ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO

"BASES PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO"

TESIS PREVIA A LA OBTENCION

DEL TITULO DE INGENIERO EN

ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

CRISTOBAL RAMIRO GARCIA JARRIN

JULIO, 1981

Certifico que el presente trabajo ha sido elaborado en su totalidad por el señor Cristóbal García J.

ING. PATRICIO BURBANO
Director de Tesis

DEDICATORIA

A Mis Padres

A Maritza

PROLOGO

Este trabajo tiene como finalidad primordial, presentar las bases teóricas para el análisis de Sistemas de Control contínuos utilizando variables de estado, juntamente con el desarrollo de métodos y programas para computador digital que permiten aplicarlas a sistemas prácticos.

Para un adecuado análisis de Sistemas de Control en base a su modelo en el espacio de estado, es necesario en primer lugar un desarrollo de los fundamentos matemáticos y los métodos respectivos. Sin embargo, para la obtención de resultados numéricos no son suficientes los métodos analíticos, ya que con éstos sólo es razonable, en lo que se refiere a cálculos numéricos, el estudio de sistemas simples; de ahí que en esta tesis se implementan además programas que permiten conseguir resultados numéricos, con lo que es posible analizar sistemas complicados que, generalmente, son los de mayor importancia práctica.

Los métodos de variables de estado son aplicables en varios campos científicos, pero aquí se hace un estudio solamente de su utilidad en el análisis de Sistemas de Control.

El énfasis se ha puesto en el tratamiento de sistemas lineales, invariantes en tiempo; sin embargo, varios aspectos se presentan en forma más general, tal que se comprende también a sistemas lineales variantes en tiempo.

En el Capítulo Primero se introduce en forma natural el concepto de estado de un objeto físico y la forma de analizar su comportamiento en el tiempo mediante su descripción en el espacio de estado. Se presentan algunas ideas de sistemas lineales orientadas al tema, procurando mantener claridad y brevedad en las mismas.

En el Capítulo Segundo se desarrollan los métodos y se implementa una biblioteca de programas en lenguaje BASIC, para un computador de la Casa Tektronix, modelo 4051 o uno similar; con el objeto de calcular la matriz T de una transformación de semejanza $T^{-1} A T$ que permite hallar la forma canónica de Jordan J del sistema. Además se obtienen resultados esenciales para el análisis posterior de estabilidad, controlabilidad y observabilidad de sistemas.

En el Capítulo Tercero se tratan algunos aspectos de análisis de Sistemas de Control, como aplicación de las ideas y programas desarrollados en los capítulos anteriores.

El Capítulo Cuarto comprende algunos ejemplos de aplicación de la biblioteca de programas, junto con las conclusiones y recomendaciones finales.

Debo mencionar que a lo largo de toda la tesis se presentan ejemplos, con la finalidad de dar mayor claridad y permitir una mejor comprensión de los temas tratados.

Quiero expresar que una de las motivaciones que tuve para la realización de este trabajo, fue el deseo de colaborar en la creación de una biblioteca de programas para el Area de Sistemas de Control de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

Deseo manifestar mi agradecimiento a quienes han hecho posible la realización de este trabajo. A la Escuela Politécnica Nacional, a mis maestros; en especial a los Ingenieros Patricio Burbano y Efraín Del Pino por su acertada orientación y ayuda. También quiero expresar mi gratitud a la Srta. Ana Viteri por su magnífica mecanografía del manuscrito.

Cristóbal García J.

C O N T E N I D O

PAG.

CAPITULO PRIMERO

FORMULACION DE UN SISTEMA DE CONTROL MEDIANTE EL ESPACIO DE ESTADO

1.1 INTRODUCCION

En el mundo físico podemos distinguir dos característics fundamentales: el espacio y el tiempo, donde se desarrollan una infinidad de procesos. Para analizar el comportamiento de éstos en el tiempo, el método de variables de estado es muy valioso y presenta grandes ventajas con respecto a otros.

En general para el análisis y diseño de los Sistemas de Control existen tres métodos: el primero consiste en el estudio del denominado lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia en el plano S, basado en la transformada de Laplace; el segundo, fundamentado en la transformada de Fourier, establece las técnicas de la respuesta de frecuencia como son: el diagrama de Bode, el diagrama polar y el diagrama de Nichols. Estos 2 primeros métodos son eminentemente gráficos y proporcionan soluciones bastante aceptables, tanto en el análisis como en el diseño de sistemas de control.

El tercero es un método que supera a los anteriores, ya que puede aplicarse a todo sistema representado por ecuaciones íntegro-diferenciales, siendo posible estudiar aún aquellos en los que no es posible aplicar los criterios de las transformadas. Este es el método del espacio de estado, el cual presenta algunas ventajas significativas con respecto a las dos precedentes, entre las que destacan:

1.- Es aplicable a sistemas lineales tanto invariantes como variantes en tiempo; y de alto orden.

2.- Puede ser utilizado eficientemente en los casos de sistemas de múltiple entrada y múltiple salida, como en los de entrada y salida simple.

3.- Debido a que trata, en general, con ecuaciones diferenciales matriciales, es muy adecuado para programarse en una computadora.

4.- Su conocimiento es básico para abordar el estudio de control óptimo, ya que solamente éstas técnicas en el dominio del tiempo nos permiten optimizar los sistemas. Esto es ahora totalmente factible pues con las computadoras electrónicas, aquellas bases teóricas conocidas desde hace mucho tiempo, pueden ser aplicadas en gran medida.

Analicemos un poco más en detalle los fundamentos físicos de esta teoría. En primer lugar se debe distinguir perfectamente un objeto físico, cuyo comportamiento en el tiempo se desea analizar, de su correspondiente objeto abstracto constituído por un conjunto de relaciones matemáticas, las cuales describen de la manera más exacta posible dicho comportamiento. De ahí que el modelo matemático puede prescindir de muchas características del objeto físico, que no intervienen en el fenómeno estudiado; pero, debe contener todas las relaciones entrada-salida que determinan, se comporte en forma similar a aquel.

"El estado de un objeto físico es cualquier propiedad del mismo, que relaciona la señal de entrada con la de salida y tal que, al conocer la función de entrada para tiempos $t \geq t_0$ y el estado para $t = t_0$ se puede determinar completamente una única señal de salida para $t \geq t_0$"

El estado de un objeto abstracto es una colección de números que junto con la entrada $\vec{u}(t)$ para todo $t \geq t_0$ determina de manera única la salida $\vec{y}(t)$, y el estado futuro para todo $t \geq t_0$. Es decir, el estado representa en un tiempo $t = t_0$, la historia pasada que influirá en el funcionamiento del objeto abstracto, tal que fija en forma unívoca una salida $\vec{y}(t_0)$ correspondiente a una entrada $\vec{u}(t_0)$. Dependiendo del estado, se tendrá un determinado par entrada-salida.

Una variable de estado es una función del tiempo, cuyo valor en cualquier instante determinado es el estado del objeto abstracto. Se la denota con el vector $\vec{x}(t)$ de dimensión n.

El espacio de estado es el conjunto de todas las variables de estado $\vec{x}(t)$. Ya que pueden haber diferentes formas de representar las relaciones matemáticas que definen el objeto abstracto; por ejemplo, utilizando combinaciones lineales de las variables de estado; la descripción por el espacio de estado no es única.

Debe observarse que el vector de estado $\vec{x}(t)$ como función del tiempo, depende además, implícitamente, del tiempo inicial t_0, del estado inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ y de la señal de entrada $\vec{u}(\tau)$; de modo que $\vec{x}(t) = \vec{\phi}(t;\, t_0, \vec{x}_0, \vec{u}(\tau))$ es una trayectoria que puede ser representada en un espacio n-dimensional a partir de t_0 y con t como un parámetro implícito.

No siempre un conjunto de relaciones matemáticas representan un objeto abstracto, es decir, describen el comportamiento de un objeto físico. Es necesario que aquellas den siempre como solución una función de valor real $\vec{y}(t)$ para todo $t \geq t_0$, dada una señal real de entrada $\vec{u}(t)$ para todo t; y además cumplan con el principio de causalidad de la relación entrada-salida. Tenemos en tal caso, un <u>sistema dinámico</u>, el cual puede ser estudiado en el espacio de estado si cumple con las siguientes condiciones:

1.- Para todo $t > t_0$ existe un único valor real de salida $\vec{y}(t)$ dado el estado $\vec{x}_0$ para el tiempo t_0 y un valor real de entrada $\vec{u}(\tau)$ para $\tau \geq t_0$.

Donde: $\vec{y}(t) = \eta(t, \vec{\phi}(t;\ t_0, \vec{x}_0, \vec{u}(\tau)), \vec{u}(t))$ (1-1)

2.- Una única trayectoria $\vec{\phi}(t;\ t_0, \vec{x}_0, \vec{u}(\tau))$ existe para todo $t > t_0$ dado el estado para el tiempo t_0 y un valor real de salida para todo $t \geq t_0$.

3.- Una única trayectoria empieza de cada estado, es decir:

$$\lim_{t \to t_1} \vec{\phi}(t;\ t_1, \vec{x}(t_1), \vec{u}(\tau)) = \vec{x}(t_1) \qquad (1\text{-}2)$$

para todo $t_1 \geq t_0$

4.- Las trayectorias cumplen la propiedad de transición:

$$\vec{\phi}(t;\ t_0, \vec{x}(t_0), \vec{u}(\tau)) = \vec{\phi}(t;\ t_1, \vec{x}(t_1), \vec{u}(\tau)) \qquad (1\text{-}3)$$

para $t_0 < t_1 < t$

donde $\vec{x}(t_1) = \vec{\phi}(t_1;\ t_0, \vec{x}(t_0), \vec{u}(\tau))$

5.- Las trayectorias $\vec{\phi}(t;\ t_0, \vec{x}_0, \vec{u}(\tau))$ no dependen de las entradas $\vec{u}(\tau)$ para $\tau > t$.

Para aclarar los conceptos anteriores, consideremos el circuito eléctrico de la Fig. 1.1.

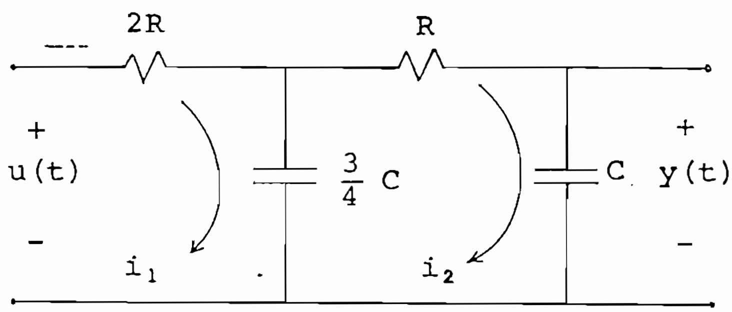


FIG. 1.1

Las ecuaciones de malla del circuito de la Fig. 1.1 son:

$$2Ri_1 + \frac{4}{3C}\,\frac{1}{p}\,i_1 - \frac{4}{3C}\,\frac{1}{p}\,i_2 = u$$

$$\frac{4}{3C}\,\frac{1}{p}\,i_1 - \frac{4}{3C}\,\frac{1}{p}\,i_2 = Ri_2 + y$$

donde $p = \frac{d}{dt}$; $\frac{1}{p} = \int \ldots dt$

Además se tiene que:

$$y(t) = \frac{1}{C}\,\frac{1}{p}\,i_2$$

De donde se obtiene la ecuación diferencial que describe la relación entrada-salida de este sistema:

$$1.5\ R^2C^2\ \frac{d^2y}{dt^2} + 4.5\ RC\ \frac{dy}{dt} + y = u \tag{1.4}$$

cuya solución es:

$$y(t) = A\ e^{\lambda_1 t} + B\ e^{\lambda_2 t} + \int_{t_o}^{t} \left[\rho_1\ e^{\lambda_1 (t-\tau)} + \rho_2\ e^{\lambda_2 (t-\tau)}\right] u(\tau)\,d\tau$$

con

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\ R\ C}\left(-3 + \sqrt{\frac{19}{3}}\ \right) \simeq -\ \frac{0.242}{R\ C}$$

$$\lambda_2 = -\ \frac{1}{2\ R\ C}\left(3 + \sqrt{\frac{19}{3}}\ \right) \simeq -\ \frac{2.758}{R\ C} \tag{1.5}$$

$$\rho_1 = \frac{2}{3\sqrt{\frac{19}{3}}\ R\ C} \approx \frac{0.265}{R\ C}$$

$$\rho_2 = -\ \rho_1$$

Finalmente, para evaluar las constantes A y B, son necesarias dos condiciones iniciales. Así, por ejemplo, si se conocen:

$y(t_o)$ = voltaje en el capacitor de salida, en el tiempo $t=t_o$

$\frac{dy}{dt}(t_o)$ = derivada del voltaje en el capacitor de salida, en el tiempo $t = t_o$ (corriente multiplicada por la constante $\frac{1}{C}$)

Se obtiene:

$$A = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} (\lambda_2 \; y(t_o) - \frac{dy}{dt} (t_o)) \; e^{-\lambda_1 t_o} \tag{1.6}$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} (\frac{dy}{dt} (t_o) - \lambda_1 \; y \; (t_o)) \; e^{-\lambda_2 t_o} \tag{1.7}$$

Con lo que la solución completa es:

$$y(t) = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)} \; y(t_o) \left[\lambda_2 \; e^{\lambda_1 (t-t_o)} - \lambda_1 \; e^{\lambda_2 (t-t_o)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)} \cdot \frac{dy}{dt} (t_o) \left[e^{\lambda_2 (t-t_o)} - e^{\lambda_1 (t-t_o)}\right] +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \left[\rho_1 \; e^{\lambda_1 (t-\tau)} + \rho_2 \; e^{\lambda_2 (t-\tau)}\right] u(\tau) d\tau \tag{1.8}$$

Se tiene entonces que:

1.- El objeto físico es el circuito de la Fig. 1.1 formado por 2 resistencias y 2 capacitores.

2.- El objeto abstracto se halla resumido en la ecuación diferencial (1.4), en la que las funciones $u(t)$ y $y(t)$ representan todos los pares entrada-salida del sistema.

3.- Es claro que $y(t)$ (ecuación 1.8), es real para toda $u(t)$ real y para $t \geq t_0$; así como también se puede demostrar que el circuito cumple con las demás características de un sistema dinámico que puede ser representado mediante variables de estado.

4.- La solución de la ecuación (1.4) representa la salida del sistema (ecuación 1.8) y está determinada de manera única por la función de entrada $u(\tau)$ para $\tau \geq t_0$; y por $y(t_0)$ y, $\frac{dy}{dt}(t_0)$, que son un conjunto de números que parametrizan los pares entrada-salida, constituyendo, por lo tanto, el estado del objeto abstracto en el tiempo $t = t_0$. Los valores $y(t_0)$ y $\frac{dy}{dt}(t_0)$, físicamente constituyen el voltaje y su derivada respectivamente, en el capacitor de mayor valor; es decir, el estado del objeto físico en el tiempo $t= t_0$.

5.- El vector de estado $\vec{x}(t)$ estará conformado por las funciones $y(t)$ y $\frac{dy}{dt}$, de manera que:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

pudiendo ser representado en un espacio de 2 dimensiones.

Si utilizamos, por ejemplo, un sistema de coordenadas cartesianas, podríamos tener y(t) en las abcisas y $\frac{dy}{dt}$ en las ordenadas, con t como parámetro implícito y comenzando desde $t = t_0$; obteniendo así una trayectoria.

6.- Es posible considerar el voltaje y su derivada en el capacitor de menor valor como variables de estado, sin que ésto afecte a la solución del objeto abstracto.

Las relaciones entre estas nuevas variables de estado con las anteriores al tiempo $t = t_0$ son:

$$y(t_0) = \frac{3}{4}\left[2y_1(t_0) + RC\,\frac{dy_1}{dt}(t_0)\right]$$

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = -\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3\ RC}\,y_1(t_0) + \frac{dy_1}{dt}(t_0)\right]$$

y el nuevo vector de estado $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dfrac{dy_1}{dt} \end{bmatrix}$

De modo que la descripción en el espacio de estado no es única.

7.- El vector de estado $\vec{x}(t)$, depende además de t_0, $\vec{x}_0$

y la señal de entrada $u(\tau)$; así en la ecuación (1.9) se tiene que:

$y(t)$ = ecuación (1.8)

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 A\, e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B\, e^{\lambda_2 t} + (\rho_1 + \rho_2)\, u(t)$$

que son las variables de estado para este caso.

1.2 LINEALIDAD E INVARIANCIA RESPECTO AL TIEMPO

Un sistema es lineal cuando cumple con las propiedades de homogeneidad y aditividad, las cuales se resumen en el siguiente enunciado:

Para los estados $\vec{x}_1(t_0)$, $\vec{x}_2(t_0)$; y las señales de entrada $\vec{u}_1(\tau)$, $\vec{u}_2(\tau)$; el sistema tiene las correspondientes salidas: $\vec{y}_1(\tau)$, $\vec{y}_2(\tau)$ para $\tau \geq t_0$. Será lineal si para dos números reales cualesquiera α, β; para el estado $\vec{x}_3(t_0) = \alpha\,\vec{x}_1(t_0) + \beta\,\vec{x}_2(t_0)$ y la señal de entrada $\vec{u}_3(\tau) = \alpha\,\vec{u}_1(\tau) + \beta\,\vec{u}_2(\tau)$; responde con una señal de salida igual a $\vec{y}_3(\tau) = \alpha\,\vec{y}_1(\tau) + \beta\,\vec{y}_2(\tau)$ y su estado futuro es $\vec{x}_3(\tau) = \alpha\,\vec{x}_1(\tau) + \beta\,\vec{x}_2(\tau)$.

El sistema descrito por la ecuación (1.4), es lineal, ya que cumple con las propiedades indicadas en el párrafo anterior; así, de su solución dada por la ecuación (1.5) se sigue que:

$$y_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} + \int_{t_0}^{t} \left[\rho_1 e^{\lambda_1 (t-\tau)} + \rho_2 e^{\lambda_2 (t-\tau)}\right] u_1(\tau)\,d\tau$$

desarrollando:

$$y_1(t) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\, y_1(t_0)\left[\lambda_2 e^{\lambda_1(t-t_0)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\, \frac{dy_1}{dt}(t_0)\left[e^{\lambda_2(t-t_0)} - e^{\lambda_1(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\rho_1 e^{\lambda_1(t-\tau)} + \rho_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] u_1(\tau)\, d\tau$$

$$y_2(t) = A_2 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \int_{t_0}^{t} \left[\rho_1 e^{\lambda_1(t-\tau)} + \rho_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] u_2(\tau)\, d\tau$$

desarrollando:

$$y_2(t) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\, y_2(t_0)\left[\lambda_2 e^{\lambda_1(t-t_0)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\, \frac{dy_2}{dt}(t_0)\left[e^{\lambda_2(t-t_0)} - e^{\lambda_1(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\rho_1 e^{\lambda_1(t-\tau)} + \rho_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] u_2(\tau)\, d\tau$$

representan las respuestas del sistema a las señales $u_1(\tau)$ y $u_2(\tau)$ independientemente, y con los estados $\vec{x}_1(t_0)$ y $\vec{x}_2(t_0)$ respectivamente. Ahora bien, si consideramos al sistema ideal de tal manera que cualquier voltaje de entrada es permitido, es posible tener también cualquier señal de salida, lo cual posibilita que α y β sean arbitrarios y se tenga que: para $u_3(\tau) = \alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)$; con $\vec{x}_3(t_0) = \alpha\vec{x}_1(t_0) + \beta\vec{x}_2(t_0)$ la salida será de la forma:

$$y_3(t) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} y_3(t_0)\left[\lambda_2 e^{\lambda_1(t-t_0)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \frac{dy_3}{dt}(t_0)\left[e^{\lambda_2(t-t_0)} - e^{\lambda_1(t-t_0)}\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\rho_1 e^{\lambda_1(t-\tau)} + \rho_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] u_3(\tau)\,d\tau$$

ahora:

$$\vec{x}_3(t_0) = \begin{bmatrix} y_3(t_0) \\ \dfrac{dy_3}{dt}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, y_1(t_0) + \beta\, y_2(t_0) \\ \alpha \dfrac{dy_1}{dt}(t_0) + \beta \dfrac{dy_2}{dt}(t_0) \end{bmatrix}$$

Desarrollando $y_3(t)$ se obtiene:

$$y_3(t) = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t)$$

además: $$\vec{x}_3(t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ \dfrac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t) \\ \alpha \dfrac{dy_1}{dt} + \beta \dfrac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \alpha\vec{x}_1(t) + \beta\vec{x}_2(t)$$

En cambio si tenemos, por ejemplo, un sistema en que: $y(t) = u \text{ sen } y(t_0)$; entonces:

$y_1(t) = u_1 \text{ sen } y_1(t_0)$ respuesta a una señal $u_1(t)$, con condición inicial $y_1(t_0)$

$y_2(t) = u_2 \text{ sen } y_2(t_0)$ respuesta a una señal $u_2(t)$, con condición inicial $y_2(t_0)$

Para: $u_3(t) = \alpha\, u_1(t) + \beta\, u_2(t)$; con condición inicial: $y_3(t_0) = \alpha\, y_1(t_0) + \beta\, y_2(t_0)$, se tendrá la respuesta: $y_3(t) = u_3 \text{ sen } y_3(t_0) =$

$$= (\alpha u_1 + \beta u_2) \text{ sen } (\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0))$$

$$= \alpha u_1 \text{ sen } (\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0)) +$$

$$+ \beta u_2 \text{ sen } (\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0))$$

$$\neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Por lo tanto este sistema no es lineal; ya que la condición de linealidad sólo se cumple para $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$

Es importante observar que en un sistema lineal se cumple el principio de superposición para $\vec{u}(t) \neq 0$ con $\vec{x}(t_0) = 0$ y para $\vec{x}(t_0) \neq 0$ con $\vec{u}(t) = 0$; pero, no los dos a la vez. Además; no siempre un sistema que cumple con superposición para $\vec{u}(t) \neq 0$ con $\vec{x}(t_0) = 0$ y para $\vec{x}(t_0) \neq 0$ con $\vec{u}(t) = 0$; es lineal. Así, en el circuito de la Fig. 1.1, que, como se ha demostrado, es lineal; si la entrada $u(t)$ es un voltaje de la forma $(A + B \cos \omega t)$, se podría aplicar superposición y calcular separadamente su respuesta a la señal A y a la señal $B \cos \omega t$; siendo la suma de estas dos respuestas, la respuesta a la señal original, siempre y cuando el voltaje inicial en los capacitores haya sido cero.

Un sistema es invariante con respecto al tiempo cuando un desplazamiento del vector de entrada $\vec{u}(t)$ en el tiempo, tal que $\vec{u}_1(t) = \vec{u}(t+\tau)$, produce en la salida $\vec{y}(t)$ un corrimiento igual, tal que $\vec{y}_1(t) = \vec{y}(t+\tau)$. Matemáticamente un sistema invariante en el tiempo no tiene coeficientes de los estados que varíen explícitamente con el tiempo.

Así por ejemplo el sistema descrito por la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt} + a\frac{dy}{dt} + b\,y = c\,u(t)\ ;$$

con a, b, c constantes y con salida $y(t)$, es invariante en el tiempo, ya que si $\tau = t + T$; donde T es un intervalo de tiempo $\Rightarrow d\tau = dt$; y la ecuación resultante en la variable independiente τ será de la forma:

$$\frac{d^2y}{d\tau} + a\frac{dy}{d\tau} + b\,y = c\,u(\tau)\ ;$$

que es equivalente a la original; con $u(\tau) = u(t + T)$

$y(\tau) = y(t + T)$.

En cambio un sistema con relación entrada-salida de la forma: $\frac{dy}{dt} + t\ y = u$, es variante en el tiempo, pues:

si $\tau = t + T$

$=> d\tau = dt$

$=> \frac{dy}{d\tau} + (\tau - T)\ y = u$;

cuya respuesta evidentemente, no es equivalente a la del sistema original.

Muchos sistemas físicos son lineales dentro de un determinado rango de variación de sus variables; sin embargo, en general todo sistema es o puede llegar a ser no lineal en alguna región de su funcionamiento.

Como se ha indicado, las técnicas de variables de estado son aplicables a sistemas lineales tanto invariantes como variantes en tiempo. De ahí que pueden ser utilizadas en el análisis de sistemas no lineales que muy frecuentemente pueden ser reducidos al caso lineal variante en tiempo. Esta linealización es factible cuando el sistema no lineal está trabajando en una pequeña zona alrededor de un cierto punto de funcionamiento.

Consideremos un sistema descrito por una ecuación diferencial no lineal de orden n ; de la forma:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, t\right) \tag{1.10}$$

si definimos las variables:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$\vdots$$

$$y_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

entonces el sistema podría quedar definido por n ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} &= y_n \\ \frac{dy_n}{dt} &= g(y_1, y_2, \ldots, y_n, u, t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

En general podríamos tener el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1 \, (y_1, y_2, \ldots , y_n, u, t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2 \, (y_1, y_2, \ldots , y_n, u, t) \qquad (1.12)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n \, (y_1, y_2, \ldots , y_n, u, t)$$

Si el punto de funcionamiento corresponde a: $y_1 = \phi_1$; $y_2 = \phi_2$; .... ; $y_n = \phi_n$; $u = \omega$, con condiciones iniciales $y_1(t_o)$; $y_2(t_o)$; .... ; $y_n(t_o)$; y las variaciones alrededor de éste son pequeñas tales que las nuevas condiciones iniciales son:

$$y_1(t_o) = y_1(t_o) + x_1(t_o)$$

$$\frac{dy}{dt}(t_o) = y_2(t_o) + x_2(t_o)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dt}(t_o) = y_n(t_o) + x_n(t_o)$$

con $y_1 = \phi_1 + x_1$; $y_2 = \phi_2 + x_2$; .... ; $y_n = \phi_n + x_n$;

$u = \omega + v$ donde v también es pequeño, se obtiene que:

$$\frac{d(\phi_1 + x_1)}{dt} = f_1 \; (\phi_1+x_1,\; \phi_2+x_2,\; \ldots.,\; \phi_n+x_n,\; \omega + v,\; t)$$

$$\frac{d(\phi_2 + x_2)}{dt} = f_2 \; (\phi_1+x_1,\; \phi_2+x_2,\; \ldots.,\; \phi_n+x_n,\; \omega+v,\; t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d(\phi_n + x_n)}{dt} = f_n \; (\phi_1+x_1,\; \phi_2+x_2,\; \ldots.,\; \phi_n+x_n,\; \omega+v,\; t)$$

Este nuevo sistema puede ser expresado desarrollando $f_1, f_2, \ldots, f_n$ alrededor de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \omega$; por medio de una serie de Taylor, despreciando los términos de orden mayor o igual a dos; tal que:

$$\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{dx_1}{dt} = f_1(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n,\omega,t) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}x_n + \frac{\partial f_1}{\partial u}v$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} + \frac{dx}{dt} = \;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\phi_n}{dt} + \frac{dx_n}{dt} = f_n(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n,\omega,t) + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial y_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}x_n + \frac{\partial f_n}{\partial u}v$$

donde $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ es la derivada parcial de $f_i\ (y_1, y_2, \ldots, y_n, u, t)$ respecto a y_j, evaluada en el punto $y_j = \phi_j$; y , $\frac{\partial f_i}{\partial u}$ está evaluada en $u = \omega$.

Como $\frac{d\phi_i}{dt} = f_i(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \omega, t)$, se obtiene que la nueva ecuación que define el sistema es:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix} v \qquad (1.13)$$

la misma que es lineal y, en general, variante en el tiempo.

Así hemos conseguido linealizar el sistema para realizar su análisis en la zona escogida, mediante el método del espacio de estado.

1.3 DIAGRAMAS DE FLUJO

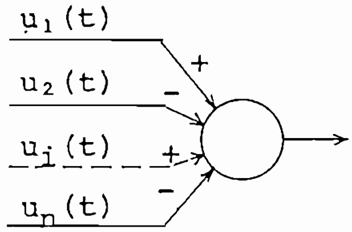
En esta sección se presentan dos formas de obtener las ecuaciones de estado a partir de la ecuación diferencial que define la relación entrada-salida de un sistema continuo, lineal e invariante en tiempo.

El método a seguirse consiste en obtener un diagrama de flujo del sistema en base a su ecuación diferencial; y de este diagrama deducir una representación adecuada en el espacio de estado. Debe observarse que el diagrama de flujo puede ser utilizado directamente para la simulación del sistema en un computador analógico.

Para sistemas lineales invariantes en tiempo sólamente son necesarios tres elementos simuladores, los cuales se indican a continuación:

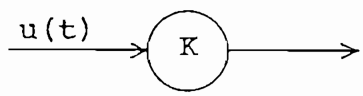
1.- Sumador: suma (o resta) dos o más variables, tal como se indica en la Fig. 1.2.

2.- Multiplicador: multiplica una variable por una constante positiva o negativa, como se in dica en la Fig. 1.3.



$$y(t) = u_1(t) - u_2(t) + \ldots + u_i(t) + \ldots - u_n(t)$$

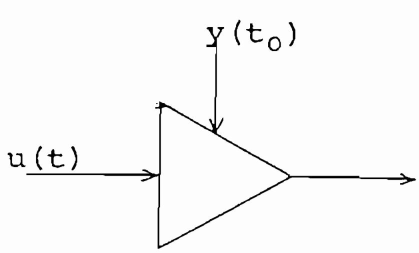
FIG. 1.2.



$$y(t) = K\, u(t)$$

FIG. 1.3.

3.- Integrador: realiza la integración en el tiempo de una variable, considerando además una condición inicial que puede o no ser explícita en el diagrama, como se indica en la Fig. 1.4.



$$y(t) = y(t_o) + \int_{t_o}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

FIG. 1.4.

De los tres simuladores, el único elemento dinámico o con memoria (cuya salida depende tanto de la entrada como de su salida anterior) es el integrador. De ahí que la salida de un integrador con condición inicial arbitraria, puede ser considerada como una variable de estado.

Las dos formas de hallar las ecuaciones de estado que definen un sistema, mencionadas anteriormente son:

a) Un sistema contínuo, lineal, invariante en el tiempo y de orden n, puede ser representado por una ecuación diferencial de la forma:

$$p^n y + \alpha_1 p^{n-1} y + \ldots + \alpha_{n-1} py + \alpha_n y =$$

$$= \beta_0 p^n u + \beta_1 p^{n-1} u + \ldots + \beta_{n-1} pu + \beta_n u \qquad (1.14)$$

donde el operador $p = \dfrac{d}{dt}$.

Como los α_i son independientes del tiempo, se puede escribir que:

$$p^n (y - \beta_0 u) + p^{n-1}(\alpha_1 y - \beta_1 u) + \ldots + p (\alpha_{n-1} y - \beta_{n-1} u) +$$

$+\alpha_n y - \beta_n u = 0$. Dividiendo por p^n y reordenando se tiene:

$$y = \beta_0 u + \frac{1}{p}(\beta_1 u - \alpha_1 y) + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}}(\beta_{n-1} u - \alpha_{n-1} y) +$$

$$+ \frac{1}{p^n}(\beta_n u - \alpha_n y) \qquad (1.15)$$

La ecuación (1.15) puede ser representada por el diagrama de flujo de la Fig. 1.5.

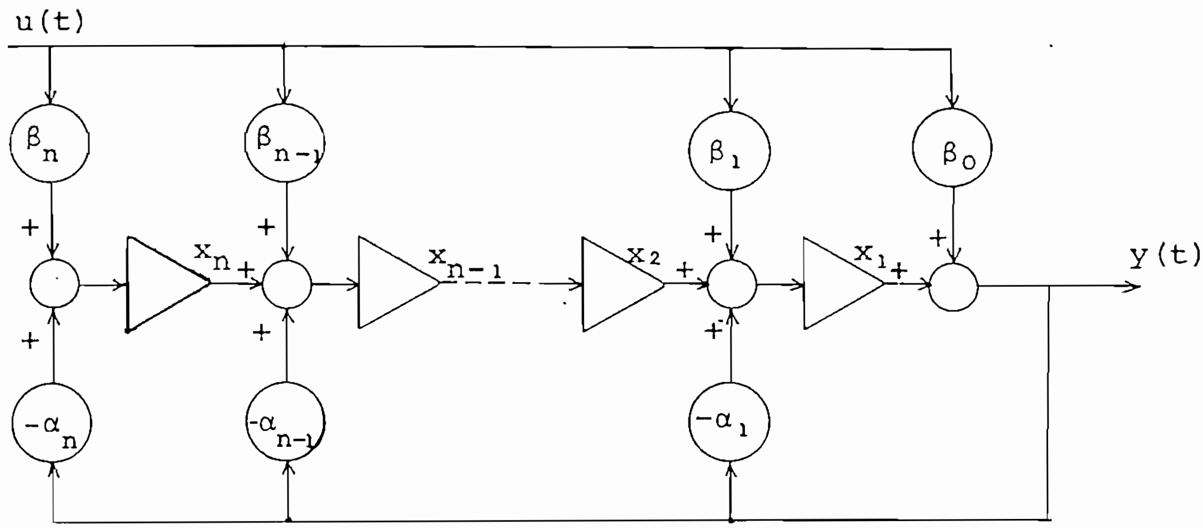


FIG. 1.5.

La salida de cada uno de los integradores puede ser considerada una variable de estado, como se ha indicado en la Fig. 1.5, obteniéndose la siguiente representación en el espacio de estado:

$$
\begin{aligned}
y &= x_1 + \beta_o u \\
\dot{x}_1 &= -\alpha_1 y + x_2 + \beta_1 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= -\alpha_{n-1} y + x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -\alpha_n y + \beta_n u
\end{aligned}
\qquad (1.16)
$$

En (1.16) si reemplazamos "y" de la primera ecuación en las demás, se obtiene en forma matricial la siguiente ecuación de estado:

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ -\alpha_{n-1} & 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \\ -\alpha_n & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \beta_o \\ \beta_2 - \alpha_2 \beta_o \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_o \\ \beta_n - \alpha_n \beta_o \end{bmatrix} u
$$

(1.17)

con la ecuación de salida:

$$
y = (1 \quad 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_o u \qquad (1.18)
$$

b) Otra forma de obtener una representación en el espacio de estado es despejando "y" de la ecuación (1.14) de modo que:

$$y = \frac{\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} p + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n} u \tag{1.19}$$

la cual puede ser escrita como:

$$y = \beta_0 u + \frac{(\beta_1 - \alpha_1 \beta_0) p^{n-1} + \ldots + (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_0) p + (\beta_n - \alpha_n \beta_0)}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n} u \tag{1.20}$$

Factorizando el denominador se pueden tener, en general, dos casos:

a) raíces (polos) no repetidos

b) raíces (polos) repetidos

Como el caso b) es el más general, se considerará un sistema en el cual el denominador de la ecuación (1.19) tenga una raíz repetida. De ahí la generalización no encierra ninguna dificultad.

Sea entonces:

$$p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n = (p-\lambda_1)(p-\lambda_2)^v (p-\lambda_{v+2}) \ldots (p-\lambda_n) \tag{1.21}$$

Reduciendo (1.20) a fracciones parciales se obtiene:

$$y = \beta_0 u + \frac{\rho_1 u}{p-\lambda_1} + \frac{\rho_2 u}{(p-\lambda_2)^v} + \frac{\rho_3 u}{(p-\lambda_2)^{v-1}} + \ldots + \frac{\rho_{v+1} u}{p-\lambda_2} + \frac{\rho_{v+2} u}{p-\lambda_{v+2}} +$$

$$+ \ldots + \frac{\rho_n u}{p-\lambda_n} \tag{1.22}$$

Los residuos ρ_i pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\rho_i = \frac{(\beta_1-\alpha_1\beta_0)\lambda_i^{n-1} + \ldots + (\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}\beta_0)\lambda_i + (\beta_n-\alpha_n\beta_0)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)^v(\lambda_i-\lambda_{v+2})\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)} \tag{1.23}$$

para las raíces no repetidas; y para las raíces repetidas.

$$\rho_i = \frac{1}{(K-1)!}\left[\frac{d^{K-1}}{dp^{K-1}} \cdot (p-\lambda_1)^v \ f(p)\right]_{p=\lambda_1} \qquad K = 1,2,\ldots,v \tag{1.24}$$

donde f(p) es la fracción polinómica en p de (1.20).

La ecuación (1.22) puede ser representada por el diagrama de flujo de la Fig. 1.6, el cual se conoce como diagrama de flujo de Jordan.

Considerando la salida de cada integrador una variable de estado, como se ha indicado en la Fig. 1.6, se obtiene la siguiente representación en el espacio de estado:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u \\
\dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= \lambda_2 x_3 + x_4 \\
&\vdots \\
\dot{x}_v &= \lambda_2 x_v + x_{v+1} \\
\dot{x}_{v+1} &= \lambda_2 x_{v+1} + u \\
\dot{x}_{v+2} &= \lambda_{v+2} x_{v+2} + u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n + u
\end{aligned}
\qquad (1.25)
$$

$$
\begin{aligned}
y = \beta_0 u + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 + \ldots + \rho_v x_v + \rho_{v+1} x_{v+1} + \\
+ \rho_{v+2} x_{v+2} + \ldots + \rho_n x_n .
\end{aligned}
$$

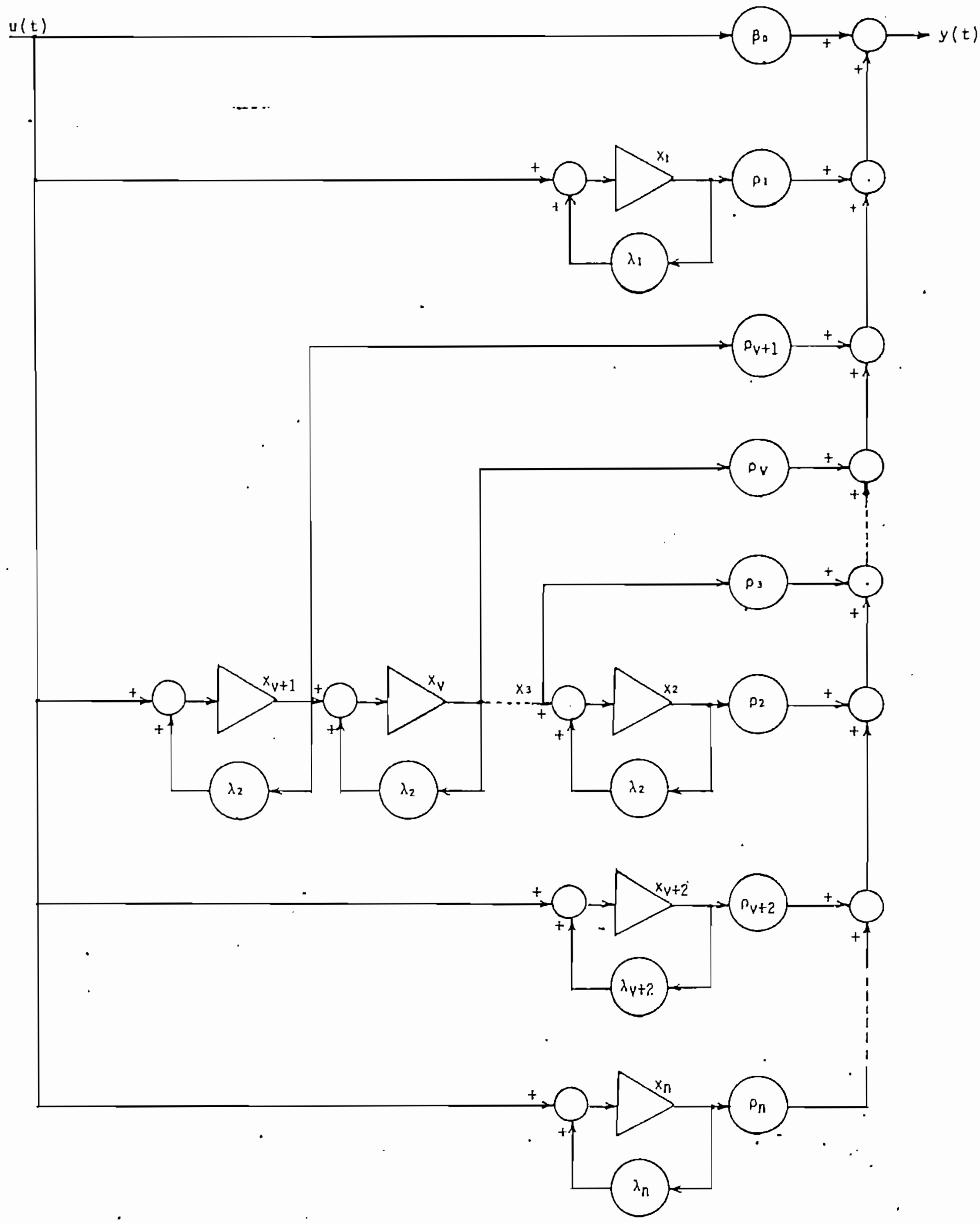


FIG. 1.6

Diagrama de flujo de Jordan con λ_2 como una raíz v-veces múltiple.

En forma matricial se tiene,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ x_{v+1} \\ x_{v+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & \lambda_{v+2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ x_{v+1} \\ x_{v+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (1.26)$$

$$y = (\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \dots\dots \ \rho_v \ \rho_{v+1} \ \rho_{v+2} \ \dots\dots \ \rho_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ x_{v+1} \\ x_{v+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \qquad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.26) y (1.27) constituyen la forma canónica de Jordan de las ecuaciones de estado, del sistema definido por la ecuación (1.14). En la matriz $n \times n$ se observa que:

- Los polos del sistema se hallan en la diagonal principal.

- Por cada polo v-veces múltiple, aparece un bloque de orden $v \times v$, denominado BLOQUE DE JORDAN, como el que se indica encerrado en un cuadro de líneas punteadas y que corresponde a la raíz λ_2 de multiplicidad v.

- Un bloque de Jordan de orden $v \times v$ tiene $(v - 1)$ unos sobre la diagonal principal.

- Todos los demás elementos son iguales a cero.

Ejemplo:

Se desea obtener los diagramas de flujo y las ecuaciones de estado correspondientes, del sistema de la Fig. 1.1.

a) La ecuación (1.4) que define el sistema, puede ser escrita en la forma (1.15), tal que:

$$y = \frac{1}{p}\left(-\frac{3}{RC}\,y\right) + \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1.5\ R^2C^2}\,u - \frac{1}{1.5\ R^2C^2}\,y\right) \qquad (1.28)$$

El diagrama de flujo correspondiente se muestra en la Fig. 1.7.

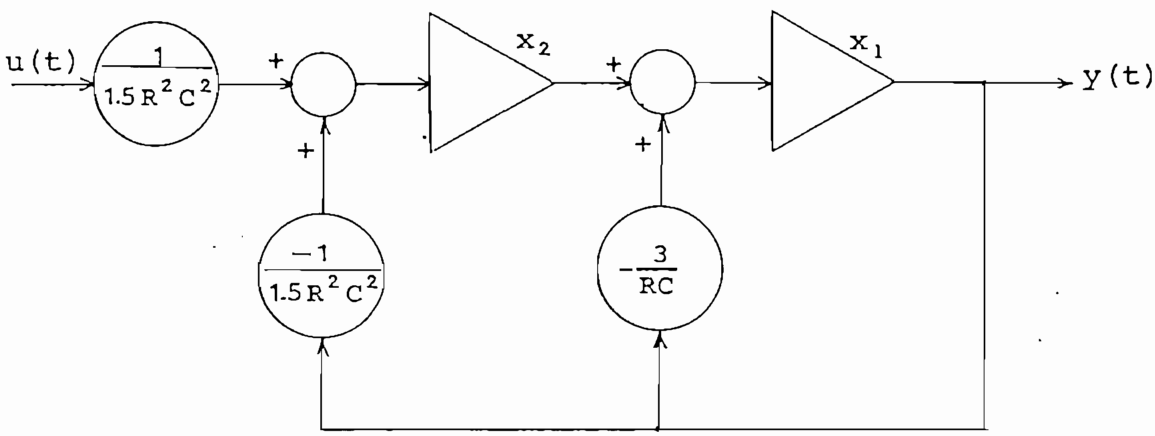


FIG. 1.7.

De donde las ecuaciones de estado son:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{R\ C} & 1 \\ -\dfrac{1}{1.5\ R^2C^2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1.5\ R^2C^2} \end{bmatrix} u \tag{1.29}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\ u \tag{1.30}$$

b) La ecuación (1.4) puede ser escrita en la forma (1.19) tal que:

$$y = \frac{\dfrac{1}{1.5\ R^2C^2}\ u}{p^2 + \dfrac{3}{R\ C}\ p + \dfrac{1}{1.5\ R^2C^2}} = \frac{\beta_2\ u}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2} \qquad (1.31)$$

que corresponde a (1.20) , ya que $\beta_0 = 0$.

Factorizando el denominador de (1.31) se obtiene:

$$p^2 + \frac{3}{R\ C}\ p + \frac{1}{1.5\ R^2C^2} = (\ p - \lambda_1\ )(\ p - \lambda_2)$$

$$\text{donde } \lambda_1 = \frac{1}{2\ R\ C}\left(\sqrt{\frac{19}{3}} - 3\right) \simeq -\frac{0.242}{R\ C}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\ R\ C}\left(\sqrt{\frac{19}{3}} + 3\right) \simeq -\frac{2.758}{R\ C}$$

Finalmente, separando (1.31) en fracciones parciales se encuentra:

$$y = \frac{\rho_1\ u}{p - \lambda_1} + \frac{\rho_2\ u}{p - \lambda_2}$$

$$\text{donde:} \quad \rho_1 = \frac{1}{1.5\sqrt{\frac{19}{3}}\, R\, C} \approx \frac{0.265}{R\, C}$$

$$\rho_2 = -\rho_1$$

El diagrama de flujo correspondiente a la ecuación (1.32) se muestra en la Fig. 1.8.

