

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

" TECNICAS CONVENCIONALES DE IDENTIFICACION DE SISTEMAS "

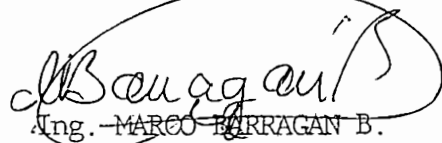
TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN  
LA ESPECIALIDAD DE ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES.

GUILLERMO MARTINEZ VIVANCO

Marzo - 1982

C E R T I F I C A C I O N :

Certifico que el presente trabajo,  
ha sido realizado en su totalidad  
por el Sr. GUILLERMO MARTINEZ V.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Barragan B.', is written over a circular stamp. The signature is fluid and cursive.

Ing. MARCO BARRAGAN B.

DIRECTOR DE TESIS

"La ausencia de una técnica científica en la cultura - latinoamericana es, junto con otros factores de índole estructural-económico, responsable de la situación de dependencia en que viven las naciones de origen luso-- hispánico".

OSCAR J. MAGGIOLO

## D E D I C A T O R I A

Desearía que este trabajo llegue a la altura de una mujer que por su grandeza me es difícil hacerlo. A la mujer que un día engendró vidas para realizar sueños, que desveló en madrugadas para en la devoción de sus resos ir conquistando mundos..., que sembró su corazón para cosechar estrellas.

A mi madre, que me dió suficiente fuerza para luchar en esta sociedad convulsionada, que me enseñó a erguir el pecho y a desafiar los peligros con audacia. A la mujer que me enseñó a valorar el sufrimiento no solo individual, sino de un pueblo, de este pueblo al que nos debemos todos y poco podemos pagarle.

A este Ecuador siempre presente que día a día exprime sus manos para beber agonía, pero que en un futuro no lejano levantará su frente para dar un grito de libertad definitivo.

G.M.V.

## A G R A D E C I M I E N T O

A mis padres y hermanos, pilares fundamentales en el transcurso de mi vida estudiantil.

Valga además la oportunidad para dejar constancia de mi más sincero agradecimiento, al personal docente de la facultad, - que a lo largo de mi carrera universitaria me sirvió de guía eficiente para poder culminar con el presente trabajo. Un agradecimiento especial al Ing. Marco Barragán B. que me brindó su apoyo total y permanente como digno director de tesis.

De la misma manera, al Instituto de Computación e Informática de la Escuela Politécnica Nacional, en especial al Ing. César Esquetini C. por su ayuda desinteresada en el campo de programación.

GUILLERMO MARTINEZ V.

# I N D I C E

Pag.

## TECNICAS CONVENCIONALES DE IDENTIFICACION DE SISTEMAS

### CAPITULO I

INTRODUCCION .....	1
1.1. IDENTIFICACION .....	2
1.2. TECNICAS DE IDENTIFICACION .....	3

### CAPITULO II

#### TECNICAS USUALES DE IDENTIFICACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

2.1. INTRODUCCION .....	6
2.2. IDENTIFICACION USANDO GRAFICOS NORMALIZADOS DE LA RESPUESTA A UNA FUNCION PASO .....	8
2.2.1. Ejemplos de aplicación.....	14
2.3. POR DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DE TIEMPO .....	31
2.3.1. Justificación de un modelo de segundo orden para un horno industrial .....	31
2.3.2. Descripción del proceso de identificación .....	46
2.3.3. Ejemplo de identificación de un horno con modelo desconocido.	
2.4. IDENTIFICACION USANDO SECUENCIAS BINARIAS PSEUDO-ALEATORIAS POR METODOS DE CORRELACION.....	60
2.4.1. Introducción .....	60

	Pag
2.4.2. Procedimiento experimental .....	64
2.4.3. Función de correlación cruzada .....	68
2.4.4. Ganancia de estado estable del sistema .....	69
2.4.5. Filtrado e integración .....	69
2.4.6. Aplicación de esta técnica a un sistema real .....	71
RESULTADOS DEL PROGRAMA DIGITAL PARA OBTENER LA FUNCION DE CORRELACION-CRUZADA .....	82
 <u>CAPITULO III</u> 	
3. TECNICAS USUALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA .....	85
3.1. UTILIZANDO DIAGRAMAS DE BODE .....	85
3.1.1. Ejemplos de Aplicación .....	92
3.2. UTILIZANDO RUIDO BLANCO .....	99
3.2.1. Obtención de $H(j\omega)$ .....	106
 <u>CAPITULO IV</u> 	
CONCLUSIONES .....	109
ANEXOS .....	116
BIBLIOGRAFIA.	

# C A P I T U L O I

## INTRODUCCION

Todo proceso de análisis en Ingeniería, presupone la existencia de un modelo matemático que represente adecuadamente y dentro de la precisión deseada, las características relevantes de un sistema real.

El problema de la asignación del modelo conveniente al sistema real, es otra rama de Ingeniería que ha cobrado impulso en los últimos tiempos con el apareamiento de sistemas industriales de gran complejidad, interés en los sistemas biológicos, etc.

Cuando los sistemas son simples, este problema se reduce a la determinación de un conjunto de parámetros por medio de una serie de medidas de laboratorio; pero cuando los sistemas son complejos, la experimentación en laboratorio involucra costo o riesgos en la mayoría de los casos, por lo que es deseable poder determinar el modelo de los sistemas con base en los registros normales de entrada y salida, cuando éstos se encuentran en condiciones normales de operación.

Esto lleva a un conjunto de métodos globalísticos de determi-



nación de modelos. Se pueden considerar globalísticos, ya que de estos registros de entrada y salida se obtienen todos los parámetros que definen al modelo sin que sea necesario realizar un conjunto de medidas para la determinación de uno solo de ellos.

Este trabajo está orientado a este tipo de métodos; no obstante, siendo el campo excesivamente amplio y complejo, y pretendiendo ser un aporte inicial, se circunscribirá a la descripción, análisis y utilización de las técnicas más comúnmente usadas, y que las hemos llamado convencionales.

### 1.1. IDENTIFICACION

El problema de identificación de sistemas puede ser considerado como un problema dual del de control. No se puede controlar un sistema sin identificarlo previamente, o durante el propio proceso de control. Citemos como ejemplo el proceso de aprender a manejar un carro. Más formalmente, y con base en lo expuesto de manera inicial, se puede definir a la identificación de sistemas como la determinación, en base a registros de entradas y salidas de un sistema, de un modelo dentro de una clase pre-especificada al cual el sistema real bajo estudio puede considerarse equivalente.

Hay que aclarar que cuando se identifica, se hacen aproximaciones; por ejemplo, debido a la precisión de los aparatos, etc. En consecuencia la identificación es inexacta. Más aún, el comportamiento

del mundo físico tiende a adoptar, según las circunstancias una amplia gama de situaciones, mientras que las clases de modelos de que se dispone, son limitados; así por ejemplo, la forma del modelo podría ser:

- Ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones de diferencias
- Respuesta a impulso
- Función de transferencia

En el contexto de este trabajo, consideraremos solamente las dos últimas.

Por otro lado, la formulación del problema no es totalmente precisa (ej.: por la presencia de perturbaciones) por lo que muchas veces se deben usar métodos estadísticos.

## 1.2. TÉCNICAS DE IDENTIFICACION

Existen muchos criterios según los cuales se pueden clasificar estas técnicas. En esta tesis las clasificaremos según la experimentación realizada, en:

- Técnicas en el dominio del tiempo
- Técnicas en el dominio de la frecuencia

Las técnicas que se abordarán en el dominio del tiempo (en nú

mero de tres), son tema del capítulo II: dos determinísticas y una probabilística.

Las técnicas determinísticas a abordarse son:

- 1.- Utilizando gráficos de respuesta normalizada a una función paso.
- 2.- Por determinación de las constantes de tiempo.

Estos dos métodos ilustran cómo se procede a identificar para un sistema (eventualmente no lineal o lineal y de orden mayor que dos pero que posea polos dominantes), su modelo aproximado de 2º orden.

Con fines de probar la bondad del primer método, hemos simulado en computador analógico dos ejemplos de sistemas lineales: uno de 2º orden y otro de 3º orden con polos dominantes. Para el segundo método, se ha utilizado un horno eléctrico de modelo desconocido, por lo que primero se justifica analíticamente y en forma general, que un modelo razonable es uno de segundo orden.

El método probabilístico es el que utiliza secuencias binarias pseudo-aleatorias, y sirve para un modelo de cualquier orden. Debido a dificultades de orden experimental, el procedimiento que se sigue en este trabajo, es el de simular en computador digital un sistema, simular la secuencia de entrada y obtener la salida, para con estas dos secuencias obtener la curva de la respuesta impulso.

El capítulo tres trata sobre las técnicas de identificación - en el dominio de la frecuencia, de las que se describen dos:

- 1.- Usando diagramas de Bode
- 2.- Usando ruido blanco.

Se han hecho además dos ejemplos de identificación con amplificadores, para justificar la utilización del primer método.

El capítulo cuarto de esta tesis, presenta las conclusiones a las que finalmente se han llegado.

## C A P I T U L O   I I

### TECNICAS USUALES DE IDENTIFICACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

#### 2.1.   INTRODUCCION

Según lo indicado anteriormente, las técnicas a tratarse en el presente capítulo son tres:

- Usando gráficas normalizadas a una función paso
- Por determinación de las constantes de tiempo
- Utilizando secuencias binarias pseudo-aleatorias por métodos de correlación.

Las dos primeras técnicas se sirven de una señal paso de entrada y del registro de la respuesta a esta señal para la determinación de la función de transferencia.

Es conveniente recordar que si se tuviera como señal de entrada una función impulso unitaria  $\delta(t)$ , la salida sería directamente su respuesta  $h(t)$ , cuya transformada es la función de transferencia  $H(s)$ .

Las razones para no utilizar una función impulso de entrada

son obvias, pues enfrenta dificultades para ser generada, ya que debe ser una señal de amplitud infinita, de duración cero y con integral finita (e igual a 1). Además, suponiendo que pudiera ser generada, su gran amplitud podría llevar a un sistema bajo prueba a un comportamiento fuertemente no lineal (por ejemplo saturación).

Por eso es preferible utilizar una función paso de entrada, bastante simple de ser generada (despreciando tiempos de subida en muchos sistemas reales). Además la relación entre la respuesta a la función paso ( $c(t)$ ) y la respuesta a la función impulso es bastante simple, pues  $h(t)$  es simplemente la derivada de  $c(t)$ , según se prueba en la teoría de sistemas lineales.

Una tercera razón para el uso de la función paso, es que muchos sistemas la utilizan como señal normal de entrada; por ejemplo, cuando se conecta un horno eléctrico podría suponerse que se ha aplicado una función paso de potencia.

Por el contrario, también ocurre en la identificación de sistemas de Ingeniería, que el proceso sea muy grande o peligroso para ser excitado con señales determinísticas que casi siempre son de gran amplitud; pero, estos mismos sistemas pueden aceptar, sin perjudicar su comportamiento normal, la presencia de pequeñas perturbaciones artificiales por algún tiempo. Este problema es enfocado con el tercer método.

2.2. IDENTIFICACION USANDO GRAFICOS NORMALIZADOS DE LA RESPUESTA A UNA FUNCION PASO.

Como se indicó en el capítulo I, cualquier sistema que posea dos polos dominantes puede ser aproximado a un sistema de 2º orden.

En la fig. (2.2.1.) se tendría el sistema de control equivalente de lazo cerrado de 2º orden de donde obtenemos  $c(t)$ .

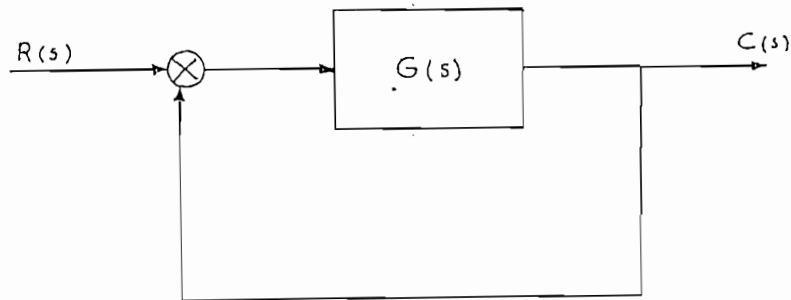


Fig. 2.2.1.

Por otro lado, y en general, la función de transferencia de un sistema de 2º orden con ganancia d.c. unitaria, está dada por:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.2.1.)$$

donde:  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema

$\xi$  es la relación de amortiguación

Se tiene por tanto la respuesta:

$$c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2.2.2)$$

donde la entrada es la función paso  $R(s) = 1/s$

La respuesta  $c(t)$  a una función paso está dada en la tabla de transformadas de Laplace, donde la transformada inversa a  $c(s)$  es

$$c(t) = \left[ 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi \omega_n t} \text{Sen}(\omega_n \beta t + \theta) \right] \mu(t) \quad (2.2.3)$$

donde:  $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$  y  $\theta = \text{tg}^{-1} \beta/\xi$   
 $\xi < 1$  :

Se observa que la respuesta depende solamente de  $\xi$  y  $\omega_n$ . A esta misma respuesta se la acostumbra presentar en forma de gráficos normalizados y para diferentes valores, como muestra la fig. (2.2.2).

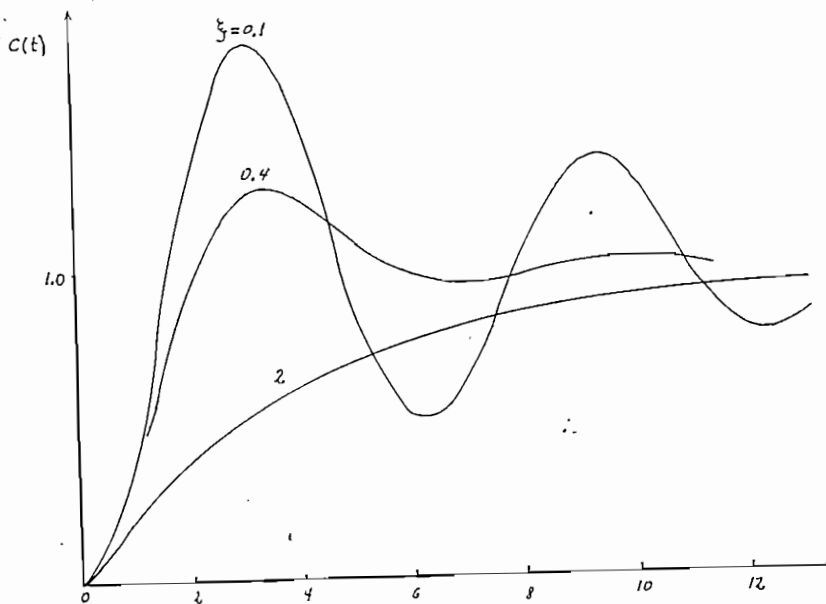


Fig. (2.2.2)



Asociando la respuesta obtenida en el sistema real a una de estas curvas, se puede determinar un valor de  $\xi$  y  $\omega_n$ , Con lo que quedará totalmente definida la función del sistema.

También podemos observar directamente de la respuesta en estado estable del sistema real si la ganancia d.c. es diferente de 1. De esta manera la función de transferencia que se determina es de la forma:

$$T(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.2.4)$$

Quando para el sistema real el tiempo al que ocurre el primer pico es muy pequeño, esto puede dar lugar a la determinación de  $\omega_n$  con errores considerables; en este caso, es preferible usar el tiempo de establecimiento.

Por otro lado, de la figura (2.2.2) podemos observar para sistemas sobre amortiguados, que el tiempo pico no está definido, en cuyo caso también hay que usar el tiempo de establecimiento.

Por esta razón se cree conveniente definir las siguientes relaciones adicionales:

$$S.P. = (M_{pt} - 1) \times 100 \% \quad (2.2.5)$$

Que es el sobrenivel porcentual, y mide la semejanza con que

la respuesta real iguala a la entrada escalón y donde  $M_{pt}$  es el valor pico de la respuesta en función del tiempo.

El tiempo de establecimiento  $T_s$ , se define como el tiempo necesario para que el sistema se estabilice dentro de un cierto porcentaje  $\delta$  (Fig. 2.2.3) de la amplitud de entrada, formando una banda  $\pm \delta$ .

En sistemas de 2º orden con constante de amortiguación.  $\omega_n t$ , la respuesta se mantiene dentro del 2 % después de 4 veces la constante de tiempo  $\tau$ . Esto lo podemos demostrar a continuación.

:

De acuerdo a la Ec. (2.2.3), tenemos que para cumplir con la condición anterior, esta ecuación se transformaría en:

$$1 - e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_n \beta t + \theta) \leq 1 - 0.02 \quad (2.2.6)$$

Cuando el sistema se estabiliza

$$\omega_n \beta t + \theta = 90^\circ$$

$$\text{Por tanto: } e^{-\xi \omega_n t} \leq 0.02 \quad (2.2.7)$$

$$e^{\xi \omega_n t} \geq 50 \quad \therefore$$

$$\text{De donde: } \xi \omega_n t \geq \ln 50 = 3.91$$

Despejando  $t$ , y "redondeando" el término decimal, tenemos que

$$ts \geq \frac{4}{\omega_n \tau} = 4 \tau \quad (2.2.8)$$

donde:  $\tau = \frac{1}{\omega_n \xi}$

Que es lo que se quería demostrar.

Podemos obtener además  $M_{tp}$  y  $T_p$  en función de  $\tau$ , que son valores por medio de los cuales obtendremos  $\xi$  y  $\omega_n$ .

Derivando la Ec. (2.2.3) tenemos la respuesta a impulso, que estaría dada por la siguiente ecuación:

$$c'(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\xi \omega_n t} \text{sen } \omega_n \beta t \quad (2.2.9)$$

Cuando  $c'(t) = 0$ , tendremos el valor máximo de donde obtendremos  $T_p$ . Por tanto:

$$\omega_n \beta t = \pi$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \beta} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.2.10)$$

La respuesta pico será

$$M_{tp} = 1 + e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.2.11)$$

La fig. (2.2.3) nos muestra gráficamente, lo que hemos expre-

sado en el desarrollo teórico último.

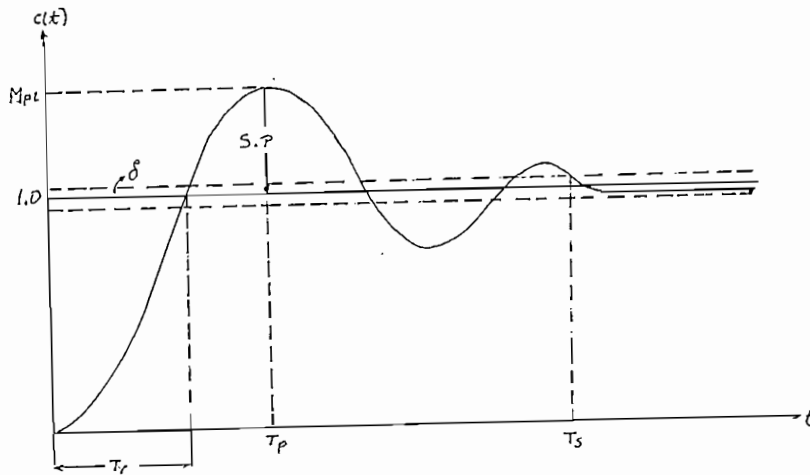


Fig. (2.2.3)

Podemos decir que el desarrollo de este método es en verdad híbrido, ya que por medio del desarrollo en el dominio del tiempo, se obtiene la función del sistema en el dominio de la frecuencia  $T(s)$ .

En resumen, el método de identificación de un sistema, cuando se conoce que puede aproximarse con un modelo de 2º orden y se dan las curvas de la fig. (2.2.2) sería:

- a) Aplicar una función paso
- b) Graficar la respuesta
- c) Asociar la respuesta con una de las curvas con lo que se obtiene  $\xi$ ,  $\omega_n$  y  $K$  y en consecuencia la función de transferencia del sistema.

### 2.2.1. Ejemplos de Aplicación

Se probará este método con dos ejemplos. Para probar que el método es válido, partiremos de funciones de transferencia conocidas. Por otro lado, indicaremos que de esta forma hemos podido utilizar la gran versatilidad que permite un computador análogo para la experimentación.

EJEMPLO 1. Utilizaremos el siguiente circuito para obtener su función de transferencia, y luego comprobarla por medio del computador análogo.

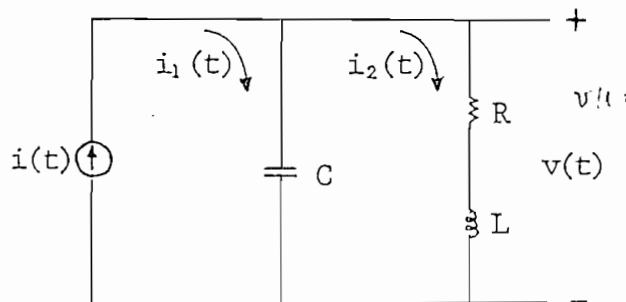


Fig. (2.2.4) Circuito que representa un sistema de 2º orden

Tenemos los siguientes valores:

$$R = 4 \Omega$$

$$L = 0.1 \text{ mH}$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$

La entrada en función de la salida está dada por:

$$i(t) = (j\omega G + \frac{1}{R + j\omega L}) r(t) \quad (2.2.12)$$

como  $r(t) = i_2 (R + j\omega L)$  (2.2.13)

entonces  $i(t) = (j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1 \quad i_2(t)$  (2.2.14)

Si hacemos que  $r(t) \equiv i(t)$  y  $C(t) \equiv i_2(t)$  y dividimos ambos miembros de la Ec. (2.2.13) por  $LC$ , entonces quedaría

$$\frac{1}{LC} r(t) = \ddot{C}(t) + \frac{R}{L} \dot{C}(t) + \frac{C(t)}{LC} \quad (2.2.15)$$

cuya función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} \quad (2.2.16)$$

Reemplazando los valores de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  en la Ec. (2.2.14), obtendríamos.

$$\frac{1}{10^{-10}} \cdot r(t) = \ddot{C}(t) + \frac{4}{0.1 \times 10^{-3}} \dot{C}(t) + \frac{C(t)}{0.1 \times 10^{-9}} \quad (2.2.17)$$

de donde

$$\ddot{C}(t) + 4 \times 10^4 \dot{C}(t) + 10^{10} C(t) = 10^{10} r(t) \quad (2.2.18)$$

Que sería la ecuación para implementar en el computador analógico. En este caso, por resultar los coeficientes muy altos, es ne-

cesario hacer un escalamiento en tiempo, cuyo proceso es el siguiente:

haciendo  $t = n \tau$  ;  $n = \text{constante}$

Se tiene que  $C(t) = C(n\tau) = \mu(\tau)$  (2.2.19)

además  $d\tau = \frac{1}{n} dt$

Por lo tanto  $\dot{C}(t) = \frac{dC(n\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{n} \dot{\mu}(\tau)$

$$\ddot{C}(t) = \frac{1}{n^2} \ddot{\mu}(\tau) \quad (2.2.20)$$

Entonces la Ec. (2.2.18) se transforma en:

$$\ddot{\mu}(t) + 4 \times 10^4 n \dot{\mu}(t) + 10^{10} n^2 \mu(t) = 10^{10} n^2 g(t) \quad (2.2.21)$$

Si escogemos el valor del factor de escala como  $n = 10^{-5}$ , la Ec. anterior daría como resultado:

$$\ddot{\mu}(t) + 0.4 \dot{\mu}(t) + \mu(t) = g(t) \quad (2.2.22)$$

La función de transferencia, sería entonces:

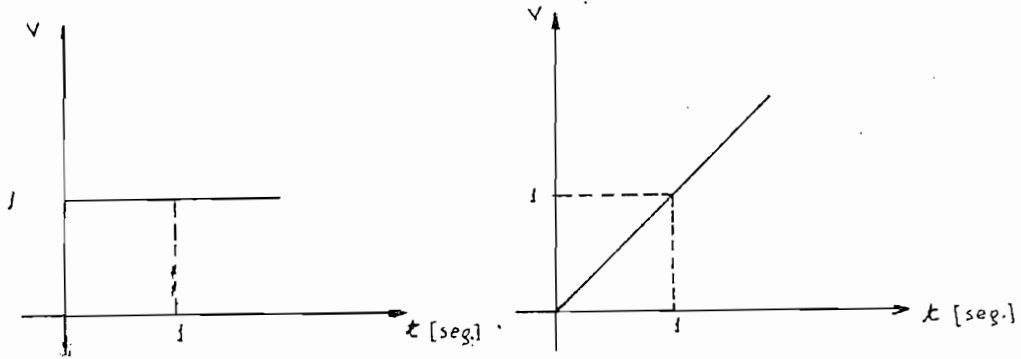
$$\frac{\mu(s)}{g(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (2.2.23)$$

Despejando  $\ddot{\mu}(t)$  de la Ecuación (2.2.22):





(1 V), para la escala horizontal cada voltio representará 1 segundo, como se deduce del siguiente gráfico:



Transformando de voltios a segundos, resulta:

$$2.5 \text{ V/cm} \times 1 \frac{\text{seg}}{\text{V}} = 2.5 \text{ seg/cm.}$$

Asociando la respuesta obtenida en la fig. (2.2.6) a una de las curvas, obtenemos los siguientes datos:

Sobreimpulso:  $M_{pt} = 1.526$

$$\text{De la Ec. (2.2.11): } M_{pt} = 1 + e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.526$$

$$\text{Despejando } \xi : e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.526$$

$$e^{\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.9$$

$$\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \ln 1.9 = 0.642$$

$$(\xi \pi)^2 = (0.642)^2 (1 - \xi^2)$$

$$\xi^2 (\pi^2 + 0.642^2) = 0.642^2$$

De donde:  $\xi^2 = 0.04014$

y  $\xi = 0.20035$

Para el valor de  $\omega_n$ , necesitamos  $T_p$  que tomando del gráfico resulta

$$T_p = 129 \text{ cm} \times 2,5 \text{ seg/cm} = 3.22 \text{ seg.}$$

De la Ec. 2.2.11):  $\omega_n = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \xi^2}}$

Reemplazando los valores de  $T_p$  y  $\xi$ :

$$\omega_n = \frac{\pi}{3.22 \sqrt{1 - 0.04014}} = 0.996 \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$$

Obtenidos los valores de  $\omega_n$  y  $\xi$  reemplazamos en la Ec. (2.2.1) donde:

$$\frac{\mu(s)}{g(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

y 
$$\frac{\mu(s)}{g(s)} = \frac{0.99}{s^2 + 0.399 s + 0.99}$$

Si comparamos esta ecuación con la Ec. (2.2.23) vemos que la diferencia es mínima, es decir la función de transferencia es similar, con lo cual queda identificado el sistema.

