

ESTUDIO TEORICO - EXPERIMENTAL
DE LA TEORIA LINEAL DE LA RE-
ALIMENTACION

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN LA
ESPECIALIZACION DE ELECTRONICA DE LA ESCUELA POLITECNICA
NACIONAL

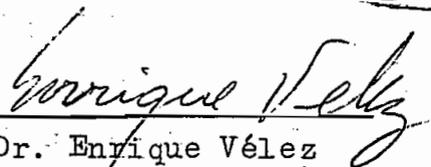
C. MARCO V. VACA G.

Agosto, 1967

Quito - Ecuador

A MI MADRE

CERTIFICO QUE ESTE TRABAJO FUE REALIZADO
EN SU TOTALIDAD POR EL Sr.. C.. MARCO V..
VACA G.. BAJO MI DIRECCION


Dr. Enrique Vélez
CONSULTOR DE TESIS

P R E F A C I O

Este trabajo consiste en un estudio teórico-experimental de algunas propiedades fundamentales de la teoría de la Realimentación basada en las obras, que por su contenido han llegado a ser clásicas en el ambiente de la Ciencia Eléctrica y cuya bibliografía se expresa al final.

He creído conveniente dividir el trabajo en dos partes: la Parte I es un estudio exclusivamente teórico en la cual he tratado de explicar los conceptos físicos con cierta rigurosidad matemática; la Parte II es un estudio teórico-experimental de la respuesta de un sistema eléctrico.

El numeral 1 de la Parte I es un estudio ligero sobre las redes activas en general, puesto que además de los conceptos básicos que se desarrollan para redes pasivas y activas se muestran las diferencias entre estos dos tipos de redes, se indican algunas definiciones que resultan muy útiles para el desarrollo de la teoría lineal de la Realimentación tales como la impedancia de punto motriz y la impedancia de transferencia en función de un elemento cualquiera de la red.

El estudio general de las redes se lo puede hacer sólo para mallas y de los resultados que se obtengan se puede deducir los resultados que se obtendrían si utilizamos nudos puesto que los dos conceptos son correlativos, bajo

este punto de vista he desarrollado unicamente la teoría a base de mallas.

En el numeral 2 se tiene la teoría fundamental de la Realimentación desarrollada para cualquier sistema físico lineal que se considere. Las ecuaciones que se desarrollan son las más generales pero siempre he tratado de indicar la debida interpretación física de las cantidades que forman estas ecuaciones para lo cual resulta muy útil los diagramas de flujo del sistema. También se estudia las ecuaciones fundamentales (como la diferencia de retorno por ejemplo) a partir de los determinantes generales que caracterizan a la red eléctrica.

El numeral 3 está dedicado al estudio de algunos efectos de la realimentación tales como: disminución de la sensibilidad de los elementos de un sistema; disminución de la no-linealidad de los elementos, disminución de ruido, con algunos ejemplos ilustrados de la manera en que estas propiedades importantes se apliquen al diseño de sistemas simples. He creído muy interesante hacer un estudio de la sensibilidad para redes eléctricas a base de sus determinantes generales.

El numeral 4 corresponde a un estudio de los criterios de la estabilidad de un sistema lineal realimentado. Se indican la mayoría de los criterios que se utilizan dando mayor énfasis a los más comunes especialmente al método del lu

gar de las raíces.

Un capítulo muy importante en la Realimentación es el estudio de la respuesta transitoria del sistema así como la respuesta en estado estable con excitación sinusoidal al cual se dedica la parte II.

El numeral 1 es un estudio teórico de la red eléctrica que se usa para la experimentación, se obtiene la respuesta del sistema en lazo abierto tanto calculada como experimental, comparando los dos resultados, he tratado de explicar a que se deben los pequeños errores que puedan existir. Se da gran énfasis al estudio de la respuesta del sistema en lazo cerrado, primero, por el método del lugar de las raíces (estado transitorio) y que, segundo, por el método del análisis de frecuencia (estado estable para una excitación sinusoidal). La comprobación experimental del estado transitorio se ha hecho a base de fotos de la respuesta del sistema mientras que de la frecuencia a base de medición directa.

El numeral 2 se dedica al estudio de las distintas respuestas que presenta el sistema para distintas condiciones de una red compensadora en serie, y el numeral 3 corresponde a la compensación paralelo.

En todos los numerales he intentado poner conclusiones sobre los métodos que he utilizado para el análisis de las distintas respuestas.

El propósito de este trabajo ha sido el demostrar claramente que los resultados que se obtienen por consideraciones puramente teóricas son comprobados en el laboratorio con toda la exactitud que pueden permitir los elementos usados. Los errores que pueden existir, mas bien se deben a consideraciones físicas que no toma en cuenta la teoría puesto que, en realidad no son de importancia para su desarrollo.

Agradezco sinceramente a mi consultor de Tesis, el Doctor Enrique Vélez, de quien yo tuve la suerte de ser alumno y amigo, y a quien yo debo gran parte de mi formación no solo científica sino también humana. El Doctor Vélez fué quien sugirió el tema el cual yo acepté con mucho agrado, puesto que considero que la teoría de la Realimentación es de gran importancia para el desarrollo científico.

Agradezco también la valiosa ayuda que siempre me brindó el Señor Efraín del Pino, distinguido profesor del Departamento de Electrónica.

Mi reconocimiento a todos los profesores que forman el Departamento de Electrónica.: Ing. Marco Hurtado, Ing. Luis Silva, Sr. Mario Cuesta y Sr. Mario Cevallos.

Por fin mi reconocimiento a todas las personas que directa o indirectamente hicieron factible el desarrollo del presente trabajo.

C. Marco V. Vaca G.

Quito, 11 de Agosto de 1967

INDICE GENERAL

Prefacio IV

PARTE I

1.- ECUACIONES DE CIRCUITOS ACTIVADOS	1
1-1 Introducción	1
1-2 Ecuaciones a base de mallas	1
1-3 Valores de Z y de Z_T en funciones de un solo elemento	6
1-4 Ecuaciones a base de nudos	8
2.- FUNDAMENTOS DE LA TEORIA LINEAL DE LA REALIMENTACION	9
2-1.a Ecuación fundamental de la Realimentación	9
2-1.b Diagrama fundamental de la realimentación	11
2-2 Equivalencia de un elemento de dos terminales con una fuente controlada	13
2-3.a Diferencia de retorno	15
2-3.b Diferencia de retorno para redes en general	18
2-3.c Diferencia de retorno para elementos bilaterales	21
2-4.a Diferencia de retorno nula	22
2-4.b Diferencia de retorno nula para redes	24
2-5 Invariancia del numerador de la diferencia de retorno para toda referencia	27

3.- PROPIEDADES DE LA REALIMENTACION	31
3-1.a Sensitividad de parámetros cuando $t_{oi} = 0$	31
3-1.b Sensitividad para redes en general	43
3-2.a Sensitividad cuando $t_{oi} \neq 0$	46
3-2.b Sensitividad cuando $t_{oi} \neq 0$ en redes activas	49
3-3 Sistemas con varias entradas	49
3-4 Sensitividad del sistema realimentado debido a ruido o variaciones de los parámetros en la red realimentadora	53
3-5 Efecto de la realimentación sobre la no-linealidad	57
3-6 Razones para la utilización de la realimentación	61
4.- CRITERIOS DE ESTABILIDAD	66
4-1 Análisis clásico	66
4-2 Criterio de ROUTH-HURWITZ	68
4-3.a Criterio de NYQUIST	71
4-3.b Márgenes de estabilidad	75
4-3.c Diagramas en el plano complejo para un sistema realimentado	76
4-3.d Desarrollo del lugar geométrico de las constantes M y α	78
4-4 Criterio de la estabilidad por medio del gráfico polar inverso	80
4-5 Diagrama de BODE	83
4-6 La Tabla de NICHOLS	87

4-7	El método del lugar de las raíces	88
-----	-----------------------------------	----

PARTE II

1.-	ESTUDIO TEORICO-EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA EN LAZO ABIERTO Y EN LAZO CERRADO	106
1-1	Estudio de un sistema de tres polos	106
1-2.a	Respuesta del sistema en lazo abierto a la función escalón	111
1-2.b	Respuesta del sistema en lazo abierto a la frecuencia	114
1-2.c	Conclusiones	117
1-3.a	Respuesta del sistema en lazo cerrado a la función escalón	118
1-3.b	Respuesta del sistema en lazo cerrado a la función escalón para algunos valores característicos de la ganancia	124
	a) Respuesta sobreamortiguada	124
	b) Respuesta críticamente amortiguada	127
	c) Respuesta oscilatoria amortiguada	129
	d) Respuesta oscilatoria inestable	134
1-3.c	Respuesta del sistema en lazo cerrado a la frecuencia	136
1-3.d	Conclusiones	145
2.-	ESTUDIO DE LA COMPENSACION SERIE EN LA ESTABILIDAD Y EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA	149

2-1	Estudio de la red de compensación	149
2-2.a	Estudio de la compensación serie por el método del lugar de las raíces	152
2-2.b	Efectos de la compensación serie en la respuesta transitoria del sistema	156
2-3	Efectos de la compensación serie sobre la respuesta a la frecuencia del sistema	173
2-4	Conclusiones	184
3.-	ESTUDIO DE LA COMPENSACION PARALELA EN LA ESTABILIDAD Y EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA	187
3-1	Estudio de la compensación paralela por el método del lugar de las raíces	189
3-2	Estudio de la compensación en paralelo por el método de análisis de frecuencia	196
3-3	Conclusiones	201
	BIBLIOGRAFIA	203

P A R T E I

1.- ECUACIONES DE CIRCUITOS ACTIVADOS

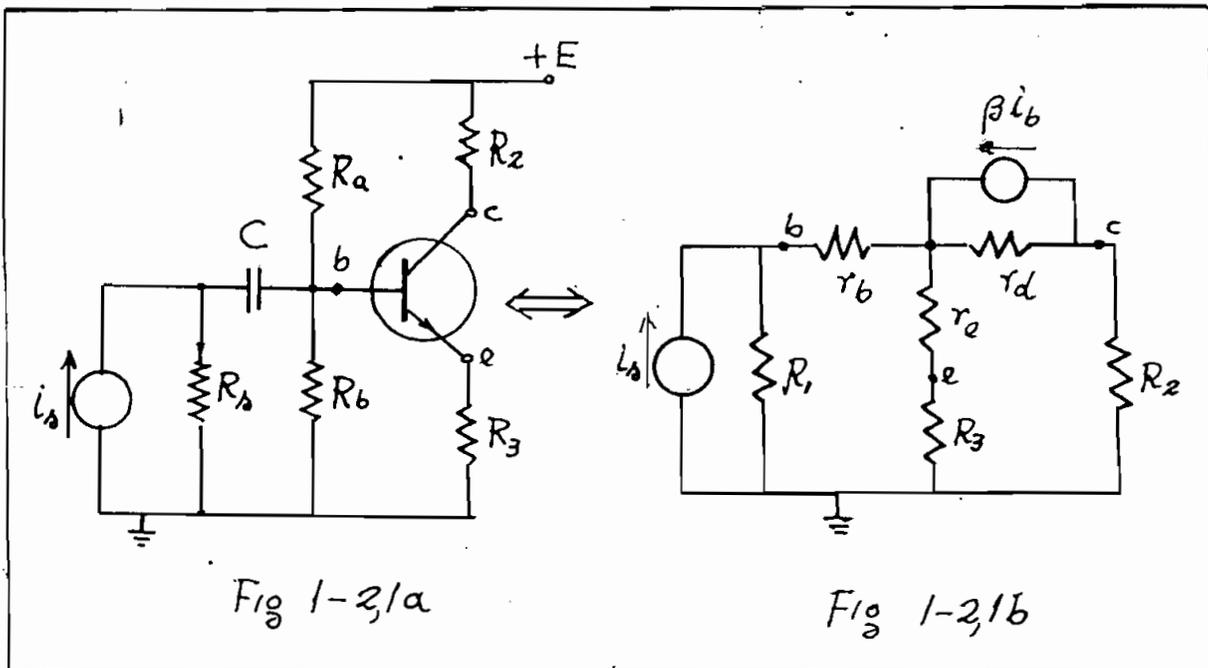
1-1. INTRODUCCION

Cuando se analiza una red es necesario establecer si ésta contiene fuentes de energía, o si tanto los voltajes como las corrientes de la red modifican a otras fuentes de energía. En caso de que existan dichas fuentes entonces es posible obtener de la red mayor energía que la puesta por las fuentes propias de excitación e inclusive en ausencia de ellas. En este caso la red se denomina: circuito activo.

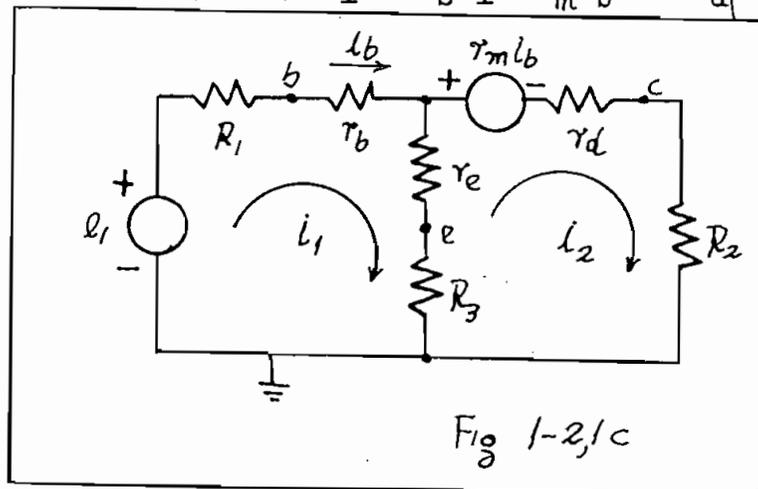
La energía adicional que se obtiene de un circuito activo proviene de otras fuentes que no son de excitación (generadora de señales) sino, por lo general, fuentes de polarización de algunos elementos tales como: baterías de placa de tubos, o de colector de transistores las que no se consideran de excitación. Podemos decir que si una red contiene tubos o transistores es activa.

1-2. ECUACIONES A BASE DE MALLAS

Antes de entrar a las ecuaciones generales, analizaremos primero un circuito activo constituido por un transistor (fig 1-21a) cuyo circuito equivalente se indica en la fig 1-21b. El condensador C es un cortocircuito para la frecuencia considerada, R_1 representa la resistencia en paralelo formada por R_a , R_b , y R_s .



Aplicando el teorema de Thevenin a las fuentes de corriente con sus resistencias asociadas tenemos el circuito de la fig 1-2/c en donde: $e_1 = i_s R_1$; $r_m i_b = r_d \beta i_b$



Las cantidades desconocidas son las corrientes i_1 e i_2 que podemos calcularlas resolviendo el sistema que por simple inspección podemos escribir:

$$\begin{aligned} (R_1 + r_b + r_e + R_3) i_1 - (r_e + R_3) i_2 &= e_1 \\ - (r_e + R_3) i_1 + (r_e + r_d + R_2 + R_3) i_2 &= -r_m i_b \end{aligned} \quad (1-2.1)$$

el cual lo escribimos en la forma:

$$\begin{aligned} (R_1 + r_b + r_e + R_3) i_1 - (r_e + R_3) i_2 &= e_1 \\ - (r_e + R_3 - r_m) i_1 + (r_e + r_d + R_2 + R_3) i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1-2.2)$$

de donde facilmente se puede encontrar las corrientes i_1 e i_2 .

Con este sencillo ejemplo se muestra que el método de solución de una red activa es igual al de una red pasiva.

El sistema 1-21 podemos expresarle en forma de una matriz:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 \\ -r_m i_b \end{vmatrix}$$

en donde: $r_{11} = R_1 + r_b + r_e + R_3$; $r_{12} = - (r_e + R_3)$
 $r_{21} = - (r_e + R_3)$; $r_{22} = r_e + r_d + R_2 + R_3$

Se ve claramente que $r_{12} = r_{21}$ o sea que la matriz es simétrica; pero si el sistema 1-22 se reduce a una matriz, evidentemente la nueva matriz no es simétrica o sea $r'_{12} \neq r'_{21}$, esta propiedad es muy importante en las redes activas.

Cuando se tiene un circuito general, entonces se debe establecer un número de caminos cerrados tales que las corrientes circulantes sean independientes y en número necesario para establecer todas las corrientes en todas las ramas.

Se sabe por la teoría de las redes pasivas que si b es el número total de ramas de una red, n_t el número total de nudos, entonces el número de caminos cerrados independientes es:

$$\ell = b - n_t + 1 \quad (1-2.3)$$

Una vez elegidos los ℓ caminos o mallas independientes se tiene que la red puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1\ell} I_\ell &= E_1 + r_{11} I_1 + r_{12} I_2 + \dots + r_{1\ell} I_\ell \\ Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2\ell} I_\ell &= E_2 + r_{21} I_1 + r_{22} I_2 + \dots + r_{2\ell} I_\ell \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Z_{\ell 1} I_1 + Z_{\ell 2} I_2 + \dots + Z_{\ell \ell} I_\ell &= E_\ell + r_{\ell 1} I_1 + r_{\ell 2} I_2 + \dots + r_{\ell \ell} I_\ell \end{aligned} \quad (1-2.4)$$

en donde: E_1, E_2, \dots, E_ℓ son las fuentes de excitación de cada malla; $r_{11} I_1, r_{12} I_2, \dots, r_{\ell \ell} I_\ell$, son las fuentes de voltaje controladas por las corrientes de malla I_1, I_2, \dots, I_ℓ ; $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{\ell \ell}$ son las impedancias totales de cada malla; $Z_{12}, Z_{13}, \dots, Z_{21}, Z_{23}, \dots$, son las impedancias comunes a las mallas, 1-2, 1-3, ...; 2-1, 2-3, ...; respectivamente.

Si el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio en las mallas ha sido elegido de la misma estructura de la red (caminos cerrados) que para el establecimiento de las variables corrientes independientes (árbol con sus enlaces,

determinando los caminos cerrados), como casi siempre es el caso, entonces la matriz de impedancias es simétrica y se cumple que:

$$Z_{12} = Z_{21} ; Z_{13} = Z_{31} \dots$$

y por lo tanto representan las impedancias comunes de las mallas 1-2 ; 1-3... como ya hemos dicho.

Si en el sistema 1-2.4 se pasan los miembros de la derecha que contienen las corrientes, a la izquierda entonces nos queda en la forma:

$$\begin{aligned} Z'_{11} I_1 + Z'_{12} I_2 + \dots + Z'_{1l} I_l &= E_1 \\ Z'_{21} I_1 + Z'_{22} I_2 + \dots + Z'_{2l} I_l &= E_2 \\ &\vdots \\ Z'_{l1} I_1 + Z'_{l2} I_2 + \dots + Z'_{ll} I_l &= E_l \end{aligned} \quad (1-2.5)$$

en el cual: $Z'_{11} = Z_{11} - r_{11}$; $Z'_{12} = Z_{12} - r_{12}$; etc; evidentemente para este caso, ya no existirá simetría en la matriz de impedancias Z' , o sea:

$$Z'_{12} \neq Z'_{21} ; Z'_{13} \neq Z'_{31}$$

Si denominamos A el determinante de la matriz Z' , entonces se encuentra facilmente que la corriente en la malla i es:

$$I_i = \frac{A_{1i}}{A} E_1 + \frac{A_{2i}}{A} E_2 + \dots + \frac{A_{li}}{A} E_l \quad (1-2.6)$$

Puesto que $\frac{A_{ki}}{A} = Y_{ik}$ representa una admitancia, entonces :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 + \dots + Y_{1\ell} E_\ell \\
 I_2 &= Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 + \dots + Y_{2\ell} E_\ell \\
 &\vdots \\
 I_\ell &= Y_{\ell 1} E_1 + Y_{\ell 2} E_2 + \dots + Y_{\ell \ell} E_\ell
 \end{aligned}
 \tag{1-2.7}$$

En la admitancia Y_{jk} , si $j=k$ representa la admitancia (o su inverso la impedancia) de punto motriz; si $j \neq k$ representa la admitancia de transferencia, así tenemos que:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \frac{A_{11}}{A} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2=E_3=\dots=E_\ell=0} \\
 Y_{21} &= \frac{A_{12}}{A} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=E_3=\dots=E_\ell=0}
 \end{aligned}
 \tag{1-2.8}$$

Las impedancias de punto motriz y las de transferencia, serán, simplemente las inversas de las admitancias. Es conveniente llamar Z a la impedancia de punto motriz y Z_T a la impedancia de transferencia (especificando lógicamente la malla o los caminos cerrados).

1-3. VALORES DE Z Y DE Z_T EN FUNCIONES DE UN SOLO ELEMENTO

Supongamos que un elemento bilateral Z_0 sea constituyente solo de la malla j pero que no forme parte de las otras; queremos investigar la variación de Z y de Z_T con respecto a Z_0 .

La impedancia Z_0 forma parte del elemento Z_{jj} en el determinante A , el cual puede desarrollarse tomando los cofactores de la fila j (o columnaj) y en general tendremos

que:

$$A = Z_{j1} A_{j1} + Z_{j2} A_{j2} + \dots + Z_{jj} A_{jj} + \dots \quad (1-3.1)$$

en donde Z_{jj} tiene la forma general:

$$Z_{jj} = Z_0 + Z'_{jj}$$

por lo que:

$$A = (Z_{j1} A_{j1} + \dots + Z'_{jj} A_{jj} + \dots) + Z_0 A_{jj}$$

Al término encerrado en el paréntesis podemos considerarlo como el determinante A cuando $Z_0 = 0$ y lo denotamos por A^0 , entonces:

$$A = A^0 + Z_0 A_{jj} \quad (1-3.2)$$

Similarmente tenemos para el cofactor A_{jj} :

$$A_{jj} = A^0_{jj} + Z_0 A_{jjjj} \quad (1-3.3)$$

Con lo anterior, la impedancia de punto matriz de la malla 1 es:

$$Z = Z_{11} = \frac{A}{A_{11}} = \frac{A^0 + Z_0 A_{jj}}{A^0_{11} + Z_0 A_{11jj}} \quad (1-3.4)$$

Similarmente, la impedancia de transferencia es:

$$Z_T = Z_{21} = \frac{A}{A_{12}} = \frac{A^0 + Z_0 A_{jj}}{A^0_{12} + Z_0 A_{12jj}} \quad (1-3.5)$$

Si Z_0 es un elemento unilateral, por lo tanto forma parte, tanto de la malla j como de la k , entonces fácilmente se ve que:

$$Z = Z_{11} = \frac{A^0 + Z_0 A_{kj}}{A^0_{11} + Z_0 A_{11kj}} \quad (1-3.6)$$

$$Z_T = Z_{21} = \frac{A^0 + Z_0 A_{kj}}{A^0_{12} + Z_0 A_{12kj}} \quad (1-3.7)$$

1-4. ECUACIONES A BASE DE NUDOS

Otra manera de resolver el circuito general es : considerando como incognitas a las tensiones de cada nudo, con lo que se necesita $n = n_t - 1$ ecuaciones, siendo n_t el número de nudos de la red. De esta manera la red se expresa en la forma:

$$\begin{aligned}
Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 + \dots + Y_{1n} E_n &= I_1 + g_{11} E_1 + \dots + g_{1n} E_n \\
Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 + \dots + Y_{2n} E_n &= I_2 + g_{21} E_1 + \dots + g_{2n} E_n \\
&\vdots \\
Y_{n1} E_1 + Y_{n2} E_2 + \dots + Y_{nn} E_n &= I_n + g_{n1} E_1 + \dots + g_{nn} E_n
\end{aligned}
\tag{1-4.1}$$

en donde: I_1, I_2, \dots, I_n son las fuentes de excitación de corriente en cada nudo; $g_{11} E_1, g_{12} E_2, \dots, g_{nn} E_n$ son las fuentes de corriente controladas por voltaje que actúan en cada nudo; E_1, \dots, E_n es la tensión en cada nudo con referencia a la tensión del nudo-base; $Y_{11}, Y_{22}, \dots, Y_{nn}$ son las admitancias totales que concurren a cada nudo; $Y_{12}, Y_{13}, \dots, Y_{21}, Y_{23}, \dots$ son las admitancias totales entre los nudos 1-2; 1-3; 2-1, 2-3, ... siendo estas negativas.

La resolución de este sistema es exactamente igual que para el caso de las mallas, intercambiando E por I, Z por Y y las conclusiones a las que llegan serán parecidas (duals) por lo tanto, todo lo que se diga para mallas también se dirá para nudos, lógicamente con una distinta interpretación física.

2.- FUNDAMENTOS DE LA TEORIA LINEAL DE LA REALIMENTACION

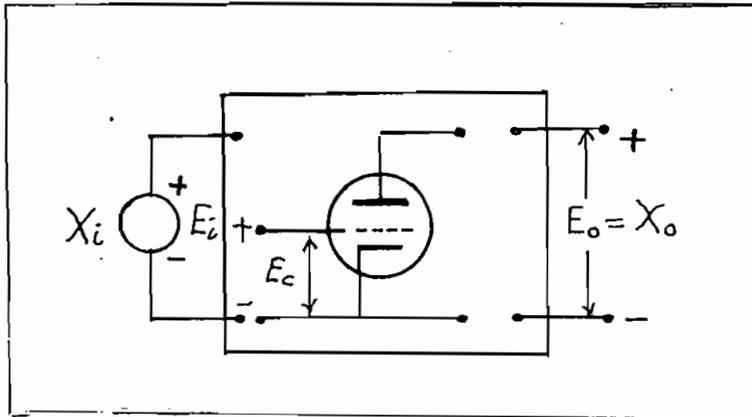
2-1 a) ECUACION FUNDAMENTAL DE LA REALIMENTACION

Supongamos que existe una función F , que es función de otras variables X_1, X_2, \dots, X_n , tal que:

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

y que por lo menos una de las X sea función de F , entonces decimos que existe realimentación alrededor de F puesto que F alimenta información hacia sus valores independientes X .

Consideremos un circuito formado por un elemento activo como por ejemplo un triodo ideal. A la entrada de este circuito aplicamos un voltaje de valor E_i y a la salida medimos E_o , para mayor generalidad llamaremos X_i a la entrada y X_o a la salida de cualquier sistema.



Un modelo del triodo constituye una fuente de tensión (μE_c) controlada por la tensión grilla-cátodo (E_c). A la fuente controlada vamos a llamarle por la letra $X_s (= \mu E_c)$ y a la variable controladora con $X_c (= E_c)$.

Puesto que solo nos vamos a interesar de sistemas lineales, podemos aplicar el teorema de la superposición para calcular los valores de X_0 y X_c sumando los efectos separados de las fuentes X_i y X_s .

$$X_0 = E_0 = t_{oi}X_i + t_{os}X_s = t_{oi}E_i + t_{os} E_c \mu \quad (2-1.1)$$

en donde definimos: t_{oi} como la transmisión desde la entrada X_i hasta la salida X_0 cuando $X_i = 1$ y $X_s = 0$; t_{os} es la transmisión desde la fuente X_s hasta la salida X_0 cuando $X_i = 0$ y $X_s = 1$.

$$X_c = E_c = t_{ci}X_i + t_{cs}X_s = t_{ci}E_i + t_{cs} E_c \mu \quad (2-1.2)$$

siendo: t_{ci} la transmisión desde la entrada X_i hasta X_c cuando $X_i = 1$ y $X_s = 0$; t_{cs} la transmisión desde la fuente X_s hasta X_c cuando $X_i = 0$ y $X_s = 1$.

Las transmisiones t_{ij} así definidas pueden representar la transformada de Laplace de la salida X_0 , (o de X_c) cuando la entrada X_i (o la fuente X_s) es una función impulso unitaria.

De la ecuación (2-1.2) tenemos que :

$$E_c = \frac{t_{ci}E_i}{1 - \mu t_{cs}}$$

Si llamamos $k = \mu$ y eliminamos E_c entre (2-1.3) y (2-1.1) tenemos que:

$$X_0 = t_{oi} E_i + t_{os} k \frac{t_{ci}E_i}{1 - kt_{cs}} = E_i \left(t_{oi} + \frac{kt_{ci}t_{os}}{1 - kt_{cs}} \right)$$

de donde, la función de transferencia (T) es:

$$\frac{X_0}{X_i} = T(s) = t_{oi} + \frac{kt_{ci}t_{os}}{1 - kt_{cs}} \quad (2-1.4)$$

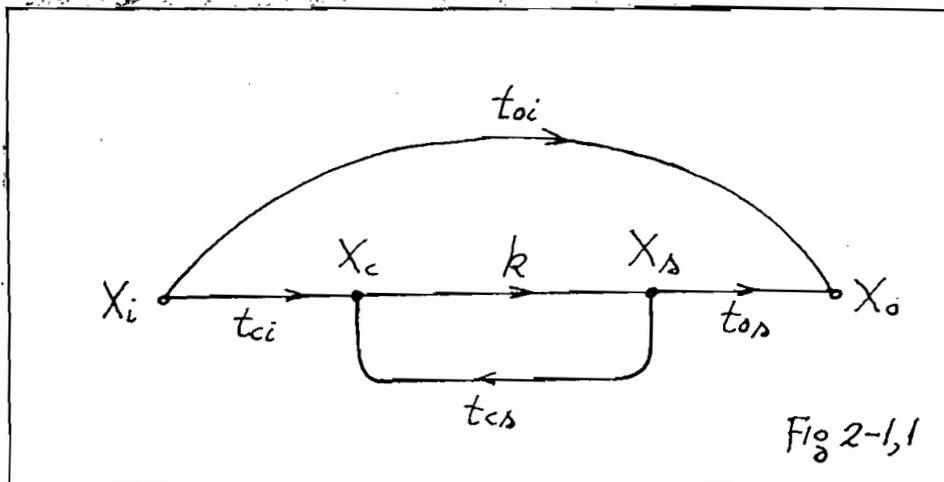
que es la ecuación fundamental de la teoría de la realimentación y de la cual se derivan todas las propiedades de la teoría lineal de la realimentación.

2-1 b) DIAGRAMA FUNDAMENTAL DE LA REALIMENTACION

Todos los procesos anteriores para la derivación de la ecuación (2-1.4) pueden ser visualizados por medio de los esquemas conocidos con el nombre de diagramas de flujo.

Si denotamos con X_i , X_c , X_s , X_o puntos que representen la entrada, variable controladora, variable controlada y salida respectivamente entonces podemos ver que relación existe entre estas por medio de las transmisiones.

En efecto t_{oi} es la transmisión desde X_i hasta X_o cuando $X_i = 1$ y $X_s = 0$, entonces dibujamos una línea que una directamente los puntos X_i con X_o en la dirección indicada, similarmente para los otros puntos como se indica en la figura 2-1.1.



En la figura 2-1.1 observamos que los puntos X_c y X_s están unidos por dos líneas k y t_{cs} . En realidad k no se define como una "transmisión" pero es importante colocarle en el diagrama puesto que es el elemento que relaciona a las variables controlada y controladora por medio de:

$$X_s(s) = k(s)X_c(s) \quad (2-1.5)$$

Se ve claramente en el diagrama de flujo que la realimentación se pone de manifiesto por la transmisión t_{cs} ; si $t_{cs} = 0$ no hay realimentación.

Si el circuito a analizarse contiene más de una fuente controlada, entonces se puede elegir como la variable X_s a cualquiera de ellas. Evidentemente los valores de las "transmisiones" para una X_s escogida serán, en general, distintas que para otra fuente controlada escogida, por lo tanto, para poder calcular la función transferencia T en un circuito con varias fuentes controladas es necesario especificar alrededor de que fuente se va a obtener las transmisiones.

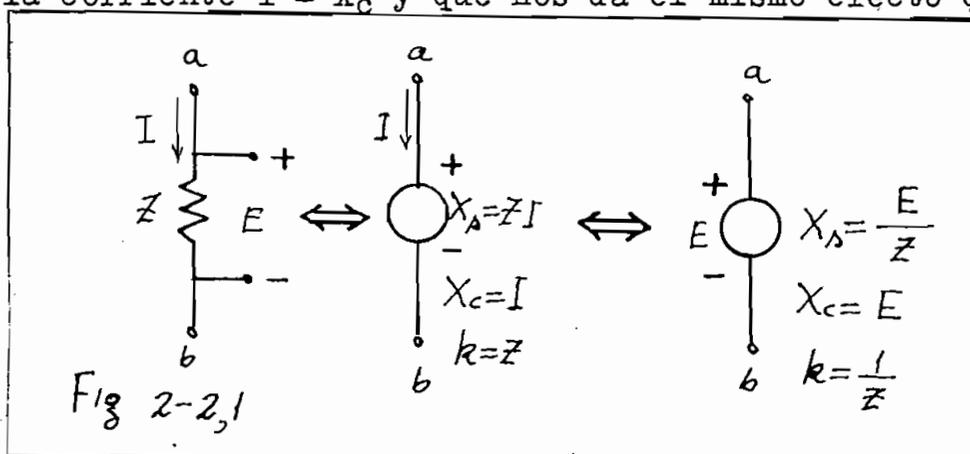
Un caso extremo corresponde a escoger una fuente X_s alrededor de la cual la realimentación sea cero.

Así, si tenemos una caja con varios pares de terminales, nos es imposible calcular su realimentación solo por medidas exteriores, es necesario que de antemano tengamos el elemento alrededor del cual establezcamos las propiedades de la realimentación del sistema.

2-2. EQUIVALENCIA DE UN ELEMENTO DE DOS TERMINALES CON UNA FUENTE CONTROLADA

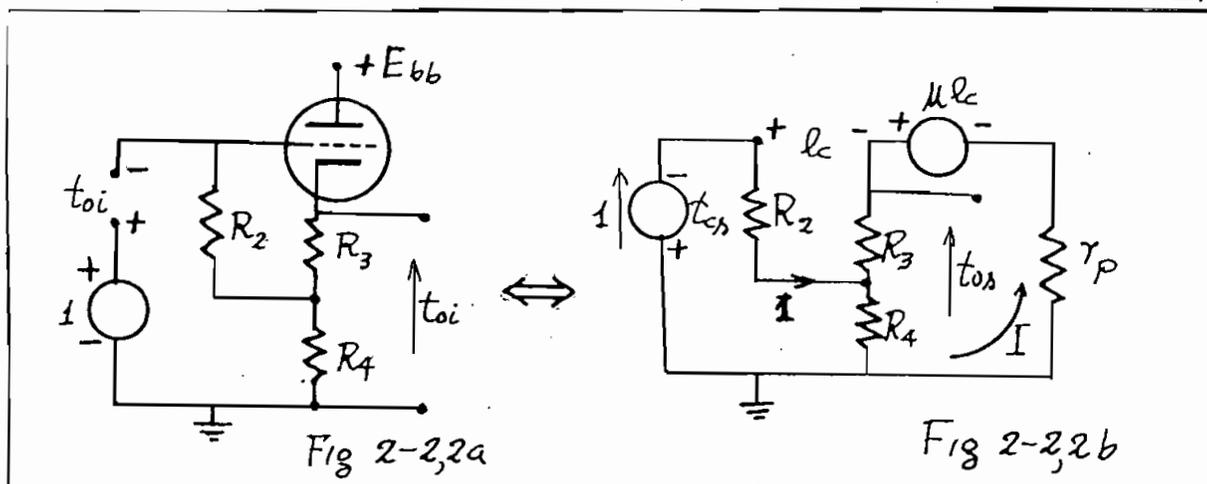
Como veremos posteriormente, es conveniente representar un elemento de dos terminales, como una impedancia, por medio de fuentes controladas.

Sea Z una impedancia pasiva por la cual circula una corriente I provocando una caída de tensión E , queremos representar a Z por medio de una fuente controlada, entonces decimos que $X_S = ZI$ es la fuente de tensión controlada por la corriente $I = X_C$ y que nos da el mismo efecto que Z .



Similarmente podemos representar a Z por medio de una fuente de corriente $X_S = E/Z$ controlada por voltaje $E = X_C$.

Como un ejemplo de aplicación de la equivalencia de una impedancia con fuentes controladas vamos a resolver un circuito seguidor catódico reemplazando R_1 con una fuente de corriente controlada por voltaje $I_1 = E_1/R_1 = I_1 G_1$; $X_S = I_1$; $X_C = E_1$; $k = G_1$. Las transmisiones t_{oi} y t_{ci} las calculamos a partir del circuito 2-2.2 a ($X_S = 0$, $X_1 = 1$).



Puesto que el circuito de rejilla esta abierto

(fig 2-2.2.a) previene de la aplicación de cualquier excitación a la rejilla, resultando:

$$t_{ci} = 1 ; t_{oi} = 0$$

De la figura 2-2.2.b ($X_i = 0 ; X_s = 1$) calculamos t_{cs} y t_{os}

$$\mu e_c = \mu(R_2 - R_3 I) = (R_3 + R_4 + r_p) I + R_4$$

$$I = \frac{\mu R_2 - R_4}{R_4 + r_p + (1 + \mu) R_3}$$

$$t_{os} = IR_3 + (I + 1)R_4 = \frac{\mu [R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4] + r_p R_4}{R_4 + r_p + (1 + \mu) R_3}$$

$$t_{cs} = - (I + 1)R_4 - R_2 I = - \frac{[r_p + (1 + \mu) R_3] (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (1 + \mu)}{R_4 + r_p + (1 + \mu) R_3}$$

y el valor de la función de transferencia es:

$$T = 0 + \frac{G_1 x_l x t_{os}}{1 - G_i t_{cs}} = \frac{G_i t_{os}}{1 - G_i t_{cs}}$$

2-3.a) DIFERENCIA DE RETORNO

Habíamos derivado la ecuación de la función de transferencia T como:

$$T = t_{oi} + \frac{kt_{ci}t_{os}}{1 - kt_{cs}} \quad (2-1.4)$$

junto con su diagrama de flujo (fig 2-1.1). Es importante conocer el efecto que tiene $k(s)$ sobre la función de transferencia $T(s)$, inmediatamente vemos que su efecto está dado por la cantidad $1 - kt_{cs}$.

La interpretación física de $1 - kt_{cs}$ es muy importante, y se puede ver fácilmente si se abre el lazo cerrado de la fig 2-1.1 en cualquier parte, por ejemplo en A A' (fig 2-3.1).