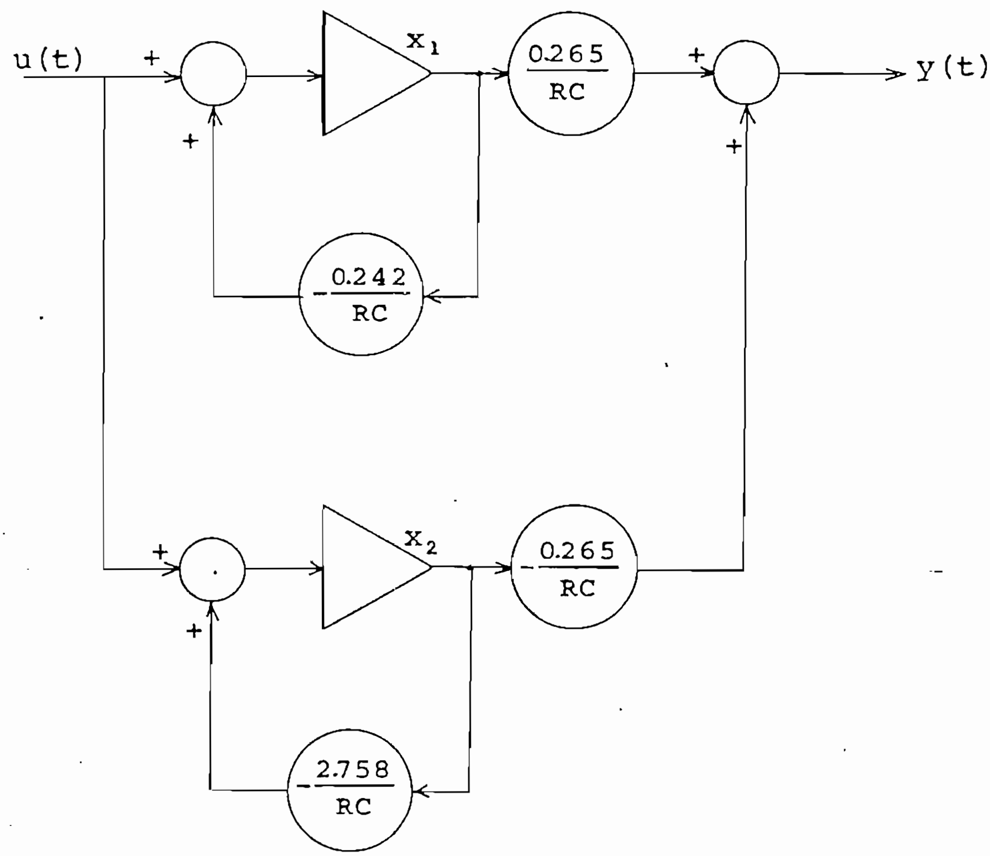


FIG. 1.8.

De ahí las ecuaciones de estado correspondientes son:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0.242}{R\ C} & 0 \\ 0 & -\frac{2.758}{R\ C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{0.265}{R\ C} & -\frac{0.265}{R\ C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\ u$$

1.4 ECUACIONES DE ESTADO Y DE SALIDA

Un sistema continuo, lineal y de orden n, con m entradas y K salidas; puede ser representado en el espacio de estado en forma similar a la dada por las ecuaciones (1.17)y(1.18) o por (1.26) y (1.27), con la diferencia de que la entrada es ahora un vector $\vec{u}(t)$ con m componentes, y la salida un vector $\vec{y}(t)$ con K componentes.

Las ecuaciones de estado tienen así, en general, la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \left[A(t)\right]\vec{x} + \left[B(t)\right]\vec{u} \\ \vec{y} &= \left[C(t)\right]\vec{x} + \left[D(t)\right]\vec{u} \end{aligned} \qquad (1.32)$$

donde: $\vec{x}(t)$: vector de estado; longitud n

$\vec{u}(t)$: vector de entrada; longitud m

$\vec{y}(t)$: vector de salida; longitud K

$\left[A(t)\right]$: matriz real de orden $n \times n$

$\left[B(t)\right]$: matriz real de orden $n \times m$

$\left[C(t)\right]$: matriz real de orden $K \times n$

$\left[D(t)\right]$: matriz real de orden $K \times m$

En el caso de sistemas invariantes en tiempo, las matrices A, B, C y D son constantes.

Ejemplo:

Se tiene el sistema de control de velocidad de la Figura 1.9 y se desea encontrar su representación en el espacio de estado por las dos formas desarrolladas en la sección 1.3.

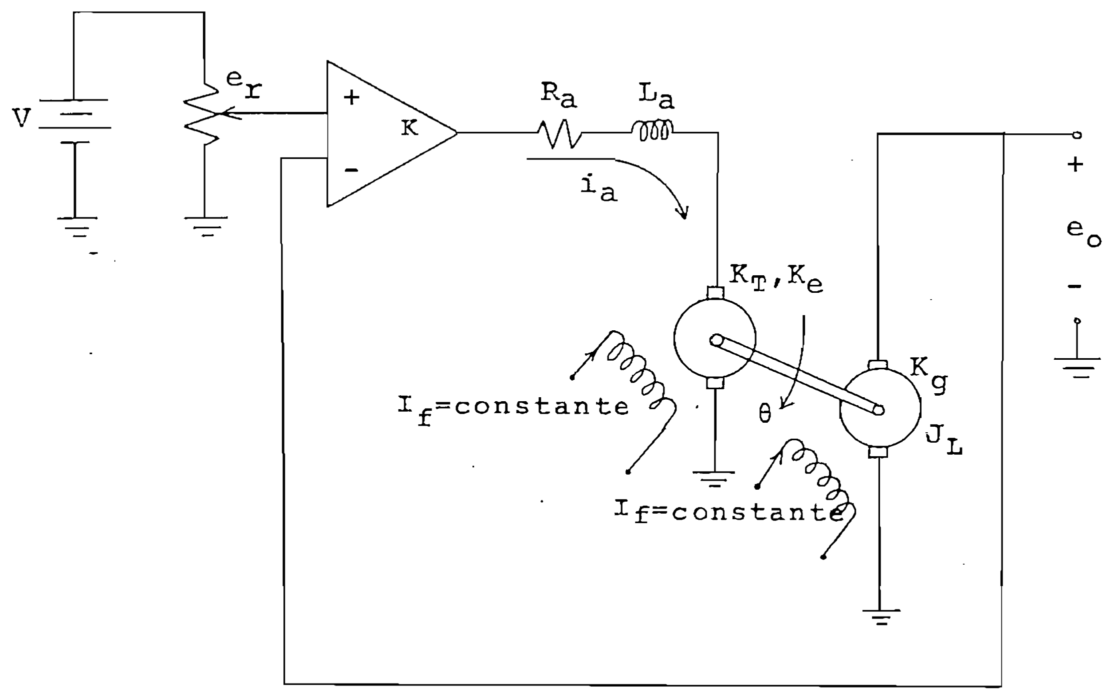


FIG. 1.9.
CONTROL DE VELOCIDAD

El diagrama de bloques se muestra en la Figura 1.10.

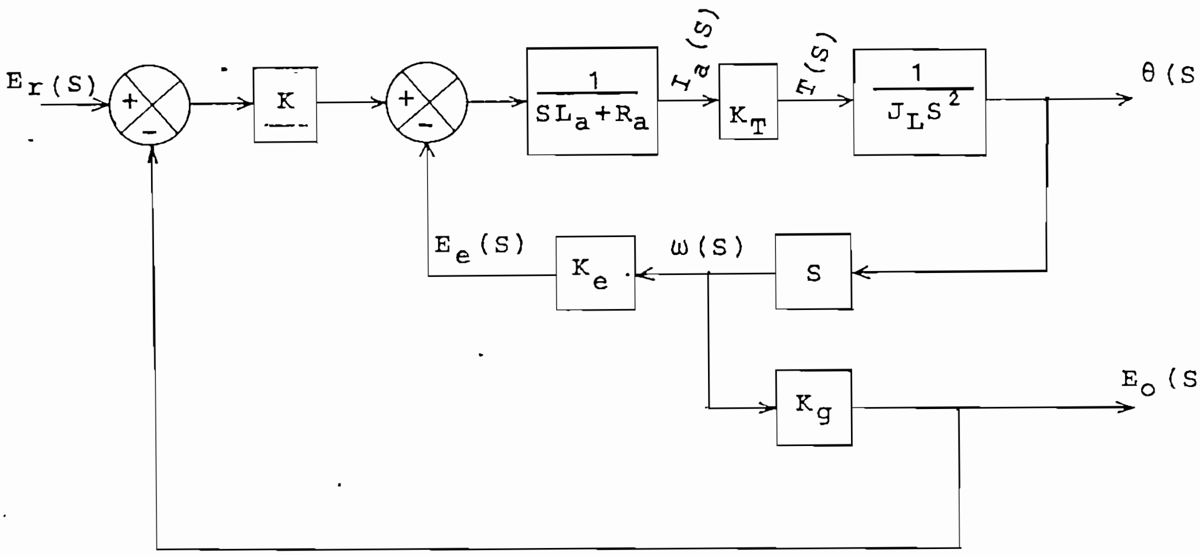


FIG. 1.10.

DIAGRAMA DE BLOQUES DEL CONTROL DE VELOCIDAD DE LA FIGURA 1.9.

Del diagrama de bloques, fácilmente se obtiene:

$$\frac{E_o(s)}{E_r(s)} = \frac{KK_T\ K_g\ S}{La\ J\ S^3 + R_aJ\ S^2 + (K_T\ K_e + KK_T\ K_g)S} \tag{1.33}$$

que corresponde a la ecuación diferencial,

$$La\ J\ p^3\ e_o + R_a\ J\ p^2\ e_o + (K_T\ K_e + KK_T\ K_g)p\ e_o = KK_T\ K_g\ p\ e_r$$

dividiendo por $La\ J\ p$ obtenemos:

$$p^2\ e_o + \frac{R_a}{L_a}\ p\ e_o + \frac{K_T\ K_e + KK_T\ K_g}{La\ J}\ e_o = \frac{KK_T\ K_g}{La\ J}\ e_r \tag{1.34}$$

a) Primera Forma.

La ecuación (1.34) corresponde a la ecuación (1.14), con:

$$\alpha_1 = \frac{R_a}{L_a}$$

$$\alpha_2 = \frac{K_T\ K_e + KK_T\ K_g}{L_a\ J}$$

$$\beta_2 = \frac{KK_T\ K_g}{L_a\ J} \qquad (1.35)$$

$$\beta_0 = \beta_1 = 0$$

De manera que el diagrama de flujo correspondiente es el de la Fig. 1.11.

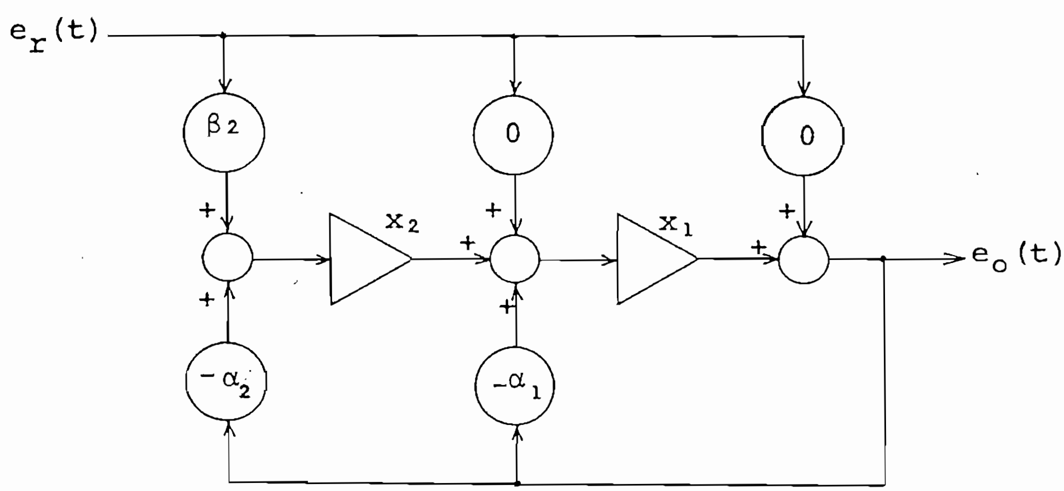


FIG. 1.11.

y las ecuaciones de estado:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & 1 \\ -\dfrac{K_T\ K_e + KK_T\ K_g}{L_a\ J} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{KK_T\ K_g}{L_a\ J} \end{bmatrix} e_r \qquad (1.36)$$

$$e_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} e_r \qquad (1.37)$$

Se identifican claramente las matrices de las ecuaciones (1.32):

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & 1 \\ -\dfrac{K_T\ K_e + KK_T\ K_g}{L_a\ J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{KK_T\ K_g}{L_a\ J} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

b) Segunda Forma (Forma de Jordan).

Despejando e_o de la ecuación (1.34) se tiene:

$$e_o = \frac{\beta_2}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2} e_r$$

con α_1, α_2, β_2, dados por (1.35). Factorizando ahora el denominador y suponiendo polos diferentes se obtiene:

$$e_o = \frac{\beta_2}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)} e_r = \frac{\rho_1}{p - \lambda_1} e_r + \frac{\rho_2}{p - \lambda_2} e_r$$

donde $$\lambda_{1-2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4 \cdot \alpha_2}}{2}$$

$$\rho_1 = \frac{\beta_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\beta_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

El diagrama de flujo es el de la Figura 1.12.

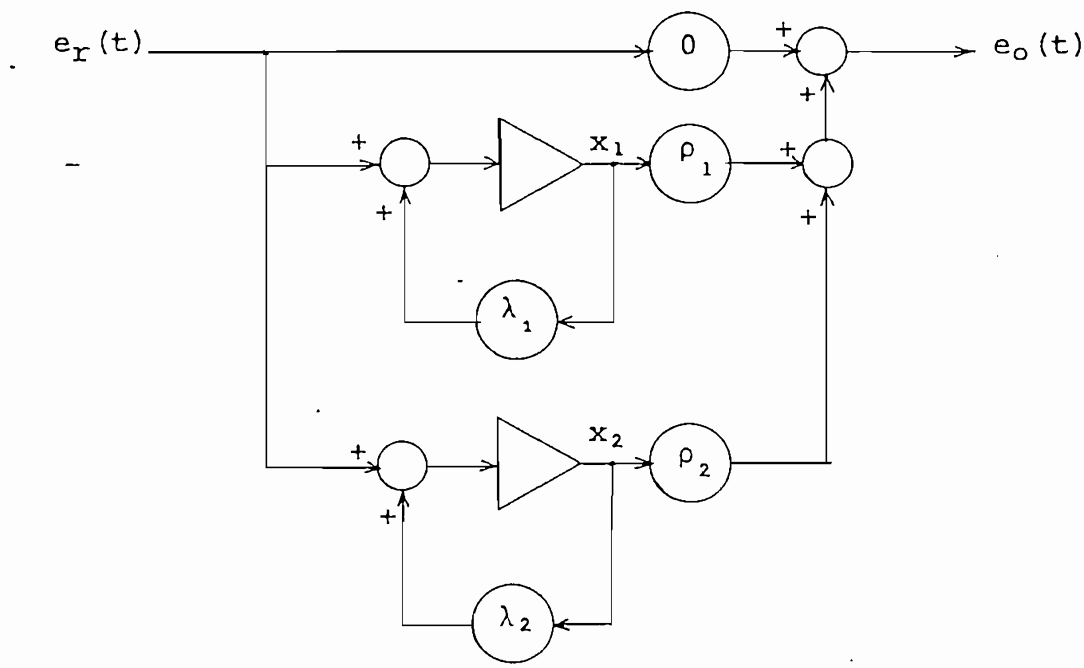


FIG. 1.12.

y las ecuaciones de estado son:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e_r$$

$$e_o = (\rho_1 \quad \rho_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} e_r$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

C A P I T U L O   S E G U N D O

TRANSFORMACION DE SEMEJANZA Y FORMA CANONICA DE JORDAN

2.1 Valores y vectores propios de una matriz

2.2 Transformación de semejanza y forma canónica de Jordan

2.3 Cálculo de los valores propios.- Métodos

2.4 Cálculo de los vectores propios.- Casos

2.5 Obtención de la matriz transformadora "T" y de la forma de Jordan "J".- Desarrollo de los programas correspondientes.

2.1 VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

En la teoría de Control Moderno son muy importantes los conceptos de valores propios y vectores propios de una matriz cuadrada real A, n×n.

Un valor propio de una matriz A, n×n ; es uno de los escalares λ que dan lugar a una solución no trivial ($\vec{x} \neq 0$) de la ecuación

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \tag{2.1}$$

Para cada valor propio λ_i, existe por lo menos una solución $\vec{x}_i$ de la ecuación $A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$; este vector $\vec{x}_i$ se denomina vector propio de la matriz A, n×n.

La ecuación (2.1) puede ser escrita como:

$$(A - \lambda I)\,\vec{x} = 0 \tag{2.2}$$

de tal manera que, por la teoría de sistemas de ecuaciones simultáneas homogéneas, se conoce que la ecuación (2.2) tiene una solución no trivial sí, y sólo si la matriz $(A - \lambda I)$ es singular; ésto se cumple siempre que:

$$\det\,(A - \lambda I) = 0 \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) se denomina ecuación característica de A; y el término izquierdo de la misma, polinomio característico. La solución de la ecuación característica nos da los valores propios de A.

El polinomio característico es de orden n, de modo que (2.3) tendrá como solución n valores propios. En general, algunos de éstos pueden ser repetidos.

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. La ecuación de valor propio es:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación característica es:

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

entonces, $(-1 - \lambda)(5 - \lambda) - 6 = 0$ ó $\lambda^2 - 4\lambda - 11 = 0$; y su solución está dada por $\lambda_1 = 2 + \sqrt{15} \approx 5.87$; $\lambda_2 = 2 - \sqrt{15} \approx -1.87$; que son los valores propios de la matriz A.

Los vectores propios correspondientes son:

Para $\lambda_1 = 2 + \sqrt{15}$:

$$\begin{bmatrix} -3 - \sqrt{15} & 2 \\ 3 & 3 - \sqrt{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = 0$$

Se tiene 2 ecuaciones simultáneas homogéneas:

$$(-3 - \sqrt{15})\ x_{11} + 2\ x_{21} = 0$$

$$3\ x_{11} + (3 - \sqrt{15})\ x_{21} = 0$$

de donde $x_{21} = \left(\frac{3}{\sqrt{15} - 3}\right) x_{11}$. Así el vector propio $\vec{x}_1$ es:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{\sqrt{15} - 3} \end{bmatrix} x_{11}$$

; con x_{11} = escalar diferente de cero.

Para $\lambda_2 = 2 - \sqrt{15}$:

$$\begin{bmatrix} -3 + \sqrt{15} & 2 \\ 3 & 3 + \sqrt{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0$$

de donde: $x_{22} = - \dfrac{3\, x_{12}}{3 + \sqrt{15}}$

y

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{3 + \sqrt{15}} \end{bmatrix} x_{12}$$; con x_{12} = escalar diferente de cero.

Como se observa en el ejemplo anterior, los vectores propios son de longitud arbitraria ya que si $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, también se cumple que $A\alpha\vec{x} = \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$; es decir, $(\alpha\vec{x})$ es también un vector propio de A, para cualquier escalar α diferente de cero. Es conveniente normalizar a la unidad la longitud de los vectores propios.

En general, los valores propios de una matriz real $A_{n\times n}$ son complejos, al igual que las componentes de los vectores propios; de ahí que todo el análisis se desarrolla en el campo de los números complejos. Así lo requiere la disciplina científica que aquí se trata, como es el Control Moderno.

2.2 TRANSFORMACION DE SEMEJANZA Y FORMA CANONICA DE JORDAN.

Para ingresar en este tópico volvamos a considerar la ecuación general de estado (1.32) para el caso invariante y de excitación nula:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}(t) \tag{2.4}$$

Si suponemos un estado inicial, para el tiempo $t=t_0$, representado por $\vec{x}(t_0)$ y realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\vec{y}(t) = T^{-1}\ \vec{x}(t) \tag{2.5}$$

donde T es una matriz compleja $n{\times}n$, no singular; se consigue que la ecuación original de estado se convierta en:

$$T\ \frac{d\vec{y}}{dt} = A\ T\ \vec{y}(t)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = T^{-1}\ A\ T\ \vec{y}(t) \tag{2.6}$$

Si ahora en la ecuación (2.6) de alguna manera se lo gra que el producto $T^{-1}AT$ sea una matriz diagonal, entonces el conjunto de ecuaciones se convertiría en:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Dando lugar así a la forma canónica de Jordan de la ecuación de estado del sistema, que corresponde a la dada por (1.26) en la cual $u(t) = 0$ y todos los bloques de Jordan son de orden 1.

Para cada variable de la ecuación (2.7) se cumple que: $\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i\, y_i(t)$, de modo que la solución es $y_i(t) = y_i(o)\, e^{\lambda_i t}$; pudiéndose encontrar la solución $\vec{x}(t)$ en forma mucho más fácil a partir de la ecuación de transformación (2.5):

$$\vec{x}(t) = T\vec{y}(t) \qquad \text{con} \qquad \vec{y}(o) = T^{-1}\,\vec{x}(o)$$

No siempre es posible encontrar la matriz T que permita que $T^{-1}AT$ sea diagonal; sin embargo, se puede en dichos casos hallar T tal que $T^{-1}AT$ sea "casi" diagonal (forma de

Jordan) como se verá más adelante.

SEMEJANZA DE MATRICES:

Dos matrices A y B se llaman semejantes cuando existe una matriz no degenerada T tal que:

$$B = T^{-1} . A\ T \tag{2.8}$$

A la transformación $T^{-1}\ AT$ se denomina transformación de semejanza. También se dice que la matriz B es la transformada de A por T.

Algunas propiedades importantes de una transformación de semejanza se dan a continuación:

1.- Dos matrices, semejantes cada una a una tercera, son también semejantes.

2.- Para transformar una suma de matrices por T es suficiente transformar por T cada sumando, es decir:

$$T^{-1}(A_1+A_2+\ldots+A_K)T = T^{-1}A_1T+T^{-1}A_2T+\ldots+T^{-1}A_KT \tag{2.9}$$

3.- Para transformar un producto de matrices por T es suficiente transformar cada factor:

$$T^{-1}A_1A_2\cdots A_K T = T^{-1}A_1T\cdot T^{-1}A_2T\cdot\ldots\cdot T^{-1}A_KT \qquad (2.10)$$

4.- Para transformar una potencia de una matriz es suficiente transformar la base de la potencia, es decir:

$$T^{-1}\ A^m\ T \quad (T^{-1}\ A\ T)^m \qquad (2.11)$$

5.- El valor transformado de un polinomio en una matriz es igual al valor del polinomio en la matriz transformada, es decir:

$$T^{-1}f\ (A)\ T = f\ (T^{-1}\ A\ T) \qquad (2.12)$$

6.- Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores propios. De ésto se deduce que las matrices semejantes tienen trazas y determinantes iguales.

Interesa en el presente trabajo, el encontrar una matriz transformadora T tal que la transformada de A por T sea una matriz diagonal o de la forma de Jordan que se indica a continuación. De esta manera será posible convertir la ecuación (2.4) en una del tipo de (2.6) que sea la expresión más simple posible.

Es necesario aclarar que para encontrar la solución

$\vec{x}(t)$ de la ecuación de estado (1.32), será más conveniente aplicar un método de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales como el de Runge-Kutta, Adams Bashforth, etc. en un computador digital o simular en un computador analógico. Sin embargo, el conocimiento de la matriz T permitirá encontrar la matriz de transición de estado para sistemas de orden elevado y además será muy útil para el estudio de controlabilidad y observabilidad de los mismos.

FORMA CANONICA DE JORDAN.

La forma de Jordan es una matriz triangular superior que presenta la siguiente estructura general:

$$J = \begin{bmatrix} L_{11}(\lambda_1) & & & & & & 0 \\ & L_{21}(\lambda_1) & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & L_{K1}(\lambda_1) & & & \\ & & & & L_{12}(\lambda_2) & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & L_{mp}(\lambda_p) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

En ésta, cada $L_{ji}(\lambda_i)$ es una matriz triangular supe rior denominada *bloque de Jordan*. Con un mismo valor λ_i pueden estar asociados varios bloques de Jordan, pudiendo entre ellos diferenciarse en su dimensión según cada caso particular. La configuración de un bloque $L_{ji}(\lambda_i)$ es la siguiente:

$$L_{ji}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde la diagonal contiene los λ_i e inmediatamente sobre ésta y a la derecha se tienen unos. Todos los demás elementos de la matriz de Jordan son ceros.

A continuación se presentan dos ejemplos de matrices con la forma de Jordan.

Sea:

$$J = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Esta es una matriz de la forma de Jordan, constituí da por 3 bloques de Jordan en su diagonal, los cuales son:

$$L_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad L_{12}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} ; \quad L_{22}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Se observa que siempre que aparece un cero sobre la diagonal, aparece un límite entre 2 bloques de Jordan.

Sea,

$$J = \begin{bmatrix} 1-j1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+j1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz también tiene la forma de Jordan y los bloques $L_{ji}(\lambda_i)$ son:

$$L_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 - j\,1 \end{bmatrix} ; \quad L_{12}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 + j\,1 \end{bmatrix}$$

$$L_{13}(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad L_{14}(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Según esto, una matriz diagonal tiene también la for

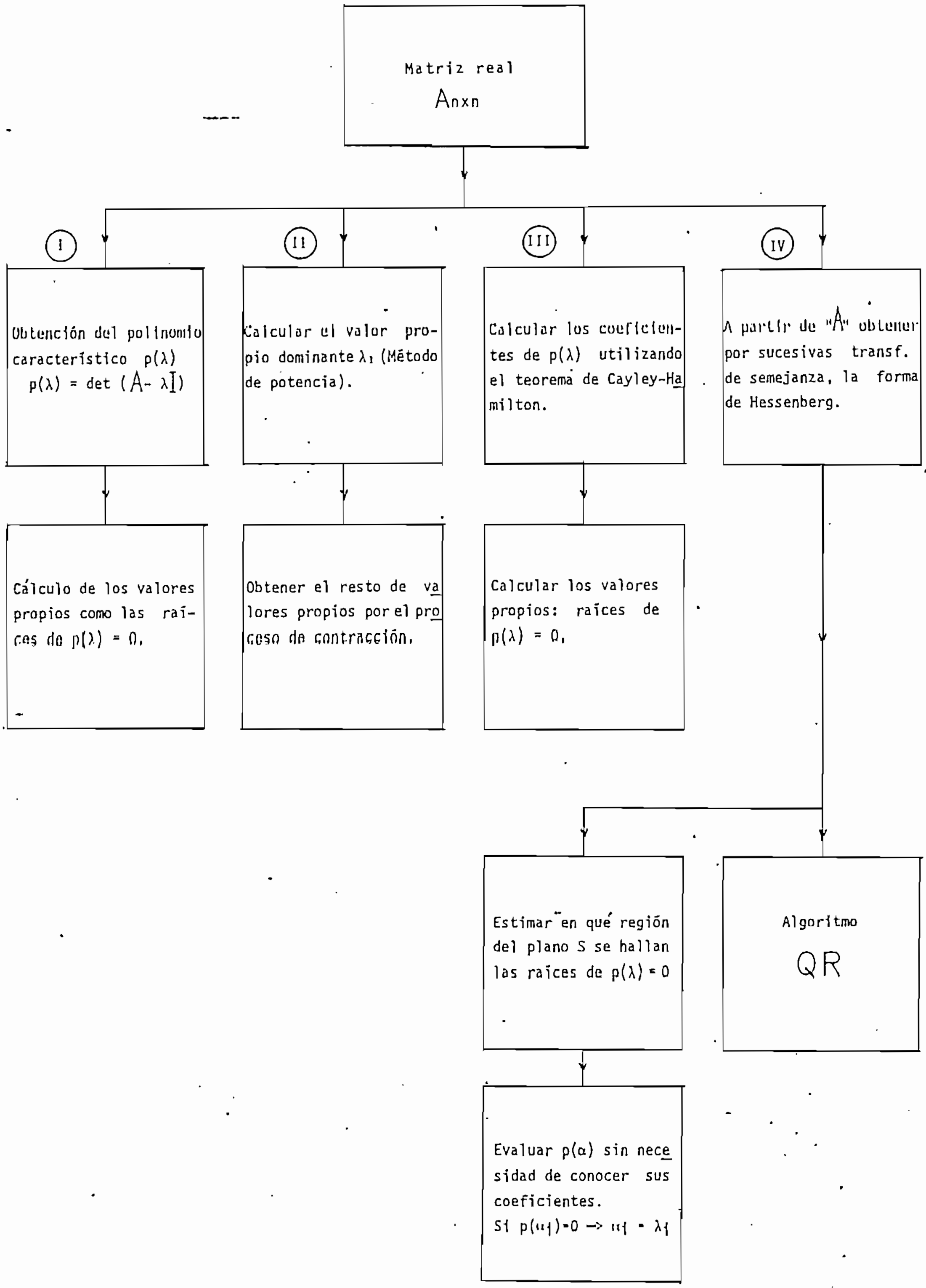
2.3 CALCULO DE LOS VALORES PROPIOS DE UNA MATRIZ.- METODOS.

Una matriz cuadrada real A, nxn tiene, como se ha indicado previamente, n valores propios, que son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det (A - \lambda I)$. Además como los coeficientes de éste son reales, si existe un valor propio complejo λ_i, su conjugado λ_i^* también será un valor propio de A.

Existen diferentes métodos para el cálculo de los valores propios. A continuación se presentan algunos en forma muy resumida y general, con el objeto de dar una idea de las ventajas y desventajas de los mismos, así como también para aclarar el método a utilizarse para el efecto en este trabajo.

En el cuadro 2.1 se indica el resultado de un estudio realizado sobre las diferentes formas de evaluar los valores propios de una matriz A, nxn. Estas consisten brevemente en lo siguiente:

I.- Obtener $p(\lambda)$ por expansión del determinante de $(A-\lambda I)$ y luego calcular los ceros $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ de $p(\lambda)$ por medio de alguna técnica para hallar las raíces de un polinomio.



CUADRO 2.1

Métodos para calcular los valores propios de una matriz real A, nxn

es práctica. Para evitar ésto, se puede utilizar el teorema de Cayley-Hamilton y calcular los coeficientes de $p(\lambda)$ en forma simple y fácil de llevar a cabo; pero, se debe tener cuidado en su uso pues en general los coeficientes no pueden ser calculados sin error debido al redondeo y puede aparecer el problema de un $p(\lambda)$ mal condicionado.

IV.- METODOS QUE UTILIZAN LA TRANSFORMACION DE SEMEJANZA.

a) A partir de la matriz A obtener una matriz de Hessenberg por medio de sucesivas transformaciones de semejanza. Estimar en qué región del plano complejo S se van a encontrar los valores propios de A, para lo que existen teoremas adecuados y entonces evaluar $p(\alpha)$ sin necesidad de calcular sus coeficientes. Cuando $p(\alpha) = 0$, entonces α es un valor propio.

b) Una vez obtenida la matriz de Hessenberg como en a), aplicar el algoritmo QR para encontrar los valores propios de la matriz A.

c) Si la matriz A es simétrica, utilizar el método de Householder que es más eficiente que los anteriores pues es menos sensitivo al error por redondeo al no requerir ninguna contracción ni el cálculo de los coeficientes del polinomio característico.

TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON.

Sea A una matriz real arbitraria n×n con polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, entonces se cumple que:

$$A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI = 0 \tag{2.15}$$

MATRIZ SUPERIOR DE HESSENBERG.

Es una matriz cuadrada $\{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ para la cual se cumple que $h_{ij} = 0$ para todo $i > j+1$. Así por ejemplo una matriz superior de Hessenberg 5×5 tiene la siguiente forma:

$$H = \begin{bmatrix} X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

diagonal
subdiagonal

ALGORITMO QR.

De todos los métodos disponibles en el presente para el cálculo de los valores propios, el algoritmo QR es considerado por los expertos como el mejor para la implementación en un computador digital, porque es muy estable en el sentido que el error por redondeo no afecta seriamente la exactitud del cálculo de los valores propios. El fundamento de este algoritmo es el siguiente:

Se desea transformar la matriz A, $n\times n$ en una matriz triangular en bloques B, $n\times n$ de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

donde cada A_{ii} es una matriz cuadrada 1×1 ó 2×2.

La transformación debe ser tal que los valores propios de la matriz B sean los mismos de la matriz A. Al ser así, los valores propios de la matriz B se calculan fácilmente, pues son los valores propios de cada uno de los bloques A_{ii}, como se demuestra aplicando la expansión de Laplace al det $(B - \lambda I)$.

Para conseguir dicha transformación, se sigue el procedimiento dado a continuación:

1.- Reducción previa de la matriz A a la forma de Hessenberg H, por medio de sucesivas transformaciones de semejanza. Este paso disminuye grandemente el número total de operaciones del algoritmo QR.

2.- Aplicar el algoritmo QR a la matriz H encontrada, y luego sucesivamente. Esto consiste en:

Para K = 1, 2, 3, ...

a) Factorar $H_K = Q_K U_K$

donde Q_K es una matriz ortogonal, y

U_K es una matriz triangular superior.

Siempre es posible esta factorización y existen varios métodos para ello.

b) Hallar $H_{K+1} \triangleq U_K Q_K = Q_K^{-1} H_K Q_K$ (2.18)

Se puede demostrar que H_{K+1} también tendrá la forma de Hessenberg.

3.- Aplicar repetitivamente el algoritmo QR hasta cuando la matriz resultante sea de la forma de B. (matriz triangular en bloques), y entonces calcular los valores propios de B que son los de la matriz A.

En caso de que no se consiga la convergencia del método para hallar $\mathbf{B}$ en un número de iteraciones adecuado (pequeño), se puede aplicar el denominado "*corrimiento del origen*" de tal forma que:

Para K = 1, 2, 3, ...

$$
\begin{aligned}
&\text{a) Factorar} \quad H_K - p_K I = Q_K U_K \\
&\text{b) Formar} \quad H_{K+1} \triangleq U_K Q_K + p_K I
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

donde p_K es una constante arbitraria. Para el caso en que p_K es una constante compleja, los cálculos se realizan con números complejos; pero, con el denominado "*algoritmo QR doble*" es posible evitar dicho cálculo con complejos aún para p_K complejo. Esto se realiza porque es a veces ventajoso el usar valores complejos de p_K para aumentar la velocidad de convergencia.

En muchos problemas numéricos a ser resueltos con un computador digital es conveniente "*escalar*" ó "*normalizar*" ciertos valores, con el objeto de mantenerlos dentro de los límites computacionales del equipo y tener mayor estabilidad numérica, cuidando lógicamente que los resultados no sean alterados o, en su defecto, se tome en cuenta para obtenerlos, el escalamiento cuando éste ha sido realizado.

Por ésto, es muy conveniente escalar la matriz A,n×n previamente al procedimiento anterior seguido para calcular sus valores propios.

2.4 CALCULO DE LOS VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ.- CASOS.

Una vez resuelto el problema de obtener los valores propios de una matriz real A,n×n, se trata a continuación el cálculo de los vectores propios correspondientes.

Como se indicó en la sección 2.1, un vector propio $\vec{x}_i$ es aquel vector no nulo que cumple con la ecuación $(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_i = 0$, en la que λ_i es un valor propio determinado de la matriz A.

Se pueden distinguir dos casos fundamentales en el cálculo de los vectores propios:

CASO I .- Todos los valores propios de la matriz A son distintos.

CASO II.- Existen valores propios que son raíces múltiples de la ecuación característica.

CASO I

Cuando todos los valores propios λ son de multiplici dad algebraica igual a uno, se cumple que:

$$\text{Rango } (A - \lambda_i I) = n - 1 \qquad \text{para cada } \lambda_i$$

La dimensión del espacio vectorial solución de la ecuación $(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_i = 0$ es igual a la degeneración Q_i de la matriz $(A - \lambda_i I)$, definida como:

$$Q_i = n - \text{rango } (A - \lambda_i I) \tag{2.20}$$

Así, en este caso $Q_i = 1$.

De esta manera, a cada valor propio λ_i corresponde un sólo vector propio $\vec{x}_i$ de longitud arbitraria; más exacto sería decir un espacio vectorial de dimensión 1 (Aunque para los $\vec{x}_i$ no se toma en cuenta el vector nulo).

Además se cumple que los n vectores propios correspondientes a los n valores propios distintos, son linealmente independientes. Por considerarse este teorema de fundamental importancia, se presenta a continuación su demostración:

Demostración por contradicción.

Sea A una matriz con valores propios distintos. Sean $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_n$ los vectores propios de A, con $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_K$ independientes y $\vec{x}_{K+1}$, ..., $\vec{x}_n$ dependientes. Entonces:

$\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ \vec{x}_i$ para $j = K+1, K+2, \ldots, n$ donde no todo $\beta_{ij} = 0$.

Como $\vec{x}_j$ es un vector propio,

$$A\vec{x}_j = \lambda_j\ \vec{x}_j = \lambda_j \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ \vec{x}_i \quad \text{para } j = K+1, \ldots, n \quad \text{y también,}$$

$$A\vec{x}_j = A \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ \lambda_i\ \vec{x}_i$$

Restando estas 2 ecuaciones se obtiene:

$$0 = \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}\ (\lambda_j - \lambda_i)\ \vec{x}_i$$

Pero los $\vec{x}_i$, $i = 1,2,\ldots,K$ fueron supuestos ℓ. i. Ya que no todos los β_{ij} son cero, algún $\lambda_i = \lambda_j$. Esto contradice la hipótesis de que A tiene valores propios distintos y así todos los vectores propios de A deben ser ℓ. i.

Para obtener la solución de la ecuación $(A-\lambda_i I)\vec{x}_i = 0$ para cada λ_i, $i = 1, \ldots, n$; existen diferentes métodos. En este trabajo se aplicará el de reducción de Gauss-Jordan, el mismo que será detallado en la sección 2.5.5.

Como los vectores propios son de longitud arbitraria, serán normalizados a la unidad, de modo que $||\vec{x}_i|| = 1$; donde la norma de un vector $\vec{a}$ se define como la raíz cuadrada del producto interno de $\vec{a}$ por sí mismo, es decir:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \tag{2.21}$$

Para esta aplicación, los elementos del vector $\vec{a}$ pertenecen, en general, al cuerpo de los números complejos y el producto interno de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^{\dagger}\,\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{*}\, b_i \tag{2.22}$$

siendo $\vec{a}^{\dagger}$ el vector formado por los elementos conjugados del vector transpuesto de $\vec{a}$, $\vec{a}^{T}$.

Si un vector se divide para su norma (real), el vector resultante tiene norma igual a 1.

Para aclarar estos conceptos se dan a continuación dos ejemplos:

1.- Sean los vectores

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 + ja_2 \\ \\ a_3 + ja_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 + jb_2 \\ \\ b_3 + jb_4 \end{bmatrix}$$

El producto interno de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de acuerdo a la definición (2.22), es:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}^{+}\ \vec{b} = (a_1 - ja_2 \quad a_3 - ja_4) \begin{bmatrix} b_1 + jb_2 \\ \\ b_3 + jb_4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(a_1-ja_2)(b_1+jb_2) + (a_3-ja_4)(b_3+jb_4)\right]$$

$$= \left[(a_1b_1 + a_2b_2) + j\ (a_1b_2 - a_2b_1) + \right.$$

$$\left. + (a_3b_3 + a_4b_4) + j\ (a_3b_4 - a_4b_3)\right]$$

$$= \left[(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)+j\ (a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)\right]$$

El producto interno de $\vec{a}$ por sí mismo, es:

$$(\vec{a},\vec{a}) = \vec{a}^{+}\ \vec{a} = (a_1-ja_2 \quad a_3-ja_4) \begin{bmatrix} a_1 + ja_2 \\ \\ a_3 + ja_4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(a_1-ja_2)(a_1+ja_2) + (a_3-ja_4)(a_3+ja_4)\right]$$

$$= \left[\ {a_1}^2 + {a_2}^2 + a_3^2 + {a_4}^2\right]$$

La norma del vector $\vec{a}$, de acuerdo a la definición (2.21) es:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

En forma similar se calcula la norma del vector $\vec{b}$, obteniéndose:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{b},\vec{b})} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

Calculemos ahora los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\begin{bmatrix} a_1 + ja_2 \\ a_3 + ja_4 \end{bmatrix}}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2}}$$

$$\vec{d} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 + jb_2 \\ b_3 + jb_4 \end{bmatrix}}{\sqrt{b_1{}^2 + b_2^2 + b_3{}^2 + {}_4{}^2}}$$

De modo que:

$$\|\vec{c}\| = \left\| \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right\| = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = 1$$

$$\|\vec{d}\| = \left\| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right\| = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} = 1$$

2.- Si en el ejemplo anterior todas las partes imaginarias de las componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales a cero (componentes reales), se tiene:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \\ a_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_3 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1 b_1 + a_3 b_3$$

$$(\vec{a},\vec{a}) = a_1{}^2 + a_3{}^2 \quad ; \quad (\vec{b},\vec{b}) = b_1{}^2 + b_3{}^2$$

$$\|\vec{a}\| \quad \sqrt{a_1{}^2 + a_3{}^2} \quad ; \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{b_1{}^2 + b_3{}^2}$$

si:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad ; \quad \vec{d} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

entonces:

$$\|\vec{c}\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{d}\| = 1$$

De los 2 ejemplos anteriores, se puede generalizar para el caso de vectores con n componentes. Así, si $\vec{a}$ es un vector con n componentes y se desea convertirlo en un vector de norma unitaria, basta con dividir cada uno de sus componentes para su norma original.

$$a_{NORMALIZADO} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

donde:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} \text{parte real} \\ \text{componente } i \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} \text{parte imagi.} \\ \text{componente } i \end{pmatrix}^2 \right]} \qquad (2.23)$$

En base al estudio anterior, en el CASO I siempre es posible transformar la matriz $A_{n\times n}$ en una matriz diagonal por medio de una transformación de semejanza $T^{-1}A\,T$, si se escoge la matriz T con sus vectores columna iguales a los vectores propios de A. Así:

$$T = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots, \vec{x}_n\right]$$

donde los $\vec{x}_i$ son los vectores propios de A.

$$AT = \left[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n\right] = \left[\lambda_1\vec{x}_1, \lambda_2\vec{x}_2, \ldots, \lambda_n\,\vec{x}_n\right]$$

$$= \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots, \vec{x}_n\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos miembros de esta igualdad por T^{-1} (T es no singular pues todos los vectores propios son $\ell.i$) se tiene:

$$T^{-1}A\,T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde los λ_i son los valores propios de A.

CASO II

Cuando uno o más valores propios de A, $n \times n$ tienen multiplicidad algebraica mayor que 1, existen diferentes subcasos según los cuales se puede o no encontrar n vectores propios linealmente independientes.

Siempre que sea posible hallar n vectores propios linealmente independientes, se podrá por medio de una transformación de semejanza $T^{-1} A T$, obtener una matriz diagonal. La matriz T estará conformada por los vectores propios de A como sus columnas; y los valores propios correspondientes constituirán la diagonal de la matriz transformada, hallándose cada uno ubicado en la columna cuyo orden es igual a la del vector o vectores propios respectivos de T.

En cambio, cuando no es posible hallar n vectores propios linealmente independientes, siempre se puede encontrar un conjunto de n vectores *l.i.* formado por vectores propios y por vectores denominados *vectores propios generalizados*. En estos casos, por medio de una transformación de semejanza, $T^{-1} A T$, se podrá obtener una matriz de la forma de Jordan (2.13). La matriz T estará conformada por los vectores propios y vectores propios generalizados; y la diagonal de la forma de Jordan contendrá los valores propios, cada uno en un número igual a su multiplicidad y en un orden de columnas corres pondiente al de los vectores respectivos de T.

En general, tanto en el CASO I como en el CASO II, se cumple lo siguiente:

Para cada valor propio λ_i de multiplicidad algebraica m_i, el número de vectores propios linealmente independientes y el número de bloques de Jordan, asociados con él, es igual a la degeneración Q_i de la matriz $(A - \lambda_i I)$, definida por (2.20) como:

$$Q_i = n - \text{rango}\ (A - \lambda_i I)$$

y siempre $\quad 1 \leqslant Q_i \leqslant m_i$

Esto es, la dimensión del espacio vectorial solución de la ecuación $(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_i = 0$, es igual a la degeneración Q_i.

Además existe un y sólamente un vector propio asociado con cada bloque de Jordan y viceversa.

Dentro del CASO II se distinguen 3 subcasos:

CASO II_1.- Degeneración total, $Q_i = m_i$

Existen m_i vectores propios *l.i.*, y m_i bloques de

Jordan de orden 1x1, asociados con λ_i de multiplicidad m_i . Observar que el CASO I está dentro de ésto con $m_i = 1$ para todos los valores propios. Para hallar los m_i vectores propios se aplicará el método de reducción de Gauss - Jordan a la ecuación $(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_i = 0$.

CASO II$_2$.- Degeneración simple, $Q_i = 1 \neq m_i$

En este caso existe sólo un vector propio y un bloque de Jordan de orden $m_i \times m_i$ asociados con λ_i de multiplicidad $m_i > 1$. Debe calcularse, entonces, un vector propio y $(m_i - 1)$ vectores propios generalizados, todos linealmente independientes. Esto es posible mediante los dos siguientes métodos:

METODO 1.

a) Calcular el vector propio $\vec{x}_1$ de la ecuación $(A - \lambda_i I)\vec{x}_1 = 0$ por el procedimiento de reducción de Gauss - Jordan.

b) Calcular los $(m_i - 1)$ vectores propios generalizados: $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, ..., $\vec{x}_{m_i}$ mediante el siguiente procedimiento:

$$(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_2 = \vec{x}_1$$
$$(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_3 = \vec{x}_2$$
$$\vdots$$
$$(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_{m_i} = \vec{x}_{m_i - 1}$$

METODO 2.

a) Un vector propio generalizado de rango K se define como un vector no nulo que satisface:

$$(A - \lambda_i I)^K \vec{x}_K = 0 \qquad y \qquad (A - \lambda_i I)^{K-1} \vec{x}_K \neq 0$$

Se debe encontrar el vector propio generalizado $\vec{x}_{m_i}$ de rango m_i.

b) Hallado $\vec{x}_{m_i}$, el resto de vectores se generan por la regla:

$$\vec{x}_{m_{i-1}} = (A - \lambda_i I)\ \vec{x}_{m_i}$$
$$\vec{x}_{m_{i-2}} = (A - \lambda_i I)\ \vec{x}_{m_{i-1}}$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_1 = (A - \lambda_i I)\ \vec{x}_2$$

El vector propio es $\vec{x}_1$ pues satisface la ecuación: $(A - \lambda_i I)\ \vec{x}_1 = (A - \lambda_i I)^{m_i}\ \vec{x}_{m_i} = 0$.

Para justificar estos dos métodos se presenta a continuación la siguiente demostración fundamental:

Si $\vec{x}_1$ es un vector própio y $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, ..., $\vec{x}_K$ son vectores propios generalizados, todos asociados con el mismo valor propio λ_i, se cumple:

1.- Todos estos vectores son solución de la ecuación:

$(A - \lambda_i I)^K \vec{x}_i = 0.$

2.- El conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_K\}$ es linealmente independiente.