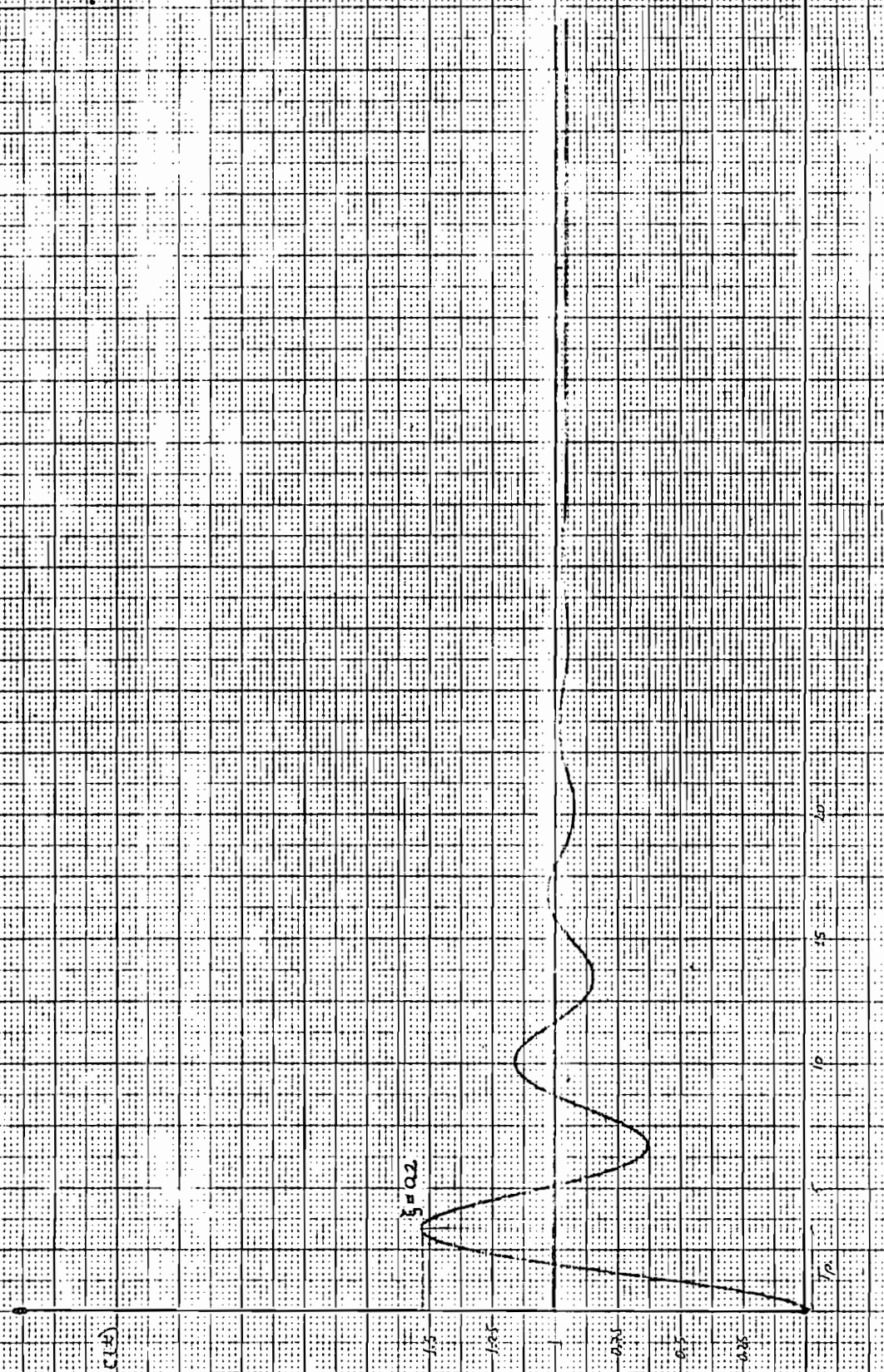


Fig. (2.2.6) Respuesta del sistema de la fig. (2.9) a una entrada escalón unitaria.

Ejemplo 2

Para este ejemplo nos impondremos un sistema de tercer orden el cual lo aproximaremos a uno de segundo, para luego simular en computador analógico, y obtener de esta manera la respuesta del sistema a una función paso.

La función del sistema es:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+3)} \quad (2.2.25)$$

Para este sistema nos imponemos además un valor  $\xi = 0.2$ , para encontrar el valor de  $k$  y las características del sistema. El desarrollo lo haremos por el método del lugar de las raíces.

El gráfico del lugar de las raíces que lo obtenemos del sistema dado, nos presenta la fig. (2.2.7), y comenzaremos encontrando los cortes con el eje imaginario.

Para esto tenemos la condición de que:

$$\left[ G(s) + 1 \right] = 0 \quad | s = j\omega \quad (2.2.26)$$

$$\text{Por tanto: } s^3 + 4s^2 + 3s + k = 0 \quad | s = j\omega \quad (2.2.27)$$

reemplazando tenemos:

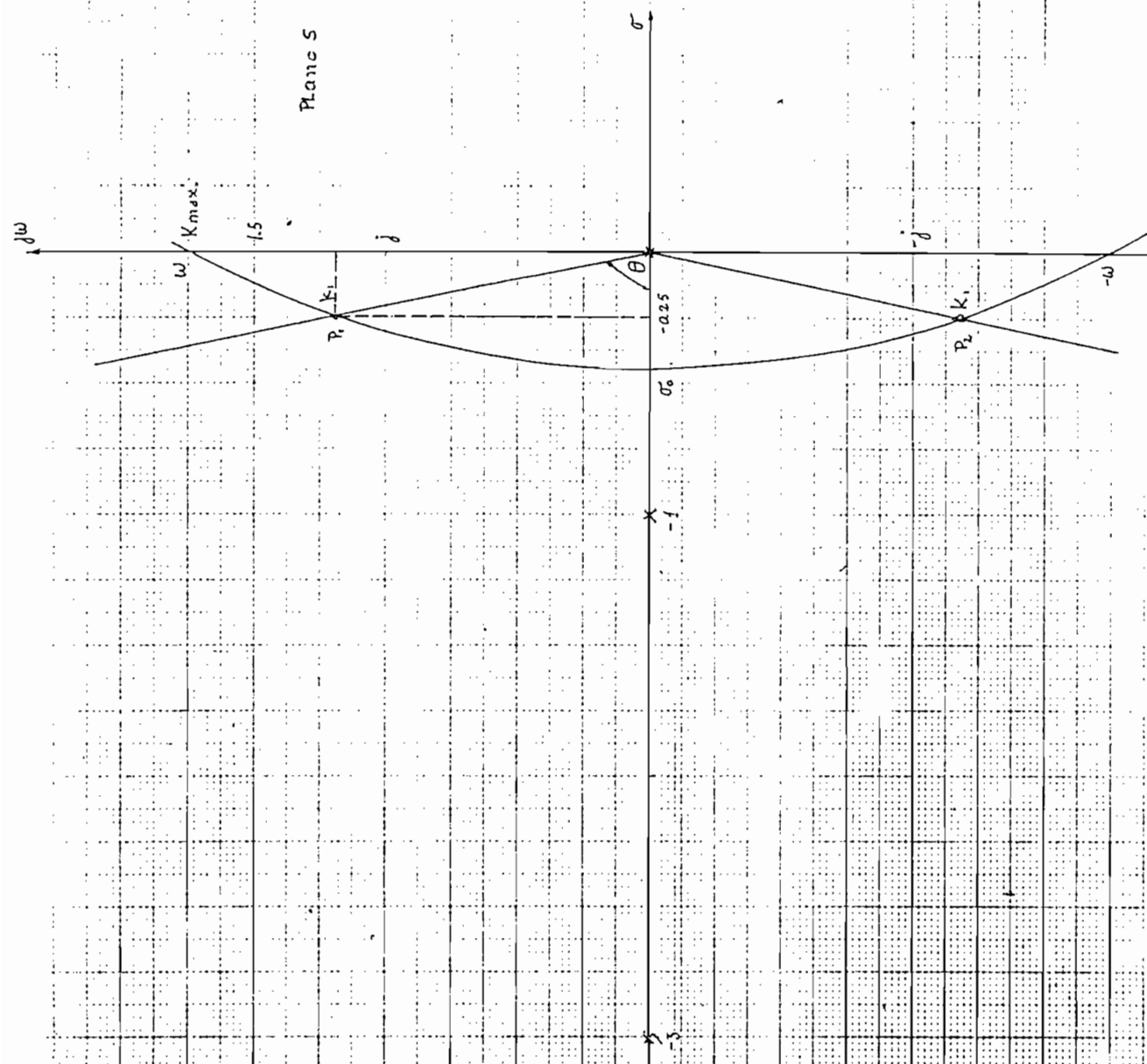


Fig. (2.2.7) Lugar de las raíces para la Ec. (2.2.25)

$$-j\omega^3 - 4\omega^2 + 3j\omega + k = 0 \quad (2.2.28)$$

Igualando la parte imaginaria a cero, obtenemos  $\omega$ , y de la misma forma con la parte real obtendremos  $k$  máximo:

$$-j\omega^3 + 3j\omega = 0$$

de donde:  $\omega^2 = 3$

y  $\omega = \pm 1.732$

Obtenemos  $k_{\text{máx.}}$ :

$$k_{\text{máx}} = 4\omega^2$$

$$k_{\text{máx}} = 12$$

Ahora el corte con el eje real ( $\sigma_0$ ), lo encontramos por medio de la siguiente condición

$$\sum \frac{1}{\sigma_0 - P_i} = \sum \frac{1}{\sigma_0 - z_i} \quad (2.2.29)$$

donde:  $P_i$  son los polos de  $G(s)$  y  $z_i$  los ceros.

En este caso como no tenemos ceros, la ecuación anterior quedaría:

$$\sum \frac{1}{\sigma_0 - P_i} = 0 \quad (2.2.30)$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0 + 1} + \frac{1}{\sigma_0 + 3} = 0 \quad (2.2.31)$$

$$(\sigma_0 + 1)(\sigma_0 + 3) + \sigma_0(\sigma_0 + 3) + \sigma_0(\sigma_0 + 1) = 0$$

$$\sigma_0^2 + 4\sigma_0 + 3 + \sigma_0^2 + 3\sigma_0 + \sigma_0^2 + \sigma_0 = 0$$

$$3\sigma_0^2 + 8\sigma_0 + 3 = 0$$

$$\sigma_0^2 + \frac{8}{3}\sigma_0 + 1 = 0 \quad (2.2.32)$$

de donde:  $\sigma_0 = \pm 0.45$  (2.2.33)

Con los valores de  $\pm \omega$  y  $\sigma_0$ , tenemos el gráfico del lugar de las raíces del sistema.

Con el valor de  $\xi$ , encontramos el ángulo  $\theta$  de la recta que cortará en la curva, con lo cual obtendremos  $P_1$  y  $P_2$ , como se indica en la fig. (2.2.7).

$$\cos^{-1} 0.2 = \theta$$

de donde  $\theta = 78.46$

Por tanto obtenemos:

$$P_1 = - 0.25 + 1.19 j \quad (2.2.34)$$

$$P_2 = -0.25 - 1.19 j \quad (2.2.35)$$

El valor de k en  $P_1$  ó  $P_2$ , lo obtenemos aplicando la condición de módulo:

$$|G(s)|_{s = P_1} = 1$$

Por tanto:

$$\left| \frac{k}{(-0.25 + 1.19j)(-0.25 + 1.19j + 1)(-0.25 + 1.19j + 3)} \right| = 1 \quad (2.2.36)$$

Despejando tenemos:

$$k = |(-0.25+1.19j)(+0.75+1.19j)(-2.75+1.19j)|$$

$$k = |(-1.6 + 0.595j) (-2.75 + 1.19j)|$$

$$k = |3.692 - 3.54j|$$

$$k = 5.115 \quad (2.2.37)$$

Conocidos los valores de k,  $P_1$  y  $P_2$ , podemos determinar la tercera raíz ( $P_3$ ). Como lo que se trata es de eliminar esta raíz, la condición para que esto suceda es que su parte real sea mayor por lo me-



nos cinco veces a la parte real de las otras raíces, en módulo.

La parte real de  $P_3$  viene a ser el valor del tercer polo de la función  $G(s)$ ; o sea  $\text{Re}(P_3) = 3$ . Esto se puede comprobar fácilmente haciendo:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^3 + 4s^2 + 3s + k} = \frac{k}{(s-P_1)(s-P_2)(s-P_3)} \quad (2.2.38)$$

de donde:

$$(s-P_3) = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + k}{(s-P_1)(s-P_2)} \quad (2.2.39)$$

De lo anterior tenemos que:

$$|\text{Re}(P_3)| = |3| \gg |0.46|$$

Por lo tanto, la tercera raíz podemos eliminar, obteniendo ahora un sistema de 2º orden, Así:

$$T(s) = \frac{k}{(s-P_1)(s-P_2)} \quad (2.2.40)$$

$$T(s) = \frac{5.115}{(s + 0.25 - 1.19j)(s - 0.25 + 1.19j)}$$

$$T(s) = \frac{c(s)}{R(s)} = \frac{5.115}{s^2 + 0.55 + 1.4786} \quad (2.2.41)$$

Esta es la nueva función del sistema. Si comparamos esta ecuación con la Ec. (2.2.4), vemos que  $\omega_n^2$  está multiplicada por una constante  $k'$ , que es la ganancia del sistema en estado estable. Como:

$$k = \omega^2 k' = 5.115$$

y  $\omega^2 = 1.4786$

Entonces:  $k' = 3.46$  (2.2.42)

Para uso del computador analógico, seguiremos el proceso del ejemplo 1. De la ec. (2.2.41) obtenemos:

$$\ddot{c}(t) + 0.5 \dot{c}(t) + 1.4786 c(t) = 5.115 r(t) \quad (2.2.43)$$

de donde:  $\ddot{c}(t) = 5.115 r(t) - 0.5 \dot{c}(t) - 1.4786 c(t)$  (2.2.44)

El diagrama de bloques para implementar en el computador analógico de esta ecuación lo tenemos en la fig. (2.2.8).

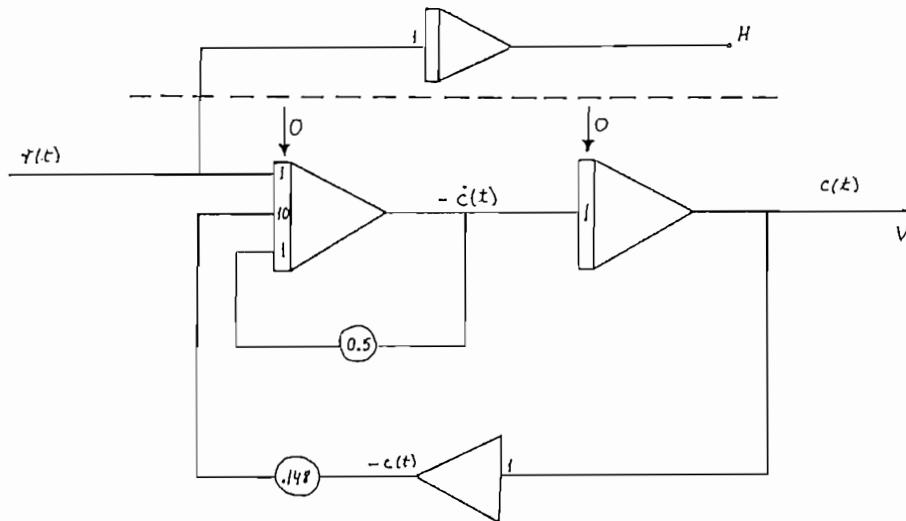


Fig. (2.2.8) Diagrama de simulación de la Ec. (2.2.44)

De la fig. (2.2.9), obtenida a partir de este diagrama de simulación, tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{k}{k'} = \frac{5.115}{3.46} = 1.478 \quad (2.2.45)$$

Del valor de  $k'$  obtenemos el sobreimpulso que es:

$$M_{pt}(k') = 2.25 \quad (2.2.46)$$

El sobreimpulso del sistema se lo obtiene dividiendo el valor de la Ec. (2.2.46), para el factor de ganancia obtenida en la Ec. (2.2.45).

Entonces:

$$M_{pt} = \frac{2.25}{1.477} = 1.523 \quad (2.2.47)$$

Siguiendo el desarrollo del ejemplo 1, obtenemos  $\xi$ .

$$\text{Como: } M_{pt} = 1 + e^{-\pi \xi / \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.523$$

de donde:  $\xi = 0.202$

Para el valor de  $\omega_n$ , obtenemos primero el valor de  $T_p$  de la fig. (2.2.9). Como la función escalón vale 5.115 V, entonces la relación que tenemos es la siguiente:

$$T_p = 2.495 \text{ cm} \times \frac{5.115}{5 \text{ cm/seg.}} = 2.55 \text{ seg.}$$

Por tanto:

$$\omega_n = \frac{\pi}{2.55 \text{ seg} \cdot \sqrt{1 - 0.04}} = 1.2574 \left( \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)$$

Al reemplazar los valores de  $\omega_n$ ,  $\xi$  y  $k'$  en la Ec. (2.2.4) obtenemos la función del sistema que es:

$$T(s) = 3.46 \times \frac{1.58}{s^2 + 0.508 s + 1.58}$$

$$T(s) = \frac{5.47}{s^2 + 0.5 s + 1.58} \quad (2.2.48)$$

Comparando esta ecuación con la Ec. (2.2.41), vemos que el error es mínimo, por tanto el método es válido para estos sistemas.

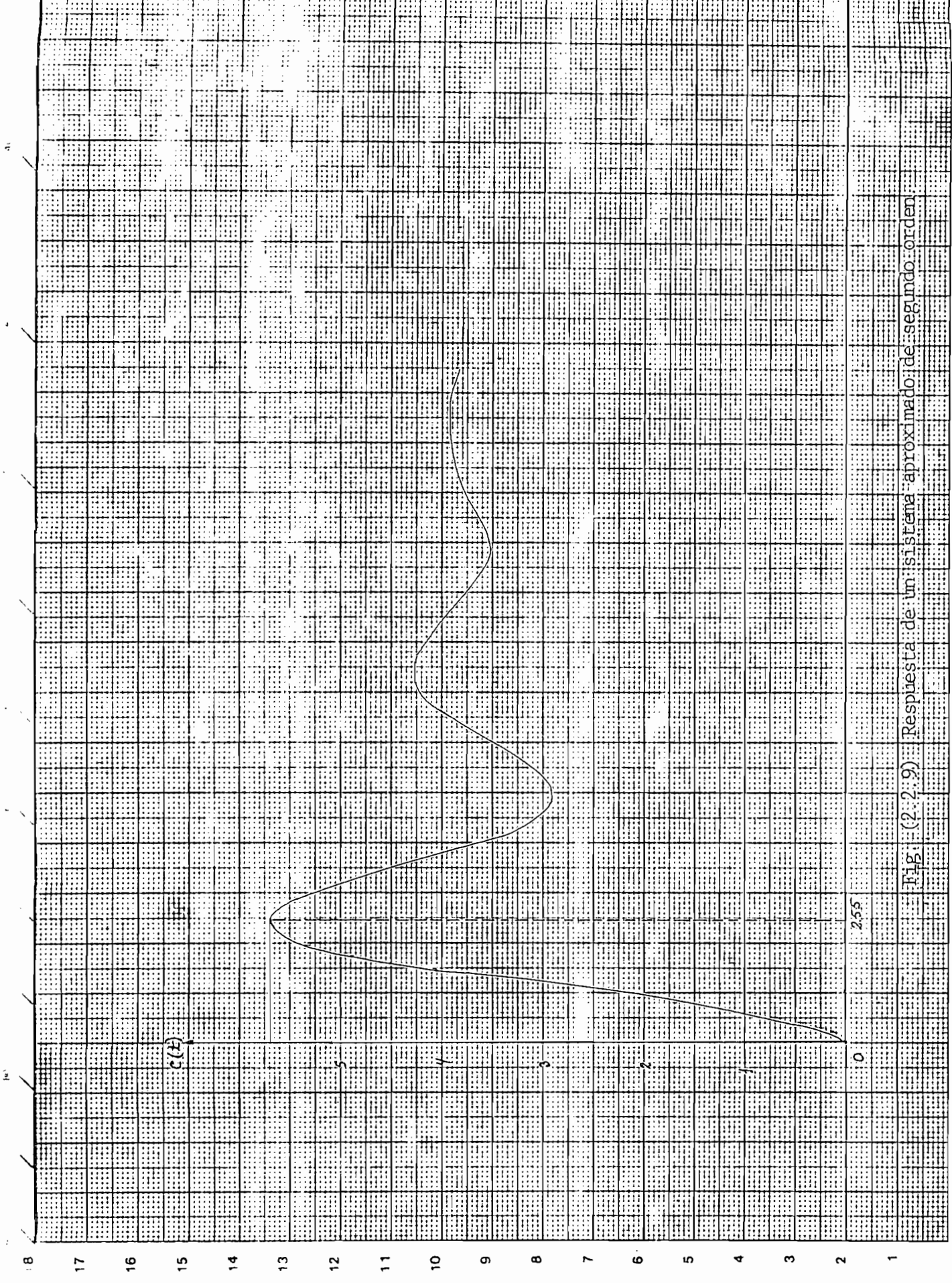


Fig. (2.2.9) Respuesta de un sistema aproximado de segundo orden.

## 2.3. POR DETERMINACION DE LAS CONSTANTES DE TIEMPO

Para demostrar este método aplicable a ciertos sistemas con un modelo aproximado de 2º orden, utilizaremos un sistema para control de temperatura, probándose primero que es un sistema del orden deseado, para pasar luego a explicar el método. El sistema a utilizarse es un horno industrial.