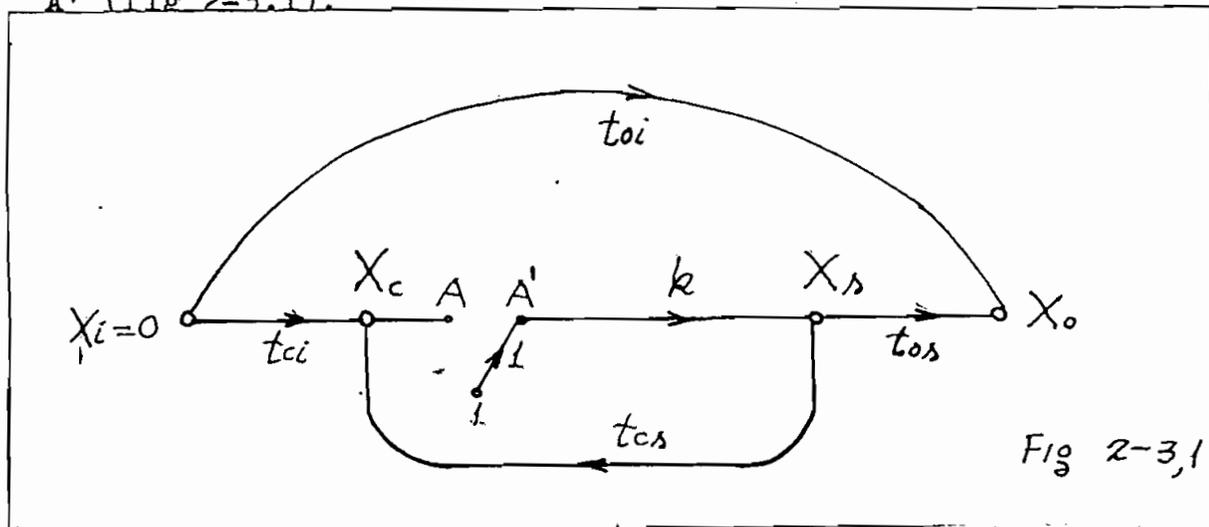


Fig 2-3,1

Si en la figura 2-3.1 hacemos $X_i = 0$ e inyectamos en el punto A' un impulso unitario de señal, entonces en el punto X_s la señal será $k \cdot 1 = k$ y en el punto A será kt_{cs} . En otras palabras; la señal que retorna desde el punto A' has-

ta A cuando en A' se inyecta un impulso unitario es kt_{cs} y la diferencia entre la señal inyectada y la señal de retorno es precisamente $1 - kt_{cs}$. Esta cantidad se denomina: diferencia de retorno para el elemento k cuyo símbolo es F_k :

$$F_k(s) = 1 - kt_{cs} \quad (2-3.1)$$

A la cantidad $-kt_{cs}$ la denominamos: transmisión de lazo o ganancia de lazo cuyo símbolo es L_k :

$$L_k(s) = -kt_{cs} \quad (2-3.2)$$

El efecto de k sobre T está dado por F_k , en otras palabras F_k es la única cantidad que nos permite estudiar los cambios que ocurren en T por medio de k, y es muy importante que las transmisiones t_{oi} , t_{os} , t_{ci} , t_{cs} son independientes del valor k, puesto que si una o más transmisiones dependen de k entonces T será función de k no solo por medio de F_k sino por medio de las transmisiones mismas y el significado de diferencia de retorno dado a $1 - kt_{cs}$ se perdería tanto como el significado de ganancia de lazo dado a $-kt_{cs}$, aunque, en realidad, analíticamente todos los pasos necesarios para obtener T sean correctos en cualquier caso.

El único ligamen que debe existir entre la variable controlada y la variable controladora es el valor $k(s)$ y este valor no debe aparecer en ninguna transmisión t_{ij} , entonces podemos decir que efectivamente $1 - kt_{cs}$ es la diferencia de retorno F_k y $-kt_{cs}$ es la ganancia de lazo L_k .

El problema que se nos presenta es la elección que debemos hacer de k para que todas las transmisiones sean independientes de k . Hemos visto que esto puede hacerse para un elemento de dos terminales, impedancia, por medio de su fuente controlada equivalente asociada. También podemos hacer para una fuente controlada como las que aparecen en los modelos de tubos o transistores.

Pero no podemos elegir una k un parámetro que entra en el circuito más de una vez como ocurre por ejemplo en los circuitos acoplados magnéticamente en donde $M = k_c \sqrt{L_1 L_2}$. Si hacemos $K = k_c$ entonces las transmisiones t serán dependientes de k puesto que tanto la tensión en L_1 como en L_2 dependen de M o sea dependen de la misma K_c .

Todo lo anterior se expresa en el siguiente teorema:

TEOREMA: La función de transferencia T de un sistema lineal de dos pares de terminales puede ser escrita en la forma:

$$T(s) = t_{oi} + \frac{kt_{ostci}}{1 - kt_{cs}}$$

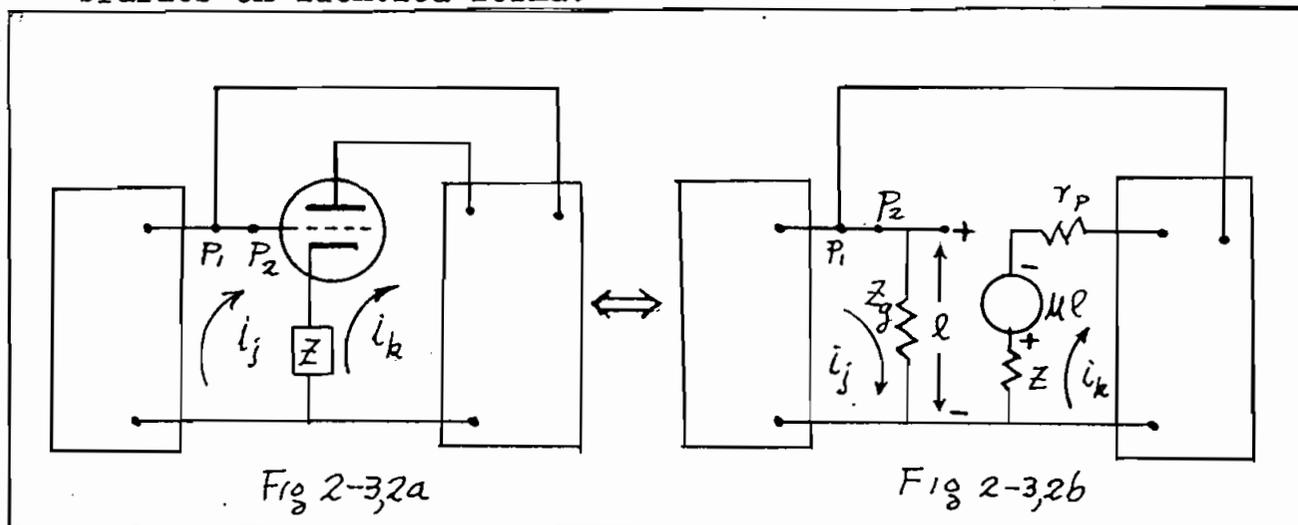
tal que todas las t_{ij} sean independientes de $k(s)$ con la condición de que k puede ser representada como una fuente controlada $X_s = kX_c$ y con la condición de que k aparezca solo en X_s y en ninguna otra parte.

A este teorema se le conoce con el nombre de "Teorema Bilinear" dado por H. Bode.

2-3.b) DIFERENCIA DE RETORNO PARA REDES EN GENERAL

En la expresión $F_k = 1 - kt_{cs}$ llamamos al valor k , transmisión directa y a t_{cs} transmisión inversa. Vamos a estudiar el significado que tiene F para una red activa (con realimentación) en general.

Sea $[A]$ la matriz que está determinada por una red activa y cuyo determinante es Δ . Consideremos que un elemento activo como un tubo se encuentre formando parte tanto de la malla j y k o sea; el circuito de grilla forma parte de la malla j y el de placa de la malla k ; también podemos considerar en lugar de mallas, pares de nudos y nombrarlos en idéntica forma.



La interpretación física para la transmisión de lazo en el gráfico 2-3.2 es que si se abre el circuito entre los puntos P_1 y P_2 y se inyecta en P_2 un voltaje unitario, en P_1 recibiremos kt_{cs} volts puesto que en la placa del tubo tendremos $k = \mu \cdot 1$ volts y $t_{cs} \mu$ será la ten -

sión de retorno.

A la fuente controlada μl podemos reemplazarla por $\mu Z_g i_j$ puesto que $e = Z_g i_j$ en donde μZ_g se define como la impedancia de transferencias o impedancia mutua en tre las mallas j y k . Es importante notar que en este caso la impedancia es unilateral.

Consideremos que sobre la malla k actúa solo la fuente $\mu Z_g i_j$, por lo tanto tenemos que:

$$Z_{k1}i_1 + Z_{k2}i_2 + \dots + Z_{kj}i_j + Z_{kk}i_k + \dots + Z_{kn}i_n = -\mu Z_g i_j \quad (2-3.3)$$

pasando el miembro de la derecha a la izquierda tenemos:

$$Z_{k1}i_1 + Z_{k2}i_2 + \dots + (Z_{kj} + \mu Z_g)i_j + \dots + Z_{kn}i_n = 0 \quad (2-3.4)$$

en donde la impedancia de transferencia total es $Z_{kj} + \mu Z_g$.

Puesto que estamos tomando como variable contro ladora a la corriente i_j , la transmisión directa k será: $k = \mu Z_g = Z_t$ y la podemos denominar trasimpedancia; la transmisión inversa t_{cs} se puede evaluar haciendo la fuen te $X_s = \mu l = 1$ (con $X_i = 0$), o también cortocircuitando la impedancia μZ_g y colocando en serie una fuente de voltaje unitaria; con esto la corriente i_j será:

$$i_j = \frac{A_{kj}}{A^\circ} (-1) = t_{cs} \quad (2-3.5)$$

siendo A° el determinante A cuando $Z_t = 0$

La diferencia de retorno es por consiguiente:

$$F_k = 1 - kt_{cs} = 1 + Z_t \frac{A_{kj}}{A^\circ} \quad (2-3.6)$$

$$F_k = F_{Z_t} = F = \frac{A^\circ + Z_t A_{kj}}{A^\circ}$$

Pero por la ecuación 1-3.2 tenemos que:

$$F = \frac{A}{A^\circ} \quad (2-3.7)$$

Si en lugar de considerar ecuaciones de malla hubieramos tomado ecuaciones de nudo, el resultado al que llegamos es el mismo, logicamente con la consideración de que A es el determinante de admitancias.

En forma general podemos expresar el siguiente teorema:

TEOREMA: La diferencia de retorno F alrededor de un elemento Z_t (o Y_t) es igual al determinante total del circuito dividido para el determinante que resulta cuando se hace dicho elemento igual a cero.

Si en lugar de hacer $Z_t = 0$ (o $Y_t = 0$) consideramos $Z_t = m$ o sea que no cortocircuitamos totalmente a la impedancia Z_g y dejamos alguna ganancia dentro del circuito (caso práctico), entonces la diferencia de retorno se tomará alrededor del elemento $k = Z_t - m$, quedando:

$$F = 1 + (Z_t - m) \frac{A_{kj}}{A^m} = \frac{A^m + Z_t A_{kj} - m A_{kj}}{A^m} =$$

$$= \frac{A^\circ + m A_{kj} + Z_t A_{kj} - m A_{kj}}{A^m} = \frac{A^\circ + Z_t A_{kj}}{A^m} \quad (2-3.8)$$

en donde A^m es el determinante A cuando $Z_t = m$.

Cuando $m = 0$ estamos en el caso anterior, por lo

tanto (2-3.8) expresa el teorema en forma general, más aún podemos expresar a F como sigue:

$$F^{(m)} = \frac{A}{A^m} = \frac{A/A^\circ}{A^m/A^\circ} = \frac{F(W)}{F(m)} = F^m(W) \quad (2-3.9)$$

TEOREMA: La diferencia de retorno para un nivel m cualquiera es igual a la diferencia de retorno cuando W tiene su valor normal y con referencia a $W = 0$ (nivel cero), dividido para la diferencia de retorno cuando $W = m$ y con nivel $m = 0$.

2-3.c) DIFERENCIA DE RETORNO PARA ELEMENTOS BILATERALES

Si en lugar de considerar la realimentación alrededor de un elemento unilateral, consideramos un elemento bilateral, por lo tanto, la impedancia Z_t o la admitancia Y_t es parte de Z_{jj} o de Y_{jj} respectivamente, entonces la diferencia de retorno será:

$$F = 1 + Z_t \frac{A_{jj}}{A^\circ} \quad (2-3.10)$$

Evidentemente A°/A_{jj} es la impedancia de punto motriz de la malla j :

$$\frac{E_j}{i_j} \equiv \frac{A^\circ}{A_{jj}} \quad (2-3.11)$$

por lo tanto si E_j es un generador en la malla j , la impedancia presentada a los terminales del generador es A°/A_{jj} cuando $Z_t = 0$. La transmisión de lazo $L = Z_t A_{jj}/A^\circ$ es la relación entre la impedancia Z_t y la impedancia presentada

al elemento Z_t por el resto del circuito.

Si consideramos a Z_t como la impedancia interna del generador y Z_R la impedancia exterior, entonces en ausencia de Z_t ($Z_t = 0$) la corriente que circula para $E_j = 1$ es $1/Z_R$, pero si se hace intervenir a Z_t y se eleva la tensión en E_j tal que la corriente sea $1/Z_R$, entonces la caída de tensión en Z_t es $-Z_t/Z_R$ que se puede considerar como la tensión que Z_t devuelve al generador. Por lo tanto la diferencia de retorno representa el voltaje neto aprovechable por el circuito de salida.

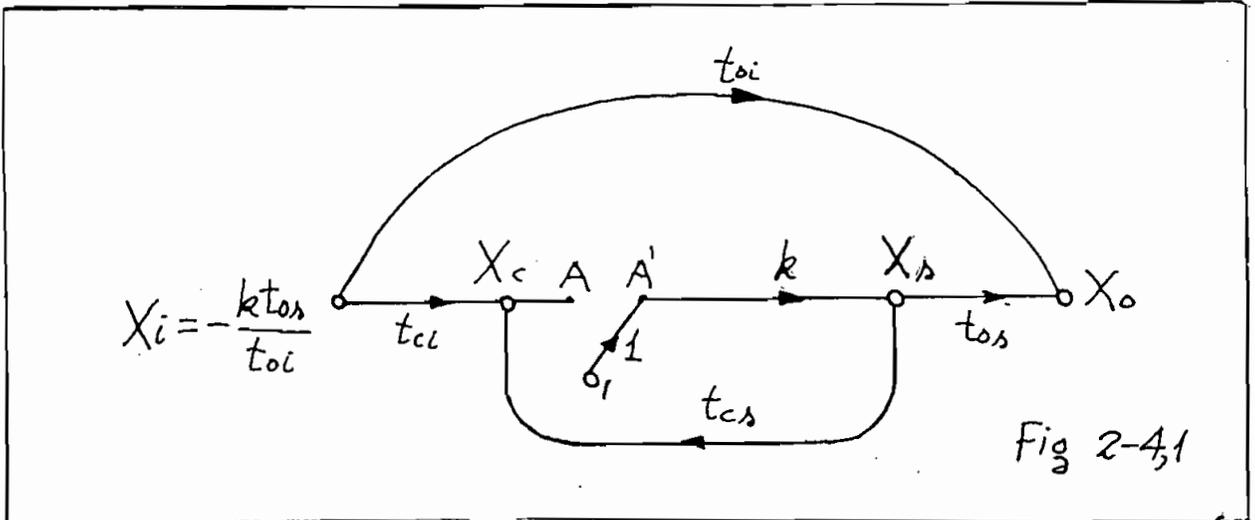
2-4.a) DIFERENCIA DE RETORNO NULA

La ecuación fundamental de la realimentación podemos escribirla como sigue:

$$T = t_{oi} + \frac{kt_{ci}t_{os}}{1 - kt_{cs}} = t_{oi} \left[\frac{1 - kt_{cs} + kt_{os}t_{ci}/t_{oi}}{1 - kt_{cs}} \right] =$$

$$= t_{oi} \cdot \frac{Q}{1 - kt_{cs}} \quad (2-4.1)$$

Vamos a dar una interpretación física al valor Q . Para esto abrimos el diagrama de flujo de la fig 2-1.1 en los puntos A y A' e introducimos en el punto A' un impulso unitario, la diferencia de retorno es $F_k = 1 - kt_{cs}$ siempre que $X_i = 0$. En la fórmula 2-4.1 observamos que Q es la diferencia entre la señal inyectada en A' y la cantidad $kt_{cs} - kt_{os}t_{ci}/t_{oi}$.



Si en la figura 2-4.1 tratamos de ver a Q como la diferencia entre las señales de A y de A' debemos insertar en la entrada una señal adicional $X_i = -kt_{os}/t_{oi}$ de tal manera que en A tengamos justamente $kt_{cs} - kt_{os}t_{ci}/t_{oi}$. Bajo estas condiciones tenemos en la salida:

$$X_o = t_{oi}X_i + t_{os}X_s = -t_{oi} \frac{kt_{os}}{t_{oi}} + t_{os}k = 0 \quad (2-4.2)$$

por lo que Q representa la diferencia de retorno para la condición especial en que la salida es nula, razón por la cual se lo denomina diferencia de retorno nula y se lo expresa en la forma:

$$Q = 1 - kt_{cs} \text{ (nula)} = F_k \text{ (nula)} \quad (2-4.3)$$

de donde la función de transferencia es:

$$T(s) = t_{oi} \frac{F_k \text{ (nula)}}{F_k} \quad (2-4.4)$$

2-4.b) DIFERENCIA DE RETORNO NULA PARA REDES

Vamos a estudiar, en forma general, el significado de las transmisiones que definen la ecuación fundamental de la realimentación.

En una red activa hemos dicho que k representa la trasimpedancia o la trasadmitancia para mallas o nudos respectivamente, entonces es conveniente llamar a k un valor W que nos represente ya sea una impedancia o admitancia. De esta manera, la ecuación de la diferencia de retorno servirá tanto para ecuaciones a base de mallas o a base de nudos, puesto que en todo caso, esta ecuación tendrá la misma forma. En este punto es conveniente llamar a W trasimpedancia.

Si la función de transferencia T nos representa una ganancia y si W_R es la impedancia o admitancia de salida que se encuentra en la malla m o nudo m y la función de excitación de entrada la suponemos en la malla a o en el nudo a respectivamente, entonces si W_R es la impedancia de salida tenemos que:

$$E_R = i_m W_R = \frac{A_{am}}{A} E_a W_R \Rightarrow T = \frac{E_R}{E_a} = \frac{A_{am}}{A} W_R \quad (2-4.5)$$

y si W_R es la admitancia de salida entonces:

$$I_R = \varrho_m W_R = \frac{A_{am}}{A} I_a W_R \Rightarrow I = \frac{I_R}{I_a} = \frac{A_{am}}{A} W_R \quad (2-4.6)$$

en donde vemos que la función T tiene la misma forma para (2-4.5) y (2-4.6) lógicamente con la debida interpretación

de W_R y los determinantes.

Hemos supuesto que W forma parte tanto de la malla k como de la j si es impedancia, y de los nudos k y j si es admitancia, entonces podemos descomponer a los determinantes de las ecuaciones (2-4.5) y (2-4.6) por medio de (1-3.2) y nos da:

$$T = \frac{A_{am}}{A} W_R = \frac{A^\circ_{am} + WA_{amkj}}{A^\circ + WA_{kj}} W_R \quad (2-4.7)$$

Si hacemos $-W = k = 0$ entonces de la ecuación (2-1.4) y (2-4.7) nos da:

$$T_0 = t_{oi} = \frac{A^\circ_{am}}{A^\circ} W_R \quad (2-4.8)$$

Además sabemos que $t_{cs} = A_{kj}/A^\circ$ y $k = -W$

Puesto que debemos calcular t_{ci} y t_{os} debemos transformar la ecuación (2-4.7) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{A^\circ_{am} + WA_{amkj}}{A^\circ + WA} W_R = \frac{A^\circ_{am} + WA_{amkj}}{A^\circ F} W_R = \\ &= \frac{(A^\circ_{am} W_R / A^\circ) (1 + WA_{amkj} / A^\circ_{am})}{F} = T \quad (2-4.9) \end{aligned}$$

En determinantes se cumple la identidad:

$$AA_{abcd} = A_{ab}A_{cd} - A_{ad}A_{cb}$$

por lo cual tenemos que:

$$A^\circ A_{amkj} = A^\circ_{am} A_{kj} - A_{aj} A_{km} \quad (2-4.10)$$

y la ecuación (2-4.9) queda en la forma:

001547

$$T = \frac{1}{F} \frac{A_{am}^{\circ} W_R}{A^{\circ}} \left[1 + W \frac{A_{am}^{\circ} A_{kj} - A_{aj} A_{km}}{A^{\circ} A_{am}^{\circ}} \right] =$$

$$= \frac{1}{F} \frac{A_{am}^{\circ} W_R}{A^{\circ}} \left[1 + W \frac{A_{kj}}{A^{\circ}} - W \frac{\frac{A_{aj} A_{km} W_R}{A^{\circ} A^{\circ}}}{\frac{A_{am}^{\circ} W_R}{A^{\circ}}} \right] \quad (2-4.11)$$

De esta expresión comparandola con la ecuación fundamental de la realimentación.

$$T = t_{oi} + \frac{k t_{ci} t_{os}}{1 - k t_{cs}} = \frac{1}{F} \left[t_{oi} \left(1 - k t_{cs} + k \frac{t_{ci} \cdot t_{os}}{t_{oi}} \right) \right]$$

tenmos que:

$$t_{oi} = \frac{A_{am}^{\circ} W_R}{A^{\circ}} ; t_{cs} = \frac{A_{kj}}{A^{\circ}} ; t_{ci} = \frac{A_{aj}}{A^{\circ}} ; t_{os} = \frac{A_{km} W_R}{A^{\circ}}$$

$$k = - W \quad (2-4.12)$$

Si consideramos la función de salida una tensión, entonces, ya sea por simple inspección o utilizando las transmisiones tenemos (ecuación 2-1.1)

$$E_R = i_m W_R = \frac{A_{am}^{\circ}}{A^{\circ}} E_a + \frac{A_{km} W_R}{A^{\circ}} E_k \quad (2-4.13)$$

siendo E_a la tensión de entrada en la malla a, E_k la tensión controlada en la malla k, se utilizan los determinantes con $W = 0$ puesto que W solo puede intervenir en la tensión E_a .

Al excitar en la malla j con una tensión unitaria entonces $E_a = - W \cdot 1 = - W$ y si a la entrada excitamos

con:

$$E_a = W \frac{A_{km} W_R}{A^\circ} \bigg/ \frac{A^\circ_{am} W_R}{A^\circ} = W A_{km} / A^\circ_{am} \quad (2-4.14)$$

entonces la tensión de salida será:

$$E_R = \frac{A^\circ_{am} W_R}{A^\circ} \frac{W A_{km}}{A^\circ_{am}} - \frac{A_{km} W_R}{A^\circ} W = 0 \quad (2-4.15)$$

con lo que se demuestra que el término en paréntesis de la ecuación (2-4.11) constituye la diferencia de retorno nula:

$$Q = F_{(nula)} = 1 + W \frac{A_{kj}}{A^\circ} - W \frac{\frac{A_{aj}}{A^\circ} \frac{A_{km}}{A^\circ} W_R}{\frac{A^\circ_{am} W_R}{A^\circ}} \quad (2-4.16)$$

2-5 INVARIANCIA DEL NUMERADOR DE LA DIFERENCIA DE RETORNO PARA TODA REFERENCIA

Hemos dicho que las transmisiones de un sistema con realimentación serán, en general, distintas para cada referencia escogida como una fuente controlada. Sin embargo, para cada referencia tomada, existe un factor que es comun, este factor resulta ser el numerador de la diferencia de retorno $F_{kj} = 1 - k_j t_{cs}(k_j)$, donde $t_{cs}(k_j)$ es la transmisión t_{cs} para la referencia k_j . Lo anterior establecemos concretamente en el teorema siguiente:

TEOREMA: Para cualquier transmisión $t_{cs}(k_j) \neq 0$, el numerador de

$$F_{kj} = 1 - k_j t_{cs}(k_j)$$

será el mismo sin importar el k_j escogido como referencia.

Para la demostración de este teorema consideramos el gráfico 2-5.1 de donde se trata de evaluar t_{cs} para la referencia k_1 , o sea para $X_{s1} = k_1 X_{c1}$. Podemos aplicar la ecuación fundamental de la realimentación considerando como fuente controlada a $X_{s2} = k_2 X_{c2}$; la salida debe ser X_{c1} y la entrada la fuente $X_{s1} = k_1 X_{c1}$, con esto y poniendo las transmisiones con los subíndices t_{cisj} para indicar la transmisión desde la fuente X_{sj} hasta X_{ci} , tenemos por la definición de las transmisiones correspondientes:

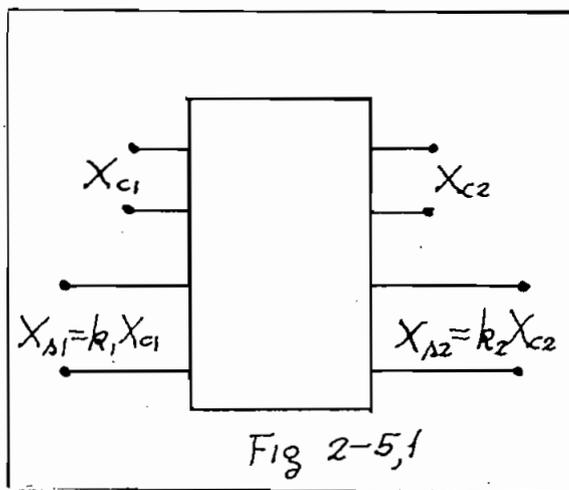


Fig 2-5,1

$$T = t_{c1s1} = (t_{c1s1})_{X_{s2}=0} + \frac{k_2 (t_{c2s1})_{X_{s2}=0} (t_{c1s2})_{X_{s1}=0}}{1 - k_2 (t_{c2s2})_{X_{s1}=0}} \quad (2-5.1)$$

Ahora si evaluamos t_{cs} para la referencia k_2 , similarmente utilizamos el método anterior pero siendo $X_{s1} = k_1 X_{c1}$ la fuente controlada, $X_{s2} = k_2 X_{c2}$ la entrada y X_{c2} la salida y tenemos que:

$$T = t_{c2s2} = (t_{c2s2})_{X_{s1}=0} + \frac{k_1 (t_{c1s2})_{X_{s1}=0} (t_{c2s1})_{X_{s2}=0}}{1 - k_1 (t_{c1s1})_{X_{s2}=0}} \quad (2-5.2)$$

Las diferencias de retorno son por definición :

$$F_{k1} = 1 - k_1 t_{c1s1} ; \quad F_{k2} = 1 - k_2 t_{c2s2} \quad (2-5.3)$$

de donde:

$$F_{k1} = \frac{1 - k_2 (t_{c2s2})_{X_{s1}=0} - k_1 (t_{c1s1})_{X_{s2}=0} + k_1 k_2 [(t_{c1s1})_{X_{s2}=0} (t_{c2s2})_{X_{s1}=0} - (t_{c2s1})_{X_{s2}=0} (t_{c1s2})_{X_{s1}=0}]}{1 - k_2 (t_{c2s2})_{X_{s1}=0}} \quad (2-5.4)$$

$$F_{k2} = \frac{1 - k_1 (t_{c1s1})_{X_{s2}=0} - k_2 (t_{c2s2})_{X_{s1}=0} + k_1 k_2 [(t_{c1s1})_{X_{s2}=0} (t_{c2s2})_{X_{s1}=0} - (t_{c2s1})_{X_{s2}=0} (t_{c1s2})_{X_{s1}=0}]}{1 - k_1 (t_{c1s1})_{X_{s2}=0}} \quad (2-5.5)$$

y se ve que F_{k1} y F_{k2} tienen el mismo numerador, por lo que:

$$\frac{F_{k1}}{F_{k2}} = \frac{1 - k_1 (t_{c1s1})_{X_{s2}=0}}{1 - k_2 (t_{c2s2})_{X_{s1}=0}} = \frac{(F_{k1})_{k2=0}}{(F_{k2})_{k1=0}} \quad (2-5.6)$$

$$\text{Si se tiene que } (t_{c2s1})_{X_{s2}=0} = 0 \quad \text{ó} \quad (t_{c1s2})_{X_{s1}=0} = 0$$

entonces evidentemente el numerador de F_{k1} será distinto del numerador de F_{k2} por esta razón es importante decir que todas las transmisiones t_{cjsi} deben ser distintas de 0.

Si un sistema se conoce F_{k1} para referencia k_1 , entonces se puede calcular F_{k2} para referencia k_2 puesto que ya se sabe que sus numeradores son iguales y además que $F_{k2} = 1 - k_2 t$ con la condición de que t sea independiente de k_2 .

Para el caso de una red en general hemos deducido que:

$$F_{W1} = \frac{A}{A^0} = \frac{A(W1, W2)}{A(0, W2)} \quad (2-5.7)$$

en donde se pone claramente de manifiesto cuando se hace $W_1=0$

similarmente para el elemento W_2 :

$$F_{W_2} = \frac{A}{A^0} = \frac{A(W_1, W_2)}{A(W_1, 0)} \quad (2-5.7)$$

En las que los numeradores son iguales. También vemos que:

$$\frac{F_{W_1}}{F_{W_2}} = \frac{A(W_1, 0)}{A(0, W_2)} = \frac{A(W_1, 0)}{A(0, 0)} \frac{A(0, 0)}{A(0, W_2)} = \frac{(F_{W_1})_{W_2=0}}{(F_{W_2})_{W_1=0}}$$

(2-5.8)

3.- PROPIEDADES DE LA REALIMENTACION

La razón fundamental para llegar al teorema bilinear de la realimentación quedó aclarada cuando estudiamos la influencia que tiene el elemento k sobre la función de transferencia T .

El parámetro de k puede ser una resistencia, inductancia, un factor de amplificación de un tubo, o bien puede ser una función de transferencia de expresión complicada para sistemas grandes; la única condición que se exige es que todas las transmisiones necesarias para calcular T deben ser independientes de k , solo es posible encontrar la relación $X_s = kX_c$ entre la variable controlada y la controladora.

Vamos a obtener relaciones útiles como aplicaciones del teorema Bilinear.

3-1.a) SENSITIVIDAD DE PARAMETROS CUANDO $t_{oi} = 0$

Supongamos que en un sistema se tiene un elemento de propiedades físicas adecuadas para ser usados. Pero este elemento está sujeto a una variación de sus características físicas ya sea por la influencia de su medio ambiente como la temperatura, humedad, presión, etc, o ya sea por la vejez del mismo o por tolerancias de manufactura.

Si es que se exige que a pesar de las variaciones que pueda sufrir el elemento considerado, alguna propiedad o

propiedades se mantengan constantes se emplea la realimentación alrededor de dicho elemento.

Quantitativamente se dice que un elemento es más sensible que otro cuando mayores sean las variaciones que sufra el elemento para similares condiciones ambientales y de edad.

Por medio de la realimentación se consigue disminuir la sensibilidad del elemento. Generalmente los elementos más sensitivos son los activos, por ejemplo: tubos, transistores, conversores de energía, generadores, motores.

Sea k el elemento sensible en consideración, entonces podemos asociar a k con una fuente controlada tal que $X_s = kX_i$. Además queremos que una función de transferencia T se mantenga lo más constante posible, entonces aplicamos realimentación alrededor de k y la función de transferencia será:

$$T = t_{oi} + kt_{ci}t_{os} / (1 - kt_{cs})$$

Nos interesa el valor $T = T(k)$ o sea la influencia de las variaciones de k sobre T y tal que las variaciones de T sean lo más pequeñas posibles.

Para esto definimos la sensibilidad de T hacia k (cuyo símbolo es S_k^T) de la manera siguiente:

$$S_k^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln k} = \frac{\partial T/T}{\partial k/k} \quad (3-1.1)$$

de aquí se observa que S_k^T es el cambio relativo de T con

respecto al cambio relativo de k para incrementos infinitesimales. Por la definición de $T'(s)$ y considerando que $t_{oi} \approx t_o$ tenemos:

$$S_k^T = \frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial k} = \frac{k}{T} \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{k t_{oi} t_{os}}{1 - k t_{cs}} \right] = \frac{k}{T} \frac{(1 - k t_{cs}) t_{oi} t_{os} + k t_{oi} t_{os} t_{cs}}{(1 - k t_{cs})^2}$$

$$S_k^T = \frac{k}{T} \frac{t_{oi} t_{os}}{(1 - k t_{cs})^2} = \frac{1}{1 - k t_{cs}} = \frac{1}{F_k} \quad (3-1.2)$$

entonces para que S_k^T sea pequeño, $|F_k|$ debe ser grande o sea $L = -k t_{cs}$ debe ser grande.

Si en lugar de tener incrementos infinitesimales se tienen cambios considerables, entonces procedemos de la siguiente manera: sea T_o y k_o los valores iniciales del sistema que sufren una variación ΔT y Δk , entonces:

$$T_f = T_o + \Delta T \quad ; \quad k = k_o + \Delta k \quad (3-1.3)$$

definimos la sensibilidad por la expresión:

$$S_k^T = \frac{\Delta T / T_f}{\Delta k / k_f} \quad (3-1.4)$$

en donde se toma en cuenta los valores finales T_f y k_f ;

$$S_k^T = \frac{\Delta T / T_f}{\Delta k / k_f} = \frac{(T_f - T_o) / T_f}{(k_f - k_o) / k_f} = \frac{1 - T_o / T_f}{1 - k_o / k_f} =$$

$$= \frac{1 - \frac{k_o t_{oi} t_{os}}{1 - k_o t_{cs}} \cdot \frac{1 - k_f t_{cs}}{k_f t_{oi} t_{os}}}{1 - k_o / k_f} = \frac{1 - \frac{k_o}{k_f} \cdot \frac{1 - k_f t_{cs}}{1 - k_o t_{cs}}}{1 - k_o / k_f} =$$

$$= \frac{k_f - k_f k_o t_{cs} - k_o + k_o k_f t_{cs}}{(k_f - k_o)(1 - k_o t_{cs})} = \frac{1}{1 - k_o t_{cs}} = \frac{1}{F_{k_o}} = S_k^T \quad (3-1.5)$$

siempre que $0 \approx t_{oi} \ll T$. Otra forma util es expresar T_o/T_f :

$$1 - \frac{T_o}{T_f} = 1 - \frac{k_o}{k_f} \frac{1 - k_f t_{cs}}{1 - k_o t_{cs}} = \frac{k_f - k_f k_o t_{cs} - k_o + k_o k_f t_{cs}}{k_f (1 - k_o t_{cs})} = \frac{1 - k_o/k_f}{1 - k_o t_{cs}}$$

$$\frac{T_o}{T_f} = 1 - \frac{1 - k_o/k_f}{1 - k_o t_{cs}} = \frac{1 - k_o t_{cs} - 1 + k_o/k_f}{1 - k_o t_{cs}} = \frac{(k_o/k_f) - k_o t_{cs}}{1 - k_o t_{cs}}$$

$$\frac{T_o}{T_f} = \frac{(k_o/k_f) + L_o}{1 + L_o}$$

(3-1.5)

Otra manera de definir la sensibilidad para variaciones grandes es:

$$S_k^T = \frac{\Delta T/T_o}{\Delta k/k_o}$$

en donde se toma en cuenta los valores iniciales T_o y k_o , con lo que finalmente se llega a:

$$S_k^T = \frac{1}{F k_f}$$

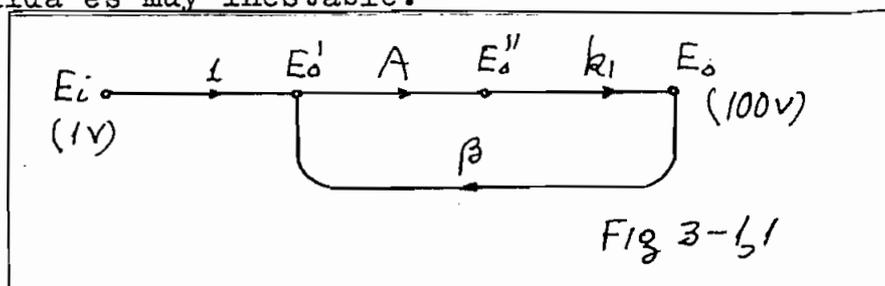
Nosotros utilizaremos la definición dada anteriormente, o sea con los valores finales T_f y k_f .

EJEMPLOS

Supongamos que la resistencia de carga de un sistema puede tener cualquier valor entre $100 \Omega \leq R_L \leq 100000 \Omega$. Si con un voltaje de entrada $E_i = 1,0$ voltios se desea tener a la salida una tensión de 100 voltios con una variación máxima permisible del $\pm 1\%$. Se tiene además una resistencia constante en el circuito de salida de $R_s = 10000 \Omega$.

Para la solución de este problema vamos a aplicar realimentación alrededor del elemento k junto con un amplificador de ganancia A tal como se indica en la figura: 3-1.1. Este amplificador proporciona la amplificación muy alta necesaria para bajar la sensibilidad del elemento.

Si no se tiene realimentación vemos claramente que debido a la gran variación de la resistencia R_L , el voltaje de salida es muy inestable.



El elemento alrededor del cual se tiene realimentación es:

$$k = Ak_1 = AR_L / (R_L + R_S)$$

$$\text{Además tenemos: } \frac{\Delta T}{T_f} = \frac{101 - 99}{101} = \frac{2}{101}$$

$$k_o = \frac{A \times 100}{100 + 10000} = \frac{100A}{10100} = \frac{A}{101}; \quad k_f = \frac{100000 A}{100000 + 10000} = \frac{10A}{11}$$

$$\Delta k = k_f - k_o = \frac{10A}{11} - \frac{A}{101} = \frac{1000A}{11 \times 101}$$

$$\frac{\Delta k}{k_f} = \frac{1000A}{11 \times 101} \times \frac{11}{10A} = \frac{100}{101} \approx 1$$

Debemos calcular A y β , para esto tenemos que:

$$\frac{\Delta T}{T_f} = \frac{\Delta k}{kf} S_k^T \leq \frac{2}{101} \Rightarrow S_k^T = \frac{1}{1 - \beta A/101} \leq \frac{2}{101} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \beta A/101 \geq \frac{101}{2} = 50,5$$

Si βA es negativo entonces: $1 + \frac{|\beta A|}{101} \geq 50,5 \Rightarrow |\beta A| \geq 5000$

La función de transferencia para $R_L = 100 \Omega$ es:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{99}{1} = 99 = \frac{(A/101) \cdot 1 \cdot 1}{1 - \frac{A}{101} \beta} = \frac{A/101}{1 + |\beta A|/101} \Rightarrow 51 \cdot 99 =$$

$$= \frac{A}{101} \Rightarrow A \approx 500000 \Rightarrow \beta = 5000/500000 = 1/100.$$

que son los valores de A y de β mínimos necesarios.