DEMOSTRACION:

Las ecuaciones que definen el conjunto de vectores son:

$$
\begin{array}{llll}
A\vec{x}_1 = \lambda_i\vec{x}_1 \qquad \vec{x}_1 \neq 0 \quad , & ó & (A - \lambda_i I)\,\vec{x}_1 = 0 & (1) \\
A\vec{x}_2 = \lambda_i\vec{x}_2 + \vec{x}_1 & & (A - \lambda_i I)\,\vec{x}_2 = x_1 & (2) \\
A\vec{x}_3 = \lambda_i\vec{x}_3 + \vec{x}_2 & & (A - \lambda_i I)\,\vec{x}_3 = \vec{x}_2 & (3) \\
\vdots & & \vdots & \\
A\vec{x}_K = \lambda_i\vec{x}_K + \vec{x}_{K-1} & & (A - \lambda_i I)\,\vec{x}_K = \vec{x}_{K-1} &
\end{array}
\tag{2.24}
$$

1.- De las ecuaciones (1) y (2):

$$(A - \lambda_i I)^2\,\vec{x}_2 = (A - \lambda_i I)\,\vec{x}_1 = 0$$

Multiplicando la ecuación (3) por $(A - \lambda_i I)^2$ se tiene:

$$(A - \lambda_i I)^3\,\vec{x}_3 = (A - \lambda_i I)^2\,\vec{x}_2 = 0$$

En general, se puede ver que:

$$(A - \lambda_i I)^P \vec{x}_p = 0 \qquad y \qquad (A - \lambda_i I)^{P-1} \vec{x}_P = \vec{x}_1$$

ya que $(A - \lambda_i I)^K = (A - \lambda_i I)^{K-P} (A - \lambda_i I)^P$, se cumple:

$$(A - \lambda_i I)^K \vec{x}_p = 0 \qquad \text{para} \qquad p = 1,2,\ldots, K$$

2.- Sea $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots. + a_K\vec{x}_K = 0$ (4)

Multiplicando esta ecuación (4) por $(A - \lambda_i I)^{K-1}$ se obtiene:

$$a_K (A - \lambda_i I)^{K-1} \vec{x}_K = 0$$

ya que $(A - \lambda_i I)^{K-1} \vec{x}_K = \vec{x}_1 \neq 0 \Rightarrow a_K = 0$

Ahora, multiplicando (4) por $(A - \lambda_i I)^{K-2}$ se demuestra que $a_{K-1} = 0$. Así sucesivamente se muestra que si:

$\sum_{i=1}^{K} a_i \vec{x}_i = 0$, entonces $a_i = 0$ para $i = 1,2,\ldots,K$.

Es decir que el conjunto $\{\vec{x}_i\}$ es linealmente independiente.

Se debe notar que si el conjunto de ecuaciones (2.24) lo escribimos en forma matricial se tiene:

$$A\Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vector}\\ \text{Propio}}}{\vec{x}_1},\underbrace{\vec{x}_2,\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_{mi}}_{\substack{\text{Vectores propios}\\ \text{generalizados.}}}\Big) = \Big(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_{mi}\Big)\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Bloque de Jordan}\\ m_i \times m_i}} \qquad (2.25)$$

En el CASO II_2, en este trabajo se aplicará el METODO 1, para obtener el vector propio y los vectores propios generalizados.

CASO II_3.- $1 < Q_i < m_i$

En este caso el número de vectores propios y de bloques de Jordan, asociados con λ_i de multiplicidad m_i, seguirá siendo igual a Q_i. Entonces se deben calcular Q_i vectores propios y $(m_i - Q_i)$ vectores propios generalizados. Sin embargo, se presenta todavía una ambigüedad respecto al orden de los bloques de Jordan. Para aclarar ésto, supongamos que se tiene un λ_i con $m_i = 4$ y $Q_i = 2$, entonces los bloques de Jordan pueden tener las dos siguientes formas, pero, sólo una de ellas será la correcta.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad J_2 = [\lambda_i]$$

Ecuaciones correspondientes	Ecuaciones correspondientes
$A\vec{x}_1 = \lambda_i\vec{x}_1$	$A\vec{x}_1 = \lambda_i\vec{x}_1$
$A\vec{x}_2 = \lambda_i\vec{x}_2 + \vec{x}_1$	$A\vec{x}_2 = \lambda_i\vec{x}_2 + \vec{x}_1$
$A\vec{x}_3 = \lambda_i\vec{x}_3$	$A\vec{x}_3 = \lambda_i\vec{x}_3 + \vec{x}_2$
$A\vec{x}_4 = \lambda_i\vec{x}_4 + \vec{x}_3$	$A\vec{x}_4 = \lambda_i\vec{x}_4$
vectores propios : $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$	vectores propios : $\vec{x}_1$, $\vec{x}_4$
vectores propios generalizados : $\vec{x}_2$, $\vec{x}_4$	vectores propios generalizados : $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$

Para resolver este tipo de ambigüedades se puede utilizar un método de ensayo y error con el propósito de detectar la forma correcta de los bloques de Jordan. Sin embargo, éste no es muy sistemático para ser implementado en un computador. De ahí que en el presente trabajo se prefiere un procedimiento que elimina las mencionadas ambigüedades y requiere mayores conocimientos de Algebra Lineal. Por tal razón, antes de indicar el método, se menciona lo esencial de su fundamento sin presentar demostraciones:

Sea $\mathscr{L}$ un espacio vectorial lineal de dimensión n, sobre el campo de los números complejos. Entonces, si $\mathcal{A}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una aplicación lineal y $\mathcal{L}_1$ un subespacio de $\mathcal{L}$, se dice que $\mathcal{L}_1$ es *invariante respecto a la aplicación* $\mathcal{A}$ si para todo vector $\vec{x} \in \mathcal{L}_1$, se cumple que $\mathcal{A}(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1$.

El conjunto de vectores $\vec{x}_i$ que cumplen con la relación $\mathcal{A}(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$, para un valor determinado λ_i, se define como espacio propio de λ_i y está constituído por los vectores propios de $\mathcal{A}$ asociados con λ_i en unión con el vector cero.

El espacio propio de λ_i es un subespacio y se denomina también *Espacio nulo* de la aplicación $(\mathcal{A} - \mathcal{I}\lambda_i)$. Se lo denotará con $\mathcal{R}_i$.

$\mathcal{R}_i$ es un subespacio invariante respecto de $\mathcal{A}$ y tiene una dimensión igual a la degeneración de $(\mathcal{A} - \mathcal{I}\lambda_i)$.

Si $\mathcal{A}$ tiene n vectores propios *l.i.*, se dice que es una *aplicación simple*, en cuyo caso se cumple que el espacio vectorial $\mathcal{L}$ es igual a la *suma directa* de los espacios nulos asociados con los p valores propios de $\mathcal{A}$. Es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_3 \oplus \; .... \; \oplus \mathcal{R}_p \qquad (2.26)$$

(p < n para el caso II_1)

Cuando $\mathcal{A}$ no es simple, sus vectores propios no forman una base de $\mathscr{L}$ (Casos II_2 y II_3). Sin embargo, es posible construir una base añadiendo vectores propios generalizados.

Debido a que puede darse el caso II_3, es conveniente definir como *vector radical de altitud* K_i, (ó vector propio generalizado de rango K_i), correspondiente al valor propio λ_i de $\mathscr{A}$, al $\vec{x}_i$ que cumple:

$$(\mathscr{A}-\mathscr{I}\lambda i)^{K_i}\,\vec{x}_i = 0 \tag{2.27}$$

Se observa que un vector propio, es un vector radical de altitud 1.

Todos los vectores radicales correspondientes a diferentes valores propios son necesariamente linealmente independientes, de modo que:

$$\mathscr{L}=\mathscr{R}_1^{K_1}\oplus\mathscr{R}_2^{K_2}\oplus\mathscr{R}_3^{K_3}\oplus\ldots\oplus\mathscr{R}_p^{K_p} \tag{2.28}$$

En base a ésto, el método a desarrollarse es el siguiente:

1.- Calcular la matriz $(A-\lambda_i I)^{K_i}$, tal que K_i sea el menor entero para el que se cumpla:

rango $(A-\lambda_i I)^{K_i} = n-m_i$

Esto significa que la dimensión del espacio nulo de $(A-\lambda_i I)^{K_i}$

sea igual a m_i ..

2.- Calcular una base del espacio nulo de $(A - \lambda_i I)^{K_i}$

3.- Hallar los vectores propios generalizados que cumplen con: $(A - \lambda_i I)^{K_i} \vec{x}_i = 0$ y $(A - \lambda_i I)^{K_i - 1} \vec{x}_i \neq 0$ (2.29)

4.- A partir de los vectores hallados en 3.-, calcular los demás vectores propios generalizados y vectores propios, que corresponden a bloques de Jordan de orden $K_i \times K_i$ Para ésto se seguirá un proceso similar al del método 2 del caso II_2.

5.- Calcular los restantes vectores (en caso de existir) de la matriz T, asociados con el valor propio λ_i, que corresponden a bloques de Jordan de orden menor que $K_i \times K_i$; a partir de los vectores base encontrados en 2.-) que no cumplen con la condición de 3.-). En cada caso debe comprobarse que estos vectores formen con los previamente hallados (todos asociados con λ_i) un conjunto $\ell.i.$

2.5 OBTENCION DE LA MATRIZ TRANSFORMADORA "T" Y DE LA FORMA DE JORDAN "J". DESARROLLO DE PROGRAMAS.

2.5.1 ESTRUCTURA DE LA BIBLIOTECA DE PROGRAMAS.

El equipo de computación a utilizarse es el "*4051 GRAPHIC SYSTEM*" de la Casa Tektronix. Una de las especificaciones de la unidad central de procesamiento indica que el lenguaje de programación con el que trabaja es el *BASIC*, incluyendo, además de todos los elementos standard de éste, instrucciones para gráficos y otras extensiones. Por tal razón se empleará dicho lenguaje en todos los programas.

La capacidad de memoria del equipo, disponible para el usuario, es de 30 K bytes (de 8 bits); ésta es relativamente pequeña para el presente trabajo si se considera la necesidad de realizar el análisis hasta de sistemas de control de órdenes considerables, los cuales serán posiblemente los más prácticos. Esto obliga a tener varios programas en lugar de uno sólo; ellos constituyen un todo, pero a su vez son mutuamente excluyentes de tal manera de poder ser ejecutados por separado y en distintos tiempos. Así, es posible tener cada vez en la memoria del computador, sólo aquel programa que se debe ejecutar en un momento determinado, manteniendo el resto en la unidad de discos. Esto disminuye la velocidad de ejecución por el tiempo requerido para cargar automáticamente en memoria cada programa cuando deba ser procesado, habiendo previamente borrado el anterior; sin embargo, en general, la magnitud del programa o programas que pueden estar a la vez en memoria, dependerá de la capacidad del computador en cuanto a ella se refiere. (Por supuesto que habrán límites que ya no podrán ser mejorados mediante esta optimización en la utilización de memoria y estarán dados por la capacidad propia del equipo).

En la Fig. 2.1 se presenta la conformación general de la biblioteca de programas, los cuales permitirán resolver numéricamente los problemas planteados en las secciones anteriores.

Es de fundamental importancia indicar que en la versión de BASIC utilizada, no existe independencia entre las variables de un programa principal y de una subrutina que podría ser llamada por éste, a diferencia de lo que ocurre por ejemplo en FORTRAN en el que es perfectamente aceptable usar el mismo nombre de variable en un subprograma o en varios subprogramas o aún en el programa principal, aunque éstos puedan tener un uso completamente distinto. Tampoco hay independencia

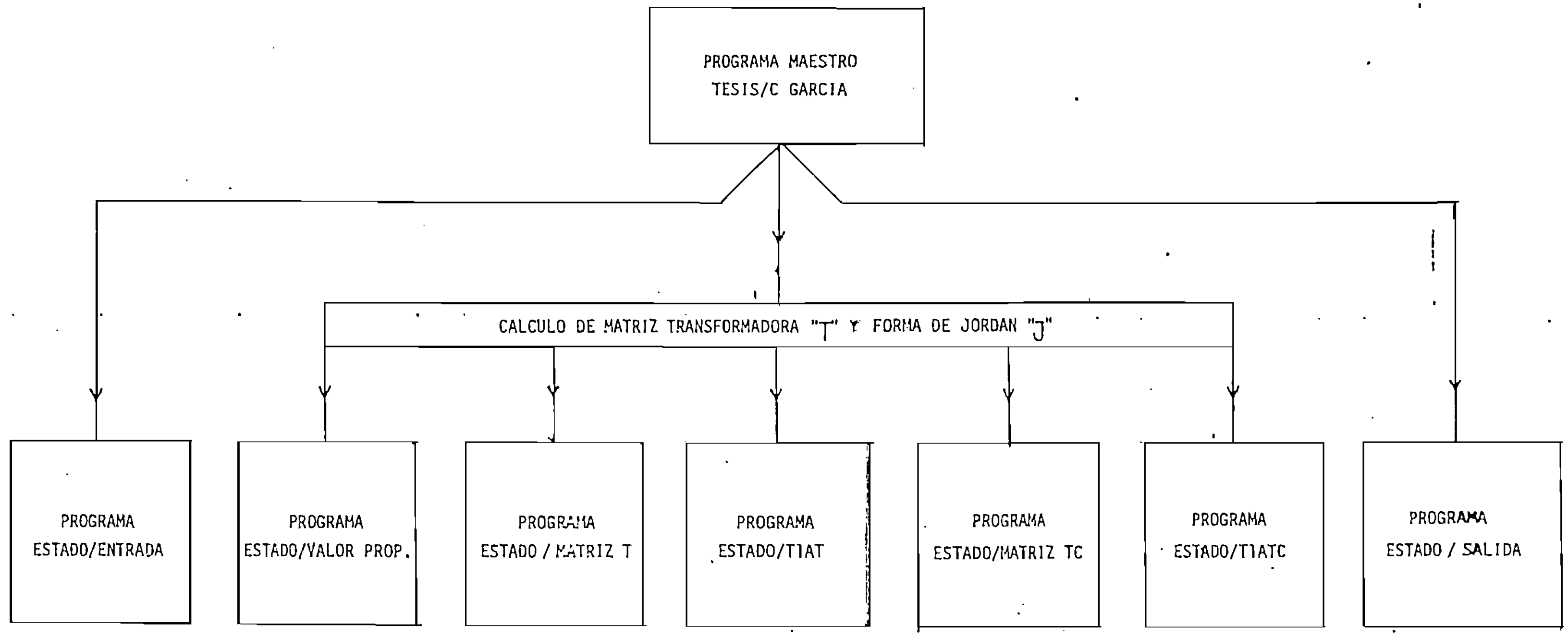


FIG. 2.1

Estructura de la Biblioteca de Programas entre variables de diferentes programas. De tal manera que forzosamente se debe mantener una estricta consistencia en los nombres de las variables a lo largo de todos los programas y subprogramas.

A continuación, para cada programa se explica en forma concisa la función que desempeña y sus características fundamentales; se presenta una lista de los nombres de las variables empleadas, indicando el significado de cada una y se expone un diagrama de flujo que permite un estudio completo del funcionamiento del programa, sin caer en la minuciosidad que en lugar de aclarar puede confundir y distraer la atención de aquello que es esencial. Para mayor detalle el lector se puede referir al listado correspondiente del APENDICE B.

2.5.2 Programa Maestro: TESIS/CGARCIA.

Este programa dirige automáticamente el funcionamiento de los demás de la biblioteca, borrando cada vez uno de la memoria y cargando otro en su lugar, de una manera sucesiva y en el orden determinado por la lógica del proceso.

Su ejecución consiste básicamente en lo siguiente:

1.- Verificar si está o no en memoria el programa requerido.
2.- Si está en memoria, entonces que se ejecute.

3.- Si no está en memoria, entonces:

a) limpiar la memoria.

b) cargar el programa deseado.

c) ejecutar dicho programa.

Un índice aparecerá en pantalla cada vez que se lo requiera.

Al ser ejecutado por primera vez, inicializa ciertas variables necesarias para el funcionamiento de todos los programas.

Habrá una parte del programa maestro que permanecerá en memoria en el transcurso de toda la ejecución, de modo de cumplir su objetivo en el momento que otro programa lo requiera o el usuario lo desee.

Los nombres de las variables utilizadas y las cantidades que representan son los siguientes:

NOMBRE		CANTIDAD
UØ	....	Número de la unidad de discos utilizada.
01	....	Número del programa que se desea ejecutar.
02	....	Número del programa que está en memoria.
03	....	Número de opción dentro del programa 01
U2	....	Dirección de la unidad de impresión.
U1	....	Cantidad para controlar la lógica en el programa de ingreso, verificación y corrección de datos.

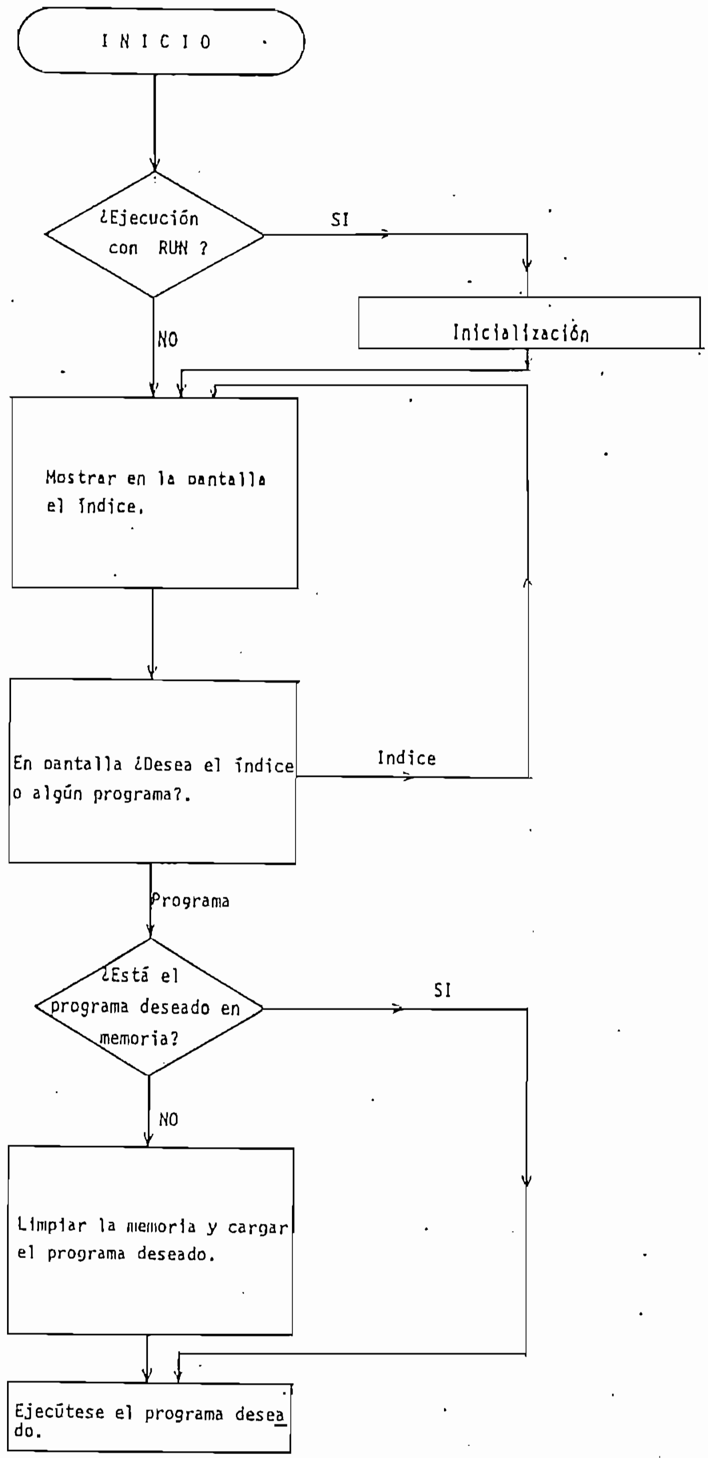


FIG. 2.2

Diagrama de flujo del programa maestro: TESIS/CGARCIA.

El diagrama de flujo para el programa se muestra en la Fig. 2.2.

2.5.3 Programa: ESTADO/ENTRADA.

Este programa sirve para el ingreso inicial de datos y tiene las siguientes opciones de trabajo:

1.- Ingreso de datos (valores numéricos).
2.- Lectura de datos de archivo (en disco).
3.- Listado de datos.
4.- Corrección.
5.- Comienzo de cálculo.
6.- Ingreso de datos (expresiones)

Es claro que las alternativas 3, 4 y 5 no podrán ser ejecutadas sin que previamente se haya ejecutado alguna de las restantes.

Los datos que son necesarios para todos los programas posteriores corresponden a las matrices de las ecuaciones de estado y de salida definidas en (1.32), para el caso de sistemas invariantes en tiempo. Por ésto se solicita del usuario lo siguiente:

- Identificación del problema en 1 renglón.

- Orden del sistema a ser analizado: N
- Número de entradas del sistema (orden del vector $\vec{u}(t)$): M
- Número de salidas del sistema (orden del vector $\vec{y}(t)$): K
- Elementos de las matrices A, B, C y D en orden de filas.

Una vez ingresados los datos, podrán ser almacenados en un determinado archivo del disco, si así lo desea el usuario, de modo de hacer factible la repetición del análisis de un mismo sistema sin necesidad de volver a ingresar sus datos. Además, con el objeto de ahorrar memoria, cada vez que se proceda a comenzar el cálculo (opción 5), los datos serán automáticamente almacenados en un archivo común de trabajo del disco y borradas de la memoria del computador las matrices B, C y D.

De acuerdo a lo anterior, cada vez que se ejecute un programa, se deberá tener en memoria sólo los datos estrictamente necesarios para su realización, leyéndolos de los archivos correspondientes.

Los nombres de las variables y las cantidades que representan son los siguientes:

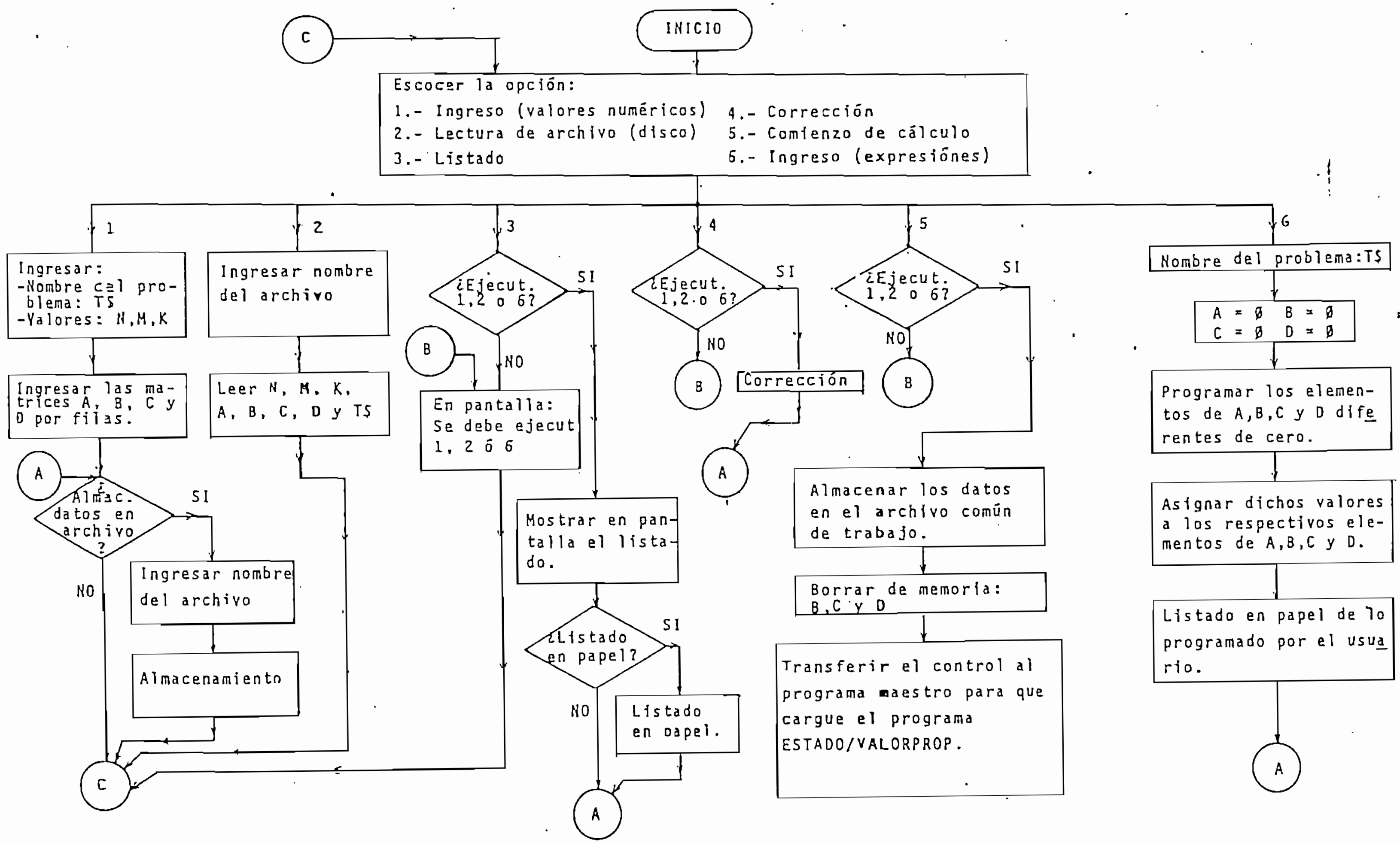


FIG. 2.3

Diagrama de flujo del programa: ESTADO/ENTRADA

NOMBRE		CANTIDAD
N	....	Orden del sistema.
M	....	Número de entradas del sistema.
K	....	Número de salidas del sistema.
A	....	Matriz de orden $N \times N$
B	....	Matriz de orden $N \times M$
C	....	Matriz de orden $K \times N$
D	....	Matriz de orden $K \times M$
K1	....	Número de la alternativa deseada dentro del programa.
N$	....	Nombre del archivo en el que el usuario desea almacenar los datos.
DAT	....	Nombre del archivo común de trabajo
T$	....	Identificación dada por el usuario al análisis de cada sistema particular.
U1	....	Cantidad para controlar la lógica en el programa de entrada.
U2	....	Dirección de la unidad de impresión.

En la Fig. 2.3 se tiene el diagrama de flujo del programa, con lo cual se aclara aún más su funcionamiento.

2.5.4 Programa: ESTADO/VALORPROP.

Mediante este programa, se calculan todos los valores propios de la matriz real A, nxn; luego se los ordena de modo que queden contiguos (como componentes de un vector) valores propios iguales y finalmente se chequea si existe o no al menos un valor propio con parte imaginaria significativa ; si es así, el cálculo posterior (siguientes programas) se hará con números complejos, de lo contrario sólo con reales.

El motivo por el cual se ubica contiguos a valores propios iguales, se encuentra en la forma de trabajar de los programas MATRIZT o MATRIZTC en lo que se refiere al cálculo de la multiplicidad de un valor propio, ésto quedará claro al estudiar dichos programas.

El programa, en lo que respecta al cálculo de los valores propios, es parte del software que trae el sistema. El método que utiliza es precisamente el IV de la sección 2.3, en el que se aplica el algoritmo QR doble.

Las limitaciones que posee son:

- Cuando existen valores propios repetidos, éstos pueden aparecer algo diferentes debido a errores de redondeo y/o truncamiento en su cálculo. Esta diferencia no se halla dentro de un rango fijo para todos los casos, de ahí surge la dificultad posterior en la estimación de cuál debe ser la diferencia máxima permitida para considerar a dos valo res propios iguales. En este programa, dicha diferencia se ha fijado en 10^{-5} tanto para la parte real como para la imaginaria.

- Existe en el programa la posibilidad de no poder hallar todos los valores propios.

Los nombres de variables utilizadas en el programa y las cantidades que representan son los siguientes:

NOMBRE		CANTIDAD
N	......	Número de filas (y de columnas) de la matriz A.
A	......	Matriz real cuyos valores propios se desean calcular.
EØ	......	Vector de longitud N que almacena las partes reales de los valores propios de A.
E1	......	Vector de longitud N que almacena las partes imaginarias de los valores propios de A.
E3	......	Matriz auxiliar de orden N × N

Son variables de borrador todas aquellas cuyos nombres comienzan con las letras P, Q, R.

La Fig. 2.4 muestra el diagrama de flujo del programa.

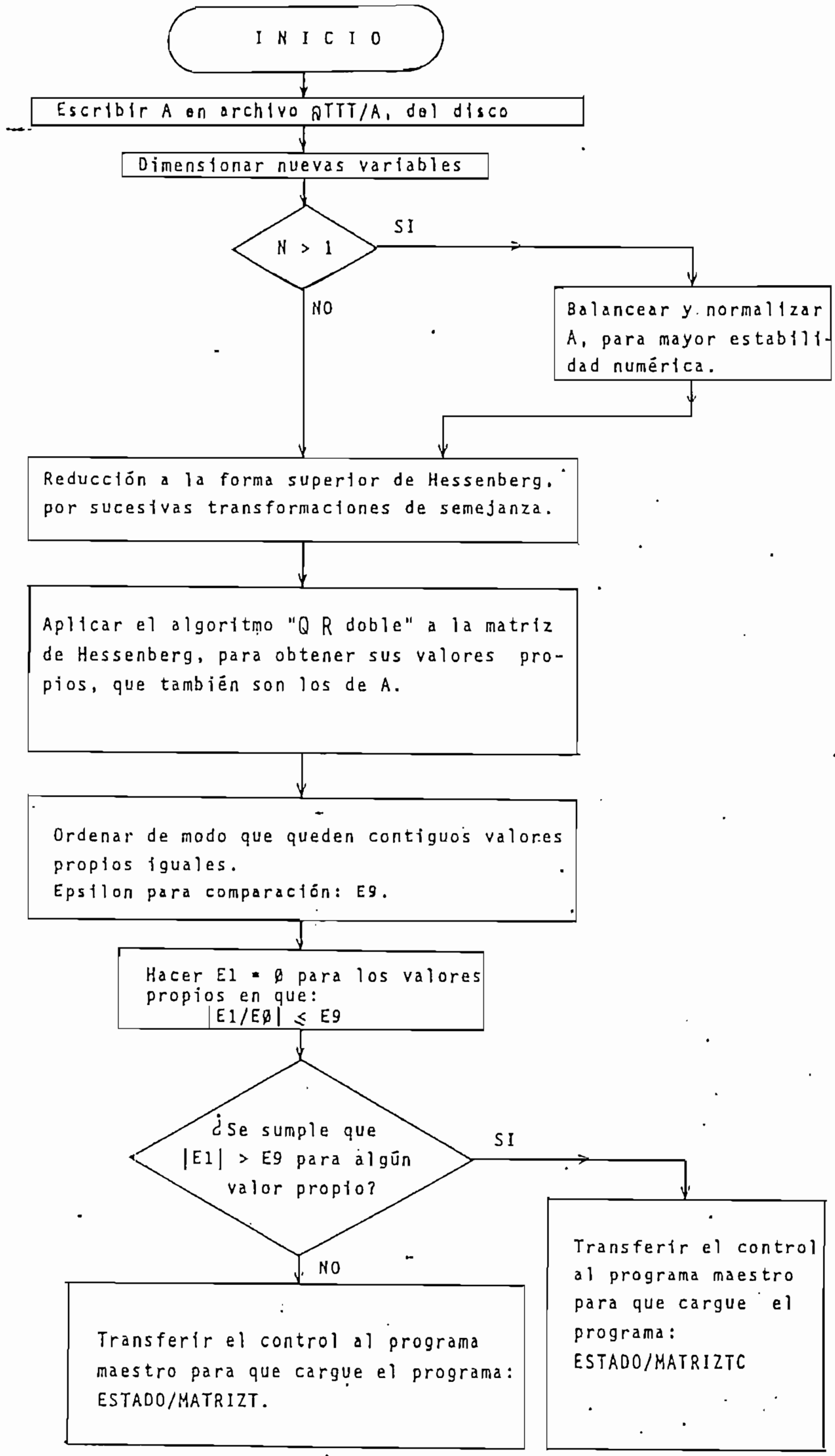


FIG. 2.4

Diagrama de flujo del programa: ESTADO/VALORPROP

2.5.5 Programa: ESTADO / MATRIZT

Este programa calcula todos los vectores propios y, si es necesario, vectores propios generalizados, correspondientes a la matriz real A, n×n de la ecuación de estado (1.32) para el caso invariante en tiempo.

Se abreviará:

vectores propios.- VP.

vectores propios generalizados.- VPG.

Como se explicó en la sección 2.4, con dichos vectores es posible construír la matriz T que permita que la transformación de semejanza $T^{-1} A T$ de lugar a una matriz diagonal o a una matriz de la forma canónica de Jordan J, que serán utilizadas posteriormente para obtener la "*Matriz de Transición de Estado*" del sistema y además, realizar un análisis de Controlabilidad y Observabilidad del mismo.

El programa, como es evidente, requiere para su ejecución, del cálculo previo de todos los valores propios de la matriz A; de ahí que está sujeto a las limitaciones del programa ESTADO / VALORPROP, señaladas en la sección 2.5.4.

La sección 2.4 contiene los fundamentos teóricos su ficientes para comprender el procedimiento a seguirse en el cálculo de VP. y VPG.

Un papel esencial dentro del programa desempeña el método de Gauss - Jordan para la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas; el mismo que se halla desarrollado como una subrutina. Por su importancia, se explica su fundamento a continuación:

SUBRUTINA GAUSS - JORDAN

Si se tiene el siguiente sistema de N ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, con N incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.30}$$

Este puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

o en forma compacta:

$$A1\vec{x} = \vec{b} \tag{2.32}$$

donde: $A1$ = matriz real de orden NxN

$\vec{x}$ = vector incógnita de longitud N

$\vec{b}$ = vector independiente de longitud N.

Existe un conjunto de operaciones que es posible realizar sobre las ecuaciones del sistema (2.30), sin que se altere su solución. Estas operaciones elementales, desde el punto de vista matricial (ecuación 2.31) son las siguientes:

1.- Intercambio de dos filas.

2.- Multiplicación de una fila por un escalar.

3.- Sumar α veces (α escalar) una fila a otra.

4.- Además se pueden intercambiar 2 columnas, pero se debe tomar en cuenta que entonces se deben intercambiar también las componentes correspondientes del vector independiente (filas) . Es decir, si por ejemplo se intercambia en la matriz de coeficientes la columna 2 con la 5, entonces, en el vector independiente, x_2 viene a ser x_5 y x_5 viene a ser x_2.

La existencia o no de soluciones del sistema (2.32) viene dada por:

I) Si rango A1 $\neq$ rango $(A1 \mid \vec{b})$ => no existe solución.

II) Si rango A1 = rango $(A1 \mid \vec{b})$ => al menos existe una solución.

a) Si rango A1 = rango $(A1 \mid \vec{b})$ = N => la solución es única para $\vec{x}$.

b) Si rango A1 = rango $(A1 \mid \vec{b})$ < N => existe un infinito número de vectores solución.

El método de Gauss - Jordan transforma el sistema (2.31) en otro equivalente, por medio de sucesivas operaciones elementales. Si T9 es un vector de longitud N que lleva el orden de las componentes del vector $\vec{x}$ según haya o no existido intercambios de columnas en el proceso, entonces el nuevo sistema tiene la siguiente forma:

I) Si rango A1 $\neq$ rango $(A1 \mid \vec{b})$

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & 2 & \cdots & & I1 & \cdots & N \\
\hline
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & C_{1I1} & \cdots & C_{1N} \\
2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & C_{2I1} & \cdots & C_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & C_{(I1-1)I1} & & C_{(I1-1)N} \\
I1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\begin{bmatrix} X_{T9(1)} \\ X_{T9(2)} \\ \vdots \\ X_{T9(I1-1)} \\ X_{T9(I1)} \\ \vdots \\ X_{T9(N)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{I1-1} \\ d_{I1} \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}
\qquad (2.33)
$$

rango $A1 = I1 - 1$

y algún $d_i \neq 0$ para $i \geq I1$

=> no existe solución.

II)

a) Si rango $A1$ = rango $(A1 \mid \vec{b}) = N$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots\cdots & I1{=}N \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ I1{=}N \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{pmatrix}
X_{T9(1)} \\
X_{T9(2)} \\
\vdots \\
X_{T9(N)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_1 \\
d_2 \\
\vdots \\
d_N
\end{pmatrix}
\qquad (2.34)
$$

rango $A1 = I1 = N$

solución única: $X_{T9(1)} = d_1$

$X_{T9(2)} = d_2$

$\vdots$

$X_{T9(N)} = d_N$

b) Si rango $A1$ = rango $(A1 \mid \vec{b}) < N$

Como en I) pero con $d_i = 0$ para $i \geq I1$. En este caso se tiene:

rango $A1 = I1 - 1 \Rightarrow$ existen (N - rango $A1$) variables independientes (componentes de $\vec{x}$, desde I1 hasta N).

Escogiendo adecuadamente las variables independientes (como en el siguiente cuadro 2.2) la solución es directa, así:

	VARIABLES	VALOR		VALOR
INDEPENDIENTES	$x_{T9(I1)}$	-1	...	0
	$x_{T9(I1+1)}$	0	...	0
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$x_{T9(N)}$	0	...	-1
DEPENDIENTES	$x_{T9(1)}$	$c_{1(I1)}+d_1$	...	$c_{1N}+d_1$
	$x_{T9(2)}$	$c_{2(I1)}+d_2$	...	$c_{2N}+d_2$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$x_{T9(I1-1)}$	$c_{(I1-1)I1}+d_{I1-1}$	...	$c_{(I1-1)N}+d_{I1-1}$

CUADRO 2.2

Para el caso en que el sistema (2.31) sea homogéneo, se tiene: $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$; ésto da lugar a que en el sistema equivalente: $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$. De modo que para un sistema homogéneo siempre existe solución, pero cuando ésta es única, corresponde al vector $\vec{x} = 0$ (solución trivial) y será necesario que rango A1 < N para que exista soluciones diferentes de la trivial.

El procedimiento para obtener el sistema equivalente es el siguiente:

1.- Iniciar el proceso con I1 = 1 y el vector T9 en orden natural.

2.- Buscar en la matriz A1, desde la fila I1 y columna I1 el elemento de mayor valor absoluto. A éste se lo llamará elemento pivote.

3.- Colocar el elemento pivote en la posición A1(I1,I1), realizando si es necesario, intercambio de filas y/o columnas. En caso de intercambio de columnas, actualizar T9.

4.- Dividir la fila I1 para el elemento pivote, desde la columna I1 hasta N.

5.- Introducir ceros en la columna I1 excepto en A1(I1,I1);

para ésto, a cada fila I ($I \neq I1$) se suma el producto de la fila I1 por $-A1(I,I1)$.

6.- Incrementar I1 y repetir el proceso desde 2.-.

Si el sistema no es homogéneo, todas las operaciones con las filas de A1, deben realizarse también con las filas del vector columna $\vec{b}$.

El proceso se repite hasta cuando el elemento pivote es cero, en cuyo caso ya no se ejecuta desde 3.- ; o hasta cuando $I1 = N$.

El intercambio de filas y/o columnas, evita que el elemento pivote sea cero en algún caso, lo cual imposibilitaría la división del paso 4.- . Además el escoger como elemento pivote al de mayor valor absoluto, asegura una mayor precisión en la solución.

Si el sistema de ecuaciones (2.32) se desea resolver para diferentes valores del vector independiente $\vec{b}$, basta con aplicar en una misma vez el proceso (en cuanto se refiere a las operaciones elementales con filas) a todos los vectores $\vec{b}$.

En el sistema (2.24): $A1 = (A - \lambda_i I)$ (CASO II_2.- Degeneración simple), para hallar cada vector propio generalizado se requiere del conocimiento del vector previo, de ahí que no se puede aplicar lo dicho en el párrafo anterior, quedando 2 alternativas:

a) Para el cálculo de cada VPG, repetir el proceso íntegro de reducción tanto de A1 como de $\vec{b}$.

b) Al hallar el VP. $\vec{x}_1$, memorizar en orden y con los parámetros respectivos, todas las operaciones elementales realizadas sobre las filas de A1, para posteriormente aplicarlas sólo al vector independiente de cada caso.

Como la alternativa b) permite ahorrar tiempo de ejecución, sobre todo cuando A1 es una matriz de orden elevado; será la utilizada en el programa. De ahí que la subrutina Gauss - Jordan tiene incorporada la memoria de dichas operaciones elementales, la cual se utiliza cada vez que ocurre el CASO II_2 ; para ésto se tiene el archivo @ TTT/OP del disco.

Esta misma subrutina es utilizada en el programa ESTADO/MATRIZT para encontrar si un conjunto de N1 vectores columna de longitud N son o no linealmente independientes. En todos los casos se tendrá $N1 \leq N$, de tal manera que siempre se cumple rango $A1 \leq N1$; así:

$$A1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N1} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN1} \end{bmatrix}$$

Si rango A1 = N1 => los vectores columna de A1 son $\ell.i.$

Si rango A1 < N1 => los vectores no son $\ell.i.$

Los nombres de las variables de la subrutina Gauss - Jordan y las cantidades que representan son los siguientes:

NOMBRE	CANTIDAD
N	Longitud de los vectores columna (número de ecuaciones).
N1	Número de vectores columna.
A1	Matriz de orden N × (N + 1). Sus N1 primeras columnas son consideradas en la ejecución de esta subrutina.
T9	Vector de longitud N que contiene el orden de las componentes de $\vec{x}$ (ec. 2.32), según exista o no intercambio de columnas en el proceso.
E9	Comparador por cero.
R	Rango de la matriz A1.

Diagrama de flujo: Fig. 2.5.

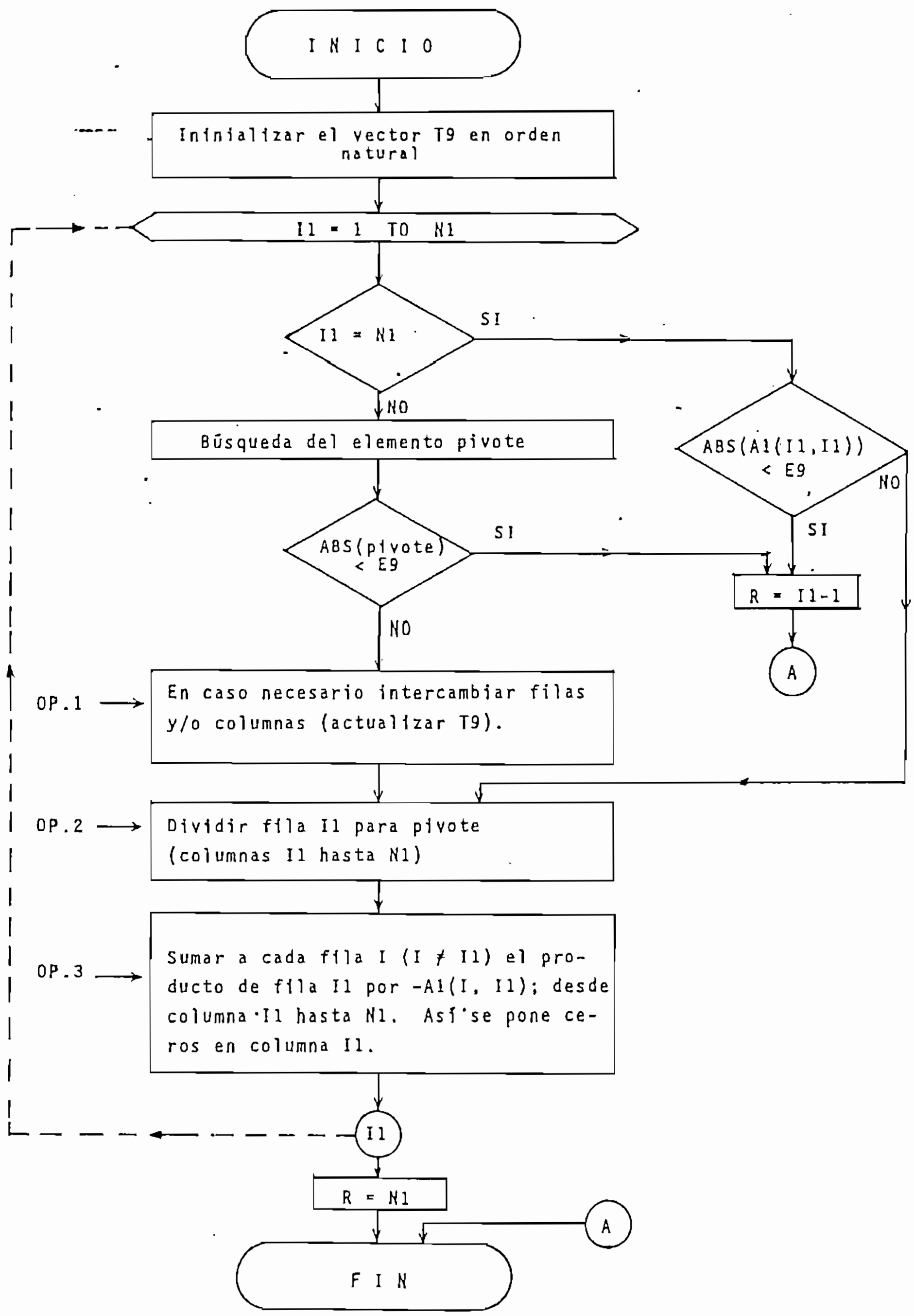


FIG. 2.5

Diagrama de flujo de subrutina GAUSS-JORDAN

Luego del estudio de la subrutina Gauss - Jordan, es factible comprender mejor el funcionamiento del programa ESTADO/MATRIZ T, cuyo diagrama de flujo se muestra en la Fig. 2.6. En este diagrama se distinguen claramente los 3 subcasos del CASO II de la sección 2.4:

CASO II_1: Degeneración total .- $Q_i = m_i$

CASO II_2: Degeneración simple .- $Q_i = 1 \neq m_i$

CASO II_3: $1 < Q_i < m_i$

Debe recordarse que el CASO I (valores propios distintos) es un caso particular del CASO II_1 .

Los diagramas de flujo de cada uno de los casos anteriores se presentan en las Figs.: 2.7, 2.8 y 2.9 respectivamente.

Las variables más importantes, además de las ya indicadas en la subrutina Gauss - Jordan, son las siguientes:

NOMBRE	CANTIDAD
T1	Matriz de orden N × N. Sus columnas serán los VP. y VPG. de la matriz A . Corresponde a la matriz T de la teoría.
Eϕ	Vector de longitud N que contiene la parte real de los valores propios de la matriz A.

NOMBRE	CANTIDAD
M1	Multiplicidad algebraica del valor propio Eϕ(I)
I	Contador que varía su valor de 1 hasta N. En cada momento contiene la posición del valor propio (dentro del vector Eϕ) cuyos VP. y VPG. asociados se calculan.
Q	Degeneración de la matriz A1 = A - Identidad * Eϕ(I)
Q1	Degeneración de la matriz A1, cuando el valor original de Q tiene que ser alterado para utilizar la subrutina que evalúa los vectores solución de una ecuación algebraica hemogénea (luego de haberse aplicado la subrutina Gauss - Jordan).