### 2.3.1. Justificación de un modelo de 2º orden para un horno industrial.

Se comenzará describiendo en primer lugar un servomecanismo hidráulico, representado en la fig. (2.3.1). En esta figura tenemos el varillaje de balancín que conecta la posición de entrada  $r$ , la posición de válvula  $e$  y la posición de pistón  $c$ . Además, se muestra la posición de centros del balancín, cuando el servomotor está en su posición de referencia y las variaciones de  $r$ ,  $e$  y  $c$ , cuando  $e = 0$ , la válvula está en su posición balanceada y no hay flujo hacia el pistón ni desde él.

El funcionamiento puede ser visualizado del siguiente modo: Cuando varía  $r$  respecto a la posición de referencia, el balancín pivota primero alrededor de  $c$ . A causa del correspondiente movimiento de  $e$ , la válvula deja pasar fluido al cilindro, de modo que el pistón se desplaza en el sentido conveniente para anular el error  $e$ .

Para funcionamiento estacionario ( $e = 0$ ), valdría la siguiente relación entre la entrada  $r$  y la salida  $e$ :

$$c = \frac{b}{a} r \quad (2.3.1)$$

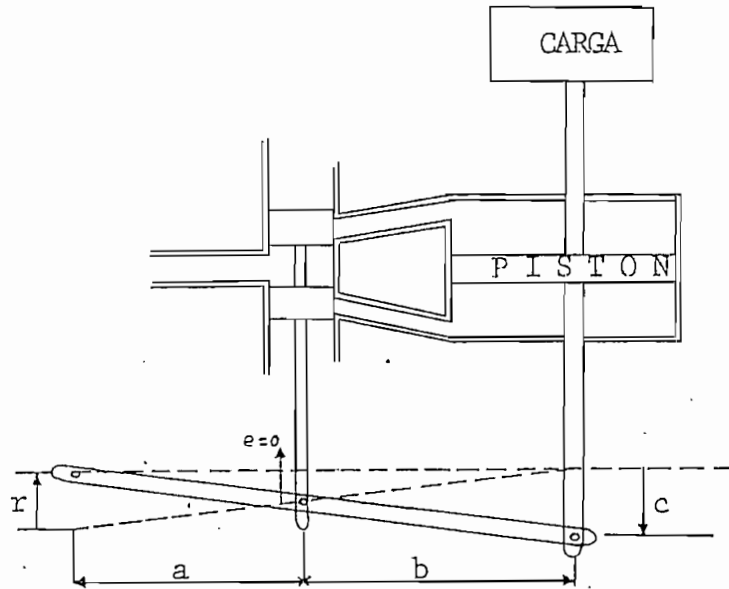


Fig. (2.3.1). Servomotor hidráulico.

En la fig. (2.3.2), el balancín es un dispositivo sumador. El valor de  $e$  es una función de las variables independientes  $r$  y  $c$ . Es decir:

$$e = f(r, c) \quad (2.3.2)$$

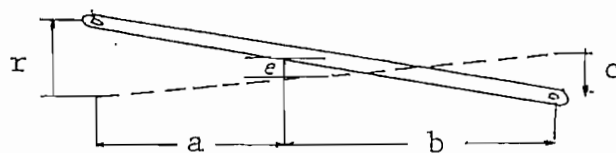


Fig. (2.3.2). Varillaje de balancín.

De acuerdo a la expresión general para obtener una aproximación lineal de una función alineal, que está dada por:

$$c = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n \quad (2.3.3)$$

donde:  $a_n = \frac{\partial c}{\partial r_n}$

podríamos obtener una evaluación de e, donde:

$$e = \frac{\partial e}{\partial r} r + \frac{\partial e}{\partial c} c \quad (2.3.4)$$

El valor de  $\partial e / \partial r$  obtenemos encontrando la relación que existe entre la variación de e cuando varía r, permaneciendo fijos los demás parámetros (en este caso c). De la fig. (2.3.2) tenemos que:

$$\frac{\Delta e}{b} = \frac{\Delta r}{a + b} \quad (2.3.5)$$

de donde

$$\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{b}{a + b} \quad (2.3.6)$$

De modo similar cuando r es fijo, se tiene que:

$$\frac{\partial e}{\partial c} = - \frac{a}{a + b}$$

El signo menos aparece porque e disminuye cuando c aumenta. Estos resultados aplicados a la Ec. (2.3.4) darían:



$$e = \frac{b}{a+b} r - \frac{a}{a+b} c \quad (2.3.7)$$

Si hacemos  $a = b$ , entonces:

$$e = \frac{r - c}{2} \quad (2.3.8)$$

que representado en diagramas de bloque sería:

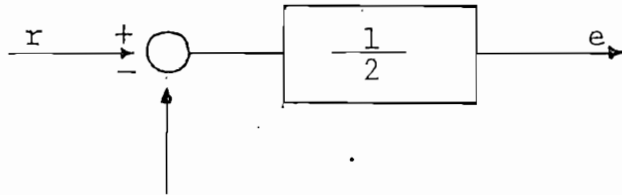


Fig. (2.3.3). Diagrama de bloque de balancín

#### COMBINACION VALVULA-PISTON

En los sistemas de control, en general, se procura introducir integradores con el fin de reconocer errores que muchas veces pueden ser imperceptibles. Para este desarrollo utilizaremos un integrador mecánico del tipo llamado de bolillas y disco, como se muestra en la fig. (2.3.4).

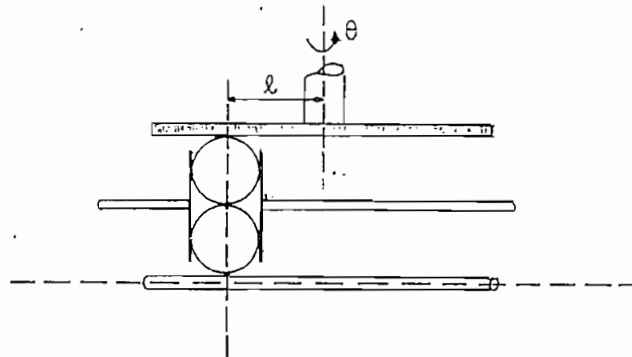


Fig. (2.3.4). Integrador de bolillas y disco.

En esta figura, la entrada  $\theta$  produce una rotación diferencial  $d\theta$ , y un movimiento lineal  $\ell d\theta$  que transmite por medio de las bolillas al eje de radio  $R$  y posición angular  $\phi$ .

La ecuación diferencial del dispositivo es:

$$Rd\phi = \ell d\theta \quad (2.3.9)$$

de donde:  $\phi = \frac{1}{R} \int \ell d\theta$  (2.3.10)

Si  $\ell$  varía en proporción al error ( $\ell = K_1 e$ ) y el eje de entrada está impulsado con velocidad constante  $\omega = d\theta/dt$ , de donde  $d\theta = \omega dt$ , entonces se tiene que la Ec. (2.3.10) se transforma en

$$\phi = \frac{1}{R} \int K_1 e \omega dt = \frac{K_1 \omega}{R} \int e dt \quad (2.3.11)$$

La fig. (2.3.5) representa una combinación hidráulica válvula-pistón, que constituye también un dispositivo integrador, donde  $r$  representa la posición de la válvula y  $c$  la del pistón. Las presiones que actúan sobre la válvula son equilibradas, de modo que se requiere de poca fuerza para moverla.

Si la caída de presión en la válvula es constante, entonces el caudal de fluido que llega al cilindro es proporcional al área del orificio formado por la válvula, la que a su vez es proporcional al desplazamiento de la válvula. Luego:

$$q = k_1 r \quad (2.3.12)$$

donde  $q$  es el caudal que llega al cilindro, que a su vez es igual a la velocidad lineal del pistón  $p.c$ , multiplicada por el área  $A$ , de éste:

$$q = A_1 p . c \quad (2.3.13)$$

Igualando las ecuaciones anteriores, y despejando  $c$ , se tiene:

$$c = \frac{k_1}{A_1 p} r \quad (2.3.14)$$

Que es la expresión que relaciona la entrada y la salida de la combinación válvula-pistón.

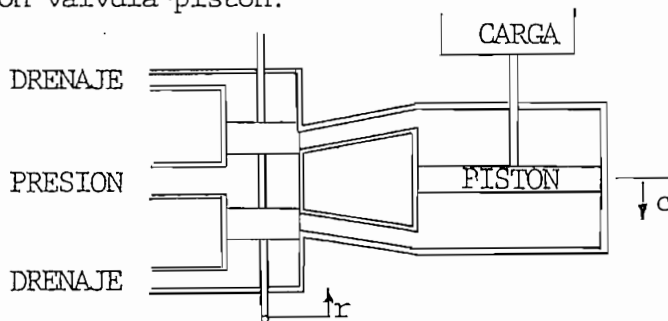


Fig. (2.3.5) Combinación válvula-pistón

Reemplazando  $e$  por  $r$  en la Ec. (2.3.14), tenemos la Ecuación:

$$c = \frac{k_1}{A_1 p} e \quad (2.3.15)$$

cuyo diagrama de bloques es el siguiente:

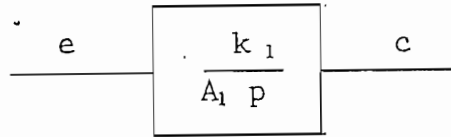


Fig. (2.3.6) Diagrama de bloques del conjunto válvula-pistón

Combinando los diagramas de las Figs. (2.3.3) y (2.3.6), obtenemos el diagrama de bloques completo del servomotor, como lo muestra la fig. (2.3.7).

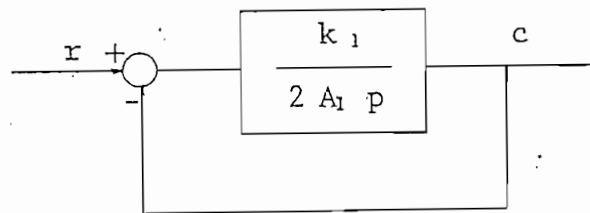


Fig. (2.3.7) Diagrama de bloques del servomotor.

De este gráfico, obtenemos la relación final entre  $r$  y  $c$ , de donde:

$$(r - c) \frac{k_1}{2 A_1 p} = c$$

$$\left(1 + \frac{2 A_1}{k_1} p\right) c = r$$

$$\text{luego: } r = c(1 + \tau_1 p) \quad (2.3.16)$$

$$\text{donde: } \tau_1 = \frac{2 A_1}{k_1}$$

Para el control de temperatura, utilizaremos un sistema repre

sentado en la fig. (2.3.8) que es un horno industrial, del cual obtendremos su función de transferencia.

En esta figura,  $T_o$  es la temperatura de salida de un recinto;  $T_{in}$  es la temperatura deseada. Cuando el índice selector de temperatura está fijo en una posición determinada  $T_{in}$  y la temperatura del horno  $T_o$  baja, el fuelle se contrae. Luego, al disminuir  $T_o$  disminuye también la longitud del fuelle, con lo que aumenta a su vez  $r$ . Al aumentar  $r$ , el pistón se desplaza en sentido conveniente para hacer pasar más calor al horno. Con esto, la temperatura  $T_o$  tiende a volver a su valor original.

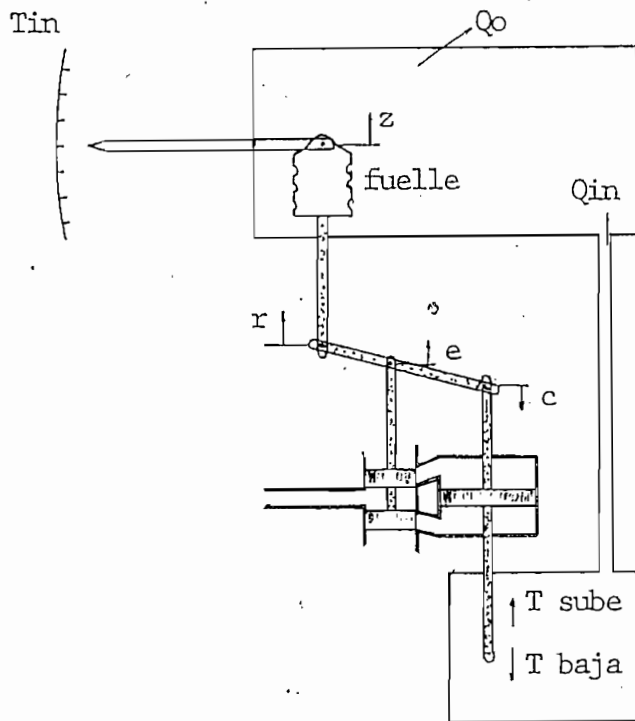


Fig. (2.3.8) Sistema de control de temperatura.

El funcionamiento del sistema para obtener el diagrama de blo-

ques, se desarrolla en la vecindad de cualquier temperatura  $T_i$ , y se obtiene partiendo de la entrada hacia la salida. Podemos obtener por lo tanto las siguientes relaciones:

La variación de  $z$  depende solo de  $T_{in}$  (variación respecto a la posición de referencia  $T_{in} = T_i$ ).

$$z = F(T_{in})$$

así

$$z = \frac{\partial Z}{\partial T_{in}} \quad t_{in} = K_2 \quad t_{in} \quad (2.3.17)$$

donde:  $k_2 = \frac{\partial z}{\partial T_{in}}$  y  $t_{in} = T_{in} - T_i$

$t_{in}$  Es la variación de la temperatura deseada.

Además, la relación entre la longitud del fuelle y  $T_o$  es

$$l = \frac{\partial L}{\partial T_o} \quad t_o = k_3 \quad t_o \quad (2.3.18)$$

donde  $l = L - L_i$  es la variación de longitud del fuelle, siendo  $L_i$  la longitud a la temperatura de referencia.

$t_o = T_o - T_i$ , variación de la temperatura del horno.

$k_3 = \frac{\partial L}{\partial T_o}$ , Es la variación de la longitud del fuelle por unidad de variación de la temperatura del horno

De la fig. (2.3.8), se puede concluir que  $l = z - r$ , de donde  $r = z - l$  (2.3.19)  $\neq$

El diagrama de bloques de las Ecs. (2.3.17) y (2.3.18) viene a ser el diagrama del comparador de este control de temperatura que se muestra en la fig. (2.3.8').

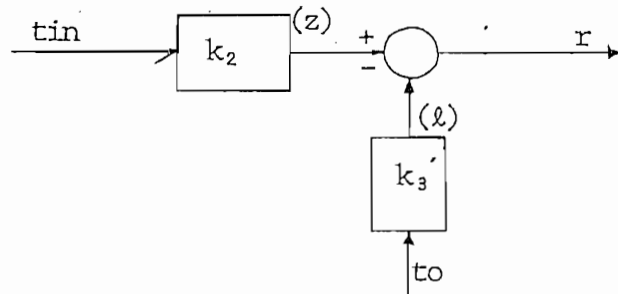


Fig. (2.3.8). Diagrama de bloques del comparador.

Ahora tenemos que  $Q_{in}$  es el flujo de calor hacia el horno, y es función de la posición del pistón  $c$ , es decir  $Q_{in} = F(c)$ , por tanto:

$$q_{in} = \frac{\partial Q_{in}}{\partial c} \quad c = k_4 \quad (2.3.20) \quad \zeta$$

donde  $k_4 = \frac{\partial Q_{in}}{\partial c}$

El calor total acumulado está dado por:

$$\int (q_{in} - q_o) dt = k_5 \omega t_o \quad (2.3.21) \quad \zeta$$

donde:  $k_5$  es el calor específico medio de la sustancia contenida en el horno

$\omega$  es el peso total, y

$t_o = T_o - T_i$  es el cambio de temperatura correspondiente.

$q_{in} - q_o$  es el flujo neto de calor hacia el horno.

$Q_o$  es el flujo del calor perdido, y es función de la diferencia de temperatura  $T_o - T_a$

$$Q_o = F (T_o - T_a) \quad (2.3.22) \quad \zeta$$

Podemos expresar por tanto

$$q_o = \frac{\partial Q_o}{\partial (T_o - T_a)} (t_o - t_a) = k_6 (t_o - t_a) \quad (2.3.23) \quad \gamma$$

donde  $k_6 = \frac{\partial Q_o}{\partial (t_o - T_a)}$

$T_a$  es la temperatura ambiente.

De las Ecs. (2.3.21) y (2.3.23), obtenemos:

$$t_o = \frac{q_{in} - k_6 t_o + k_6 t_a}{k_5 \omega p} \quad (2.3.24) \quad \delta$$

En la fig. (2.3.9), se muestra el diagrama de bloques de las Ecs. (2.3.20) y (2.3.24).

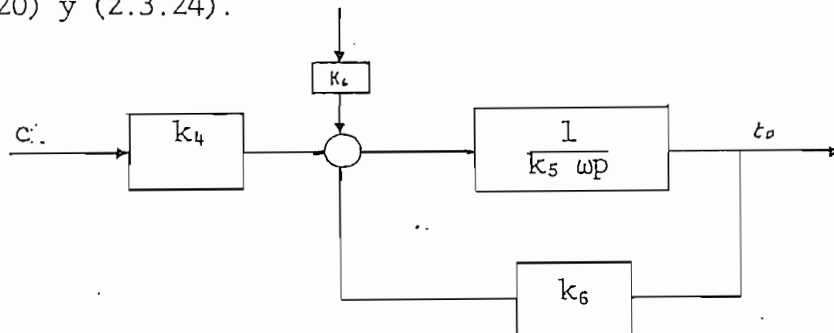


Fig. (2.3.9). Diagrama de bloques para la fuente de calor y horno.



Acoplando los diagramas especificados, obtenemos el diagrama completo del sistema de control de temperatura, que se representa en la fig. (2.3.10). El diagrama lo obtenemos en función de  $s$ .

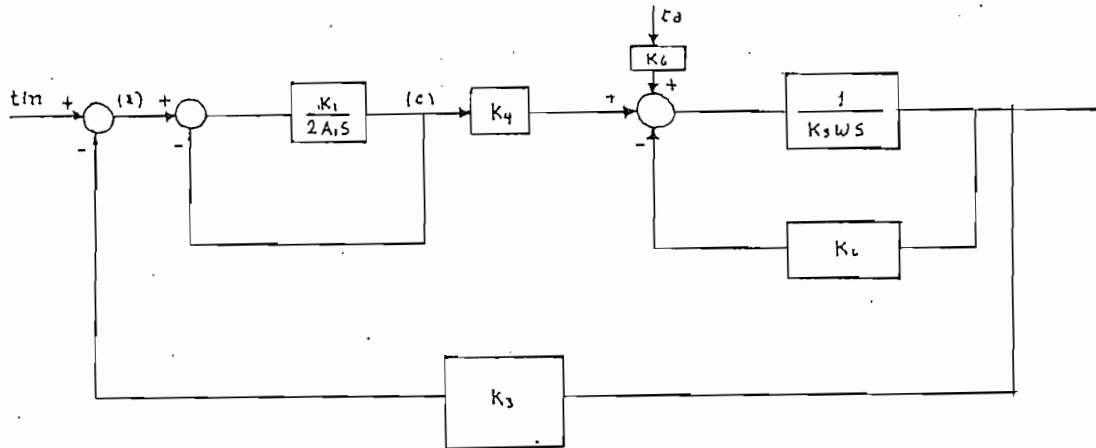


Fig. (2.3.10) Diagrama completo del sistema de control de temperatura.

Por medio de un reordenamiento de la fig. (2.3.10), aplicando algebra de los diagramas de bloques, se puede llegar a la representación general de un sistema de control como indica la fig. (2.3.11). El reordenamiento no afecta en ningún caso la relación final entre los e lementos de entrada y salida.

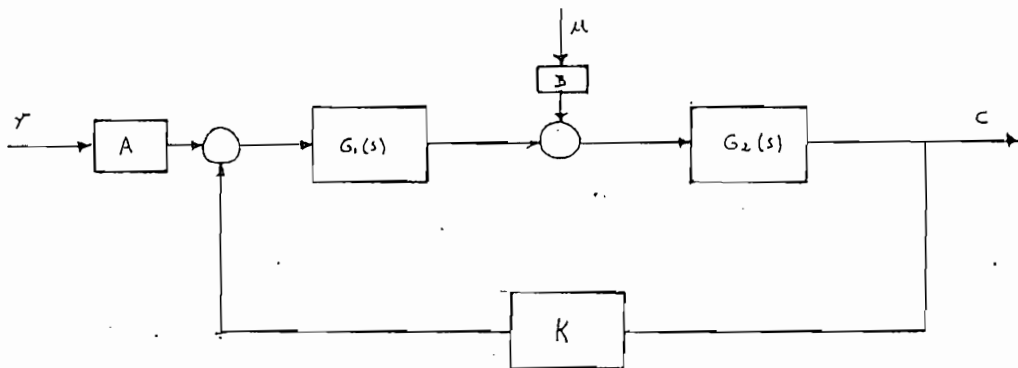


Fig. (2.3.11) Representación general de un sistema de control.

Aplicando la relación de lazo cerrado, para eliminar los lazos de realimentación secundaria de la fig. (2.3.10), se obtendrían - las siguientes expresiones para  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$

$$G_1(s) = \frac{k_1/2 A_1 s}{1 + k_1/2 A_1 s} \cdot k_4 = \frac{k_4}{1 + 2 A_1 s/k_1}$$

Por tanto

$$G_1(s) = \frac{c_1}{1 + \tau_1 s} \quad (2.3.25) \quad 9$$

$$\text{Además } G_2(s) = \frac{1/k_5 \omega s}{1 + k_6/k_5 \omega s} = \frac{1/k_6}{1 + k_5 \omega s/k_6}$$

$$\text{y } G_2(s) = \frac{c_2}{1 + \tau_2 s} \quad (2.3.26) \quad 10$$

$$\text{donde } \tau_1 = \frac{2A_1}{k_1} \quad c_1 = k_4$$

$$\tau_2 = \frac{k_5 \omega}{k_6} \quad c_2 = 1/k_6$$

$\tau_1$  y  $\tau_2$  son las constantes de tiempo deseadas.

Para el presente trabajo, vamos a considerar que el sistema es ideal, y no tiene control de temperatura. La fig. (2.3.12), representa este sistema en el cual se ha recurrido al álgebra de diagramas de bloques para eliminar los lazos de realimentación secundarios, presentes en la fig. (2.3.10).

$$\log k_2 + \log \frac{0.2}{1.0526} = \log k_2 - \frac{tx}{\tau_2} \log e$$

Por tanto:  $\log \frac{0.2}{1.0526} = -\frac{tx}{\tau_2} \log e$

En general:  $\log \frac{k}{k_2} = -\frac{tx}{\tau_2} \log e$  (2.3.43) 27

Donde k es el valor escogido para el tiempo tx.

Reemplazando valores:

$$\tau_2 = \frac{-166}{\log 0.19} \cdot \log e$$

$$\tau_2 = 99.96 \text{ seg.}$$

El valor escogido para  $\tau_2$  era 100, por tanto el error que aparece en el resultado puede deberse a las aproximaciones hechas en las tablas (2.1) y (2.2).

d) Encontremos los valores para  $k_1$  y  $\tau_1$ .

De la ecuacion (2.3.37), tenemos que:

$$k_2 e^{-t/\tau_2} - (1 - c(t)) = k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (2.3.44) \quad 28$$

La tabla (2.3) nos da los resultados para  $k_1 e^{-t/\tau_1}$ . De la tabla (2.2) y (2.3) obtenemos la diferencia de la Ec. (2.3.44). Como los valores obtenidos son muy pequeños, hacemos solamente el desarro-

llo matemático, ya que el desarrollo gráfico se lo verá más claramente en el ejemplo práctico.

$t$	$k_1 e^{-t/\tau_1}$	
0	0.526	
5	0.01935	
10	0.007118	Tabla (2.3)

Similarmente al desarrollo anterior, encontramos la ecuación de la recta. Por ejemplo tomando valores para  $t = 0$  y  $tx = 10$ .

De la ec. (2.3.43)

$$\log \frac{0.007118}{0.0526} = - \frac{tx}{\tau_2} \log e$$

Como  $k_1 = 0.0526$ , entonces la Ec. anterior quedaría despejando  $\tau_1$  :

$$\tau_1 = - \frac{10}{\log 0.1353} \log e$$

$$\tau_1 = 5 \text{ seg.}$$

Vemos entonces que  $\tau_1$  coincide con el valor que habíamos escogido.