En este problema no hemos tomado en cuenta la influencia de la frecuencia sobre el elemento, exactamente la frecuencia debe ser cero.

Vamos a considerar un ejemplo en el que la frecuencia se toma en cuenta.

Supongamos que un elemento k de un sistema tiene la forma: $k(s) = a/(bs+c)$ en donde s es la frecuencia compleja. Deseamos mantener la función de transferencia T en un rango de variación máximo del $\pm 5\%$ para un rango de frecuencias 0 a 4 rad/seg y con variaciones de $a/c = m$ entre 1 y 4; de $b/c = n$ entre 0,4 y 2. Además T a la frecuencia 0 rad/seg nos debe dar $T(0) = 1$. Se desprecia t_{oi} .

Como en el ejemplo anterior debemos aplicar realimentación alrededor de k para disminuir su sensibilidad.

Hemos visto que:

$$\frac{T_o}{T_f} = \frac{(k_o/k_f) + L_o}{1 + L_o}$$

el problema es encontrar alguna L_o tal que la función T se mantenga dentro de los límites especificados a pesar de las variaciones de (k_o/k_f) .

Es importante grafizar en el plano complejo el significado de T_o/T_f para lo cual suponemos una curva $-L_o(s) = -L_o(j\omega)$ en la fig. 3-1.2. Necesitamos el valor k_o/k_f en este mismo gráfico, para lo cual debemos encontrar una k_o y k_f de la expresión:

$$k(s) = \frac{a}{bs + c} = \frac{a/c}{\frac{b}{c}s + 1} = \frac{m}{ns + 1}$$

Arbitrariamente escogemos para k_o el valor: $k_o = 1/(2s+1)$, entonces k_f es: $k_f = 4/(0,4s + 1)$, de donde:

$$\frac{k_o}{k_f} = \frac{1 + 0,4s}{4(2s + 1)} = \frac{1 + j0,4\omega}{4 + j8\omega}$$

Una expresión de tipo anterior facilmente se demuestra que el lugar geométrico en el plano complejo es un círculo. En general la expresión:

$$X + jy = \frac{a + jbw}{c + jd\omega}$$

es un círculo en el plano complejo con centro: $y = 0$;

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \right) \text{ y radio } R = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{d} - \frac{a}{c} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right|.$$

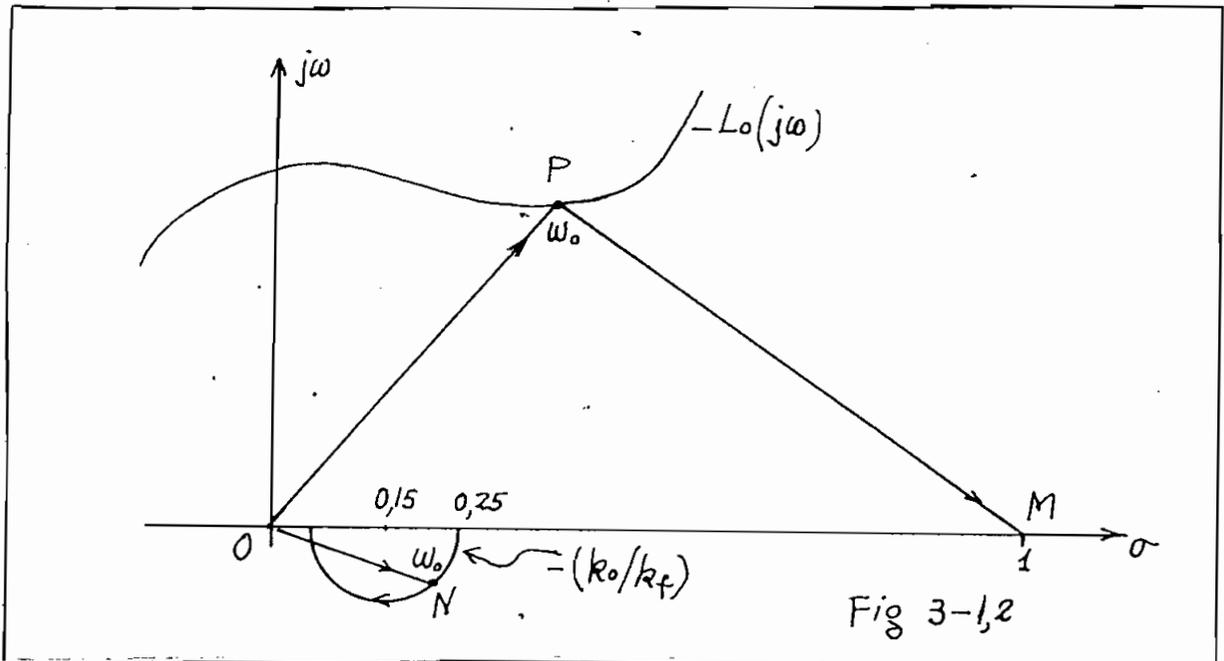
Por lo tanto el círculo k_o/k_f tiene como centro: $y = 0$; $x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{0,4}{8} \right) = 0,15$ y radio $R = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} - \frac{0,4}{8} \right| = 0,10$.

En la figura 3-1.2 sea P el punto de la curva $-L_o(j\omega)$ para $\omega = \omega_o$ y N el punto de k_o/k_f para $\omega = \omega_o$, entonces se ve que: $\vec{OP} = -L_o(j\omega_o)$, $\vec{ON} = (k_o/k_f)\omega = \omega_o$, puesto que estos son fasores podemos decir que:

$$\vec{PO} + \vec{ON} = \vec{PN} = L_o(j\omega_o) + \left(\frac{k_o}{k_f} \right) \omega = \omega_o$$

$$\vec{PO} + \vec{OM} = \vec{PM} = L_o(j\omega_o) + 1$$

de donde tenemos que:



En lugar de mantener fijo a k_f y dibujar k_o/k_f como función de la frecuencia vamos a considerar variaciones de k_f , o sea de sus parámetros m y n para una frecuencia fija. El campo de variación será el interior del rectángulo ABCD de la fig 3-1.3, escogemos la frecuencia $\omega = 4$ rad/seg y tenemos:

$$\frac{k_o}{k_f} = \frac{1}{1 + 2s} \frac{1 + ns}{m} = \frac{1 + j4n}{m(1 + j8)} = x + jy$$

esta expresión representan líneas rectas de ecuaciones:

$$y = \frac{x}{8} - \frac{1}{8m} \quad ; \quad y = \frac{4(n - 2)}{32n + 1} x$$

En la figura 3-1.4 se tienen las rectas correspondientes a los valores extremos de m y n y los puntos $A_1B_1C_1D_1$ corresponden a los puntos ABCD de la figura 3-1.3 en otras palabras el rectángulo ABCD se ha traducido en el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ y cualquier punto interno a ABCD será también interno a $A_1B_1C_1D_1$ y viceversa.

Para los vértices ABCD los valores que deben tener el radio y el centro de cada circunferencia al variar la frecuencia son:

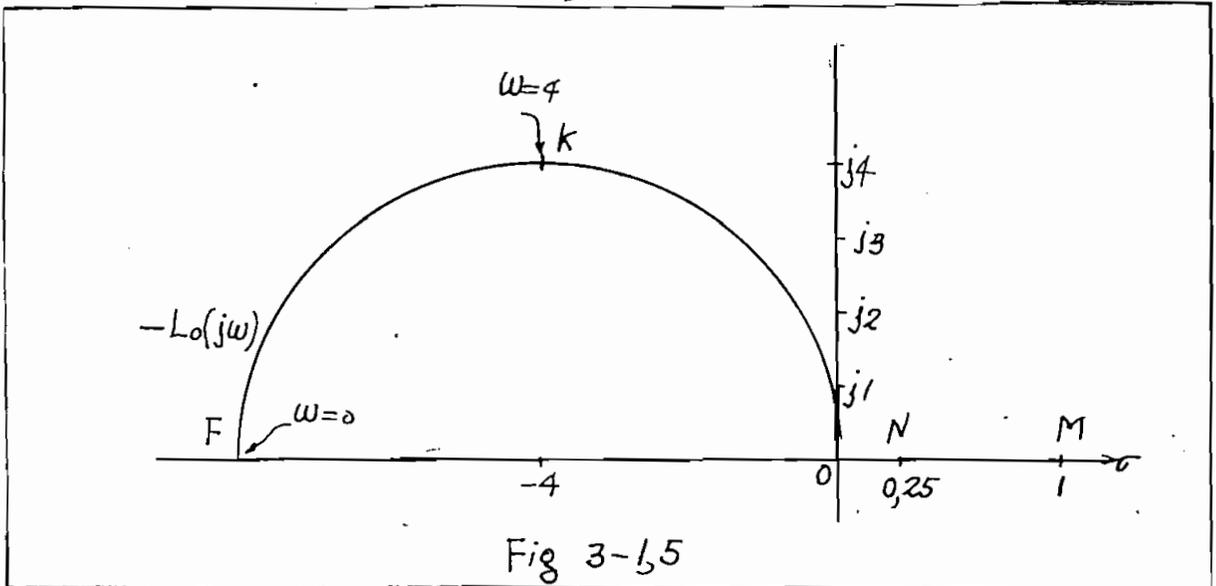
m	n	centro	Radio	Circunferencia
1	0,4	0,6	0,4	S ₁
4	0,4	0,15	0,1	S ₂
1	2	1	0	S ₃
4	2	0,25	0	S ₄

Con los datos hasta aquí obtenidos podemos escoger la función $L_o(j\omega)$. Para $\omega = 0$ debe ser $T = 1$, o sea que $T_o/T_f = 0,95/1,05 = 0,9$, entonces si L es una semi-circunferencia tal como se indica en la fig 3-1.5 y tal que para $\omega = 0$ se tenga el punto F, entonces:

$$\frac{T_o}{T_f} \Big|_{\omega=0} = \frac{\overrightarrow{FN}}{\overrightarrow{FM}} = 0,9 = \frac{\overrightarrow{FO} + 0,25}{\overrightarrow{FO} + 1} \Rightarrow \overrightarrow{FO} = 6,5$$

Se escoge el punto $N \leftrightarrow 0,25$ puesto que este corresponde a $\omega = 0$ en el círculo más pequeño (caso extremo).

Con $\overrightarrow{FO} = 6,5$ tenemos $T_o/T_f = 0,9$ pero si hacemos $\overrightarrow{FO} = 8$ entonces aseguramos aún más el mínimo de variación de T , en efecto $T_o/T_f = \frac{8,25}{9} = 0,92$.



El semicírculo de la figura 3-1.5 con un radio $R = 4$ parece cumplir con el requisito de $-L_o(j\omega)$. Vamos

a encontrar la ecuación de este semicírculo con la condición de que en el punto $x = -4$; $y = 4$ tengamos $\omega = 4$ rad/seg. La ecuación:

$$- L_0(j\omega) = \frac{a + j\omega b}{c + j\omega d}$$

es general, de donde debemos calcular las constantes a, b, c, d , para un radio $R = 4$ y centro $y = 0$; $x = -4$; fácilmente se obtiene que:

$$-4 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \right); \quad 4 = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{d} - \frac{a}{c} \right|$$

resolviendo se tienen $b/d = 0$; $a/c = -8$, por lo que:

$$- L_0(j\omega) = \frac{a}{c + j\omega d} = \frac{1}{\frac{c}{a} + j\omega \frac{d}{a}} = \frac{1}{-\frac{1}{8} + j\omega \frac{d}{a}} = x + jy$$

para $\omega = 4$ es $x = -4$; $y = 4$ entonces resolviendo se tiene $\frac{d}{a} = -\frac{1}{32}$ y la ganancia de lazo L_0 queda:

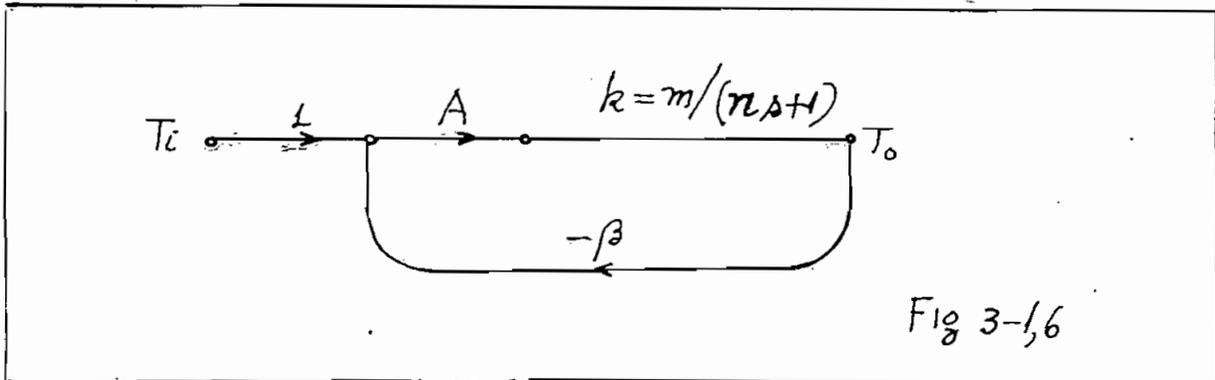
$$L_0(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{8} + j\omega \frac{1}{32}} = \frac{8}{1 + s/4} = L_0(s)$$

Para $\omega = 4$ rad/seg tenemos: $\frac{T_o}{T_f} = \frac{\sqrt{4^2 + 5,25^2}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{5,81}{6} = 0,97$

de donde la elección para el semicírculo L_0 es correcta.

El sistema completo con realimentación se indica en la fig 3-1.6 de donde:

$$L_o = k_o A \beta = \frac{1}{2s+1} A \beta = \frac{8}{1+s/4} \Rightarrow A \beta = \frac{8(2s+1)}{1+s/4}$$



Suponiendo que $T_i = 1$ a la frecuencia $\omega = 0$ entonces:

$$\left. \frac{T_o}{T_i} \right|_{s=0} = \frac{A(0)k_o(0) \cdot 1 \cdot 1}{1 + A(0)\beta(0)k_o(0)} = \frac{0,95}{1} = \frac{A(0)}{1 + A(0)\beta(0)}$$

$$= \frac{A(0)}{1 + 8} \Rightarrow A(0) = 9 \times 0,95 = 8,55 \Rightarrow \beta(0) = \frac{8}{8,55} = 0,935$$

Si se conoce T para $\omega > 0$ se puede calcular A y de aquí β .

Es de notar que para frecuencias $\omega > 4$ rad/seg, en general, ya no se cumple las condiciones del problema puesto que todos los cálculos anteriores están hechos justamente a base del rango de 0 a 4 rad/seg.

3-1.b) SENSITIVIDAD PARA REDES EN GENERAL

Definimos la sensibilidad de T hacia k como:

$$S_k^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln k} = \frac{\partial T/T}{\partial k/k}$$

Si consideramos a $k = W$ como la trasinmitancia

entre las variables (mallas o nudos) k y j , entonces la función de transferencia es (ecuación 2-4.7)

$$T = \frac{A_{am}}{A} W_R = \frac{A^{\circ}_{am} + WA_{amkj}}{A^{\circ} + WA_{kj}} W_R \quad (2-4.7)$$

de donde W_R es la "inmitancia de salida" perteneciente a la variable m y el subíndice a indica que la fuente de excitación se encuentra en la variable a (malla o nudo)

La sensibilidad será; por la definición:

$$S_k^T = S_W^T = \frac{W}{T} \frac{\partial T}{\partial W} = \frac{W}{T} \frac{(A^{\circ} + WA_{kj}) A_{amkj} - (A^{\circ}_{am} + WA_{amkj}) A_{kj}}{(A^{\circ} + WA_{kj})^2} W_R =$$

$$S_W^T = \frac{W (A^{\circ} A_{amkj} - A^{\circ}_{am} A_{kj})}{(A^{\circ}_{am} + WA_{amkj})(A^{\circ} + WA_{kj})} \quad (3-1.7)$$

Por la identidad en determinantes:

$$A^{\circ} A_{amkj} = A^{\circ}_{am} A_{kj} - A_{aj} A_{km} \quad (3-1.8)$$

la sensibilidad queda:

$$S_W^T = \frac{-A_{aj} A_{km}}{A_{am} A} W \quad (3-1.9)$$

Si en lugar de tener a W como un elemento unilateral lo consideramos bilateral, entonces W será componente de W_{jj} (pero no de W_{kj} como para el caso unilateral), por lo tanto:

$$S_W^T = \frac{-A_{aj} A_{jm}}{A_{am} A} W \quad (3-1.10)$$

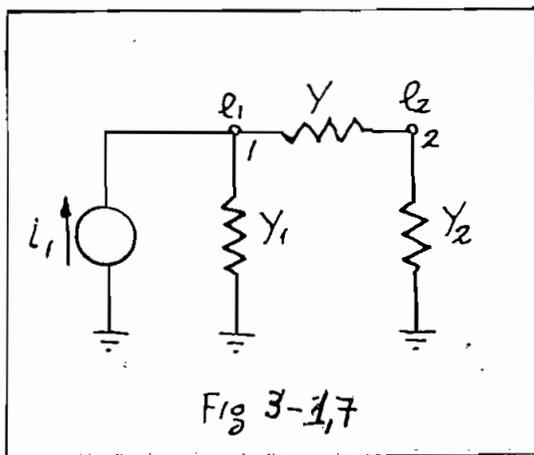
Si consideramos el caso particular en el que $t_{oi} =$

$= 0 = \frac{A^\circ_{am}}{A^\circ} W_R$ entonces $A^\circ_{am} = 0$ puesto que $W_R \neq 0$, la sensibilidad será de la ecuación (3-1.7):

$$S_{\frac{T}{W}} = \frac{WA^\circ A_{amkj}}{WA_{amkj}(A^\circ + WA_{kj})} = \frac{A^\circ}{A} = \frac{1}{F} \quad (3-1.11)$$

que se puede constituir otra manera de llegar a la diferencia de retorno puesto que de antemano ya conocíamos que $S_{\frac{T}{k}} = 1/F_k$ siempre que $t_{oi} = 0$.

Consideremos como ejemplo el circuito de la figura 3-1.7 en donde el elemento W es la admitancia Y . La diferencia de retorno será:



$$F = \frac{A}{A^\circ} = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 + Y & -Y \\ -Y & Y_2 + Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 + 0 & 0 \\ 0 & Y_2 + 0 \end{vmatrix}} = \frac{Y_1 Y_2 + Y(Y_1 + Y_2)}{Y_1 Y_2}$$

Vamos a encontrar la sensibilidad a partir de la transferencia desde 1 hasta 2:

$$T = \frac{A_{12}}{A} Y_2 = \frac{Y}{Y_1 Y_2 + Y(Y_1 + Y_2)} Y_2$$

$$S_{\frac{T}{Y}} = \frac{Y}{T} \frac{dT}{dY} = \frac{Y}{T} \frac{Y_1 Y_2^2 + Y Y_2 (Y_1 + Y_2) - Y Y_2 (Y_1 + Y_2)}{[Y_1 Y_2 + Y(Y_1 + Y_2)]^2} =$$

$$= \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y(Y_1 + Y_2)} = \frac{1}{F}$$

Este resultado podíamos expresarlo directamente puesto que $T_0 = 0$ (para $Y = 0$)

3-2.a) SENSITIVIDAD CUANDO $t_{oi} \neq 0$

En los casos anteriores hemos considerado cero o muy pequeña la transmisión t_{oi} , si es que esta no puede despreciarse, entonces el análisis cambia un poco, en efecto, la sensibilidad será:

$$\begin{aligned} S_k^T &= \frac{\Delta T/T_f}{\Delta k/k_f} = \frac{(T_f - T_0)/T_f}{(k_f - k_0)/k_f} = \frac{k_f}{k_f - k_0} \frac{1}{T_f} (T_f - T_0) = \\ &= \frac{k_f}{k_f - k_0} \frac{1}{T_f} \left(t_{oi} + \frac{k_f t_{oia} t_{os}}{1 - k_f t_{os}} - t_{oi} - \frac{k_0 t_{oia} t_{os}}{1 - k_0 t_{os}} \right) = \\ &= \frac{k_f}{k_f - k_0} \frac{1}{T_f} \left[\frac{k_f - k_0}{(1 - k_f t_{os})(1 - k_0 t_{os})} \right] t_{oia} t_{os} = \frac{1}{1 - k_0 t_{os}} \frac{k_f t_{oia} t_{os}}{1 - k_f t_{os}} \frac{1}{T_f} = \\ &= \frac{1}{1 - k_0 t_{os}} \left(t_{oi} + \frac{k_f t_{oia} t_{os}}{1 - k_f t_{os}} - t_{oi} \right) \frac{1}{T_f} = \frac{1}{1 - k_0 t_{os}} \left(1 - \frac{t_{oi}}{T_f} \right) \end{aligned}$$

$$S_k^{\#} = \frac{1}{1 + L_0} \left(1 - \frac{t_{oi}}{T_f} \right) \quad (3-2.1)$$

El resultado anterior podemos expresarlo en la forma:

$$S_k^{\#} = \frac{T - t_{oi}}{\Delta k/k_f} = \frac{\Delta(t - t_{oi})/(T - t_{oi})}{\Delta k/k_f} = \frac{\Delta T/T_f}{\Delta k/k_f} \frac{T_f}{T_f - t_{oi}} = \frac{1}{1 + L_0} \quad (3-2.2)$$

Las relaciones que a continuación se derivan son muy útiles:

$$1 - \frac{T_o - t_{oi}}{T_f - t_{oi}} = 1 - \frac{1 - k_f t_{cs}}{1 - k_o t_{cs}} \cdot \frac{k_o}{k_f} = \frac{k_f - k_o}{k_f(1 - k_o t_{cs})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_o - t_{oi}}{T_f - t_{oi}} = \frac{(k_o/k_f) + L_o}{1 + L_o} \quad (3-2.3)$$

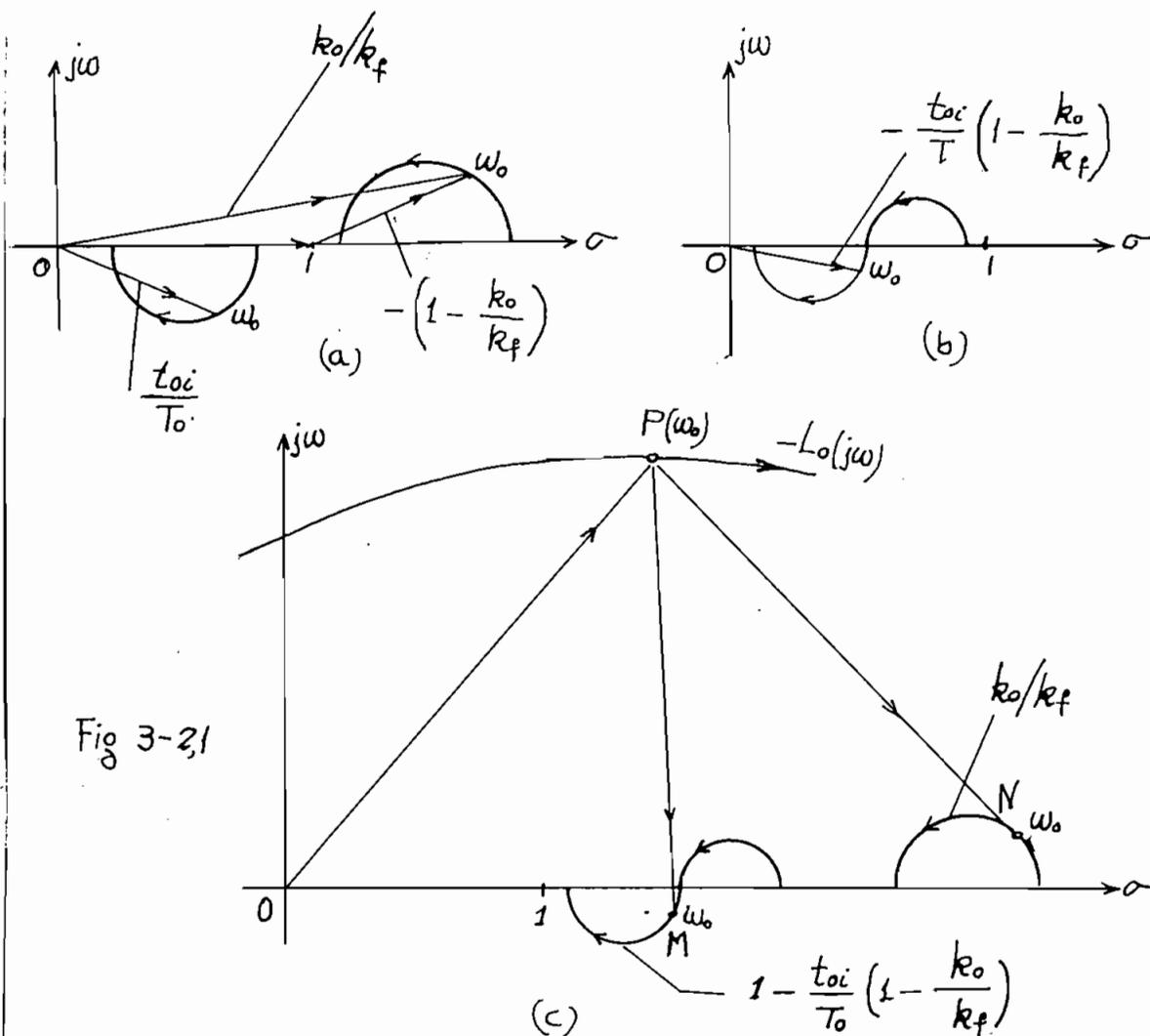
$$\frac{T_f - t_{oi}}{T_o - t_{oi}} - 1 = \frac{\Delta T}{T_o - t_{oi}} = \frac{1 + L_o}{\frac{k_o}{k_f} + L_o} - 1 = \frac{1 - k_o/k_f}{\frac{k_o}{k_f} + L_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_o} = \frac{(1 - t_{oi}/T_o)(1 - k_o/k_f)}{k_o/k_f + L_o} \quad (3-2.4)$$

$$\frac{T_f}{T_o} = \frac{\Delta T}{T_o} + 1 = \frac{1 + L_o - (t_{oi}/T_o)(1 - k_o/k_f)}{k_o/k_f + L_o} \quad (3-2.5)$$

Con la igualdad 3-2.3 podemos trabajar de una manera exactamente igual a la del ejemplo de la sección 3-1 (fig 3-1.2) con la diferencia de que hoy se considera $(T_o - t_{oi}) / (T_f - t_{oi})$ en lugar de T_o/T_f .

Para encontrar graficamente T_f/T_o utilizamos 3-2.5 y representamos en los graficos 3-2.1a), 3-2.1b) y 3-2.1c el numerador como el denominador de (3-2.5). En la figura 3-2.1a se tienen la representación geométrica de k_o/k_f , $1 - k_o/k_f$, t_{oi}/T_o .



En la figura 3-21b se tiene el gráfico de $-\frac{t_{oi}}{T}$.

$(1 - \frac{k_o}{k_f})$ y en la 3-21c el valor $1 - \frac{t_{oi}}{T}(1 - \frac{k_o}{k_f})$ junto con $-L_o(j\omega)$, de donde:

$$\vec{PM} \cong \vec{PO} + \vec{OM} = L_o + 1 - \frac{t_{oi}}{T} \left(1 - \frac{k_o}{k_f} \right) \quad (3-2.6)$$

$$\vec{PN} = \vec{PO} + \vec{ON} = L_o + \frac{k_o}{k_f} \quad (3-2.7)$$

de donde:
$$\frac{T_f}{T_o} = \frac{\vec{PM}}{\vec{PN}} \quad (3-2.8)$$

Con esta interpretación geométrica se puede encontrar una curva L_0 tal que cumpla con los valores extremos T_f y T_0 en un rango de frecuencias dado.

3-2.b) SENSITIVIDAD PARA $t_{oi} \neq 0$ EN REDES ACTIVAS

Siguiendo el procedimiento de las ecuaciones de redes vamos a demostrar que la sensibilidad de $T - t_{oi}$ con respecto a $k = W$ es la inversa de la diferencia de retorno F , en efecto:

$$T - t_{oi} = \frac{A^\circ_{am} + WA_{amkj}}{A^\circ + WA_{kj}} W_R - \frac{A^\circ_{am}}{A^\circ} W_R = \frac{WW_R(A^\circ A_{amkj} - A^\circ_{am} A_{kj})}{A^\circ (A^\circ + WA_{kj})}$$

$$T - t_{oi} = \frac{-WA_{aj} A_{km}}{A^\circ (A^\circ + WA_{kj})} W_R = \frac{-WA_{aj} A_{km}}{A^\circ A} W_R \quad (3-2,9)$$

La sensibilidad es, por definición:

$$S_W = \frac{(T - t_{oi})}{T - t_{oi}} = \frac{W}{T - t_{oi}} \cdot \frac{d(T - t_{oi})}{dW} =$$

$$= \frac{-W}{T - t_{oi}} \frac{A_{aj} A_{km} W_R}{A^\circ} \frac{d}{dW} \left[\frac{W}{A^\circ + WA_{kj}} \right] =$$

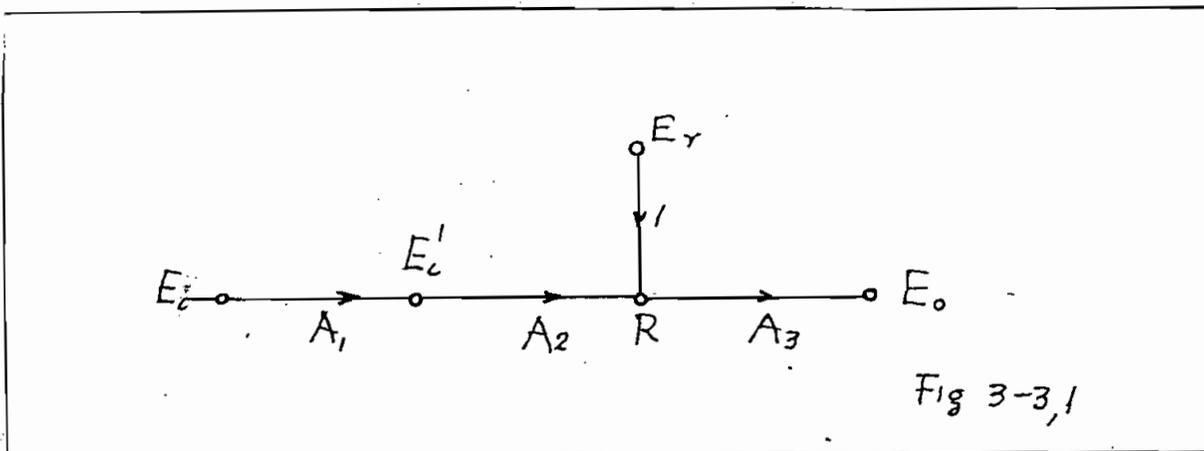
$$= \frac{-WA_{aj} A_{km} W_R}{A^\circ (T - t_{oi})} \cdot \frac{A^\circ}{(A^\circ + WA_{kj})^2} = \frac{A^\circ}{A} = \frac{1}{F} \quad (3-2.10)$$

3 - 3. SISTEMAS CON VARIAS ENTRADAS

Un amplificador ya sea a tubos o transistores siempre está sujeto a variaciones de su señal externa debido a

ruidos internos de sus componentes y es necesario que la salida sea lo más independiente posible de estas perturbaciones.

Vamos a ver una manera en que se puede controlar la tensión de salida del amplificador. Sea E_0 la tensión de salida, E_i la tensión señal de entrada al amplificador, por generalidad supongamos que E'_i en la señal de entrada que al pasar por la transmisión $A_1 A_2 = A$ nos dá la salida E_0 deseada. (ver fig 3-3.1)



Sea E_r la tensión perturbadora incontrolada que actúa en el punto R inaccesible del sistema (dentro de un tubo por ejemplo), además consideramos a las transmisiones A_3 y A_2 fijas, pero la transmisión $A_1 A_2 = P$ es variable dependiente de A_1 , por lo tanto la señal en el punto R dependerá de A_1 , en otras palabras P tiene un solo grado de libertad que lo podríamos usar para determinar la transferencia total $E_0/E_i = A_3 P$ adecuada.

La transferencia de la señal perturbadora a la salida es $E_0/E_r = A_3$ y es independiente de P , por lo tan

to para controlar el sistema disponemos de un grado de libertad (A_1), podemos también tomar otro criterio; en lugar de escoger una E_o/E_i adecuada consideramos la denominada proporción de señal a ruido.

$$\frac{E_o}{E_i} / \frac{E_o}{E_r} = A_3 P / A_3 = P = A_1 A_2$$

controlada por medio de A_1 , pero de esta manera ya no podemos escoger la transferencia total adecuada, por lo tanto en un sistema de lazo abierto nos es muy difícil controlar la salida.

Si usamos realimentación en una forma adecuada, podemos controlar simultanea e independiente a la razón señal ruido y a la transferencia.

Puesto que E_i es independiente de E_o no podemos usarlo como punto de realimentación, entonces nos queda la posibilidad de unir la salida E_o , por medio de una red adecuada ($-\beta$), con E'_i ; aunque en realidad podemos tomar en lugar de E'_i un punto interior de A_1 pero en todo caso se podría llegar a un circuito equivalente cuya entrada sea E'_i (Ver fig 3-3.2)

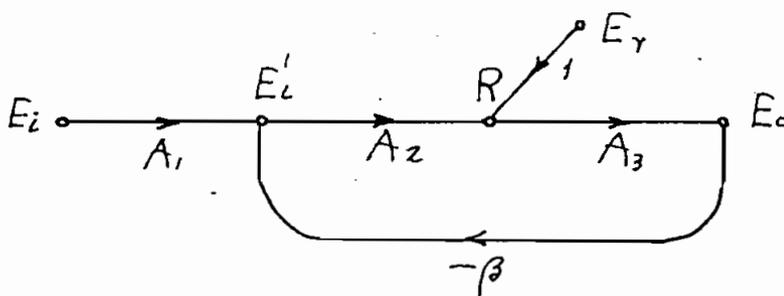


Fig 3-3,2

En el diagrama 3-3.2 el punto E'_i está influenciado por las transmisiones A_1 y β , por lo tanto el sistema ha adquirido dos grados de libertad que son suficientes para nuestro propósito.

Se deduce del diagrama que $t_{oi} = 0$; $t_{ci} = A_1$; $t_{cs} = -\beta$; $t_{os} = 1$; $k = A_2 A_3 = A$, de donde:

$$T = \frac{E_o}{E_i} = \frac{AA_1}{1 + \beta A} = \frac{AA_1}{1 + L} \quad (3-3.1)$$

Puesto que $E'_i = -\beta E_o$ para $E_i = 0$; $R = A_2 E'_i + E_r$; $E_o = A_3 R$, entonces:

$$E_o = A_3 R = A_2 A_3 E'_i + A_3 E_r = -\beta A_2 A_3 E_o + A_3 E_r$$

$$T_r = \frac{E_o}{E_r} = \frac{A_3}{1 + L} \quad (3-3.2)$$

Por lo tanto L se puede usar para obtener un valor satisfactorio de T_r y A_1 para un valor adecuado de T .

En el punto R la señal proveniente de E'_i es:

$$R = A_2 E'_i = -\beta A_2 E_o = -\beta A_2 A_3 E_r / (1 + L) \quad (3-3.3)$$

siempre que $E_i = 0$, observamos que este valor es contrario al de E_r en el punto R , por lo tanto se reduce el ruido, en lo único que debemos asegurarnos es que A_2 sea capaz de conducir estas señales y que su respuesta sea lineal para todo el rango de señales supuesto,

Si en lugar de considerar una sola fuente de ruido E_r a lo largo del trayecto desde E'_i hasta E_o consideramos dos o más fuentes de ruido el problema se complica puesto que con dos variables independientes de que disponemos debemos controlar tres o más cantidades, como solución se recurriría al uso de otra rama de realimentación con lo que se aumenta en uno el número de grados de libertad disponibles.

Hay que tomar en cuenta que si una señal extraña está presente en E_i esta no puede atenuarse como la señal E_r por lo que sería necesario introducir un filtro entre E_i y E'_i el cual puede formar parte de A_1 .

3-4. SENSITIVIDAD DEL SISTEMA REALIMENTADO DEBIDO A RUIDO O VARIACIONES DE LOS PARAMETROS EN LA RED REALIMENTADORA

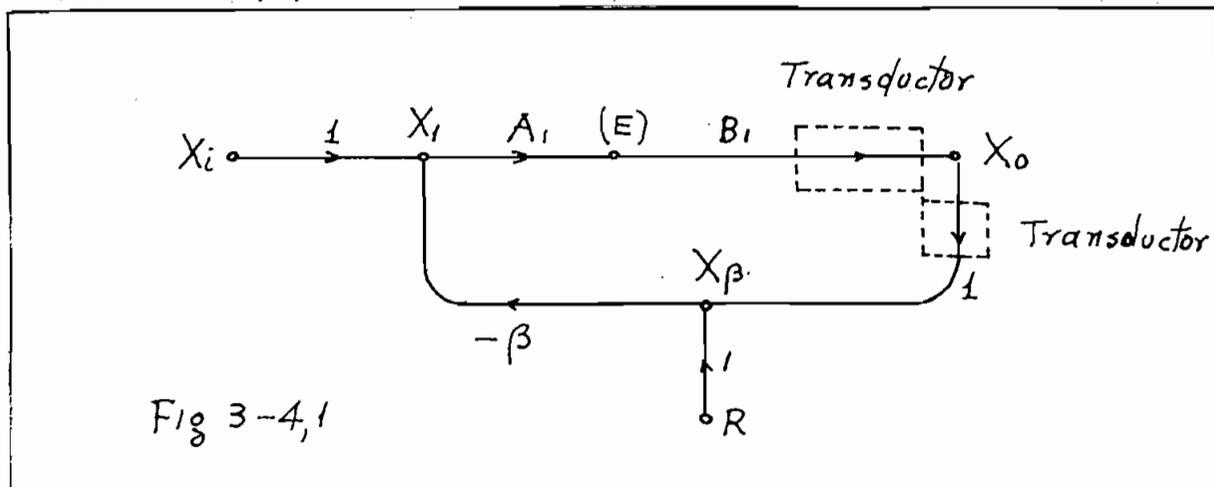
En la sección 3-3 consideramos que se producían señales de perturbación en el elemento k y vimos que con una red realimentadora estas señales se atenúan considerablemente; vamos a suponer que la fuente de ruidos actúa sobre el lazo de realimentación.