CASO II_3

NOMBRE	CANTIDAD
K9	Orden del mayor bloque de Jordan para un valor propio múltiple Eϕ(I).
F1	Matriz de orden N × (N + 1) que almacena el valor de $(A1)^{K9}$ en sus N primeras columnas.
X1	Matriz de orden N × (M1 + 1) que almacena temporalmente los VP. y VPG. asociados con el valor propio Eϕ(I)
Vϕ	Vector de longitud Q1 que va almacenando la posición de los VP. dentro de la matriz X1, asociados con Eϕ(I),

NOMBRE	CANTIDAD
	a medida que se los va hallando.
V1	Matriz de orden N × Q1 que va almacenando los vectores solución de la ecuación F1* $\vec{x}$ = 0, que son VP. , para cuando K9 = 2.
V2	Vector de longitud M1 que va almacenando las posiciones que tienen (como columnas) aquellos vectores solución de F1 * $\vec{x}$ = 0, dentro de la matriz T1; que no cumplen con (2.29) cuando K9 ≠ 2.
M2	Indicador de control.
M3	Contador descendente del número de vectores de matriz X1 hallados, asociados con Eϕ(I); desde (M1 + 1) hasta 2. El valor M3 = 1 sirve para control.
M4	Control para el máximo orden (K9) de un bloque de Jordan.
M5	Contador del número de vectores solución de la ecuación F1 * $\vec{x}$ = 0, que son VP., para cuando K9 = 2.
M6	Contador del número de VP. de matriz X1.
M7	Contador del número de vectores solución de la ecuación F1 * $\vec{x}$ = 0, que no cumplen con (2.29) cuando K9 ≠ 2.
M8	Indicador de control.
M9	Indicador de control.

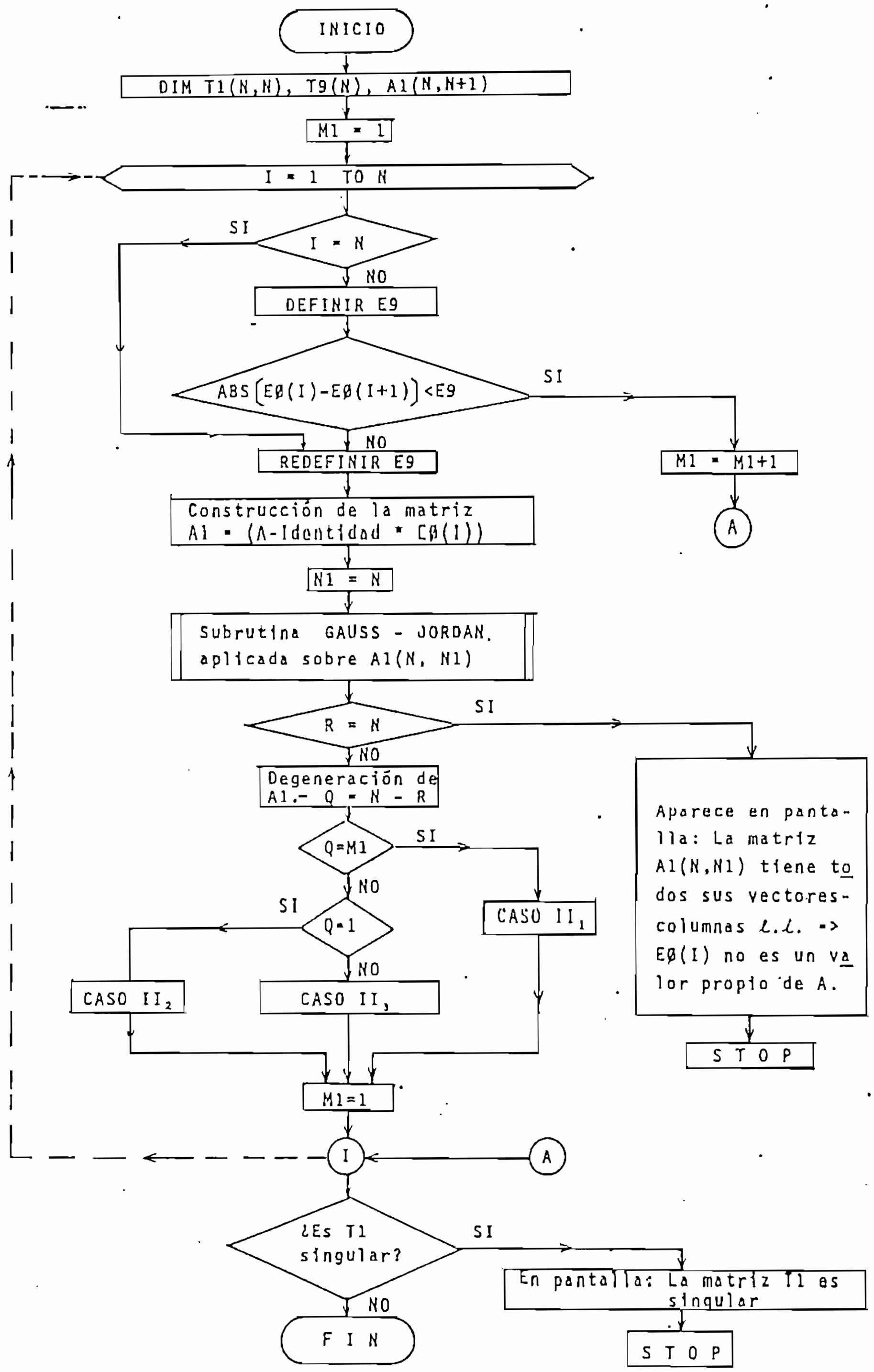


FIG. 2.6

Diagrama de flujo del programa: ESTADO/MATRIZT

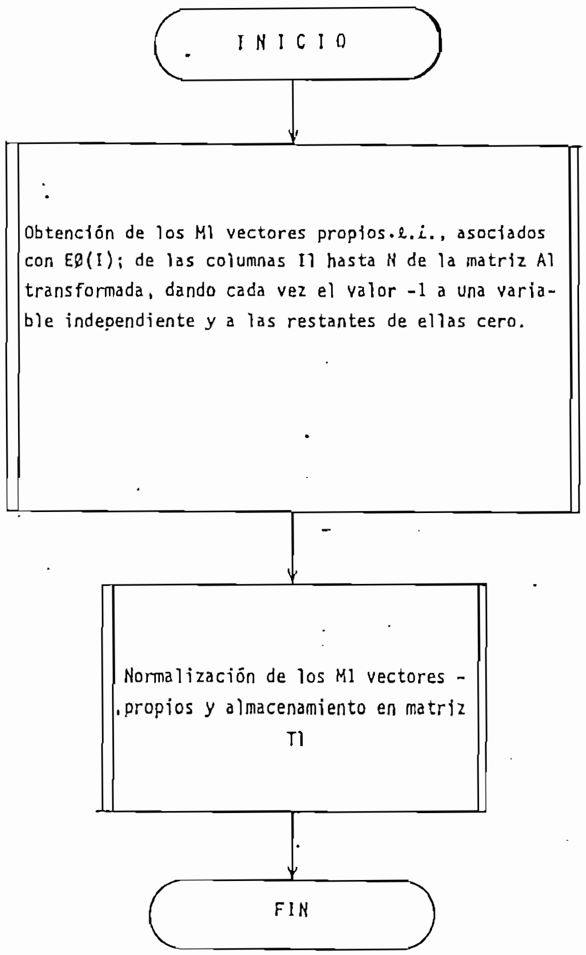


FIG. 2.7

CASO II_1 : Degeneración Total

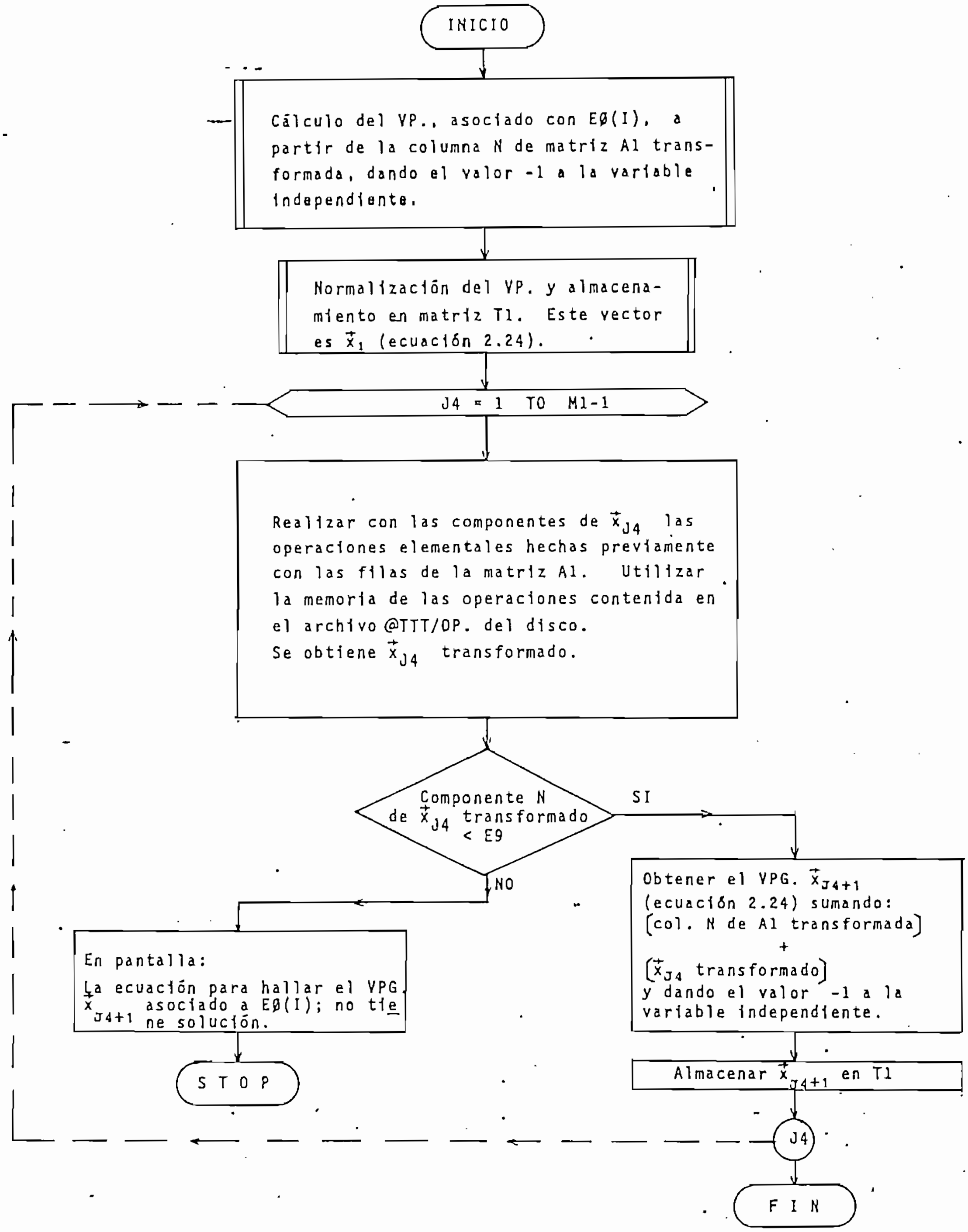


FIG. 2.8

CASO II_2: Degeneración Simple

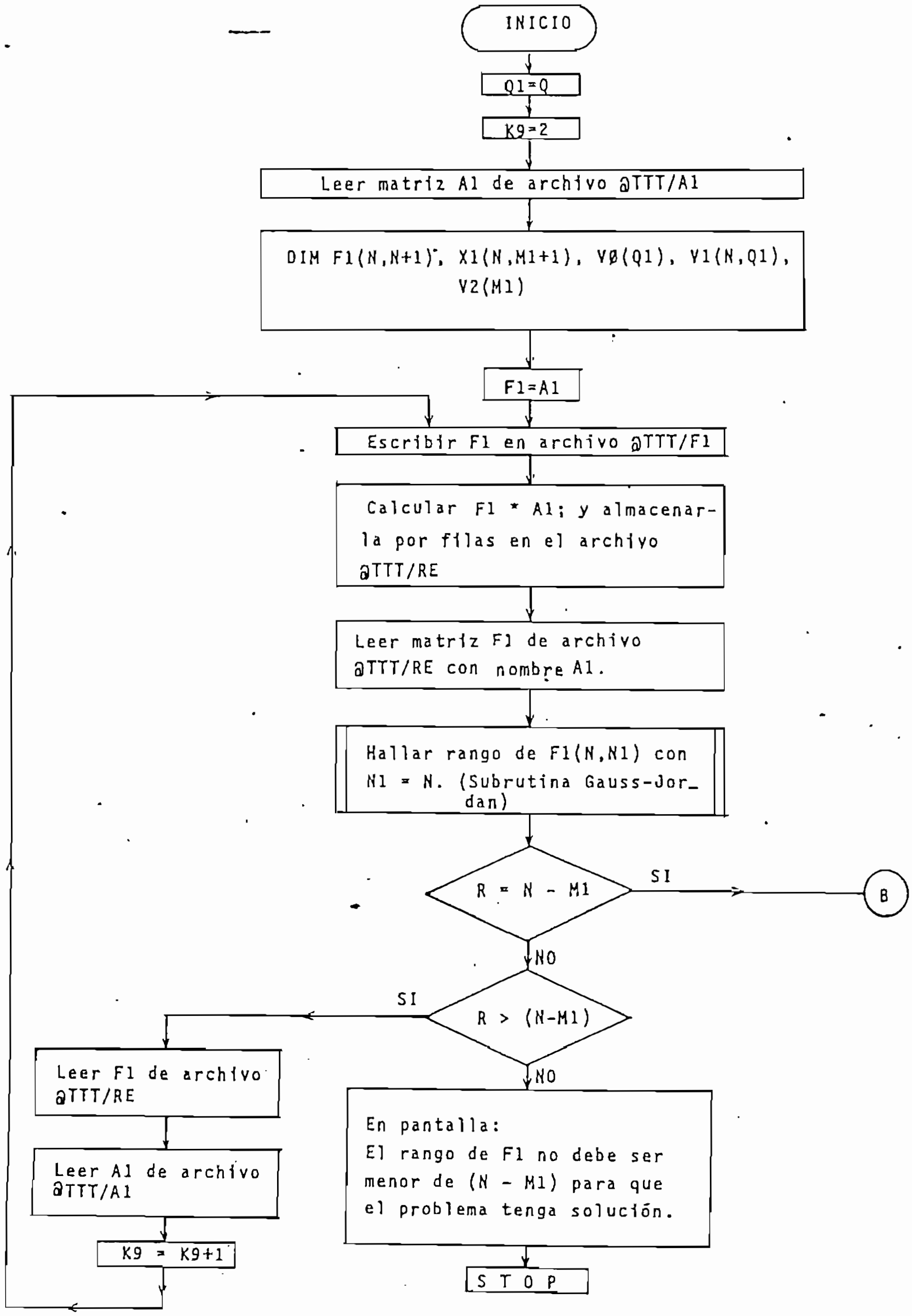


FIG. 2.9

CASO II_3 : $1 < Q_i < m_i$

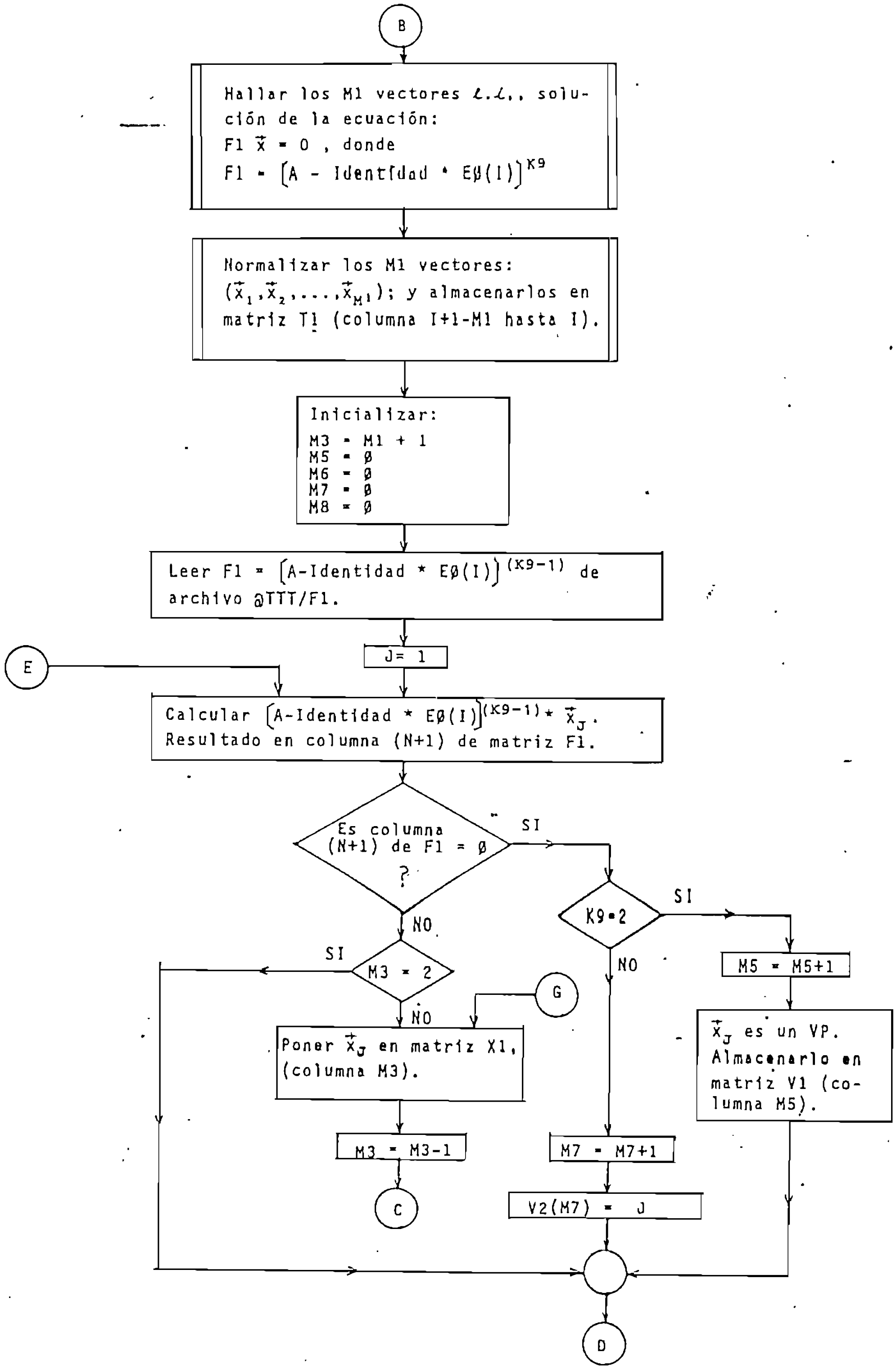


FIG. 2.9 (Continuación)

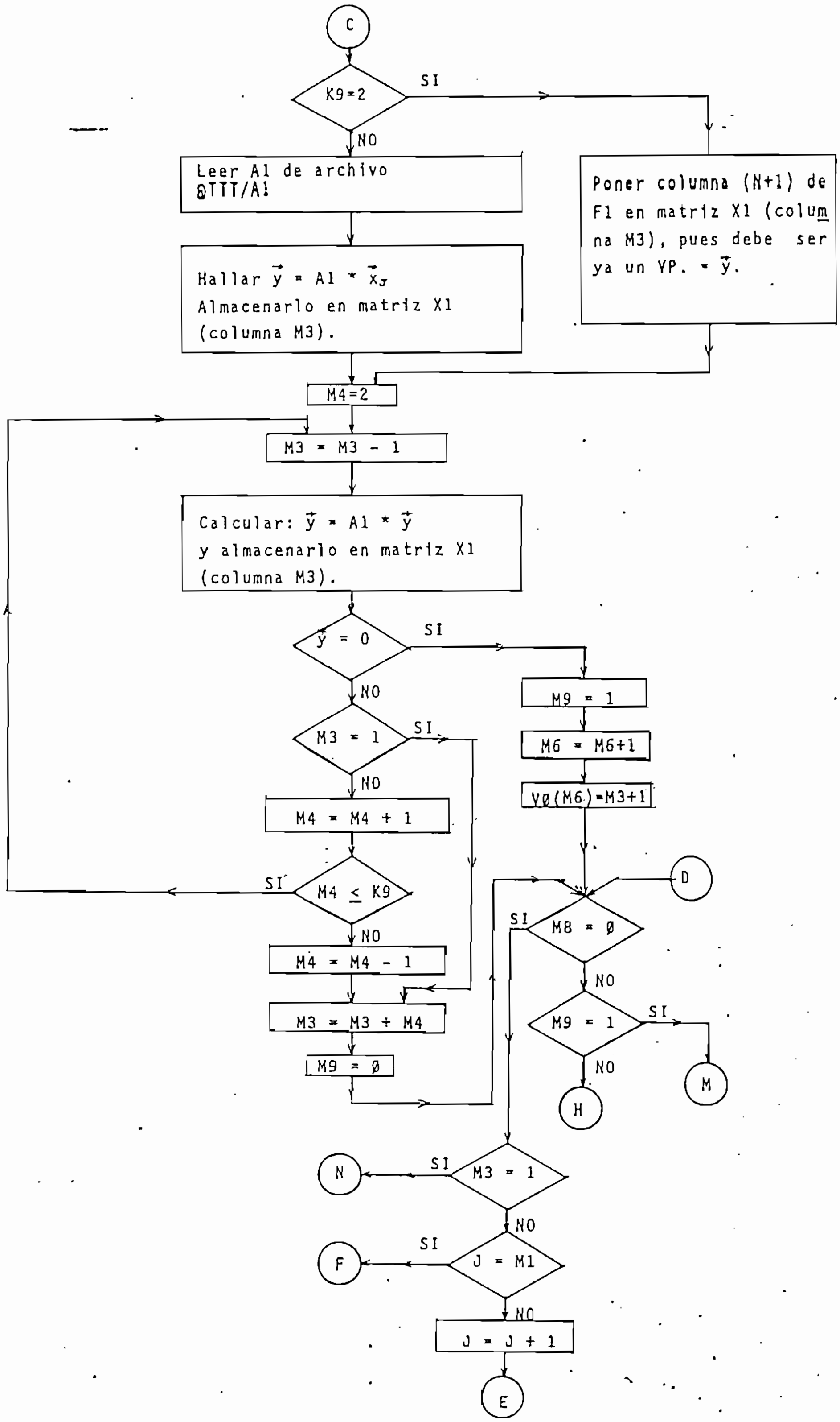


FIG. 2.9 (Continuación)

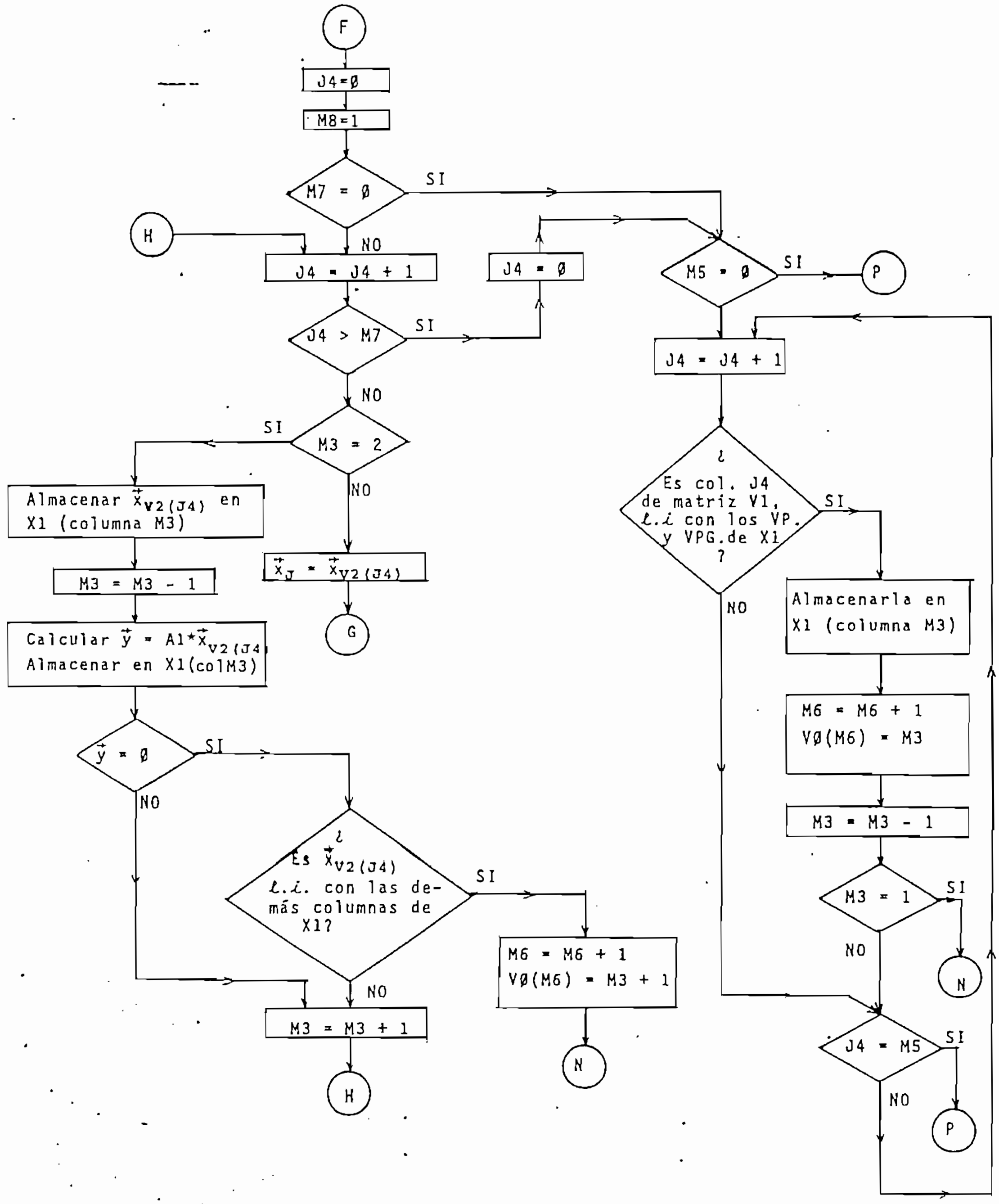


FIG. 2.9 (Continuación)

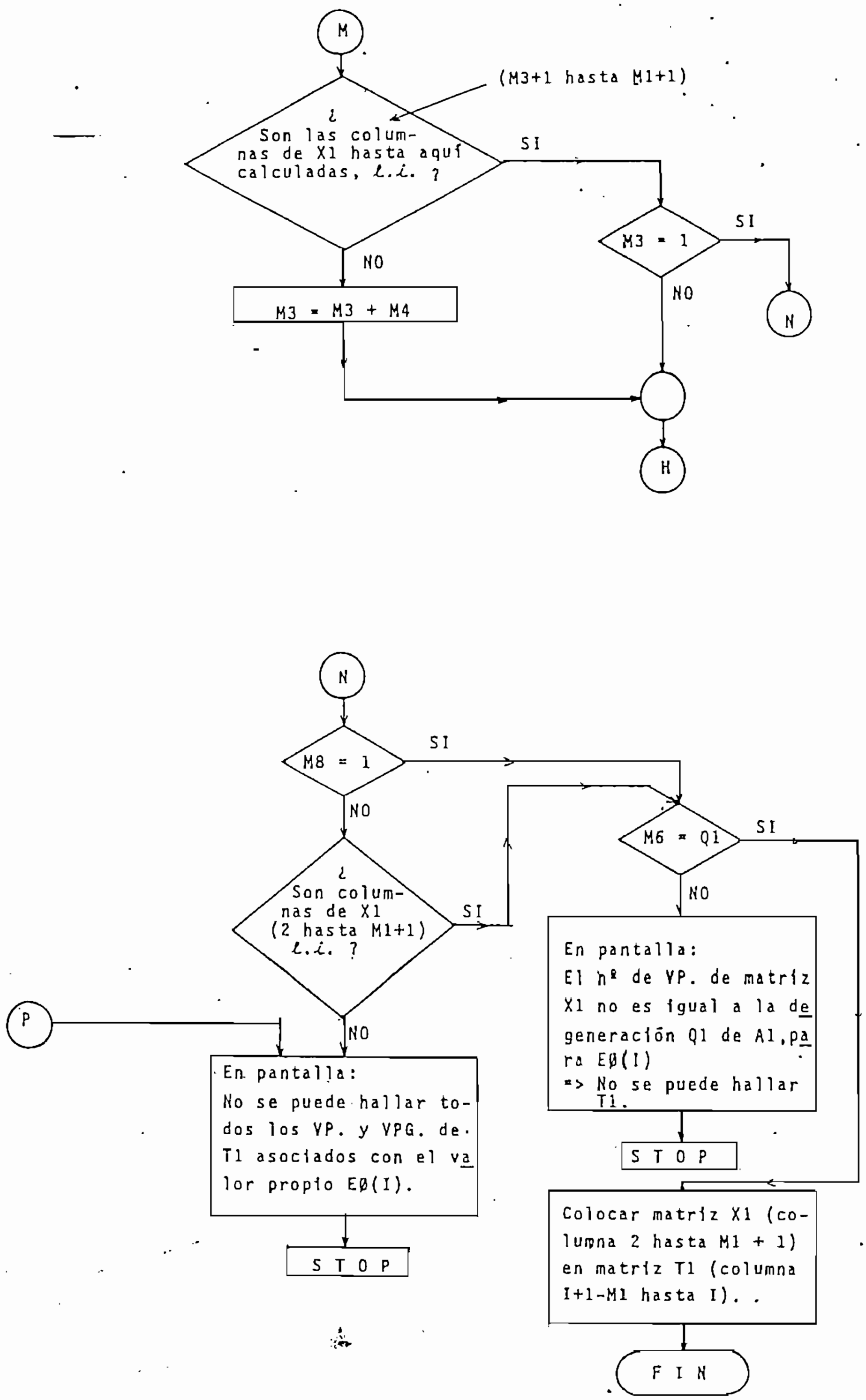


FIG. 2.9 (Continuación)

2.5.6 Programa: ESTADO/T1AT

Este programa permite calcular, mediante la transformación de semejanza $T^{-1} A T$, la matriz diagonal o, en general, la forma canónica de Jordan correspondiente a la matriz A del sistema descrito por la ecuación (1.32), para el caso invariante en tiempo. De esta manera se comprueba, además, si la matriz T obtenida previamente es correcta,

Para realizar la inversión de la matriz T, se utiliza un algoritmo cuyo fundamento es el siguiente:

Si se tiene el sistema de ecuaciones,

$$T X = I \qquad (2.35)$$

donde: $T_{n\times n}$ = matriz de coeficientes

$X_{n\times n}$ = matriz incógnita.

$I_{n\times n}$ = matriz identidad (términos independientes)

La matriz X será la inversa de T y puede hallarse si se logra transformar el sistema de ecuaciones (2.35) por medio de operaciones elementales, en otro de la forma:

$$I X = B \quad \Rightarrow \quad X = B = T^{-1}$$

Al realizar sobre I todas las operaciones elementales realizadas previamente con la matriz $\top$ hasta transformarla en la matriz identidad, deberá tomarse en cuenta que un intercambio de columnas en la matriz de coeficientes corresponde a un intercambio de filas en la matriz de términos independientes.

La transformación de $\top$ en la matriz identidad, se realiza al final del programa ESTADO/MATRIZT, quedando la memoria de las operaciones elementales en el archivo TTT/OP y en el vector T9.

Las principales variables utilizadas en el programa se dan a continuación y el diagrama de flujo en la Fig. 2.10.

NOMBRE	CANTIDAD
A	Matriz n×n; que corresponde al sistema descrito por la ecuación (1.32), para el caso invariante en tiempo.
A1	Matriz n×n, que sirve tanto para almacenar la matriz identidad sobre la que se realizan las operaciones elementales hechas previamente con la matriz de coeficientes de la ecuación (2.35); así como también para al final almacenar la forma de Jordan.
Nϕ	Variable que contiene el número de operaciones elementales realizadas previamente sobre las filas de la matriz de coeficientes de (2.35), al ser ésta reducida

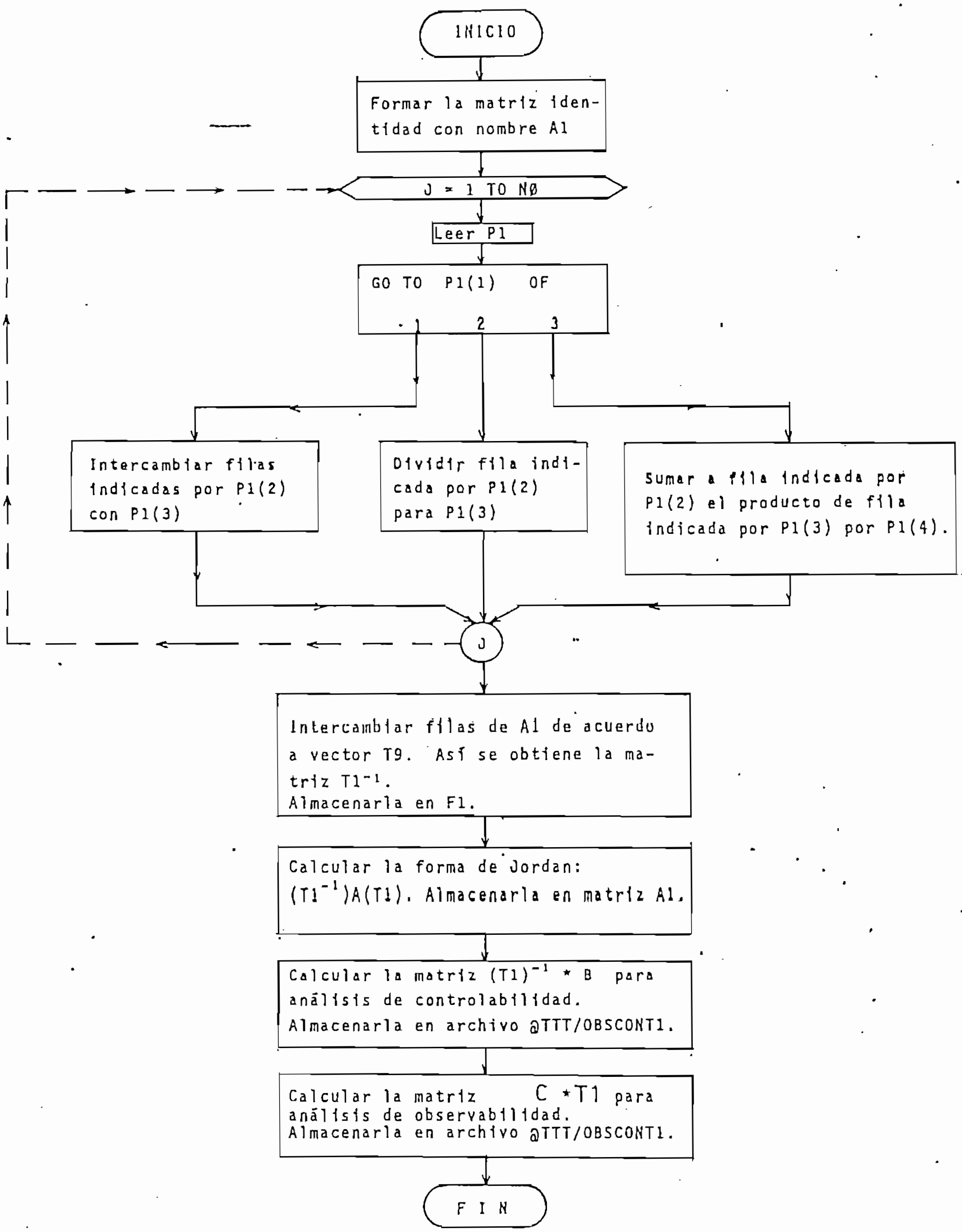


FIG. 2.10

Diagrama de flujo del programa: ESTADO/T1AT

NOMBRE	CANTIDAD
	a la matriz identidad.
P1	Vector de longitud 4 que almacena en cada ejecución del lazo J, los parámetros que intervienen en la correspondiente operación elemental sobre filas.
T9	Vector de longitud n, que contiene la memoria de los intercambios de columnas realizados previamente con la matriz de coeficientes de (2.35) para convertirla en la matriz identidad.
T1	Matriz nxn, que corresponde a la matriz $\top$ de la teoría (matriz de VP. y VPG. de matriz A).
F1	Matriz de orden nxn para almacenar $(T1)^{-1}$.

2.5.7 Programas: ESTADO/MATRIZTC Y ESTADO/T1ATC

En el sistema de computación utilizado no existe la posibilidad de definir variables complejas, de tal manera que al trabajar con cantidades de este tipo, es necesario llevar por programa todos los pasos requeridos para efectuar con ellas, operaciones aritméticas y demás funciones; es decir, evaluación explícita de parte real y parte imaginaria en cada operación aritmética. Por esta razón, se han creado los pro gramas ESTADO/MATRIZTC y ESTADO/T1ATC, que son similares respectivamente a los denominados ESTADO/MATRIZT y ESTADO/T1AT. La diferencia radica en que estos últimos trabajan sólo con números reales, mientras que los otros dos trabajan con números complejos. La decisión de trabajar con los unos o con los otros se la toma en el programa ESTADO/VALORPROP y está claramente indicada en el diagrama de flujo de la Fig. 2.4.

Si bien para cualquier análisis podrían ser utilizados los programas que trabajan con cantidades complejas, sin embargo, es conveniente para ahorrar memoria y tiempo de ejecución, que aquellos casos en los que todos los valores propios de A son reales o con partes imaginarias despreciables, utilicen programas que trabajen sólo con reales. Por estas razones, aquí se ha implementado dicha técnica.

En los programas ESTADO/MATRIZTC y ESTADO/T1ATC, por lo indicado anteriormente, aparecen variables adicionales que permiten la ejecución de las operaciones con complejos. Es importante recordar la absoluta consistencia que debe existir entre los nombres de todas las variables.

Con el objeto de facilitar un análisis de estos programas, se ha mantenido cierta regla que relaciona los nombres de las variables de los programas con reales y los de las correspondientes de los programas con complejos, la cual es evidente en la siguiente lista; en la que se distinguen las variables adicionales principales:

PROGRAMA ESTADO/MATRIZT	PROGRAMA ESTADO/MATRIZTC	
NOMBRE	NOMBRE	
	Parte real	Parte imaginaria
Eϕ	Eϕ	E1
A1	A1	A2
T1	T1	T2
F1	F1	F2
X1	X1	X2
V1	V1	V2
V2	V3	

PROGRAMA ESTADO/T1AT	PROGRAMA ESTADO/T1ATC	
NOMBRE	NOMBRE	
	Parte real	Parte imaginaria
A1	A1	A2
T1	T1	T2
F1	F1	F2

CAPITULO TERCERO

BASES PARA EL ANALISIS DE UN SISTEMA POR MEDIO DE LA MATRIZ "T" Y DE LA FORMA DE JORDAN "J"

3.1 INTRODUCCION

Los programas digitales anteriores permiten obtener resultados muy satisfactorios; de ahí que es posible utilizarlos para el análisis de sistemas de complejidad apreciable.

Entre los aspectos fundamentales del análisis de un sistema de control se destacan: estabilidad, matriz de transición de estado, respuesta no forzada, controlabilidad, observabilidad y obtención de los estados y de las salidas.

En el presente trabajo se da a continuación una visión clara y resumida de las principales aplicaciones, que en los aspectos mencionados en el párrafo anterior, se da a: valores propios de matriz A, matriz transformadora T y forma canónica de Jordan J.

3.2 ANALISIS DE ESTABILIDAD ABSOLUTA.

El desarrollo de sistemas de control, tanto en lo que se refiere al análisis como al diseño, comprende como una de sus partes fundamentales el aspecto de estabilidad.

El estudio de la estabilidad de los sistemas, es por sí solo bastante amplio, ya que trata sistemas lineales y no lineales, variantes e invariantes en tiempo.

En este trabajo se presenta el caso de análisis de estabilidad de sistemas lineales invariantes, con el objeto de demostrar claramente una de las aplicaciones de los resultados conseguidos por medio de los programas para computador digital del capítulo II.

Actualmente existen varios criterios que se aplican al análisis de estabilidad de sistemas de control; de ahí que se tienen algunas definiciones y técnicas correspondientes a cada uno de ellos. A continuación se presentan varios muy importantes.

Para el caso de sistemas lineales invariantes en tiempo, la descripción más general en el espacio de estado está da da por las ecuaciones (1.32), con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ constantes, es decir:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}(t) + \mathbb{B}\vec{u}(t) \tag{3.1}$$

$$\vec{y}(t) = \mathbb{C}\vec{x}(t) + \mathbb{D}\vec{u}(t) \tag{3.2}$$

Desde el punto de vista de control clásico, la estabilidad de este tipo de sistemas depende únicamente de la ubicación en el plano complejo s, de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $H(s) = y(s)/u(s)$. Esto para el caso de una entrada (u) y una salida (y). Cuando se tienen sistemas de múltiples entradas y/o salidas, es conveniente la notación matricial, apareciendo entonces el concepto de matriz de transferencia: $\mathbb{H}(s) = \vec{y}(s)/\vec{u}(s)$.

Si en las ecuaciones (3.1) y (3.2) tomamos la transformada de Laplace a ambos miembros de cada una de ellas, se obtiene:

$$s\vec{x}(s) - \vec{x}(t=o) = \mathbb{A}\vec{x}(s) + \mathbb{B}\vec{u}(s) \tag{3.3}$$

$$\vec{y}(s) = \mathbb{C}\vec{x}(s) + \mathbb{D}\vec{u}(s) \tag{3.4}$$

Considerando nulas las condiciones iniciales: $x(t=0) = 0$, en (3.3) se tiene

$$\vec{x}(s) = [sI - A]^{-1} B\vec{u}(s)$$

que reemplazando en la ecuación (3.4) resulta:

$$\vec{y}(s) = \{C[sI - A]^{-1} B + D\} \vec{u}(s)$$

de donde la matriz de transferencia del sistema es:

$$H(s) = \frac{\vec{y}(s)}{\vec{u}(s)} = C[sI - A]^{-1} B + D \qquad (3.5)$$

de orden $K \times m$.

Un elemento $H_{ij}(s)$ de $H(s)$, es la función de transferencia entre la j-ésima componente del vector de entrada, u_j y la i-ésima componente del vector de salida, y_i; es decir: $H_{ij}(s) = y_i(s)/u_j(s)$, cuando todas las entradas son iguales a cero excepto u_j y todas las condiciones iniciales son nulas.

La ecuación (3.5), al desarrollar la matriz inversa en términos de la adjunta, puede ser escrita como:

$$H(s) = C\left[\frac{\operatorname{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}\right] B + D$$

de donde:

$$H(s) = \frac{C\left[\operatorname{adj}(sI - A)\right] B + D \cdot \det(sI - A)}{\det (sI - A)} \qquad (3.6)$$

De esta manera, cada elemento de la matriz de transferencia $H(s)$, es el cociente de dos polinomios en s, siendo el numerador de grado menor o igùal a n; y el denominador de grado n.

$H(s)$ es pues, una matriz racional propia (el número de polos de cada elemento $H_{ij}(s)$ es mayor o igual que el número de ceros). Así los polos aparecen en todo el sistema y son las raíces de la ecuación característica : $\det (sI - A) = 0$; es decir, son los valores propios de la matriz A, que se hallan de esta manera determinando el comportamiento en el tiempo de todas las salidas.

En base a lo anterior se deduce que el conocimiento de los valores propios de la matriz A, permite averiguar directamente si un sistema es o no estable, ya que ésto depende de la ubicación de los mismos en el plano S, en la siguiente forma:

Sean los polos del sistema : $\lambda_i = \beta_i + j\omega_i$; $i = 1,2,..,n$
(valores propios de A)

Entonces, el sistema es inestable :

si $\beta_i > 0$ para cualquier raíz simple.

ó $\beta_i \geqslant 0$ para cualquier raíz repetida.

El programa ESTADO/VALORPROP, descrito en la sección 2.5.4, permite calcular todos los valores propios de A; así es un instrumento poderoso para el análisis de estabilidad de un sistema.

En Control Moderno, se tienen criterios adicionales para el estudio de estabilidad de sistemas descritos en el espacio de estado. Dos de ellos, que se refieren a estabilidad del vector de estado $\vec{x}(t)$, directamente pueden ser aplicados utilizando los valores propios de la matriz A; éstos son:

1.- Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

El estado de equilibrio $\vec{x} = 0$ de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\,\vec{x}$, es estable en el sentido de Lyapunov (abreviado: s.L.), si para todo t_o y cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tan pequeño como queramos, que depende de t_o y ε, tal que si: $\|\vec{x}(t_o)\| < \delta$ entonces $\|\vec{x}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_o$.

Para un sistema lineal invariante en tiempo, aquello se cumple siempre que:

$\beta_i \leqslant 0$ para todas las raíces simples.

y $\beta_i < 0$ para todas las raíces repetidas.

lo cual coincide con las condiciones de estabilidad antes indicadas, utilizando el criterio de Control Clásico. Sim embargo estas definiciones se aplican también a sistemas variantes en tiempo y no lineales.

2.- Estabilidad asintótica.

El estado de equilibrio $\vec{x} = 0$ de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$, es asintóticamente estable si:

a) Es estable en el sentido de Lyapunov.

b) Para todo t_o y cualquier $\vec{x}(t_o)$ suficientemente próximo a cero, se cumple que:

$$\lim_{t \to \infty} \| \vec{x}(t) \| = 0$$

En un sistema lineal invariante, lo anterior se cumple siempre que:

$\beta_i < 0$ para todas las raíces.

Otros criterios de estabilidad, para cuando la señal de entrada $\vec{u}(t)$ no es cero, son utilizados frecuentemente. Su planteamiento y aplicación requieren del conocimiento previo de la matriz de transición de estado del sistema; y no serán tratados en este trabajo.

Ejemplos:

1.- En la sección 1.3 se encontró la forma de Jordan de las ecuaciones de estado del sistema eléctrico de la Fig. 1.1. Estas están dadas por (1.33) y (1.34). La matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{0.242}{RC} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2.758}{RC} \end{bmatrix}$$

Esta matriz se encuentra en la forma de Jordan; por lo tanto sus valores propios son los elementos de la diagonal. Estos valores son reales distintos y negativos para cualquier RC; es decir, se cumple que: $\beta_i < 0$; $i = 1,2$.

El sistema es entonces:

a) Estable según el criterio clásico.

b) Estable en el sentido de Lyapunov

c) Estable asintóticamente.

2.- Se desea analizar la estabilidad del sistema mecánico de la Fig. 3.1, en base a su representación en variables de estado.

