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1977.
- 4.- William E. Boyce, Richard Di Prima, "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera", Editorial Limusa, México 1979.
- 5.- Benjamin C. Kuo, "Sistemas Automáticos de Control", Editorial Continental, España 1973.
- 6.- Erwin Kreyszig, "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería", Editorial Limusa, México 1976.
- 7.- Irwing L. Kosow, "Máquinas Eléctricas y Transformadores", 1978.

## B.- Revistas y Manuales

- Trabajo de Identificación de parámetros de un modelo matemático mediante un algoritmo basado en la cuasilinearización y mínimos cuadrados, Ing. Luis Barajas.
- Absolute Reference, Volumen 5, Mayo 1987.
- IBM Basic Reference Manual, Mayo 1984.
- Lotus 123, Lotus Development Corporation.
- Disk Operating System Reference, IBM Corporation.

## INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
"DESCRIPCION DE LOS METODOS A UTILIZARSE"	
1.1 MODELO MATEMATICO	2
1.2 MODELO MATEMATICO: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = U$	5
1.3 DETERMINACION DE LOS PARAMETROS M,K	15
1.4 CASO PARTICULAR DE LA ECUACION DE PRIMER ORDEN	24
CAPITULO II	
"METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS Y CUASILINEARIZACION"	
2.1 ALGORITMO A UTILIZARSE EN LA DETERMINACION DEL PARAMETRO C.	33
2.2 REAJUSTE DE LOS PARAMETROS M,C A PARTIR DEL PARAMETRO C.	74
CAPITULO III	
"PROGRAMA DIGITAL"	
3.1 SIMULACION DE SISTEMAS FISICOS	76
3.2 PROGRAMA QUE PERMITE LA DETERMINACION DE PARAMETROS A PARTIR DE LA SIMULACION.	84