En realidad, para eliminar los efectos perturbadores, se utilizan redes β de alta calidad que se consideran de una variación muy pequeña de sus características, pero puede suceder que el sistema sea electromecánico como un servomecanismo de posición, por ejemplo, cuya

salida constituye el ángulo de giro del motor y la entrada una señal de tensión.

En este servomecanismo se puede utilizar la red realimentadora para controlar la posición del eje y evidentemente esta red debe tener un elemento transductor de una función mecánica (giro del eje del motor) a una función eléctrica (voltaje), entonces tendremos siempre señales perturbadoras que pueden originarse por ejemplo debido a los engranajes del sistema.

En la figura 3-4.1 se tiene una fuente de ruidos R actuando en la red β . En cada nudo también se indica entre parentesis si la función considerada es mecánica (M) o eléctrica (E).



La función de transferencia señal-ruido se calcula de la manera siguiente:

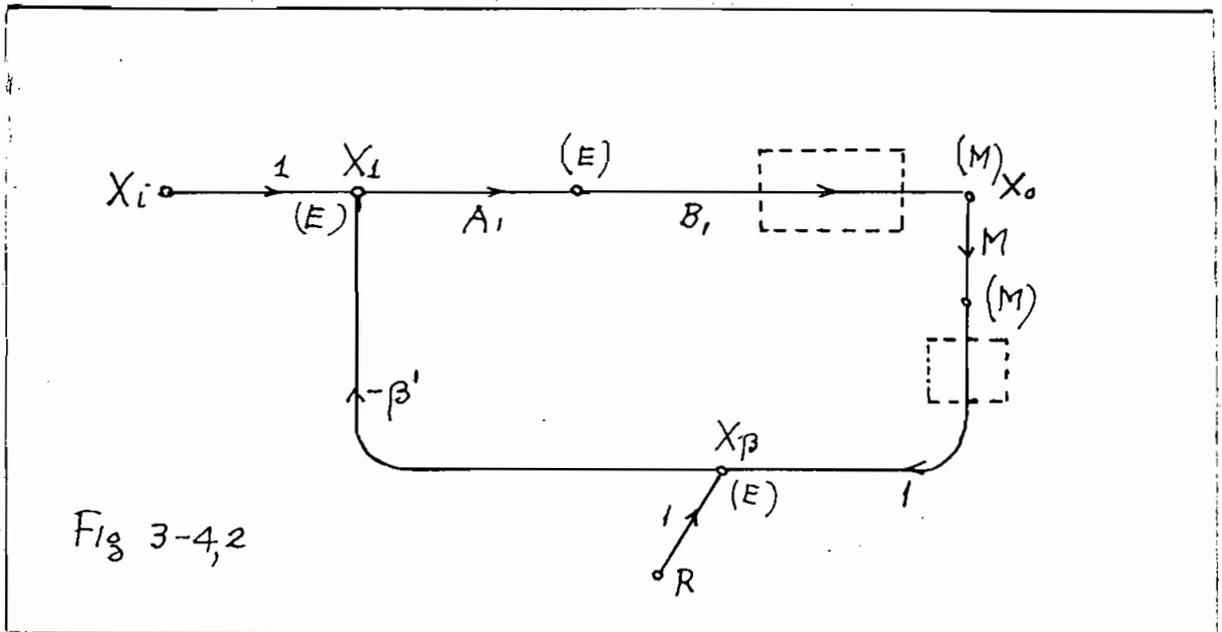
$$\left. \begin{aligned} X_o &= B_1 A_1 X_1 \\ X_1 &= -X_\beta \beta \\ X &= R + 1 \cdot X_o \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_o = -\beta A_1 B_1 (X_o + R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X_o}{R} = T_R = \frac{-\beta A_1 B_1}{1 + \beta A_1 B_1} = \frac{-L}{1 + L} \quad (3-4.1)$$

Si $|L| \gg 1$ entonces: $\frac{X_o}{R} = T_R \approx -1$ (3-4.2)

lo cual respresenta un problema puesto que la señal perturbadora no es atenuada, entonces necesitamos utilizar algún procedimiento para que dicha señal disminuya; una manera de conseguirlo es utilizar el sistema de la figura 3-4.2 en donde se emplea la transmisión M (mecánica); entonces la transmisión señal ruido es:

$$X_o = A_1 B_1 X_1 = -\beta' A_1 B_1 X_\beta = -A_1 B_1 \beta' (R + M X_o) \Rightarrow$$



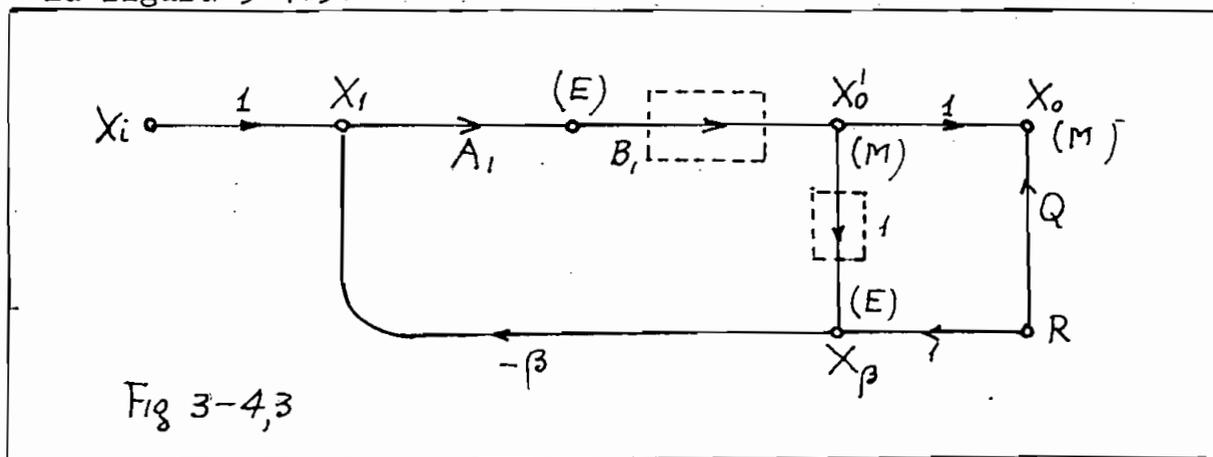
$$\Rightarrow \frac{X_o}{R} = T'_R = \frac{-A_1 B_1 \beta'}{1 + A_1 B_1 M \beta'} \quad (3-4.3)$$

Si hacemos M y β' de tal manera que $M\beta' = \beta$ entonces:

$$T'_R = \frac{-A_1 B_1 \beta'}{1 + A_1 B_1 \beta} = \frac{-A_1 B_1 \beta}{1 + L} \cdot \frac{\beta'}{\beta} = T_R \frac{\beta'}{\beta} = T_R / M \quad (3-4.4)$$

con lo que la transmisión de ruido se ha reducido M veces con relación al sistema de la fig (3-4.1)

Se puede utilizar otro procedimiento para disminuir T_R y consiste en introducir a la salida un valor apropiado desde la fuente de ruidos tal como se indica en la figura 3-4.3.



En este caso la transferencia de ruido es:

$$\begin{aligned} X_o &= X'_o + QR = A_1 B_1 X_1 + QR = -A_1 B_1 \beta X_\beta + QR = \\ &= -\beta A_1 B_1 (X'_o + R) + QR = -\beta A_1 B_1 (X_o - QR + R) + QR \Rightarrow \\ \frac{X_o}{R} &= T_R = Q - \frac{\beta A_1 B_1}{1 + \beta A_1 B_1} = Q - \frac{L}{1 + L} \quad (3-4.5) \end{aligned}$$

Si hacemos $Q = 1$ entonces:

$$\frac{X_o}{R} = T_R = 1 - \frac{L}{1 + L} = \frac{1}{1 + L} \quad (3-4.6)$$

y puesto que $|L| \gg 1$ la transmisión T_R se reduce considerablemente.

El problema radicaría en la manera de como se debe ejecutar la union, por medio de Q, entre R y X_0 .

Consideremos que β en la figura 3-4.1 es variable en sus características, entonces la sensibilidad del sistema es:

$$S_{\beta}^T = \frac{dT/T}{d\beta/\beta} = \frac{\beta}{T} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1 \cdot A_1 \cdot B_1 \cdot 1}{1 + \beta A_1 B_1} \right) = \frac{\beta A_1 B_1}{T} \frac{-A_1 B_1}{(1 + \beta A_1 A_2)^2}$$

$$S_{\beta}^T = \frac{-\beta A_1 B_1}{1 + \beta A_1 B_1} = \frac{-L}{1 + L} \quad (3-4.7)$$

Puesto que $|L| \gg 1$, entonces: $S_{\beta}^T \approx -1$ (3-4.8)

lo que nos dice que las variaciones del elemento de realimentación hay que tomarlas muy en cuenta por lo que se debe conseguir que β sea de las mejores características posibles.

Las fuentes de ruido y las variaciones paramétricas en las redes de realimentación constituyen un factor limitante en el diseño de sistemas realimentados.

3-5. EFECTO DE LA REALIMENTACION SOBRE LA NO-LINEALIDAD

Hasta esta parte hemos considerado que todos los elementos de un sistema con realimentación sean lineales.

Supongamos que se tiene el sistema de la figura 3-4.1,

calculamos la transferencia total:

$$T = \frac{X_o}{X_i} = \frac{A_1 B_1}{1 + \beta A_1 B_1}$$

si hacemos $|\beta A_1 B_1| \gg 1$, entonces $T \approx 1/\beta$ (3-5.1)

con lo que la transmisión depende solo de la red β sin importar que A_1 o B_1 sean lineales o no, si A_1 y B_1 son no lineales pero β es lineal entonces T será lineal, de esta manera la realimentación se puede usar para **eliminar** el efecto de no linealidad de los elementos.

Supongamos que $|\beta A_1 B_1|$ con relación a 1 no es despreciable y si en el elemento k existe una parte que claramente no es lineal, este sistema se encuentra representado en la fig 3-5.1 en donde en el nudo y se tiene la función $y = N(x)$ que se halla representada en la figura 3-5.2.

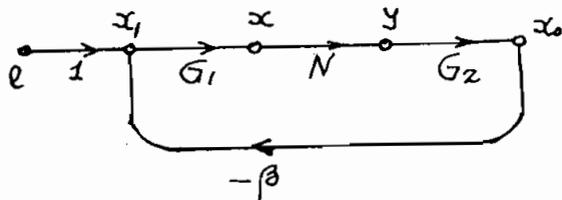
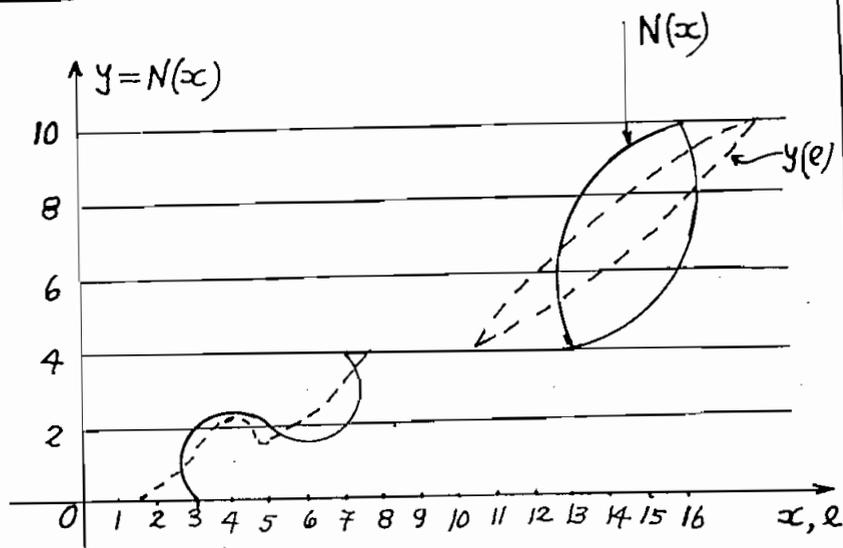


Fig 3-5,1

Fig 3-5,2



Vamos a ver la influencia que tiene el introducir la red β , para este vemos del gráfico 3-5.1:

$$x_1 = \varrho - \beta x_0 = \varrho - \beta G_2 y \quad (3-5.2)$$

$$x = G_1 x_1 = \varrho G_1 - \beta G_1 G_2 y ; y = N(x) \quad (3-5.3)$$

La manera de encontrar la y resultante es por medio de una construcción gráfica, por ejemplo para $G_1 = 2$; $G_2 = 1$; $\beta = 1$, entonces 3-5.3 queda:

$$x = 2\varrho - 2y ; y = N(x) \quad (3-5.4)$$

por facilidad construimos la función:

$$\varrho = y + \frac{1}{2} x ; \bar{y} = N(x)$$

Si hacemos $x = N^*(y)$ siendo N^* la función inversa de y :

$$\varrho = y + \frac{1}{2} N^*(y) \quad (3-5.5)$$

con la cual para cada valor de y se puede encontrar $\varrho = \varrho(y)$ y cuya inversa resulta ser $y = y(e)$ que se halla dibujada en la fig 3-5.2.

Se observa claramente en la fig 3-5.2 que las curvas $y = N(x)$ e $y = y(e)$ tienen una forma parecida, la única diferencia es que la curva $y = y(e)$ es más "alargada" que $N(x)$.

El efecto de la realimentación ha sido el de tratar de "linearizar" a la curva $y = N(x)$, a pesar de que $G_1 = 2$ es todavía pequeño, si tomáramos $G_1 = 4$ la

curva $y = y(e)$ sería más lineal.

En el intervalo comprendido entre $x = 7$ y $x = 13$, $N(x)$ tiene el valor 4, pero para $y(e) = 4$ el intervalo es entre $x = 10,5$ y $x = 7,5$, por lo que el intervalo de $y(e)$ se ha reducido a la mitad del correspondiente a $N(x)$ para un valor $N(x) = y(x) = 4$. Si en lugar de tener $G_1 = 2$ se considera $G_1 = 4$ el intervalo se reduciría a $1/4$.

Para una $x > 16$ $N(x)$ es constante ($N(x) = 10$). lo mismo sucede para $y(e)$, en este caso la realimentación ya no tiene efecto por lo tanto se debe tener un intervalo en donde se pueda utilizar la realimentación, puesto que al hacerse $N(x) = 10$ para $\bar{x} > 16$ significa físicamente que el elemento N está saturado.

MEDIDA DE LA LINEARIZACION

Hasta aquí hemos supuesto que los elementos son independientes de la frecuencia entonces la relación entre la salida y la entrada debe ser una constante, o sea $(x_o/e) = m$ o sea $dx_o/de = m$, esto sugiere que para sistemas independientes de la frecuencia, una medida de la linealización sería $(m - m_o)/m$ donde m_o es un valor apropiado de m . De la fig 3-5.1 se ve que:

$$\frac{dx_o}{de} = \frac{dx_o}{dx} \frac{dx}{de}$$

pero puesto que: $x = eG_1 - \beta G_1 G_2 y$

se tiene:

$$\frac{dx}{de} = G_1 - \beta G_1 G_2 \frac{dy}{de} = G_1 - \beta G_1 G_2 N'(x) \frac{dx}{de} \quad (3-5.6)$$

$$\frac{dx}{de} = \frac{G_1}{1 + \beta G_1 G_2 N'(x)} = \frac{G_1}{1 + LN'(x)} \quad (3-5.7)$$

$$\frac{dx_0}{de} = m = \frac{dx_0}{dx} \frac{dx}{de} = \frac{d}{dx} (G_2 N(x)) \cdot \frac{G_1}{1 + LN'(x)} = \frac{G_1 G_2 N'(x)}{1 + LN'(x)} \quad (3-5.8)$$

Por la definición de medida de linearización tenemos:

$$\frac{m - m_0}{m} = \frac{1 + LN'}{G_1 G_2 N'} \left[\frac{G_1 G_2 N'}{1 + LN'} - \frac{G_1 G_2 N'_0}{1 + LN'_0} \right] = \frac{(N' - N'_0)/N'}{1 + LN'_0} \quad (3-5.9)$$

esto nos indica que la no-linealidad del sistema se ha reducido por el factor $1 + LN'_0$ que representa, de nuevo, una diferencia de retorno.

Por lo tanto, ya sea la sensibilidad de los elementos, como la no-linealidad de los mismos es reducido por la diferencia de retorno cuando se aplica realimentación.

3-6. RAZONES PARA LA UTILIZACION DE LA REALIMENTACION

En los párrafos anteriores hemos visto algunos efectos que tiene la realimentación sobre un sistema.

Todo sistema está expuesto a una variación de sus parámetros, esta variación es muy poco conocida, vale decir ignoramos en cierta forma, las variaciones de los

elementos de un sistema. Supongamos que se conoce exactamente los cambios que ocurren en un elemento, por ejemplo la variación de la resistencia con la temperatura, entonces si el efecto de esta resistencia no debe variar debemos colocar otra resistencia de características exactamente opuestas para que se compensen las variaciones, esto presupone el conocimiento cabal del elemento.

En realidad, es muy difícil establecer las variaciones del sistema debido a los cambios de sus parámetros y esta es una razón fundamental para el uso de la realimentación para lo cual solo se necesita conocer el rango de variación de estos parámetros.

Lo que se acaba de discutir corresponde a la influencia interna sobre el sistema (debido a sus elementos), pero como sabemos todo componente también está sujeto a señales de ruido, vale decir a fuentes externas las cuales se deben al medio ambiente que rodea al sistema, por ejemplo el zumbido producido por la red de 60 c/s en los amplificadores de audio.

Si se conoce exactamente las señales de ruido externas (llamamos externas puesto que pueden ser representadas por una fuente) entonces podríamos neutralizar su efecto por medio de otra fuente exactamente igual y que actúe en sentido inverso, lo cual es muy difícil hacerlo puesto

que ignoramos la naturaleza exacta de las fuentes de ruido, y entonces la única solución es el empleo de la realimentación.

La no-linealidad de los parámetros puede ser superada por medio de elementos cuya no-linealidad sea tal que tengamos como resultado una respuesta lineal siempre y cuando se conozca exactamente la naturaleza no-lineal del elemento, pero como no la conocemos entonces se emplea de nuevo la realimentación.

También se usa la realimentación para cambiar el nivel de impedancia de salida del sistema y proporcionar una buena regulación, esto es, si la carga fluctúa se debe mantener constante o el voltaje o la corriente. De nuevo usamos realimentación puesto que desconocemos las variaciones de la carga.

En resumen podemos decir:

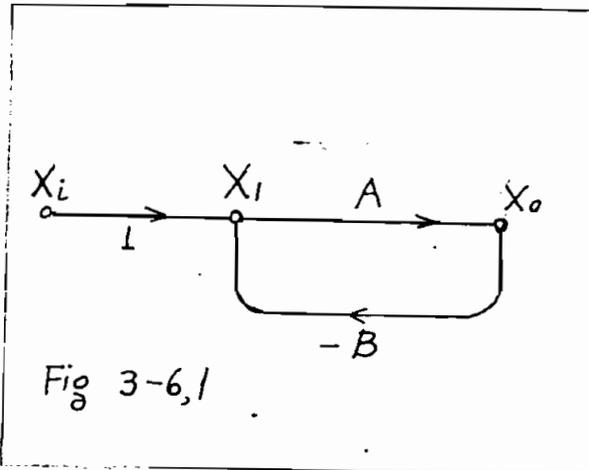
(1) Se usa realimentación para compensar las variaciones desconocidas del sistema.

(2) Se usa realimentación para compensar las variaciones del medio ambiente desconocido al sistema.

(3) Se usa realimentación para aprovechar el cambio en las características estáticas y dinámicas de un elemento cuando se aplica realimentación que cuando actúa solo.

El punto (3) todavía no lo hemos discutido.

Supongamos que se tiene un sistema inestable, esto es que posee por lo menos un polo en la parte derecha del plano complejo en donde se representa la función de transferencia. Queremos eliminar su inestabilidad.



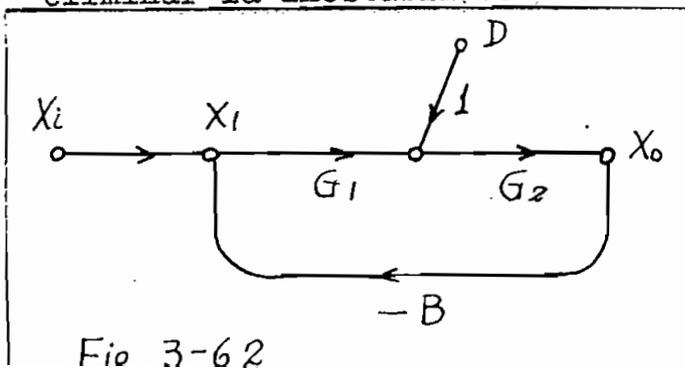
En la fig 3-6.1 la transferencia es:

$$T = \frac{X_o}{X_i} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{A}{1 + L}$$

en donde la diferencia de retorno $F = 1 + L$ tiene por lo menos un cero en la parte derecha del plano

complejo. Si estos ceros son conocidos entonces se puede hacer que la función A tenga ceros tal que se cancele con los de F dando así una función de transferencia estable y el sistema quedaría como se indica en la fig 3-6.2 en donde G_1 contiene los ceros que cancela a los de F. La fuente D es la productora de ruidos que siempre es inherente a todo sistema.

Aun a pesar de el valor que tenga G_1 no se puede eliminar la inestabilidad debido a la fuente D entonces deberíamos programar la entrada X_1 para que su efecto se cancele con el de la fuente D, esto presupone el conocimiento completo



deberíamos programar la entrada X_1 para que su efecto se cancele con el de la fuente D, esto presupone el conocimiento completo

de las señales-ruido, más aún, los ceros de G_1 y F son variables debido a los cambios paramétricos de los elementos y no pueden cancelarse, nuevamente se tendrá que utilizar realimentación para eliminar la inestabilidad.

Hasta aquí hemos visto que la realimentación es inevitable en sistema donde se sabe muy poco de sus variaciones paramétricas y de su medio ambiente, en realidad no solo se aplica en este sentido sino también cuando se trate de elementos de variación conocida como puede ser en el caso de una red pasiva en donde se desee cambiar el nivel de impedancia en la salida.

4.- CRITERIOS DE ESTABILIDAD

4-1. ANALISIS CLASICO

El problema de la estabilidad es de importancia fundamental en los sistemas realimentados, vamos a considerar en esta sección los criterios que se utilizan para determinar si un sistema es estable o no. Luego desarrollaremos algunas ideas para que el sistema, en caso de que esté inestable se lo pueda hacer estable.

Un sistema es inestable si al aplicar a su entrada una función excitación finita la respuesta tiende a infinito a medida que aumenta el tiempo.

Hemos visto que la función de transferencia de un sistema, es en general:

$$T = \frac{X_o}{X_i} = t_{oi} + \frac{kt_{ci}t_{os}}{1 - kt_{cs}} \quad (4-1.1)$$

en donde todas las transmisiones t_{ij} son funciones de la frecuencia compleja s . Vamos a considerar el caso de que todas las transmisiones t_{ij} tienen sus raíces en la parte izquierda del plano complejo.

La ecuación (4-1.1) se puede expresar en la forma:

$$\frac{X_o}{X_i} = \frac{A_1 s^m + A_2 s^{m-1} + \dots + A_{m-1} s + A_m}{B_1 s^n + B_2 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n} \quad (4-1.2)$$

de donde:

$$\begin{aligned} & (B_1 s^n + B_2 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n) X_o(s) = \\ & = (A_1 s^m + A_2 s^{m-1} + \dots + A_{m-1} s + A_m) X_i(s) \end{aligned} \quad (4-1.3)$$

en la cual el miembro de la derecha es la función de entrada del sistema y por lo tanto representa el estado estable (o estacionario) del sistema, o sea que, corresponde a la forma de la función de respuesta cuando ha transcurrido un tiempo grande tal que todo estado transitorio se haya eliminado (con la condición de que el sistema total sea estable). El miembro de la izquierda de la ecuación 4-1.3 corresponde al estado transitorio del sistema, por lo tanto, para analizar la estabilidad solo nos interesa este miembro:

$$(B_1 s^n + B_2 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n) X_o(s) = 0 \quad (4-1.4)$$

si las raíces complejas de la ecuación 4-1.4 son $s_n \neq s_{n-1} \neq \dots \neq s_0$ entonces, la respuesta transitoria es:

$$x_o(t) = K_n e^{s_n t} + K_{n-1} e^{s_{n-1} t} + \dots + K_0 e^{s_0 t} \quad (4-1.5)$$

siendo K_n, K_{n-1}, \dots, K_0 constantes.

De esta ecuación observamos que si una o más raíces tienen su parte real positiva, entonces $x_o(t)$ crecerá

sin límite a medida que aumenta el tiempo y el sistema será inestable. De aquí deducimos que la condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal sea estable es que la parte real de toda raíz de la ecuación característica (4-1.4) debe ser negativa. Si una raíz permanece en el eje imaginario del plano complejo el sistema es oscilatorio y por definición, lo consideramos inestable, excepción hecha cuando la raíz se encuentre en el origen del plano.

Si las raíces de la ecuación (4-1.4) no son todas desiguales entonces encontraremos una ecuación del tipo de la (4-1.5) pero uno o más de sus términos aparecerán multiplicados por t , de todas maneras, las conclusiones a las que se llegan serán las mismas. Hay que hacer notar el caso por ejemplo de que $s_1 = s_2 = ja$, el sistema no es oscilatorio sino más bien claramente inestable.

4-2. CRITERIO DE ROUTH - HURWITZ

Del párrafo anterior se deduce fácilmente que el factor que determina la estabilidad del sistema es el denominador de la ecuación 4-1.1, o sea si logramos obtener sus raíces, el problema está resuelto. Pero sucede que si el sistema es de un orden mayor que 2 o 3, entonces ya no es fácil encontrar las raíces de la ecuación (4-1.4), por lo tanto se debe recurrir a métodos más sencillos que el anterior. La ecuación característica del sistema es:

$$B_1 s^n + B_2 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s^1 + B_n = 0 \quad (4-1.5)$$

Si (4-1.5) nos representa un sistema estable, la primera condición que debe satisfacer es que todos sus coeficientes B sean del mismo signo, esto se debe a que las raíces de (4-1.5) son del tipo:

$$(s + a) \quad \text{ó} \quad (s + a)^2 + b^2 \quad (4-1.6)$$

en donde $a > 0$. Si se cumple que todas las raíces son negativas, entonces la multiplicación de todos los términos (4 - 1.6) para obtener (4-1.5) no puede darnos un término negativo como coeficiente B.

Podemos también deducir que si en la ecuación (4-1.5) falta algún término B_j , quiere decir que existe una raíz positiva ($a < 0$).

En resumen diremos que una condición necesaria pero no suficiente para que (4-1.5) tenga raíces no-positivas es que **todos los coeficientes B** tengan el mismo signo y además debe ser completa.

Para encontrar la condición suficiente que (4-1.5) debe cumplir, procedemos de la siguiente forma, primero ordenamos los coeficientes B en la forma

B_1	B_3	B_5
B_2	B_4	B_6
C_1	C_3	C_5
C_2	C_4	C_6 (4-1.6)
D_1	D_3	D_5
D_2	D_4	D_6

en donde:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{B_2 B_3 - B_1 B_4}{B_2} ; & C_3 &= \frac{B_2 B_5 - B_1 B_6}{B_2} ; & \dots \\
 C_2 &= \frac{C_1 B_4 - B_2 B_3}{C_1} ; & C_4 &= \frac{C_1 B_6 - B_2 C_5}{C_1} ; & \dots \\
 D_1 &= \frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{C_2} ; & D_3 &= \frac{C_2 C_5 - C_1 C_6}{C_2} ; & \dots
 \end{aligned}$$

(4-1.7)

Esta forma de proceder terminará cuando encontremos un término cero.

Para satisfacer la condición de estabilidad, todos los términos de la primera columna de (4-1.6) deben ser del mismo signo.

Si existe un término de signo contrario al de los otros términos, entonces nos indica que el sistema es inestable, y el número de raíces positivas que tiene el sistema será igual al número de cambios de signo que presenten los términos de la primera columna.

Si un término cualquiera de la primera columna resulta cero, entonces se lo reemplaza por un $\epsilon > 0$ y se procede en idéntica forma.

Este método es mucho más simple que el anterior puesto que no requiere el conocimiento de las raíces de la ecuación, sirve para un chequeo rápido de la estabilidad del sistema.

4-3.a) CRITERIO DE NYQUIST

Con los métodos anteriores lo único que se puede determinar es si el sistema es o no estable, pero no nos indica nada sobre lo que uno debe hacer para volver estable a un sistema inestable.

En este respecto, el criterio de Nyquist es una herramienta muy útil, puesto que nos indica de una manera general como modificar (aumentar una red de compensación) para que la respuesta tenga determinadas características.

Una derivación rigurosa del criterio de Nyquist se puede hacerla a partir del cálculo de Residuos en variable compleja.

Suponiendo conocido los fundamentos del cálculo de los Residuos, podemos considerar que existe una función compleja $f(s)$, y tal que:

$$f(s) = |f(s)| \cdot e^{j \text{ang } f(s)} \quad (4-3.1)$$

Siendo $|f(s)|$ la magnitud y $\text{ang } f(s)$ el ángulo de $f(s)$.

Vamos a tomar el logaritmo de 4-3.1 y obtener su derivada con respecto a s .

$$\frac{d \ln f(s)}{ds} = \frac{d \ln |f(s)|}{ds} + j \frac{d}{ds} (\text{ang } f(s)) \quad (4-3.2)$$

Supongamos ahora un contorno cerrado en el plano s , entonces la integral cerrada de (4-3.2) será:

$$\oint \frac{d \ln f(s)}{ds} ds = \oint \frac{d}{ds} |f(s)| ds + j \oint \frac{d}{ds} (\text{ang } f(s)) ds = \oint \frac{f'(s)}{f(s)} ds \quad (4-3.3)$$

Puesto que en el plano s principiemos y terminamos en el mismo punto, entonces la integral cerrada de la derivada del logaritmo de la magnitud de $f(s)$ será cero, quedándonos únicamente la integral cerrada de la derivada del ángulo de $f(s)$, o sea:

$$\oint \frac{d \ln f(s)}{ds} ds = j \text{ Ang } f(s) = \oint \frac{f'(s)}{f(s)} ds \quad (4-3.4)$$

en donde $\text{Ang } f(s)$ es el ángulo de $f(s)$ resultante de la integración cerrada.

Por el teorema de los Residuos de Cauchy, el miembro de la derecha de la expresión (4-3.4) representa:

$$\oint \frac{f'(s)}{f(s)} ds = 2\pi j \sum (r_1 + r_2 + \dots) \quad (4-3.5)$$

en donde r_1, r_2, \dots , son los residuos de $f'(s)/f(s)$ en el contorno cerrado.

Vamos a considerar, como caso general que $f(s)$ es de la forma:

$$f(s) = (s - s_0)^n g(s) \quad ; \quad (4-3.5)$$

$$\text{entonces: } f'(s) = n(s - s_0)^{n-1} g(s) + (s - s_0)^n g'(s) \quad (4-3.6)$$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{n}{s - s_0} + \frac{g'(s)}{g(s)} \quad (4-3.7)$$

en donde n es un residuo de $f'(s)/f(s)$.

Si $n > 0$, vemos en 4-3.5 que $f(s)$ tiene por lo menos un cero de orden n , esto nos da, según 4-3.7 un residuo de va -

lor n . Similarmente si $n < 0$, en 4-3.5 vemos que $f(s)$ tiene un polo de orden n , pero que según 4-3.7 nos representa un residuo de valor $-n$. De esto se deduce que si Z es el número de ceros y P el número de polos de $f(s)$ en un contorno cerrado determinado, entonces de la expresión (4-3.4) y (4-3.5) se deduce que:

$$\text{Ang } f(s) = 2\pi(Z - P) \quad (4-3.8)$$

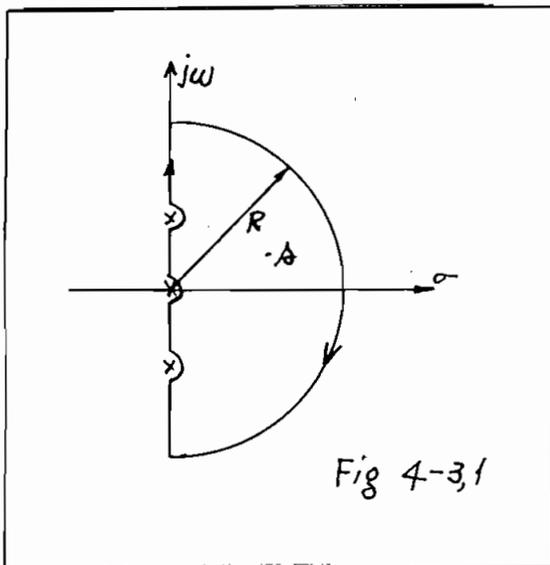
En resumen diremos que si $f = f(s)$ y si en el plano s se toma una trayectoria cerrada en un sentido dado tal que encierre Z ceros y P polos de $f(s)$, el correspondiente contorno cerrado del plano f encerrará el origen $Z - P$ veces, en el mismo sentido.

Vamos aplicar el concepto anterior a los sistemas realimentados.

Hemos visto que la función de transferencia viene dada por la expresión general 4-1.1, en la cual suponemos que todas las transmisiones $t_{ij}(s)$ son estables, o sea que tienen sus puntos críticos (polos o ceros) en la parte izquierda del plano complejo. En estas condiciones, el sistema en lazo abierto debe ser estable. Pero el sistema en lazo cerrado puede convertirse en inestable dependiendo de la posición de los ceros de la función característica $1 - kt_{cs} = 1 + L$.

Para determinar si $1 + L(s)$ tiene ceros en la parte derecha del plano complejo tomamos una trayectoria

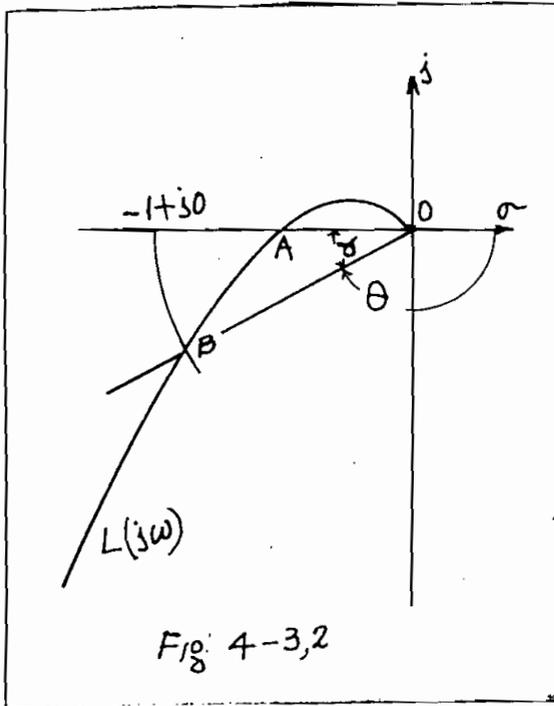
semicircular en el plano s con un radio R dirigida sólo en la parte derecha del plano complejo, y aumentamos R tendiendo a infinito. El correspondiente diagrama de la función $1 + L(s)$ encerrará al origen $Z - P$ veces en el mismo sentido en que se recorrió el contorno en el plano s . Puesto que $L(s)$ es una función estable, sus polos estarán en la parte izquierda del plano complejo, entonces no existen polos de $1 + L(s)$ en el lado derecho del plano, de este manera el número de veces que la función $1 + L(s)$ encierra el origen será igual al número de ceros de $1 + L(s)$ en el plano derecho, esto es equivalente a decir que el número de ceros que tiene la función $1 + L(s)$ en la parte derecha del plano es igual al número de veces que la función $L(j\omega)$ encierra al punto $-1 + j0$ en la misma dirección que se recorrió el contorno cerrado del plano s .



Si es que el eje imagi nario contiene algunos polos de las transmisi_o nes entonces se los de_e be evitar por medio de semicírculos de radio muy pequeño.

4-3.b) MARGENES DE ESTABILIDAD

Si el lugar de $L(s)$ no encierra al punto $-1 + j0$, el sistema es estable ($Z = 0$), pero esto, aunque matemáticamente es correcto, no nos puede decir que si por cualquier causa el sistema puede volverse inestable, entonces es necesario establecer los denominados márgenes de ganancia y de fase.



Supongamos que aumenta la ganancia del sistema, esto significa que el punto A se acerca al punto C y el sistema se hace menos estable cada vez, si A está muy próximo a C, matemáticamente el sistema es estable, pero tendrá una salida muy grande: por lo tanto se define como margen ganancia a la ganancia que se debe aumentar al sistema para que se vuelva inestable

($A = C$) y se expresa en decibeles; o sea según la fig. 4-3.2 tenemos:

$$\text{Margen de ganancia} = 20 \lg_{10} \frac{1}{OA} \quad (4-3.9)$$

Similarmente se define margen de fase como el ángulo que se debe aumentar cuando $|L(j\omega)| = 1$ para que el sistema se vuelva inestable, o sea según 4-3.2

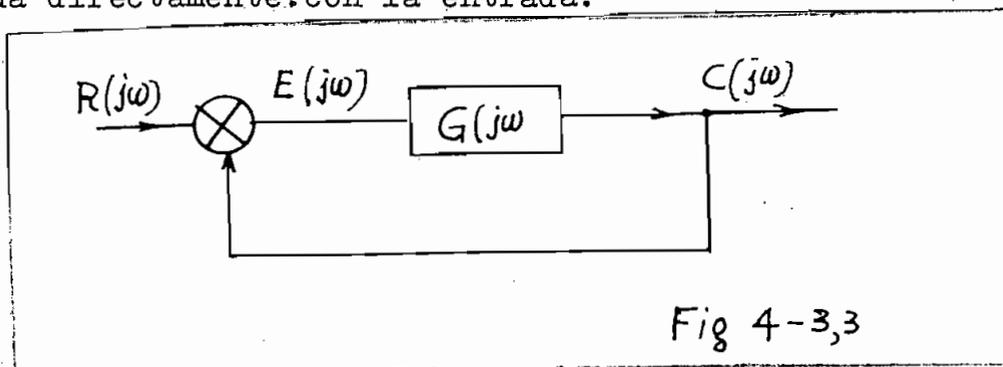
$$\gamma = 180^\circ + \theta \quad (4-3.10)$$

Para diseño se utiliza normalmente un valor de margen de ganancia de 12 db y de margen de fase de 60° .