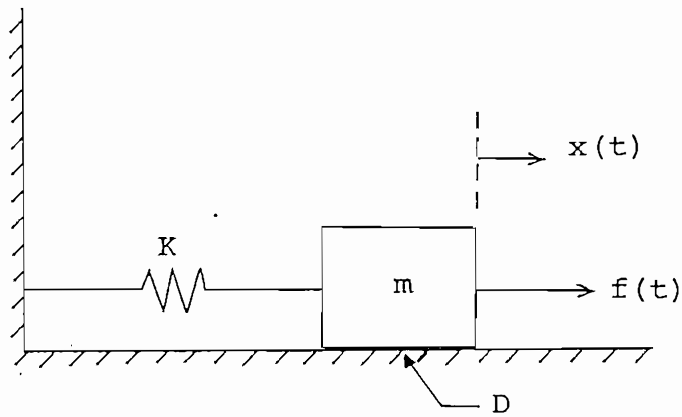


FIG. 3.1.

donde:

K = constante de rigidez del resorte > 0

m = masa del bloque > 0

D = coeficiente de rozamiento dinámico (supuesto constante) ≥ 0.

$f(t)$ = fuerza externa.

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento del bloque es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - K\,x - D\,\frac{dx}{dt}$$

Escogiendo como variables de estado el desplazamiento del resorte $x(t)$ y la velocidad de la masa: $\frac{dx}{dt}$, se tiene que:

$$x_1 = x \qquad\qquad x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad\qquad \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}\,x_1 - \frac{D}{m}\,x_2 + \frac{1}{m}\,u(t)$$

$$\text{con } u(t) = f(t)$$

Así las ecuaciones de estado en forma matricial son:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

Se debe ahora calcular los valores propios de la matriz A, con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{m} & \lambda + \frac{D}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{D}{m}\,\lambda + \frac{K}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Suponiendo que $u(t) = 0$ y que el sistema parte de un cierto estado inicial $\vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$, se distinguen 3 casos en su comportamiento dinámico:

a) Cuando $\left(\frac{D}{2m}\right)^2 > \frac{K}{m}$:

los 2 polos son reales y negativos; según lo cual el sistema es estable en los 3 sentidos anotados previamente y su vector de estado $\vec{x}(t)$ decrecerá exponencialmente y sin oscilaciones.

b) Cuando $0 < \left(\frac{D}{2m}\right)^2 < \frac{K}{m}$:

los 2 polos son complejos conjugados con su parte real negativa. El sistema sigue siendo estable según los 3 criterios y su vector de estado $\vec{x}(t)$ será oscilatorio amortiguado.

c) Cuando $D = 0$ (superficie ideal sin rozamiento):

los 2 polos son complejos conjugados con su parte real igual a cero. El sistema será:

- estable según el criterio clásico.
- estable en el sentido de Lyapunov.
- inestable asintóticamente.

Su vector de estado será oscilatorio no amortiguado.

3.3 FORMAS CUADRATICAS Y FUNCIONES MATRICIALES

3.3.1 FORMAS CUADRATICAS

Para señalar algunas características especiales de las matrices hermitianas, con respecto a sus valores y vectores propios; así como también presentar algunos conceptos relacionados con ello, es necesario conocer las denominadas formas cuadráticas.

Una forma cuadrática es un polinomio real en las variables reales $\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n$ que contiene solamente términos de la forma $\alpha_{ij}\ \xi_i\ \xi_j$ tal que:

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ \xi_i\ \xi_j \tag{3.7}$$

donde α_{ij} es real para todo i, j.

Una forma cuadrática puede ser expresada como el producto interno de un vector $\vec{x}$ por $Q\vec{x}$, denotado $(\vec{x}, Q\vec{x})$, donde Q es una matriz hermitiana n×n , es decir $Q^{\dagger} = Q$.

Ahora bien, para una matriz hermitiana Q,n×n se cum ple que: todos sus valores propios son reales y los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales. Un caso particular, muy importante, de matriz hermitiana es el de una matriz simétrica real.

En general, aunque los valores propios no sean distintos, para una matriz hermitiana Q, $n \times n$ se pueden hallar n vectores propios ortonormales. De modo que cuando en las ecuaciones de estado de un sistema, la matriz A es simétrica real, se tiene siempre que el problema de encontrar sus n vectores propios *l.i.* está comprendido en el CASO II_1 de la sección 2.4. (Degeneración total).

Por lo anterior, una matriz simétrica real A, siempre puede ser reducida a una matriz diagonal por medio de una transformación de semejanza $T^{-1} A T$. Además, como las columnas de T son ortonormales, se cumple que $T^{-1} = T^T$.

Si se tiene el vector $\vec{x}$ de un sistema descrito en el espacio de estado (ec. (1.32)) y una matriz Q simétrica real, se puede por medio de la matriz de los vectores propios de Q, es decir T, transformar el vector $\vec{x}$ tal que: $\vec{x} = T\vec{y}$. Entonces la forma cuadrática $\mathscr{F} = \vec{x}^T Q\vec{x}$, se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &= \vec{y}^T T^T Q T \vec{y} = \\ &= \vec{y}^T T^{-1} Q T \vec{y} = \\ &= \vec{y}^T J \vec{y} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

donde J es una matriz diagonal formada por todos los valores propios de Q.

Desarrollando (3.8) se tiene:

$$\mathscr{F} = \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \ldots + \lambda_n |y_n|^2 \tag{3.9}$$

donde los λ_i son los valores propios (reales)de Q.

De la ecuación (3.9) se deduce que la forma cuadrática $\mathscr{F} = \vec{x}^T Q \vec{x}$ es positiva siempre que todos los valores propios de Q son positivos, a menos que $\vec{y}$, y por lo tanto $\vec{x}$, sea el vector nulo.

Esto permite afirmar que los valores propios de una matriz simétrica real, determinan si ésta se halla "positivamente definida" ó "definida no negativamente", de acuerdo a las siguientes definiciones:

Una matriz simétrica real Q, $n \times n$ está "*positivamente definida*" si su forma cuadrática asociada es siempre positiva, excepto cuando $\vec{x}$ es el vector nulo. Esto se cumple cuando todos los valores propios de Q son > 0.

Una matriz simètrica real Q, $n \times n$ está "*definida no negativamente*" si su forma cuadrática asociada nunca es negativa. Esto se cumple cuando todos sus valores propios son $\geqslant 0$.

Los conceptos anteriores son muy utilizados en el diseño de sistemas óptimos de control en los que se emplea un criterio cuadrático.

Ejemplo:

Supongamos que en el diseño de un sistema de control se desea optimizar el consumo de energía; y que en el proceso de modelaje se requiere utilizar una matriz Q simétrica definida no negativamente. El sistema es invariante en tiempo y de orden 3.

En base a un estudio de las características deseadas del sistema y las condiciones de optimización, supongamos que se escoge la siguiente matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -13 \\ 4 & 22 & -4 \\ -13 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

Utilizando el programa ESTADO/VALORPROP se encuentra que los valores propios de Q son:

$\lambda_1 = 0.000$

$\lambda_2 = 18.000$

$\lambda_3 = 30.000$

Lo cual demuestra que Q está definida no negativamen te. Así, su forma cuadrática asociada $\vec{x}^T\, Q\, \vec{x}$ (donde $\vec{x}$ es el vector de estado del sistema) nunca será negativa.

Además, en el ejemplo anterior se observa que los valores propios de Q son reales; y si calculamos los vectores propios asociados, utilizando el programa ESTADO/MATRIZ T se consigue la siguiente matriz T.

$$T = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.408 & 0.577 \\ 0.000 & -0.816 & 0.577 \\ -0.707 & -0.408 & -0.577 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que estos vectores propios son ortonormales.

Finalmente, si mediante el programa ESTADO/T1AT, calculamos la forma de Jordan $J = T^{-1}\, Q\, T$, se obtiene:

$$J = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 18.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 30.000 \end{bmatrix}$$

Siendo J una matriz diagonal.

3.3.2 FUNCIONES MATRICIALES

Aquí interesa únicamente las funciones de matrices cuadradas; y en particular el caso de funciones de una matriz cuadrada real A transformada en una matriz de la forma de Jordan J por medio de una transformación de semejanza.

Se conoce que una función f(x), escalar y analítica en x, se puede expresar de manera única como una serie convergente de la forma:

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K \, x^K/K!$$

$$\text{donde} \quad f_K = d^K f(x)/dx^K \quad \text{calculada en } x = 0 \tag{3.10}$$

Se puede definir la función matricial correspondiente, para una matriz A, nxn , así:

$$f(A) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K A^K/K! \tag{3.11}$$

Por ejemplo:

$$\text{sen } A = (\text{sen } 0)\ I + (\cos 0)\ A + (-\text{sen } 0)\ A^2/2! + (-\cos 0) A^3/3! +$$
$$+ (\text{sen } 0)\ A^4/4! + (\cos 0)\ A^5/5! + \ldots\ldots =$$

$$= A - A^3/3! + A^5/5! - A^7/7! + \ldots\ldots$$

$$e^{At} = (e^0)I + (e^0)At + (e^0)A^2t^2/2! + \ldots + (e^0)A^Kt^K/K! + \ldots =$$

$$= I + At + A^2t^2/2! + \ldots\ldots + A^Kt^K/K! + \ldots\ldots$$

Cuando una matriz cuadrada real A, es transformada en una forma de Jordan por una transformación de semejanza, es decir: $J = T^{-1}\,A\,T$ se tiene que:

$$f(A) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K\, A^K/K! = \sum_{K=0}^{\infty} f_K\,(T\,J\,T^{-1})^K/K! =$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} f_K\,(\underbrace{T\,J\,T^{-1}\cdot T\,J\,T^{-1}\cdot\ \ldots\ \cdot T\,J\,T^{-1}}_{K\ \text{veces}})/K! =$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} f_K\,(T\,J^K\,T^{-1})/K! =$$

$$= T\,\left(\sum_{K=0}^{\infty} f_K\,J^K/K!\right)\,T^{-1} =$$

$$= T\,f\,(J)\,T^{-1} \qquad (3.12)$$

Además:

$$f(J) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K \; J^K / K! \; =$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f_K}{K!} \begin{bmatrix} L_{11}{}^K(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_{mn}^K(\lambda_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f(L_{11}(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(L_{mn}(\lambda_n)) \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

De tal manera que conociendo T y J, para evaluar $f(A)$ sólo es necesario calcular los $f(L_{ji}(\lambda_i))$, donde los $L_{ji}(\lambda_i)$ son los bloques de Jordan de J. Los programas ESTADO/MATRIZT, ESTADO/T1AT, para reales; y ESTADO/MATRIZTC, ESTADO/T1ATC, para complejos , desarrollados en la sección 2.5, permiten calcular las matrices T y J correspondientes a la matriz A, $n \times n$ de un sistema; (en general, A, $n \times n$ puede ser una matriz real cualquiera; su máximo orden está dado por la capacidad de memoria del computador utilizado). Disponiendo así de T y J se puede calcular $f(A)$ por el método anterior.

Finalmente, la función $f(L)$ para un bloque L de orden $\ell \times \ell$, viene dada por la siguiente expresión:

$$f(L) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & df/d\lambda & \cdots\cdots & \left[(\ell-1)!\right]^{-1} d^{\ell-1}f/d\lambda^{\ell-1} \\ 0 & f(\lambda) & \cdots\cdots & \left[(\ell-2)!\right]^{-1} d^{\ell-2}f/d\lambda^{\ell-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & f(\lambda) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

En conclusión: utilizando (3.14), (3.13) y (3.12) es posible evaluar la función $f(A)$.

Ejemplo:

Se desea calcular la función e^{At}, donde A es la matriz de un sistema lineal invariante y tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación (3.12), se cumple que: $e^{At} = T\ e^{Jt}\ T^{-1}$

Calculando ahora la matriz transformadora T, su inversa T^{-1} y la forma de Jordan J, utilizando los programas di gitales respectivos, implementados previamente, se obtiene:

$$T = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0.000 \\ j0.707 & -j0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.707 & -j0.707 & 0.000 \\ -0.707 & j0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} j3.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -j3.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a encontrar e^{Jt} . Según las ecuaciones (3.13) y (3.14) ésto es:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{j3.000t} & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & e^{-j3.000t} & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & e^{-1.000t} \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene la función matricial e^{At}, realizando el producto de matrices indicado, es decir:

$\mathbf{e}^{At} = T\ \mathbf{e}^{Jt}\ T^{-1}$. Por partes sería:

$$T\,\mathbf{e}^{Jt} = \begin{bmatrix} -0.707\ e^{j3.000t} & -0.707\ e^{-j3.000t} & 0.000 \\ j0.707\ e^{j3.000t} & -j0.707\ e^{-j3.000t} & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -\ e^{-1.000t} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} 0.500(\ e^{j3t} + e^{-j3t}) & -\dfrac{0.500}{j}(\ e^{j3t} - e^{-j3t}) & 0 \\ \dfrac{0.500}{j}(\ e^{j3t} - e^{-j3t}) & 0.500\ (\ e^{j3t} + e^{-j3t}) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pudiendo ser escrita como:

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} \cos\ 3t & -\operatorname{sen}\ 3t & 0 \\ \operatorname{sen}\ 3t & \cos\ 3t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

3.4 MATRIZ DE TRANSICION DE ESTADO

En la sección anterior se ha presentado un método para evaluar una función de una matriz cuadrada. Esto será utilizado seguidamente para calcular la matriz de transición de estado de un sistema lineal e invariante.

Considérese, en primer lugar, un sistema de orden n descrito por la ecuación lineal de estado con entrada cero: $d\vec{x}/dt = A(t)\ \vec{x}$. El vector $\vec{x}(t)$ es una trayectoria $\vec{\phi}(t;t_0,\vec{x}_0)$ en el espacio de estado. Se define, entonces, como matriz de transición del sistema a una matriz n×n, denotada por $\Phi(t,t_0)$, tal que:

$$\vec{x}(t) = \vec{\phi}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0) = \Phi(t,\ t_0)\ \vec{x}_0 \qquad (3.15)$$

Reemplazando (3.15) en la ecuación diferencial que define el sistema, se tiene:

$$\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t} = A(t)\ \Phi(t,t_0) \qquad (3.16)$$

Además, como $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, para cualquier $\vec{x}_0$, se cum ple que:

$$\Phi\ (t_0, t_0) = I \tag{3.17}$$

Para el caso de un sistema contínuo, lineal invariante, la matriz de transición es:

$$\Phi\ (t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \tag{3.18}$$

como se puede demostrar fácilmente, utilizando su desarrollo en serie.

Las principales propiedades de la matriz de transición de estado, son:

1.- Transición: $\Phi\ (t_2, t_0) = \Phi\ (t_2, t_1)\ \Phi\ (t_1, t_0)$ (3.19)

2.- Inversión: $\Phi\ (t_0, t_1) = \Phi^{-1}(t_1, t_0)$ (3.20)

3.- Separación: $\Phi\ (t_1, t_0) = \Theta\ (t_1)\ \Theta^{-1}(t_0)$ (3.21)

4.- Determinante: $\det \Phi(t_1, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_1} \left[\mathrm{tr}A(\tau)\right] d\tau}$ (3.22)

Según la ecuación (3.15), la matriz de transición de un sistema es tal que, cada $\Phi_{ij}\ (t, t_0)$ es la respuesta de la variable de estado i debido a una condición inicial unitaria en la variable de estado j cuando las condiciones iniciales en los restantes estados son nulas. Así, conociendo la matriz de transición de un sistema, se obtiene directamente la respuesta no forzada del mismo.

Para evaluar la matriz de transición de estado de un sistema lineal invariante, existen varios métodos. Entre estos, los más conocidos son los siguientes:

1.- Utilizando series:

$$e^{At} \quad \sum_{K=0}^{\infty} A^{K} \, t^{K} / K! \tag{3.23}$$

2.- Utilizando los valores propios:

$$e^{At} = T \, e^{Jt} \, T^{-1} \tag{3.24}$$

3.- Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \, A^{i} \tag{3.25}$$

donde los $\gamma_i(t)$ son calculados de:

$$e^{Jt} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \, J^{i}$$

4.- Utilizando la transformada de Laplace:

$$e^{At} = \mathscr{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \tag{3.26}$$

lo cual se deduce de la ecuación (3.3) cuando la excitación $\vec{u}(s)$ es nula.

El método que utiliza los valores y vectores propios de la matriz A, se deduce de la ecuación (3.12); y es muy conveniente para sistemas de orden elevado. Según ésto se tiene entonces que:

$$e^{A(t-t_0)} = T \; e^{J(t-t_0)} \; T^{-1} \tag{3.27}$$

De la ecuación (3.13):

$$e^{J(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{L_{11}(\lambda_1)(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{L_{mn}(\lambda_n)(t-t_0)} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

y de la ecuación (3.14):

$$e^{L_{ji}(\lambda_i)(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{\lambda_i(t-t_0)} & \cdots\cdots & (t-t_0)^{\ell-1} e^{\lambda_i(t-t_0)}/(\ell-1)! \\ 0 & e^{\lambda_i(t-t_0)} & \cdots\cdots & (t-t_0)^{\ell-2} e^{\lambda_i(t-t_0)}/(\ell-2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & e^{\lambda_i(t-t_0)} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

De esta manera, conociendo las matrices T y J de un sistema, es muy fácil calcular su matriz de transición de estado que permite obtener la respuesta no forzada del mismo en forma inmediata.

Más aún, para un sistema lineal invariante con entradas no nulas [ecuaciones (3.1) y (3.2)], la solución general es de la forma:

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\, \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\, B\vec{u}(\tau)\,d\tau \tag{3.30}$$

$$\vec{y}(t) = C\, e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\, e^{A(t-\tau)}\, B\vec{u}(\tau)\,d\tau + D\vec{u}(t) \tag{3.31}$$

Existen métodos para convertir estas ecuaciones : ((3.30) y (3.31)) en ecuaciones en diferencias que son muy convenientes para ser implementadas en un computador digital, las cuales requieren del cálculo de la matriz de transición. Así se dispondría de una forma de hallar los estados y salidas de un sistema lineal invariante.

En un computador digital, el cálculo de e^{At}, así como de $\vec{x}(t)$ y $\vec{y}(t)$, se hará para valores discretos del tiempo t.

Ejemplos:

1.- Se desea calcular la respuesta no forzada del sistema mecánico de la Fig. 3.1, para los valores particulares: $K = 0.3$ Kgf/cm $\Longleftrightarrow$ $299.40 \ \frac{N}{m}$

$m = 1.8$ Kg

$D = 0.1$ Kgf/(cm/seg) $\Longleftrightarrow$ 99.80 N/(m/seg)

si se conoce que el estado inicial es:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 \text{ m} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ desplazamiento inicial del resorte de su posición de equilibrio.} \\ \\ \rightarrow \text{ velocidad inicial del bloque.} \end{array}$$

A partir de las ecuaciones (3.15), (3.18) y (3.27) se sigue que:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t,t_0)\vec{x}_0 = e^{A(t-t_0)} \ \vec{x}_0 =$$

$$= T\ e^{J(t-t_0)}\ T^{-1}\ \vec{x}_0$$

Utilizando los programas digitales implementados, se obtiene:

$$T = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.300 \\ -1.000 & -0.954 \end{bmatrix} \quad ; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -3.390 & -1.065 \\ 3.552 & 0.068 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -52.262 & 0.000 \\ 0.000 & -3.183 \end{bmatrix}$$

De modo que según las ecuaciones (3.28) y (3.29), suponiendo $t_0 = 0$, se puede ahora calcular:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-52.262t} & 0.000 \\ 0.000 & e^{-3.183t} \end{bmatrix}$$

Finalmente se calcula $\vec{x}(t)$; por partes sería:

$$T\ e^{Jt} = \begin{bmatrix} 0.019\ e^{-52.262t} & 0.300\ e^{-3.183t} \\ -1.000\ e^{-52.262t} & -0.954\ e^{-3.183t} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\,\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -0.271 \\ \\ 0.284 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.005 \; e^{-52.262t} + 0.085 \; e^{-3.183t} \\ \\ 0.271 \; e^{-52.262t} - 0.271 \; e^{-3.183t} \end{bmatrix}$$

2.- Se desea calcular la matriz de transición de estado e^{At}, de un sistema en el que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & 54 & -36 & 10 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el mismo proceso del ejemplo anterior, se pasa a obtener T, T^{-1} y J utilizando los programas digitales, ésto da los siguientes resultados:

$$T = \begin{bmatrix} -0.035 & -0.002 & -0.023 & -0.500 \\ -0.105 & -0.041 & -0.072 & -0.500 \\ -0.314 & -0.229 & -0.257 & -0.500 \\ -0.943 & -1.000 & -1.000 & -0.500 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -10.919 & 35.770 & -30.330 & 5.480 \\ -115.189 & 177.664 & -70.502 & 8.026 \\ 128.859 & -214.766 & 100.225 & -14.318 \\ -\ 6.750 & 6.750 & -\ 2.250 & 0.250 \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 3.000 & 1.000 & -0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 3.000 & 0.000 \\ \hline 0.000 & 0.000 & -0.000 & 1.000 \end{array}\right]$$

La matriz J tiene 2 bloques de Jordan: uno de orden 3x3 correspondiente a un valor propio de multiplicidad 3; y otro de orden 1x1.

La matriz e^{Jt}, según (3.28) y (3.29) es la siguiente:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{3.0000t} & t\ e^{3.0000t} & \frac{1}{2}\ t^2\ e^{3.0000t} & 0 \\ 0 & e^{3.0000t} & t\ e^{3.0000t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3.0000t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{1.0000t} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición $e^{At} = T\, e^{Jt}\, T^{-1}$ se calcula a continuación:

$$Te^{Jt} = \begin{bmatrix} -0.035\ e^{3t} & -0.035t\ e^{3t} - 0.002\ e^{3t} & -0.018\ t^2\ e^{3t} - 0.002\ t\ e^{3t} - 0.023\ e^{3t} & -0.500\ e^{t} \\ -0.105\ e^{3t} & -0.105t\ e^{3t} - 0.041\ e^{3t} & -0.052\ t^2\ e^{3t} - 0.041\ t\ e^{3t} - 0.072\ e^{3t} & -0.500\ e^{t} \\ -0.314\ e^{3t} & -0.314t\ e^{3t} - 0.229\ e^{3t} & -0.157\ t^2\ e^{3t} - 0.229\ t\ e^{3t} - 0.257\ e^{3t} & -0.500\ e^{t} \\ -0.943\ e^{3t} & -0.943t\ e^{3t} - 1.000\ e^{3t} & -0.471\ t^2\ e^{3t} - 1.000\ t\ e^{3t} - 1.000\ e^{3t} & -0.500\ e^{t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \underline{\text{FILA 1}}\text{:} & \\ 3.4\ e^{t} + (-2.4 + 3.8t - 2.3)\ e^{3t} & -3.4\ e^{t} + (3.4 - 5.8t + 3.8t^2)\ e^{3t} \\ 1.1\ e^{t} + (-1.1 + 2.3t - 1.8t^2)\ e^{3t} & -0.1\ e^{t} + (0.1 - 0.3t + 0.3t^2)\ e^{3t} \\ \underline{\text{FILA 2}}\text{:} & \\ 3.4\ e^{t} + (-3.4 + 6.8t - 6.8t^2)\ e^{3t} & -3.4\ e^{t} + (4.4 - 9.8t + 11.3t^2)\ e^{3t} \\ 1.1\ e^{t} + (-1.1 + 3.3t - 5.3t^2)\ e^{3t} & -0.1\ e^{t} + (0.1 - 0.3t + 0.8t^2)\ e^{3t} \\ \underline{\text{FILA 3}}\text{:} & \\ 3.4\ e^{t} + (-3.4 + 6.8t - 20.3t^2)\ e^{3t} & -3.4\ e^{t} + (3.4 - 6.8t + 33.8t^2)\ e^{3t} \\ 1.1\ e^{t} + (-0.1 - 0.8t - 15.8t^2)\ e^{3t} & -0.1\ e^{t} + (0.1 + 0.8t + 2.3\ t^2)\ e^{3t} \\ \underline{\text{FILA 4}}\text{:} & \\ 3.4\ e^{t} + (-3.4 - 20.3t - 60.8t^2)\ e^{3t} & -3.4\ e^{t} + (3.4 + 47.3t + 101.3t^2)\ e^{3t} \\ 1.1\ e^{t} + (-1.1 - 33.8t - 47.3t^2)\ e^{3t} & -0.1\ e^{t} + (1.1 + 6.8t + 6.8t^2)\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

3.5 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Con la teoría y programas para computador digital expuestos y desarrollados hasta aquí en el presente trabajo, se dispone de material indispensable para abordar un tema tan importante como es el de la *Controlabilidad y Observabilidad* de un sistema; aspectos éstos de gran interés tanto teórico como práctico.

El control y observación de los estados de un sistema requiere de un estudio amplio y profundo. Sin embargo, ya que aquí interesa desarrollar estos aspectos como una aplicación de la matriz de vectores propios y vectores propios generalizados T y de la forma canónica de Jordan J, de un sistema lineal invariante descrito por las ecuaciones (3.1) y (3.2); se presentan a continuación los criterios fundamentales.

Un estado $\vec{x}_1$ de un sistema, es controlable, si es posible hallar una función de entrada $\vec{u}\ (t, \vec{x}_0)$, para cualquier condición inicial $\vec{x}_0$, tal que transfiera a ésta hasta $\vec{x}_1$ en un tiempo finito.

El sistema será *completamente controlable* si todos los estados $\vec{x}_1$ son controlables. Se denomina controlable en el tiempo t_0 todo estado cuyo control depende de t_0.

Para que un sistema lineal sea controlable completamente es necesario y suficiente que el estado cero pueda ser transferido a cualquier estado final $\vec{x}_1$. Así, en la ecuación (3.30) si el estado cero puede ser transferido a cualquier estado $\vec{x}_1(t_1) = \vec{x}(t_1) - \Phi(t_1,t_0)\,\vec{x}(t_0)$; entonces cualquier estado $\vec{x}(t_0)$ puede ser llevado a $\vec{x}(t_1)$.

Los conceptos de observabilidad son duales a los de controlabilidad.

Un estado $\vec{x}_1$ de un sistema, es observable en un tiempo t_1, si al conocerse la entrada $\vec{u}(\tau)$ y la salida $\vec{y}(\tau)$ en el tiempo $t_0 < \tau \leq t_1$, se determina completamente $\vec{x}_1(t_1)$.

Si todos los estados $\vec{x}_1$ son observables, el sistema se denomina *completamente observable*. Si la observabilidad depende de t_0, el estado se llama *observable en* t_0.

Para que un sistema sea observable completamente, es necesario y suficiente que el estado inicial $\vec{x}(t_0)$, cuando $\vec{u}(\tau) = 0$, pueda ser observado al conocerse $\vec{y}(\tau)$; ya que según la ecuación (3.31) es posible hallar cualquier otro estado $\vec{x}(t)$ a partir de $\vec{x}(t_0)$ y $\vec{y}(\tau)$.

En la aplicación de los conceptos anteriores es fundamental la utilización de los diagramas de flujo que representan al sistema en cuestión, ya que en ellos es posible identificar cada una de sus variables de estado, así como también sus entradas y salidas.

En el diagrama de flujo de un sistema, si una variable de estado se halla desconectada de las señales de control (las señales de entrada que actúan sobre dicha variable de estado pasan por multiplicadores de ganancia cero), entonces es incontrolable. En forma similar, si una variable de estado está desconectada de las salidas, entonces es inobservable. Sin embargo, hay que tener cuidado en el análisis cuando se trata de sistemas variantes en tiempo, ya que pueden haber sistemas incontrolables e/o inobservables que no presentan las desconexiones antes anotadas.

En los sistemas lineales invariantes (ecuaciones (3.1) y (3.2)), la conexión de las entradas (al menos una) con las componentes del vector de estado, equivale a una fuerte forma de controlabilidad completa; así también, la conexión de todas las variables de estado con las salidas (al menos con una salida) equivale a observabilidad completa. Si una variable de estado está desconectada de todas las entradas y de todas las salidas, entonces es incontrolable e inobservable. Debe ser claro que pueden haber variables controlables pero inobservables y variables incontrolables pero obser vables.

Es muy útil, entonces, en controlabilidad y observabilidad, la representación de un sistema mediante un diagrama de flujo; pero éste debe ser tal que permita distinguir cada variable de estado y sus relaciones estrictamente necesarias con las demás variables, así como también con las entradas y salidas. Esto es posible a través del *diagrama de flujo del sistema transformado* por una transformación de semejanza que permita obtener la forma canónica de Jordan, lo cual se ha conseguido previamente de la siguiente manera:

Volviendo a escribir las ecuaciones (3.1) y (3.2)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)$$

y aplicando la transformación $\vec{x} = T\vec{z}$, donde T es la matriz de vectores propios y vectores propios generalizados de A, se tiene la siguiente representación del sistema:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = T^{-1}\, A\, T\, \vec{z}(t) + T^{-1}\, B\, \vec{u}(t) \qquad (3.32)$$

$$\vec{y} = C\,T\,\vec{z}(t) + D\vec{u}(t) \tag{3.33}$$

donde:

$T^{-1} A\, T = J$: forma canónica de Jordan.

$$T^{-1} B = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$C\,T = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{K1} & g_{K2} & & g_{Kn} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

En base a esta nueva representación del sistema, se procede a desarrollar los criterios previos establecidos sobre controlabilidad y observabilidad, para sistemas lineales invariantes.

CONTROLABILIDAD

1.- Cuando la matriz A tiene todos sus valores propios distintos, entonces J es una matriz diagonal; y el diagrama de flujo del sistema es el de la Fig. 3.2.

Según la Fig. 3.2, una variable Z_i es incontrolable (y por lo tanto cualquier x compuesto de una combinación lineal de zetas que contenga a Z_i) si se cumple que: $f_{ij} = 0$; $j = 1,2,\ldots, m$; es decir si la fila i de la matriz $T^{-1}B$ tiene todos sus elementos iguales a cero.

2.- Cuando la matriz A tiene valores propios repetidos; el análisis puede aplicarse a un bloque de Jordan general y de ahí extender los resultados a todo el sistema, ya que éste va a estar representado por varios bloques de Jordan.

Supongamos un bloque de Jordan $L_{ji}(\lambda_i)$, $\ell \times \ell$. Las ecuaciones de estado de sus variables serán de la forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ f_{31} & f_{32} & \cdots & f_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{\ell 1} & f_{\ell 2} & \cdots & f_{\ell m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

y el diagrama de flujo correspondiente es el de la Fig. 3.3.

Según este diagrama, una variable de estado Zp que pertenece al bloque de Jordan L_{ji} (λi), $\ell \times \ell$; podrá ser controlada en dos formas:

a) <u>En forma independiente</u>.- Cuando la fila p de la submatriz de $T^{-1}B$ correspondiente al bloque, sea diferente de cero.

b) <u>En forma ligada con otra variable de estado</u>.- cuando la fila p de la submatriz de $T^{-1}B$ correspondiente al bloque, es cero; en cuyo caso es todavía posible controlar Zp a través de Z_{p+1}, pudiendo esta última ser a la vez controlada en una de las dos formas, siempre y cuando se cumplan los requerimientos respectivos. Al estar así Zp controlada por los valores que tome Z_{p+1}, sus valores no pueden ser variados independientemente de Z_{p+1} en forma arbitraria.

Debe observarse que el control de Z_ℓ es independiente de las demás variables de estado y es posible siempre y cuando la fila ℓ de la submatriz de $T^{-1}B$ correspondiente al bloque sea diferente de cero; siendo ésta a su vez una condición límite que permitiría, suponiendo todas las demás (ℓ-1) filas iguales a cero, controlar todas las variables del bloque en forma ligada.

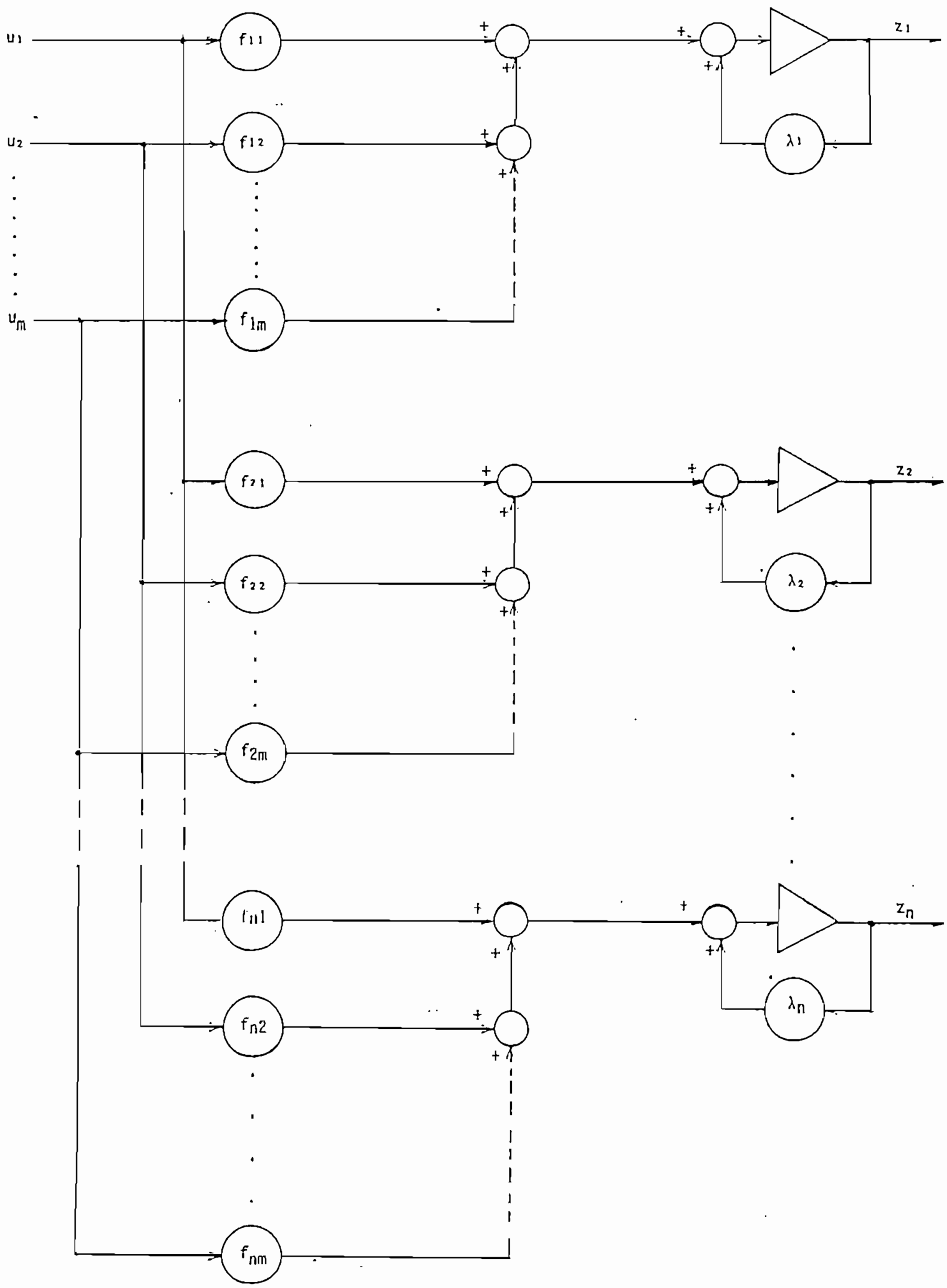
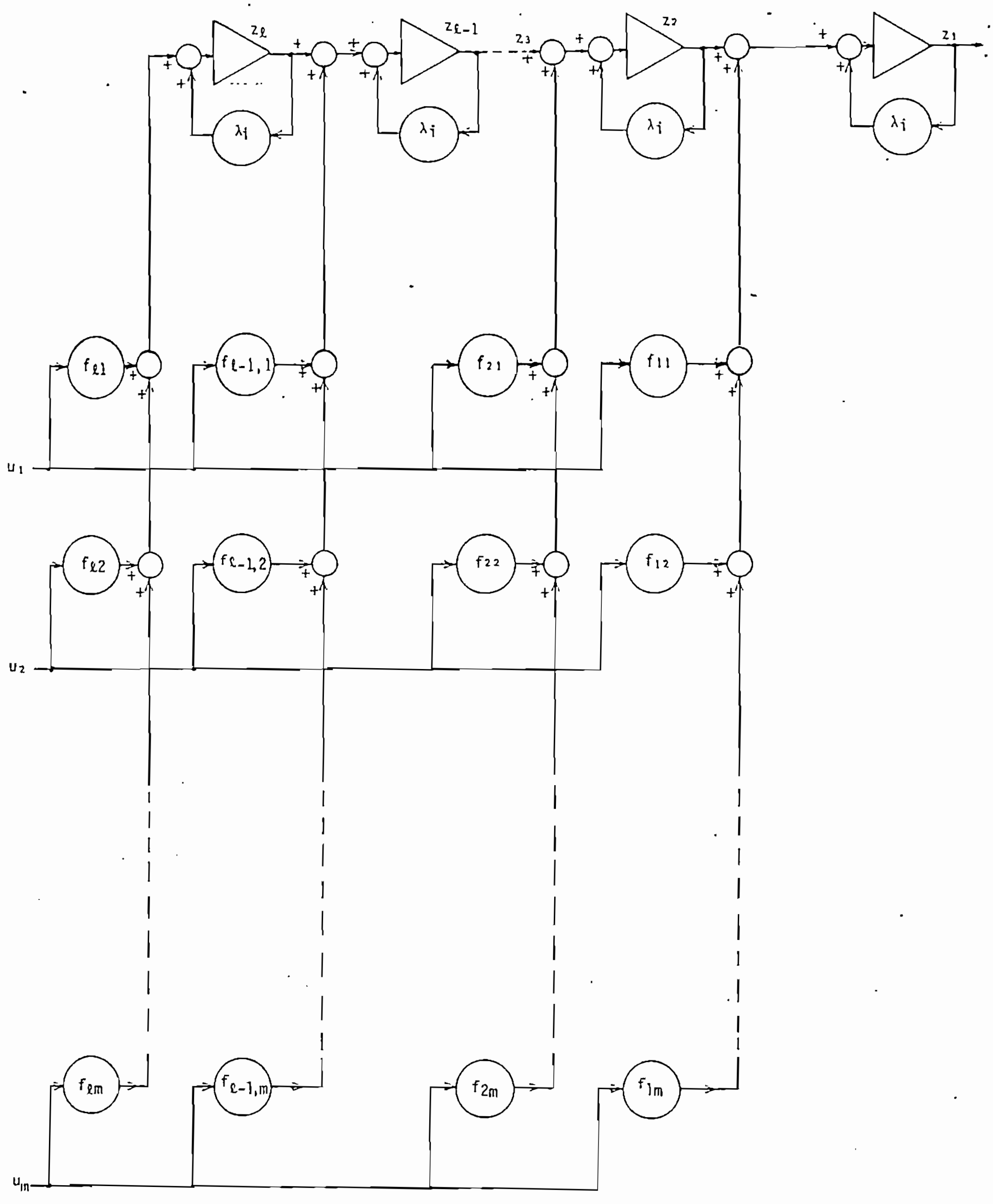


FIG. 3.2



z_ℓ
z_{ℓ-1}
z_3
z_2
z_1
λ_i
λ_i
λ_i
λ_i
f_{ℓ1}
f_{ℓ-1,1}
f_{21}
f_{11}
u_1
f_{ℓ2}
f_{ℓ-1,2}
f_{22}
f_{12}
u_2
f_{ℓm}
f_{ℓ-1,m}
f_{2m}
f_{1m}
u_m

FIG. 3.3

Las dos formas de control descritas, pueden ser aplicadas simultáneamente sobre una misma variable Z siempre y cuando se cumplan las condiciones respectivas.

Se dispone pues de un método para analizar si cada; variable de estado Z de un bloque de Jordan es o no controlable; y si lo es, en qué forma. Como la matriz J está conformada por bloques de Jordan, el método sirve para analizar la controlabilidad de todo el sistema. Sin embargo, para que el sistema sea completamente controlable es necesario que además de las condiciones anteriores se cumpla que: *cada valor propio λ_i esté asociado sólo con 1 bloque de Jordan.*

OBSERVABILIDAD

1.- Cuando la matriz A tiene todos sus valores propios distintos; entonces, según la ecuación (3.33) y considerando que basta que el estado $\vec{Z}_0$ (con $\vec{u}(\tau) = 0$) sea observable para que el sistema sea observable completamente, se tiene el diagrama de flujo de la Fig. 3.4, que muestra las relaciones entre las salidas y las variables de estado Z.

Según la Fig. 3.4, una variable de estado Z_i, i = 1, 2, ..., n; es inobservable cuando la columna i de la matriz C T tiene todos sus elementos iguales a cero.

2.- Cuando la matriz A tiene valores propios repetidos;

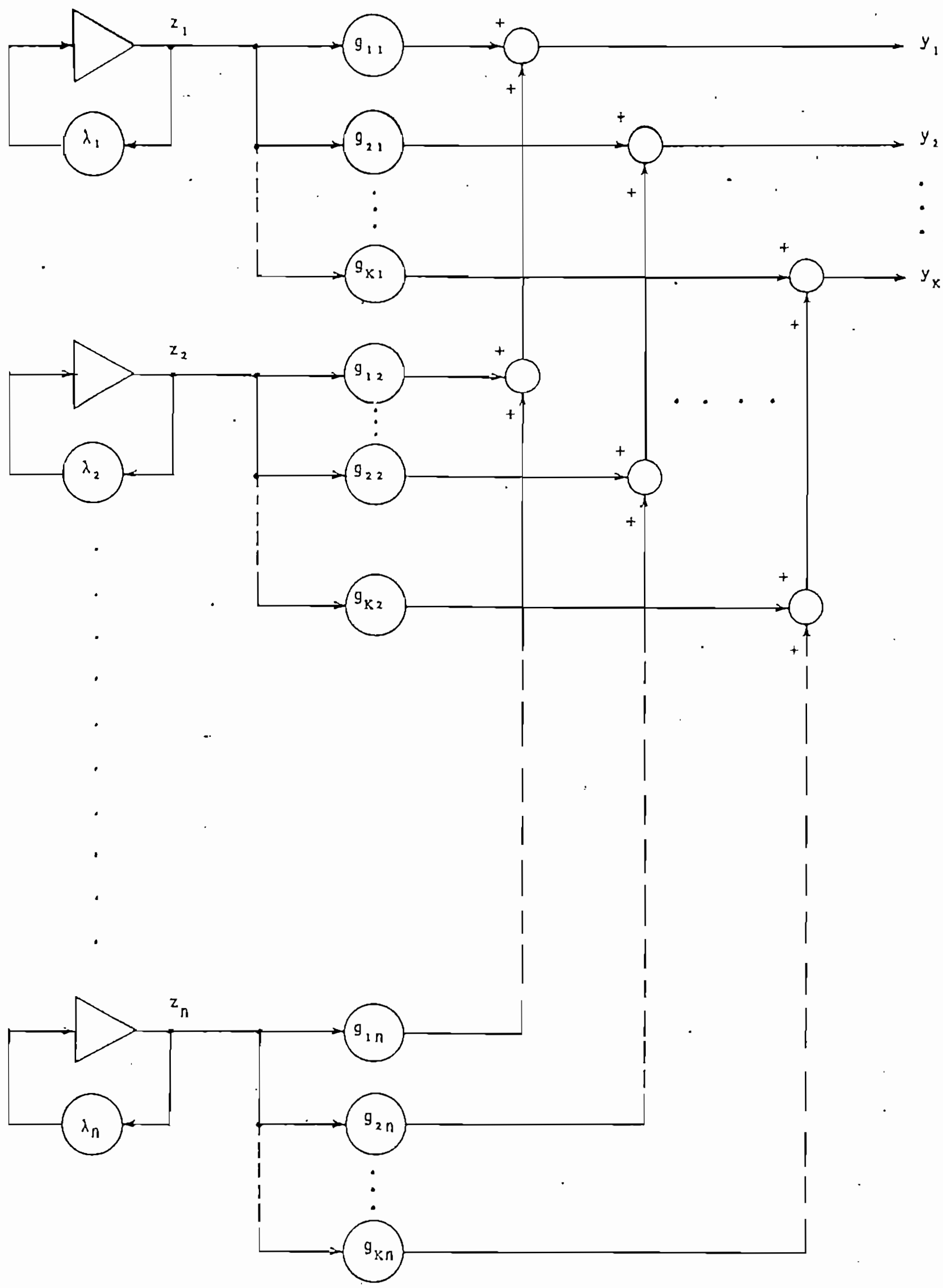


FIG. 3.4

entonces, en forma similar al caso de controlabilidad, el análisis puede ser hecho para un bloque de Jordan general $L_{ji}(\lambda_i)$, $\ell \times \ell$; y luego los resultados extendidos a todo el sistema.

Sea el bloque de Jordan $L_{ji}(\lambda_i)$, $\ell \times \ell$; en el que las ecuaciones de las salidas, en relación con las variables de estado del bloque serán de la forma:

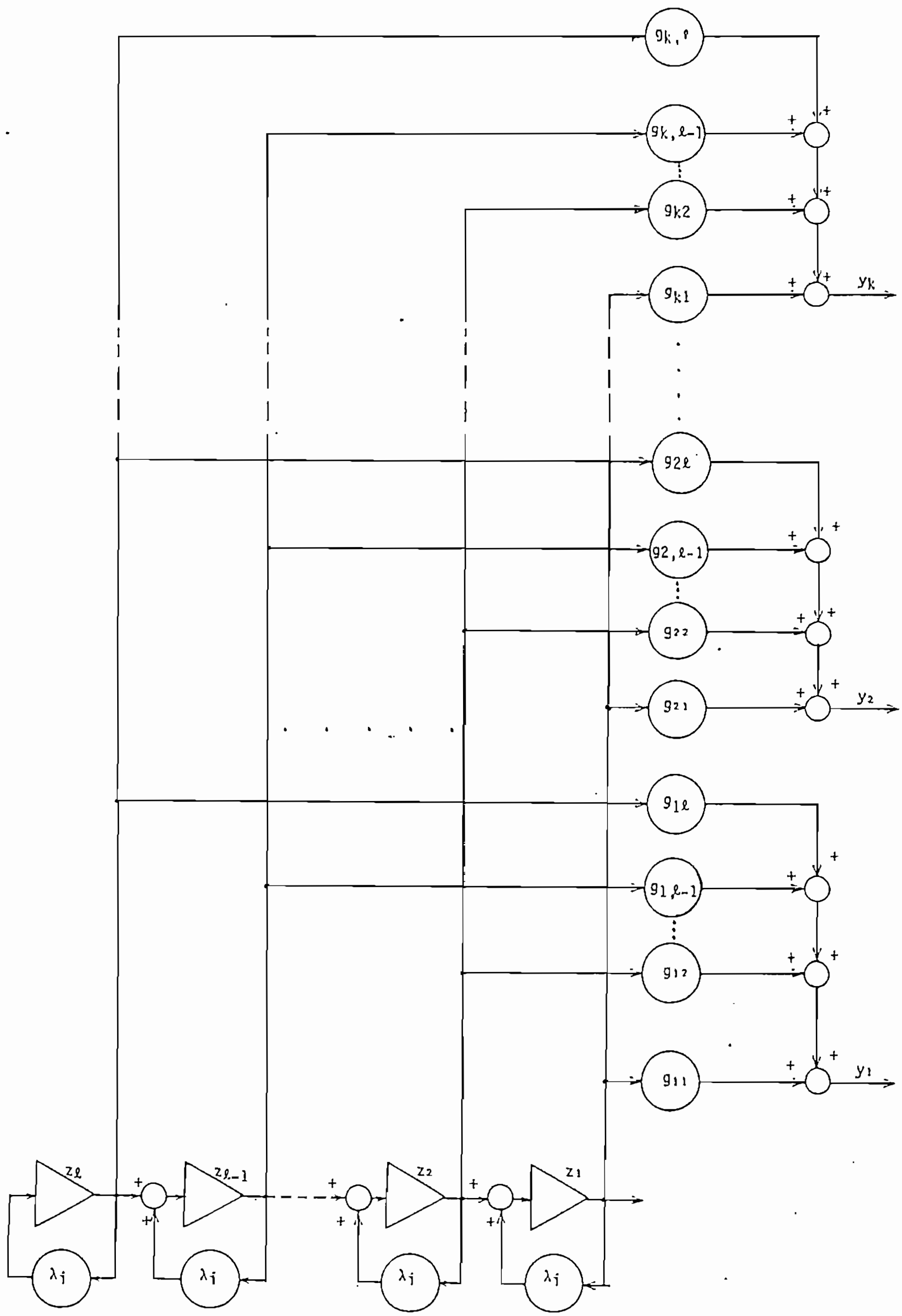
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1\ell} \\ g_{21} & g_{22} & & g_{2\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{K1} & g_{K2} & & g_{K\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\ell \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

el diagrama de flujo correspondiente es el indicado en la Fig. 3.5.