El sistema quedaría identificado reemplazando los valores encontrados anteriormente en la Ec. (2.3.37). Por tanto:

$$c(t) = 1 + 0.0526 e^{-t/5} - 1.0526 e^{-t/99.95} \text{ (}^\circ\text{C)} \quad (2.3.45) \quad 7^a$$

### 2.3.3. Ejemplo de identificación de un horno con modelo desconocido.

Dadas las dificultades para conseguir un horno industrial de las características estudiadas, hemos escogido para este ejemplo un horno disponible en la facultad de Ingeniería Química, con las siguientes propiedades: potencia aproximada de 600 w y temperatura teórica de 900°C.

La medición del horno dió la siguiente tabla de valores para  $c(t)$ , en los tiempos indicados. El gráfico se lo representa en la fig. (2.3.15).

t(minutos)	c(t) (°C)	900 - c(t) (°C)
0	0	900
5	300	600
13	500	400
20	600	300
30	700	200
53	800	100
80	860	40
100	870	30
140	878	22
170	883	17
240	890	10

Tabla (2.3)

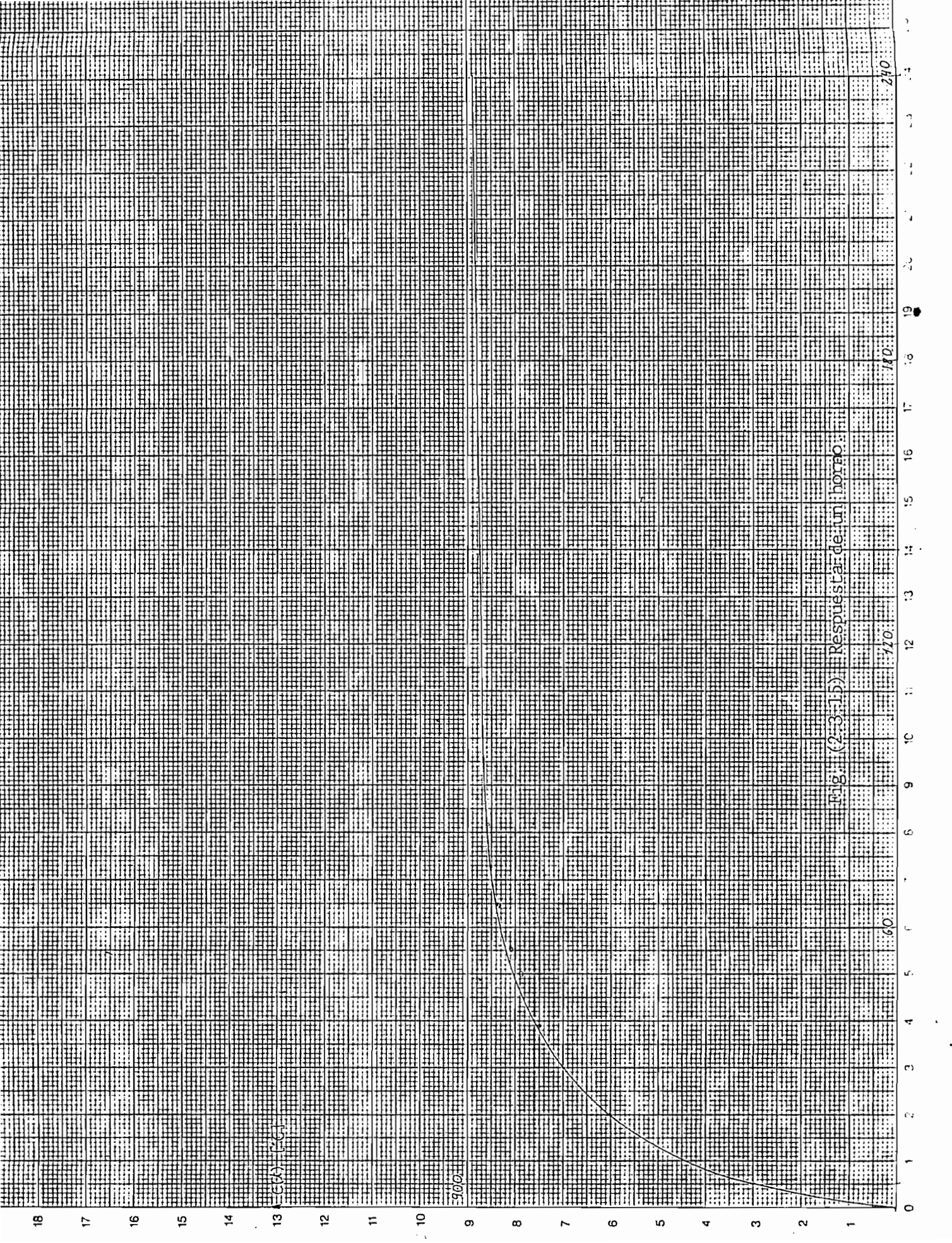


Fig. (2-3-1b) Respuesta de un horno

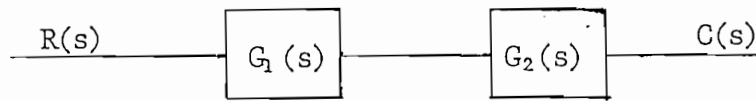


Fig. (2.3.12) Diagrama de bloques de un sistema con constantes de tiempo.

La función de transferencia del sistema estaría dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \\
 &= \frac{C_1}{s\tau_1 + 1} \times \frac{C_2}{s\tau_2 + 1} \\
 &= \frac{k}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (2.3.27) \quad //
 \end{aligned}$$

donde  $k = C_1 \cdot C_2$

Obtenemos C(s):

$$C(s) = \frac{R(s) k}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (2.3.28) \quad //$$

Para entrada escalón, tenemos que  $R(s) = 1/s$

$$\text{Por tanto: } C(s) = \frac{k}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (2.3.29) \quad //$$

Que es la ecuación por medio de la cual identificaremos un sistema, por el método de constantes de tiempo.

Transformando la Ec. (2.3.29) a una forma adecuada, quedaría:

$$C(s) = \frac{1/\tau_1 \tau_2}{s(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad (2.3.30) \quad 14$$

Aplicando la expansión de fracciones parciales a esta última ecuación para encontrar la respuesta en función del tiempo, tendremos el siguiente desarrollo:

$$\frac{1/\tau_1 \tau_2}{s(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/\tau_1} + \frac{C}{s+1/\tau_2} \quad (2.3.31) \quad 15$$

donde

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/\tau_1 \tau_2}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad (2.3.32) \quad 16$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1/\tau_1} \frac{1/\tau_1 \tau_2}{s (s + 1/\tau_2)} \quad (2.3.33) \quad 17$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1/\tau_2} \frac{1/\tau_1 \tau_2}{s (s + 1/\tau_1)} \quad (2.3.34) \quad 18$$

Por tanto:  $A = 1$

$$B = \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$C = \frac{-\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} ; \quad \tau_1 \ll \tau_2 \quad (2.3.35) \quad 19$$



Reemplazando los valores de A, B y C en la Ec. (2.3.31), tendremos:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{s+1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{s+1/\tau_2} \quad (2.3.36) \quad >0$$

Que en función del tiempo será:

$$c(t) = 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} \quad (2.3.37) \quad >1$$

En general entonces, la respuesta para un horno podría representarse de la siguiente manera:

$$c(t) = A + k_1 e^{-t/\tau_1} - k_2 e^{-t/\tau_2} \quad (2.3.38) \quad >>$$

### 2.3.2. Descripción del proceso de Identificación

Vamos a ilustrar el proceso partiendo del modelo obtenido en el numeral anterior, y asumiendo valores para los diferentes parámetros con la finalidad de obtener una explicación más clara.

- a) Curva de  $c(t)$ . - Si damos valores para  $\tau_1$  y  $\tau_2$  y obtenemos valores para la Ec. (2.3.37) (tabla 2.1), tendremos como resultado la curva de  $c(t)$ , representada en la fig. (2.3.13).

Si  $\tau_1 = 5$  y  $\tau_2 = 100$

Entonces:  $k_1 = 0.0526$  ;  $k_2 = 1.0526$

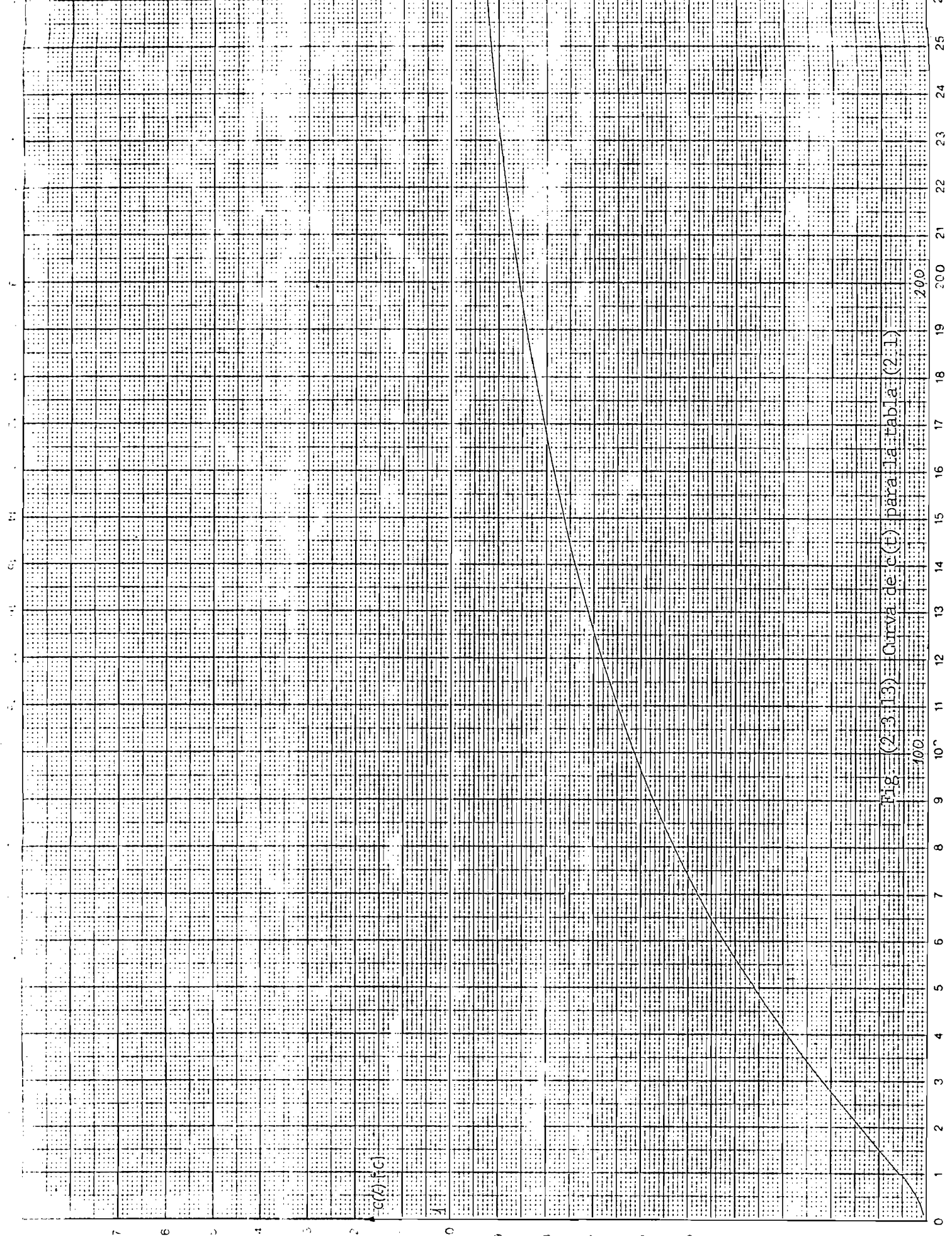


Fig. (2.3.13) Curva de  $c(t)$  para la tabla (2.1)

Los valores para  $c(t)$  serían los siguientes:

t (seg)	$k_1 e^{-t/\tau_1}$	$k_2 e^{-t/\tau_2}$	c(t) (°C)
0	0.0526	1.0526	0
5	0.0193	1.00126	0.018
10	0.007	1.0421	0.054
30	0.0013	0.779	0.22
50	0.000002	0.6384	0.36
60	--	0.58	0.42
70	--	0.523	0.477
80	--	0.473	0.527
100	--	0.387	0.613
140	--	0.26	0.74
180	--	0.174	0.826
200	--	0.142	0.857
280	--	0.064	0.936

Tabla (2.1).

b) Si a los valores de  $c(t)$  de la tabla anterior, restamos de 1, obtendríamos la curva de diferencia  $1 - c(t)$ , que al representarle en papel semilogarítmico, nos da como resultado dos rectas, como lo indica la fig. (2.3.14).

En la tabla (2.2) tenemos los valores de  $1 - c(t)$ .

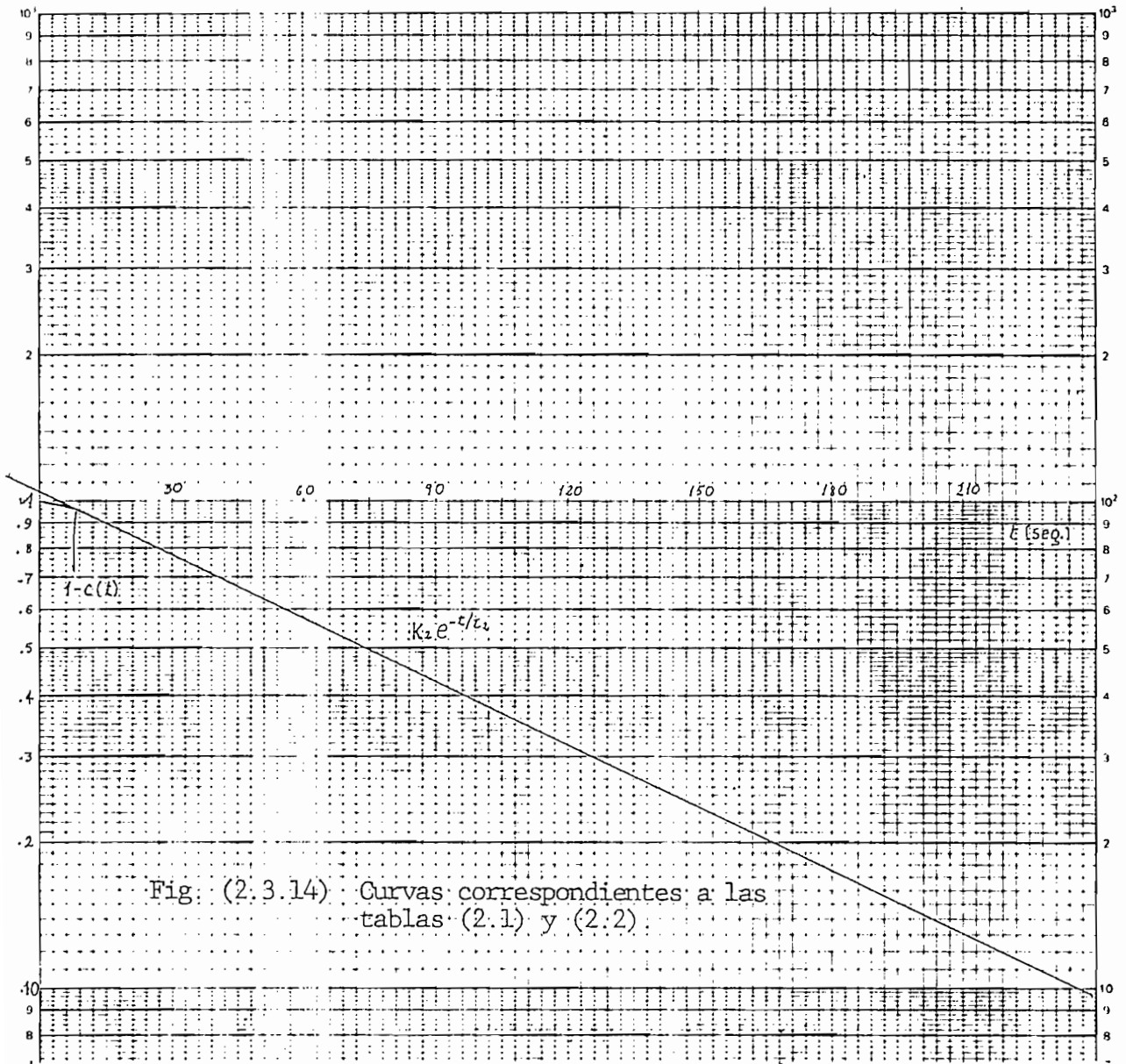


Fig. (2.3.14) Curvas correspondientes a las tablas (2.1) y (2.2)

De la Ec. (2.3.37):

$$c(t) - 1 = k_1 e^{-t/\tau_1} - k_2 e^{-t/\tau_2} \quad (2.3.39)$$

t (seg)	1 - c(t) (°C)
0	1
5	0.982
10	0.946
30	0.78
50	0.64
60	0.58
70	0.523
80	0.473
100	0.387
140	0.26
180	0.174
200	0.143
280	0.064

Tabla (2.2)

c) Encontramos  $k_2$  y  $\tau_2$

Para valores grandes de t, el término que predomina es  $k_2 e^{-t/\tau_2}$  entonces, la recta que corresponde a éste término, al cruzar por  $t = 0$  nos dará el valor de  $k_2$ . A partir de la Ecuación de esta recta, obtenemos  $\tau_2$ .

Como se puede observar en la fig. (2.3.14), obtenemos una sola recta que pertenece al término  $k_2 e^{-t/\tau_2}$ , ya que el término correspondiente a  $e^{-t/\tau_2}$  llega muy rápido a cero, como se puede ver en la tabla 2.1.

Entonces:  $k_2 = 1.052$

La recta la podemos representar como:

$$y = k_2 e^{-t/\tau_2} \quad (2.3.40) \quad 24$$

$$\ln y = \ln k_2 - \frac{t}{\tau_2} \quad (2.3.41) \quad 25$$

Como la escala se da en logaritmo en base 10, la ecuación anterior se transformaría de la siguiente manera:

$$y = k_2 e^{-t/\tau_2} = k_2 (10^{\log e})^{-t/\tau_2} = k_2 \cdot 10^{-\lg e \cdot \frac{t}{\tau_2}}$$

$$\log y = \log k_2 - \frac{t}{\tau_2} \log e. \quad (2.3.42) \quad 26$$

Si escogemos para 'y' valores de  $k_2$  en  $t = 0$ , y 0.2 para un tiempo  $t_x$ , entonces de la fig. (2.3.14):

$$t_x = 166 \text{ seg.}$$

Por tanto la Ec. (2.3.42) la podemos escribir como:

De la fig. (2.3.15) podemos ver que el valor de A es aproximadamente 900°C.

Luego encontramos los valores de  $900 - c(t)$  dados en la tabla anterior cuyo gráfico se representa en la fig. (2.3.16), que trazada en papel semilogarítmico nos da aproximadamente dos rectas.

Para tiempos grandes, tenemos la recta del término  $k_2 e^{-t/\tau_2}$ . Por tanto, de acuerdo a la fig. (2.3.16) obtenemos directamente  $k_2$ .

$$k_2 = 86 \quad (2.3.46)$$

De la ec. (2.3.42):

$$\log y_2 = \log k_2 - \frac{t}{\tau_2} \log e$$

Si escogemos un valor de referencia  $k = 10$ , entonces  $t_x = 225$  (min). Por tanto, de la Ec. (2.3.43):

$$\log \frac{10}{86} = - \frac{t_x}{\tau_2} \log e$$

de donde:  $\tau_2 = - \frac{225}{\log 0.1163} \log e$

$$\tau_2 = 104.56 \text{ (min)} \quad (2.3.47)$$

Entonces:

$$y_2 = 86 e^{-t/104.56} \quad (2.3.48)$$

La tabla (2.4) nos da los valores de  $y_2$  para los diferentes tiempos. De la Ec. (2.3.44):

$$y_2 - (900 - c(t)) = k_1 e^{-t/\tau_1} = y_1 \quad (2.3.49)$$

Los valores de esta ecuación, los tenemos también en la tabla (2.4) que representados en la fig. (2.3.16) nos dan la otra recta correspondiente a éste término.

t	$y_2 = 86 e^{-t/104,56}$	$y_1 = k_1 e^{-t/\tau_1}$	$y_1$
0	86	- 814	794
5	81.98	- 518,02	518.02
13	75.94	- 324.06	324.06
20	71.03	- 228.97	228,97
30	64.55	- 135.45	135.45
53	51.8	- 46.7	46.7
80	40	0	0

Tabla (2.4)

Como se puede observar, el valor de  $y_1$  es siempre negativo, por lo que por razones de cálculo tomamos el valor absoluto.

El valor de  $k_1$  tomamos directamente de la tabla, ya que para



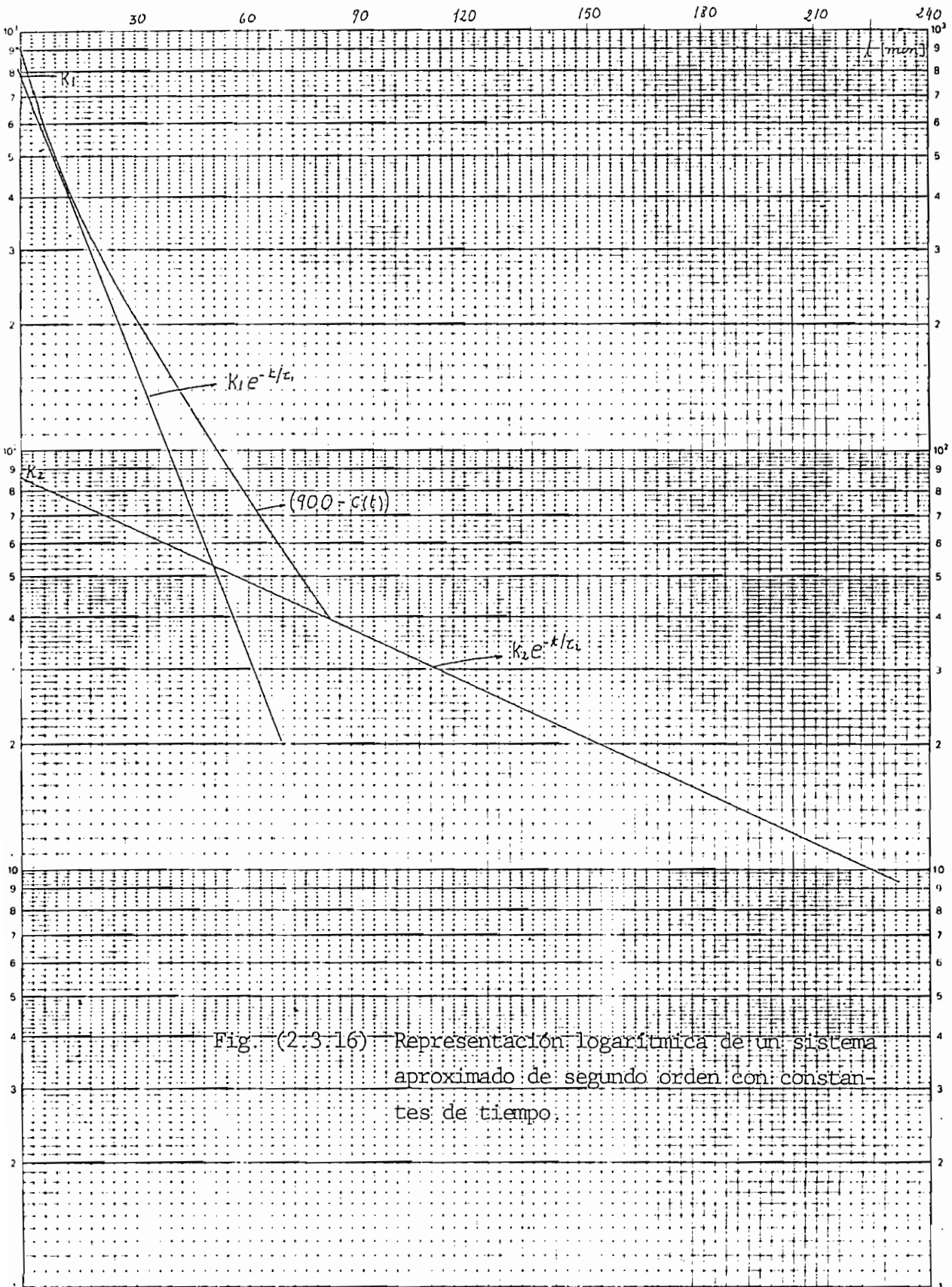


Fig. (2.3.16) Representación logarítmica de un sistema aproximado de segundo orden con constantes de tiempo.