4-3.c) DIAGRAMAS EN EL PLANO COMPLEJO PARA UN SISTEMA REALIMENTADO

Consideremos el caso en que se aplica a un sistema de control una onda sinusoidal, entonces, una vez que cese el estado transitorio, todas las variables del sistema adquirirán la misma frecuencia que la entrada pero con un defasamiento.

En el sistema de la figura (4-3.3) es un control automático elemental en donde la salida es comparada directamente con la entrada.



Las ecuaciones que determinan el comportamiento del sistema son:

$$\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\theta} \quad (4-3.11)$$

$$R(j\omega) - C(j\omega) = E(j\omega) \quad (4-3.12)$$

En la ecuación 4-3.12 cada componente representa un fasor, por lo tanto es una resta fasorial.

La función de transferencia es:

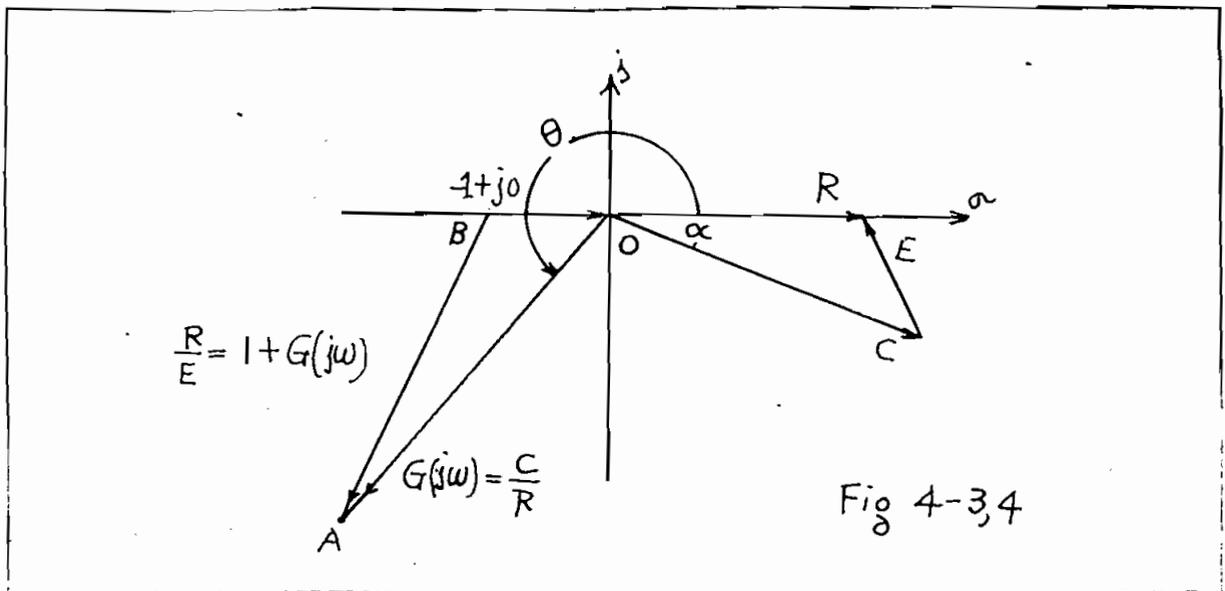
$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = Me^{j\alpha} \quad (4-3.13)$$

en donde M es la magnitud de la función de transferencia y α es el defasamiento entre la salida con relación a la entrada, medido en el sentido directo.

Otra relación muy importante es la dada por:

$$\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{1 + G(j\omega)} \quad (4-3.14)$$

en donde E(j ω) es el error que alimenta a la transmisión directa. Cada una de las ecuaciones nombradas tienen una interpretación muy sencilla en el plano complejo (fig 4-3.4).



De la figura anterior y de las ecuaciones vemos geométricamente que:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{OA}{AB} = Me^{j\alpha} \quad (4-3.15)$$

$$\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{AB} \quad (4-3.16)$$

4-3.d) DESARROLLO DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS CONSTANTES M y α .

De la figura 4-3.4 y de la ecuación 4-3.15 se observa que para cada punto A del plano complejo existe una magnitud M y un ángulo α asociados. Vamos a buscar estos valores de M y α a través de todo el plano. De la ecuación 4-3.13, se ve que:

$$M = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \quad (4-3.17)$$

En general: $G(j\omega) = x + jy$ (4-3.18)

o sea que:

$$M = \left| \frac{x + jy}{(1 + x) + jy} \right| = \left[\frac{x^2 + y^2}{(1 + x)^2 + y^2} \right]^{1/2}$$

que resolviendo tenemos que:

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2} \right)^2 \quad (4-3.19)$$

que nos representa una familia de circunferencias de centro en $x = M^2/(1 - M^2)$, $y = 0$, y de radio $\left| M/(1 - M^2) \right|$

Similarmente para el ángulo α , tenemos:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{x + jy}{x + 1 + jy} = M e^{j\alpha} \quad (4-3.20)$$

$$\alpha = \text{tg}^* \frac{y}{x} - \text{tg}^* \frac{y}{1+x}$$

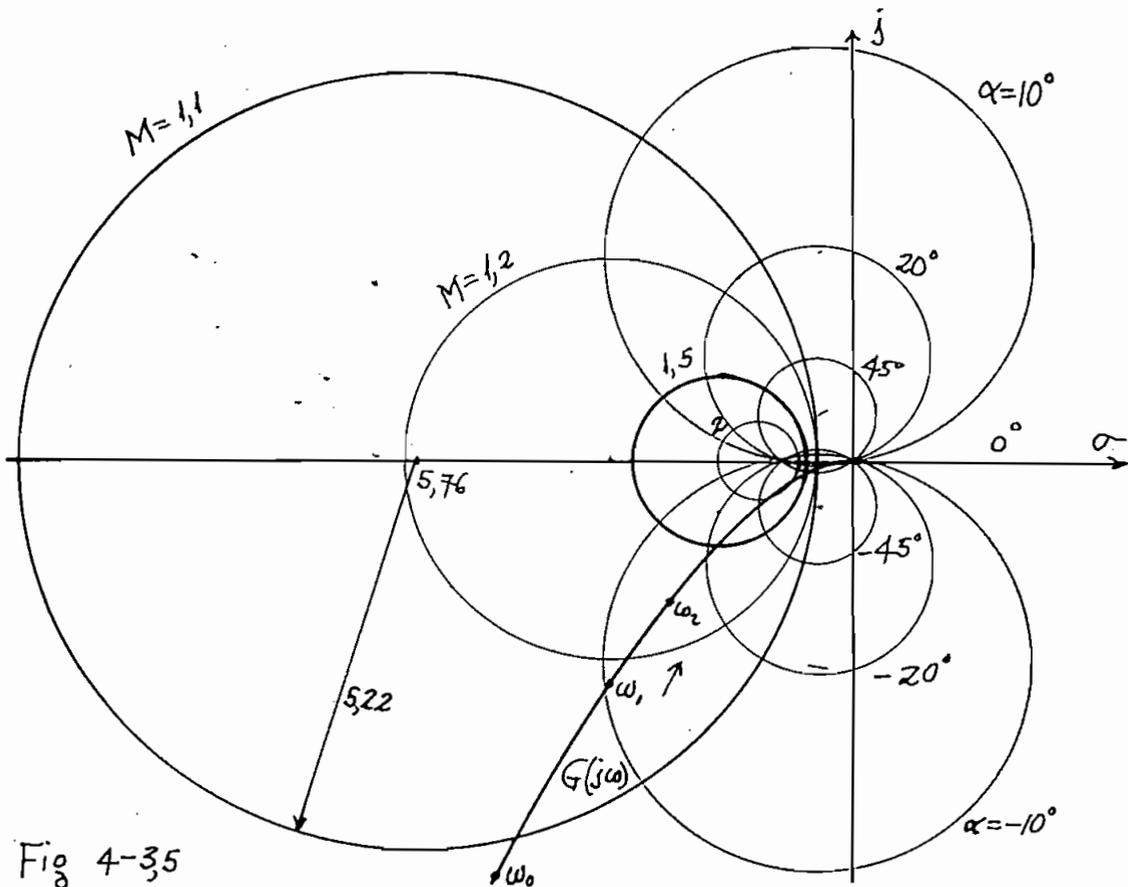
$$\text{de donde: } P = \text{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{1+x}}{1 + \frac{y^2}{x(1+x)}} = \frac{y}{x^2 + x + y^2} \quad (4-3.21)$$

Desarrollando (4-3.21) se encuentra que:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2P}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{P^2 + 1}{P^2} \quad (4-3.22)$$

que nos representa una familia de circunferencias con centro en $x = -1/2$; $y = 1/(2P)$ y radio $(1/2) \left[\frac{P^2 + 1}{P^2} \right]^{1/2}$.

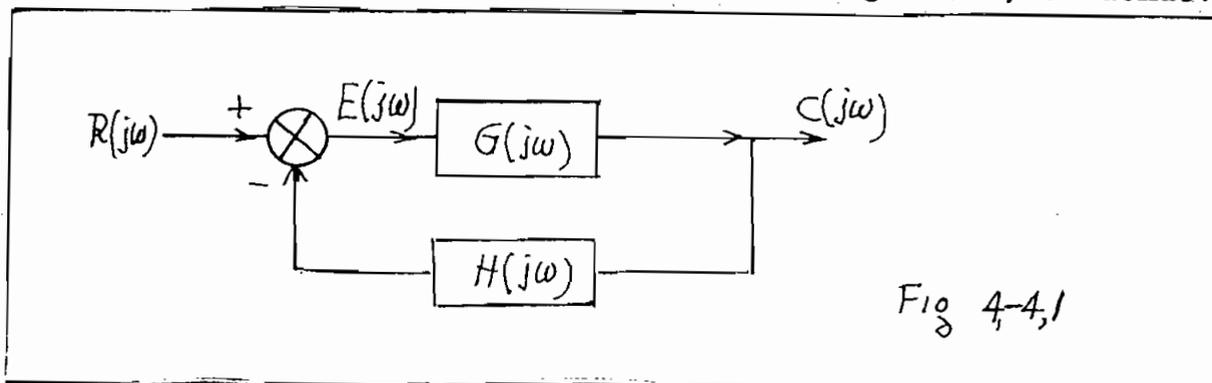
De esta manera, dada una M y una P (o sea α) se puede encontrar a que punto del plano complejo corresponde. Si se tiene el gráfico de $G(j\omega)$, superimpuesto al plano complejo en donde se hallen dibujados los lugares geométricos de M y α , se puede leer directamente cual es la magnitud y el ángulo de fase, para cada frecuencia del sistema en lazo cerrado, con esto se puede determinar el valor máximo de M_p y la frecuencia ω_p a la que ocurre (resonancia). En la parte II del presente trabajo se encontrarán ejemplos prácticos de este caso.



4-4. CRITERIO DE ESTABILIDAD POR MEDIO DEL GRAFICO POLAR INVERSO

El gráfico polar (diagrama de Nyquist) de $G(j\omega)$ junto con su respuesta en lazo cerrado se vuelve complicado para sistemas un poco grandes, puesto que la construcción del lugar de M y α es tedioso. Se ha desarrollado un método que es más sencillo que el anterior y que puede indicarnos más claramente las características salientes de un central automático.

Consideremos el sistema de la fig 4-4.1, en donde:



la función de transferencia es:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \quad (4-4.1)$$

la inversa es simplemente:

$$\frac{R(j\omega)}{C(j\omega)} = \frac{1}{G(j\omega)} + H(j\omega) \quad (4-4.2)$$

en la cual una función de la transmisión directa y la transmisión inversa aparecen como términos separados, y se puede determinar el efecto separado de cada transmisión sobre la relación R/C.

Puesto que $1/G(j\omega)$ es conocida, se puede encontrar la función $H(j\omega)$ para los requerimientos de estabilidad y exactitud requeridos.

Para conocer la estabilidad del sistema, elegimos en el plano s una trayectoria cerrada tal como la indicada en la fig 4-3.1 y dibujamos la función R/C. Si en la ecuación 4-4.2 denominamos G_z y G_p el número de ceros y polos de $G(j\omega)$, H_z , H_p el número de ceros y polos de $H(j\omega)$,

y Z el número de ceros de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$, entonces si N es el número de veces que el diagrama R/C encierra al origen girando en sentido directo se tiene:

$$N = G_z + H_p - Z \quad (4-4.3)$$

esto se puede ver facilmente puesto que los polos de R/C constituyen los ceros de $G(j\omega)$ y los polos de $H(j\omega)$, y los ceros de R/C son los ceros de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$. En este caso los ceros Z se restan por elegir la trayectoria en el plano R/C inversa a la del plano s . Para que el sistema sea estable Z debe ser igual a cero.

Si en la expresión (4-4.2) $H(j\omega)$ hacemos unitaria entonces:

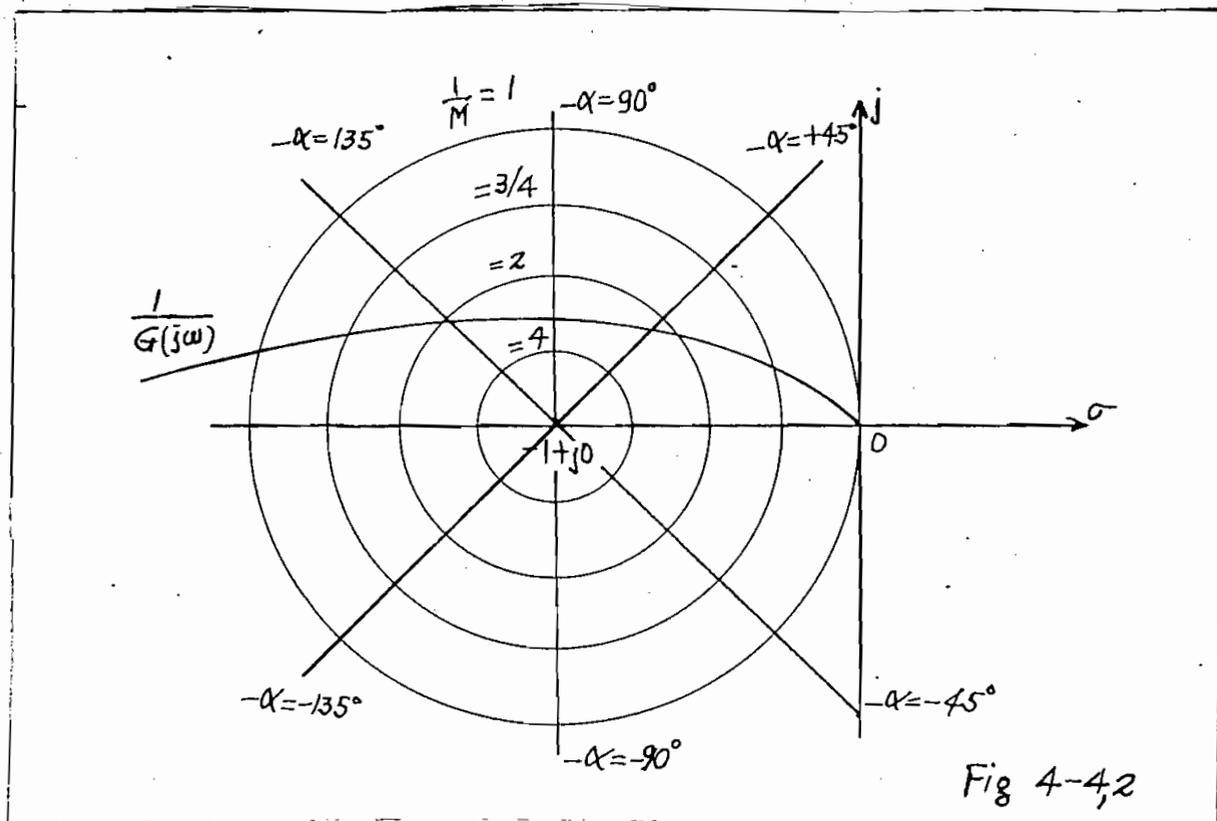
$$\frac{R(j\omega)}{C(j\omega)} = \frac{1}{G(j\omega)} + 1 = \frac{1}{M} e^{-j\alpha} \quad (4-4.4)$$

que es más sencilla que la expresión (4-3.13) en donde M y α tienen las mismas definiciones dadas anteriormente.

Si hacemos $\frac{1}{G(j\omega)} = x + jy$, entonces el lugar de $\frac{1}{M}$ resulta ser una familia de circunferencias con centro en $-1 + j0$ y radio $1/M$, y el ángulo $-\alpha$ serán simplemente líneas rectas que parten del punto $-1 + j0$.

Si es que el sistema no es de realimentación unitaria, entonces se dibujan separadamente las curvas de $\frac{1}{G(j\omega)}$ y $H(j\omega)$ y se suman fasorialmente para cada ω y se tiene así R/C . Los círculos $1/M$ serán en este caso

concéntricos al origen en lugar de ser a $-1 + j0$, similarmente el lugar de $-\alpha$ será una familia de líneas rectas que parten del origen.



4-5. DIAGRAMA DE BODE

Para aplicar el criterio de Nyquist hemos visto que es necesario tener el gráfico polar de la función $L(j\omega) = -kt_{cs}(j\omega)$, pero esto puede hacerse de una manera mucho más fácil, si es que en lugar de un solo gráfico tenemos dos, uno que nos de la magnitud de $L(j\omega)$ expresada en decibeles contra $\log \omega$, y el otro que nos de $\text{Ang } L(j\omega)$ contra $\lg \omega$, que son los diagramas de Bode.

La función $L(s)$ puede expresarse en la forma:

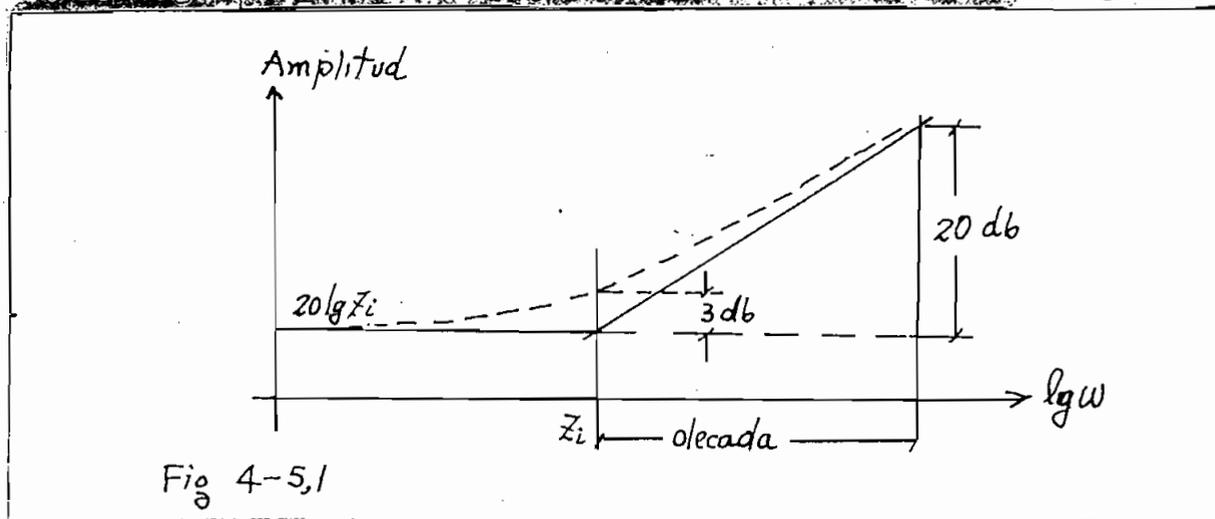
$$L(s) = \frac{k \prod (s + Z_i)}{\prod (s + p_j)} \quad (4-5.1)$$

de donde se ve facilmente que:

$$\left. \begin{aligned} 20 \lg_{10} |L(j\omega)| &= 20 \lg_{10} k + \sum 20 \lg_{10} |j\omega + Z_i| - \sum 20 \lg_{10} |j\omega + p_j| \\ \text{Ang } L(j\omega) &= \text{ang } k + \sum \text{arc tg } \frac{\omega}{Z_i} - \sum \text{arc tg } \frac{\omega}{p_j} \end{aligned} \right\} \quad (4-5.2)$$

De lo anterior deducimos que los diagramas de Bode son representaciones más convenientes del diagrama de Nyquist, y por lo tanto estará sujeto a las mismas condiciones, esto es, $L(j\omega)$ debe ser estable y debe tender a cero cuando ω tiende a infinito.

Consideremos el término $(s + Z_i)$, entonces Z_i puede ser real puro o complejo, supongamoslo real. Si $\omega^2 \ll Z_i^2$ la magnitud de este término es $20 \cdot \lg(\omega^2 + Z_i^2)^{1/2} \approx 20 \cdot \lg Z_i$ que nos representa un valor constante (fig 4-5.1)

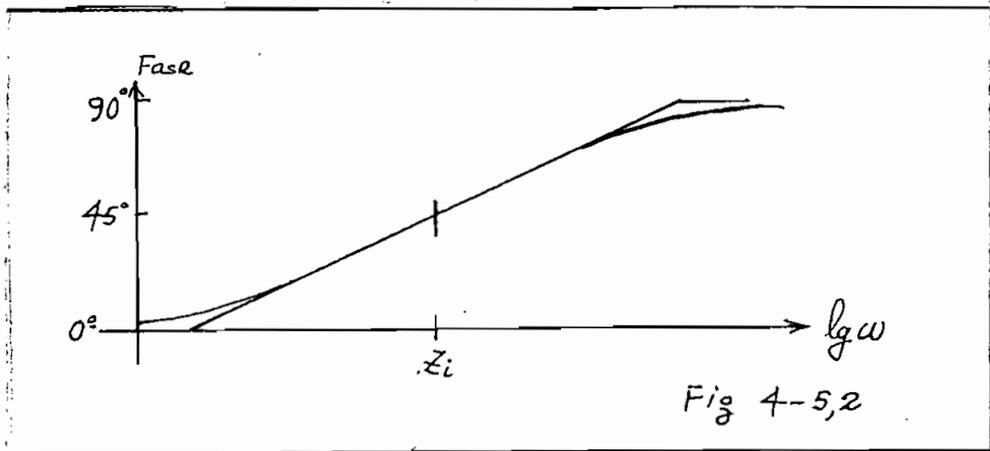


pero si $\omega^2 \gg Z_i^2$ entonces la magnitud es: $20 \lg(\omega^2 + Z_i^2)^{1/2}$
 $20 \lg \omega$ que es una línea recta de pendiente 20 db por década. De esta manera se tienen la aproximación asintótica a la curva de magnitud. Para que el gráfico sea más exacto, se puede calcular en algunos puntos convenientes el error que se comete. Así por ejemplo para $\omega = Z_i$ se tiene: $20 \lg(\omega^2 + Z_i^2)^{1/2} = 20 \lg \sqrt{2} Z_i = 20 \lg Z_i + 20 \lg \sqrt{2} = 20 \lg Z_i + 3$, siendo el error de 3 db, esto quiere decir que para $\omega = Z_i$ la curva pasa 3 db más arriba de lo dibujado por las asíntotas. Este es el error máximo que se puede cometer en la aproximación asintótica.

Si en lugar de tomar un cero de $L(s)$, consideramos un polo de $L(s)$ tal como $(s + p_j)$, las conclusiones a las que se llegan serán parecidas a la anterior, con la diferencia que la pendiente de la asíntota de altas frecuencias será negativa.

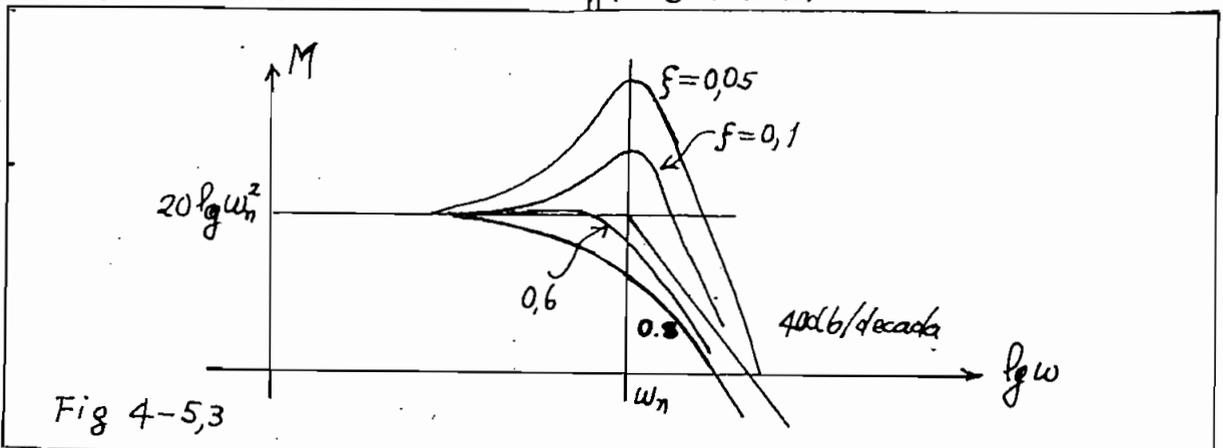
Es muy importante notar que para los puntos $\omega = Z_i$; o $\omega = p_j$ se tiene un cambio brusco de dirección de las asíntotas, razón por la cual se denominan frecuencias de quiebre. Las pendientes de las aproximaciones asintóticas solo pueden ser múltiplos de 20 db por década, (por ejemplo 0, ± 20 , ± 40 , ± 60 , $\pm \dots$ db por década)

Para dibujar el diagrama de fase similarmente podemos aproximarle por medio de rectas. Para ω muy próximo a cero se tiene $\text{tg}^{-1} \frac{\omega}{Z_i} \approx 0^\circ$ y para ω muy grande $\text{tg}^{-1} \frac{\omega}{Z_i} \approx 90^\circ$.



Similarmente podemos hacer correcciones para algunos valores, adecuados de frecuencia, pero la aproximación en línea recta es muy buena, especialmente para frecuencias medias alrededor de $\omega = Z_i$.

Hasta ahora hemos dicho que tanto Z_i como p_j son reales, pero consideremos el caso en el que se tiene el factor: $1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ el cual evidentemente tiene dos raíces complejas conjugadas. Si la frecuencia ω es muy pequeña la magnitud será aproximadamente $-20 \lg \omega_n^2$ y que nos representa un valor constante. Si ω es grande, la magnitud será $-20 \lg \omega^2$, que es una línea inclinada de -40 db por década de pendiente. Las dos aproximaciones asintóticas se encuentran en $\omega = \omega_n$ (fig 4-5.3).



Para frecuencias cercanas a ω_n , la aproximación asintótica resulta muy deficiente, especialmente si f es pequeño. Se han elaborado gráficos de corrección para cada valor de f y de esta manera se puede encontrar curvas exactas. Así por ejemplo para $\omega/\omega_n = 0.8$ y $f = 0.2$ la corrección que se debe hacer es de: 6.3db.

Para la fase similarmente se tienen curvas elaboradas para cada valor de f .

En la parte II se encuentran ejemplos prácticos del uso de estos diagramas.

4-6. LA TABLA DE NICHOLS

Resulta útil el gráfico de M y α en función de la amplitud en decibeles contra el ángulo de fase.

Consideremos la función de transferencia directa:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j(\pi + \gamma)} \quad (4-6.1)$$

en donde γ es el margen de fase. De esta manera la función de transferencia del sistema unitario realimentado es:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{|G(j\omega)| \cdot e^{j(\pi + \gamma)}}{1 + |G(j\omega)| e^{j(\pi + \gamma)}} = \frac{-|G(j\omega)| \cdot e^{j\gamma}}{1 - |G(j\omega)| e^{j\gamma}}$$

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{1 - \frac{e^{-j\gamma}}{|G(j\omega)|}} = \frac{1}{1 - \frac{\cos \gamma}{|G(j\omega)|} + j \frac{\sin \gamma}{|G(j\omega)|}} \quad (4-6.2)$$

de donde la magnitud y ángulo de fase son:

$$M = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\cos \gamma}{|G(j\omega)|} \right)^2 + \frac{\sin^2 \gamma}{|G(j\omega)|^2} \right]^{1/2}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{|G(j\omega)|^2} - \frac{2 \cos \gamma}{|G(j\omega)|} \right]^{1/2}} \quad (4-6.3)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma - |G(j\omega)|} \quad (4-6.4)$$

Estas ecuaciones representan elipses y parábolas en el plano de ganancia de fase y margen de fase. Este gráfico se le conoce con el nombre de Tabla de Nichols en honor a su inventor. En el gráfico anterior se puede superimponer la magnitud y el ángulo de margen de fase de la función en lazo abierto, de donde se determinan los valores de magnitud y margen de fase para el sistema en lazo cerrado.

4-7. EL METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

En los métodos anteriores solo se utilizó la frecuencia real, o sea $s = j\omega$, pero hoy vamos a establecer un método más general en donde la frecuencia s es compleja.

La ecuación característica que determina la estabilidad del sistema es: $1 - kt_{cs} = 0$, entonces vamos a considerar las posiciones que ocupan las raíces de esta ecuación para cada valor característico de la ganancia k del sistema. Conocidas las raíces se puede determinar fácilmente el comportamiento del sistema, su grado de estabilidad etc.

Se han desarrollado una serie de teoremas muy simples para la construcción del lugar de las raíces cuando k varía $-\infty$ a $+\infty$. Por definición tenemos que:

$$- t_{cs}(s) = B(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (4-7.1)$$

y puesto que $n(s)$ y $d(s)$ puede descomponerse en una serie de productos, entonces la ecuación característica será:

$$1 - kt_{cs}(s) = 1 + kB(s) = 1 + k \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)} = 0 \quad (4-7.2)$$

en donde se trata de averiguar como varían las raíces de (4-7.2) cuando k varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Los teoremas que a continuación se nombran sirven para $0 \leq k < \infty$ pero pueden extenderse para el caso de k negativo.

TEOREMA 1. El número de raíces de $1 + kB(s) = 0$ para un determinado valor de k es igual al mayor grado entre $n(s)$ y $d(s)$.

En efecto, el grado de la ecuación $0 = d(s) + kn(s)$ será igual al exponente mayor entre $d(s)$ y $n(s)$ y este a su vez determina el número de raíces de la ecuación.

TEOREMA 2. El lugar de las raíces son curvas continuas. Evidentemente, para un pequeño incremento de k se tiene una variación pequeña del lugar de las raíces, de donde se deduce también que las tangentes a la curva serán continuas en cada punto, excepción hecha en los puntos en donde $k = 0$ $B'(s) = 0$, $B(s) = \infty$, esto se ve fácilmente diferenciando la ecuación (4-7.2)

$$-1 = kB(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = kB'(s) + B(s) \frac{dk}{ds} \Rightarrow \frac{ds}{dk} = - \frac{B(s)}{kB'(s)} \quad (4-7.3)$$

TEOREMA 3. El lugar de las raíces principia en los polos y termina en los ceros de $B(s)$.

Esto se ve fácilmente de la ecuación $d(s) + kn(s) = 0$. Cuando $k = 0$ las raíces son dadas por $d(s)$; pero la misma expresión si $k \neq \infty$ se puede escribir en la forma $\frac{1}{k} d(s) + n(s) = 0$, si $k \rightarrow \infty$ entonces $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ quedan únicamente $n(s)$ como las raíces de la ecuación.

TEOREMA 4. Si $B(s)$ tiene p polos y z ceros, entonces $B(s)$ tiene $p - z = e$ ceros en el infinito siempre que $p > z$; o tiene $z - p = e$ polos en el infinito siempre que $z > p$. En efecto si por lo menos existe un polo más que un cero, cuando $s \rightarrow \infty$ la función tiende a cero, o sea $s \rightarrow \infty$ es un cero de la función.

El número de ceros es igual al número de polos incluyendo los del infinito.

TEOREMA 5. Vamos a establecer la pendiente del lugar de las raíces cuando $k \rightarrow \infty$. Supongamos que $p > z$ o sea $p - z = e$, la ecuación característica es:

$$0 = 1 + kB(s) = 1 + k \frac{s^z + n_1 s^{z-1} + \dots}{s^{z+e} + p_1 s^{z+e-1} + \dots} \quad (4-7.4)$$

dividiendo $n(s)$ para $d(s)$ se tiene:

$$0 = 1 + k \left[\frac{1}{s^e} - \frac{d_1 - n_1}{s^{e+1}} + \dots \right] \quad (4-7.5)$$

En la ecuación (4-7.5) vamos a establecer algunas aproximaciones cuando $s \rightarrow \infty$. Supongamos una primera a aproximación a (4-7.5) como:

$$0 = 1 + k \frac{1}{s^e} \quad (4-7.6)$$

entonces para $k > 0$ se tiene:

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow s^e \rightarrow -k \Rightarrow e \angle s \rightarrow (2r + 1)\pi \quad (4-7.7)$$

en donde s es el ángulo de la frecuencia s . Si $k < 0$, entonces se tiene:

$$e \angle s \rightarrow 2r\pi \quad (4-7.8)$$

En el límite, el ángulo de s será:

$$k > 0 \Rightarrow \angle s = \frac{(2r + 1)\pi}{e} \quad (4-7.9)$$

$$k < 0 \Rightarrow \angle s = \frac{2r\pi}{e}$$

en donde $r = 0, 1, 2, \dots, e - 1$.

Las ecuaciones (4-7.9) representan las direcciones de las asíntotas al infinito.

TEOREMA 6. Las asíntotas al infinito se encuentran en el centroide de $B(s)$.

La primera aproximación de la ecuación (4-7.5) nos dió el ángulo de las asíntotas al infinito. Vamos a determinar una mejor aproximación, o sea tomamos otro término de la (4-7.5) esto es:

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow 0 = 1 + k \left[\frac{1}{s^e} - \frac{d_1 - n_1}{s^{e+1}} \right] \quad (4-7.10)$$

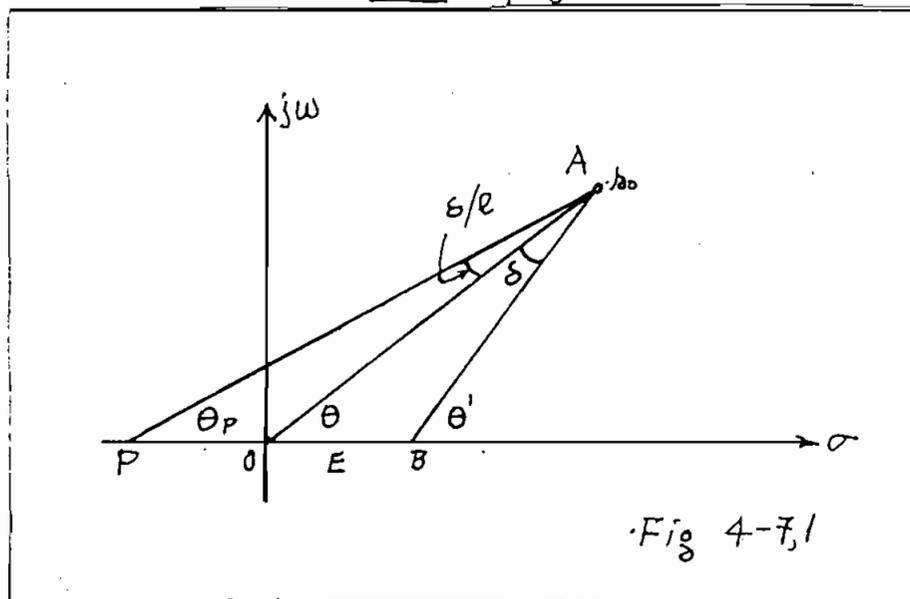
En esta ecuación d_1 representa la suma de los valores de los polos de $B(s)$ y n_1 representa la suma de los valores de los ceros de $B(s)$.

Si llamamos $E = d_1 - n_1$, entonces la ecuación (4-7.10) puede expresarse en la forma:

$$0 = s^{e+1} + k(s - E) \quad (4-7.11)$$

Supongamos un valor $s = s_0$ que satisface (4-7.11) y que tiene un ángulo θ (fig 4-7.1), entonces se tiene:

$$(e + 1)\theta = \angle -k + \angle s_0 - E$$



$$k > 0 \Rightarrow (e + 1)\theta = (2r + 1)\pi + \angle s_0 - E \quad (4-7.12)$$

$s_0 - E$ es un vector tal como el indicado por BA en la fig 4-7.1, con un ángulo $\theta' = \theta + \delta$, luego de 4-7.12 se deduce que:

$$\theta = \frac{(2r + 1)\pi}{e} + \frac{\delta}{e} \quad (4-7.13)$$

de esta expresión observamos que si $\delta \neq 0$ la asíntota de pendiente $(2r + 1)\pi/e \neq \theta_p$ no pasa por el origen.