De acuerdo a esta Fig. 3.5, una variable de estado Zp que pertenece al bloque, puede ser observable en 2 formas:

a) <u>En forma independiente.</u>- Cuando la columna p de la submatriz de $C\,T$ correspondiente al bloque es diferente de cero.

b) <u>En forma ligada con otra u otras variables de estado.</u>-



$g_{k,\ell}$
$g_{k,\ell-1}$
g_{k2}
g_{k1}
y_k
$g_{2\ell}$
$g_{2,\ell-1}$
g_{22}
g_{21}
y_2
$g_{1\ell}$
$g_{1,\ell-1}$
g_{12}
g_{11}
y_1
z_ℓ
$z_{\ell-1}$
z_2
z_1
λ_j

FIG. 3.5

Cuando la columna p de la submatriz de $C\,T$ correspondiente al bloque es igual a cero, en cuyo caso es factible observar la variable de estado Zp a través de los efectos que produce sobre la variable de estado Z_{p-1}; la cual a su vez puede ser observada en una de las dos formas, si se cumplen los requisitos indicados.

La variable Zp será totalmente inobservable cuando todas las columnas: 1,2, ..., p de la submatriz de $C\,T$ correspondiente al bloque sean cero.

Con estos criterios es posible determinar si una variable de estado correspondiente a un bloque de Jordan es ó no observable. Así, analizando todos los bloques, se puede determinar la observabilidad de todo el sistema. Sin embargo, para que el sistema sea completamente observable es necesario se cumpla una condición adicional, ésta es que: *cada valor propio* λ_i *se halle asociado sólo con un bloque de Jordan.*

Como se afirma al comienzo de esta sección, el conocer si es o no posible controlar y observar las variables de estado de un sistema es muy importante tanto desde un punto de vista teórico como práctico.

Los criterios expuestos requieren de la transformación del sistema original (ecuaciones (3.1) y (3.2)) en otro equivalente de la forma dada por las ecuaciones (3.32)y(3.33); ésto es justamente lo que en este trabajo se ha conseguido, disponiéndose así de todos los elementos necesarios para investigar la controlabilidad y observabilidad de un sistema lineal invariante descrito en el espacio de estado.

Existen métodos directos, utilizando las matrices A, B y C, que permiten hallar si un sistema en su conjunto es o no controlable; así como también si es o no observable. Sin embargo por medio de ellos no es posible conocer dichos aspectos de cada variable de estado particular, lo cual es muy importante y sí se consigue por los métodos anteriores.

Ejemplos:

1.- El circuito eléctrico de la Fig. 1.1 tiene como una de sus formas de representación en el espacio de estado, la forma de Jordan. Se desea conocer si el circuito es controlable y observable, sabiendo que: $R = 10\ K\Omega$

$C = 10\ \mu F$

Para estos valores de R y C se tiene en las respectivas ecuaciones de estado que:

$$A = \begin{bmatrix} -2.42 & 0 \\ 0 & -27.58 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2.65 & -2.65 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Por medio de los programas digitales se obtiene los siguientes resultados:

$$J = \begin{bmatrix} -2.42 & 0 \\ 0 & -27.58 \end{bmatrix} \quad ; \quad T^{-1} B = \begin{bmatrix} -1.00 \\ -1.00 \end{bmatrix} \quad ; \quad C\,T = \begin{bmatrix} -2.65 & 2.65 \end{bmatrix}$$

De lo que se concluye que:

- El sistema es completamente controlable, ya que las filas de la matriz $T^{-1}B$ son diferentes de cero.

- El sistema es completamente observable, ya que las columnas de la matriz CT son diferentes de cero.

2.- Para el sistema mecánico masa-resorte de la Fig. 3.1 se establecen los valores siguientes:

K = 0.3 Kgf/cm < => 299.40 N/m

m = 1.8 Kg

D = 0.01 Kgf/(cm/seg) < => 9.98 N/(m/seg)

Se desea determinar si el desplazamiento del resorte y la velocidad del bloque son o no variables que se pueden controlar a través de la fuerza f(t).

Según las ecuaciones del sistema y suponiendo como salidas las mismas variables de estado, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{299.40}{1.8} & -\dfrac{9.98}{1.8} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1.8} \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los resultados que interesan para el análisis de controlabilidad y observabilidad son los siguientes:

$$J = \begin{bmatrix} -2.772 + j\ 12.596 & 0.000 + j\ 0.000 \\ 0.000 + j\ 0.000 & -2.772 - j\ 12.596 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\ B = \begin{bmatrix} -0.279 - j\ 0.061 \\ -0.279 + j\ 0.061 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 0.017 + j\ 0.075 & 0.017 - j\ 0.075 \\ -0.997 + j\ 0.000 & -0.997 + j\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Según ésto, el sistema masa-resorte en cuestión, es completamente controlable y observable.

3.- El sistema mecánico de la Fig. 3.6, consiste de 2 plataformas acopladas entre sí y a un soporte fijo en tierra, por medio de resortes y amortiguadores. Suponiendo que las plataformas son de masa despreciable y que los valores de las constantes de los resortes y coeficientes de amortiguamiento son los indicados en dicha figura; se desea analizar la controlabilidad del sistema

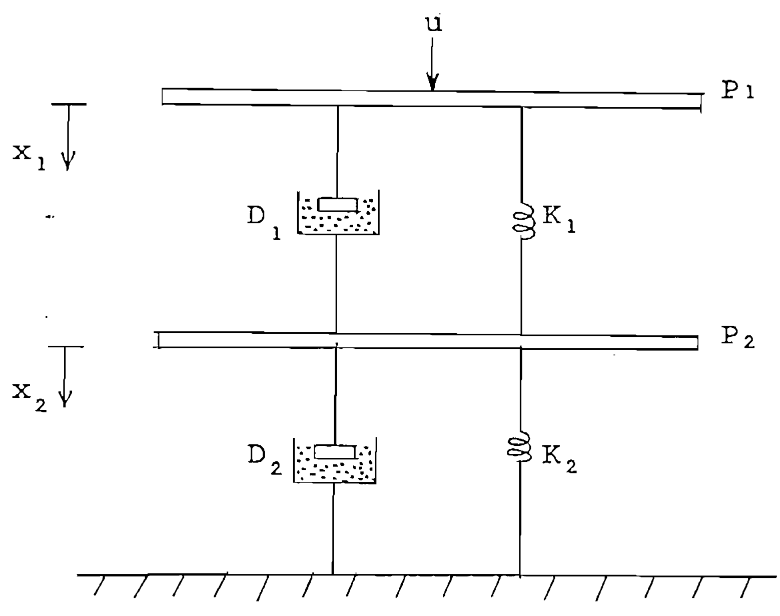


FIG. 3.6

Siendo x_1 = desplazamiento de la plataforma P_1.

x_2 = desplazamiento de la plataforma P_2.

Las ecuaciones dinámicas son los siguientes:

$$\sum F_{P_1} = m_1\ a_1 = 0$$

$$K_1(x_1 - x_2) + D_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u = 0 \tag{3.38}$$

$$\sum F_{P_2} = m_2\ a_2 = 0$$

$$-K_1(x_1 - x_2) - D_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_2\ x_2 + D_2\ \dot{x}_2 = 0 \tag{3.39}$$

Sumando las ecuaciones (3.38) y (3.39); y del resultado despejando $\dot{x}_2$ se obtiene:

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_2}{D_2}\,x_2 + \frac{1}{D_2}\,u$$

Reemplazando esta ecuación en (3.38) y despejando $\dot{x}_1$ se obtiene:

$$\dot{x}_1 = -\frac{K_1}{D_1}\,X_1 + \left(\frac{K_1}{D_1} - \frac{K_2}{D_2}\right) x_2 + \left(\frac{D_1 + D_2}{D_1\ D_2}\right) u$$

Así, en forma matricial, las dos últimas ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{K_1}{D_1} & \dfrac{K_1}{D_1} - \dfrac{K_2}{D_2} \\ 0 & -\dfrac{K_2}{D_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{D_1 + D_2}{D_1\ D_2} \\ \dfrac{1}{D_2} \end{pmatrix} u \tag{3.40}$$

Si se cumple que: $\frac{K_1}{D_1} = \frac{K_2}{D_2} = K$; entonces las ecuaciones de estado (3.40) toman la forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{D_1 + D_2}{D_1\ D_2} \\ \frac{1}{D_2} \end{bmatrix} u$$

Estas ecuaciones se hallan ya expresadas en la forma de Jordan; y el diagrama de flujo respectivo es el de la Fig. 3.7. Según éste, aparentemente tanto x_1 como x_2 son controlables; sin embargo, ésto no se cumple pues se tienen 2 bloques de Jordan con el mismo valor propio $\lambda = -K$.

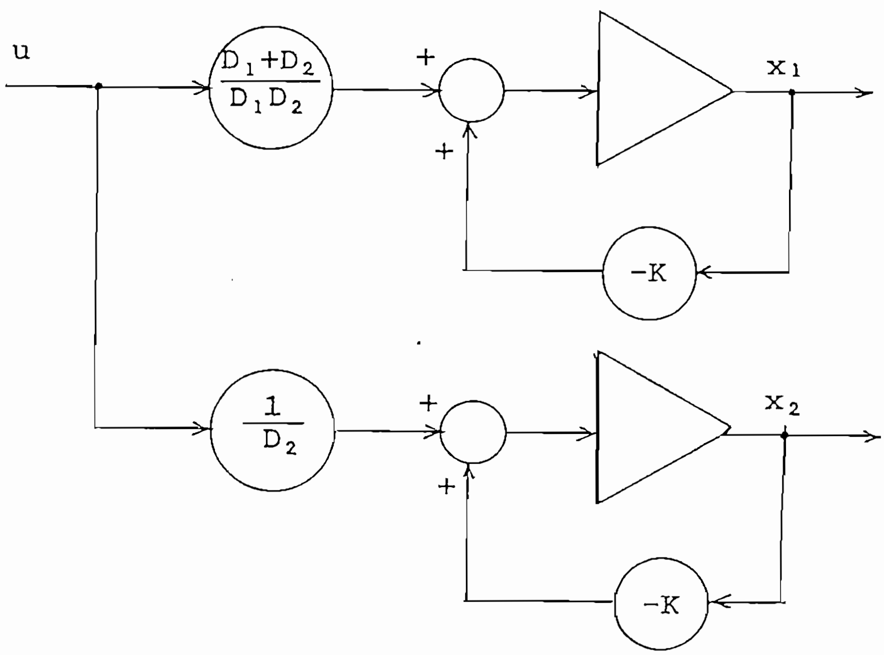


FIG. 3.7

C A P I T U L O   C U A R T O

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 Resultados .- Ejemplos

4.2 Conclusiones

4.3 Recomendaciones

4.1 RESULTADOS

A los largo de esta tesis se han ido desarrollando paulatinamente algunos ejemplos de aplicación, en forma paralela con el desarrollo de los fundamentos teóricos, métodos y programas digitales orientados al análisis de sistemas de control lineales e invariantes, en el dominio del tiempo.

Es necesario como punto de partida para la utilización de los programas que se han implementado, el disponer como modelo matemático del sistema, su representación en el espacio de estado.

Los resultados que los programas presentan, pueden ser utilizados directamente para análisis de: estabilidad, obtención de la matriz de transición de estado, respuesta no forzada, controlabilidad y observabilidad.

En esta sección se presentan algunos ejemplos que permiten apreciar en forma global las características de los programas, tanto en su capacidad de trabajar con sistemas de orden elevado, generalidad, eficiencia en precisión y tiempo de ejecución; así como también en su forma de presentación de los datos y de los resultados.

El tiempo de ejecución que se indica corresponde al tiempo que transcurre desde el momento en que ya ingresados los datos se comanda al sistema de computación para que ejecute los cálculos, hasta el momento en que el mismo indica que ha terminado el cálculo y que se puede proceder a solicitar que escriba los resultados.

EJEMPLO 1

SISTEMA DE CONTROL DE TURBINAS TIPO ELECTRO-HIDRAULICO

a) Descripción General:

Este sistema de control tiene la función de mantener la velocidad del eje de la turbina lo más próxima posible a una velocidad de referencia, frente a cambios de carga (demanda de potencia eléctrica), respondiendo prontamente sin grandes desviaciones de la frecuencia nominal o base.

Su funcionamiento es el siguiente: una señal de velocidad es comparada con una velocidad nominal de referencia (que para estudios de estabilidad se considera constante). El error resultante pasa a sumarse con una señal que proviene de la acción acelerométrica sobre el mismo y con una señal de retroalimentación dada por un amortiguador (cuya función es evitar que el sistema reaccione en forma brusca y oscilatoria). La señal resultante de posición sitúa la corredera de un servo de distribución (comando) que actúa a su vez para posicionar un servo de gran potencia (servo de compuerta) el cual va a actuar sobre los mecanismos de control del chorro de agua (ya sean servos de hélice, del deflector, del inyector, etc.). La señal de salida de compuerta se induce sobre la turbina que da como respuesta potencia o torque que se resta de la potencia o torque de carga (demanda eléctrica); el torque neto pasa a ser entrada a la inercia del eje que da como salida la señal de velocidad, completando así la retroalimentación del sistema.

c) <u>Variables y Ecuaciones de Estado</u>:

X_1.- Señal que resulta de la suma de la señal de error de velocidad con la señal acelerométrica sobre dicho error.

X_2.- Señal de posición del servomotor de distribución.

X_3.- Señal de posición del servo de compuerta.

X_4.- Señal de retroceso transitorio dado por el amortiguador.

X_5.- Señal de potencia o torque de salida de la turbina.

X_6.- Señal de velocidad o frecuencia del eje de la turbina.

ΔPe_1.- Perturbación debida a las variaciones de la demanda de

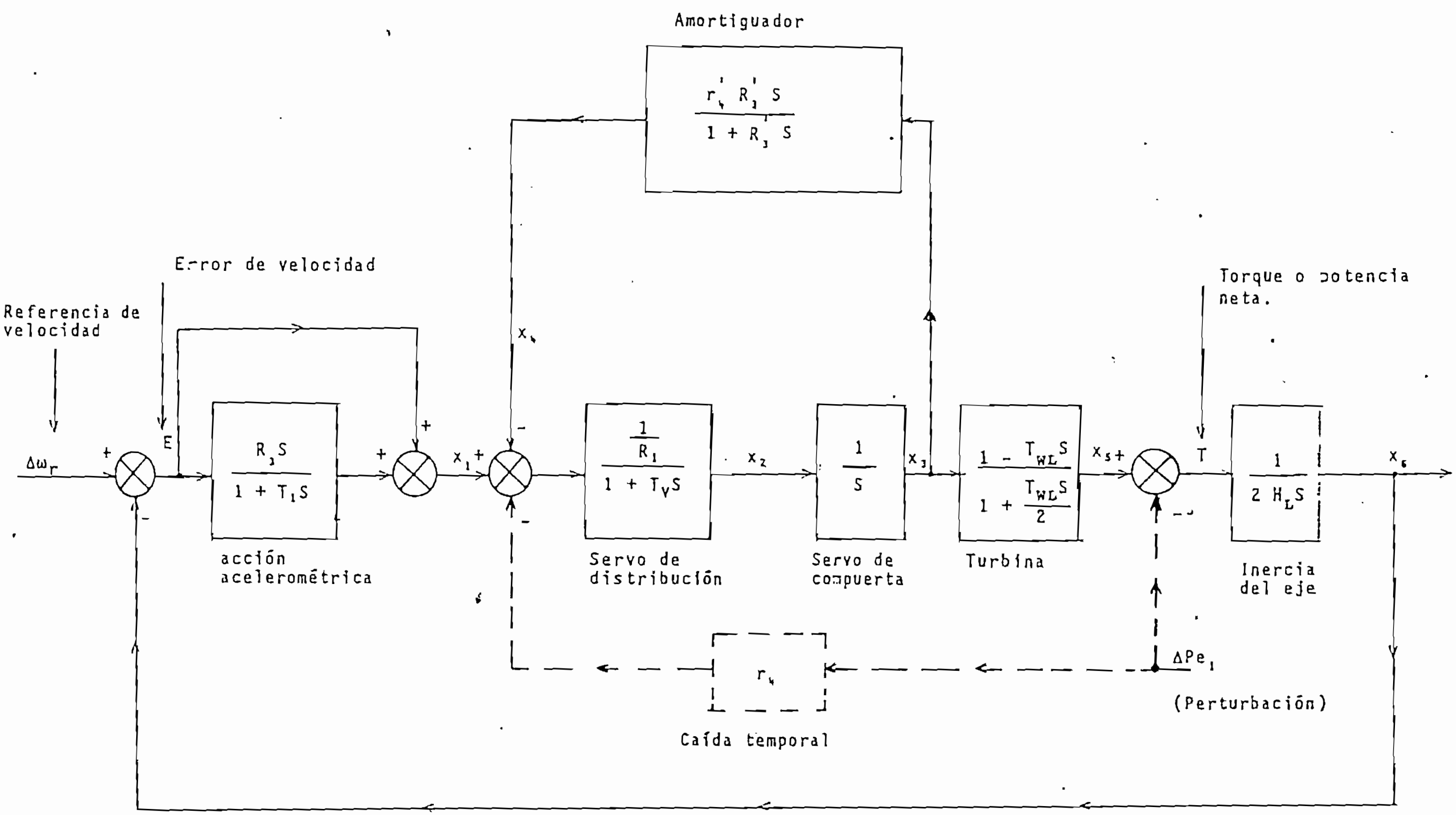


FIG. 4.1

b) Sistema de Control de turbinas tipo electro-hidráulico potencia eléctrica.

Las ecuaciones de estado son las siguientes:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2H_L}-\frac{R_3}{2T_1H_L} & -\frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{R_1\ T_V} & -\frac{1}{T_V} & 0 & -\frac{1}{R_1\ T_V} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_4' & 0 & -\frac{1}{R_3'} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{2}{T_{WL}} & 0 & -\frac{2}{T_{WL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2H_L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2H_L}+\frac{R_3}{2T_1H_L} \\ -\frac{r_4}{R_1\ T_V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2H_L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta P_{e1}\end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

y considerando como salidas $\vec{y}$ las variables de estado, las ecuaciones de salida son:

$$\vec{y} = I\vec{x} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta P_{e1}\end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

Los parámetros del sistema presentes en estas ecuaciones, pueden ser divididos en 2 tipos:

1.- Parámetros primarios: R_3, R_3', r_4'

2.- Parámetros secundarios: T_1, R_1, T_V, T_{WL}, H_L, r_4

Los valores nominales prácticos de los parámetros secundarios son los siguientes:

$T_1 = 0.9$; $R_1 = 0.2$; $T_V = 0.04$

$T_{WL} = 1.28$; $H_L = 4$; $r_4 = 0.03$

d) <u>Análisis</u>:

Se consideran 2 casos, según los valores de los parámetros primarios:

CASO I: Parámetros óptimos

$R_3 = 0.3$

$R_3' = 6$

$r_4' = 0.38$

Los resultados son los siguientes: (Ver págs. 185 a 189).

Según estos resultados se concluye que:

- El sistema de control es absolutamente estable, pues todos sus polos tienen parte real negativa.

De los 6 polos, dos son reales y los restantes complejos. Los polos reales dan lugar a términos, en la respuesta no forzada, que se atenúan muy rápidamente; de ahí que el sistema podría ser aproximado a uno de cuarto orden. Los 4 polos complejos aparecen en pares conjugados y dan lugar a tér minos oscilatorios decrecientes.

La mayor constante de tiempo está dada por el valor absoluto del inverso de la menor parte real de los polos y es igual a $\approx$ 5.13 seg.; y corresponde al término cuya frecuencia de oscilación es ω_1 = 0.38 rad/seg.; mientras que el otro término oscilatorio tiene una constante de tiempo de $\approx$ 1.95 seg. y una frecuencia ω_2 = 0.16 rad/seg.

- La matriz de transición de estado e^{At} es fácil de calcular pues se dispone de T, T^{-1} y J.

- En este caso la función de excitación ΔPe_1 no es una variable de control, sino más bien una perturbación dada por la demanda de potencia eléctrica; de ahí que la matriz $T^{-1}B$ sirve aquí para determinar si las variaciones de ΔPe_1 influyen o no sobre todas las variables de estado transformadas $\vec{z}$. Como todas las filas de $T^{-1}B$ son diferentes de cero, entonces dicha influencia directa existe; y como $\vec{x} = T\vec{z}$, también todas las x dependen de ΔPe_1.

```
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL                         15-JUL-81 17:17:14

ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

SISTEMA DE CONTROL DE TURBINAS TIPO ELECTRO-HIDRAULICO (PARAM. OPTIMOS)

DATOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO: TURBINA1
-----------------------------------------------------------------------

1) CARACTERISTICAS DEL SISTEMA:

   ORDEN: N = 6

   NO. DE ENTRADAS: M = 1

   NO. DE SALIDAS: K = 6

   MATRIZ A
   ========

   FILA 1:

     -1.11111      0.00000      0.00000      0.00000
     -0.16667     -1.11111

   FILA 2:

    125.00000    -25.00000      0.00000   -125.00000
      0.00000      0.00000

   FILA 3:

      0.00000      1.00000      0.00000      0.00000
      0.00000      0.00000

   FILA 4:

      0.00000      0.38000      0.00000     -0.16667
      0.00000      0.00000

   FILA 5:

      0.00000     -2.00000      1.56250      0.00000
     -1.56250      0.00000

   FILA 6:

      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
      0.12500      0.00000

   MATRIZ B
   ========

    0.16667

   -3.75000

    0.00000

    0.00000
```

```
   0.00000

  -0.12500

MATRIZ C
========

FILA 1:

   1.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 2:

   0.00000      1.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 3:

   0.00000      0.00000      1.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 4:

   0.00000      0.00000      0.00000      1.00000
   0.00000      0.00000

FILA 5:

   0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   1.00000      0.00000

FILA 6:

   0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      1.00000

MATRIZ D
========

   0.00000

   0.00000

   0.00000

   0.00000

   0.00000

   0.00000
```

```
2) POLOS DEL SISTEMA (VALORES PROPIOS DE MATRIZ A):

    NO.     PARTE REAL     PARTE IMAG.
     1      -22.81244        0.00000
     2       -3.61253        0.00000
     3       -0.19486        0.38931
     4       -0.19486       -0.38931
     5       -0.51279        0.16280
     6       -0.51279       -0.16280

3) MATRIZ TRANSFORMADORA T:
   (COLUMNAS DE T SON VECTORES PROPIOS, Y
   VECT. PROPIOS GENERALIZADOS DE MATRIZ A)

   FILA 1:

   (-0.00072  0.00000)  (-0.03845  0.00000)  (-0.06723 -0.20404)  (-0.06723  0.20404)
   (-0.13491 -0.07576)  (-0.13491  0.07576)

   FILA 2:

   (-0.99421  0.00000)  (-0.63219  0.00000)  ( 0.19814 -0.09569)  ( 0.19814  0.09569)
   ( 0.18867 -0.00536)  ( 0.18867  0.00536)

   FILA 3:

   ( 0.04358  0.00000)  ( 0.17500  0.00000)  (-0.40026 -0.30861)  (-0.40026  0.30861)
   (-0.33725 -0.09662)  (-0.33725  0.09662)

   FILA 4:

   ( 0.01668  0.00000)  ( 0.06972  0.00000)  (-0.10685 -0.18567)  (-0.10685  0.18567)
   (-0.17188 -0.07496)  (-0.17188  0.07496)

   FILA 5:

   (-0.09678  0.00000)  (-0.75014  0.00000)  (-0.74705  0.00000)  (-0.74705  0.00000)
   (-0.86147  0.00000)  (-0.86147  0.00000)

   FILA 6:

   ( 0.00053  0.00000)  ( 0.02596  0.00000)  ( 0.09601  0.19181)  ( 0.09601 -0.19181)
   ( 0.19077  0.06056)  ( 0.19077 -0.06056)

4) MATRIZ INVERSA DE T:

   FILA 1:

   (  6.44437   0.00000)  ( -1.11881   0.00000)  ( -0.00334   0.00000)  ( -6.17561   0.00000)
   (  0.04870   0.00000)  (  0.31388   0.00000)

   FILA 2:

   ( -8.32802   0.00000)  (  0.16666   0.00000)  (  0.22529   0.00000)  (  6.04547   0.00000)
   ( -0.52088   0.00000)  ( -2.56146   0.00000)
```

```
FILA 3:

( -3.95631   0.27868)   ( -0.02987  -0.01028)   ( -2.13893   1.90737)   (  2.59234  -9.77778)
( -0.20849  -0.77080)   ( -5.15555  -8.71111)

FILA 4:

( -3.95631  -0.27868)   ( -0.02987   0.01028)   ( -2.13893  -1.90737)   (  2.59234   9.77778)
( -0.20849   0.77080)   ( -5.15555   8.71111)

FILA 5:

(  6.69468  12.17670)   (  0.01619   0.06700)   (  1.75693  -3.84905)   ( -4.53320  22.06565)
( -0.17556   1.44626)   (  5.56834  28.15220)

FILA 6:

(  6.69468 -12.17670)   (  0.01619  -0.06700)   (  1.75693   3.84905)   ( -4.53320 -22.06565)
( -0.17556  -1.44626)   (  5.56834 -28.15220)

5) FORMA CANONICA DE JORDAN (MATRIZ J):
   (MATRIZ J = T INVERSA  * A * T )

FILA 1:

(-22.81244   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

FILA 2:

(  0.00000   0.00000)   ( -3.61253   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

FILA 3:

(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   ( -0.19486   0.38931)   (  0.00000   0.00000)
(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

FILA 4:

(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   ( -0.19486  -0.38931)
(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

FILA 5:

(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
( -0.51279   0.16280)   (  0.00000   0.00000)

FILA 6:

(  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
(  0.00000   0.00000)   ( -0.51279  -0.16280)

6) MATRIZ ( T INVERSA * B ):
   (PARA ANALISIS DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA)

( 5.23037  0.00000)

(-1.69278  0.00000)
```

```
( 0.09706  1.17358)

( 0.09706 -1.17358)

( 0.35904 -1.74054)

( 0.35904  1.74054)

7) MATRIZ ( C * T ) :
   (PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA)

   FILA 1:

   (-0.00072  0.00000)   (-0.03845  0.00000)   (-0.06723 -0.20404)   (-0.06723  0.20404)
   (-0.13491 -0.07576)   (-0.13491  0.07576)

   FILA 2:

   (-0.99421  0.00000)   (-0.63219  0.00000)   ( 0.19814 -0.09569)   ( 0.19814  0.09569)
   ( 0.18867 -0.00536)   ( 0.18867  0.00536)

   FILA 3:

   ( 0.04358  0.00000)   ( 0.17500  0.00000)   (-0.40026 -0.30861)   (-0.40026  0.30861)
   (-0.33725 -0.09662)   (-0.33725  0.09662)

   FILA 4:

   ( 0.01668  0.00000)   ( 0.06972  0.00000)   (-0.10685 -0.18567)   (-0.10685  0.18567)
   (-0.17188 -0.07496)   (-0.17188  0.07496)

   FILA 5:

   (-0.09678  0.00000)   (-0.75014  0.00000)   (-0.74705  0.00000)   (-0.74705  0.00000)
   (-0.86147  0.00000)   (-0.86147  0.00000)

   FILA 6:

   ( 0.00053  0.00000)   ( 0.02596  0.00000)   ( 0.09601  0.19181)   ( 0.09601 -0.19181)
   ( 0.19077  0.06056)   ( 0.19077 -0.06056)

   TIEMPO DE EJECUCION = 458 SEGUNDOS
```

CASO II: Parámetros erróneos

$R_3 = 4$

$R_3' = 6$

$r_4' = 0.4$

Los resultados son los siguientes: (Ver págs. 191 a 195).

Según estos resultados se concluye que:

- El sistema ha dejado de ser estable pues un par de polos complejos conjugados con partes reales positivas, dan lugar a un término oscilatorio creciente, en la respuesta no forzada del sistema.

- Se puede calcular fácilmente la matriz de transición del sistema.

- Las variables de estado naturalmente siguen siendo afectadas directamente por la señal ΔPe_1.

NOTA: Un análisis detallado de este sistema de control se halla en la referencia bibliográfica 8.

```
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL                          15-JUL-81 17:33:02

ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

SISTEMA DE CONTROL DE TURBINAS TIPO ELECTRO-HIDRAULICO (PARAM. ERRONEOS)

DATOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO: TURBINA2
------------------------------------------------------------------------

1) CARACTERISTICAS DEL SISTEMA:

   ORDEN: N = 6

   NO. DE ENTRADAS: M = 1

   NO. DE SALIDAS: K = 6

   MATRIZ A
   ========

   FILA 1:

     -1.11111      0.00000      0.00000      0.00000
     -0.68056     -1.11111

   FILA 2:

    125.00000    -25.00000      0.00000   -125.00000
      0.00000      0.00000

   FILA 3:

      0.00000      1.00000      0.00000      0.00000
      0.00000      0.00000

   FILA 4:

      0.00000      0.40000      0.00000     -0.16667
      0.00000      0.00000

   FILA 5:

      0.00000     -2.00000      1.56250      0.00000
     -1.56250      0.00000

   FILA 6:

      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
      0.12500      0.00000

   MATRIZ B
   ========

      0.68056

     -3.75000

      0.00000

      0.00000
```

```
 0.00000

-0.12500

MATRIZ C
========

FILA 1:

   1.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 2:

   0.00000      1.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 3:

   0.00000      0.00000      1.00000      0.00000
   0.00000      0.00000

FILA 4:

   0.00000      0.00000      0.00000      1.00000
   0.00000      0.00000

FILA 5:

   0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   1.00000      0.00000

FILA 6:

   0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
   0.00000      1.00000
```

2) POLOS DEL SISTEMA (VALORES PROPIOS DE MATRIZ A):

NO.	PARTE REAL	PARTE IMAG.
1	-22.35100	0.00000
2	-5.61941	0.00000
3	0.19858	1.12618
4	0.19858	-1.12618
5	-0.13352	0.09849
6	-0.13352	-0.09849

$$\lambda^6 + 27{,}84028\,\lambda^5 + 123{,}193\,\lambda^4 + 18{,}37228\,\lambda^3 + 163{,}881\,\lambda^2 + 43{,}49\,\lambda + 4{,}5212$$

3) MATRIZ TRANSFORMADORA T:
(COLUMNAS DE T SON VECTORES PROPIOS, Y
VECT. PROPIOS GENERALIZADOS DE MATRIZ A)

FILA 1:

```
(-0.00314  0.00000)   (-0.07007  0.00000)   (-0.17072  0.17438)   (-0.17072 -0.17438)
(-0.02665 -0.30706)   (-0.02665  0.30706)
```

FILA 2:

```
(-0.99393  0.00000)   (-0.85775  0.00000)   (-0.55825  0.00000)   (-0.55825  0.00000)
( 0.07053 -0.03490)   ( 0.07053  0.03490)
```

FILA 3:

```
( 0.04447  0.00000)   ( 0.15264  0.00000)   (-0.08477  0.48075)   (-0.08477 -0.48075)
(-0.46699 -0.08308)   (-0.46699  0.08308)
```

FILA 4:

```
( 0.01792  0.00000)   ( 0.06292  0.00000)   (-0.05819  0.17941)   (-0.05819 -0.17941)
(-0.04071 -0.30017)   (-0.04071  0.30017)
```

FILA 5:

```
(-0.09897  0.00000)   (-0.48165  0.00000)   ( 0.59018  0.04913)   ( 0.59018 -0.04913)
(-0.60934  0.00000)   (-0.60934  0.00000)
```

FILA 6:

```
( 0.00055  0.00000)   ( 0.01071  0.00000)   ( 0.01649 -0.06260)   ( 0.01649  0.06260)
( 0.36945  0.27252)   ( 0.36945 -0.27252)
```

4) MATRIZ INVERSA DE T:

FILA 1:

```
( 6.88213  0.00000)   (-1.16941  0.00000)   (-0.01561  0.00000)   (-6.58914  0.00000)
( 0.22324  0.00000)   ( 0.34212  0.00000)
```

FILA 2:

```
(-5.75504  0.00000)   ( 0.20756  0.00000)   ( 0.25869  0.00000)   ( 4.75823  0.00000)
(-0.93036  0.00000)   (-1.13793  0.00000)
```

```
   FILA 3:

   (-1.70339 -0.42137)   (-0.01405 -0.01976)   (-0.25738 -0.77474)   ( 2.44235 -0.76748)
   ( 0.52569 -0.28397)   ( 0.69061 -1.55883)

   FILA 4:

   (-1.70339  0.42137)   (-0.01405  0.01976)   (-0.25738  0.77474)   ( 2.44235  0.76748)
   ( 0.52569  0.28397)   ( 0.69061  1.55883)

   FILA 5:

   ( 0.09976 -0.17077)   ( 0.00091 -0.00126)   (-0.28779 -0.57862)   ( 1.08198  1.52516)
   ( 0.06106  0.03130)   ( 1.21653 -0.52378)

   FILA 6:

   ( 0.09976  0.17077)   ( 0.00091  0.00126)   (-0.28779  0.57862)   ( 1.08198 -1.52516)
   ( 0.06106 -0.03130)   ( 1.21653  0.52378)

5) FORMA CANONICA DE JORDAN (MATRIZ J):
   (MATRIZ J = T INVERSA  * A * T )

   FILA 1:

   (-22.35100   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

   FILA 2:

   (  0.00000   0.00000)   ( -5.61941   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

   FILA 3:

   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.19858   1.12618)   (  0.00000   0.00000)
   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

   FILA 4:

   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.19858  -1.12618)
   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)

   FILA 5:

   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
   ( -0.13352   0.09849)   (  0.00000   0.00000)

   FILA 6:

   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)   (  0.00000   0.00000)
   (  0.00000   0.00000)   ( -0.13352  -0.09849)

6) MATRIZ ( T INVERSA * B ):
   (PARA ANALISIS DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA)

   ( 9.02618  0.00000)

   (-4.55274  0.00000)
```

```
(-1.19289 -0.01781)

(-1.19289  0.01781)

(-0.08761 -0.04603)

(-0.08761  0.04603)

7) MATRIZ ( C * T ) :
   (PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA)

   FILA 1:

   (-0.00314  0.00000)   (-0.07007  0.00000)   (-0.17072  0.17438)   (-0.17072 -0.17438)
   (-0.02665 -0.30706)   (-0.02665  0.30706)

   FILA 2:

   (-0.99393  0.00000)   (-0.85775  0.00000)   (-0.55825  0.00000)   (-0.55825  0.00000)
   ( 0.07053 -0.03490)   ( 0.07053  0.03490)

   FILA 3:

   ( 0.04447  0.00000)   ( 0.15264  0.00000)   (-0.08477  0.48075)   (-0.08477 -0.48075)
   (-0.46699 -0.08308)   (-0.46699  0.08308)

   FILA 4:

   ( 0.01792  0.00000)   ( 0.06292  0.00000)   (-0.05819  0.17941)   (-0.05819 -0.17941)
   (-0.04071 -0.30017)   (-0.04071  0.30017)

   FILA 5:

   (-0.09897  0.00000)   (-0.48165  0.00000)   ( 0.59018  0.04913)   ( 0.59018 -0.04913)
   (-0.60934  0.00000)   (-0.60934  0.00000)

   FILA 6:

   ( 0.00055  0.00000)   ( 0.01071  0.00000)   ( 0.0164° -0.06260)   ( 0.01649  0.06260)
   ( 0.36945  0.27252)   ( 0.36945 -0.27252)

   TIEMPO DE EJECUCION = 434 SEGUNDOS
```

EJEMPLO 2

SISTEMA TEORICO ESPECIAL

a) Ecuaciones de Estado y de Salida:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

b) Análisis:

Los resultados se presentan en las páginas 197 y 198.

```
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL                        15-JUL-81 17:44:20

ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

SISTEMA TEORICO ESPECIAL

DATOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO: STE
-------------------------------------------------------------------------

1) CARACTERISTICAS DEL SISTEMA:

   ORDEN: N = 4

   NO. DE ENTRADAS: M = 2

   NO. DE SALIDAS: K = 1

   MATRIZ A
   ========

    4    2    2    0

   -1    0   -1   -1

   -1    0    1    1

    1    2    1    3

   MATRIZ B
   ========

    1    0

    0    1

    1    1

    1   -1

   MATRIZ C
   ========

    1    1    1    1

   MATRIZ D
   ========

    0    0

2) POLOS DEL SISTEMA (VALORES PROPIOS DE MATRIZ A):

    NO.       VALOR

     1     2.00000
     2     2.00000
     3     2.00000
     4     2.00000

3) MATRIZ TRANSFORMADORA T:
   (COLUMNAS DE T SON VECTORES PROPIOS, Y
   VECT. PROPIOS GENERALIZADOS DE MATRIZ A)
```

-2.00000	0.00000	-2.00000	-1.00000
2.00000	-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
-2.00000	0.00000	-1.00000	0.00000

4) MATRIZ INVERSA DE T:

0.00000	0.00000	-0.50000	-0.50000
0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	-1.00000	1.00000

5) FORMA CANONICA DE JORDAN (MATRIZ J):
(MATRIZ J = T INVERSA * A * T)

2.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	2.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	2.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	2.00000

6) MATRIZ (T INVERSA * B):
(PARA ANALISIS DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA)

-1.00000	0.00000
-1.00000	0.00000
1.00000	1.00000
-1.00000	-2.00000

7) MATRIZ (C * T) :
(PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA)

-2.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000

TIEMPO DE EJECUCION = 87 SEGUNDOS

4.2 CONCLUSIONES

En base a la teoría expuesta, así como también a los programas para computador desarrollados, junto con los ejemplos de aplicación, se concluye lo siguiente:

1.- Los fundamentos teóricos de este trabajo están clara y ordenadamente presentados, de modo que permita al lector tener acceso a los mismos con facilidad. La comprensión de varios aspectos requiere de un buen conocimiento de Matemáticas, especialmente de Algebra Lineal; sin embargo, no se ha seguido una exposición matemática rigurosa, en el sentido de presentar definiciones, teoremas, demostraciones, etc., sino que se ha procurado mantener un equilibrio entre aquella y las aplicaciones, lo cual es importante, dadas las características de esta tesis, sin que en ningún momento se pierda exactitud, generalidad y claridad.

2.- Lo anterior ha permitido desarrollar métodos para el análisis de sistemas de control lineales e invariantes, en el dominio del tiempo, tales que pueden aplicarse a sistemas generales, sin restricciones en la configuración de las ecuaciones de estado.

3.- Se han tratado los procedimientos para hallar los valores propios de la matriz A, los vectores propios y vectores propios generalizados de A, la forma canónica de Jordan J. Todo ésto permite el análisis antes mencionado.

4.- Los programas para computador digital han sido implementados siguiendo los métodos previamente desarrollados, de modo que son generales.

5.- Los resultados que dan los programas son muy satisfactorios, ya que en general se consigue una precisión bastante aceptable para toda aplicación práctica. Sin embargo, es posible que los algoritmos no converjan o den resultados con precisión deficiente en casos muy especiales y raros, quedando dicha posibilidad como consecuencia de la absoluta generalidad de los mismos. En los programas se han colocado los controles necesarios para detectar falta de convergencia en los procesos o imprecisión excesiva, de modo que el usuario reciba la información necesaria también en dichos casos.

6.- Los resultados obtenidos se aplican fundamentalmente a análisis de estabilidad, obtención de la matriz de transición de estado, respuesta no forzada, análisis de controlabilidad y observabilidad. Sin embargo, queda abierta la posibilidad a otras aplicaciones.

7.- Los programas pueden utilizarse para análisis de sistemas lineales e invariantes en general, no necesariamente de control.

8.- Los sistemas analizados pueden ser multivariables. La limitación en el orden de los mismos estará dada por la capacidad de memoria del equipo de computación. Los métodos trabajan eficientemente hasta con sistemas de orden elevado.

9.- Los métodos y programas desarrollados son importantes para abordar el análisis y diseño de sistemas óptimos de control.

10.- La aplicación de técnicas digitales es de gran versatilidad, precisión y alcance para el análisis y diseño de sistemas, incluso muy complejos; dependiendo, claro está, de la capacidad del equipo de computación.

11.- Queda estructurada una biblioteca de programas; la cual se espera sea utilizada en futuros trabajos de proyectos y tesis, como ya lo está siendo al momento de escribir este capítulo (Ver nota de la página 190).

4.3 RECOMENDACIONES

1.- Se sugiere continuar el trabajo de análisis y diseño de sistemas de control en el espacio de estado en aspectos tales como:

- Matriz de transición de estado y sus aplicaciones.
- Controlabilidad y observabilidad. Aplicaciones.
- Obtención de los estados y de las salidas de un sistema.
- Diseño de sistemas por realimentación de las variables de estado.
- Análisis y diseño de sistemas óptimos de control.

Algunos de estos aspectos han sido ya tratados en este trabajo, pero muy brevemente debido a que su profundización sale del alcance de esta tesis. Se ha sentado las bases suficientes para el estudio adecuado de los temas señalados.

2.- Continuar la estructuración de una biblioteca de programas para el análisis y diseño de sistemas de control.

A P E N D I C E   A

MODO DE USO DE LOS PROGRAMAS

APENDICE A

MODO DE USO DE LOS PROGRAMAS

1.- Prenda el computador.

2.- Coloque el disco en una de las unidades.

3.- Inicialice el sistema de reloj del computador desde el teclado, mediante la instrumentación:

CALL"SETTIM","DD-MMM-AA ␢ HH:MM:SS"

y luego aplaste tecla RETURN,

donde: DD : día

MMM : mes (iniciales en Inglés)

AA : año

␢ : espacio en blanco

HH : hora

MM : minutos

SS : segundos (opcional)

4.- Monte el disco en el sistema mediante la instrucción:

CALL"MOUNT", Nº , X$

↑ número de la unidad en la que se ha colocado el disco.

luego aplaste tecla RETURN.

5.- Cargue a la memoria del computador el programa maestro; utilice la instrucción:

OLD " @ TESIS / CGARCIA""

y aplaste tecla RETURN.

6.- Corra el programa con la instrucción:

RUN

y aplaste tecla RETURN.

7.- Continúe adelante siguiendo las instrucciones que le da el computador a través de la pantalla. Como se aprecia en los pasos anteriores, cada vez que se deba dar un comando o ingresar un dato al computador, éstos deben ser tecleados y enseguida se debe aplastar la tecla RETURN.

8.- Si en algún momento durante la ejecución desea interrumpirla, basta con aplastar dos veces la tecla BREAK.

9.- Una vez que se ha cargado el programa maestro a la memoria del computador, y luego de que se ha terminado una ejecución completa o se ha interrumpido la misma, puede iniciarse una nueva ejecución aplastando la tecla definible 1.