$t = 0$  tenemos que  $y_1 = k_1$  :

$$\text{Por tanto: } |k_1| = 814 \quad (2.3.50)$$

Escogemos para un valor de  $t_x = 53$  ;  $k = 46.7$ , de la tabla (2.4). De la Ec. (2.82)

$$\log \frac{k}{|k_1|} = - \frac{t_x}{\tau_1} \log e$$

Reemplazando valores:

$$\tau_1 = - \frac{53}{\log \frac{46.7}{814}} \cdot \log e$$

$$\tau_1 = 18.54 \text{ (minutos)} \quad (2.3.51)$$

Reemplazando los valores obtenidos en la Ec. (2.3.37):

$$c(t) = 900 - 814 e^{-t/18.54} - 86 e^{-t/104.56} \text{ (}^\circ\text{C)} \quad (2.3.52)$$

Con lo cual queda identificado el sistema.

## 2.4. IDENTIFICACION USANDO SECUENCIAS BINARIAS PSEUDO-ALEATORIAS POR METODOS DE CORRELACION.

### 2.4.1. Introducción

El uso de señales pseudo-aleatorias se basa particularmente - en secuencias binarias pseudo-aleatorias, que como excitación elimina las dificultades que se presentan en los métodos más convencionales (es decir: respuesta de frecuencia, respuesta escalón, etc.), que pueden ser por ejemplo la aplicación en sistemas en funcionamiento, la obtención de una evaluación confiable en un tiempo de experimentación razonable, etc.

Esta técnica tiene dos ventajas principales sobre estos métodos. Primero, el experimento se lo puede realizar mientras el sistema funciona normalmente. Esto se explica ya que la energía de excitación del ruido es esparcida en un amplio rango de frecuencia con una intensidad resultante de ruido bajo que no afectará la operación normal de la instalación y sus controles. En segundo lugar, las medidas son inmunes a los efectos extraños de ruido no deseado; es decir, no se toma en cuenta si este se origina internamente o externamente.

En este desarrollo presentaremos las bases teóricas del método de correlación usando secuencias binarias de longitud máxima (s.b.l.m), como señal de excitación, para luego obtener por medio de este método, la función de transferencia del horno eléctrico que nos sirvió como e

ejemplo de aplicación en la sección anterior.

El método se extiende a sistemas de entrada múltiple utilizando s.b.l.m. modificadas como excitación, para obtener la forma requerida de la correlación cruzada entre canales. En este desarrollo haremos el estudio solamente para sistemas simples, es decir, de una entrada y una salida.

El método de señal aleatoria prueba que para evaluar la dinámica del sistema, se requiere que una señal aleatoria  $x(t)$  de alguna fuente de ruido, sea aplicada como excitación a la entrada del sistema a investigarse para obtener la correlación cruzada entre esta entrada y la señal de salida resultante  $y(t)$ . El resultado es una curva amplitud-tiempo, la cual es proporcional a la respuesta impulso del sistema.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo y en reposo a  $t = 0$ , la relación de entrada salida está dada por la integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(s) x(t - s) ds \quad (2.4.1)$$

Una relación similar existe entre las funciones de correlación.

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(s) \phi_{xx}(\tau - s) ds \quad (2.4.2)$$

donde:  $x(t)$  es la señal de entrada

$y(t)$  es la señal de salida correspondiente

$h(t)$  es la respuesta impulso del sistema

$\phi_{xy}(\tau)$  es la función de correlación cruzada entre  $x(t)$  y  $y(t)$   
para un retardo  $\tau$

y  $\phi_{xx}(\tau)$  es la función de autocorrelación de  $x(t)$  para un retardo  
do  $\tau$

Usualmente se limita la amplitud de  $x(t)$ , según ya se ha explica  
cado, por razones de seguridad de la planta, como también para preserva  
var la linealidad asumida.

La Ec. (2.4.2) puede simplificarse mucho si la función de auto  
tocorrelación de  $x(t)$  se aproxima a una función delta, que es:

$$\phi_{xx}(\tau) \approx k \delta(\tau) \quad (2.4.3)$$

Entonces la Ec. (2.4.2) se transforma en:

$$\phi_{xy}(\tau) \approx k h(\tau) \quad (2.4.4)$$

por lo que la función impulso se puede obtener directamente de  
la medida de la función de correlación cruzada, teniendo a la entrada  
ruido aleatorio con espectro densidad de potencia constante e igual a  
 $2\pi k$ .

En la fig. (2.4.1), tenemos la forma de la secuencia binaria -

pseudo-aleatoria (s.b.p.a).

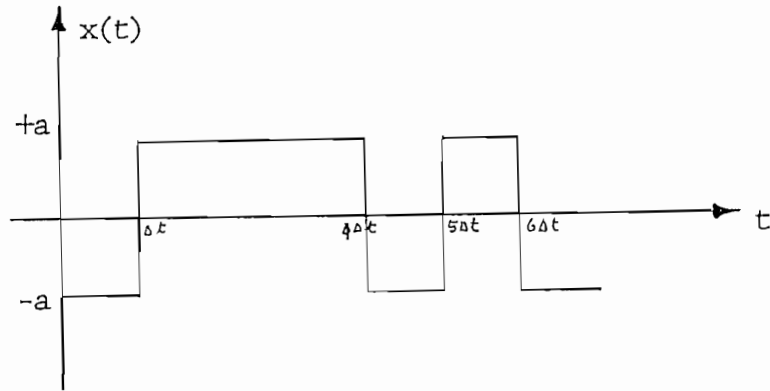


Fig. (2.4.1) Forma de onda de la secuencia binaria pseudo-aleatoria.

Definiremos secuencia binaria de longitud máxima, como las secuencias binarias ( $x = 0,1$ ) que satisfacen a una ecuación de diferencias, lineal, del tipo:

$$D^m x \oplus D^{m-1} x \oplus \dots \oplus Ix = 0 \quad (2.4.5)$$

que tienen un máximo número de intervalos en su período. Este máximo número es  $N = 2^m - 1$ .

$D^m \underline{\Delta}$  retardo de m períodos fundamentales

$\oplus$  = suma de módulo 2

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1$$

$$0 \oplus 1 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

Ejemplo:

$$(D \oplus D)x \equiv 0, \quad \forall x$$

### 2.4.2. Procedimiento experimental

Sin pérdida de generalidad, la amplitud de la s.b.l.m., se la hace  $+a$  ó  $-a$ , cuya función de autocorrelación se presenta en la fig. (2.4.2).

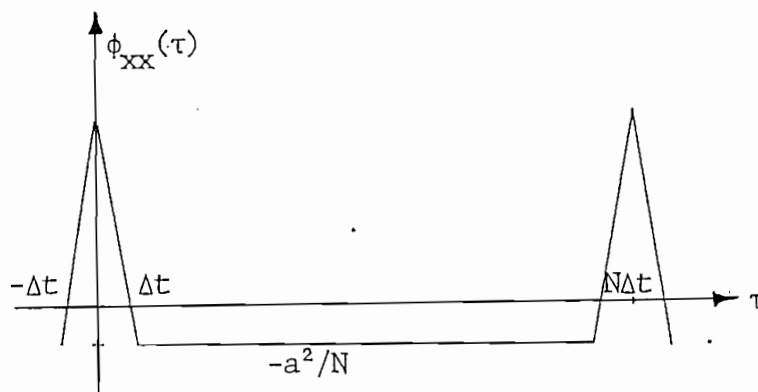


Fig. (2.4.2) Función de autocorrelación de una s.b.l.m.

La función de autocorrelación puede por tanto ser tomada como un impulso de área  $(N + 1) a^2 \Delta t / N$  con un desplazamiento d.c. de  $-a^2 / N$ , tal que pueda expresarse en la forma:

$$\left[ \phi_{xx}(\tau) = (N + 1) a^2 \Delta t \delta(\tau) - a^2 \right] / N \quad (2.4.6)$$

Que reemplazando en la Ec. (2.4.2) quedaría:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{a^2(N+1)}{N} \Delta t h(\tau) - \frac{a^2}{N} \int_0^{N\Delta t} h(s) ds \quad (2.4.7)$$

Donde el segundo término del lado derecho es constante y peque

ño para valores grandes de  $N$ . De esta ecuación se puede ver nuevamente que la función de correlación cruzada es directamente proporcional a la respuesta impulso.

La función de correlación cruzada está definida por:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (2.4.8)$$

Sin embargo, puesto que la s.b.l.m. es periódica con periodo  $T$ , esta ecuación puede ser expresada en la forma:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (2.4.9)$$

o, por simple cambio de variable en la forma:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) y(t) dt \quad (2.4.10)$$

De estas dos formas, la última es prácticamente la más realizable, ya que  $(-\tau)$  representa un retardo en el tiempo, y  $(+\tau)$  representa por otro lado un adelanto o un retroceso de tiempo. La Ec. (2.4.10) parece a primera vista ser la mejor representación.

Esta ecuación por consiguiente indica el acceso requerido de la evaluación del sistema y se muestra para cualquier valor particular de  $\tau$  en la fig. (2.4.3). Esto lleva a un método que podría llamarse como 'acceso serie', en el cual el experimento es realizado con



varios valores de retardo  $\tau$ .

Un punto de importancia que surge aquí es que básicamente se asume que la s.b.l.m. se asemeja al ruido blanco, y es válido cuando se considera que una longitud de secuencia o período con por lo menos una longitud completa ha ocurrido antes. En otras palabras, una secuencia que empieza en un valor de tiempo cero, no tiene como impulso útil la función de autocorrelación hasta que empieza a repetirse por si misma. Esto lleva a la necesidad práctica que por lo menos una longitud de secuencia, algunas veces llamada secuencia de establecimiento, debe ser introducida al sistema antes de que el experimento comience.

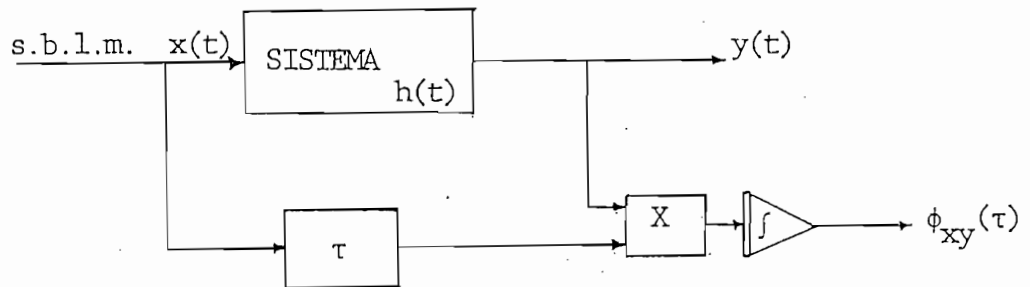


Fig. (2.4.3) Acceso serie de Identificación de Sistemas.

Puesto que este experimento podría llevar a problemas por exceso de tiempo, se requieren un mínimo número de series experimentales. Esto puede ser logrado teniendo un número de accesos paralelos, cada uno similar al que se ilustró en la fig. (2.4.3), pero correspondiente a un valor diferente de retardo  $\tau$ . Esta vía de acceso puede de esta -manera ser llamada vía de 'acceso paralela', que permita un gran número de puntos sobre la curva de respuesta impulso, y donde consecuentemenu

te se requiere de una secuencia de establecimiento. Esta vía de acceso se ilustra en la fig. (2.4.4).

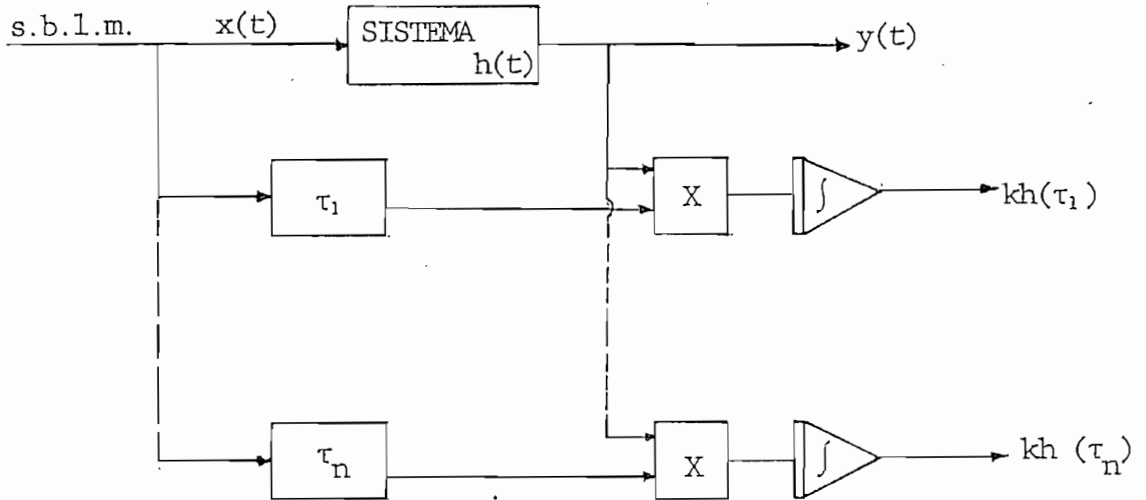


Fig. (2.4.4) Acceso paralelo de Identificación de sistemas.

Como puede verse en esta figura, se necesitan tantos retardos de tiempo, multiplicadores e integradores, como número de puntos en la curva de respuesta impulso. A simple vista esto parece una severa limitación, pero una ventaja del uso de s.b.l.m. en este aspecto es su propiedad de desplazamiento y suma. Esto significa que al tomar la suma de módulo dos de dos versiones separadamente retardadas de la secuencia, se puede obtener una versión retardada adicional de la secuencia original.

La multiplicación es otra operación que está muy simplificada en la fig. (2.4.4), por el uso de s.b.l.m. Puesto que hay solo 2 estados posibles, la multiplicación reduce a una compuerta simple, por lo cual la salida del sistema o su negativo se selecciona de acuerdo

al estado de la secuencia, como se había indicado anteriormente (0,1).

### 2.4.3. Función de correlación cruzada

Puesto que en el presente desarrollo no tomaremos en cuenta la presencia de errores que puedan aparecer cuando se excita el sistema - con s.b.l.m. cuando éste está en funcionamiento; ya que el proceso se lo realizará solamente en el computador digital, independientemente - del experimento, la función de correlación cruzada será únicamente la que obtuvimos en la Ec. (2.4.7). Por lo tanto:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int h(s) \phi_{xx}(\tau-s) ds = \frac{a^2(N+1)\Delta t}{N} h(\tau) - \frac{a^2}{N} \int_0^T h(s) ds$$

Puesto que la técnica descrita se considera también como una de las respuestas de frecuencia de identificación de un sistema desconocido, también se unirán desafortunadamente en el resultado final las componentes de frecuencia de cualquier ruido que están contenidas en el ancho de banda del sistema, y para computar no existe teoría que permita reparar la señal del ruido.

De la ecuación anterior obtenemos  $h(\tau)$

$$h(\tau) = \frac{N}{a^2(N+1) \Delta t} \left\{ \phi_{xy}(\tau) + \frac{a^2}{N} \int_0^T h(s) ds \right\} \quad (2.4.11)$$

Puesto que  $h(t)$  es una función limitada:

$$\int_s^T h(s) ds = A, \text{ una constante finita} \quad (2.4.12)$$

tal que:

$$\int_s^T h(s) \phi_{xx}(\tau-s) ds = \frac{a^2(N-1)\Delta t}{N} h(\tau) - \frac{a^2}{N} A \quad (2.4.13)$$

#### 2.4.4. Ganancia de estado estable del sistema

Como habíamos definido en la Ec. (2.4.12), el término A puede evaluarse considerando el caso donde  $\tau = (N - 1) \Delta t$ . Puesto que  $h(t)$  es cero en este valor de t, la Ec. (2.4.12) puede evaluarse de la siguiente manera:

$$0 = \frac{N}{a^2(N-1) \Delta t} \left\{ \phi_{xx} [(N-1) \Delta t] + \frac{a^2}{N} A \right\} \quad (2.4.14)$$

de donde:

$$A = - \frac{N}{a^2} \phi_{xy} [(N-1) \Delta t] \quad (2.4.15)$$

Este valor de A, corresponde a la ganancia del sistema en estado estable.

#### 2.4.5. Filtrado e integración

Los filtros pasa-bajos pueden ser aplicados a las señales análogas o pueden colocarse alternativamente. El filtrado puede realizarse integrando la señal entre instantes de muestreo.

En este caso, la función de correlación cruzada sería:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_s^T x(t) y(t - \tau) dt \quad (2.4.16)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} y(t + \tau) dt \quad (2.4.17)$$

lo cual involucra el uso de un integrador repetitivo en la señal de salida  $y(t)$ .

Esta técnica puede ser considerada también como un medio para mejorar la exactitud del cálculo de  $\phi_{xy}(\tau)$ . Si la Ec. (2.4.16) escribimos en forma digital, se convierte en:

$$\phi_{xy}(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i y(i+k) \quad (2.4.18)$$

El programa para el cálculo de esta función la tenemos en el anexo, por medio de la cual obtenemos también la función impulso del sistema.

Reemplazando los valores de  $\phi_{xy}(k\Delta t)$  y la ganancia A en la Ec. (2.4.11), nos da como resultado la función impulso que es:

$$h(k\Delta t) = \frac{N}{a^2(N+1)\Delta t} \left[ \phi_{xy}(k\Delta t) - \phi_{xy}[(N-1)\Delta t] \right] \quad (2.4.19)$$

donde k es cualquier entero en el rango  $1 < k < (N-2)$ .

Los gráficos de  $\phi(k\Delta t)$  y  $h(k\Delta t)$  a partir de los datos del pro

grama, nos darán una idea más concreta del presente desarrollo.

Para el uso de esta técnica de correlación cruzada, se elegirán los siguientes parámetros de la señal de entrada:

- La amplitud  $\pm a$ . Es necesario mantenerla pequeña por razones de disturbio en la operación normal de la planta y preservar la linealidad del modelo asumido.
- El intervalo básico  $\Delta t$ . Será suficientemente pequeño para dar una buena resolución en la evaluación de la función impulso.
- El período de repetición de la señal  $N\Delta t$ . Para permitir una determinación rápida de cualquier cambio en las características dinámicas del sistema, éste será solamente un poco más largo que el tiempo de establecimiento del sistema.

#### 2.4.6. Aplicación de esta técnica a un sistema real

Tomamos como sistema para este ejemplo, el horno eléctrico estudiado en el numeral (2.3).

De la ecuación de  $c(t)$ , obtenemos la función de transferencia del horno. Teníamos que:

$$c(t) = 900 - 814 e^{-t/\tau_1} - 86 e^{-t/\tau_2} \quad (^\circ\text{C})$$

luego:

$$C(s) = \frac{900}{s} - \frac{814}{s + 1/\tau_1} - \frac{86}{s + 1/\tau_2} \quad (2.4.20)$$

donde:  $\tau_1 = 18.54$

$\tau_2 = 104.56$

Haciendo los cálculos respectivos, tenemos que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0.464 + 44.735 s}{(s + 0.054)(s + 0.0095)} \quad (2.4.21)$$

Para implementar esta ecuación en el computador digital, es necesario discretizar  $c(t)$ , para lo cual nos valdremos del proceso por medio de variables de estado.

Haremos los siguientes cambios de variables:

$$r(t) = u(t)$$

$$c(t) = y(t)$$

donde:  $u(t)$  es la señal de entrada actual

$y(t)$  es la salida del sistema.

Las variables de estado estarán referidas por  $x(t)$ .

La ec. (2.4.21) reemplazando las nuevas variables, quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.464 + 44.735 s}{s^2 + 0.0635 s + 0.00051} \quad (2.4.22)$$

De acuerdo a la teoría de variables de estado,  $y(s)$  puede expresarse como:

$$Y(s) = 44.73 s X_1(s) + 0.464 X_1(s) \quad (2.4.23)$$

donde:  $X_1(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 0.0635 s + 0.00051}$  (2.4.24)

y  $SX_1(s) = X_2(s)$  (2.4.25)

la representación de variables de estado, tiene la siguiente forma:

$$\underline{X}(k+1)T = \underline{AD} \underline{X}(kT) + \underline{BD} \underline{U}(kT) \quad (2.4.26)$$

donde:  $\underline{AD} = \underline{e}^{\underline{AT}}$  (2.4.26.a)

$$\underline{BD} = \int_s^T \underline{e}^{\underline{A}\alpha} \underline{B} d\alpha \quad (2.4.26.b)$$

y la ecuación de salida es:

$$\underline{Y}(kT) = \underline{C} \underline{X}(kT) \quad (2.4.27)$$

A es la matriz esencial del sistema

B es matriz de acoplamiento

C Matriz de acoplamiento, acoplando las variables de estado a la salida.

AD Matriz discreta



BD Matriz discreta

La discretización se hace por medio de un programa que se incluye en el Anexo. Para esto es necesario conocer las matrices A, B y C, las cuales las obtenemos por el siguiente proceso:

Reemplazando la Ec. (2.4.25) en la Ec. (2.4.23) tenemos que:

$$Y(s) = 0.464 X_1(s) + 44.73 X_2(s) \quad (2.4.28)$$

La transformada inversa de esta ecuación es:

$$y(t) = 0.464 X_1(t) + 44.73 X_2(t) \quad (2.4.29)$$

Por la teoría de discretización obtenemos:

$$\underline{Y}(kT) = 0.464 X_1(kT) + 44.73 X_2(kT) \quad (2.4.30)$$

La Ec. (2.4.29), podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\underline{Y}(kT) = \begin{bmatrix} 0.464 & 44.73 \end{bmatrix} \underline{X}(kT)$$

donde:  $\underline{CD} = \begin{bmatrix} 0.464 & 44.73 \end{bmatrix}$  (2.4.31)

y  $\underline{X}(kT) = \begin{bmatrix} X_1(kT) \\ X_2(kT) \end{bmatrix}$

Consecuentemente:

$$\underline{Y} (k+1)T = \underline{QD} \cdot \underline{X} (k+1)T$$

Calculamos ahora la ecuación de Estado  $\underline{X} (k+1)T$  . Para esto tomemos como referencia la Ec. (2.4.24).

$$X1(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 0.0635 s + 0.00051}$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$s^2 X1(s) + 0.0635 s X1(s) + 0.00051 X1(s) = U(s) \quad (2.4.32)$$

realizando las siguientes sustituciones y transformadas respectivas:

$$s X1(t) = \dot{X}1(t) = X2(t)$$

$$s^2 X1(t) = s \dot{X}1(t) = \dot{X}2(t) \quad (2.4.33)$$

Por tanto la Ec. (2.4.32) puede quedar de la siguiente manera:

$$\dot{X}2(t) + 0.0635 X2(t) + 0.00051 X1(t) = \mu (t) \quad (2.4.34)$$

luego:  $\dot{X}2(t) = -0.0005 \cdot X1(t) - 0.0635 X2(t) + \mu (t)$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones de estado.

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t)$$

$$\dot{X}_2(t) = -0.00051X_1(t) - 0.0635 X_2(t) + u(t)$$

Que pueden expresarse en forma matricial como:

$$\dot{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.00051 & -0.0635 \end{bmatrix} \underline{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t) \quad (2.4.35)$$

donde:

$$\dot{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.00051 & -0.0635 \end{bmatrix};$$

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con estos valores de A, B, y CD, obtenemos las matrices AD, BD; y por tanto la salida discreta de Y(t). El programa para este desarrollo se incluye con el programa general.