Supongamos que sea P el punto de cruce de la asíntota con el eje real, entonces aplicando la ley de los senos de trigonometría se tiene en la fig 4-7.1 que:

$$\frac{\text{sn } \delta}{E} = \frac{\text{sn}(180 - \theta')}{OA}$$

$$\frac{\text{sn } \theta_p}{OA} = \frac{\text{sn } \delta/e}{OP}$$

de donde:

$$\frac{\text{sen } \delta}{E} = \frac{\text{sn}(180 - \theta')}{\text{sn } \theta_p} \cdot \frac{\text{sn } \delta/e}{OP}$$

$$\frac{\text{sn } \delta}{E} \approx \frac{1}{OP} \cdot \frac{\text{sn } \theta'}{\text{sn } \theta_p} \text{sn } \delta/e$$

como el punto s_0 es muy lejano θ' se aproxima a θ_p , $\text{sn } \delta \approx \delta$; $\text{sn } \delta/e \approx \delta/e$, de donde:

$$\frac{\delta}{E} = \frac{1}{OP} \frac{\delta}{e} \Rightarrow \overline{OP} = -\frac{E}{e} \quad (4-7.14)$$

Puesto que $E = d_1 - n_1$, el cruce de la asíntota con el eje real será:

$$P = \frac{d_1 - n_1}{e} = + \frac{\sum \text{polos de } B(s) - \sum \text{ceros de } B(s)}{\sum \text{No polos de } B(s) - \sum \text{No ceros de } B(s)} \quad (4-7.15)$$

Al punto P se lo llama el centroide de $B(s)$ puesto que la expresión (4-7.15) es muy análoga al centro de masas que se usa en mecánica.

TEOREMA 7. Partes del eje real que forman el lugar de las raíces.

De la ecuación característica $1 + kB(s) = 0$ se tiene:

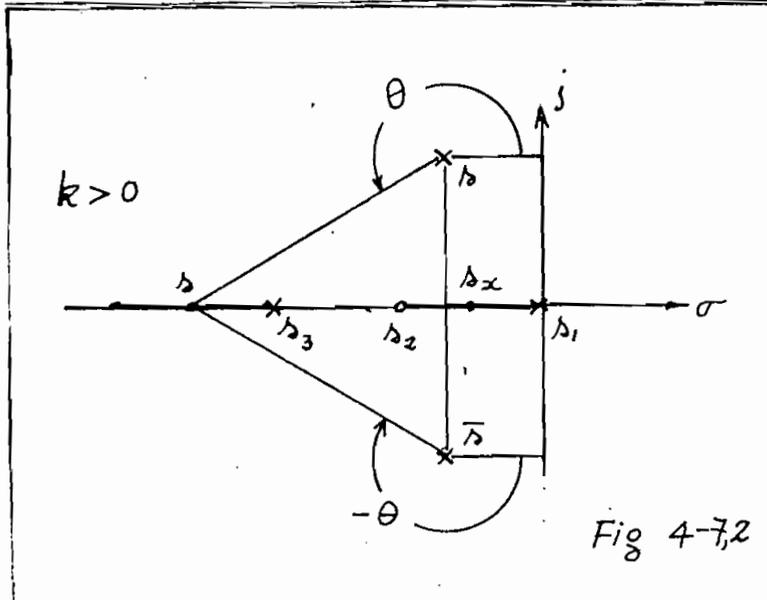
$$|B(s)| = \left| -\frac{1}{k} \right| \quad (4-7.16)$$

$$k > 0 \Rightarrow \angle B(s) = (2r + 1)\pi \quad (4-7.17)$$

$$k < 0 \Rightarrow \angle B(s) = 2r\pi \quad (4-7.18)$$

de donde $r = 1, 2, 3, \dots, e - 1$

Consideremos el caso de dos polos o ceros de $B(s)$ complejas conjugadas, si s es un punto del eje real, sus ángulos se cancelarán mutuamente y estas raíces no contribuirán en nada al ángulo de $B(s)$, (fig 4-7.2).

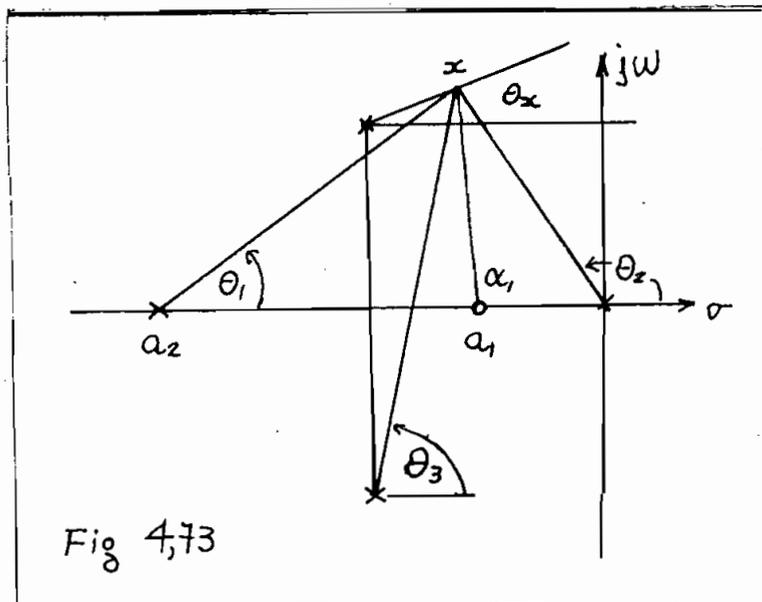


Pero si tomamos un polo o un cero real, entonces un punto s_x del eje real pertenecerá al lugar de las raíces si es que está localizado a la izquierda de un número

impar de puntos singulares (polos y ceros) siempre que $k > 0$. Esto se debe a que el ángulo de $B(s)$ debe darnos 180° o -180° .

Si $k < 0$, entonces se cumplirá lo contrario o sea: un punto del eje real será lugar de las raíces siempre que esté localizado a la izquierda de un número par de singularidades.

TEOREMA 8. Angulo en el que el lugar geométrico sale de los polos y termina en los ceros. Consideremos la distribución de polos y ceros en la fig 4-7.3, queremos encon



trar con que ángulo sale el lugar de las raíces del polo a. Sea x un punto muy cercano al polo y que es un punto del lugar, entonces si $k > 0$ debe cumplir con la condición dada en la ecuación 4-7.17, o sea que:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_x - \alpha_1 = 180^\circ \quad (4-7.19)$$

Si x se aproxima al polo A , entonces los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_1$, se aproximarán a los ángulos que forman las rectas que unen los polos y ceros de $B(s)$ con el polo A considerado, de donde se puede calcular θ_x . Si $k < 0$ entonces la suma de ángulos debe ser 0° y se procede en idéntica forma.

Si el punto A es un polo múltiple de orden m , entonces se tendrá que:

$$m\theta_x = D^\circ + (2r + 1)\pi \quad (4-7.20)$$

siendo D° el ángulo neto en A debido a los otros polos y ceros de $B(s)$. Puesto que el polo A es de orden m entonces debe existir m lugares que salen de A con ángulos dados por:

$$\theta_x = \frac{D^\circ}{m} + \frac{2r + 1}{m}\pi$$

La diferencia de ángulo entre dos lugares sucesivos es:

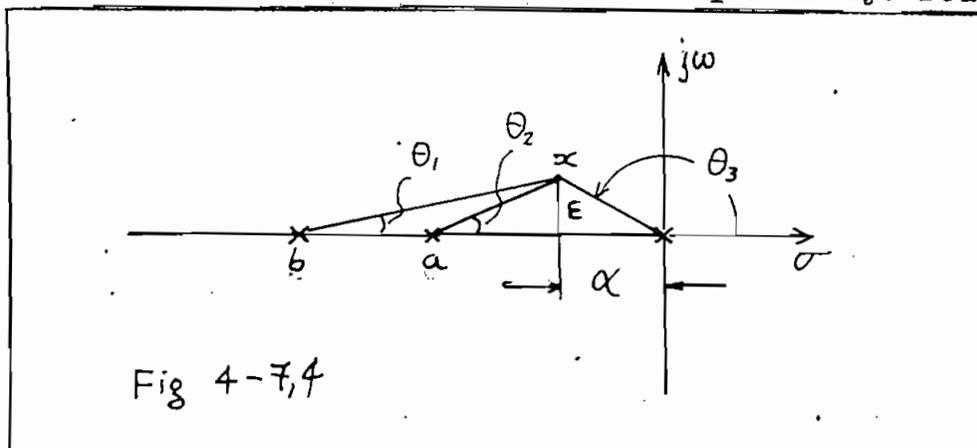
$$\theta_{x_1} - \theta_{x_2} = \frac{D^\circ}{m} + \frac{2r + 1}{m}\pi - \left(\frac{D^\circ}{m} + \frac{2(r - 1) + 1}{m}\pi \right) = \frac{2\pi}{m} \quad (4-7.21)$$

Si queremos calcular α_x , se procederá en idéntica forma.

TEOREMA 9. Puntos de cruce del lugar de las raíces.

Es muy importante encontrar los puntos de cruce del lugar de las raíces con el eje real. Consideremos el sistema cuyos polos y ceros se encuentran dibujados en la fig 4-7.4.

Por el teorema 7 observamos que el eje real es



también parte del lugar de las raíces para:

$$+ a \leq s \leq 0$$

$$-\infty < s \leq + b$$

y puesto que cuando k aumenta se observa que dos raíces tienden a un mismo punto, del cual deben salir hacia valores imaginarios; este punto es por ejemplo el marcado con $-c$. Vamos a calcular el punto $-c$. Supongamos un punto x muy cercano al $-c$ supuesto y que sea del lugar de las raíces, entonces debe cumplirse que:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$$

Si ϵ es la distancia entre x y $-c$ se tiene aproximadamente que:

$$\frac{\epsilon}{b - \alpha} + \frac{\epsilon}{a - \alpha} - \frac{\epsilon}{\alpha} = 0$$

de donde, eliminado ϵ y conocidos a y b se puede calcular α .

Si el sistema es más complicado, entonces se recurrirá a una solución de la ecuación anterior por medio

de pruebas de valores de α .

Existe otro método que es muy ventajoso para sistemas un poco más complicados. Supongamos que la función $1 + kB(s) = 0$ tiene la forma: $1 + kB(s) = (s - s_0)^2 \cdot H(s) = 0$ en donde se tiene en $s = s_0$ una doble raíz.

Derivando esta ecuación con respecto a s se tiene:

$$kB'(s) = 2(s - s_0)H(s) + (s - s_0)^2 H'(s)$$

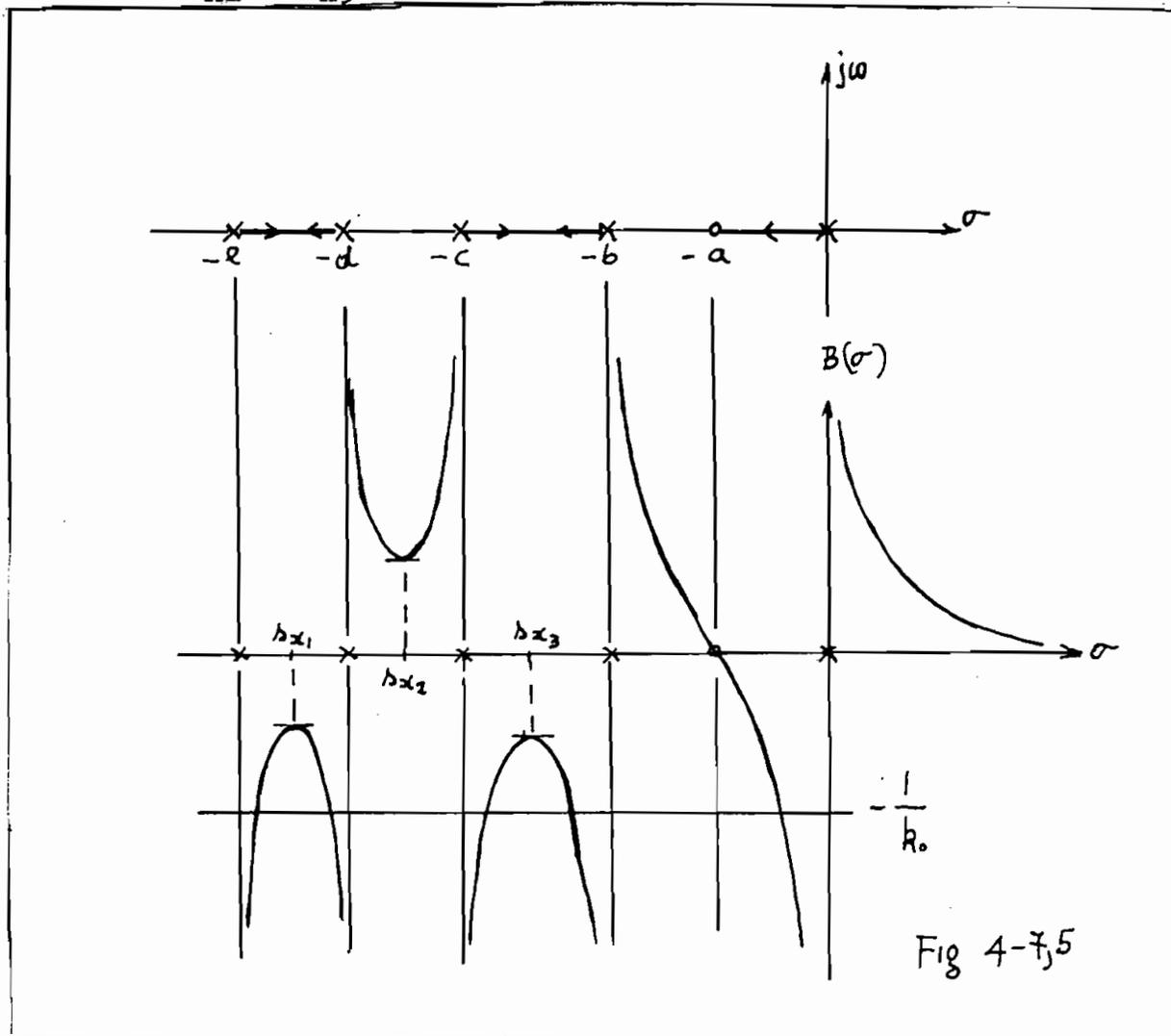
en donde k es una constante. Para $s = s_0$ se tiene: $B'(s_0) = 0$, o sea que para encontrar los puntos dobles se debe igualar la primera derivada de $B(s)$ a cero. Similarmente un punto triple se encontrará con la condición $B''(s) = 0$ y así seguido.

Ahora bien, por lo general $B'(s) = 0$ tiene una expresión muy complicada para poder encontrar sus raíces, entonces se recurre a un procedimiento gráfico, para lo cual se dibuja la función $B(s)$ contra s siendo $s = \sigma$ un número real. Por ejemplo consideremos el sistema del tipo:

$$B(s) = \frac{(s + a)}{s(s + b)(s + c)(s + d)(s + e)}$$

cuya posición de polos y ceros y un gráfico explicativo de $B(\sigma)$ se halla dibujado en la fig 4-7.5. Por el teorema 7 se tiene el lugar de las raíces en el eje real como el dibujado, y se ve fácilmente que entre $-e \leq s \leq -d$ y $-c \leq s \leq$

Si $-b$ existe un punto doble. En el gráfico de $B(\sigma)$ vs. σ los puntos en los que $B'(\sigma) = 0$ son s_{x1} , s_{x2} , y s_{x3} y estos serían los puntos dobles buscados. Pero s_{x2} no puede pertenecer al lugar de las raíces, quedando únicamente los puntos s_{x1} y s_{x3} .



En el mismo gráfico $B(\sigma)$ vs σ se puede establecer para cada $B(\sigma)$ un valor $-1/k$ puesto que $B(s) = -1/k$, tal como el indicado en la figura, de esta manera se pue-

de calcular k para cada $B(s)$ del gráfico.

Este procedimiento requiere solo el cálculo de unos pocos puntos $B(\sigma)$, establecer una curva más o menos exacta en las regiones en donde se sabe que existen puntos dobles y encontrar $B'(\sigma) = 0$ por medio de la pendiente horizontal a la curva $B(\sigma)$.

TEOREMA 10. Los puntos de cruce del lugar de las raíces con el eje imaginario se puede encontrar por medio del criterio de Routh. Supongamos que se tiene el sistema:

$$0 = s^3 + as^2 + bs + k$$

en donde k es la ganancia del sistema, entonces, por el criterio de Routh se tiene:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & b \\ s^2 & a & k \\ s^1 & \frac{ab-k}{a} & \\ s^0 & k & \end{array}$$

para que el lugar de las raíces, cruce el eje imaginario, se tiene:

$$ab - k = 0$$

o sea reemplazando en la ecuación original:

$$0 = s^3 + as^2 + bs + ab = s(s^2 + b) + a(s^2 + b) = (s^2 + b)(s + a)$$

de la cual:

$$s = \pm j \sqrt{b} ; \quad s = -a$$

que son las tres raíces de la ecuación para $k = ab$. El cruce con el eje imaginario es $j \sqrt{b}$.

Si el sistema es más complicado se debe probar algunos valores sobre el eje imaginario y ver si se cumple con la condición de la suma de ángulos que debe dar 180°.

TEOREMA 11. Cálculo de k para cualquier punto del lugar de las raíces.

De la ecuación $1 + kB(s) = 0$ se tiene que para un punto s_0 :

$$|k| = \frac{1}{|B(s)|} = \frac{|d(s)|_{s=s_0}}{|n(s)|_{s=s_0}} = |k|$$

o sea:

$$k = \frac{|s_0 + p_1| |s_0 + p_2| \dots}{|s_0 + z_1| |s_0 + z_2| \dots} \quad (4-7.22)$$

lo cual es la relación entre las longitudes desde los polos de B(s) hasta el punto s_0 y de los ceros de B(s) hasta s_0 .

TEOREMA 12. Suma y productos de las raíces del lugar de las raíces. La ecuación característica podemos expresarla en la forma:

$$0 = 1 + kB(s) = 1 + k \frac{s^z + n_1 s^{z-1} + \dots + n_z}{s^p + d_1 s^{p-1} + \dots + d_p}$$

si $e = p - z > 2$ se tiene que:

$$0 = s^p + d_1 s^{p-1} + \dots + (d_p + \frac{kn_z}{z}) \quad (4-7.23)$$

siendo d_1 la suma de los polos de B(s) el cual es independiente de k, el término $d_z + \frac{kn_z}{z}$ es el producto de las raíces, si B(s) tiene un polo en el origen entonces $d_p=0$ y el producto de las

raíces es proporcional a k . Si $n_z = 0$ (cero en el origen) entonces el producto de las raíces es d_p , independiente de k .

TEOREMA 13. Desplazamiento del origen del lugar de las raíces. Supongamos que se conoce el lugar de las raíces para $0 \leq k \leq k_0$, o sea que para $k = k_0$ las raíces de $1 + kB(s) = 0$ son $\{s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0p}\}$, queremos con estos datos completar la curva para valores $k < k_0 < \infty$.

Sea $k' = k - k_0$, entonces si k varía desde k_0 hasta ∞ , k' variará desde 0 a ∞ , por lo tanto, encontrar las raíces de $1 + kB(s) = 0$ en donde $k_0 \leq k < \infty$ es equivalente a encontrar las raíces de $1 + k'B^*(s) = 0$, donde $0 \leq k' < \infty$. siendo $B^*(s)$ una nueva función de s , y si se conoce los polos y ceros de $B^*(s)$ se puede trazar el lugar de las raíces de la manera ya conocida.

Vamos a ver cuales son los polos y ceros de la nueva $B^*(s)$, para esto consideramos las raíces de:

$$0 = 1 + kB(s) = 1 + k \frac{n(s)}{d(s)} \quad (4-7.24)$$

la cual se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned} 0 = d(s) + kn(s) &= [d(s) + k_0 n(s)] + (k - k_0)n(s) = \\ &= d^*(s) + k'n(s) = 0 \end{aligned} \quad (4-7.25)$$

De donde, por definición:

$$0 = 1 + k' \frac{n(s)}{d^*(s)} = 1 + k'B^*(s) \quad (4-7.26)$$

De esta expresión observamos que los polos de $B^*(s)$ son los ceros de $d^*(s)$ que a su vez son las raíces de $1 + kB(s) \neq 0$ para $k = k_0$, o sea aquellas raíces conocidas $\{s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}\}$ de $0 = 1 + k_0 B(s)$ pasan a ser los polos de $B^*(s)$. Similarmente de 4-7.24 se observa que los ceros de $B^*(s)$ son los ceros de $n(s)$. Con esto se tiene completa información de la posición de los polos y ceros de $B^*(s)$, faltaría ver si es que d^* tiene algún coeficiente constante. De 4-7.23 se tiene:

$$d^*(s) = d(s) + k_0 n(s) = K \prod (s + p_j) \quad (4-7.27)$$

en donde el orden de $d^*(s)$ es el mayor orden entre d y n .

Si $s \rightarrow \infty$, entonces pueden suceder tres casos:

$$B(s) \rightarrow 0, \quad B(s) \rightarrow 1, \quad B(s) \rightarrow \infty.$$

Si $B(s) \rightarrow 0$ entonces:

$$\frac{d^*(s)}{d(s)} = 1 + k_0 \frac{n(s)}{d(s)} = K \frac{\prod (s + p_j)}{d(s)} \quad (4-7.28)$$

en donde $d(s)$ es de mayor orden que $n(s)$, por lo que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d^*(s)}{d(s)} = 1 = K \quad (4-7.29)$$

Si $B(s) \rightarrow 1$, el orden de $n(s)$ y el de $d(s)$ son iguales, por lo que:

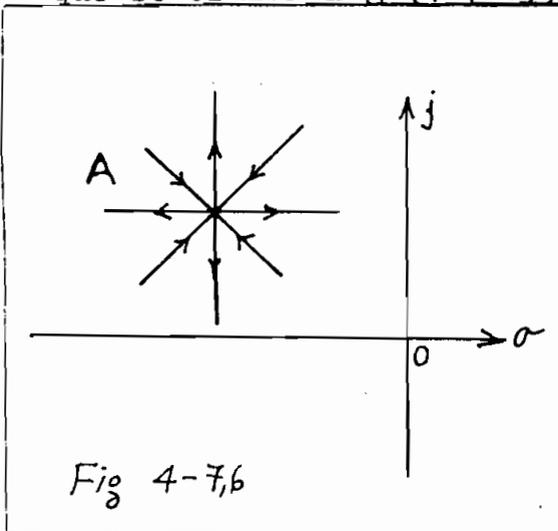
$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d^*(s)}{d(s)} = 1 + k_0 = K \quad (4-7.30)$$

Si $B(s) \rightarrow \infty$, el orden de $d(s)$ es menor que $n(s)$ y:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d^*(s)}{n(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(k_0 + \frac{d(s)}{n(s)} \right) = k_0 = K \quad (4-7.31)$$

Se puede también retrazar el lugar de las raíces usando la expresión $1 - k_1 B^*(s) = 0$ en donde $k' = k - k_g = -k_1 < 0$. Si $k = k_0$ se tiene $k_1 = 0$ y las raíces serán los polos de $B^*(s)$, pero si $k_1 = k_0$, las raíces están localizadas en los polos de $B(s)$ puesto que $k = 0$. Este proceso es exactamente contrario al anterior.

Como primera aplicación de este teorema, consideremos, que en un punto A se tienen m lugares de raíces que se cruzan fig (4-7.6), queremos saber que orientación



tiene cada rama con relación a las otras. Puesto que A es un punto del lugar de las raíces entonces por el teorema 13 lo podemos considerar como el polo de una nueva función $B^*(s)$. Siendo A un polo de $B^*(s)$ entonces podemos aplicar el teo-

rema 8 para calcular el ángulo de las ramas salientes con la expresión.

$$\theta_x = \frac{D^\circ}{m} + \frac{(2r + 1)\pi}{m} ; r = 1, 2, \dots$$

(4-7.32)

Para las ramas entrantes al punto A podemos decir que se hallan defasadas 180° , entonces al ángulo de entrada será:

$$\theta_y = \frac{D^\circ}{m} + \frac{2\pi r}{m} ; r = 1, 2, \dots$$

(4-7.33)

De donde: $\theta_x - \theta_y = \pi/m$.

P A R T E II

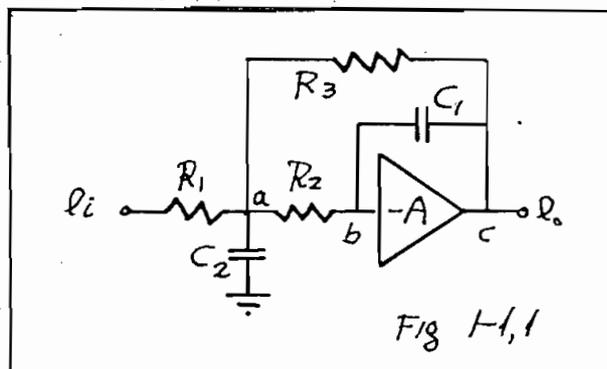
1.- ESTUDIO TEORICO-EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA EN LAZO ABIERTO Y EN LAZO CERRADO

1.1. ESTUDIO DE UN SISTEMA DE TRES POLOS

Para la parte experimental, he utilizado como elementos fundamentales a los amplificadores operacionales existentes en el Laboratorio. Cuatro de estos amplificadores son de marca HEATHKIT Model EUW-19 y el quinto pertenece al sistema: SERVO SYSTEM ES130.

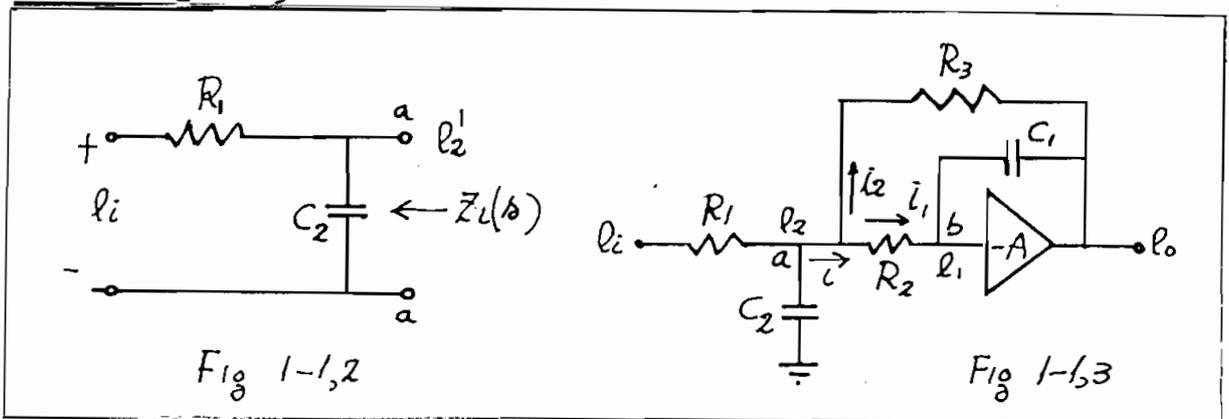
Para que las propiedades de la realimentación, tal como su tendencia a la inestabilidad, sean puestas de manifiesto con bastante claridad he preferido armar un sistema de tres polos de ganancia variable que de posición de polos constante. Pero debido a la escases de amplificadores operacionales me he visto en la necesidad de utilizar redes especiales para formar este sistema de tres polos, por esta razón con un amplificador he conseguido una función de dos polos y con el siguiente una función de un polo.

Consideremos un amplificador con la siguiente configuración:



Vamos a calcular la función de transferencia, o sea el valor $E_0(s) / E_1(s)$, para lo cual, y por facilidad procedemos de la siguiente manera:

Por el teorema de Thevenin, la tensión $E_2'(s)$ que aparece entre el punto a y tierra cuando abrimos las resistencias R_2 y R_3 (fig 1-1.2) es:



$$E_2'(s) = \frac{E_1(s)}{R_1 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{1}{sC_2} = \frac{E_1(s)}{1 + sR_1C_2} \quad (1-1.1)$$

y la impedancia vista desde el punto a es:

$$Z_{in}(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_2} = \frac{R_1}{1 + sR_1C_2} \quad (1-1.2)$$

Consideramos que el amplificador en lazo abierto, tiene una ganancia muy grande y tal que el punto ℓ_1 sea una tierra virtual, además que la corriente que fluya al interior del amplificador sea despreciable comparándola con i_1 , entonces, con estas condiciones:

$$\ell_1 \approx 0 \Rightarrow I_1(s) = \frac{E_2(s)}{R_2} = -\frac{E_0(s)}{1/sC_1} \Rightarrow E_2(s) = -sR_2C_1E_0(s) \quad (1-1.3)$$

Por otra parte, la corriente i_2 vale:

$$I_2(s) = \frac{E_2(s) - E_0(s) - E_0(s)(1 + sR_2C_1)}{R_3} \quad (1-1.4)$$

y la corriente total i es:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) = -E_0(s) sC_1 - E_0(s)(1 + sR_2C_1)/R_3$$

$$I(s) = -\frac{1 + s(C_1R_3 + C_1R_2)}{R_3} E_0(s) \quad (1-1.5)$$

La tensión ℓ_2 se puede calcular (fig 1-1.4) con las ecuaciones (1-1.1), (1-1.2) y (1-1.5):

$$E_2(s) = E_2'(s) - Z_i(s) I(s) = \frac{E_i(s)}{1 + sR_1C_2} + \frac{R_1}{1 + sR_1C_2}$$

$$\frac{1 + s(R_3C_1 + R_2C_1)}{R_3} E_0(s) = -sR_2C_1E_0(s) \quad (1-1.6)$$

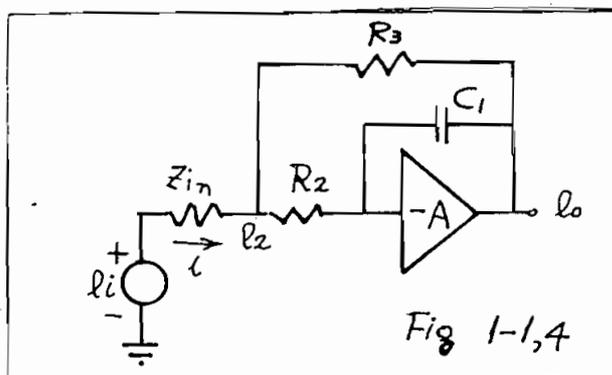


Fig 1-1,4

$$-E_0(s) \left[sR_2C_1 + \frac{R_1(1 + sC_1(R_2 + R_3))}{R_3(1 + sR_1C_2)} \right] = \frac{1}{1 + sR_1C_2} E_i(s) =$$

$$- E_o(s) \left[\frac{sR_2C_1R_3 + s^2R_2C_1R_3R_1C_2 + R_1 + sR_1C_1R_2 + sR_1C_1R_3}{R_3(1 + sR_1C_2)} \right] =$$

$$= \frac{E_i(s)}{1 + sR_1C_2}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-R_3/R_1}{R_2R_3C_1C_2s^2 + R_2C_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} \right) s + 1} \quad (1-1.7)$$

que es la función de transferencia de dos polos.

Si se eligen los parámetros del circuito con los valores:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ Megaohmio}$$

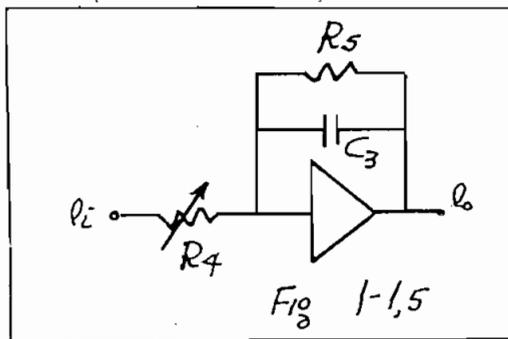
$$C_1 = 0,47 \text{ microfaradios}$$

$$C_2 = 0,70 \text{ microfaradios}$$

La función de transferencia será:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-1}{0,33 s^2 + 1,41s + 1} = \frac{-3,03}{(s + 0,9)(s + 3,36)} \quad (1-1.8)$$

Si se utiliza la sencilla red de la fig (1-1.5), se tiene un polo adicional:



La función de transferencia es:

$$\frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{\frac{R_5 / sC_3}{R_5 + 1/sC_3}}{R_4} = \frac{1}{R_4 C_3 (s + \frac{1}{R_5 C_3})} \quad (1-1.9)$$

Si escogemos: $C_3 = 0,47 \mu F$ y $R_5 = 100K\Omega$, entonces:

$$\frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{-(1/R_4)}{0,47(s + \frac{1}{0,1 \times 0,47})} = \frac{-2,13/R_4}{s + 21,3} \quad (1-1.10)$$

en donde la ganancia del sistema se puede variar en un rango muy amplio con la resistencia R_4 .

Al conectar en serie las redes de las figuras 1-1.1 y 1-1.5, se tiene el sistema de tres polos fijos con ganancia variable (fig 1-1.6).

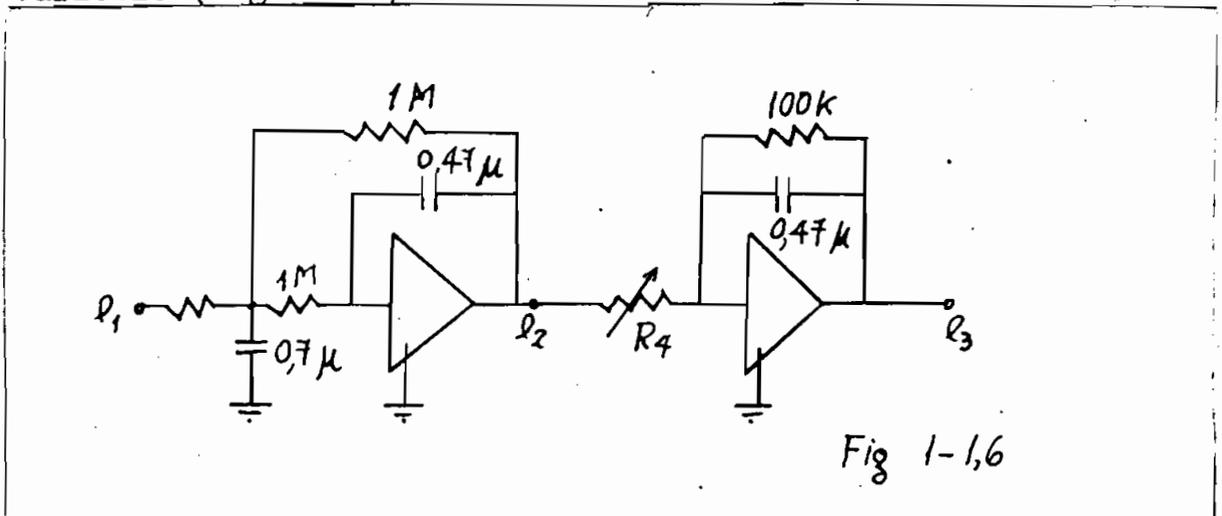


Fig 1-1,6

La función de transferencia del sistema es:

$$\frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{E_3(s)}{E_2(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{-2,13/R_4}{s + 21,3} \cdot \frac{-3,03}{(s + 0,9)(s + 3,36)}$$

$$\frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9) (s + 3,36) (s + 21,3)} \quad (1-1.11)$$

1-2.a) RESPUESTA DEL SISTEMA EN LAZO ABIERTO A LA FUNCION ESCALON

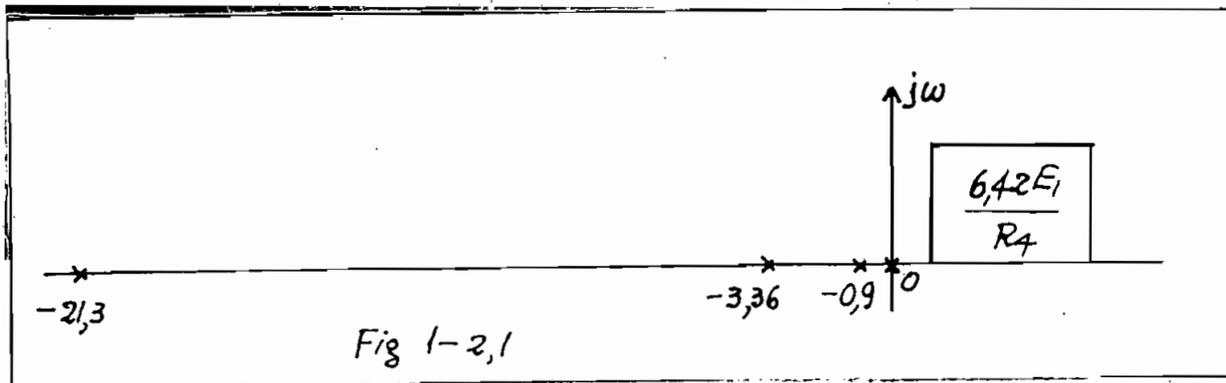
Vamos a estudiar la respuesta del sistema de la figura 1-1.6 a la función de escalón. Si $\ell_1(t) = E_1\mu(t)$, entonces se tiene de la expresión (1-1.11):

$$E_3(s) = G(s) E_1(s) = \frac{E_1}{s} G(s) = \frac{6,42 E_1}{R_4} \cdot \frac{1}{s(s + 0,9) (s + 3,36) (s + 21,3)} \quad (1-2.1)$$

Para calcular $\ell_3(t)$, expresamos (1-2.1) en suma de fracciones:

$$E_3(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 0.9} + \frac{K_3}{s + 3.36} + \frac{K_4}{s + 21.3} \quad (1-2.2)$$

en donde los residuos K_i ; $i = 1, 2, 3, 4$ se puede determinar facilmente a partir de la representación de los polos de $E_3(s)$; (fig 1-2.1)



$$K_1 = \frac{6,42 E_1}{R_4} \left[\frac{1}{(21,3 - 0)(3,36 - 0)(0,9 - 0)} \right] = \frac{0,1 E_1}{R_4}$$

$$K_2 = \frac{6,42 E_1}{R_4} \left[\frac{1}{(21,3 - 0,9)(3,36 - 0,9)(0 - 0,9)} \right] = -0,143 \frac{E_1}{R_4}$$

$$K_3 = \frac{6,42 E_1}{R_4} \left[\frac{1}{(21,3 - 3,36)(0,9 - 3,36)(0 - 3,36)} \right] = 0,0433 \frac{E_1}{R_4}$$

$$K_4 = \frac{6,42 E_1}{R_4} \left[\frac{1}{(3,36 - 21,3)(0,9 - 21,3)(0 - 21,3)} \right] = -0,825 \times 10^{-3} \frac{E_1}{R_4}$$

Reemplazando estos valores en (1-2.2) nos queda:

$$E_3(s) = \frac{E_1}{R_4} \left[\frac{0,1}{s} - \frac{0,143}{s + 0,9} + \frac{0,043}{s + 3,36} - \frac{0,0008}{s + 21,3} \right] \quad (1-2.3)$$

Luego, la función del tiempo, despreciando K_4 queda:

$$e_3(t) = \frac{E_1}{R_4} \left(0,1 - 0,143 e^{-0,9t} + 0,043 e^{-3,36t} \right) \quad (1-2.4)$$

Si hacemos $E_1 = 1$ voltio, podemos dibujar la curva $R_4 e_3(t)$ en función del tiempo, la cual nos servirá para cualquier valor de R_4 . (fig 1-2.2)

La figura 1-2.3 es una foto de la respuesta del sistema tomada cuando $R_4 = 100$ K. Cada cuadro en el eje horizontal representa 1 segundo y en el eje vertical 0,2 voltios.