A P E N D I C E   B

LISTADO DE LOS PROGRAMAS

```
1 REM ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
2 REM PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN TIEMPO.
3 U0=-1
4 GO TO 100
5 REM CRISTOBAL R. GARCIA JARRIN -- ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
6 REM    TESIS DE GRADO                  JULIO DE 1981
8 O1=1
9 O3=1
10 GO TO 1000
12 O1=2
13 O3=1
14 GO TO 1000
16 O1=3
17 O3=1
18 GO TO 1000
20 O1=4
21 O3=1
22 GO TO 1000
24 O1=5
25 O3=1
26 GO TO 1000
28 O1=6
29 O3=1
30 GO TO 1000
48 IF O2<>1 THEN 51
49 O3=2
50 GO TO 1000
51 END
60 IF O2=11 THEN 62
61 END
62 PAGE
63 GO TO 1000
100 REM PROGRAMA:   TESIS/CGARCIA
150 REM
160 IF U0<>-1 THEN 310
170 REM DEFINICION DE LA UNIDAD DE DISCO
180 PRINT 'LUNIDAD DONDE ESTA EL DISCO: ';
190 INPUT U0
200 IF U0=0 OR U0=1 THEN 220
210 GO TO 180
220 CALL 'UNIT',U0
300 REM ********** LINEA 300 -- INICIALIZACION **********
310 REM
320 REM INDICE
330 PRINT 'LANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL LINEALES E INVARIANTES,'
340 PRINT 'J                   EN EL DOMINIO DEL TIEMPO'
350 PRINT 'JJJJTECLA 1 -- INDICE DE PROGRAMAS'
360 PRINT 'JTECLA 2 -- INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION , ALMACENA';
370 PRINT 'MIENTO DE DATOS'
380 PRINT '                 Y COMIENZO DE CALCULO'
390 GO TO 460
400 PRINT 'JTECLA 3 -- CALCULO DE LA MATRIZ TRANSFORMADORA ''T'';'
410 PRINT 'J                Y OBTENCION DE LA FORMA CANONICA DE JORDAN ''J'''
420 PRINT 'JTECLA 4 -- MATRIZ DE TRANSICION DE ESTADO'
```

```
430 PRINT 'JTECLA 5 -- ESTADOS Y SALIDAS DEL SISTEMA'
440 PRINT 'JTECLA 6 -- GRAFICOS'
450 PRINT 'JTECLA 7 -- CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD'
460 PRINT 'JJJJ                    ESCOJA TECLA GGG'
470 END
800 REM ********** LINEA 800 -- SELECCION DE PROGRAMAS **********
810 PAGE
820 DATA '@ESTADO/ENTRADA','@ESTADO/VALORPROP','@ESTADO/TRANSICION'
830 DATA '@ESTADO/ESTASALIDA','@ESTADO/GRAF','@ESTADO/OBSERVACON'
840 DATA '@ESTADO/MATRIZT','@ESTADO/T1AT'
850 DATA '@ESTADO/MATRIZTC','@ESTADO/T1ATC'
860 DATA '@ESTADO/SALIDA'
870 RESTORE 820
880 FOR J=1 TO O1
890 READ X$
900 NEXT J
910 DELETE 1001,30000
920 J=MEMORY
930 APPEND X$;1000
940 GO TO 1000
1000 REM************** LINEA 1000 -- CARGA DE PROGRAMA SELECCIONADO*****
1010 U1=1
1020 O2=0
1030 IF O1<>O2 THEN 800
1040 END
```

```
1000 REM PROGRAMA: ESTADO/ENTRADA
1010 O2=1
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 GO TO O3 OF 1040,1580
1040 REM INGRESO DE LAS MATRICES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO Y DE SALIDA
1050 REM INCLUSO PARA SISTEMAS DE MULTIPLES ENTRADAS Y SALIDAS.
1060 REM DEFINICION DE VARIABLES:
1070 REM A= MATRIZ DEL SISTEMA (ESTADOS) -- ORDEN N*N
1080 REM B= MATRIZ DEL SISTEMA (ESTADOS) -- ORDEN N*M
1090 REM C= MATRIZ DEL SISTEMA (SALIDA)  -- ORDEN K*N
1100 REM D= MATRIZ DEL SISTEMA.(SALIDA)  -- ORDEN K*M
1110 DELETE Y$
1120 DIM Y$(100)
1130 N$=' '
1140 REM
1150 Y$='INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION DE DATOS'
1160 Y$=Y$&' Y COMIENZO DE CALCULO'
1170 PAGE
1180 PRINT USING '3X,FA':Y$
1190 PRINT 'JJJJ                    1 -- INGRESO DE COEFICIENTES ';
1200 PRINT '(VALORES NUMERICOS)'
1210 PRINT 'J                       2 -- LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO'
1220 PRINT 'J                       3 -- LISTADO'
1230 PRINT 'J                       4 -- CORRECCION'
1240 PRINT 'J                       5 -- COMIENZO DE CALCULO'
1250 PRINT 'J                       6 -- INGRESO DE COEFICIENTES ';
1260 PRINT '(EXPRESIONES)'
1270 PRINT 'JJJJ                          CLASE DESEADA: GG';
1280 INPUT K1
1290 GO TO K1 OF 1310,2350,2540,3000,3560,1310
1300 GO TO 1270
1310 PRINT 'LNOMBRE DEL PROBLEMA:J'
1320 INPUT T$
1330 IF LEN(T$)>1 THEN 1350
1340 T$=' '
1350 PRINT 'JINGRESE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS DEL SISTEMA: '
1360 PRINT 'JORDEN   N= ';
1370 INPUT N
1380 PRINT 'JNUMERO DE ENTRADAS   M= ';
1390 INPUT M
1400 PRINT 'JNUMERO DE SALIDAS   K= ';
1410 INPUT K
1420 REM
1430 REM INGRESO DE A,B,C,D EN ESTE ORDEN; Y POR FILAS
1440 DELETE A,B,C,D
1450 DIM A(N,N),B(N,M),C(K,N),D(K,M)
1460 IF K1<>6 THEN 1710
1470 REM *** INGRESO DE COEFICIENTES (EXPRESIONES)
1480 A=0
1490 B=0
1500 C=0
1510 D=0
1520 PRINT 'LMATRICES A, B, C, D ESTAN CON VALOR CERO'
1530 PRINT 'JPROGRAME LAS EXPRESIONES CORRESPONDIENTES A LOS DIFERENTES'
```

```
1540 PRINT 'JELEMENTOS DE DICHAS MATRICES A PARTIR DE LA LINEA 2000 ';
1550 PRINT 'HASTA LINEA 3000'
1560 PRINT 'JLUEGO APLASTE TECLA 12 PARA CONTINUAR EJECUCIONGG'
1570 END
1580 REM *** CONTINUACION DE EJECUCION
1590 U2=51
1600 PRINT 'JALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)'
1610 INPUT X$
1620 CALL 'TIME',Z$
1630 PRINT @U2: USING 1640:T$,Z$
1640 IMAGE F/FA85TFA
1650 PRINT @U2:'JELEMENTOS DE MATRICES A, B; C, DJ'
1660 SAVE @U2:2000,3000
1670 GO TO 2000
1680 REM *** EXPRESIONES DE LAS MATRICES A, B, C; D
1690 REM *** FIN DE INGRESO (EXPRESIONES)
1700 GO TO 2120
1710 RESTORE 1740
1720 FOR L=1 TO 4
1730 READ A$
1740 DATA 'A','B','C','D'
1750 PRI 'LINGRESE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ  ''';A$;''' ;POR FILAS'
1760 GO TO L OF 1770,1860,1950,2040
1770 FOR I=1 TO N
1780 PRINT 'JFILA: ';I;'GG'
1790 FOR J=1 TO N
1800 PRINT 'JA(';I;',';J;')= ';
1810 INPUT A(I,J)
1820 NEXT J
1830 NEXT I
1840 PRINT
1850 GO TO 2110
1860 FOR I=1 TO N
1870 PRINT 'JFILA: ';I;'GG'
1880 FOR J=1 TO M
1890 PRINT 'JB(';I;',';J;')= ';
1900 INPUT B(I,J)
1910 NEXT J
1920 NEXT I
1930 PRINT
1940 GO TO 2110
1950 FOR I=1 TO K
1960 PRINT 'JFILA: ';I;'GG'
1970 FOR J=1 TO N
1980 PRINT 'JC(';I;',';J;')= ';
1990 INPUT C(I,J)
2000 NEXT J
2010 NEXT I
2020 PRINT
2030 GO TO 2110
2040 FOR I=1 TO K
2050 PRINT 'JFILA: ';I;'GG'
2060 FOR J=1 TO M
2070 PRINT 'JD(';I;',';J;')= ';
```

```
2080 INPUT D(I,J)
2090 NEXT J
2100 NEXT I
2110 NEXT L
2120 U1=2
2130 Y$='DATOS ESTAN INGRESADOS'
2140 PRINT 'GGGJJJ                          F I N  DE  D A T O S'
2150 REM ********** SUBRUTINA PARA ARCHIVO DE DATOS **********
2160 PRINT 'JJJDESEA ALMACENAR LOS DATOS EN UN ARCHIVO? (SI O NO): ';
2170 INPUT D$
2180 IF D$<>'SI' THEN 1170
2190 PRINT 'JINGRESE NOMBRE DEL ARCHIVO: ';
2200 INPUT N$
2210 CALL 'FILE',U0,N$,X$
2220 IF X$='' THEN 2280
2230 PRINT 'JYA EXISTE DICHO ARCHIVO. DESEA DESTRUIRLO? (SI O NO): ';
2240 INPUT D$
2250 IF D$='SI' THEN 2270
2260 GO TO 2190
2270 KILL N$
2280 CREATE N$;200,0
2290 OPEN N$;1,'F',X$
2300 WRITE #1:N,M,K,A,B,C,D,T$
2310 CLOSE 1
2320 Y$='DATOS ESTAN LISTOS (ALMACENADOS EN ARCH.: '&N$
2330 Y$=Y$&')'
2340 GO TO 1170
2350 REM ********** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO **********
2360 PRINT 'JJNOMBRE DEL ARCHIVO QUE DESEA LEER: ';
2370 INPUT N$
2380 CALL 'FILE',U0,N$,X$
2390 IF X$='' THEN 2490
2400 OPEN N$;1,'R',X$
2410 READ #1:N,M,K
2420 DELETE A,B,C,D
2430 DIM A(N,N),B(N,M),C(K,N),D(K,M)
2440 READ #1:A,B,C,D,T$
2450 CLOSE 1
2460 U1=2
2470 Y$='DATOS ESTAN LEIDOS DE ARCHIVO: '&N$
2480 GO TO 1170
2490 PRINT 'JNO EXISTE DICHO ARCHIVO'
2500 PRINT 'JDESEA LEER OTRO ARCHIVO? (SI O NO): ';
2510 INPUT D$
2520 IF D$='SI' THEN 2360
2530 GO TO 1180
2540 REM ********** LISTADO DE DATOS **********
2550 U2=32
2560 IF U1=2 THEN 2610
2570 PAGE
2580 PRI 'JJ**DEBE PRIMERO INGRESAR LOS DATOS O LEERLOS DE UN ARCHIVO**'
2590 PRINT 'J'
2600 GO TO 1180
2610 REM
```

```
2620 GOSUB 2650
2630 GO TO 2920
2640 REM ********** SUBRUTINA PARA IMPRIMIR DATOS **********
2650 PRINT @U2: USING 'P/FA/':T$
2660 PRINT @U2:'MATRIZ ''A'': '
2670 FOR I=1 TO N
2680 FOR J=1 TO N
2690 PRINT @U2:'J               A(';I;',';J;')= ';A(I,J)
2700 NEXT J
2710 NEXT I
2720 PRINT @U2:'JJMATRIZ ''B''; '
2730 FOR I=1 TO N
2740 FOR J=1 TO M
2750 PRINT @U2:'J               B(';I;',';J;')= ';B(I,J)
2760 NEXT J
2770 NEXT I
2780 PRINT @U2:'JJMATRIZ ''C'': '
2790 FOR I=1 TO K
2800 FOR J=1 TO N
2810 PRINT @U2:'J               C(';I;',';J;')= ';C(I,J)
2820 NEXT J
2830 NEXT I
2840 PRINT @U2:'JJMATRIZ ''D'': '
2850 FOR I=1 TO K
2860 FOR J=1 TO M
2870 PRINT @U2:'J               D(';I;',';J;')= ';D(I,J)
2880 NEXT J
2890 NEXT I
2900 RETURN
2910 REM ********** LISTADO EN PAPEL **********
2920 PRINT 'GGGJJJDESEA IMPRESION EN PAPEL? (SI O NO): ';
2930 INPUT D$
2940 IF D$<>'SI' THEN 2990
2950 PRINT 'JALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)'
2960 INPUT D$
2970 U2=51
2980 GOSUB 2650
2990 GO TO 2160
3000 REM ********** PROGRAMA PARA CORREGIR DATOS **********
3010 IF U1=2 THEN 3030
3020 GO TO 2570
3030 PRINT 'L        1 -- CORRECCION DE NOMBRE DE PROBLEMA'
3040 N$=' '
3050 PRINT '         2 -- CORRECCION DE ELEMENTOS DE MATRICES'
3060 PRINT '         3 -- FIN DE CORRECCIONES'
3070 PRINT 'J                CLASE DESEADA: ';
3080 INPUT J1
3090 GO TO J1 OF 3110,3220,3510
3100 GO TO 3070
3110 PRINT 'JNOMBRE ACTUAL ES: '
3120 PRINT T$
3130 PRINT 'JINGRESE NOMBRE CORRECTO:'
3140 INPUT T$
3150 IF T$<>'' THEN 3170
```

```
3160 T$=' '
3170 PRINT 'JNOMBRE ESTA CORREGIDO.'
3180 PRINT 'JDESEA CORREGIR ELEMENTOS DE MATRICES? (SI O NO): ';
3190 INPUT X$
3200 IF X$='SI' THEN 3220
3210 GO TO 3510
3220 PRINT 'JJMATRIZ Y ELEMENTO A CORREGIR. (FIN PARA TERMINAR): ';
3230 INPUT X$
3240 IF X$='' THEN 3220
3250 IF X$='FIN' THEN 3510
3260 D$=SEG(X$,1,1)
3270 I=VAL(X$)
3280 J=POS(X$,',',1)
3290 X$=SEG(X$,J+1,LEN(X$)-J)
3300 J=VAL(X$)
3310 B$='
3320 IF D$<>'A' THEN 3370
3330 PRINT 'K';B$;A(I,J)
3340 PRINT 'JINGRESE VALOR CORRECTO DE A(';I;',';J;')= ';
3350 INPUT A(I,J)
3360 GO TO 3220
3370 IF D$<>'B' THEN 3420
3380 PRINT 'K';B$;B(I,J)
3390 PRINT 'JINGRESE VALOR CORRECTO DE B(';I;',';J;')= ';
3400 INPUT B(I,J)
3410 GO TO 3220
3420 IF D$<>'C' THEN 3460
3430 PRINT 'K';B$;C(I,J)
3440 PRINT 'JINGRESE VALOR CORRECTO DE C(';I;',';J;')= ';
3450 INPUT C(I,J)      Go to 3220
3460 IF D$<>'D' THEN 3220
3470 PRINT 'K';B$;D(I,J)
3480 PRINT 'JINGRESE VALOR CORRECTO DE D(';I;',';J;')= ';
3490 INPUT D(I,J)
3500 GO TO 3220
3510 X$=CHR(13)
3520 Y$=Y$&X$
3530 Y$=Y$&'          '
3540 Y$=Y$&'DATOS HAN SIDO MODIFICADOS'
3550 GO TO 2160
3560 REM *** COMIENZO DE CALCULO ***
3570 CALL 'TIME',I$
3580 IF U1=2 THEN 3600
3590 GO TO 2570
3600 U1=1
3610 OPEN '@TTT/DAT';1,'F',X$
3620 WRITE #1:N,M,K,A,B,C,D,T$
3630 DELETE B,C,D
3640 CLOSE 1
3650 01=2
3660 03=1
3670 GO TO 800
```

```
1000 REM PROGRAMA:   ESTADO/VALORPROP
1010 O2=2
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 GO TO O3 OF 1040
1040 REM
1050 GOSUB 1080
1060 REM
1070 GO TO 800
1080 REM  ****** COMIENZO DE CALCULO DE VALORES PROPIOS *****
1090 OPEN '@TTT/A';1,'F',X$
1100 WRITE #1:A
1110 CLOSE 1
1120 REM
1130 REM  ************SCALE A BEFORE FINDING EIGENVALUES**********
1140 DELETE E0,E1,E3,P
1150 DIM E0(N),E1(N),E3(N,N),P(N,3),Q$(1)
1160 IF N>1 THEN 1260
1170 DIM E2(1,1),Q(1,5)
1180 E0(1)=A(1,1)
1190 E1(1)=0
1200 E2(1,1)=1
1210 E3(1,1)=0
1220 P(1,1)=2
1230 P1=1
1240 GO TO 1880
1250 REM **********
1260 GOSUB 1300
1270 GO TO 1880
1280 REM  ***********************************************************
1290 REM  ********* SCALE A **********
1300 FOR P1=1 TO N
1310 FOR P2=1 TO N
1320 E3(P1,P2)=A(P1,P2)
1330 NEXT P2
1340 P(P1,2)=1
1350 NEXT P1
1360 Q1=0.75
1370 Q2=1.33
1380 P3=0
1390 P4=0
1400 FOR P1=1 TO N
1410 Q7=0
1420 Q8=0
1430 FOR P2=1 TO N
1440 IF P1=P2 THEN 1470
1450 Q7=Q7+ABS(A(P2,P1))
1460 Q8=Q8+ABS(A(P1,P2))
1470 NEXT P2
1480 IF Q7*Q8=0 THEN 1520
1490 Q3=Q7/Q8
1500 IF Q3<Q1 THEN 1540
1510 IF Q3>Q2 THEN 1540
1520 P4=P4+1
1530 GO TO 1610
```

```
1540 Q9=SQR(Q3)
1550 FOR P2=1 TO N
1560 IF P1=P2 THEN 1590
1570 A(P1,P2)=A(P1,P2)*Q9
1580 A(P2,P1)=A(P2,P1)/Q9
1590 NEXT P2
1600 P(P1,2)=P(P1,2)*Q9
1610 NEXT P1
1620 P3=P3+1
1630 IF P3>30 THEN 1790
1640 IF P4<N THEN 1390
1650 Q4=0
1660 FOR P1=1 TO N
1670 FOR P2=1 TO N
1680 Q3=A(P1,P2)
1690 Q4=Q4+Q3*Q3
1700 NEXT P2
1710 NEXT P1
1720 Q4=SQR(Q4)
1730 FOR P1=1 TO N
1740 FOR P2=1 TO N
1750 A(P1,P2)=A(P1,P2)/Q4
1760 NEXT P2
1770 NEXT P1
1780 RETURN
1790 FOR P1=1 TO N
1800 P(P1,2)=1
1810 FOR P2=1 TO N
1820 A(P1,P2)=E3(P1,P2)
1830 NEXT P2
1840 NEXT P1
1850 Q4=1
1860 RETURN
1870 REM  ********* END OF SCALING ***********
1880 REM  ***************** FIND EIGENVALUES ******************
1890 E8=48
1900 Q6=1/2^E8
1910 REM  ********* FIND EIGENVALUES *********
1920 IF N<2 THEN 2500
1930 IF N>2 THEN 1960
1940 P(1,3)=A(2,1)
1950 GO TO 2500
1960 P5=N-2
1970 FOR P3=1 TO P5
1980 P4=P3+1
1990 Q1=0
2000 FOR P1=P4 TO N
2010 E3(P1,P3)=A(P1,P3)
2020 Q1=Q1+ABS(A(P1,P3))
2030 NEXT P1
2040 IF Q1<>ABS(A(P4,P3)) THEN 2090
2050 P(P3,3)=A(P4,P3)
2060 E3(P4,P3)=0
2070 GO TO 2450
```

```
2080 REM  ************
2090 Q3=0
2100 FOR P1=P4 TO N
2110 Q2=A(P1,P3)/Q1
2120 A(P1,P3)=Q2
2130 Q3=Q3+Q2*Q2
2140 NEXT P1
2150 Q2=SQR(Q3)
2160 IF A(P4,P3)<0 THEN 2180
2170 Q2=-Q2
2180 Q3=Q3-Q2*A(P4,P3)
2190 A(P4,P3)=A(P4,P3)-Q2
2200 P(P3,3)=Q2*Q1
2210 E3(P4,P3)=E3(P4,P3)-P(P3,3)
2220 Q7=Q1*SQR(Q3)
2230 FOR P1=P4 TO N
2240 E3(P1,P3)=E3(P1,P3)/Q7
2250 P(P1,3)=A(P1,P3)/Q3
2260 NEXT P1
2270 FOR P2=P4 TO N
2280 Q2=0
2290 FOR P1=P4 TO N
2300 Q2=Q2+A(P1,P3)*A(P1,P2)
2310 NEXT P1
2320 FOR P1=P4 TO N
2330 A(P1,P2)=A(P1,P2)-P(P1,3)*Q2
2340 NEXT P1
2350 NEXT P2
2360 FOR P2=1 TO N
2370 Q2=0
2380 FOR P1=P4 TO N
2390 Q2=Q2+A(P2,P1)*A(P1,P3)
2400 NEXT P1
2410 FOR P1=P4 TO N
2420 A(P2,P1)=A(P2,P1)-P(P1,3)*Q2
2430 NEXT P1
2440 NEXT P2
2450 NEXT P3
2460 FOR P3=1 TO P5
2470 A(P3+1,P3)=P(P3,3)
2480 NEXT P3
2490 P(N-1,3)=A(N,N-1)
2500 Q5=0
2510 FOR P3=1 TO N
2520 P(P3,1)=0
2530 IF P3=N THEN 2550
2540 Q5=Q5+P(P3,3)^2
2550 FOR P1=P3 TO N
2560 E3(P3,P1)=A(P3,P1)
2570 Q5=Q5+A(P3,P1)^2
2580 NEXT P1
2590 NEXT P3
2600 Q5=Q6*SQR(Q5)
2610 REM  ***** QR ITERATION *****
```

```
2620 R2=A(N,N-1)
2630 IF N<=2 THEN 2680
2640 IF A(N,N)<>0 THEN 2680
2650 IF A(N-1,N)<>0 THEN 2680
2660 IF A(N-1,N-1)<>0 THEN 2680
2670 GO TO 2690
2680 R2=0
2690 P5=N
2700 P8=0
2710 P6=10*N
2720 FOR P1=1 TO N-1
2730 FOR P3=1 TO N
2740 IF A(P1,P3)<>0 THEN 2830
2750 NEXT P3
2760 NEXT P1
2770 FOR P1=1 TO N
2780 P(P1,1)=1
2790 E0(P1)=A(P1,P1)
2800 E1(P1)=0
2810 NEXT P1
2820 GO TO 3950
2830 P3=P5-1
2840 P7=P3
2850 P1=P3
2860 IF P3<0 THEN 2820
2870 IF P3=0 THEN 3660
2880 IF ABS(A(P5,P3))<=Q5 THEN 3660
2890 IF P5=2 THEN 3720
2900 P1=P1-1
2910 IF ABS(A(P3,P1))<=Q5 THEN 2940
2920 P3=P1
2930 IF P3>1 THEN 2900
2940 IF P3=P7 THEN 3720
2950 Q1=A(P5,P5)+A(P7,P7)+R2
2960 Q2=A(P5,P5)*A(P7,P7)-A(P5,P7)*A(P7,P5)+0.25*R2*R2
2970 A(P3+2,P3)=0
2980 Q7=A(P3,P3)*(A(P3,P3)-Q1)+A(P3,P3+1)*A(P3+1,P3)+Q2
2990 Q8=A(P3+1,P3)*(A(P3,P3)+A(P3+1,P3+1)-Q1)
3000 R1=ABS(Q7)+ABS(Q8)
3010 IF R1<>0 THEN 3040
3020 R2=A(P5,P5-1)
3030 GO TO 2940
3040 Q9=A(P3+2,P3+1)*A(P3+1,P3)
3050 R2=0
3060 P8=P8+1
3070 FOR P1=P3 TO P7
3080 P0=P1-1
3090 R4=P1+1
3100 R5=P1+2
3110 IF P1=P3 THEN 3170
3120 Q7=A(P1,P0)
3130 Q8=A(R4,P0)
3140 Q9=0
3150 IF R5>P5 THEN 3170
```

```
3700 P5=P3
3710 GO TO 2830
3720 R1=0.5*(A(P3,P3)+A(P5,P5))
3730 Q1=0.5*(A(P5,P5)-A(P3,P3))
3740 Q1=Q1*Q1+A(P3,P5)*A(P5,P3)
3750 P(P3,1)=1
3760 P(P5,1)=1
3770 IF Q1<0 THEN 3840
3780 R3=SQR(Q1)
3790 E0(P3)=R1-R3
3800 E0(P5)=R1+R3
3810 E1(P3)=0
3820 E1(P5)=0
3830 GO TO 3890
3840 R3=SQR(-Q1)
3850 E0(P3)=R1
3860 E1(P3)=R3
3870 E0(P5)=R1
3880 E1(P5)=-R3
3890 REM  PRINT P3, E0(P3)*Q4, E1(P3)*Q4      PRINTS EIGENVALUES
3900 REM  PRINT P5, E0(P5)*Q4, E1(P5)*Q4      AS FOUND
3910 P5=P5-2
3920 GO TO 2830
3930 REM
3940 REM  *********** END OF EIGENVALUE *************
3950 E0=E0*Q4
3960 E1=E1*Q4
3970 REM  ************ OUTPUT EIGENVALUES *************
3980 FOR P1=1 TO N
3990 IF P(P1,1)<>0 THEN 4020
4000 PRINT @U2:'NO SE PUEDE ENCONTRAR VALOR PROPIO NO. ';P1;'GGGGG'
4010 END
4020 NEXT P1
4030 REM ORDENACION DE LOS VALORES PROPIOS, DE MODO QUE QUEDEN
4040 REM CONTIGUOS VALORES PROPIOS IGUALES
4050 E9=1.0E-5
4060 J=0
4070 J=J+1
4080 FOR J1=J+1 TO N
4090 IF ABS(E0(J)-E0(J1))>E9 OR ABS(E1(J)-E1(J1))>E9 THEN 4170
4100 T8=E0(J+1)
4110 E0(J+1)=E0(J1)
4120 E0(J1)=T8
4130 T8=E1(J+1)
4140 E1(J+1)=E1(J1)
4150 E1(J1)=T8
4160 J=J+1
4170 NEXT J1
4180 IF J<N-1 THEN 4070
4190 REM CHEQUEO PARA VER SI EXISTE ALGUN VALOR PROPIO CON SU PARTE
4200 REM IMAGINARIA DIFERENTE DE CERO.(EPSILON PARA COMPARACIONES: E9)
4210 E9=1.0E-4
4220 FOR J=1 TO N
4230 IF E0(J)=0 THEN 4260
```

```
4240 IF ABS(E1(J)/E0(J))>E9 THEN 4260
4250 E1(J)=0
4260 NEXT J
4270 J=0
4280 J=J+1
4290 IF ABS(E1(J))>E9 THEN 4320
4300 IF J<N THEN 4280
4310 GO TO 4350
4320 REM CALCULO EN EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS
4330 O1=9
4340 GO TO 4370
4350 REM CALCULO SOLO CON ELEMENTOS REALES
4360 O1=7
4370 RETURN
```

```
1000 REM PROGRAMA:ESTADO/MATRIZT
1010 O2=7
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 REM
1040 REM
1050 REM *** SUB. SIGUIENTE CALCULA TODOS LOS VP Y VPG Y LOS ALMACENA
1060 REM      EN MATRIZ T1
1070 GOSUB 1440
1080 REM *** MATRIZ T1 ESTA LISTA.  ALMACENARLA EN @TTT/T
1090 OPEN '@TTT/T';6,'F',X$
1100 WRITE #6:T1
1110 CLOSE 6
1120 REM *** ALMACENAR MATRIZ T1 EN NOMBRE A1, A FIN DE PODER
1130 REM      EFECTUAR REDUCCION DE GAUSS-JORDAN PARA INVERSA
1140 DELETE A1,A2
1150 DIM A1(N,N)
1160 A1=T1
1170 GOSUB 1890
1180 REM *** EN ARCH. @TTT/OP QUEDAN LAS NO OPERACIONES DE FILAS
1190 REM      EN VECTOR T9 QUEDA EL ORDEN DE COLUMNAS
1200 CLOSE
1210 IF R=N THEN 1240
1220 PRINT 'JMATRIZ T1 NO TIENE TODAS SUS COL. L.I. (ES SINGULAR)GGGG'
1230 STOP
1240 O1=8
1250 GO TO 800
1260 REM *** VALORES PROPIOS SON REALES ****
1270 REM CALCULO DE LOS VECTORES PROPIOS Y, EN CASO NECESARIO,
1280 REM DE VECTORES PROPIOS GENERALIZADOS ( VP. Y VPG. ) DE LA MATRIZ A
1290 REM DEFINICION DE VARIABLES:
1300 REM
1310 REM E0 = N-VECTOR QUE CONTIENE LOS VALORES PROPIOS DE 'A'
1320 REM A1 = MATRIZ N*(N+1) PARA ALMACENAR (TEMPORALMENTE) LAS
1330 REM      MATRICES (A-ILAMBDA) Y (A-ILAMBDA!X), CON X=N-VECTOR
1340 REM M1 = MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA DEL I-ESIMO VALOR PROPIO DE 'A'
1350 REM T1 = MATRIZ N*N DE TRANSFORMACION.- SUS COLUMNAS SERAN
1360 REM      LOS VP. Y VPG. DE 'A'
1370 REM T9 = N-VECTOR (TEMPORAL) PARA ALMACENAR EL ORDEN
1380 REM      DE LAS COMPONENTES DE UN VP. O DE UN VPG.
1390 REM R = RANGO DE 'A1'
1400 REM Q = DEGENERACION DE 'A1'    ( Q=N-R )
1410 REM T8 = VARIABLE (TEMPORAL)
1420 REM
1430 REM
1440 DELETE T9,T1,T2,A1,A2,Q
1450 DIM T1(N,N),T9(N),A1(N,N+1)
1460 OPEN '@TTT/A';5,'U',X$
1470 OPEN '@TTT/A1';1,'U',X$
1480 OPEN '@TTT/OP';2,'U',X$
1490 M1=1
1500 FOR I=1 TO N
1510 IF I=N THEN 1590
1520 REM OBTENCION DE LA MULTIPLICIDAD DEL I-ESIMO VALOR PROPIO
1530 E9=1.0E-5
```

```
1540 IF ABS(EO(I)-EO(I+1))<E9 THEN 1560
1550 GO TO 1590
1560 M1=M1+1
1570 GO TO 6430
1580 REM CONSTRUCCION DE LA MATRIZ 'A1'=(A-I*EO(I))
1590 E9=1.0E-5
1600 A1=0
1610 CALL 'REWIND',5
1620 READ #5:A
1630 FOR J=1 TO N
1640 A(J,J)=A(J,J)-EO(I)
1650 NEXT J
1660 FOR J=1 TO N
1670 FOR J1=1 TO N
1680 A1(J,J1)=A(J,J1)
1690 NEXT J1
1700 NEXT J
1710 CALL 'REWIND',5
1720 READ #5:A
1730 CALL 'REWIND',1
1740 WRITE #1:A1
1750 GOSUB 1890
1760 IF R=N THEN 1780
1770 GO TO 2810
1780 PRINT 'LA MATRIZ ''A1''(COL.1 HASTA ';N1;') TIENE'
1790 PRINT 'TODOS SUS VECTORES COLUMNA LINEALMENTE INDEPENDIENTES'
1800 STOP
1810 REM SUBRUTINA PARA HALLAR EL RANGO DE 'A1' Y LA MATRIZ 'A1'
1820 REM TRANSFORMADA, UTILIZANDO EL METODO DE GAUSS-JORDAN PARA
1830 REM LA SOLUCION  DE UN SISTEMA DE N ECUACIONES ALGEBRAICAS
1840 REM LINEALES SIMULTANEAS
1850 REM
1860 REM LAS OPERACIONES ELEMENTALES EN LAS FILAS DE A1, SE ALMACENAN
1870 REM EN EL ARCHIVO @TTT/OP
1880 REM NO ES EL NUMERO DE OPERACIONES
1890 O4=1
1900 N1=N
1910 IF O4=0 THEN 1960
1920 NO=0
1930 CALL 'REWIND',2
1940 WRITE #2:NO
1950 REM INICIALIZACION DE T9 Y METODO DE GAUSS-JORDAN
1960 FOR I1=1 TO N
1970 T9(I1)=I1
1980 NEXT I1
1990 FOR I1=1 TO N1
2000 IF I1=N1 THEN 2700
2010 I2=I1
2020 J2=I1
2030 REM HALLAR EL I1-ESIMO ELEMENTO PIVOTE (ESTARA EN POSICION (I2,J2))
2040 T8=ABS(A1(I1,I1))
2050 FOR I3=I1 TO N
2060 FOR J3=I1 TO N1
2070 IF T8=>ABS(A1(I3,J3)) THEN 2110
```

```
2080 I2=I3
2090 J2=J3
2100 T8=ABS(A1(I3,J3))
2110 NEXT J3
2120 NEXT I3
2130 IF T8<E9 THEN 2740
2140 IF I1=I2 THEN 2270
2150 REM INTERCAMBIO DE LA FILA I1 CON LA FILA I2
2160 REM
2170 REM  *** OPERACION NO. 1 -- INTERCAMBIO DE FILA I1 CON FILA I2
2180 IF O4=0 THEN 2220
2190 NO=NO+1
2200 WRITE #2:1,I1,I2,0
2210 REM
2220 FOR J=I1 TO N1
2230 T8=A1(I1,J)
2240 A1(I1,J)=A1(I2,J)
2250 A1(I2,J)=T8
2260 NEXT J
2270 IF I1=J2 THEN 2390
2280 REM INTERCAMBIO DE LA COLUMNA I1 CON LA COLUMNA J2
2290 FOR J=1 TO N
2300 T8=A1(J,I1)
2310 A1(J,I1)=A1(J,J2)
2320 A1(J,J2)=T8
2330 NEXT J
2340 REM OBTENCION DEL NUEVO ORDEN DE LAS COMPONENTES DEL VP.
2350 T8=T9(I1)
2360 T9(I1)=T9(J2)
2370 T9(J2)=T8
2380 REM DIVISION DE LA FILA I1 POR EL ELEMENTO PIVOTE (COL. I1 TO N1)
2390 T8=A1(I1,I1)
2400 REM
2410 REM  OPERACION NO. 2 -- DIVISION DE FILA I1 PARA T8
2420 IF O4=0 THEN 2460
2430 NO=NO+1
2440 WRITE #2:2,I1,T8,0
2450 REM
2460 FOR J=I1 TO N1
2470 A1(I1,J)=A1(I1,J)/T8
2480 NEXT J
2490 REM INTRODUCCION DE CEROS EN COLUMNA I1, EXCEPTO EN A1(I1,I1)
2500 FOR K2=1 TO N
2510 IF K2=I1 THEN 2650
2520 T8=-A1(K2,I1)
2530 REM
2540 REM OPERACION NO. 3 -- SUMAR A FILA K2 EL PRODUCTO DE FILA I1
2550 REM                     POR T8
2560 IF O4=0 THEN 2600
2570 NO=NO+1
2580 WRITE #2:3,K2,I1,T8
2590 REM
2600 FOR J=I1 TO N1
2610 A1(K2,J)=A1(K2,J)+T8*A1(I1,J)
```

```
2620 IF ABS(A1(K2,J))>E9 THEN 2640
2630 A1(K2,J)=0
2640 NEXT J
2650 NEXT K2
2660 NEXT I1
2670 REM
2680 R=N1
2690 GO TO 2750
2700 IF ABS(A1(N1,N1))<E9 THEN 2740
2710 GO TO 2390
2720 REM ESTE ES UN PASO NECESARIO PARA QUE EL PROBLEMA TENGA SOLUCION
2730 REM CUANDO LA SUBRUTINA NO ES PARA VER SI UN CONJ. DE VECT. ES L.I.
2740 R=I1-1
2750 IF 04=0 THEN 2780
2760 CALL 'REWIND',2
2770 WRITE #2:N0
2780 RETURN
2790 REM OBTENCION DE LA DEGENERACION (Q) DE 'A1'
2800 REM
2810 Q=N-R
2820 IF Q=M1 THEN 5540
2830 IF Q=1 THEN 5890
2840 REM CASO EN QUE 1<Q<M1
2850 REM SE DEBE CALCULAR (Q) VECTORES PROPIOS Y
2860 REM (M1-Q) VECTORES PROPIOS GENERALIZADOS
2870 REM VARIABLES:
2880 REM K9= ORDEN DEL MAYOR BLOQUE DE JORDAN PARA VALOR PROP. LAMBDA(I)
2890 REM F1= MATRIZ QUE ALMACENA EL VALOR DE: (A-I*LAMBDA(I)) ^ K9
2900 REM X1= MATRIZ QUE ALMACENA TEMPORALMENTE LOS VP. Y VPG.
2910 REM      PARA VALOR PROPIO LAMBDA(I)
2920 Q1=Q
2930 K9=2
2940 CALL 'REWIND',1
2950 READ #1:A1
2960 DELETE F1,F2,X1,X2,V0,V1,V2,V3
2970 DIM F1(N,N+1),X1(N,M1+1),V0(Q1),V1(N,Q1),V2(M1)
2980 REM ASIGNAR A MATRIZ F1, EL VALOR DE MATRIZ A1 (COL. 1 HASTA N+1)
2990 F1=A1
3000 OPEN '@TTT/F1';3,'U',X$
3010 OPEN '@TTT/RE';4,'U',X$
3020 REM ESCRITURA DE: (A-I*LAMBDA(I)) ^ (K9-1) EN ARCH. @TTT/F1
3030 CALL 'REWIND',3
3040 WRITE #3:F1
3050 REM MATRIZ F1=(A-I*LAMBDA(I))^K9.SE PONE EN ARCH.@TTT/RE POR FILAS
3060 CALL 'REWIND',4
3070 FOR J=1 TO N
3080 FOR J1=1 TO N
3090 T8=0
3100 FOR J2=1 TO N
3110 T8=T8+F1(J,J2)*A1(J2,J1)
3120 NEXT J2
3130 WRITE #4:T8
3140 NEXT J1
3150 WRITE #4:0
```

```
3160 NEXT J
3170 REM CALCULO DEL RANGO DE F1 (LEER F1 DE ARCH.@TTT/RE,CON NOMBRE A1)
3180 CALL 'REWIND',4
3190 READ #4:A1
3200 04=0
3210 GOSUB 1900
3220 IF R=N-M1 THEN 3380
3230 IF R>N-M1 THEN 3280
3240 PRINT 'EL RANGO DE LA MATRIZ F1=(A-I*LAMBDA(I))^K9 NO DEBE'
3250 PRINT 'SER MENOR DE (N-M1) PARA QUE EL PROBLEMA TENGA SOLUCION'
3260 STOP
3270 REM LECTURA DE MATRIZ F1 DE ARCH. @TTT/RE, CON NOMBRE F1
3280 CALL 'REWIND',4
3290 READ #4:F1
3300 REM LECTURA DE MATRIZ A1=(A-I*LAMBDA(I))
3310 CALL 'REWIND',1
3320 READ #1:A1
3330 K9=K9+1
3340 GO TO 3030
3350 REM CALCULO DE (M1) VECTORES L.I. SOLUCION DE (F1)*X=0. DONDE
3360 REM F1=(A-I*LAMBDA(I))^K9. NORMALIZACION Y
3370 REM ALMACENAMIENTO EN MATRIZ T1 (COL.(I+1-M1) HASTA (I))
3380 Q=M1
3390 GOSUB 5590
3400 REM OBTENCION DE LOS (M1-Q1) VPG., A PARTIR DE COL. DE MATRIZ T1
3410 REM SI (A-I*LAMBDA(I))^(K9-1)*(COL. DE T1)<>0, ENTONCES
3420 REM (COL.DE T1) PUEDE SER VPG. CORRESP. A UN BLOQUE DE JORDAN K9*K9
3430 M3=M1+1
3440 REM M5 CONTARA LOS VECTORES DE MATRIZ T1 QUE SON VP.
3450 REM M6 CONTARA LOS VP. DE MATRIZ X1
3460 M5=0
3470 M6=0
3480 REM M7 CUENTA LOS VECTORES DE T1 PARA LOS QUE: A1^(K9-1)=0 CON K9>2
3490 REM M8 ES UN INDICADOR
3500 M7=0
3510 M8=0
3520 CALL 'REWIND',3
3530 READ #3:F1
3540 J=1
3550 M2=0
3560 T8=I+J-M1
3570 FOR J1=1 TO N
3580 REM COLUMNA (N+1) DE F1 GUARDA : (A-I*LAMBDA(I))^(K9-1)*(COL.DE T1)
3590 F1(J1,N+1)=0
3600 FOR J2=1 TO N
3610 F1(J1,N+1)=F1(J1,N+1)+F1(J1,J2)*T1(J2,T8)
3620 NEXT J2
3630 IF ABS(F1(J1,N+1))<E9 THEN 3660
3640 M2=1
3650 GO TO 3670
3660 F1(J1,N+1)=0
3670 NEXT J1
3680 REM M2<>0 ENTONCES (COL. DE T1) ES VPG. CORRESP. A UN BLOQUE K9*K9
3690 IF M2=0 THEN 3720
```

```
3700 GO TO 3840
3710 REM SI K9=2 ENTONCES (COL. DE T1) ES VP.
3720 IF K9=2 THEN 3770
3730 M7=M7+1
3740 V2(M7)=T8
3750 GO TO 4350
3760 REM SE ALMACENA EL VP. EN MATRIZ V1 (COL. M5)
3770 M5=M5+1
3780 FOR J1=1 TO N
3790 V1(J1,M5)=T1(J1,T8)
3800 NEXT J1
3810 GO TO 4350
3820 REM M3 CUENTA LOS VECT. DE MATRIZ T1 HALLADOS: DESDE (M1+1) HASTA 2
3830 REM M3=2 ENTONCES SOLO SE DEBE CALCULAR 1 VP. ADICIONAL (NO 1 VPG.)
3840 IF M3=2 THEN 4350
3850 REM SE ALMACENA EL VPG. EN MATRIZ X1 (COL. M3)
3860 FOR J1=1 TO N
3870 X1(J1,M3)=T1(J1,T8)
3880 NEXT J1
3890 M3=M3-1
3900 IF K9=2 THEN 3930
3910 GO TO 3980
3920 REM SI K9=2 ENTONCES (A-I*LAMBDA(I))^(K9-1)*VPG. DEBE SER YA UN VP.
3930 FOR J1=1 TO N
3940 X1(J1,M3)=F1(J1,N+1)
3950 NEXT J1
3960 GO TO 4070
3970 REM CALCULO VECTOR (A-I*LAMBDA(I))*VPG. SE ALMACENA EN MATRIZ X1
3980 CALL 'REWIND',1
3990 READ #1:A1
4000 FOR J1=1 TO N
4010 X1(J1,M3)=0
4020 FOR J2=1 TO N
4030 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+A1(J1,J2)*T1(J2,T8)
4040 NEXT J2
4050 NEXT J1
4060 REM, M4 CONTROLA EL MAXIMO ORDEN DE UN BLOQUE DE JORDAN (=K9)
4070 M4=2
4080 REM CHEQUEO DE SI COL. M3 DE MATRIZ X1 ES VP. O VPG.
4090 M3=M3-1
4100 M2=0
4110 FOR J1=1 TO N
4120 X1(J1,M3)=0
4130 FOR J2=1 TO N
4140 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+A1(J1,J2)*X1(J2,M3+1)
4150 NEXT J2
4160 IF ABS(X1(J1,M3))<E9 THEN 4190
4170 M2=1
4180 GO TO 4200
4190 X1(J1,M3)=0
4200 NEXT J1
4210 REM M2=0 ENTONCES ES VP. ( DE LO CONTRARIO ES VPG.)
4220 IF M2=0 THEN 4320
4230 REM M3=1 ENTONCES YA NO SE PUEDE CALCULAR OTRO VECTOR ADICIONAL
```

```
4240 IF M3=1 THEN 4290
4250 M4=M4+1
4260 IF M4<=K9 THEN 4090
4270 REM  EL MAYOR BLOQUE DE JORDAN SOLO PUEDE SER DE ORDEN K9 POR K9
4280 M4=M4-1
4290 M3=M3+M4
4300 M9=0
4310 GO TO 4350
4320 M9=1
4330 M6=M6+1
4340 VO(M6)=M3+1
4350 IF M8=0 THEN 4380
4360 IF M9=1 THEN 5190
4370 GO TO 4460
4380 IF M3=1 THEN 5320
4390 REM CHEQUEAR SI SE HA COMPLETADO LA BUSQUEDA DE BLOQUES K9*K9
4400 IF J=M1 THEN 4430
4410 J=J+1
4420 GO TO 3550
4430 J4=0
4440 M8=1
4450 IF M7=0 THEN 4880
4460 J4=J4+1
4470 IF J4>M7 THEN 4870
4480 T8=V2(J4)
4490 IF M3=2 THEN 4510
4500 GO TO 3860
4510 FOR J1=1 TO N
4520 X1(J1,M3)=T1(J1,T8)
4530 NEXT J1
4540 M3=M3-1
4550 CALL 'REWIND',1
4560 READ #1:A1
4570 M2=0
4580 FOR J1=1 TO N
4590 X1(J1,M3)=0
4600 FOR J2=1 TO N
4610 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+A1(J1,J2)*X1(J2,M3+1)
4620 NEXT J2
4630 IF ABS(X1(J1,M3))<E9 THEN 4660
4640 M2=1
4650 GO TO 4670
4660 X1(J1,M3)=0
4670 NEXT J1
4680 IF M2=0 THEN 4720
4690 M3=M3+1
4700 GO TO 4460
4710 REM HALLAR EL RANGO DE X1 (COL. M3+1 HASTA M1+1)
4720 FOR J1=1 TO M1-M3+1
4730 FOR J2=1 TO N
4740 A1(J2,J1)=X1(J2,M3+J1)
4750 NEXT J2
4760 NEXT J1
4770 04=0
```

```
4780 N1=M1-M3+1
4790 GOSUB 1910
4800 IF M2=5 THEN 5210
4810 IF M2=10 THEN 5350
4820 IF R=N1 THEN 4840
4830 GO TO 4690
4840 M6=M6+1
4850 VO(M6)=M3+1
4860 GO TO 5320
4870 J4=0
4880 IF M5=0 THEN 5280
4890 J4=J4+1
4900 REM CHEQUEO DE SI COL. J4 DE MATRIZ V1 ES L.I. CON LOS
4910 REM VECTORES DE MATRIZ X1 HALLADOS PREVIAMENTE
4920 REM
4930 REM FORMAR MATRIZ A1(COL. J4 DE V1; Y COL. M3+1 HASTA M1+1 DE X1)
4940 FOR J2=1 TO N
4950 A1(J2,1)=V1(J2,J4)
4960 NEXT J2
4970 FOR J2=2 TO M1+2-M3