Para el caso específico del computador, y como habíamos visto anteriormente, teníamos la siguiente definición:

$$\underline{X}(k+1)T = \underline{AD} \underline{X}(kT) + \underline{BD} U(kT)$$

donde:  $\underline{AD} = e^{\underline{A}T}$

$$\underline{BD} = \int_0^T e^{\underline{A}\alpha} \underline{B} d\alpha$$

Por definición:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{1} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\underline{A}^i t^i}{i!}$$

y donde  $t$  es el mismo intervalo  $\Delta t$  que habíamos definido en la generación de nuestra secuencia pseudo-aleatoria.

### Datos Experimentales

De los valores obtenidos en el computador para la función de correlación-cruzada, trazamos la curva que se muestra en la fig. (2.4.5). Como era de esperar, esta curva es proporcional a la curva de respuesta a la función impulso como se demuestra a seguir:

Para tener un punto de comparación, trazamos primero la curva de la función de respuesta impulso a partir de la Ec. (2.4.36), cuyos datos se presentan en la tabla (2.5).

Derivando la respuesta del horno con respecto al tiempo, tenemos la siguiente ecuación que representa la respuesta a función impulso.

$$\text{Por tanto: } c'(t) = \frac{814}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{86}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$$

Reemplazando los valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ :

$$c'(t) = 43.9 e^{-t/18.54} + 0.82 e^{-t/104.56} \quad (2.4.36)$$

Los valores para los diferentes tiempos, serán los siguientes:

t (min)	$c'(t) = h(t)$ (°C)
0	44.72
10	26.34
20	15.6
30	9.32
40	5.6
50	3.47
60	2.1

Tabla (2.5)

La fig. (2.4.6), nos muestra la curva de respuesta impulso para estos valores.

Ahora, reemplazando los valores de la función de correlación-cruzada obtenidos en el programa y todos los demás valores en la Ec. (2.4.19), trazamos la curva de  $h(t)$ , a partir de los datos que se presentan en la tabla (2.6). Debemos señalar que del período  $\Delta t$  N escogido para el desarrollo del programa, lo que realmente se utiliza es la cuarta parte; por lo tanto, los resultados de la función de correlación cruzada deben multiplicarse por cuatro, o en su defecto, los resultados de la función impulso. La Ec. (2.4.19), la tendríamos de la siguiente manera:

$$h(k\Delta t) = \frac{4 N}{a^2 (N + 1) \Delta t} \left\{ \phi_{xy}(k\Delta t) - \phi_{xy} [(N - 1) \Delta t] \right\} \quad (2.4.37)$$

Los valores utilizados en el programa son los siguientes:

$$N = 33$$

$$a = 0.1 \quad \phi_{xy} [(N - 1) \Delta t] = - 0.463141$$

$$\Delta t = 3$$

Este valor de  $\phi_{xy} [(N - 1) \Delta t]$  lo tomamos de los resultados del programa.

Por tanto, la tabla de valores es la siguiente:

t	h(t)
0	42
9	26.7
18	17.1
27	11
36	7.18
45	4.67
54	3
63	1.9

Tabla (2.6)

Como podemos observar en la fig. (2.4.6), la diferencia entre la curva, si podríamos decir exacta, tomada de la fórmula, y la curva obtenida de la función de correlación-cruzada por medio del programa, es una diferencia mínima; esto puede deberse a que las constantes de tiempo del sistema son bastante grandes y hemos tenido que hacer aproximaciones para valores muy pequeños, como puede verse en los cálculos para obtener A, B y C.

De todas formas el resultado podemos decir que es correcto.

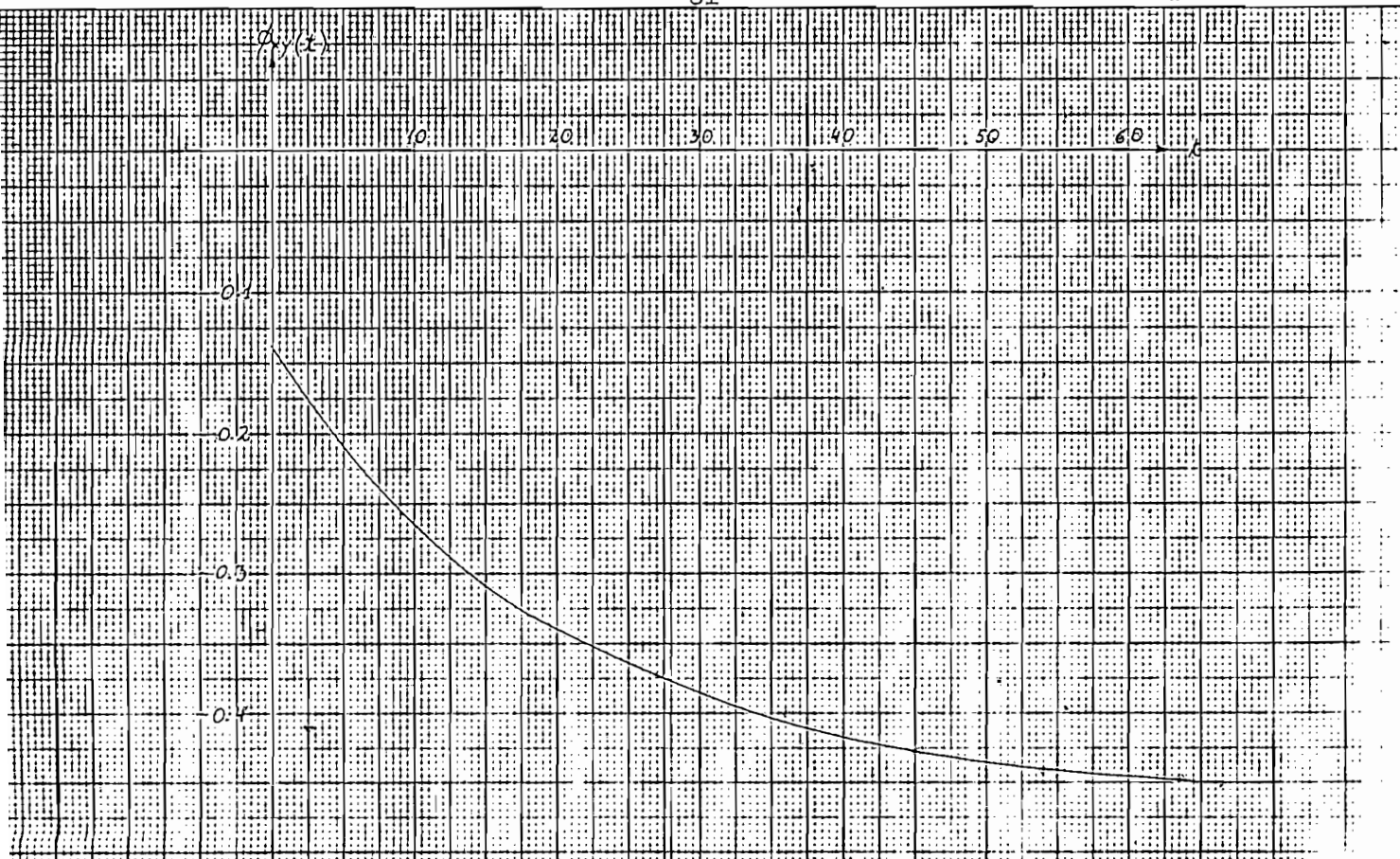


Fig. (2.4.5) Curva de la función de correlación-cruzada.



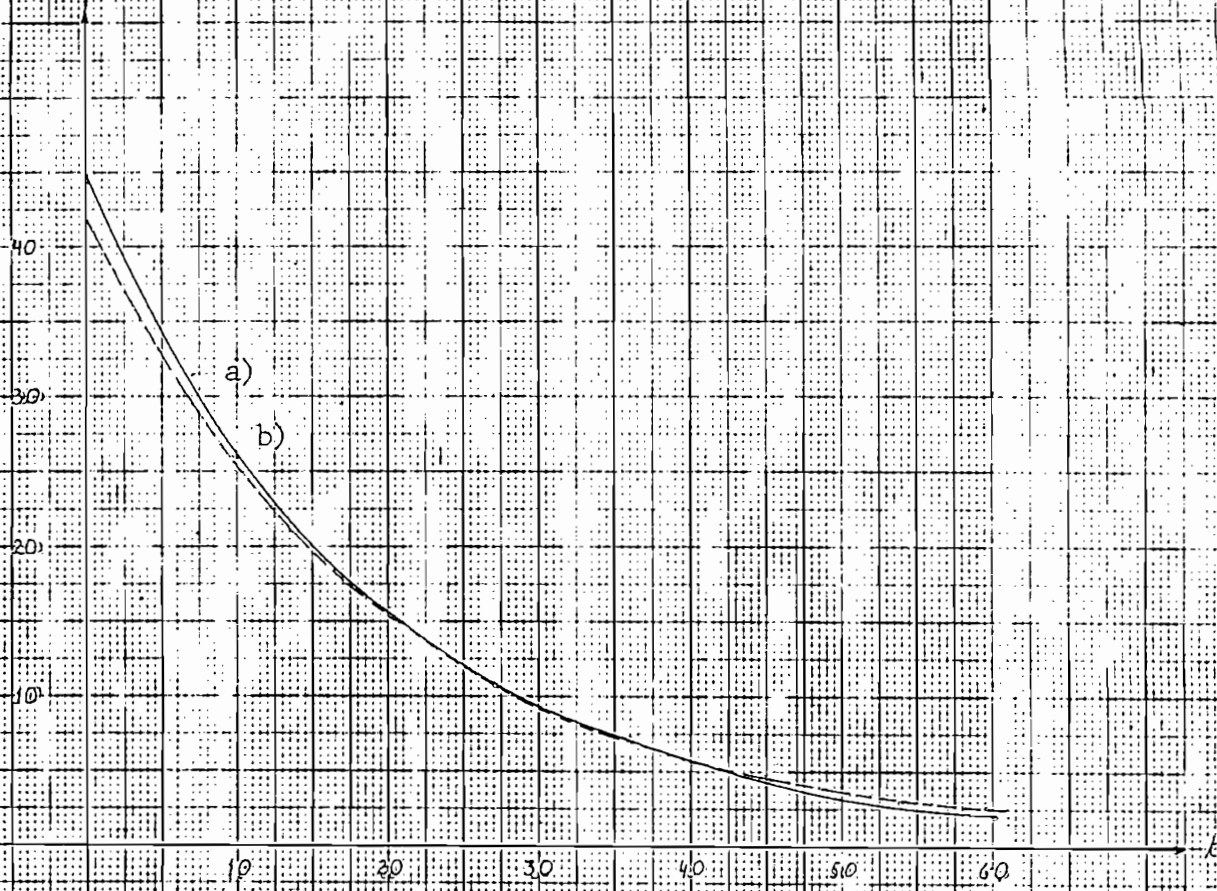
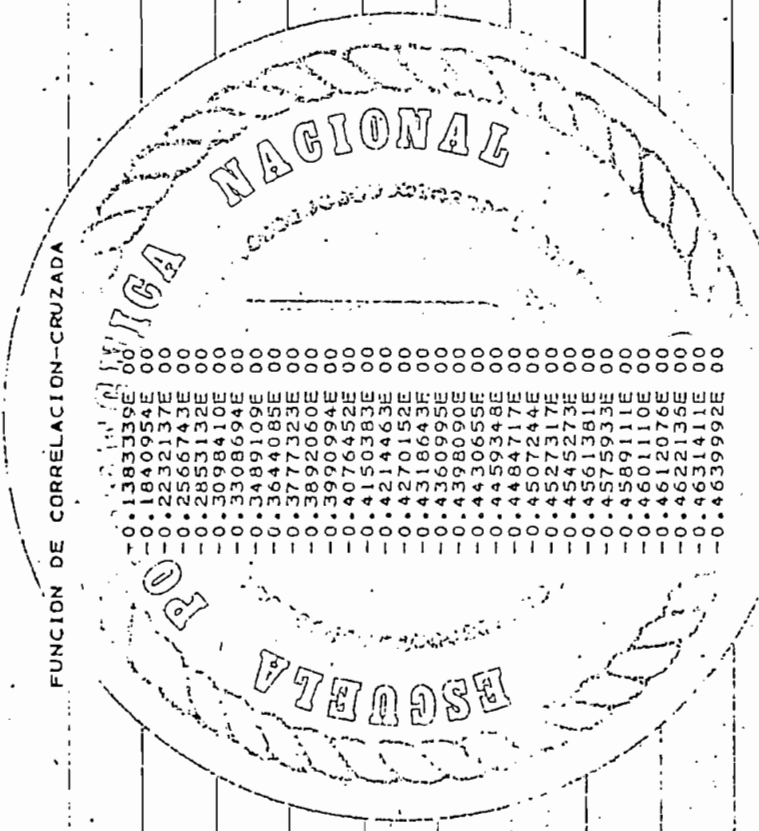


Fig. (2.4.6) a) Respuesta  $h(t)$  según la fórmula.  
 b) Respuesta  $h(t)$  a partir de  $\phi_{xy}(t)$

RESULTADOS DEL PROGRAMA DIGITAL PARA OBTENER LA  
FUNCION DE CORRELACION-CRUZADA



FUNCION DE CORRELACION-CRUZADA



0.1383339E 00  
-0.1840954E 00  
-0.2232137E 00  
-0.2566743E 00  
-0.2853132E 00  
-0.3098410E 00  
-0.3308694E 00  
-0.3489109E 00  
-0.3644085E 00  
-0.3777323E 00  
-0.3892060E 00  
-0.3990994E 00  
-0.4076452E 00  
-0.4150383E 00  
-0.4214463E 00  
-0.4270152E 00  
-0.4318643E 00  
-0.4360995E 00  
-0.4398090E 00  
-0.4430655E 00  
-0.4459348E 00  
-0.4484717E 00  
-0.4507244E 00  
-0.4527317E 00  
-0.4545273E 00  
-0.4561381E 00  
-0.4575933E 00  
-0.4589111E 00  
-0.4601100E 00  
-0.4612076E 00  
-0.4622135E 00  
-0.4631411E 00  
-0.4639992E 00

STATEMENTS EXECUTED= 26677

CORE USAGE OBJECT CODE= 10160 BYTES,ARRAY AREA= 2580 BYTES,TOTAL AREA AVAILABLE= 278480 BYTES

DIAGNOSTICS NUMBER OF ERRORS= 0, NUMBER OF WARNINGS= 0, NUMBER OF EXTENSIONS= 1

COMPILE TIME= 14.23 SEC,EXECUTION TIME= 36.12 SEC, 8:07.57 MONDAY 29 MAR 82 WATFIV - JUN 1977 V. L6

EOJ TESIS C\$STOP

DATE 29/03/82,CLOCK 08/07/59,DURATION 007.2/24

12  
11  
10  
9  
8  
7  
6  
5

C A P I T U L O   I I I

3.     TECNICAS USUALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

3.1.    UTILIZANDO DIAGRAMAS DE BODE

Dado que la teoría en este campo es bastante conocida, se escribirán solamente los resultados, haciendo notar las siguientes propiedades básicas de los diagramas de Bode:

- Los productos en la expresión de la función de transferencia  $T(j\omega)$ , al trabajar con logaritmos, pasan a ser sumas.
  
- La forma de los diagramas de Bode permiten, para la mayoría de los sistemas de mando, representar aproximadamente la gráfica de la función por medio de sus asíntotas.

En las expresiones de Amplitud y fase de una función de transferencia  $T(j\omega)$ , pueden encontrarse cuatro factores diferentes por medio de los cuales se puede identificar plenamente un sistema, al compararlos con las características que proporciona dicho sistema. Estos factores son:

- Ganancia constante  $k$

- Polos o ceros en el origen  $(j\omega)^{\pm n}$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$  )
- Polos o ceros en el eje real (de 1<sup>er</sup> orden)  $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
- Polos o ceros conjugados complejos (de 2<sup>do</sup> orden):  
 $(1 + (2 \xi/\omega_n) j\omega + (j\omega/\omega_n)^2)^{\pm 1}$

La ventaja del gráfico logarítmico es evidente, puesto que cada uno de estos tipos de factores puede considerarse como una curva independiente, que luego se suma o resta convenientemente para obtener la amplitud y fase de  $T(j\omega)$ .

Para identificar un sistema, utilizaremos solamente los gráficos de amplitud, ya que éste nos proporciona los datos suficientes para nuestro objetivo.

Estudiaremos los diagramas de cada uno de los cuatro factores mencionados anteriormente.

a).- Término constante k

Su gráfica es una recta representada en la Fig. (3.1.1)

Su amplitud está dada por:

$$Kd_B = 20 \log_{10} |K| = \text{constante} \quad (3.1.1)$$

$$\text{Arg}(K) = 0^\circ \text{ ó } 180 \text{ grados} \quad (3.1.2)$$

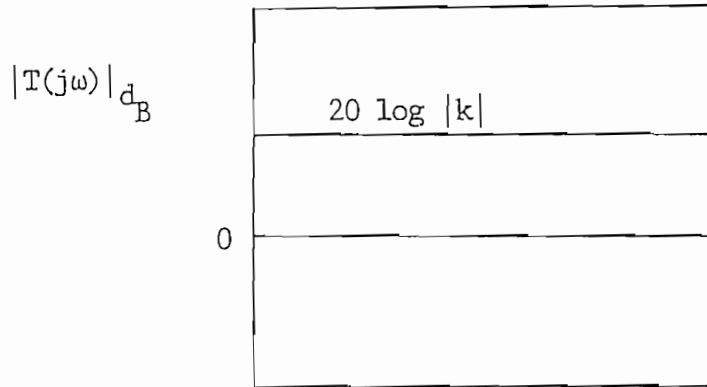


Fig. (3.1.1) Diagrama de Amplitud de la constante k.

b).- Polos o ceros en el origen  $(j\omega)^{\pm n}$

Para la amplitud:

$$20 \log |(j\omega)^{\pm n}| = \pm 20 n \log \omega \quad d_B \quad (3.1.3)$$

Esta ecuación representa una recta cuya pendiente es:

$$\frac{d \ 20 \log |(j\omega)^{\pm n}|}{d \log \omega} = \pm 20 n \ d_B / \text{déc.} \quad (3.1.4)$$

Por tanto la pendiente de estas rectas es de  $\pm 20 n \ d_B / \text{década}$ ,  
y pasan por  $0 \ d_B$  a  $\omega = 1$ .

Para la fase:

$$\text{Arg } (j\omega)^{\pm n} = \pm n \times 90^\circ \quad (3.1.5)$$

La fig. (3.1.2) muestra la curva de Amplitud del término  $(j\omega)^{\pm n}$  para varios valores de n.

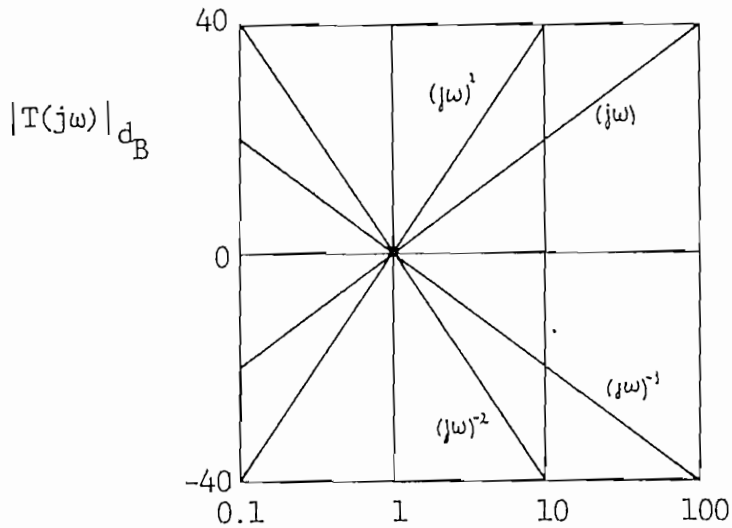


Fig. (3.1.2) Curva de Amplitud para  $(j\omega)^{\pm n}$ .

c).- Polos o ceros en el eje real  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$

Considerando primero el factor del cero:

$$T(j\omega) = 1 + j\omega T \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Amplitud: } 20 \log |T(j\omega)| &= 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ &= 10 \log (1 + \omega^2 T^2) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

En general, empleando una aproximación asintótica para dibujar la curva de la ganancia se tiene que, para  $\omega T \ll 1$  es  $20 \log 1 = 0 \text{ dB}$  y para  $\omega T \gg 1$  es  $+ 20 \log \omega T$ , que representa una recta con  $+ 20 \text{ dB/déc.}$



La intersección de las asíntotas se obtiene cuando:

$$20 \log 1 = 0 \text{ dB} = 20 \log \omega_c T \quad (3.1.8)$$

de donde:  $\omega_c = \frac{1}{T}$  (3.1.9)

denominada frecuencia de corte del sistema.

Para el polo, el desarrollo es similar, con la diferencia de que las Ecs. (3.1.7) y (3.1.8) llevan signo negativo. La fig. (3.1.3) nos muestra la curva de amplitud de ambos casos.

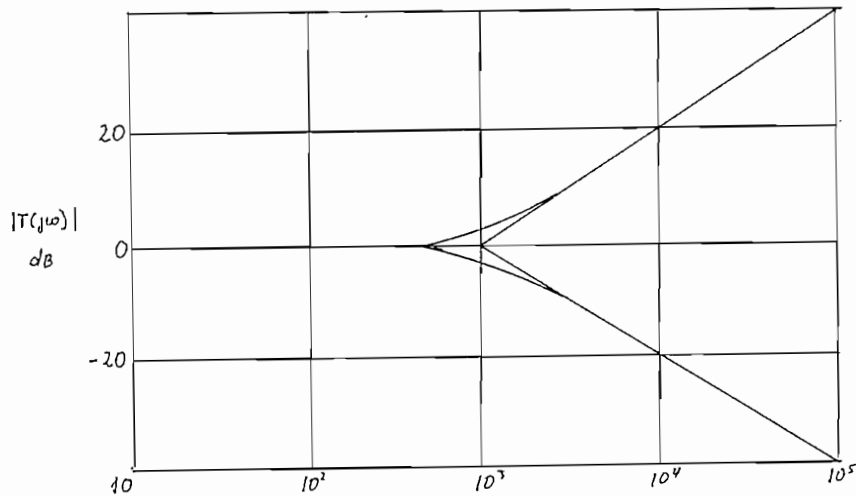


Fig. (3.1.3) Diagrama de Bode para  $(1 + j\omega)^{\pm 1}$

d).- Polos o ceros de segundo orden

$$T(j\omega) = 1 + (2 \xi / \omega_n) j\omega + (j\omega/\omega_n)^2 \quad (3.1.10)$$

Normalizando el factor cuadrático para un par de polos conjugados complejos, se puede escribir como:

$$1 + 2 j \xi \mu - \mu^2 \quad (3.1.11)$$

donde:  $\mu = \omega/\omega_n$

$$\text{Amplitud: } 20 \log |T(j\omega)| = -10 \log ((1 - \mu^2)^2 + 4 \xi^2 \mu^2) \quad (3.1.12)$$

Cuando  $\mu \ll 1$

$$20 \log |T(j\omega)| \approx -10 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (3.1.13)$$

Cuando  $\mu \gg 1$

$$20 \log |T(j\omega)| \approx -10 \log \mu^4$$

$$\text{Entonces: } 20 \log |T(j\omega)| \approx -40 \log \mu \text{ dB} \quad (3.1.14)$$

La última ecuación representa una recta con una pendiente de  $-40 \text{ dB/década}$  en coordenadas semilogarítmicas.

La intersección de las asíntotas se halla igualando.

$$-40 \log \mu = 0 \text{ dB}$$

donde:

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_c} ; \text{ como } \mu = 1$$

por tanto:

$$\omega = \omega_c$$

Que es la frecuencia de corte para un sistema de segundo orden.

La Fig. (3.1.4) nos da la curva de Amplitud para un sistema de este tipo, con cuyas características podemos encontrar la función de transferencia.