4980 T8=M3+J2-1
4990 FOR J1=1 TO N
5000 A1(J1,J2)=X1(J1,T8)
5010 NEXT J1
5020 NEXT J2
5030 O4=0
5040 N1=M1-M3+2
5050 REM HALLAR RANGO DE MATRIZ A1 (COL. 1 HASTA M1+2-M3)
5060 GOSUB 1910
5070 IF R=N1 THEN 5100
5080 GO TO 5170
5090 REM COL. J4 DE MATRIZ V1 ES L.I. CON DEMAS VECT. DE MATRIZ X1
5100 FOR J2=1 TO N
5110 X1(J2,M3)=V1(J2,J4)
5120 NEXT J2
5130 M6=M6+1
5140 VO(M6)=M3
5150 M3=M3-1
5160 IF M3=1 THEN 5320
5170 IF J4=M5 THEN 5280
5180 GO TO 4890
5190 M2=5
5200 GO TO 4720
5210 M2=0
5220 IF R=N1 THEN 5250
5230 M3=M3+M4
5240 GO TO 4460
5250 IF M3=1 THEN 5320
5260 GO TO 4460
5270 REM SE HA BUSCADO LOS VP. Y VPG. Y NO SE LOGRA FORMAR LA MATRIZ T1
5280 PRINT 'JNO SE PUEDE ENCONTRAR TODOS LOS VP. Y VPG.'
5290 PRINT 'CORRESPONDIENTES AL VALOR PROPIO LAMBDA(';I;')= ';EO(I)
5300 STOP
5310 REM EL NO. DE VP. DE MATRIZ X1 DEBE SER IGUAL A LA DEGENERACION Q1
```

```
5320 IF M8=1 THEN 5380
5330 M2=10
5340 GO TO 4720
5350 M2=0
5360 IF R=N1 THEN 5380
5370 GO TO 5280
5380 IF M6=Q1 THEN 5450
5390 PRINT 'JERROR: EL NO. DE VP. DE MATRIZ X1 DEBE'
5400 PRINT '          SER IGUAL A LA DEGENERACION Q1'
5410 PRINT '          DE MATRIZ A1, PARA VALOR PROP. LAMBDA(';I;')=';E0(I)
5420 STOP
5430 REM COLOCAR MATRIZ X1 (COL. 2 HASTA (M1+1))
5440 REM EN MATRIZ T1 (COL. (I+1-M1) HASTA I )
5450 T8=I-M1
5460 FOR J=1 TO N
5470 FOR J1=1 TO M1
5480 T1(J,T8+J1)=X1(J,J1+1)
5490 NEXT J1
5500 NEXT J
5510 DELETE F1,F2,X1,X2,V0,V1,V2,V3
5520 GO TO 6420
5530 REM CASO EN QUE Q=M1 ****************************************
5540 GOSUB 5590
5550 GO TO 6420
5560 REM SUBRUTINA PARA CALCULO DE LOS Q VECTORES PROPIOS NORMALIZADOS
5570 REM LINEALMENTE INDEPENDIENTES, ASOCIADOS CON EL I-ESIMO
5580 REM VALOR PROPIO DE 'A'; Y ALMACENAMIENTO EN 'T1'
5590 FOR J=1 TO Q
5600 U8=I+J-M1
5610 T8=I1+J-1
5620 FOR J1=1 TO I1-1
5630 T1(T9(J1),U8)=A1(J1,T8)
5640 NEXT J1
5650 FOR J1=I1 TO N
5660 IF J1=T8 THEN 5690
5670 T1(T9(J1),U8)=0
5680 GO TO 5700
5690 T1(T9(J1),U8)=-1
5700 NEXT J1
5710 GOSUB 5740
5720 GO TO 5830
5730 REM SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACION DE UN VP. O VPG.
5740 T8=0
5750 FOR J1=1 TO N
5760 T8=T8+T1(J1,U8)^2
5770 NEXT J1
5780 T8=SQR(T8)
5790 FOR J1=1 TO N
5800 T1(J1,U8)=T1(J1,U8)/T8
5810 NEXT J1
5820 RETURN
5830 NEXT J
5840 RETURN
5850 REM CASO EN QUE Q=1<>M1
```

```
5860 REM SE DEBE CALCULAR 1 VP. Y (M1-1) VPG.
5870 REM
5880 REM CALCULO DEL VECTOR PROPIO
5890 GOSUB 5590
5900 FOR J4=1 TO M1-1
5910 REM  OBTENCION DE COL. (N+1)  DE MATRIZ A1 (TERM. INDEP.)
5920 REM  A PARTIR DE COL. (I+J4-M1) DE MATRIZ T1
5930 T8=I+J4-M1
5940 FOR J1=1 TO N
5950 A1(J1,N+1)=T1(J1,T8)
5960 NEXT J1
5970 REM *** CALCULO DE COL. (N+1) DE MATRIZ A1 MODIFICADA
5980 REM      POR NO  OPERAC.ELEMT. PREVIAS DE FILAS DE A1
5990 REM      (COL. 1 HASTA N), ALMACENADAS EN ARCH. @TTT/OP
6000 REM
6010 CALL 'REWIND',2
6020 READ #2:NO
6030 DELETE P1
6040 DIM P1(4)
6050 FOR J1=1 TO NO
6060 READ #2:P1
6070 GO TO P1(1) OF 6090,6140,6180
6080 REM *** OP. 1 -- INTERCAMBIAR FILAS INDICADAS POR P1(2) CON P1(3)
6090 T8=A1(P1(2),N+1)
6100 A1(P1(2),N+1)=A1(P1(3),N+1)
6110 A1(P1(3),N+1)=T8
6120 GO TO 6230
6130 REM *** OP. 2 -- DIVIDIR FILA INDICADA POR P1(2) PARA P1(3)
6140 A1(P1(2),N+1)=A1(P1(2),N+1)/P1(3)
6150 GO TO 6230
6160 REM *** OP. 3 -- SUMAR A FILA INDICADA POR P1(2) EL PRODUCTO
6170 REM                    DE FILA INDICADA POR P1(3) POR P1(4)
6180 T8=A1(P1(2),N+1)
6190 T8=T8+A1(P1(3),N+1)*P1(4)
6200 IF ABS(T8)>E9 THEN 6220
6210 T8=0
6220 A1(P1(2),N+1)=T8
6230 NEXT J1
6240 DELETE P1
6250 J1=I1
6260 T8=I+J4-M1+1
6270 IF ABS(A1(J1,N+1))<E9 THEN 6320
6280 PRINT 'LA ECUACION PARA HALLAR EL VPG.';T8;' DE T1 '
6290 PRINT 'CORRESPONDIENTE AL VALOR PROPIO LAMBDA(';I;')'
6300 PRINT ' NO TIENE SOLUCION.'
6310 STOP
6320 IF J1=N THEN 6370
6330 J1=J1+1
6340 GO TO 6270
6350 REM CALCULO DEL J4-ESIMO VPG. ASOCIADO CON LAMBDA(I)
6360 REM A PARTIR DE LA SUMA DE COLUMNAS DE 'A1'
6370 FOR J1=1 TO I1-1
6380 T1(T9(J1),T8)=A1(J1,I1)+A1(J1,I1+1)
6390 NEXT J1
```

```
6400 T1(T9(I1),T8)=-1
6410 NEXT J4
6420 M1=1
6430 NEXT I
6440 RETURN
```

```
1000 REM PROGRAMA: ESTADO/MATRIZTC
1010 02=9
1020 IF 01<>02 THEN 800
1030 REM
1040 REM
1050 GOSUB 1210
1060 OPEN '@TTT/T';6,'F',X$
1070 WRITE #6:T1,T2
1080 CLOSE 6
1090 DELETE A1,A2
1100 DIM A1(N,N),A2(N,N)
1110 A1=T1
1120 A2=T2
1130 GOSUB 1570
1140 CLOSE
1150 IF R=N THEN 1180
1160 PRI 'MATRIZ (T1+JT2) NO TIENE TODAS SUS COL. L.I. (ES SINGULAR)GGG'
1170 STOP
1180 01=10
1190 GO TO 800
1200 REM *** SIGUE CALCULO DE VP Y VPG
1210 DELETE T9,T1,T2,A1,A2,Q
1220 DIM T9(N),T1(N,N),T2(N,N),A1(N,N+1),A2(N,N+1)
1230 OPEN '@TTT/A';5,'U',X$
1240 OPEN '@TTT/A1';1,'U',X$
1250 OPEN '@TTT/OP';2,'U',X$
1260 M1=1
1270 FOR I=1 TO N
1280 IF I=N THEN 1360
1290 E9=1.0E-10
1300 IF ABS(E0(I)-E0(I+1))<E9 THEN 1320
1310 GO TO 1360
1320 IF ABS(E1(I)-E1(I+1))<E9 THEN 1340
1330 GO TO 1360
1340 M1=M1+1
1350 GO TO 5990
1360 E9=1.0E-10
1370 A1=0
1380 A2=0
1390 CALL 'REWIND',5
1400 READ #5:A
1410 FOR J=1 TO N
1420 FOR J1=1 TO N
1430 A1(J,J1)=A(J,J1)
1440 NEXT J1
1450 A1(J,J)=A(J,J)-E0(I)
1460 A2(J,J)=-E1(I)
1470 NEXT J
1480 CALL 'REWIND',1
1490 WRITE #1:A1,A2
1500 GOSUB 1570
1510 IF R=N THEN 1530
1520 GO TO 2440
1530 PRINT 'MATRIZ  A - LAMDA*I TIENE TODOS SUS VECTORES COLUMNA'
```

```
1540 PRINT 'LINEALMENTE INDEPENDIENTES'
1550 STOP
1560 REM *** COMIENZO DE SUB. GAUSS-JORDAN
1570 O4=1
1580 N1=N
1590 IF O4=0 THEN 1630
1600 NO=0
1610 CALL 'REWIND',2
1620 WRITE #2:NO
1630 FOR I1=1 TO N
1640 T9(I1)=I1
1650 NEXT I1
1660 FOR I1=1 TO N1
1670 IF I1=N1 THEN 2370
1680 I2=I1
1690 J2=I1
1700 T8=SQR(A1(I1,I1)^2+A2(I1,I1)^2)
1710 FOR I3=I1 TO N
1720 FOR J3=I1 TO N1
1730 IF T8=>SQR(A1(I3,J3)^2+A2(I3,J3)^2) THEN 1770
1740 I2=I3
1750 J2=J3
1760 T8=SQR(A1(I3,J3)^2+A2(I3,J3)^2)
1770 NEXT J3
1780 NEXT I3
1790 IF T8<E9 THEN 2390
1800 IF I1=I2 THEN 1920
1810 IF O4=0 THEN 1840
1820 NO=NO+1
1830 WRITE #2:1,I1,I2,0,0
1840 FOR J=I1 TO N1
1850 T8=A1(I1,J)
1860 A1(I1,J)=A1(I2,J)
1870 A1(I2,J)=T8
1880 T8=A2(I1,J)
1890 A2(I1,J)=A2(I2,J)
1900 A2(I2,J)=T8
1910 NEXT J
1920 IF I1=J2 THEN 2050
1930 FOR J=1 TO N
1940 T8=A1(J,I1)
1950 A1(J,I1)=A1(J,J2)
1960 A1(J,J2)=T8
1970 T8=A2(J,I1)
1980 A2(J,I1)=A2(J,J2)
1990 A2(J,J2)=T8
2000 NEXT J
2010 T8=T9(I1)
2020 T9(I1)=T9(J2)
2030 T9(J2)=T8
2040 REM *** MULTIPLICACION DE FILA I1 POR  1/PIVOTE
2050 U8=A1(I1,I1)^2+A2(I1,I1)^2
2060 T8=A1(I1,I1)/U8
2070 U8=-A2(I1,I1)/U8
```

```
2080 IF 04=0 THEN 2110
2090 NO=NO+1
2100 WRITE #2:2,I1,T8,U8,0
2110 FOR J=I1 TO N1
2120 U9=A1(I1,J)*T8-A2(I1,J)*U8
2130 A2(I1,J)=A1(I1,J)*U8+A2(I1,J)*T8
2140 A1(I1,J)=U9
2150 NEXT J
2160 FOR K2=1 TO N
2170 IF K2=I1 THEN 2330
2180 T8=-A1(K2,I1)
2190 U8=-A2(K2,I1)
2200 IF 04=0 THEN 2230
2210 NO=NO+1
2220 WRITE #2:3,K2,I1,T8,U8
2230 FOR J=I1 TO N1
2240 U7=T8*A1(I1,J)-U8*A2(I1,J)
2250 U9=T8*A2(I1,J)+U8*A1(I1,J)
2260 A1(K2,J)=A1(K2,J)+U7
2270 A2(K2,J)=A2(K2,J)+U9
2280 IF ABS(A1(K2,J))>E9 THEN 2300
2290 A1(K2,J)=0
2300 IF ABS(A2(K2,J))>E9 THEN 2320
2310 A2(K2,J)=0
2320 NEXT J
2330 NEXT K2
2340 NEXT I1
2350 R=N1
2360 GO TO 2400
2370 IF SQR(A1(N1,N1)^2+A2(N1,N1)^2)<E9 THEN 2390
2380 GO TO 2050
2390 R=I1-1
2400 IF 04=0 THEN 2430
2410 CALL 'REWIND',2
2420 WRITE #2:NO
2430 RETURN
2440 Q=N-R
2450 IF Q=M1 THEN 5090
2460 IF Q=1 THEN 5410
2470 REM *** CASO EN QUE 1<Q<M1
2480 Q1=Q
2490 K9=2
2500 CALL 'REWIND',1
2510 READ #1:A1,A2
2520 DELETE F1,F2,X1,X2,V0,V1,V2,V3
2530 DIM F1(N,N+1),F2(N,N+1),X1(N,M1+1),X2(N,M1+1),V1(N,Q1),V2(N,Q1)
2540 DIM V0(Q1),V3(M1)
2550 F1=A1
2560 F2=A2
2570 OPEN '@TTT/F1';3,'U',X$
2580 OPEN '@TTT/RE';4,'U',X$
2590 OPEN '@TTT/IM';7,'U',X$
2600 CALL 'REWIND',3
2610 WRITE #3:F1,F2
```

```
2620 CALL 'REWIND',4
2630 CALL 'REWIND',7
2640 FOR J=1 TO N
2650 FOR J1=1 TO N
2660 T8=0
2670 U8=0
2680 FOR J2=1 TO N
2690 T8=T8+F1(J,J2)*A1(J2,J1)-F2(J,J2)*A2(J2,J1)
2700 U8=U8+F1(J,J2)*A2(J2,J1)+F2(J,J2)*A1(J2,J1)
2710 NEXT J2
2720 WRITE #4:T8
2730 WRITE #7:U8
2740 NEXT J1
2750 WRITE #4:0
2760 WRITE #7:0
2770 NEXT J
2780 CALL 'REWIND',4
2790 READ #4:A1
2800 CALL 'REWIND',7
2810 READ #7:A2
2820 O4=0
2830 GOSUB 1580
2840 IF R=N-M1 THEN 2970
2850 IF R>N-M1 THEN 2890
2860 PRINT 'RANGO DE MATRIZ F1+JF2=(A-I*LAMBDA(I))^K9 (COL.1 HASTA N)'
2870 PRINT 'NO DEBE SER MENOR DE (N-M1) PARA SOLUCION DEL PROBLEMA'
2880 STOP
2890 CALL 'REWIND',4
2900 READ #4:F1
2910 CALL 'REWIND',7
2920 READ #7:F2
2930 CALL 'REWIND',1
2940 READ #1:A1,A2
2950 K9=K9+1
2960 GO TO 2600
2970 Q=M1
2980 GOSUB 5110
2990 M3=M1+1
3000 M5=0
3010 M6=0
3020 M7=0
3030 M8=0
3040 CALL 'REWIND',3
3050 READ #3:F1,F2
3060 J=1
3070 M2=0
3080 T8=I+J-M1
3090 FOR J1=1 TO N
3100 F1(J1,N+1)=0
3110 F2(J1,N+1)=0
3120 FOR J2=1 TO N
3130 U9=F1(J1,J2)*T1(J2,T8)-F2(J1,J2)*T2(J2,T8)
3140 U7=F1(J1,J2)*T2(J2,T8)+F2(J1,J2)*T1(J2,T8)
3150 F1(J1,N+1)=F1(J1,N+1)+U9
```

```
3160 F2(J1,N+1)=F2(J1,N+1)+U7
3170 NEXT J2
3180 IF SQR(F1(J1,N+1)^2+F2(J1,N+1)^2)<E9 THEN 3210
3190 M2=1
3200 GO TO 3230
3210 F1(J1,N+1)=0
3220 F2(J1,N+1)=0
3230 NEXT J1
3240 IF M2=0 THEN 3260
3250 GO TO 3360
3260 IF K9=2 THEN 3300
3270 M7=M7+1
3280 V3(M7)=T8
3290 GO TO 3910
3300 M5=M5+1
3310 FOR J1=1 TO N
3320 V1(J1,M5)=T1(J1,T8)
3330 V2(J1,M5)=T2(J1,T8)
3340 NEXT J1
3350 GO TO 3910
3360 IF M3=2 THEN 3910
3370 FOR J1=1 TO N
3380 X1(J1,M3)=T1(J1,T8)
3390 X2(J1,M3)=T2(J1,T8)
3400 NEXT J1
3410 M3=M3-1
3420 IF K9=2 THEN 3440
3430 GO TO 3490
3440 FOR J1=1 TO N
3450 X1(J1,M3)=F1(J1,N+1)
3460 X2(J1,M3)=F2(J1,N+1)
3470 NEXT J1
3480 GO TO 3620
3490 CALL 'REWIND',1
3500 READ #1:A1,A2
3510 FOR J1=1 TO N
3520 X1(J1,M3)=0
3530 X2(J1,M3)=0
3540 FOR J2=1 TO N
3550 U9=A1(J1,J2)*T1(J2,T8)-A2(J1,J2)*T2(J2,T8)
3560 U7=A1(J1,J2)*T2(J2,T8)+A2(J1,J2)*T1(J2,T8)
3570 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+U9
3580 X2(J1,M3)=X2(J1,M3)+U7
3590 NEXT J2
3600 NEXT J1
3610 REM M4 CONTROLA EL MAXIMO ORDEN DE UN BOLQUE DE JORDAN (=K9)
3620 M4=2
3630 M3=M3-1
3640 M2=0
3650 FOR J1=1 TO N
3660 X1(J1,M3)=0
3670 X2(J1,M3)=0
3680 FOR J2=1 TO N
3690 U9=A1(J1,J2)*X1(J2,M3+1)-A2(J1,J2)*X2(J2,M3+1)
```

```
3700 U7=A1(J1,J2)*X2(J2,M3+1)+A2(J1,J2)*X1(J2,M3+1)
3710 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+U9
3720 X2(J1,M3)=X2(J1,M3)+U7
3730 NEXT J2
3740 IF SQR(X1(J1,M3)^2+X2(J1,M3)^2)<E9 THEN 3770
3750 M2=1
3760 GO TO 3790
3770 X1(J1,M3)=0
3780 X2(J1,M3)=0
3790 NEXT J1
3800 IF M2=0 THEN 3880
3810 IF M3=1 THEN 3850
3820 M4=M4+1
3830 IF M4<=K9 THEN 3870
3840 M4=M4-1
3850 M3=M3+M4
3860 M9=0
3870 GO TO 3910
3880 M9=1
3890 M6=M6+1
3900 VO(M6)=M3+1
3910 IF M8=0 THEN 3940
3920 IF M9=1 THEN 4770
3930 GO TO 4010
3940 IF M3=1 THEN 4880
3950 IF J=M1 THEN 3980
3960 J=J+1
3970 GO TO 3070
3980 J4=0
3990 M8=1
4000 IF M7=0 THEN 4490
4010 J4=J4+1
4020 IF J4>M7 THEN 4480
4030 T8=V3(J4)
4040 IF M3=2 THEN 4060
4050 GO TO 3370
4060 FOR J1=1 TO N
4070 X1(J1,M3)=T1(J1,T8)
4080 X2(J1,M3)=T2(J1,T8)
4090 NEXT J1
4100 M3=M3-1
4110 CALL 'REWIND',1
4120 READ #1:A1,A2
4130 M2=0
4140 FOR J1=1 TO N
4150 X1(J1,M3)=0
4160 X2(J1,M3)=0
4170 FOR J2=1 TO N
4180 U9=A1(J1,J2)*X1(J2,M3+1)-A2(J1,J2)*X2(J2,M3+1)
4190 U7=A1(J1,J2)*X2(J2,M3+1)+A2(J1,J2)*X1(J2,M3+1)
4200 X1(J1,M3)=X1(J1,M3)+U9
4210 X2(J1,M3)=X2(J1,M3)+U7
4220 NEXT J2
4230 IF SQR(X1(J1,M3)^2+X2(J1,M3)^2)<E9 THEN 4260
```

```
4240 M2=1
4250 GO TO 4280
4260 X1(J1,M3)=0
4270 X2(J1,M3)=0
4280 NEXT J1
4290 IF M2=0 THEN 4320
4300 M3=M3+1
4310 GO TO 4010
4320 FOR J1=1 TO M1-M3+1
4330 FOR J2=1 TO N
4340 A1(J2,J1)=X1(J2,M3+J1)
4350 A2(J2,J1)=X2(J2,M3+J1)
4360 NEXT J2
4370 NEXT J1
4380 O4=0
4390 N1=M1-M3+1
4400 GOSUB 1590
4410 IF M2=5 THEN 4790
4420 IF M2=10 THEN 4910
4430 IF R=N1 THEN 4450
4440 GO TO 4300
4450 M6=M6+1
4460 V0(M6)=M3+1
4470 GO TO 4880
4480 J4=0
4490 IF M5=0 THEN 4850
4500 J4=J4+1
4510 FOR J2=1 TO N
4520 A1(J2,1)=V1(J2,J4)
4530 A2(J2,1)=V2(J2,J4)
4540 NEXT J2
4550 FOR J2=2 TO M1+2-M3
4560 T8=M3+J2-1
4570 FOR J1=1 TO N
4580 A1(J1,J2)=X1(J1,T8)
4590 A2(J1,J2)=X2(J1,T8)
4600 NEXT J1
4610 NEXT J2
4620 O4=0
4630 N1=M1-M3+2
4640 GOSUB 1590
4650 IF R=N1 THEN 4670
4660 GO TO 4750
4670 FOR J2=1 TO N
4680 X1(J2,M3)=V1(J2,J4)
4690 X2(J2,M3)=V2(J2,J4)
4700 NEXT J2
4710 M6=M6+1
4720 V0(M6)=M3
4730 M3=M3-1
4740 IF M3=1 THEN 4880
4750 IF J4=M5 THEN 4850
4760 GO TO 4500
4770 M2=5
```

```
4780 GO TO 4320
4790 M2=0
4800 IF R=N1 THEN 4830
4810 M3=M3+M4
4820 GO TO 4010
4830 IF M3=1 THEN 4880
4840 GO TO 4010
4850 PRINT 'JNO SE PUEDE ENCONTRAR TODOS LOS VP. Y VPG.'
4860 PRINT 'CORRESP. AL VALOR PROPIO LAMBDA(';I;')= ';E0(I);' ';E1(I)
4870 STOP
4880 IF M8=1 THEN 4940
4890 M2=10
4900 GO TO 4320
4910 M2=0
4920 IF R=N1 THEN 4940
4930 GO TO 4850
4940 IF M6=Q1 THEN 4990
4950 PRINT 'JERROR: EL NO. DE VP. DE MATRIZ X1+JX2 DEBE'
4960 PRINT '         SER IGUAL A LA DEGENERACION Q1 ';Q1
4970 PRINT '         DE MATRIZ A1, PARA VALOR PROP (';I;')=';E0(I)
4980 STOP
4990 T8=I-M1
5000 FOR J=1 TO N
5010 FOR J1=1 TO M1
5020 T1(J,T8+J1)=X1(J,J1+1)
5030 T2(J,T8+J1)=X2(J,J1+1)
5040 NEXT J1
5050 NEXT J
5060 DELETE F1,F2,X1,X2,V0,V1,V2,V3
5070 GO TO 5980
5080 REM *** CASO EN QUE Q=M1
5090 GOSUB 5110
5100 GO TO 5980
5110 FOR J=1 TO Q
5120 U8=I+J-M1
5130 T8=I1+J-1
5140 FOR J1=1 TO I1-1
5150 T1(T9(J1),U8)=A1(J1,T8)
5160 T2(T9(J1),U8)=A2(J1,T8)
5170 NEXT J1
5180 FOR J1=I1 TO N
5190 IF J1=T8 THEN 5230
5200 T1(T9(J1),U8)=0
5210 T2(T9(J1),U8)=0
5220 GO TO 5250
5230 T1(T9(J1),U8)=-1
5240 T2(T9(J1),U8)=0
5250 NEXT J1
5260 GOSUB 5280
5270 GO TO 5380
5280 T8=0
5290 FOR J1=1 TO N
5300 T8=T8+T1(J1,U8)^2+T2(J1,U8)^2
5310 NEXT J1


5850 PRINT 'NO TIENE SOLUCION'
```

```
5860 STOP
5870 IF J1=N THEN 5910
5880 J1=J1+1
5890 GO TO 5820
5900 REM  *** CALCULO DE J4-ESIMO VPG
5910 FOR J1=1 TO I1-1
5920 T1(T9(J1),T8)=A1(J1,I1)+A1(J1,I1+1)
5930 T2(T9(J1),T8)=A2(J1,I1)+A2(J1,I1+1)
5940 NEXT J1
5950 T1(T9(I1),T8)=-1
5960 T2(T9(I1),T8)=0
5970 NEXT J4
5980 M1=1
5990 NEXT I
6000 RETURN
```

```
1000 REM          PROGRAMA:  ESTADO/T1AT
1010 O2=8
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 REM
1040 REM
1050 REM *** ESTRUCTURACION DE MATRIZ I EN NOMBRE A1
1060 E9=1.0E-10
1070 A1=0
1080 FOR J=1 TO N
1090 A1(J,J)=1
1100 NEXT J
1110 REM *** LEER OPERACIONES ELEMENTALES DE ARCH @TTT/OP
1120 OPEN '@TTT/OP';1,'R',X$
1130 READ #1:NO
1140 DELETE P1,F1
1150 DIM P1(4),F1(N,N)
1160 FOR J=1 TO NO
1170 READ #1:P1
1180 GO TO P1(1) OF 1190,1260,1310
1190 REM *** OP. 1 -- INTERCAMBIAR FILAS INDICADAS POR P1(2) CON P1(3)
1200 FOR J1=1 TO N
1210 T8=A1(P1(2),J1)
1220 A1(P1(2),J1)=A1(P1(3),J1)
1230 A1(P1(3),J1)=T8
1240 NEXT J1
1250 GO TO 1360
1260 REM *** OP. 2 -- DIVIDIR FILA INDICADA POR P1(2) PARA P1(3)
1270 FOR J1=1 TO N
1280 A1(P1(2),J1)=A1(P1(2),J1)/P1(3)
1290 NEXT J1
1300 GO TO 1360
1310 REM *** OP. 3 -- SUMAR A FILA INDICADA POR P1(2) EL PRODUCTO
1320 REM                DE FILA INDICADA POR P1(3) POR P1(4)
1330 FOR J1=1 TO N
1340 A1(P1(2),J1)=A1(P1(2),J1)+A1(P1(3),J1)*P1(4)
1350 NEXT J1
1360 NEXT J
1370 REM *** INTERCAMBIAR FILAS DE MATRIZ A1, DE ACUERDO A
1380 REM      VECTOR T9  Y ALMACENARLAS EN MATRIZ F1
1390 FOR J=1 TO N
1400 FOR I1=1 TO N
1410 F1(T9(J),I1)=A1(J,I1)
1420 NEXT I1
1430 NEXT J
1440 DELETE P1
1450 REM *** INVERSA DE T1 SE ENCUENTRA EN NOMBRE F1
1460 CLOSE 1
1470 OPEN '@TTT/T';1,'U',X$
1480 REM *** LECTURA DE MATRIZ A DE ARCHIVO @TTT/A
1490 OPEN '@TTT/A';2,'U',X$
1500 CALL 'REWIND',2
1510 READ #2:A
1520 REM *** MULTIPLICACION DE T-INVERSA (F1) POR A
1530 REM      PRODUCTO SE ALMACENA EN ARCH. @TTT/T  A CONTINUACION DE
```

```
1540 REM      MATRIZ ORIGINAL T
1550 FOR I=1 TO N
1560 FOR J=1 TO N
1570 T5=0
1580 FOR K2=1 TO N
1590 T5=T5+F1(I,K2)*A(K2,J)
1600 NEXT K2
1610 WRITE #1:T5
1620 NEXT J
1630 NEXT I
1640 REM *** LECTURA DE MATRIZ ORIGINAL T Y DE PRODUCTO DE
1650 REM      INVERSA DE T POR A
1660 CALL 'REWIND',1
1670 READ #1:T1,A
1680 REM *** FORMA CANONICA DE JORDAN SE ALMACENARA EN MATRIZ A1
1690 A1=0
1700 FOR I=1 TO N
1710 FOR J=1 TO N
1720 FOR K2=1 TO N
1730 A1(I,J)=A1(I,J)+A(I,K2)*T1(K2,J)
1740 NEXT K2
1750 IF ABS(A1(I,J))>E9 THEN 1770
1760 A1(I,J)=0
1770 NEXT J
1780 NEXT I
1790 CLOSE
1800 OPEN '@TTT/DAT';1,'R',X$
1810 READ #1:N,M,K
1820 DELETE A,B,C
1830 DIM A(N,N),B(N,M),C(K,N)
1840 READ #1:A,B,C
1850 CLOSE 1
1860 REM** CALCULO DE LA MATRIZ ( T INVERSA * B ) ;
1870 REM** PARA ANALISIS DE CONTROLABILIDAD
1880 OPEN '@TTT/OBSCONT1';1,'F',X$
1890 FOR I=1 TO N
1900 FOR J=1 TO M
1910 T5=0
1920 FOR K2=1 TO N
1930 T5=T5+F1(I,K2)*B(K2,J)
1940 NEXT K2
1950 WRITE #1:T5
1960 NEXT J
1970 NEXT I
1980 REM** CALCULO DE LA MATRIZ  ( C * T ) ;
1990 REM** PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD
2000 FOR I=1 TO K
2010 FOR J=1 TO N
2020 T5=0
2030 FOR K2=1 TO N
2040 T5=T5+C(I,K2)*T1(K2,J)
2050 NEXT K2
2060 WRITE #1:T5
2070 NEXT J
```

```
2080 NEXT I
2090 CLOSE
2100 REM *** F1 ES LA MATRIZ INVERSA DE T (T1) Y QUEDA SOLO EN MEMORIA
2110 CALL 'TIME',J$
2120 I$=REP('',1,13)
2130 K$=I$
2140 I$=REP('',3,3)
2150 K$=REP('',1,3)
2160 J$=REP('',1,13)
2170 L$=J$
2180 J$=REP('',3,3)
2190 L$=REP('',1,3)
2200 L1=60*(VAL(J$)-VAL(I$))+VAL(L$)-VAL(K$)
2210 REM *** A CONTINUACION SE CARGA PROGRAMA DE ESCRITURA
2220 O1=11
2230 O3=1
2240 GO TO 800
```

```
1000 REM        PROGRAMA:  ESTADO/T1ATC
1010 O2=10
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 REM
1040 REM
1050 REM *** ESTRUCTURACION DE MATRIZ I EN NOMBRE A1 + JA2
1060 E9=1.0E-10
1070 A1=0
1080 A2=0
1090 FOR J=1 TO N
1100 A1(J,J)=1
1110 NEXT J
1120 REM *** LEER OPERACIONES ELEMENTALES DE ARCH @TTT/OP
1130 OPEN '@TTT/OP';1,'R',X$
1140 READ #1:NO
1150 DELETE P1,F1,F2
1160 DIM P1(5),F1(N,N),F2(N,N)
1170 FOR J=1 TO NO
1180 READ #1:P1
1190 GO TO P1(1) OF 1200,1300,1370
1200 REM *** OP. 1 -- INTERCAMBIAR FILAS INDICADAS POR P1(2) CON P1(3)
1210 FOR J1=1 TO N
1220 T8=A1(P1(2),J1)
1230 A1(P1(2),J1)=A1(P1(3),J1)
1240 A1(P1(3),J1)=T8
1250 T8=A2(P1(2),J1)
1260 A2(P1(2),J1)=A2(P1(3),J1)
1270 A2(P1(3),J1)=T8
1280 NEXT J1
1290 GO TO 1450
1300 REM *** OP. 2 -- MULTIPL. FILA INDICADA POR P1(2) POR P1(3)+JP1(4)
1310 FOR J1=1 TO N
1320 U8=A1(P1(2),J1)*P1(3)-A2(P1(2),J1)*P1(4)
1330 A2(P1(2),J1)=A1(P1(2),J1)*P1(4)+A2(P1(2),J1)*P1(3)
1340 A1(P1(2),J1)=U8
1350 NEXT J1
1360 GO TO 1450
1370 REM *** OP. 3 -- SUMAR A FILA INDICADA POR P1(2) EL PRODUCTO
1380 REM                DE FILA INDICADA POR P1(3) POR P1(4)+J*P1(5)
1390 FOR J1=1 TO N
1400 T8=A1(P1(3),J1)*P1(4)-A2(P1(3),J1)*P1(5)
1410 U8=A1(P1(3),J1)*P1(5)+A2(P1(3),J1)*P1(4)
1420 A1(P1(2),J1)=A1(P1(2),J1)+T8
1430 A2(P1(2),J1)=A2(P1(2),J1)+U8
1440 NEXT J1
1450 NEXT J
1460 REM *** INTERCAMBIAR FILAS DE MATRICES A1 Y A2 , DE ACUERDO A
1470 REM      VECTOR T9  Y ALMACENARLAS EN MATRIZ F1 Y F2 RESPECTIVAMENTE
1480 FOR J=1 TO N
1490 FOR I1=1 TO N
1500 F1(T9(J),I1)=A1(J,I1)
1510 F2(T9(J),I1)=A2(J,I1)
1520 NEXT I1
1530 NEXT J
```

```
1540 DELETE F1
1550 REM *** INVERSA DE T1+JT2 SE ENCUENTRA EN NOMBRES F1 + JF2
1560 CLOSE 1
1570 OPEN '@TTT/T';1,'U',X$
1580 REM *** LECTURA DE MATRIZ A DE ARCHIVO @TTT/A
1590 OPEN '@TTT/A';2,'U',X$
1600 CALL 'REWIND',2
1610 READ #2:A
1620 REM *** MULTIPLICACION DE T-INVERSA (F1+JF2) POR MATRIZ A (REAL)
1630 REM      PARTE REAL DEL PRODUCTO SE ALMACENA EN @TTT/RE
1640 REM      PARTE IMAGINARIA DEL PRODUCTO SE ALMACENA EN @TTT/IM
1650 OPEN '@TTT/RE';3,'F',X$
1660 OPEN '@TTT/IM';4,'F',X$
1670 FOR I=1 TO N
1680 FOR J=1 TO N
1690 T5=0
1700 T8=0
1710 FOR K2=1 TO N
1720 T5=T5+F1(I,K2)*A(K2,J)
1730 T8=T8+F2(I,K2)*A(K2,J)
1740 NEXT K2
1750 WRITE #3:T5
1760 WRITE #4:T8
1770 NEXT J
1780 NEXT I
1790 REM *** LECTURA DE MATRIZ ORIGINAL T1 + JT2 (@TTT/T)
1800 REM      Y MATRIZ ((T1+JT2)^-1)*A    (ARCHIVOS @TTT/RE  Y @TTT/IM)
1810 CALL 'REWIND',1
1820 READ #1:T1,T2
1830 CALL 'REWIND',3
1840 READ #3:A1
1850 CALL 'REWIND',4
1860 READ #4:A2
1870 REM *** FORMA CANONICA DE JORDAN SE ALMACENARA EN MATRICES A1+JA2
1880 CALL 'REWIND',3
1890 CALL 'REWIND',4
1900 FOR I=1 TO N
1910 FOR J=1 TO N
1920 T8=0
1930 U8=0
1940 FOR K2=1 TO N
1950 T8=T8+A1(I,K2)*T1(K2,J)-A2(I,K2)*T2(K2,J)
1960 U8=U8+A1(I,K2)*T2(K2,J)+A2(I,K2)*T1(K2,J)
1970 NEXT K2
1980 IF ABS(T8)>E9 THEN 2000
1990 T8=0
2000 IF ABS(U8)>E9 THEN 2020
2010 U8=0
2020 WRITE #3:T8
2030 WRITE #4:U8
2040 NEXT J
2050 NEXT I
2060 CALL 'REWIND',3
2070 CALL 'REWIND',4
```

```
2080 READ #3:A1
2090 READ #4:A2
2100 CLOSE
2110 REM (F1 + JF2) ES LA MATRIZ INVERSA DE T (T1 +JT2) Y QUEDA
2120 REM SOLO EN MEMORIA.
2130 OPEN '@TTT/DAT';1,'R',X$
2140 READ #1:N,M,K
2150 DELETE A,B,C
2160 DIM A(N,N),B(N,M),C(K,N)
2170 READ #1:A,B,C
2180 CLOSE 1
2190 REM** CALCULO DE LA MATRIZ ( T INVERSA * B ) ;
2200 REM** PARA ANALISIS DE CONTROLABILIDAD
2210 OPEN '@TTT/OBSCONT1';1,'F',X$
2220 OPEN '@TTT/OBSCONT2';2,'F',X$
2230 FOR I=1 TO N
2240 FOR J=1 TO M
2250 T5=0
2260 T8=0
2270 FOR K2=1 TO N
2280 T5=T5+F1(I,K2)*B(K2,J)
2290 T8=T8+F2(I,K2)*B(K2,J)
2300 NEXT K2
2310 WRITE #1:T5
2320 WRITE #2:T8
2330 NEXT J
2340 NEXT I
2350 REM** CALCULO DE LA MATRIZ  ( C * T ) ;
2360 REM** PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD
2370 FOR I=1 TO K
2380 FOR J=1 TO N
2390 T5=0
2400 T8=0
2410 FOR K2=1 TO N
2420 T5=T5+C(I,K2)*T1(K2,J)
2430 T8=T8+C(I,K2)*T2(K2,J)
2440 NEXT K2
2450 WRITE #1:T5
2460 WRITE #2:T8
2470 NEXT J
2480 NEXT I
2490 CLOSE
2500 CALL 'TIME',J$
2510 I$=REP('',1,13)
2520 K$=I$
2530 I$=REP('',3,3)
2540 K$=REP('',1,3)
2550 J$=REP('',1,13)
2560 L$=J$
2570 J$=REP('',3,3)
2580 L$=REP('',1,3)
2590 L1=60*(VAL(J$)-VAL(I$))+VAL(L$)-VAL(K$)
2600 REM A CONTINUACION SE CARGA PROGRAMA DE ESCRITURA
2610 O1=11
```

```
2620 03=2
2630 GO TO 800
```

```
1000 REM PROGRAMA: ESTADO/SALIDA
1010 O2=11
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 REM ESCRITURA DE DATOS Y RESULTADOS
1040 CLOSE
1050 OPEN '@TTT/DAT';1,'R',X$
1060 READ #1:N,M,K
1070 DELETE A
1080 DIM A(N,N)
1090 READ #1:A
1100 CALL 'TIME',Z$
1110 U2=32
1120 PRINT 'IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOSJ'
1130 PRINT 'JEN CASO DE TERMINACION DE EJECUCION DEBIDO A FORMATOS'
1140 PRINT 'JNO CORRECTOS (FIELD OVERFLOW), O EN GENERAL PARA REPETIR'
1150 PRINT 'JIMPRESION, APLASTE TECLA 15GG'
1160 PRINT 'JJIMPRESION EN PAPEL? (SI O NO): GG';
1170 INPUT X$
1180 IF NOT(X$='SI' OR X$='S') THEN 1220
1190 U2=51
1200 PRINT 'JALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)GGG'
1210 INPUT X$
1220 PRINT @U2: USING 1230:Z$
1230 IMAGE P/'ESCUELA POLITECNICA NACIONAL'55T,FA
1240 R7=15
1250 PRINT @U2: USING 1260:
1260 IMAGE /'ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO'
1270 IF N$=' ' THEN 1340
1280 PRINT @U2: USING 1290:T$
1290 IMAGE /FA
1300 PRINT @U2: USING 1310:N$
1310 IMAGE /'DATOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO: 'FA/72('-')
1320 R7=R7+2
1330 GO TO 1360
1340 PRINT @U2: USING 1350:T$
1350 IMAGE /FA/72('-')
1360 PRINT @U2: USING 1370:
1370 IMAGE /'1) CARACTERISTICAS DEL SISTEMA:'
1380 PRINT @U2: USING '/3X''ORDEN: N = ''FD':N
1390 PRINT @U2: USING '/3X''NO. DE ENTRADAS: M = ''FD':M
1400 PRINT @U2: USING '/3X''NO. DE SALIDAS: K = ''FD':K
1410 R8=1
1420 REM   R7 -- CONTADOR DE RENGLONES IMPRESOS
1430 REM   R8 -- CONTADOR DE PAGINAS IMPRESAS
1440 A$='MATRIZ A'
1450 T7=1
1460 I1=N
1470 J1=N
1480 GOSUB 2810
1490 A$='MATRIZ B'
1500 I1=N
1510 J1=M
1520 DELETE A
1530 DIM A(I1,J1)
```

```
1540 READ #1:A
1550 GOSUB 2810
1560 A$='MATRIZ C'
1570 I1=K
1580 J1=N
1590 DELETE A
1600 DIM A(I1,J1)
1610 READ #1:A
1620 GOSUB 2810
1630 A$='MATRIZ D'
1640 I1=K
1650 J1=M
1660 DELETE A
1670 DIM A(I1,J1)
1680 READ #1:A
1690 GOSUB 2810
1700 CLOSE 1
1710 REM *** COMIENZO DE ESCRITURA DE RESULTADOS
1720 IF 63-R7=>5+N THEN 1740
1730 GOSUB 3170
1740 FRINT 'JJFORMATO FARA VALORES FROFIOS (EJ. 3D.6D): GG';
1750 INFUT F$
1760 IF O3=1 THEN 1790
1770 X$=F$&',3X,'
1780 F$=X$&F$
1790 FRINT @U2: USING 1800:
1800 IMAGE /'2) FOLOS DEL SISTEMA (VALORES FROFIOS DE MATRIZ A):'
1810 R7=R7+2
1820 F$='6D,2X'&F$
1830 IF O3=1 THEN 1870
1840 FRINT @U2: USING 1850:
1850 IMAGE/4X'NO.'4X'FARTE REAL     FARTE IMAG.'
1860 GO TO 1890
1870 FRINT @U2: USING 1880:
1880 IMAGE /4X'NO.'6X'VALOR'/
1890 IF O3=1 THEN 1940
1900 FOR I=1 TO N
1910 FRINT @U2: USING F$:I,E0(I),E1(I)
1920 NEXT I
1930 GO TO 1970
1940 FOR I=1 TO N
1950 FRINT @U2: USING F$:I,E0(I)
1960 NEXT I
1970 R7=R7+5+N
1980 FRINT @U2: USING 1990:
1990 IMAGE /'3) MATRIZ TRANSFORMADORA T:'
2000 X$='(COLUMNAS DE T SON VECTORES FROFIOS, Y'
2010 FRINT @U2: USING 2020:X$
2020 IMAGE 3XFA/3X'VECT. FROFIOS GENERALIZADOS DE MATRIZ A)'
2030 R7=R7+4
2040 A$='MATRIZ T'
2050 T7=2
2060 I1=N
2070 J1=N
```

```
2620 READ #2:X1
2630 READ #1:A
2640 CLOSE
2650 PRINT @U2: USING 2660:
2660 IMAGE/'7) MATRIZ ( C * T ) :'
2670 PRINT @U2: USING 2680:
2680 IMAGE 3X'(PARA ANALISIS DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA)'
2690 R7=R7+3
2700 A$='MATRIZ ( C * T )'
2710 GOSUB 03 OF 2810,3230
2720 PRINT @U2: USING 2730:L1
2730 IMAGE //3X'TIEMPO DE EJECUCION = ',FD,' SEGUNDOS'
2740 PRINT 'JDESEA REPETIR LA IMPRESION? (SI O NO):G';
2750 INPUT X$
2760 IF NOT(X$='S' OR X$='SI') THEN 2790
2770 PAGE
2780 GO TO 1000
2790 PRINT 'JFIN DE IMPRESION GGGG'
2800 END
2810 REM *** SUB. DE ESCRITURA DE MATRICES REALES
2820 PRINT 'JFORMATO PARA: ';A$;' (EJ. 5D.2D): GG';
2830 INPUT F$
2840 F$=F$&'3X,S'
2850 IF T7=2 THEN 2930
2860 IF R7<61 THEN 2880
2870 GOSUB 3170
2880 X$='/3X,FA/3X;(''='')'
2890 C$=STR(LEN(A$))
2900 X$=REP(C$,POS(X$,';',1),1)
2910 PRINT @U2: USING X$:A$
2920 R7=R7+3
2930 T8=INT(J1/4)
2940 IF T8*4=J1 THEN 2960
2950 T8=T8+1
2960 T8=T8+2
2970 FOR I=1 TO I1
2980 IF 63-R7=>T8 THEN 3000
2990 GOSUB 3170
3000 IF J1<5 THEN 3030
3010 PRINT @U2: USING '/3X''FILA ''FD'':''':I
3020 R7=R7+2
3030 PRINT @U2: USING '/3X,S':
3040 R7=R7+1
3050 FOR J=1 TO J1
3060 PRINT @U2: USING F$:A(I,J).
3070 IF J=J1 THEN 3120
3080 IF INT(J/4)*4-J<>0 THEN 3140
3090 PRINT @U2: USING '/3XS':
3100 R7=R7+1
3110 GO TO 3140
3120 PRINT @U2:
3130 R7=R7+1
3140 NEXT J
3150 NEXT I
```

```
3160 RETURN
3170 REM SUB. CAMBIO DE PAG.
3180 IF U2=32 THEN 3220
3190 R8=R8+1
3200 PRINT @U2: USING 'P/55T''PAG. ''FD':R8
3210 R7=2
3220 RETURN
3230 REM *** SUB. DE ESCRITURA DE MATRICES COMPLEJAS
3240 PRINT 'JFORMATO PARA: ';A$;' (EJ. 5D.2D): GG';
3250 INPUT F$
3260 X$=F$&',1X,'
3270 F$=X$&F$
3280 F$='''('','&F$
3290 F$=F$&','')'''
3300 F$=F$&',3X,S'
3310 IF T7=2 THEN 3390
3320 IF R7<61 THEN 3340
3330 GOSUB 3170
3340 X$='/3X,FA/3X;(''='')'
3350 C$=STR(LEN(A$))
3360 X$=REP(C$,POS(X$,';',1),1)
3370 PRINT @U2: USING X$:A$
3380 R7=R7+3
3390 T8=INT(J1/4)
3400 IF T8*4=J1 THEN 3420
3410 T8=T8+1
3420 T8=T8+2
3430 FOR I=1 TO I1
3440 IF 63-R7=>T8 THEN 3460
3450 GOSUB 3170
3460 IF J1<5 THEN 3490
3470 PRINT @U2: USING '/3X''FILA ''FD'':''':I
3480 R7=R7+2
3490 PRINT @U2: USING '/3X,S':
3500 R7=R7+1
3510 FOR J=1 TO J1
3520 PRINT @U2: USING F$:A(I,J),X1(I,J)
3530 IF J=J1 THEN 3580
3540 IF INT(J/4)*4-J<>0 THEN 3600
3550 PRINT @U2: USING '/3XS':
3560 R7=R7+1
3570 GO TO 3600
3580 PRINT @U2:
3590 R7=R7+1
3600 NEXT J
3610 NEXT I
3620 RETURN
```

B I B L I O G R A F I A

1. William L. Brogan, "Modern Control Theory", Quantum Publishers, Inc., New York, 1974.

2. Leon O. Chua y Pen-Min Lin, "Computer - Aided Analysis of Electronic Circuits", Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

3. Donald M. Wiberg, "Espacio de Estado y Sistemas Lineales", Serie Schaum, Mc Graw-Hill Inc., 1973.

4. A. I. Máltsev, "Fundamentos de Algebra Lineal", Editorial MIR, Moscú, 1978.

5. Lee W. Johnson y R. Dean Riess, "Numerical Analysis", Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Philippines, 1977.

6. Motomatic Control System Laboratory, "General Information and Laboratory Experiments", Electro-Craft Corporation, Minnesota, 1968.

7. Richard C. Dorf, "Sistemas Automáticos de Control", Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1978.

8. Vinicio Reinoso, "Modelación y Simulación de Sistemas de Regulación de Velocidad de Turbinas"; Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Quito, 1981.