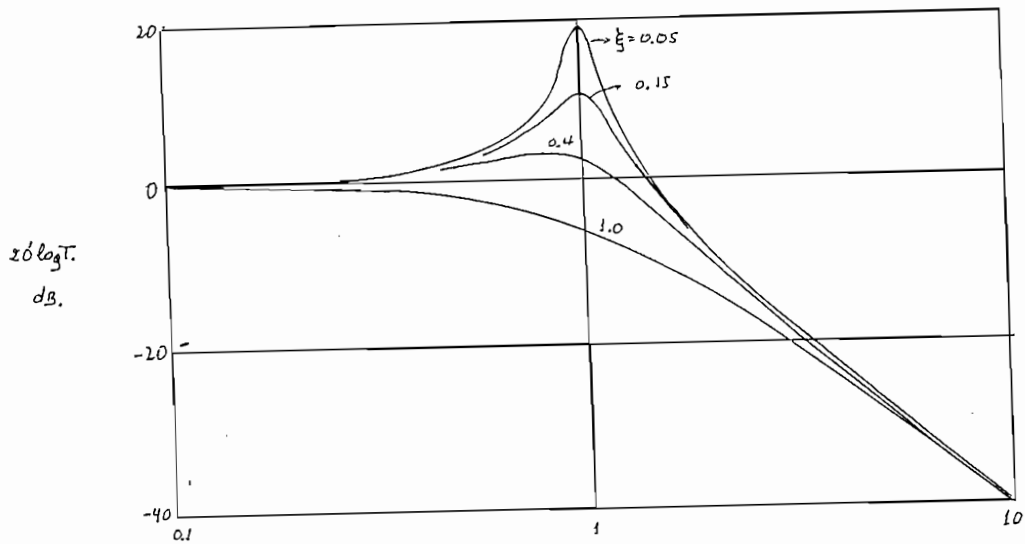


Fig. (3.1.4) Diagrama de Amplitud para un par de polos conjugados.

### 3.1.1. Ejemplos de Aplicación

#### Ejemplo 1. Respuesta de frecuencia de un Amplificador Operacional.

El método de respuesta de frecuencia para identificar un sistema, aplicamos a un Amplificador operacional de características normales, tomado del Computador Analógico. La tabla (3.1) nos presenta los datos medidos.

Para la medición se tomó un valor de  $e_{in} = 3$  V pico.

f (Hz)	$e_o$ (V)	$e_o/e_{in}$	$20 \log e_o/e_{in} $ ( $d_B$ )
5	3	1	0
10	3	1	0
100	3	1	0
1000	2.95	0.983	- 0.1489
1200	2.9	0.966	- 0.3
1600	2.8	0.933	- 0.6
2040	2.7	0.9	- 0.915
2950	2.5	0.833	- 1.587
3700	2.3	0.766	- 2.3
4200	2.2	0.733	- 2.69
5100	2.0	0.666	- 3.53
6100	1.8	0.6	- 4.437
7400	1.6	0.533	- 5.4
10900	1.2	0.4	- 7.96
17500	0.789	0.263	-11.6
21000	0.64	0.2137	-13.4
29500	0.45	0.15	-16.42
50900	0.24	0.08	-21.93
80000	0.1766	0.0588	-24.6
140000	0.1	0.0333	-29.55

Tabla (3.1)

Los datos obtenidos grafizamos en papel semilogarítmico, fig. (3.1.5). Al observar las características de esta curva encontramos los siguientes datos:

$$f_{\text{corte}} = 4.850 \text{ Hz.}$$

$$\text{Pendiente} = -20 \text{ dB/década} \quad \text{para } f \gg f_c$$

Estos datos corresponden a una función tipo cero, cuya función de transferencia está dada por:

$$T(s) = \frac{1}{s\tau + 1}$$

$$\text{donde: } \tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c}$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi \times 4850 \text{ Hz}} \text{ (seg)}$$

$$\tau = 3.28 \times 10^{-5} \text{ (seg)}$$

$$\text{Por tanto: } T(s) = \frac{1}{3.28 \times 10^{-5}s + 1} \quad (3.1.15)$$

Encontrada la función de transferencia, el sistema correspondiente a un amplificador operacional queda identificado por medio del método de respuesta de frecuencia.

Ejemplo 2. Respuesta de frecuencia de un sistema real.

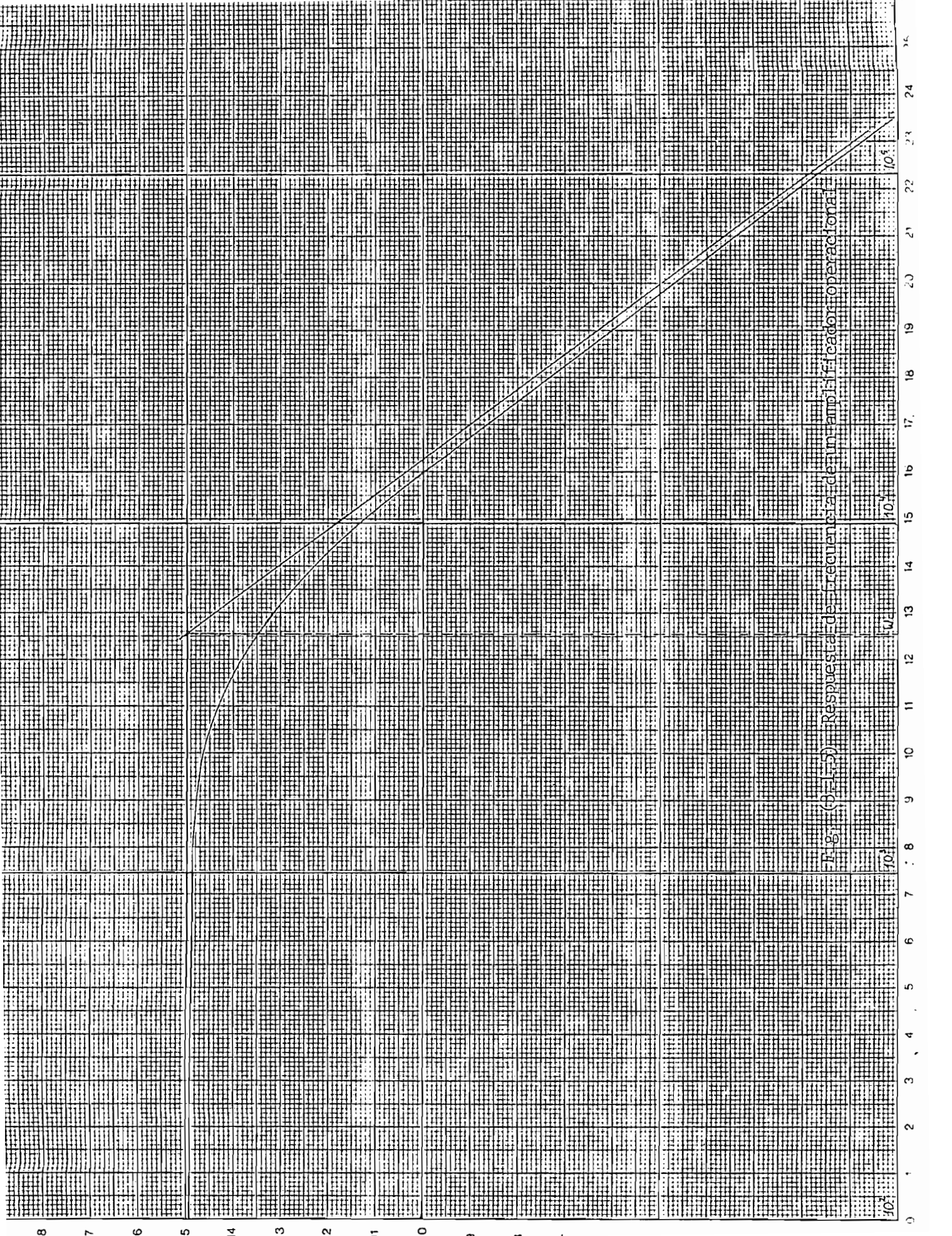


Fig. 8.1 (8-1-3) Respuesta de frecuencia de un amplificador operacional

10<sup>1</sup> 10<sup>1</sup>

Para este ejemplo hemos escogido un amplificador marca FISHER de 30 w de salida por canal, utilizando el 60 % de la salida. Las dificultades encontradas para realizar esta medición, no permitieron obtener resultados demasiado satisfactorios.

La curva de respuesta la hemos obtenido de la potencia en  $d_B$ , puesto que ésta es proporcional a la salida del sistema. Además, la salida fué conectada a una carga de  $8 \Omega$ , como indica la fig. (3.1.6).

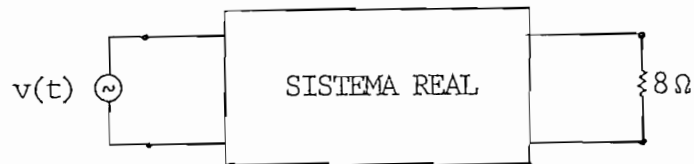


Fig. (3.1.6) Diagrama para respuesta de frecuencia de un sistema real.

Como la salida la obtenemos directamente en  $d_B$ , no es necesario hacer ningún tipo de cálculos. De los datos obtenidos en la tabla (3.2), grafizamos en papel semilogarítmico la respuesta del sistema, representado en la fig. (3.1.7).

f (Hz)	P ( $d_B$ )
100	39.8
200	39.81
350	37.5
600	37.4
$10^3$	37.8
$2 \times 10^3$	38.6

f (Hz)	P ( $d_B$ )
$4 \times 10^3$	39.2
$8 \times 10^3$	39.7
$10^4$	39.2
$1.4 \times 10^4$	38
$2.3 \times 10^4$	36
$2.66 \times 10^4$	35
$3 \times 10^4$	33
$3.47 \times 10^4$	31
$3.72 \times 10^4$	30
$4.58 \times 10^4$	27
$5.3 \times 10^4$	25
$6.01 \times 10^4$	20
$6.9 \times 10^4$	16
$8 \times 10^4$	12
$9.8 \times 10^4$	9.7
$1.2 \times 10^5$	6
$1.29 \times 10^5$	3
$1.36 \times 10^5$	0
$1.52 \times 10^5$	-5
$2 \times 10^5$	-6.5
$3 \times 10^5$	-7.5
$5 \times 10^5$	-8.8
$8 \times 10^5$	-11
$10^6$	-12

Tabla (3.2)

En la Fig. (3.1.7), la curva que va hasta  $1.65 \times 10^5$ Hz, la hemos aproximado a un sistema de 2º orden, para de esta manera asociarla a la fig. (3.1.4), que pertenece a un polo de segundo orden, de



donde podemos obtener los siguientes datos:

$$\xi = 0.5$$

La frecuencia de resonancia obtenida en el laboratorio, fué a proximadamente de 1.5 kHz.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\omega_n &= 2\pi f_n \\ &= 2\pi \times 1.5 \times 10^3 \text{ Hz.} \\ &= 9.42 \times 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}\end{aligned}$$

Además la curva a partir de  $1.65 \times 10^5$  Hz, podemos considerarle como un cero con pendiente de  $+30 \text{ dB/déc.}$ , que sumada a la pendiente de  $-40 \text{ dB/déc.}$  del polo aproximado de segundo orden, nos da como resultado la pendiente de  $-10 \text{ dB/déc.}$ , como indica la fig. (3.1.7).

Este cero sería de la siguiente forma:

$$(s + 1.65 \times 10^5)^{3/2}$$

Por otro lado, el factor de ganancia del sistema sería:

$$20 \log k = 38$$

P [dB]

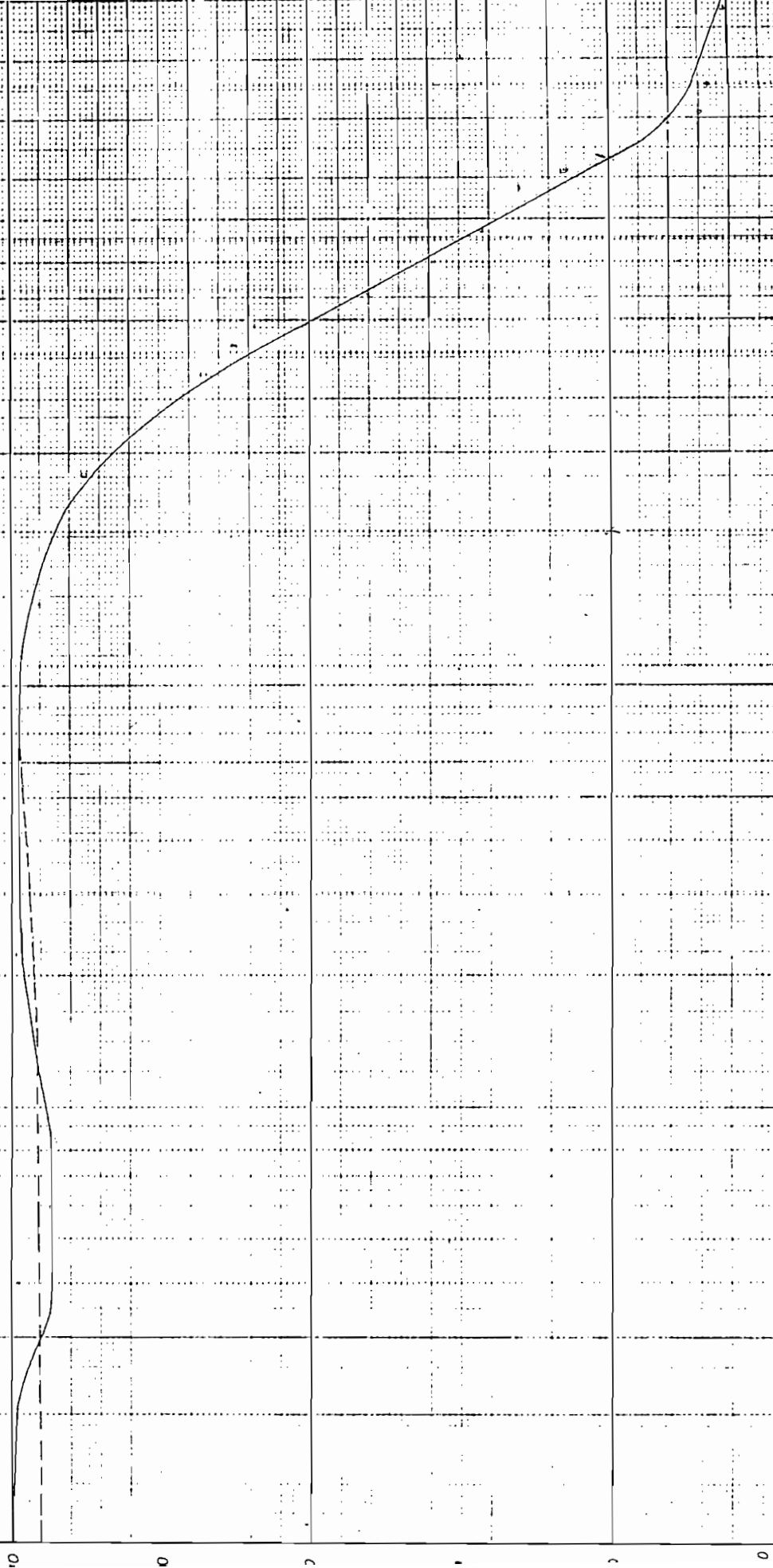


Fig. (3.1.7) Respuesta de frecuencia de un sistema real.

de donde  $k \cong 80$

La función del sistema, reemplazando los valores anteriores, sería:

$$T(s) = \frac{7098.4 \times (s + 1.65 \times 10^5)^{3/2}}{(s^2 + 9.42 s + 88.73)} \quad (3.1.16)$$

### 3.2. UTILIZANDO RUIDO BLANCO

Dada una función positiva  $S(\omega)$  o equivalentemente una función definida positiva  $\phi(\tau)$ , podemos encontrar un proceso aleatorio  $x(t)$  - teniendo  $S(\omega)$  como su espectro de potencia o  $\phi(\tau)$  como su autocorrelación.

Determinamos un sistema cuya función de transferencia es:

$$H(j\omega) = \sqrt{S(\omega)} e^{j\theta(\omega)} \quad (3.2.1)$$

donde  $\theta(\omega)$  es un ángulo arbitrario. Suponemos ahora que podemos encontrar un proceso  $x(t)$  con espectro constante.

$$S_{xx}(\omega) = 1$$

y 
$$\phi_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$$

que, se podría representar gráficamente por la fig. (3.2.1).

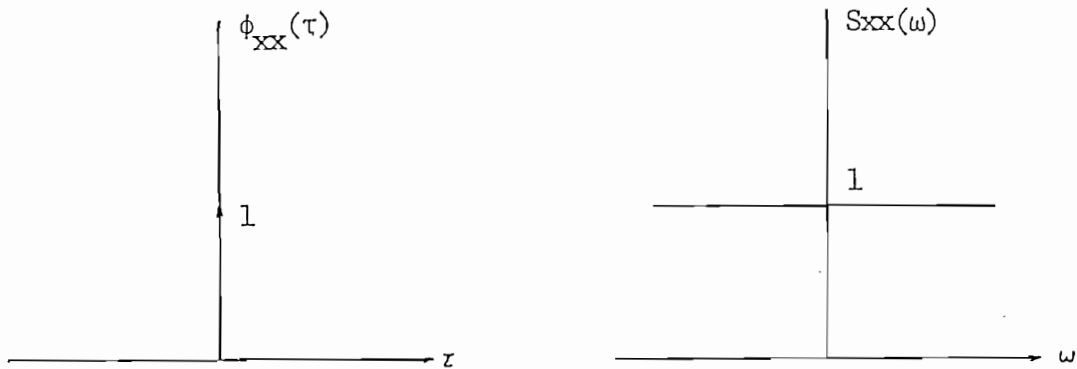


Fig. (3.2.1) Autocorrelación y espectro de potencia del ruido blanco.

Con  $x(t)$  como entrada, el espectro de salida está dado por:

$$S_y(\omega) = S_{xx}(\omega) |H(j\omega)|^2 = S(\omega) \quad (3.2.2)$$

El proceso  $x(t)$  se lo llama Ruido Blanco. Un ejemplo es el ruido térmico que lo estudiaremos más detenidamente en este capítulo.

En general, se puede decir que el ruido blanco es ideal, y por lo tanto inexistente en la realidad. Pero en la realidad también cualquier sistema real viene a ser una especie de filtro pasa-bajos, pudiendo asumirse que para estos sistemas, ruido blanco sería aquel tipo con espectro densidad de potencia constante sobre la banda de trabajo del sistema.

Gráficamente se puede analizar de la siguiente manera:

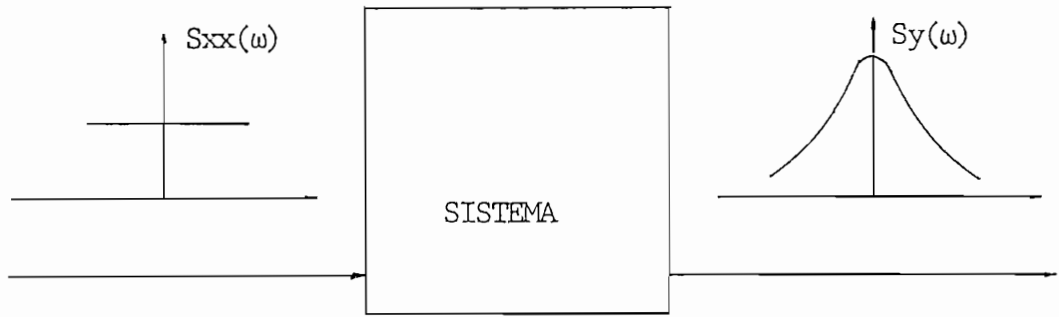


Fig. (3.2.2) Ruido blanco como señal de entrada de un sistema.

donde  $S_{xx}(\omega)$  es el espectro del ruido blanco de entrada, y  $S_y(\omega)$  el espectro del ruido coloreado a la salida del sistema.

Para el presente desarrollo, comenzaremos definiendo lo que es la función de autocorrelación y espectro densidad de potencia del ruido blanco. Tomaremos como referencia el ruido térmico en conductores, que como se había indicado, es una forma de ruido blanco (\*), y se puede aplicar en sistemas físicamente realizables.

La fig. (3.2.3) representa ruido térmico en conductores como un proceso aleatorio.

---

(\*) Lathi, C.P. Signals, Systems and communications  
New York, Wiley, 1965.

$$\phi_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 P_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.2.5)$$

donde la amplitud en  $t$  representa  $X_1$  y en  $t + \tau$  representa  $X_2$ , luego:

$$\phi_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2 | x_1 = x_1) dx_1 dx_2 \quad (3.2.6)$$

$X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias que pueden tomar valores  $x_1$  y  $x_2$

A partir de este desarrollo la función de autocorrelación está dada por:

$$\phi_{XX}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \bar{X}^2 + (e^{\alpha\tau} - 1) \bar{X}^2 \quad (3.2.7)$$

donde  $\bar{X}$  es el valor medio o valor esperado de  $x$ , que se define como:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.2.8)$$

y  $\bar{X}^2$  es el valor medio del cuadrado del proceso, y se define como:

$$\bar{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_X(x) dx \quad (3.2.9)$$

Para el ruido blanco, se tiene que su valor medio es cero por tratarse de un proceso ergódico que tiene su media en el tiempo igual a cero.

Por tanto, la función de autocorrelación del ruido térmico sería:

$$\phi_{xx}(\tau) = \bar{X}^2 e^{-\alpha\tau} \quad ; \quad \tau > 0 \quad (3.2.10)$$

De aquí se deduce que la autocorrelación es una función continua de  $\tau$

$$\phi_{xx}(\tau) = \bar{X}^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Por definición, el espectro de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación del proceso:

$$S_{xx}(\omega) = F \phi_{xx}(\tau)$$

por tanto:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2 \alpha \bar{X}^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3.2.11)$$

Para el ruido térmico en un resistor  $\bar{X}^2$  está dado por:

$$\bar{X}^2 = \alpha kTG \quad (3.2.12)$$

donde:  $k$  es la constante de Boltzman

$T$  temperatura ambiente en °K

$G$  es la conductancia del resistor

$\alpha$  es el promedio de  $n^2$  de colisiones por segundo de un electrón con la estructura de celosía ( $\cong 10^{14}$ )

En general para una señal  $x(t)$

$$\phi_{xx}(\tau) = kTG \alpha e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.2.13)$$

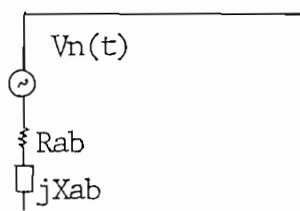
$$S_{\ddot{x}x}(\omega) = \frac{2 k T G \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2 k T G}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \quad (3.2.14)$$

Una de las características importantes, es que el espectro de potencia del ruido térmico es prácticamente constante hasta  $10^{12}$  Hz. Es decir, abarca prácticamente todo el rango de frecuencia en las que trabajan los equipos.

Reemplazando  $\omega \equiv 10^{13} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$  en la Ec. (3.2.14) se obtiene:

$$S_{xx}(\omega) \equiv 2 k T G \quad (3.2.15)$$

Por ejemplo, si se tiene el siguiente circuito pasivo lineal,



donde  $Z_{ab} = R_{ab} + j X_{ab}$  es una impedancia no ruidosa en serie con una fuente de voltaje de ruido y densidad de potencia  $S_v(\omega)$ , entonces:

$$S_v(\omega) = 2 k T R_{ab}(\omega) \quad (3.2.16)$$

En general  $R_{ab}(\omega)$ , parte real de  $Z_{ab}(\omega)$ , es función de la frecuencia; por eso, el espectro de potencia de la fuente de ruido es también función de la frecuencia.

### 3.2.1. Obtención de $H(j\omega)$

Si aplicamos a un sistema una señal de ruido blanco  $r(t)$ , a su salida obtendremos una señal  $c(t)$ .

Las señales  $r_T(t)$  y  $c_T(t)$  valen cero fuera del intervalo  $|t| < T/2$ , como indica la figura (3.2.4).





### 3.2.1. Obtención de $H(j\omega)$

Si aplicamos a un sistema una señal de ruido blanco  $r(t)$ , a su salida obtendremos una señal  $c(t)$ .

Las señales  $r_T(t)$  y  $c_T(t)$  valen cero fuera del intervalo  $|t| < T/2$ , como indica la figura (3.2.4).

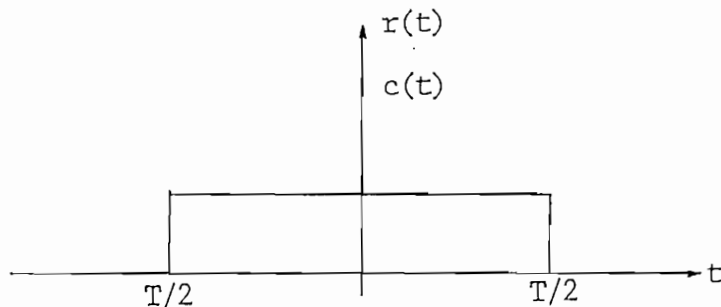


Fig. (3.2.4) Señal de entrada a un sistema.

Aplicando  $r_T(t)$  a la entrada, que equivale a aplicar la señal  $r(t)$  solo en el intervalo  $|t| < T/2$ . En general, la respuesta no será  $c_T(t)$ , sino que se extenderá más allá de  $t = T/2$ . Sin embargo, puesto que  $r(t) = 0$  para  $|t| > T/2$ , la respuesta en  $t > T/2$ , de un sistema estable debe disminuir en el tiempo. Cuando  $T$  tiende a  $\infty$ , su aportación es insignificante, desde el punto de vista de una señal de duración infinita.

Por tanto:  $\lim_{T \rightarrow \infty} r_T(t) \rightarrow c_T(t)$

$$T \rightarrow \infty$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_T(\omega) = H(\omega) R_T(\omega)$$

$$T \rightarrow \infty$$

Por definición, el espectro de  $c(t)$  es:

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |C_T(\omega)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H(\omega) R_T(\omega)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |R_T(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

luego:

$$S_c(\omega) = |H(\omega)|^2 S_r(\omega) \quad (3.2.18)$$

Además el valor medio cuadrático de una señal, está dado por:

$$c^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_c(\omega) d\omega \quad (3.2.19)$$

que es por definición la potencia de  $c(t)$

En forma general, podemos expresar que la función de transferencia de un sistema con ruido blanco (o térmico) como señal de entrada, está dada por la relación de los espectros de potencia de entrada y salida.

$$|H(\omega)|^2 = \frac{S_o(\omega)}{S_i(\omega)} \quad (3.2.20)$$

Como se conoce el espectro del ruido blanco, se obtiene el espectro a la salida del sistema y por tanto la función de transferencia con lo cual el sistema queda identificado.

En forma más directa, podemos obtener  $H(\omega)$  a partir de la definición de función de correlación cruzada.

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \phi_{xx}(\tau - s) ds \\ &= h(\tau) \cdot \phi_{xx}(\tau)\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados, tenemos:

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega)$$

donde  $H(\omega)$  es la función de transferencia de un sistema con función im pulso  $h(t)$  óptima. Por tanto:

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}\tag{3.2.22}$$

Como su equivalente en el tiempo ya se determinó en el numeral (2.4), no profundizaremos en este método. Además, como ya se estableció, debemos esperar que estas técnicas sean completadas en posteriores trabajos de tesis.

## C A P I T U L O   I V

### CONCLUSIONES

Los métodos que hemos utilizado para el desarrollo del presente trabajo, son métodos generalmente conocidos, en especial los que utilizan gráficos normalizados de la respuesta a una función paso y diagramas de Bode. Sin embargo, por su importancia y validez en la identificación de sistemas, nos ha sido difícil prescindir de ellos.

Analizaremos a continuación cada uno de los métodos descritos en el desarrollo de la Tesis, y que los habíamos dividido en dos grupos: técnicas usuales de identificación en el dominio del tiempo y técnicas en el dominio de la frecuencia.

En el dominio del tiempo tenemos los siguientes:

- a) Usando gráficos normalizados a una función paso.

Ya en su respectivo estudio habíamos indicado que cualquier modelo, en general de sistemas complejos reales, puede ser aproximado a un modelo de segundo orden, para de esta manera poder asociar su res-

puesta con los gráficos existentes.

La señal paso, es una señal fácil de generar y de muy amplio servicio a nivel de laboratorio. Los sistemas que hemos utilizado para este tipo de identificación, cuyas funciones son conocidas y aproximadas a un modelo de segundo orden, nos han brindado una idea concreta de la utilización de éste método. En el primer ejemplo, la respuesta del sistema a una función paso unitaria representada en la fig. (2.2.6), nos da los datos suficientemente precisos del modelo que habíamos escogido. En esta figura, el error un poco mayor al 2 % especificado cuando el sistema se estabiliza, puede deberse a errores de inserción al realizar la práctica, dado que el computador analógico - en el que se hicieron las mediciones, no es suficientemente confiable. Puede notarse además en este gráfico que el sistema es bastante estable y ha sido suficiente la utilización del tiempo pico para obtener los demás parámetros del sistema.

Para el segundo ejemplo, fué necesario recurrir al método del lugar de las raíces para eliminar el tercer polo y aproximar el sistema a un modelo de segundo orden. La fig. (2.2.9) nos presenta la respuesta de este sistema, donde podemos apreciar que los datos que habíamos encontrado en el desarrollo teórico, coinciden con los de esta figura. De esta manera, y al igual que el caso anterior, ha sido suficiente obtener la medida del tiempo pico para encontrar los demás parámetros y de esta manera la función del sistema.

b) Por determinación de las constantes de tiempo

Para este caso, habíamos escogido un horno de características eléctricas disponible en la Facultad de Ingeniería Química, por resultar muy difícil conseguir un horno industrial con las características presentadas en el desarrollo teórico. Cabe señalar que este desarrollo lo incluimos para demostrar que el sistema es del tipo deseado, para pasar luego a obtener las constantes de tiempo, y por tanto la respuesta del sistema; con lo cual hemos demostrado analíticamente y en forma general, que un modelo razonable es uno de segundo orden.

A pesar de los errores que se cometen debido a la resolución de los instrumentos al formar la lectura de datos, en especial cuando la temperatura del horno comienza a estabilizarse en tiempos bastante grandes, el resultado satisface plenamente las condiciones por las que nos habíamos guiado. Además, esto lo comprobamos al obtener resultados similares aplicando secuencias binarias pseudo-aleatorias como señal de excitación a este mismo sistema.

c) Utilizando secuencias binarias pseudo-aleatorias

Quizás esta es una de las técnicas más importantes y la que mejor se proyecta para trabajos posteriores. Esta técnica permite la estimación de la dinámica de sistemas bajo condiciones normales de operación, lo cual no ha sido posible realizar en el presente trabajo, ya que para esto es necesario acoplar la señal de excitación produci-

podría usarse para computar en forma continua las características de la s.b.l.m. de modo que la eficiencia máxima en la identificación sería mejorada en todo momento. La s.b.l.m. parece estar idealmente adaptada a esta necesidad, como todas sus propiedades son determinadas relativamente por pocos parámetros básicos.

En el dominio de la frecuencia tenemos:

a) Utilizando Diagramas de Bode.

Como habíamos indicado, dado el conocimiento teórico que se tiene de este tema, hemos utilizado solamente los resultados de los diagramas de Amplitud que nos son suficientes para identificar cualquier sistema.

El primer ejemplo para obtener la respuesta de frecuencia, es de un amplificador operacional que relativamente es muy simple, pero que nos da una idea suficiente de la bondad y la facilidad con que se puede utilizar este método. Esto lo comprobamos además en el segundo ejemplo que es un sistema real más complejo, y dadas las características de la curva obtenida fig. (3.2.2), ha sido necesario aproximar a un modelo de segundo orden.

Las ventajas de este método son evidentes como ya lo habíamos mencionado en su respectivo estudio.

sea una base lo suficientemente clara, para posteriores trabajos en este campo.



A N E X O

- MANUAL DE UTILIZACION DEL PROGRAMA ADJUNTO.
  
- LISTADO DEL PROGRAMA QUE GENERA LA FUNCION DE  
CORRELACION-CRUZADA.

40, 44, 48, 56, 73, 84.

La tercera parte del programa obtiene la función de correlación cruzada asignadas con los números 91 a 100 en el listado.

Los datos que deben ingresar al programa deben seguir el siguiente orden:

#### Primera tarjeta de datos

Se hacen leer los valores del período de la secuencia  $P$ ,  $\Delta t$  y la amplitud de la secuencia ( $\Delta E$  y  $\Delta P$  respectivamente). Estos valores entran con formato F.

#### Segunda tarjeta de datos

Valores por filas de la Matriz A. Estos datos se introducen con formato I, si el elemento  $a_{i,j}$  es entero; caso contrario si son reales, se utilizará formato E. Estos datos van separados por comas y se pueden continuar en otra tarjeta en caso de que la primera tarjeta se llene.

#### Tercera tarjeta de datos

Valores por filas de la Matriz B. Estos datos deben introducirse en igual forma que los de la matriz A.

#### Cuarta tarjeta de datos

En esta tarjeta se leen los datos de T, T2, N9 y T1.

- T.- Corresponde al tiempo en que se evalúa la matriz AD, y debe ser igual al valor de  $\Delta t$ . Debe ser introducida con formato E.
- T2.- Es el tiempo en que se evalúa la integral para el cálculo de la Matriz BD. Tiene formato E y va a continuación de T separado con coma.
- N9.- Es el número de trapecios necesarios para el cálculo de la integral previa al cálculo de la Matriz BD y va con formato I, separada con coma del anterior.
- T1.- Corresponde al tiempo en que se evalúa la integral al límite inferior. Este dato dado la teoría de discretización siempre es cero (0), y va con formato F.

#### Quinta tarjeta de datos

Valores por filas de la Matriz  $C9 = CD$ . Se introducen en forma similar a los datos de la Matriz A.

#### Sexta tarjeta de datos

Valores por filas de la Matriz  $D = DD$  necesarios para el cálculo del vector de salida. Dada las condiciones de la teoría este dato por lo general es cero.

#### Séptima tarjeta de datos

Valor de Epsilon ( $E_5$ ) necesario para pasar el cálculo de la serie. Este dato deberá introducirse con formato E.

```

$JOB
C$OPTIUNS T=200,P=25
C$OPTIUNS
C----- *****
C----- PROGRAMA PARA ENCONTRAR LA FUNCION DE CORRELACION CRUZADA
C----- *****
C-----
C----- TESIS DE GRADO DE GUILLERMO MARTINEZ VIVANCO.
C-----
C----- PROGRAMA DE CONTROL
C----- LAS MATRICES EN LA DATA ENTRAN POR FILAS
C----- PARA FORMA GENERAL SE CAMBIARA TARJETAS DE DATOS
C-----
1 DIMENSION TIEM(200),R(2J0),Y(200)
2 DIMENSION A(2,2),B(2,1),TOT(2,1),C1(2,1),TA1(2,2),X(2,1),U(1,1)
3 DIMENSION C9(1,2),D(1,1),X1(2,1),X2(2,1),X3(2,1),Y1(1,1),Y2(1,1)
4 DIMENSION Y(1,1),TAT(2,2),C2(2,2)
5 INTEGER FAC
6 DATA X/U,0,0./
7 READ,P,DELT,AMP
8 ND=P/DELT+0.5
9 IX2=99
10 DOJJ=1,ND
11 TIEM(J)=DELT*(J-1)
12 IX1=IFIX(TIEM(J))
13 IX1=IX2
14 CALL RANDU(IX1,IX2,Y3)
15 IF(Y3,GE,0.5)GOTO8
16 R(J)=-AMP
17 GOTO3
18 B R(J)=AMP
19 CONTINUE
20 PRINT5
21 5 FORMAT('1',20X,'TIEMPO',30X,'AMPLITUD')
22 PRINTD,(TIEM(J),R(J),J=1,ND)
23 6 FORMAT(21X,F7.2,30X,F5.1)
C PROGRAMAS PARADISCRETIZAR UNA FUNCION CONTINUA
C----- SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES
C-----
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ A ES (N1,N1)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ B ES (N1,N2)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ X ES (N1,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ U ES (N2,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ C9 ES (N4,N1)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ D ES (N4,N2)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ TA1 ES (N1,N1)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ TAT ES (N1,N1)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ TOT ES (N1,N2)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ C2 ES (N1,N1)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ C1 ES (N1,N2)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ X1 ES (N1,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ X2 ES (N1,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ X3 ES (N1,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ Y1 ES (N4,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ Y2 ES (N4,N3)
C----- EL GRADU DE LA MATRIZ Y3 ES (N4,N3)
24 U(1,1)=1.
25 N1=2
26 N2=1
27 N3=1
28 N4=1
C----- ESCRIBIR TITULOS
29 WRITE(3,100)
30 100 FORMAT(1H1,24X,'ESCUELA POLITECNICA NACIONAL',//,25X,'FACULTAD DE I
INGENIERIA ELECTRICA',//,25X,'ESPECIALIZACION ELECTRONICA',/)
31 WRITE(3,105)
32 105 FORMAT(///,25X,'ECUACION DE ESTADO',//,25X,'NOTACION GENERAL .....
1. DX = A*X(T)+B*U(T)',//,25X,'DONDE :',//,33X,'DX = DERIVADA DEL
2 VECTOR DE ESTADO',//,33X,'A Y B = MATRICES INVARIANTES EN EL TIEMPO
3 U',//,33X,'X(T) = VECTOR DE ESTADO',//,33X,'R(T) = VECTOR DE ENTRA
4 DA',/)
33 WRITE(3,106)
34 106 FORMAT(///,25X,'EN SISTEMAS DISCRETOS LAS ECUACIONES DE ESTADO SON
1',//,25X,'NOTACION GENERAL..... X((N+1)T) = AD*X(NT)+BD*R(NT)',//,4
2 6X,'Y(NT) = CD*X(NT)+DD*R(NT)',//,25X,'DONDE :',//,33X,'X((N+1)T)
3 = VECTOR DE ESTADO AL INTERVALO (N+1) DE T',//,33X,'AD = MATRIZ FI
4',//,33X,'BD = INTEGRAL DE LA MATRIZ FI*B EN LOS INTERVALOS U,T',//
5',//,33X,'R(NT) = VECTOR DE ENTRADA',//,33X,'Y(NT) = VECTOR SALIDA DE
6 SISTEMA',//,33X,'CD Y DD = MATRICES CUYOS VALORES SON LOS',//,33X,
7 B' LOS MISMOS QUE PARA EL SISTEMA CONTINUO',/)
35 READ,((A(I,J),J=1,N1),I=1,N1)
36 WRITE(J,251)

```

```

37 251 FURMAT(///34X,'MATRIZ DE ESTADO A')
38 WRITE(3,252) ((A(I,J),J=1,N1),I=1,N1)
39 252 FURMAT(2(//37X,2(F9.5,3X)))
40 READ,((B(I,J),J=1,N2),I=1,N1)
41 WRITE(3,254)
42 254 FURMAT(///34X,'MATRIZ DE INCIDENCIA B')
43 WRITE(3,255) ((B(I,J),J=1,N2),I=1,N1)
44 255 FURMAT(2(//34X,F5.2))
45 WRITE(J,700)
46 700 FURMAT(///34X,'VECTOR DE ESTADO X')
47 WRITE(J,701) ((X(I,J),J=1,N3),I=1,N1)
48 701 FURMAT(2(//34X,F5.2))
49 HEAD,T,T2,N9,T1
50 HEAD,((C9(I,J),J=1,N1),I=1,N4)
51 HEAD,((D(I,J),J=1,N2),I=1,N4)
52 READ,E5
C---- SE LLAMA A LA MATRIZ AD EVALUADA AL VALOR DE T
53 CALL CAL (N1,ES,A,T,TA1)
54 WRITE(3,256)
55 256 FURMAT(///34X,'MATRIZ AD')
56 WRITE(3,257) ((TA1(I,J),J=1,N1),I=1,N1)
57 257 FURMAT(2(//34X,2(F9.4,5X)))
C---- SE LLAMA A LA MATRIZ AD EVALUADA AL VALOR DE T1
58 CALL CAL (N1,ES,A,T1,TAT)
C---- LA INTEGRAL PARA EL CALCULO DE LA MATRIZ BD ES REALIZADO POR EL
C---- METODOJ DE LOS TRAPECIOS
59 CALL MULT (N1,N1,TAT,N1,N2,B,N1,N2,TOT)
C---- SE REALIZA EL CALCULO DE LA MATRIZ BD
C---- SE REALIZA EL CALCULO DE LA INTEGRAL POR EL METODO DE LOS TRAPECIOS
60 H9=T2/N9
C---- N9 CORRESPONDE AL NUMERO DE TRAPECIOS
61 M9=N9-1
62 DO 50 J3=2,M9
63 T3=(J3-1.0)*H9
64 CALL CAL (N1,ES,A,T3,C2)
65 CALL MULT (N1,N1,C2,N1,N2,B,N1,N2,C1)
66 DO50 J4=1,N1
67 DO50 J5=1,N2
68 TOT(J4,J5)=TOT(J4,J5)+2.*C1(J4,J5)
69 CALL CAL (N1,ES,A,T2,TAT)
70 CALL MULT (N1,N1,TAT,N1,N2,B,N1,N2,C1)
71 DO51 J6=1,N1
72 DO51 J7=1,N2
73 TOT(J6,J7)=(H9/2.)*{TOT(J6,J7)+C1(J6,J7)}
74 WRITE(3,258)
75 258 FURMAT(///34X,'MATRIZ BD')
76 WRITE(J,259) ((TOT(I,J),J=1,N2),I=1,N1)
77 259 FURMAT(2(//34X,F9.4))
78 WRITE(3,260)
79 260 FURMAT(///36X,'N',18X,'Y(N+1)T'//)
80 DJ80K=1,200
81 CALL MULT(N1,N1,TA1,N1,N3,X,N1,N3,X1)
82 CALL MULT(N1,N2,TOT,N2,N3,U,N1,N3,X2)
83 DO 81 K18=1,N1
84 DO 81 K19=1,N3
85 81 X(K18,K19)=X1(K18,K19)+X2(K18,K19)
86 CALL MULT(N4,N1,C9,N1,N3,X,N4,N3,Y0(K))
87 80 WRITE(3,262)K-1,Y0(K)
88 262 FURMAT(34X,14,15X,F12.5)
89 WRITE(J,111)
90 111 FURMAT('1',46X,'FUNCION DE CORRELACION-CRUZADA'////)
91 ND=ND/2
92 DO10IK9=1,ND
93 SUM=0.
94 DO10I=1,ND
95 10 SUM=SUM+R(I)*Y0(I+K9)
96 F11=SUM/ND
97 101 WRITE(J,112)F11
98 112 FURMAT(56X,E14.7)
99 STOP
100 END

101 SUBROUTINE CAL (N1,ES,A,T,SUM)
102 INTEGER FAC
103 DIMENSION A(2,2),SUM(2,2),C(2,2),A1(2,2)
C---- SE GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD PARA CUANDO T = 0.
104 DJ 5 I2=1,N1
105 DO 5 I3=1,N1
106 IF(I2.EQ.I3)GOTO 12
107 SUM(I2,I3)=0
108 GO TO 5
109 12 SUM(I2,I3)=1.

```

```

110      5 CONTINUE
111      C---- SE REALIZA EL CALCULO DE A*T PREVIOD AL CALCULO DE LA MATRIZ AD
112          ND1=1
113          DO 3 JA=1,N1
114              3 A1(JA,JE)=A(JA,JE)*T
115              GOTO 24
116          25 NDB=ND1-1
117              DO 13 I4=1,NDB
118                  IF(I4.GT.1) GOTO 14
119                  CALL MULT(N1,N1,A,N1,N1,A,N1,N1,C)
120                  GOTO13
121          14 CALL MULT(N1,N1,C,N1,N1,A,N1,N1,C)
122          13 CONTINUE
123      C---- SE LLAMA A LA SUBROUTINA FACT PARA EL CALCULO DEL FACTORIAL
124          CALL FACT(ND1,FAC)
125          NO=0
126          DO15 I7=1,N1
127              DO15 I8=1,N1
128                  A1(I7,I8)=C(I7,I8)*(T**ND1)/(FLOAT(FAC))
129                  IF(A1(I7,I8).LE.E5)GOTO17
130                  GOTO15
131          17 NU=NO+1
132          15 CONTINUE
133              IF(NO.EQ.N1*N1)GOTO18
134          24 DO 4 I5=1,N1
135              DO 4 I6=1,N1
136                  4 SUM(I5,I6)=SUM(I5,I6)+A1(I5,I6)
137                  ND1=ND1+1
138                  IF(ND1.GT.10) GOTO 7
139                  GOTO 25
140          7 WRITE(3,8)
141          8 FORMAT(//'HAN HABIDO 10 ITERACIONES')
142          STOP
143          18 RETURN
144          END

144      SUBROUTINE MULT(NE1,NE2,E,NF1,NF2,F,NG1,NG2,G)
145      C---- SUBROUTINA PARA MULTIPLICACION DE DOS MATRICES
146      C---- E = MATRIZ 1
147      C---- F = MATRIZ 2
148      C---- G = MATRIZ PRODUCTO DE LAS MATRICES E Y F
149      C---- NE1 = NUMERO DE FILAS DE LA MATRIZ E
150      C---- NE2 = NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ E
151      C---- NF1 = NUMERO DE FILAS DE LA MATRIZ F
152      C---- NF2 = NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ F
153      C---- NG1 = NUMERO DE FILAS DE LA MATRIZ G
154      C---- NG2 = NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ G
155      DIMENSION G(NE1,NF2),E(NE1,NE2),F(NF1,NF2)
156      NG1=NE1
157      NG2=NF2
158      DO 11 JP=1,NE1
159          DO 11 JO=1,NF2
160              11 G(JP,JO)=0.
161              DO 16 I=1,NE1
162                  DO 16 J=1,NF2
163                      DO 16 K=1,NE2
164                          16 G(I,J)=G(I,J)+(E(I,K)*F(K,J))
165          RETURN
166          END

167      SUBROUTINE FACT(N,FAC)
168      C---- SUBROUTINA PARA CALCULAR EL FACTORIAL DE UN NUMERO
169      C---- N = NUMERO QUE SE DESEA EL FACTORIAL
170      C---- FAC = FACTORIAL DEL NUMERO N
171      INTEGER FAC
172      FAC=1
173      DO 9 K=1,N
174          9 FAC=FAC*K
175      RETURN
176      END

177      SUBROUTINE SAS(NN1,NN2,AB,AC,AD)
178      C---- SUBROUTINA PARA SUMAR DOS MATRICES DEL MISMO ORDEN
179      C---- NN1 = NUMERO DE FILAS
180      C---- NN2 = NUMERO DE COLUMNAS
181      C---- AB = MATRIZ 1
182      C---- AC = MATRIZ 2
183      C---- AD = MATRIZ RESULTADO DE LA SUMA DE LAS MATRICES AB Y AC
184      DIMENSION AB(NN1,NN2),AC(NN1,NN2),AD(NN1,NN2)
185      DO 59 K1=1,NN1
186          DO 59 K2=1,NN2
187              59 AD(K1,K2)=AB(K1,K2)+AC(K1,K2)
188          RETURN
189          END

```

\*ENTRY

## B I B L I O G R A F I A

- 1.- BRIGGS, HAMMOND, GODFREY, "Estimación of process dynamic characteristics by correlation methods using pseudo-random signals". Symposium IFAC, Praga (1967).
- 2.- BURBANO P, BARAJAS L, "Laboratorio de Sistemas de control". (1981).
- 3.- DAVIES W.T., "System identification for self-adaptive Control"
- 4.- CASTRUCCI, PLINIO, " Identificacao de Sistemas".
- 5.- DORF, RICHARD, "Sistemas Automáticos de control" (1974)
- 6.- DURAN RAMIRO, "Programa para simulación digital de sistemas lineales fijos y causales descritos a variables de Estado". (Tesis de Grado 1981).
- 7.- GODFREY, K.R. and MURGATROYD, W. "Input Transducer Errors in Binary Cross-Correlations Experiments", (1965).
- 8.- KUO, BENJAMIN, "Sistemas de control Automático" (1962)
- 9.- LATHI, B.P., "An introduction to Random signals and communications Theory". (1968).



- 10.- LATHI, B.P., "Signals, systems and communication" N.Y. Willey, (1965).
- 11.- ORGANICK, E.I., " Fortran IV" (1972).
- 12.- PAPOULIS, A., "Probability random variables and stachastic process".