Del gráfico de la figura 1-2.2 se deduce que para $R_4 = 0,1M$ el valor estable de $e_3(t)$ es $0,1/0,1 = 1$ voltio, el tiempo de subida es: $t_r = 2,9 - 0,4 = 2,5$ seg. De la figura 1-2.3 se deduce que $e_3(t)$ estacionario es $0,2 \times 5,5 = 1,1$

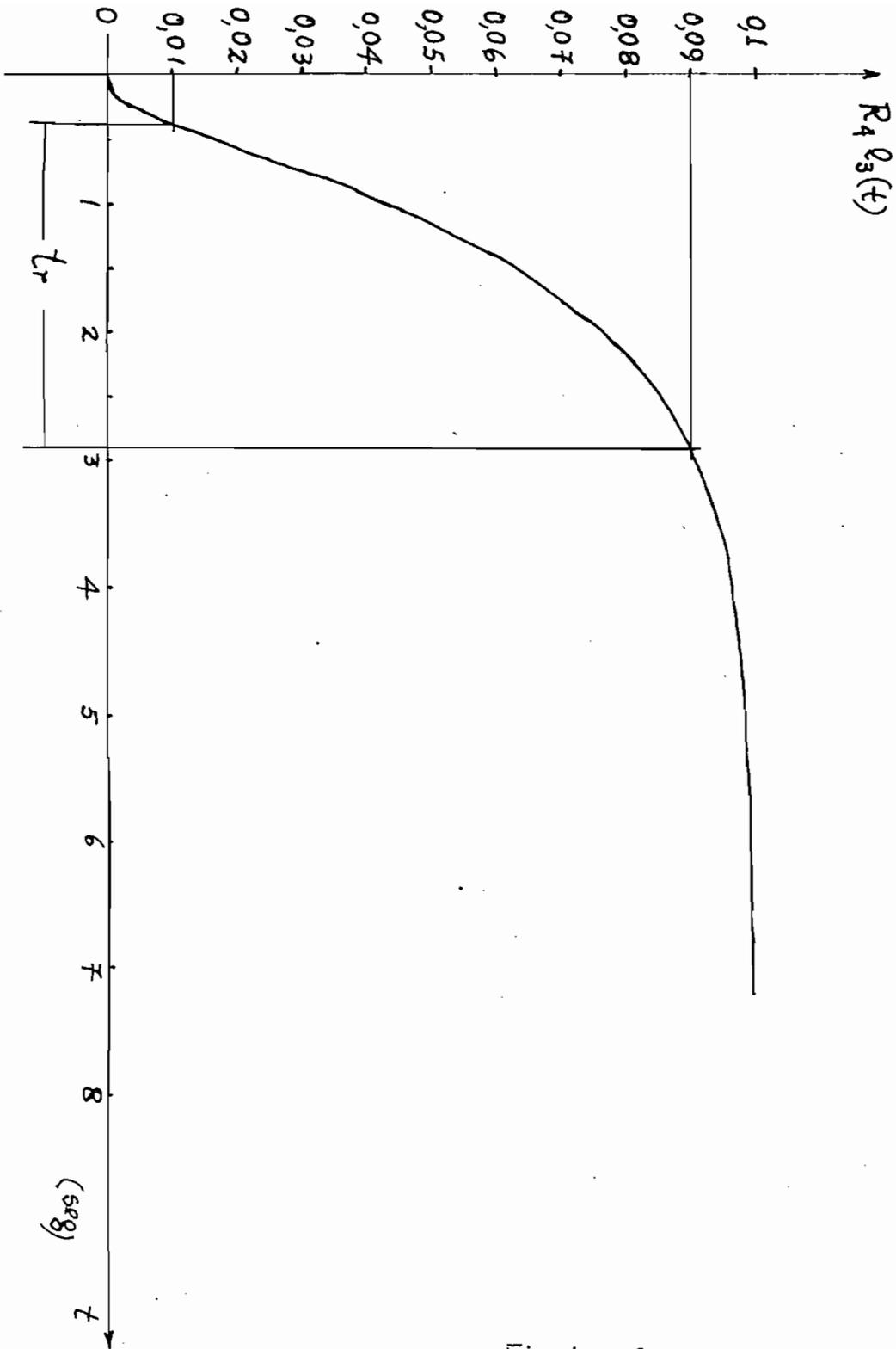


Fig 1-2,2

voltios; y $t_r \approx 2,8 - 0,4 = 2,4$ seg. Los datos calculados con la expresión 1-2.4 y los medidos difieren uno de otro muy poco. El error que se comete en la apreciación de la amplitud es del 10% que es aceptable puesto que los elementos usados son precisamente de esta tolerancia. Además tiene notable influencia el corrimiento de tensión que tiene lugar en los amplificadores operacionales. El error en la medida del tiempo de subida t_r es aproximadamente del $(2,5-2,4)/2,5 = 0,04$ o sea de 4% que es muy pequeño para los componentes usados y solo dependerá de las constantes de tiempo del circuito que a su vez vienen dadas por los productos de capacidad y resistencia del circuito.

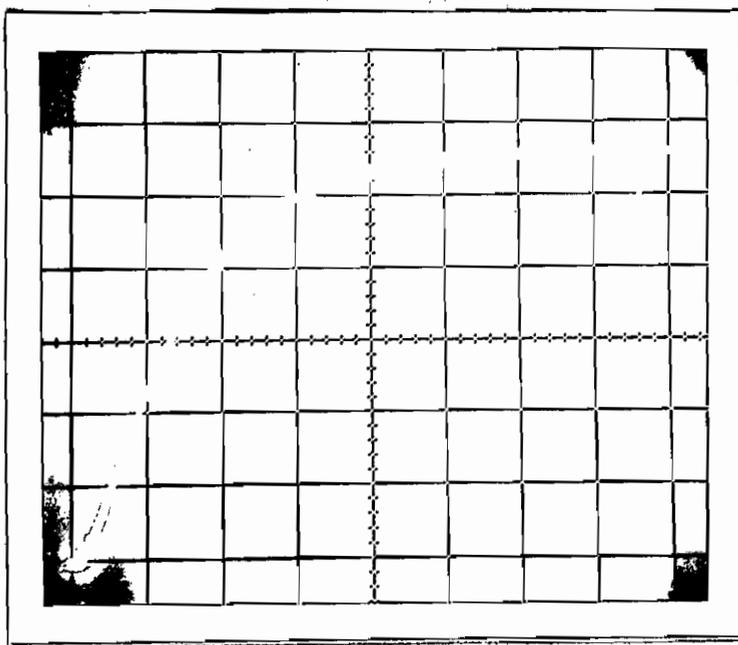


Fig 1-2,3

1-2.b) RESPUESTA DEL SISTEMA EN LAZO ABIERTO A LA FRECUENCIA

En el párrafo anterior se calculó la función de transferencia $G(s)$, en donde s es la frecuencia compleja; si hacemos $s = j\omega$, entonces la ecuación 1-1.11 se convierte en:

$$G(j\omega) = \frac{6,42/R_4}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)} \quad (1-2.5)$$

La función compleja $G(j\omega)$, puede expresarse en la forma:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (1-2.6)$$

en donde $|G(j\omega)|$ es la magnitud y $\phi(\omega)$ es el ángulo de $G(j\omega)$. En la tabla 1-2.1 se tienen valores de $|G(j\omega)|$ y de $\phi(j\omega)$ para un valor de $R_4 (=10K)$

TABLA 1-2.1

ω	$ G(j\omega) $	$\phi(\omega)$
0	10	0°
0,04	10	$-2^\circ 40'$
0,1	9,9	$-8^\circ 18'$
0,2	9,71	$-16^\circ 26'$
0,4	9,00	$-31^\circ 46'$
0,6	8,19	$-45^\circ 25'$
1,0	6,38	$-67^\circ 10'$
1,2	5,60	-75°
1,5	4,69	-87°
2	3,51	$-101^\circ 48'$

ω	$G(j\omega)$	$\phi(\omega)$
3,0	2,12	-123°
4,0	1,39	-138°50'
5,0	0,961	-149°19'
6,0	0,700	-158°
8,0	0,406	-171°24'
10,0	0,256	-181°21'

En la figura 1-2.3' se ha representado el diagrama polar (de Nyquist) correspondiente, calculado (línea gruesa) y medido (línea punteada).

Se observa que entre los valores medido y calculado existe un error en la amplitud (aproximadamente del 10%) por las razones ya dadas en el párrafo anterior. El error en el ángulo de fase es menor, por lo tanto el error introducen los componentes capacitivos y resistivos es menor que el debido al corrimiento de tensión de los amplificadores operacionales.

Es de gran importancia dibujar el diagrama de Bode de la función 1-2.5, para lo cual utilizaremos el método de aproximación asintótica y luego las correcciones necesarias.

Sea $R_4 = 10 \text{ K}$, entonces, tomando logaritmos base 10 de la expresión de la magnitud de $G(j\omega)$ se tiene:

$$20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg 642 - 20 \lg |j\omega + 0,9| - 20 \lg |j\omega + 3,36| + \\ - 20 \lg |j\omega + 21,3|$$

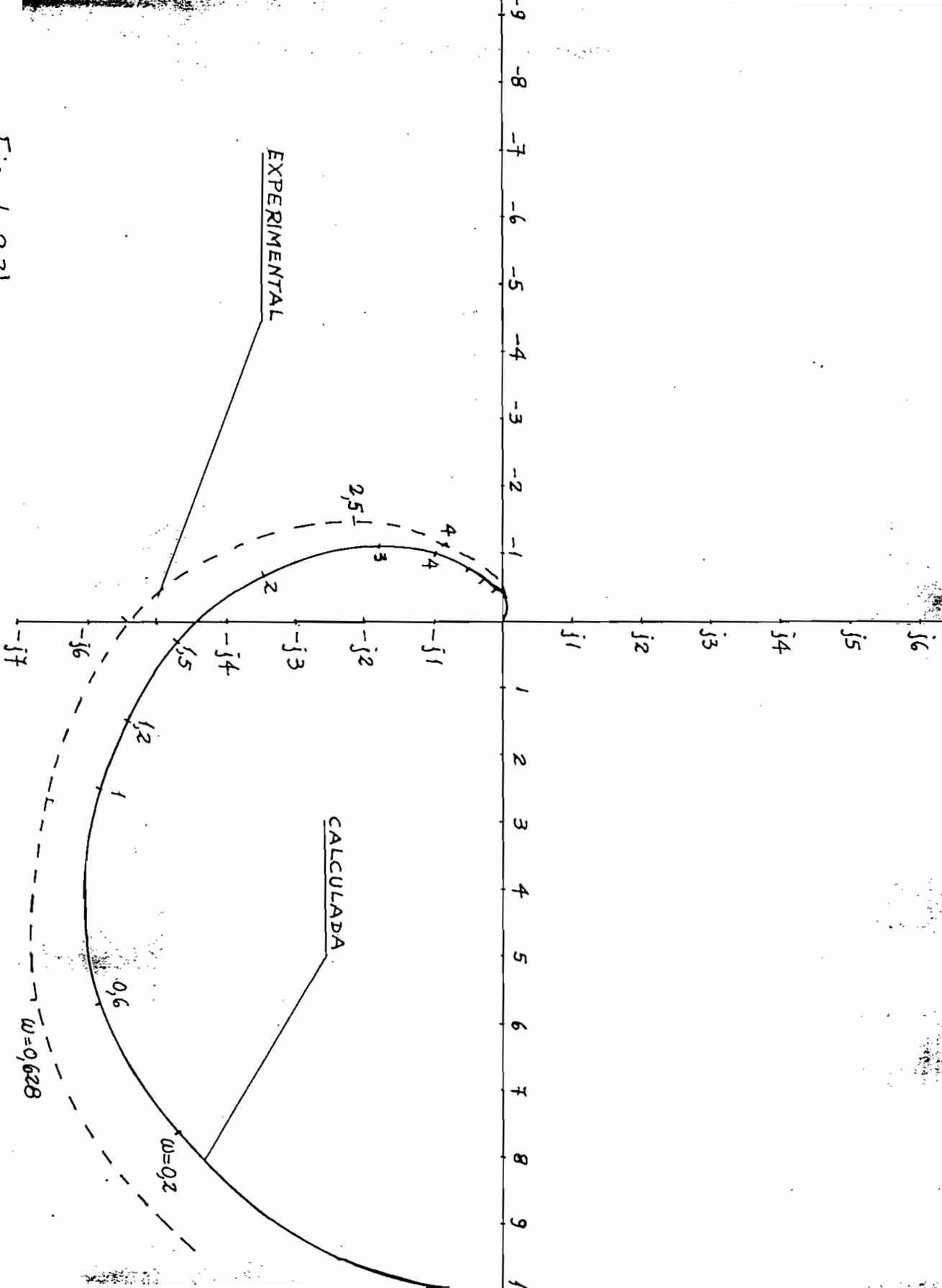


Fig 1-2,3'

Las frecuencias de quiebre son: $\omega = 0,9$; $\omega = 3,36$ y $\omega = 21,3$ rad/seg. En estos puntos se tiene un cambio de pendiente de 20 decibeles por decada, o sea, tenemos las siguientes pendientes:

$$\begin{aligned} 0 < \omega < 0,9 & \text{ rad/seg} \Rightarrow \text{pendiente} = 0 \text{ db/decada} \\ 0,9 < \omega < 3,36 & \Rightarrow \text{pendiente} = -20 \\ 3,36 < \omega < 21,3 & \Rightarrow \text{pendiente} = -40 \\ 21,3 < \omega < \infty & \Rightarrow \text{pendiente} = -60 \end{aligned}$$

Puesto que estas pendientes serán las mismas para cualquier caso, entonces para definir completamente la curva de aproximación asintótica necesitamos calcular las asintotas para un valor particular de ω . Sabemos que si se representa $\lg |j\omega + a|$ por medio de rectas se tiene que para $\omega < a$ la aproximación es $\lg a$ y para $\omega > a$ la aproximación es $\lg \omega$, o sea, podemos elegir por ejemplo $\omega = 1$ rad/seg, entonces la magnitud de la aproximación asintótica será:

$$|G(j\omega)|_{\text{asint}} = \frac{642}{1 \times 3,36 \times 21,3} = 9$$

de donde $20 \lg 9 = 19,1 \text{ db}$ que corresponde al punto del gráfico de la aproximación asintótica para $\omega = 1$, y a partir del cual podemos trazar la curva total (fig 1-2.4).

En muchos casos la aproximación asintótica es suficientemente aceptable, pero, a manera de ilustración vere-

mos que error se comete comparandole con la curva exacta para algunos valores de ω . En la mayoría de los textos sobre diseño de sistemas de control se puede encontrar las llamadas curvas de corrección al diagrama asintótico de Bode, expresadas en función de ω/a (escala logarítmica) en donde a es el polo o cero considerado.

Por ejemplo, para $\omega = 0.9$ rad/seg. se tienen las siguientes correcciones:

$$\frac{\omega}{0.9} = \frac{0.9}{0.9} = 1 \Rightarrow \epsilon = -3.00 \text{ db.}$$

$$\frac{\omega}{3.36} = \frac{0.9}{3.36} \approx 0.27 \Rightarrow \epsilon = -0.25$$

$$\frac{\omega}{21.3} = \frac{0.9}{21.3} \approx 0.04 \Rightarrow \epsilon = 0.0$$

de donde la corrección total para el punto $\omega = 0.9$ rad/seg. será: $E_t = -3 - 0.25 = -3.25$ db. Similarmente para $\omega = 3.36$ rad/seg, $E_t = -3.38$ db y para $\omega = 21.3$ rad/seg, $E_t = -3.12$ db. Si se quiere mayor número de puntos, se tomará otras frecuencias ω y se efectuará el mismo proceso.

Para obtener el diagrama de $\phi(\omega)$ (ángulo de fase) utilizaremos los datos de la tabla puesto que el proceso de obtener $\phi(\omega)$ es idéntico. En la figura (1-2.4) se representa tanto los valores teóricos como experimentales.

1-2.c) CONCLUSIONES

Los resultados teóricos como los experimentales en realidad difieren muy poco (menos del 10%) por lo tanto, la

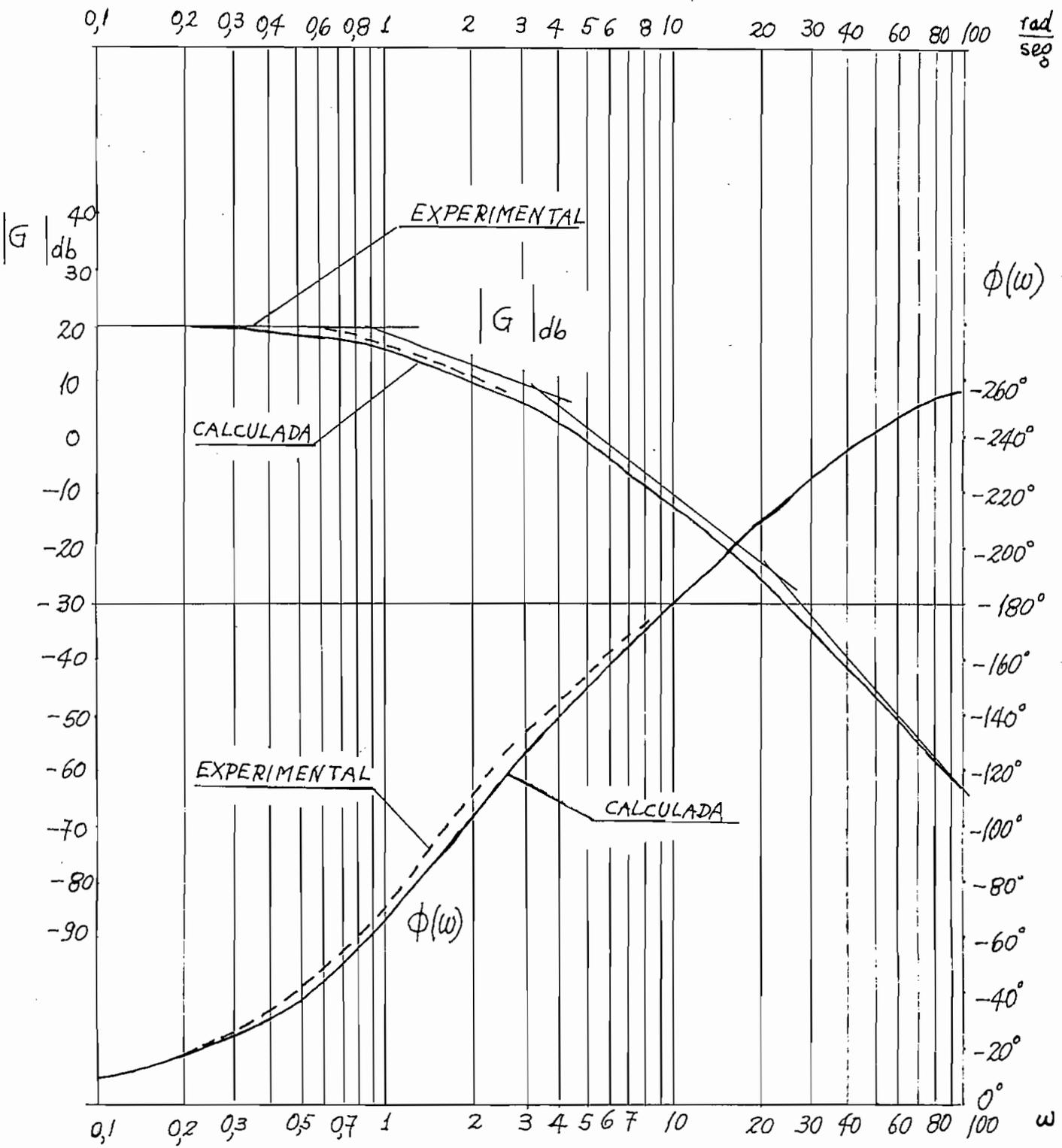


Fig 1-2,4

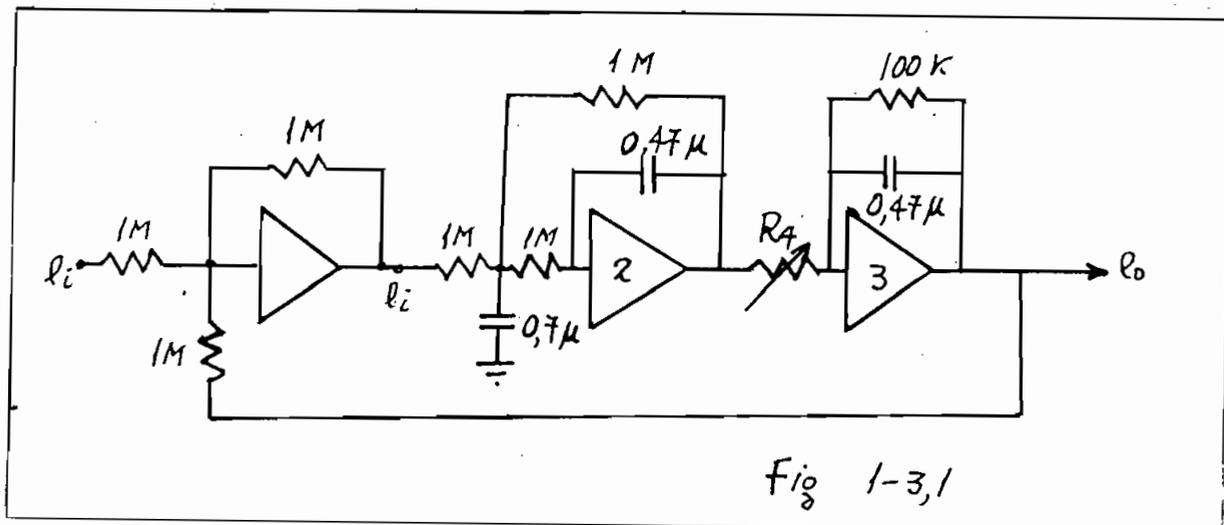
teoría lineal con la cual se ha tratado el sistema físico es lo suficientemente exacta. Los errores que se producen más bien se deben a tolerancias de los componentes de la red ($\pm 10\%$) y principalmente debido al corrimiento de tensión con el tiempo en los amplificadores operacionales. Además hemos supuesto que los amplificadores presentan ganancia infinita y resistencia de entrada muy grande comparada con los restantes elementos por lo tanto un error en las lecturas era lógico de esperarse.

El diagrama de Nyquist y el ^{de} Bode desarrollado en esta sección nos servirá para obtener la respuesta del sistema en lazo cerrado (con realimentación) y esta es la principal ventaja de el método por análisis de frecuencia. El comportamiento transitorio se pone de manifiesto con el método del lugar de las raíces.

1-3.a) RESPUESTA DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO A LA FUNCION ES CALON

En la sección 1-1 hemos desarrollado el sistema en lazo abierto dado por la figura 1-1.6 y cuya función de transferencia es la ecuación 1-1.11. Vamos a estudiar hoy la respuesta del sistema en lazo cerrado a una función escalón.

El sistema en lazo cerrado con un amplificador operacional actuando como elemento comparador es el siguiente:



La tensión en función de s a la salida del elemento comparador es:

$$-E_1 = E_i + E_o \quad (1-3.1)$$

y a la salida del sistema:

$$E_o = G(s) E_1 \quad (1-3.2)$$

en donde $G(s)$ está dada por la expresión (1-1.11)

De las dos últimas expresiones se puede obtener:

$$E = (-E_1 - E_o)G(s) \Rightarrow \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-G(s)}{1 + G(s)} \quad (1-3.3)$$

con lo que se tiene realimentación negativa y la estabilidad del sistema dependerá del valor R_4 que nos dé la ganancia.

Vamos a trazar el gráfico del lugar de las raíces con los teoremas desarrollados en la sección 4-7.

La estabilidad de un sistema se puede determinar de la expresión:

$$1 + G(s) = 0 \quad (1-3.4)$$

en donde:

$$G(s) = \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)}$$

Lo primero que debemos hacer es localizar los polos (y ceros) de $G(s)$ en el plano complejo (fig 1-3.2).

Por el teorema 1 de la sección 4-7, el número de raíces, para un valor de $k = \frac{6,42}{R_4}$ dado, es de tres. Se sabe además que las curvas son continuas y que principian en los polos y terminan en los ceros (teorema 2 y 3 respectivamente). Por el teorema 4 se sabe que el número de ceros en el infinito es $Q = p - z = 3 - 0 = 3$. Por el teorema 5 el ángulo de las asíntotas al infinito es $(2r + 1)\pi/3$:

$$r = 0 \Rightarrow \angle s = \frac{\pi}{3}$$

$$r = 1 \Rightarrow \angle s = \pi$$

$$r = 2 \Rightarrow \angle s = \frac{5\pi}{3}$$

Por el teorema 7, el cruce de las asíntotas con el eje real es:

$$p = \frac{(-0,9 - 3,36 - 21,3) - 0}{3 - 0} = \frac{-25,56}{3} = -8,52$$

Por el teorema 7, las partes del eje real que son del lugar de las raíces son los intervalos:

$$-\infty < s \leq -21,3$$

$$-3,36 \leq s \leq -0,9$$

El teorema 8 no se aplica para este caso.

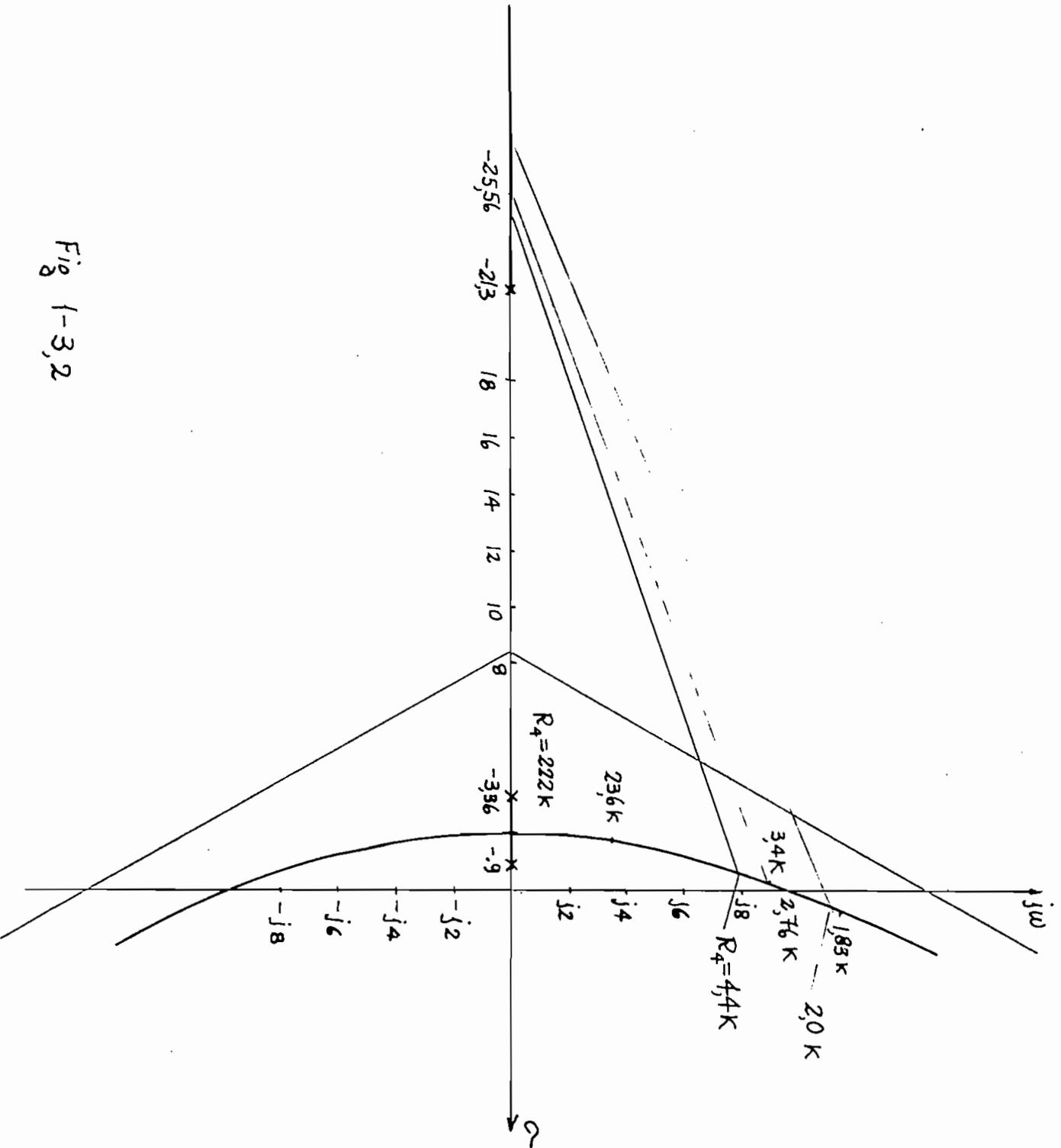


Fig 1-3,2

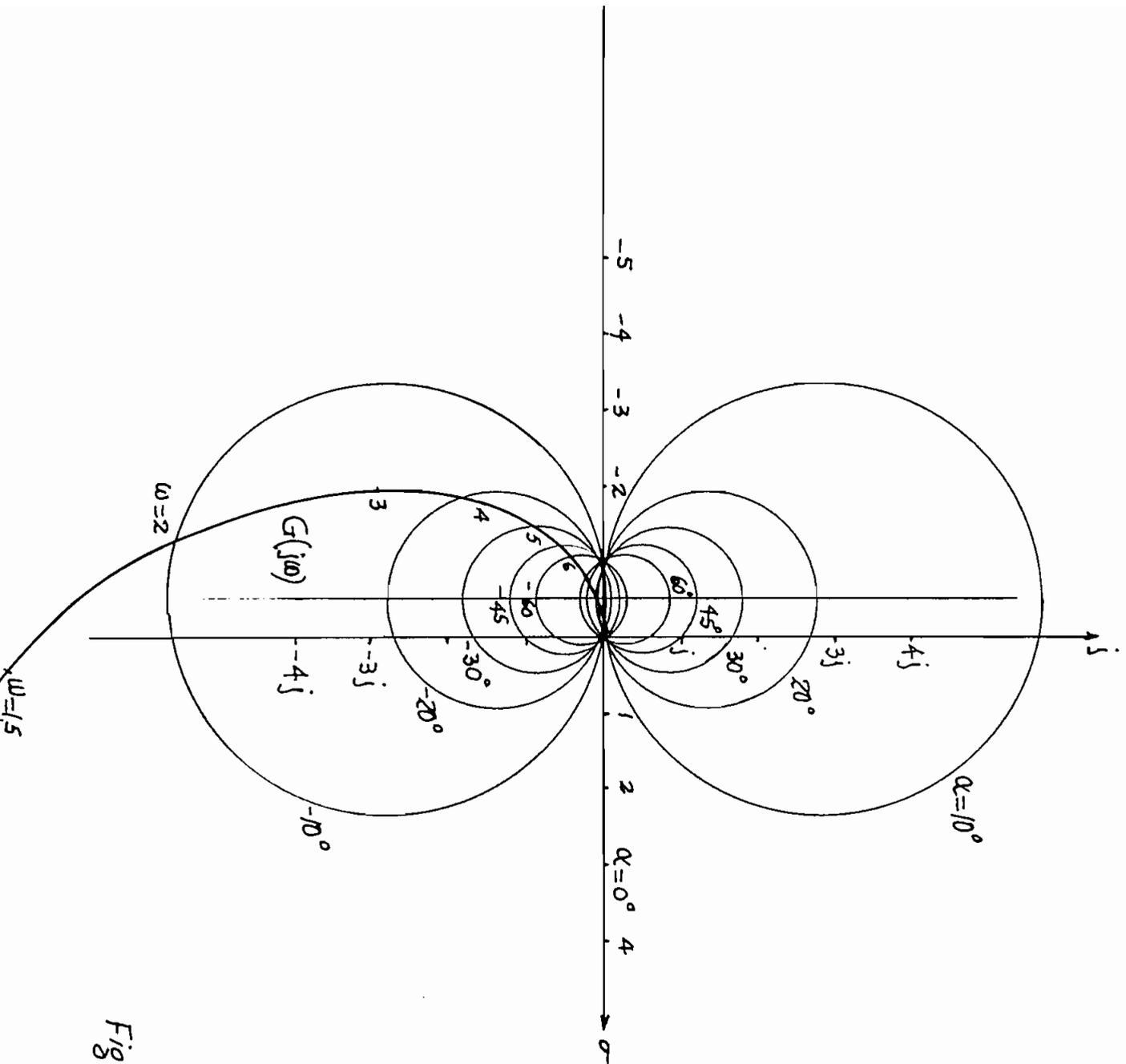


Fig 1-3, 10

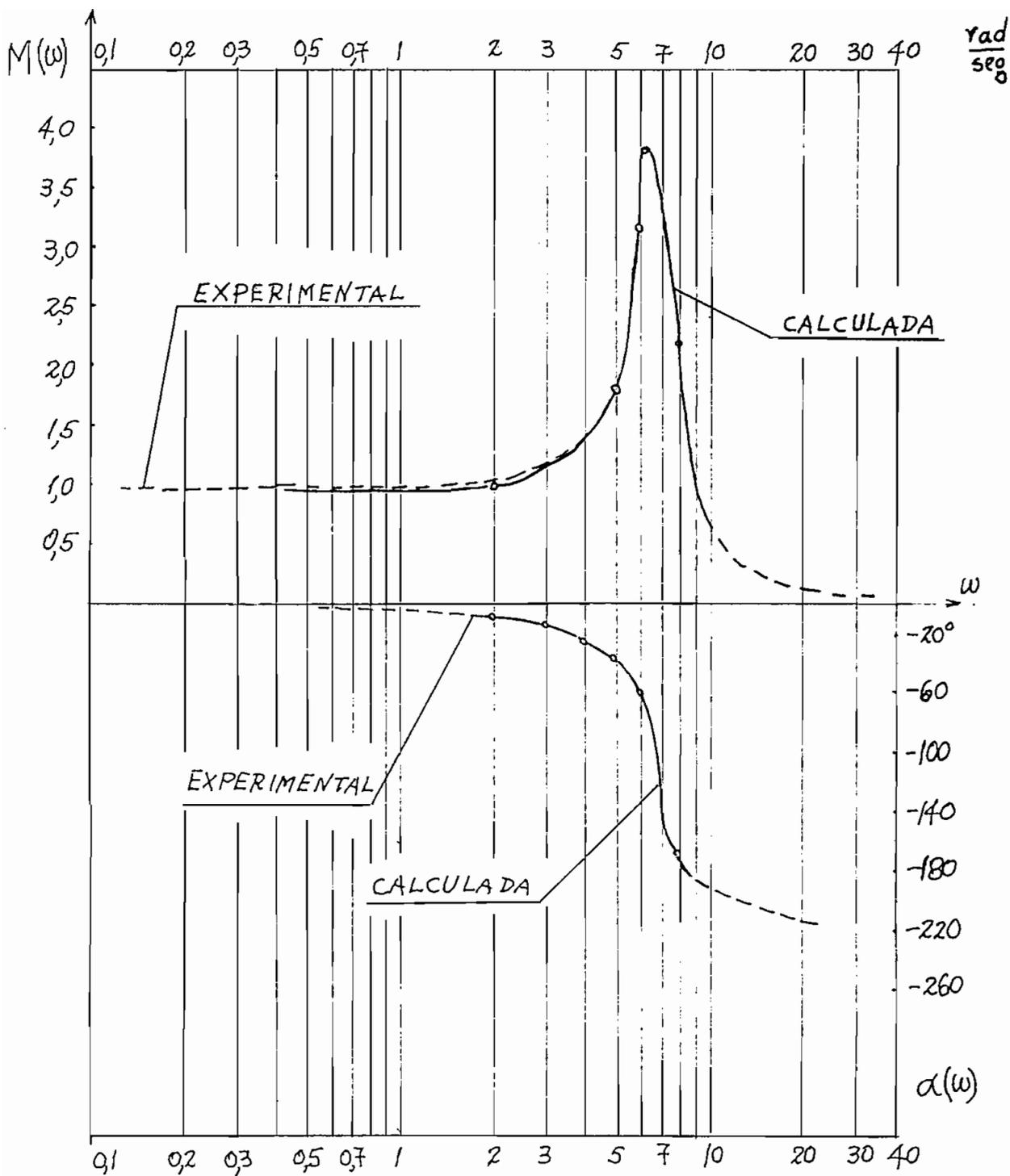


Fig 1-3,11

Por el teorema 9, se puede calcular el valor fig 4-3.3, de la siguiente manera:

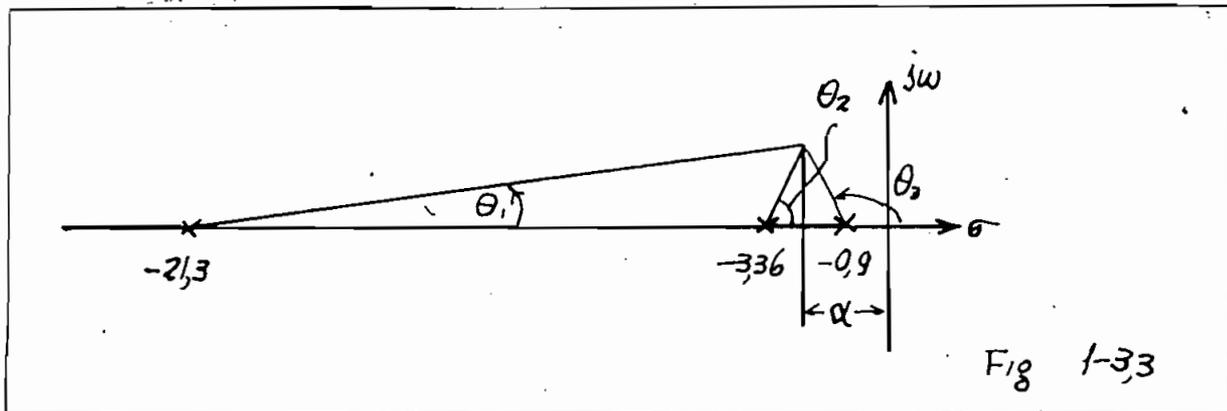


Fig 1-3,3

$$180^\circ = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \Leftrightarrow 180^\circ = \frac{\epsilon}{21,3-\alpha} + \frac{\epsilon}{3,36-\alpha} + \left(180^\circ - \frac{\epsilon}{\alpha-0,9}\right) \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{1}{21,3-\alpha} + \frac{1}{3,36-\alpha} + \frac{1}{\alpha-0,9}$$

$$0 = (3,36-\alpha)(\alpha-0,9) + (21,3-\alpha)(\alpha-0,9) - (21,3-\alpha)(3,36-\alpha)$$

$$0 = \alpha^2 - 17,12\alpha + 31,2$$

$$\alpha_1 = 15,035 ; \alpha_2 = 2,085$$

Puesto que entre -21,3 y -3,36 no existe lugar de las raíces la solución α_1 no es válida quedando: $\alpha = 2,085$

Para encontrar el cruce del lugar con el eje imaginario (teorema 10) desarrollamos la ecuación (1-3.4)

$$0 = (s+0,9)(s+3,36)(s+21,3) + k$$

en donde $k = 6,42/R_4$

$$0 = s^3 + 25,56 s^2 + 93,724 s + 64,2 + k$$

Por el criterio de Routh:

s^3	1	93,724
s^2	25,56	64,2 + k

$$\begin{array}{l|l} s^1 & \frac{93,724 \times 25,56 - 64,2 - k}{25} \\ s^0 & 64,2 + k \end{array}$$

Para que el punto del lugar esté sobre el eje imaginario, el término de s^1 debe ser nulo:

$$93,724 \times 25,56 - 64,2 - k = 0 \Rightarrow k = 2336$$

de donde el valor de la resistencia R_4 será:

$$R_4 = \frac{6,42}{2336} \text{ M}\Omega = 2,76 \text{ K}\Omega$$

Con el valor de k así calculado, reemplazamos en la ecuación original:

$$0 = s^3 + 25,56s^2 + 93,724s + 64,2 + 2336$$

$$0 = s^3 + 25,56s^2 + 93,724s + 2400$$

$$0 = s(s^2 + 93,93) + 25,56(s^2 + 93,724)$$

$$0 = (s^2 + 93,724)(s + 25,56)$$

de donde las tres raíces para $k = 2336$ son:

$$s_1 = -25,56$$

$$s_2 = +j\sqrt{93,724} = j9,68$$

$$s_3 = -j\sqrt{93,724} = -j9,68$$

Vamos a calcular unos dos puntos del lugar de las raíces. En la figura 1-3.2 se observa que, por ejemplo, el punto $s = -22$ es parte del lugar geométrico por lo tanto debe cumplir la ecuación:

$$0 = s^3 + 25,56s^2 + 93,724s + 64,2 + k$$

Dividiendo esta expresión para $s + 22$, el residuo debe darnos cero, de donde se puede calcular el valor k .

$$\begin{array}{r}
 s^3 + 25,56s^2 + 93,724s + 64,2 + k \\
 \underline{-s^3 - 22s^2} \\
 3,56s^2 \\
 \underline{-3,56s^2 - 78,400s} \\
 15,324s \\
 \underline{-15,324s - 336} \\
 -271,8 + k = 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 s + 22 \\
 \hline
 s^2 + 3,56s + 15,324
 \end{array} \right.$$

de esta división se tiene $k = 271,8$ ($R_4 = 23,6k$)

$$0 = s^2 + 3,56s + 15,324 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 s_1 = -1,78 + j3,47 \\
 s_2 = -1,78 - j3,47
 \end{array} \right\}$$

Si elegimos $s = -24$, haciendo la misma operación anterior se tiene:

$$K = 1294 ; \quad s = -0,78 \pm j 7,45$$

$$(R_4 = 4,97K)$$

Para $s = 27$ se tiene:

$$k = 3526 ; \quad s = 0,72 \pm j 11,5$$

$$(R_4 = 1,83K)$$

Es conveniente calcular el valor de k para el punto doble ($s = -2,085$), por el teorema 11 tenemos que:

$$k = \frac{(21,3 - 2,085)(3,36 - 2,085)(2,085 - 0,9)}{1} = 19,215 \times$$

$$1,275 \times 1,185 = k$$

$$\Rightarrow k = 29,0 ; \quad R_4 = 222K$$

Por el teorema 12, vemos que para $k = 29$, la suma de las raíces de la ecuación característica es 25,56 por lo tanto:

$$25,56 = + 2,085 + 2,085 + a \Rightarrow a = - 21,39$$

o sea que las tres raíces son:

$$s_1 = - 2,085 \quad ; \quad s_2 = - 2,085 \quad ; \quad s_3 = - 21,39$$

1-3.b) RESPUESTA DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO A UNA FUNCION ESCALON PARA ALGUNOS VALORES CARACTERISTICOS DE LA GANANCIA

Una vez construido el lugar de las raices (fig 1-3. 2), es fácil saber cuando la respuesta del sistema es oscilatorio amortiguado, inestable, etc. Consideremos los siguientes casos:

a) Respuesta sobreamortiguada:

Si arbitrariamente elegimos $R_4 = 300K$ entonces esperamos una función exponencial como respuesta del sistema. En efecto la posición de las raíces para este valor de resistencia se puede encontrar del lugar de las raíces por medio de algunas pruebas* Así para el punto $s = - 1,47$ el valor de la ganancia es:

$$k = (1,47 - 0,9)(3,36 - 1,47)(21,3 - 1,47) = 21,4$$

y para $R_4 = 300K$ la ganancia es:

$$K = \frac{6,42 \times 10^3}{300} = 21,4$$

con lo que el punto $s = - 1,47$ es una raíz para este valor particular de la ganancia. Las otras dos raíces se encuentran aplicando las relaciones que existen entre las raíces

de la ecuación y los coeficientes de las variables. Sean a y b las raíces desconocidas, entonces se debe cumplir que:

$$25,56 = 1,47 + a + b$$

El punto $s = -21,36 = -a$ cumple aproximadamente con la condición de la ganancia ($K = 21,4$) con lo que ya queda determinado el b:

$$b = 25,56 - 1,47 - 21,36 = 2,73$$

De esta manera la posición de las raíces para $R_4 = 300K$ son:

$$s_1 = -1,47$$

$$s_2 = -2,73$$

$$s_3 = -21,36$$

La función de transferencia desde la entrada E_i hasta la salida E_o en lazo cerrado es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{642/R_4}{s^3 + 25,56s^2 + 93,724s + 64,2 + k}$$

Si $K = 21,4$, entonces se tiene:

$$W(s) = \frac{21,4}{(s + 1,47)(s + 2,73)(s + 21,36)} = -\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$$

La función de entrada $e_i(t)$ es una escalón de 1 voltio, por lo tanto, la transformada de la salida es:

$$\begin{aligned} -E_o(s) &= \frac{21,4}{s(s + 1,47)(s + 2,73)(s + 21,36)} = \\ &= \frac{0,250}{s} - \frac{0,582}{s + 1,47} + \frac{0,335}{s + 2,73} - \frac{0,003}{s + 21,36} \end{aligned}$$

de donde, la respuesta en función del tiempo es:

$$-e_0(t) = 0,25 - 0,582 e^{-1,47t} + 0,335 e^{-2,73t} - 0,003 e^{-21,36t}$$

La figura 1-3.4 representa una foto de la respuesta del sistema tomada experimentalmente para el caso $R_4 = 300K$. Se utilizó el osciloscopio HP-140A que posee dos canales que los utilicé para indicar la señal de entrada como la de salida. La señal $e_i(t)$ (entrada) corresponde a la parte superior de la figura y está calibrada en 0,5 voltios por cuadro, por lo tanto representa una función escalón unitaria; la señal de salida es una función exponencial creciente. La escala vertical del canal que da la salida tiene una calibración de 0,1 voltios por cuadro. La frecuencia del oscilador de barrido horizontal es tal que cada cuadro (horizontal) representa 1 segundo de duración.

De la expresión matemática de la salida observamos que el valor final de la tensión es de 0,25 V lo cual es un valor muy próximo al experimentado (0,26V). Consideremos el punto $t = 1$ segundo, entonces:

$$-e_0(1) = 0,25 - 0,582 \times 0,231 + 0,335 \times 0,066 - 0 = 0,137 \text{ v.}$$

y el valor medido para $t = 1$ seg. es aproximadamente 0,14 voltios, esto demuestra que los valores calculados y los experimentales están de acuerdo. Los errores que pueden existir más bien se deben a consideraciones físicas que no entran en la teoría tales como el corrimiento de tensión de los am-

plificadores operacionales, variaciones de los valores de los elementos con la temperatura, etc. De todas maneras la teoría expuesta es comprobada con suficiente exactitud por medio de la experimentación tal como lo veremos en lo que sigue.

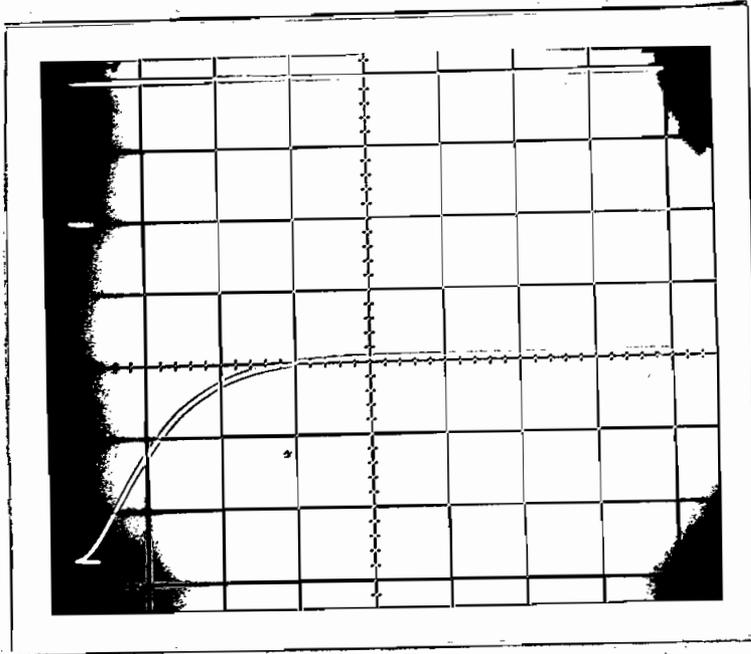


Fig 1-3,4

b) Respuesta críticamente amortiguada:

De la fig 1-3.2 se observa que este punto corresponde a $R_4 = 222K$ o sea $k = 29$, y cuyas raíces las hemos encontrado ya: $s_1 = s_2 = - 2,085$; $s_3 = - 21,39$. La función de transferencia es, por consiguiente:

$$\frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{29}{(s + 2,085)^2 (s + 21,39)}$$

Para un escalón unitario ($E_1(s) = 1/s$), se tiene:

$$- E_0(s) = \frac{29}{s(s + 2,085)^2 (s + 21,39)} =$$

$$= \frac{-0,723}{(s + 2,085)^2} + \frac{0,314}{s} + \frac{-0,311}{s + 2,085} + \frac{-0,004}{s + 21,39}$$

de donde, la función del tiempo, despreciando el último factor es:

$$-l_0(t) = 0,314 - 0,311e^{-2,085t} - 0,723te^{-2,085t}$$

En la fig 1-3.5 se representa la respuesta experimental del sistema para $R_4 = 222K$. Como en el caso anterior el un canal visualiza la señal de entrada (escalón unitario) y el otro la señal de salida. Las escalas son: 0,1 voltio por cada cuadro vertical y ~~1 seg por cada cuadro vertical~~ y 1 seg. por cada cuadro horizontal.

El valor final de la salida es 0,314v (calculado) y 0,330v (medido) el error que se comete es de 0,15v. entre el valor medido y el calculado, esto se debe posiblemente a la variación de la tensión en los amplificadores. Para $t = 1$ segundo, el valor calculado de la salida es $-l_0(t) = 0,185v$ y el valor medido es 0,2v. de nuevo el error es 0,15v.

Los amplificadores operacionales usados tienen más o menos un corrimiento de 0,1 a 0,7v. por 6 horas de trabajo por lo tanto si consideremos que en el momento de tomar la fotografía hay 0,15v de variación entonces descontamos este valor a los resultados experimentales nos dará los valores que se obtienen teóricamente.

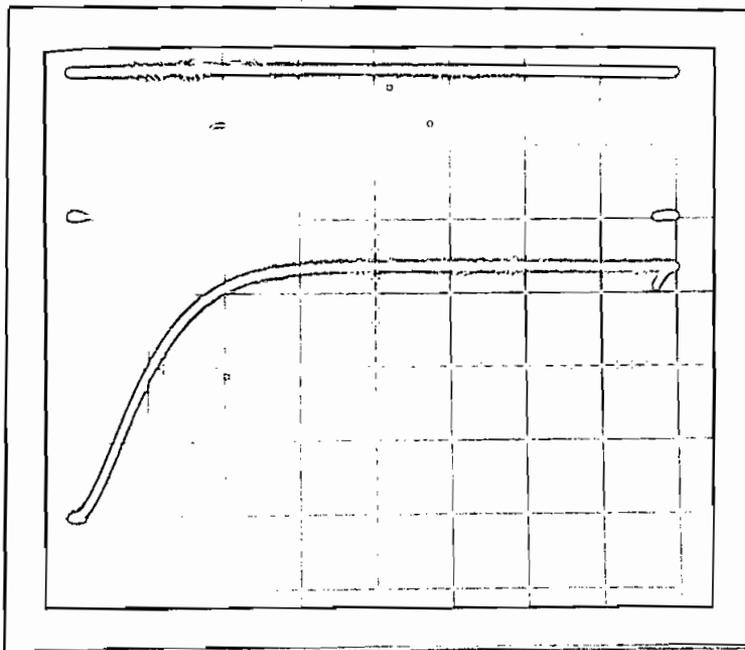


Fig 1-3,5

c) Respuesta oscilatoria amortiguada:

Vamos a elegir $R_4 = 4399 \Omega = 4,4K$, de donde $k = 1.460$. En el diagrama del lugar de las raíces tomamos el punto marcado con $R_4 = 4,4K$. A manera de comprobación, el valor de k para este punto es (por el teorema 11):

$$k = 22,24 \times 8,36 \times 7,82 = 1460$$

siendo estos valores las magnitudes desde los polos hasta el punto dado en el lugar de las raíces. Las tres raíces para $k = 1460$ son:

$$s_1 = -24,34 \quad ; \quad s_{2,3} = -0,61 \pm j 7,9$$

con lo que el voltaje de salida para una onda de entrada escalón unitaria será:

$$- E_o(s) = \frac{1460}{s(s + 24,34)(s + 0,61 + j 7,9)(s + 0,61 - j 7,9)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 24,34} + \frac{K_3}{s + 0,61 + j7,9} + \frac{K_4}{s + 0,61 - j7,9}$$

los coeficientes K_i se pueden evaluar del lugar de las raíces. En efecto:

$$K_1 = \frac{1460}{7,82 \angle -85,2^\circ \times 7,82 \angle 85,8^\circ \times 24,34} = 0,96$$

$$K_2 = \frac{1460}{25 \angle -161,5^\circ \times 24,34 \angle 180^\circ \times 25 \angle 161,5^\circ} = -0,096$$

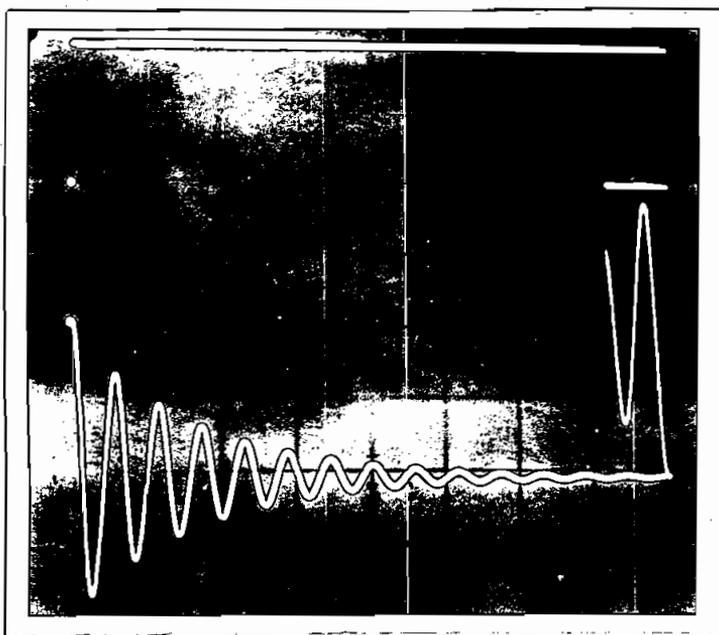
$$K_3 = \frac{1460}{25 \angle -18,5^\circ \times 15,8 \angle -90^\circ \times 7,82 \angle -94,2^\circ} = 0,471 \angle 202,7^\circ$$

$$K_4 = \overline{K_3} = 0,471 \angle -202,7^\circ$$

La función del tiempo para $k = 1460$ es:

$$-l_0(t) = 0,96 - 0,096 e^{-24,34t} + 0,942 e^{-0,61t} \text{sn}(7,9t - 112,7^\circ)$$

En la fig 1-3.6 se representa una foto de la respuesta del sistema para la condición $R_4 = 4399 \Omega$.



La frecuencia del generador de señales es de 0,04 c/s. con lo que, los ocho cuadros del desplazamiento total del punto corresponde a $1/2 \times 0,04 = 12,5$ segundos y cada cuadro representa $12,5/8,2 = 1,52$ seg. La escala vertical es es tuvo calibrada en 0,5 voltios por cuadro (cm).

En la expresión de la función del tiempo $Q_0(t)$, el segundo término de la derecha puede despreciarse. La frecuencia de oscilación del sistema es $f_0 = 7,9/2\pi = 1,26$ c/s con un período de $T_0 = 0,795$ seg. En la fig 1-3.6 observamos que $T_0 \approx 0,55 \times 1,52 = 0,839$ seg, que es un valor cercano al calculado teóricamente. El error se debe a la tolerancia de los elementos usados en la red.

Es muy interesante comprobar el factor exponencial, por ejemplo para $t \approx 1,10 \times 1,52 = 1,655$ seg. se lee un valor de tensión con referencia a su valor inicial de aproximadamente $1,1 \times 0,5 = 0,65$ voltios, matemáticamente se tiene $e^{-0,61 \times 1,655} = 0,36$ o sea que con referencia al nivel 0 es $1 - 0,36 = 0,64$ voltios y los dos valores, medido y calculado difieren muy poco.

El valor estable medido es de aproximadamente 1,1 voltios y el calculado debe ser 0,96 voltios, nuevamente existe un error debido a las tolerancias de los elementos, especialmente a los corrimientos de tensión que tienen lugar en los amplificadores operacionales.

Vamos a calcular el valor máximo al que llega la función $-Q_0(t)$ así como el tiempo que debe transcurrir para

que alcance este punto. De la función del tiempo observamos que el segundo término de la derecha se puede despreciar por dos razones; porque su coeficiente es muy pequeño y porque su exponente negativo es grande, entonces tendríamos:

$$-l_0(t) = 0,96 + 0,942 e^{-0,61t} \operatorname{sn}(7,9t - 112,7^\circ)$$

y el valor máximo se llegará evidentemente cuando el ángulo total sea $\pi/2$, o sea para un tiempo:

$$7,9t = \frac{\pi}{2} + \frac{112,7^\circ \times \pi}{180^\circ} \Rightarrow t = 0,450 \text{ seg.}$$

En la fig 1-3.6 se observa que el valormáximo se llega a un tiempo aproximado:

$$t = 0,3 \times 1,52 = 0,456 \text{ seg.}$$

que es un valor próximo al calculado teóricamente.

Para $t = 0,45$ seg. el valor de $-l_0(t)$ es:

$$-l_0(0,45) = 0,96 + 0,942 e^{-0,61 \times 0,45} = 1,698 \approx 1,7 \text{ voltios}$$

El valor máximo que se puede medir en la fig 1-3.6 es:

$$l_0 = 3,7 \times 0,5 = 1,85 \text{ voltios}$$

que también es un valor cercano al calculado teóricamente

De todo lo anterior deducimos que la fig 1-3.6 si está representada aproximadamente por la ecuación:

$$Q_0(t) = 0,96 + 0,942 e^{-0,61t} \cdot \operatorname{sn}(7,9t - 112,7^\circ)$$

En las siguientes fotografías comprobaremos que efectivamente al aumentar la ganancia del sistema, se tiene mayor oscilación y menos amortiguamiento.

Tomemos el valor $R_4 = 3,4 \text{ K}$, entonces $k = 1890$, los puntos del lugar de las raíces, para este valor de k son:

$$s_1 = -24,92 \quad s_{2,3} = -0,32 \pm j9,9$$

y la respuesta para una función escalón unitaria es:

$$\begin{aligned} -E_o(s) &= \frac{1890}{s(s + 24,92)(s + 0,3 + j9,9)(s + 0,3 - j9,9)} = \\ &= \frac{0,98}{s} - \frac{0,095}{s + 24,92} + \frac{0,409 \angle 202^\circ}{s + 0,3 + j9,9} + \frac{0,409 \angle -202^\circ}{s + 0,3 - j9,9} \\ -\ell_o(t) &= 0,98 - 0,095 e^{-24,92t} + 0,818 e^{-0,3t} \cdot \text{sn}(9,9t - 112^\circ) \end{aligned}$$

La fig 1-3.7 es la foto de la respuesta del sistema para $R = 3399 \Omega \approx 3,4 \text{ K} \Omega$. Cada cuadrado representa $12,5/8,1 = 1,54$ seg.

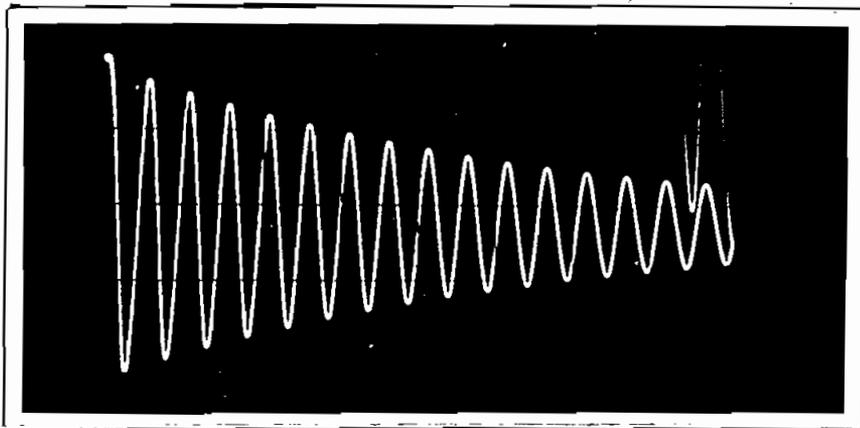


Fig 1-3,7

La frecuencia de oscilación del sistema es: $f_0 = 9,9/2\pi = 1,58$ c/s o sea $T_0 = 0,633$ segundos. De la figura 1-3.7 se tiene $T_0 \approx 0,45 \times 1,54 = 0,69$ segundos; este valor es un poco más grande que el calculado, pero más o menos se ve claramente que la ecuación $\rho_0(t)$ si se cumple.

Comparando las figs* 1-3.6 y 1-3.7 se observa que 1-3.7 es menos amortiguada que 1-3.6, además el período de oscilación es menor (mayor frecuencia) etc,. Todo está de acuerdo con el gráfico del lugar de las raíces desarrollado.

d) Respuesta oscilatoria inestable.

Consideremos el caso $R_4 = 1999 \Omega \approx 2K$ en el cual el sistema es claramente inestable* Este punto se encontró por medio de aproximaciones en el lugar de las raíces., hacia el punto 1,83K. En efecto si se mide la distancia desde los polos del sistema hasta el punto marcado $R_4 = 2K$, se tiene:

$$k = 24,50 \times 11,70 \times 11,2 = 3210$$

$$R_4 = \frac{6400}{3210} = 2K$$

Las raíces para $k = 3210$ son:

$$s_{1,2} = 0,6 \pm j11,02 \quad ; \quad s_3 = -26,76$$

y la salida del sistema es:

$$\begin{aligned} -E_0(s) &= \frac{3210}{s(s + 26,76)(s - 0,6 + j11,02)(s - 0,6 - j11,02)} = \\ &= \frac{0,981}{s} - \frac{0,138}{s + 26,76} + \frac{0,446 \angle 199,10}{s - 0,6 + j11,02} - \frac{0,446 \angle -199,10}{s - 0,6 - j11,02} \end{aligned}$$

y la función del tiempo es:

$$f(t) = 0,981 - 0,138 e^{-26,76t} + 0,892 e^{0,6t} \text{sn}(11,02t-109,10)$$

En la foto de la figura 1-3.8 se representa la respuesta del sistema para el caso $R_4 = 1999 \Omega$. El sentido de aumento del tiempo indicado en la foto es desde la derecha a izquierda, con lo que se observa claramente que la señal aumenta, y es más notorio aún si se toma en cuenta el trazo de vuelta en donde el crecimiento es mayor.

Para tomar esta foto, fue necesario quitar la fuente de excitación debido a la gran inestabilidad presentada por el sistema. En este caso, toda la energía es obtenida de los amplificadores operacionales. Similarmente como en los casos anteriores cada cuadrado vertical representa 0,5 voltios.

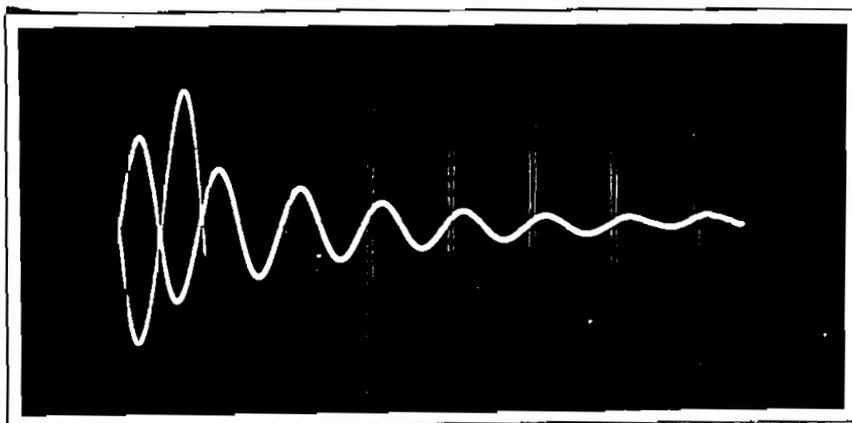


Fig 1-3,8

La frecuencia del barrido horizontal fue de 0,1 c/s y por lo tanto los 8,2 cuadros representan 5 segundos.

De la expresión $\vartheta_0(t)$ calculada podemos ver que el período de la onda es $T_0 = 2\pi/11,02 = 0,57$ segundos, mientras que el valor medido de la foto de la fig 1-3.8, el período es aproximadamente $1 \times 5/8,2 = 0,61$ segundos, que es un valor que si se aproxima al calculado teóricamente.

1-3.c) RESPUESTA DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO A LA FRECUENCIA

Puesto que ya se conoce la respuesta a la frecuencia del sistema en lazo abierto (fig 1-2.3), entonces es fácil obtener la respuesta del sistema en lazo cerrado, simplemente superimponiendo el diagrama $G(j\omega)$ sobre las curvas de M y α constantes. (fig 1-3.9).

Consideremos el caso $R_4 = 6000 \Omega$, entonces el diagrama polar será idéntico al indicado por la fig 1-2.3 pero su magnitud multiplicada por $10/6 = 1,67$.

De la fig 1-3.9 podemos encontrar los valores de la amplitud de la respuesta del sistema en lazo cerrado para cada valor de la velocidad angular ω .

Similarmente, debemos superimponer la respuesta del sistema en lazo abierto en las curvas de α constantes, de la cual encontraremos el valor del defasamiento de la respuesta del sistema en lazo cerrado para cada valor de la velocidad angular. (fig 1-3.10).

Para observar la respuesta del sistema en lazo ce-

rrado es conveniente dibujar en función de la frecuencia tan to la magnitud como el ángulo de fase del sistema en lazo cerrado. La magnitud lo tomaremos de los valores en los que la curva $G(j\omega)$ corta a los lugares de M constante similarmente para α , de esta operación nos da la fig 1-3.11, en donde también se representa los valores tomados experimentalmente (línea punteada). Notamos en este gráfico la sorprendente exactitud entre los datos calculados y experimentales a tal punto que tanto para la curva $M(\omega)$ como para $\alpha(\omega)$ en la parte comprendida entre $\omega = 2$ hasta $\omega = 10$, las curvas se confunden en una sola, por esta razón se indican con pequeños círculos los puntos tomados de los gráficos 1-3.9 y 1-3.16. A manera de ilustración doy a continuación los datos tomados en el Laboratorio (una vez reducido la frecuencia a velocidad angular, la fase, la amplitud etc, con las escalas correspondientes), para $R_4 = 6000 \Omega = 6K$ y con un voltaje de entrada de 1 voltio sinusoidal (pico-pico).

$\omega \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)$	$M(\omega)$	$\alpha(\omega)$
0,0628	0,96v	0°
0,1256	0,96	0,55
0,314	0,96	$0,55^\circ$
0,502	0,96	1,1
0,628	1,0	2,2
1,256	1,0	4,6
2,52	1,1	11,0

ω ($\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$)	M (ω)	α (ω)
3,14	1,2	14,3°
5,02	2,7	29,6
6,28	3,8	66,0
7,54	2,0	158,0
8,4	1,5	180
9,42	0,8	190
12,56	0,32	202
18,9	0,12	215,1
31,4	0,015	270

La velocidad angular de resonancia del sistema es de $\omega_r = 6,28$ rad/seg o sea $f_r = 6,28/2\pi = 1$ c/s correspondiendo un valor máximo de la respuesta de $M(6,28) = 3,8$ v.

Finalmente, y como aplicación del criterio de la estabilidad de Nyquist observamos que la curva $G(j\omega)$ de la fig 1-3.9 no encierra el punto $-1 + j0$, por lo tanto el sistema es estable.

El margen de ganancia y el de fase es:

$$\text{Margen de ganancia} = 20 \lg \frac{1}{0,5} = 6 \text{ db.}$$

$$\text{Margen de fase} = 19^\circ$$

Estos valores representan una estabilidad pequeña, puesto que se acepta como margen de ganancia que sea al menos 12 db y de margen de fase 60° .

Si se quiere utilizar para algún fin nuestro sistema no será muy conveniente entonces surge la necesidad de

cumplir con los requerimientos de los márgenes definidos, para lo cual se utiliza las llamadas redes de compensación.

Similarmente podemos observar que el valor máximo de la respuesta (a resonancia) es muy alto, por medio de la compensación se consigue disminuirlo.

Vamos a estudiar la respuesta del sistema con un método que es más sencillo que el anterior, esto es por medio del gráfico polar inverso.

La teoría necesaria se encuentra desarrollada en el numeral 4 de la parte primera.

Como en el caso anterior debemos superimponer el diagrama del inverso de $G(j\omega)$, o sea $1/G(j\omega)$ sobre los lugares de $M(\omega)$ (o sea de $1/M$) y de $-\alpha(\omega)$ constantes.

Como ya se explicó antes, solo es necesario variar el radio de cada curva M puesto que todas tienen el mismo centro $(-1 + j0)$, y más aún, los ángulos $-\alpha$ simplemente son rectas que parten del punto $-1 + j0$. En la fig. 1-3.12 se representa este caso.

Tomando para cada valor de la velocidad angular la magnitud M y el ángulo α se obtiene la curva del gráfico 1-3.11.

Es muy importante notar que el valor máximo de M ocurre cuando la curva $1/G(j\omega)$ es tangente a una circunferencia M que es la más interior a las demás. En nuestro ejemplo esto ocurre más o menos para $M = 3,8$ con un ángulo $\alpha \approx -80^\circ$ que está más o menos de acuerdo con los datos

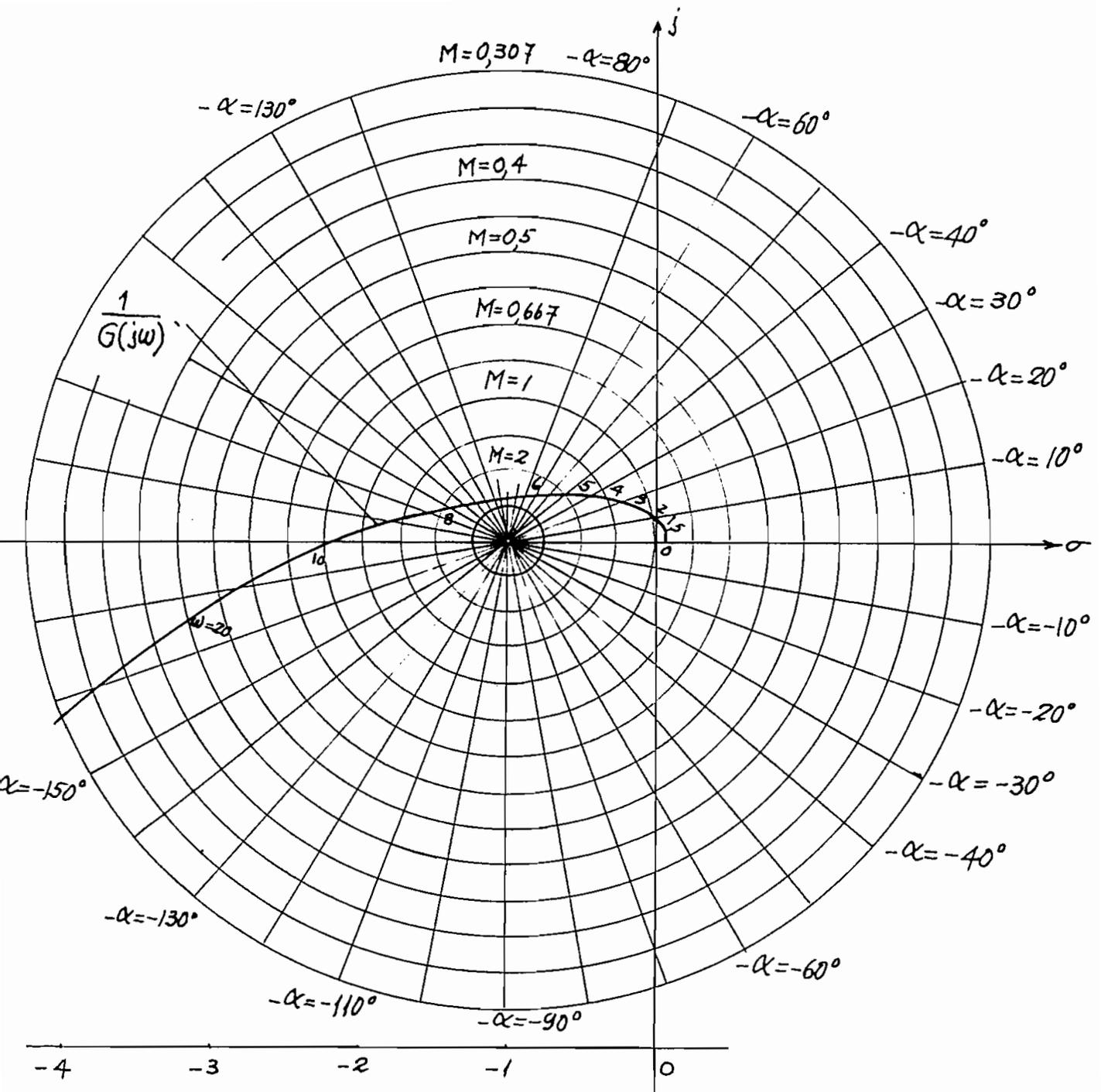


Fig 1-3,12

experimentales.

Evidentemente este procedimiento resulta más cómodo que el del diagrama polar directo puesto que rápidamente observamos la respuesta del sistema, pero creo que puede existir una ligera desventaja puesto que para valores pequeños de ω no se puede apreciar en forma clara que características presenta la respuesta del sistema. Este pequeño problema se lo puede solucionar aumentando la escala del gráfico para un pequeño valor de ω (por ejemplo desde 0 a 4 rad/seg), siempre y cuando sea este rango de frecuencia el que nos interese*

Para establecer si es que el sistema es estable o no para este valor de resistencia ($R_4 = 6K$) por el método del gráfico polar inverso, entonces debemos ver cuantas veces encierra el gráfico $1/G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$.

La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1,07 \times 10^3}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)}$$

siendo $G(s)$ estable, entonces no existen polos en la parte derecha del plano complejo. Tampoco existen ceros en la parte derecha del plano complejo, por lo tanto $G_z = 0$.

En el numeral 4 de la Parte I hemos visto que el número de rotaciones en sentido directo alrededor del punto origen es de:

$$N = G_z + H_p - Z$$

siendo H_p el número de polos de $H(j\omega)$ que tiene partes reales positivas y Z el número de raíces de la ecuación característica que tienen partes reales positivas ($0 = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$). En nuestro caso $G_z = 0$; $H_p = 0$. El valor de N se lo puede evaluar tomando en cuenta el contorno cerrado trazado en el plano s (fig 1-3,13). Como ya se dijo, se debe tomar un radio R que se aproxime a infinito.

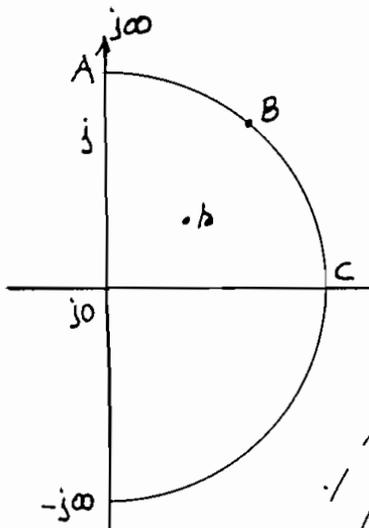


Fig 1-3,13

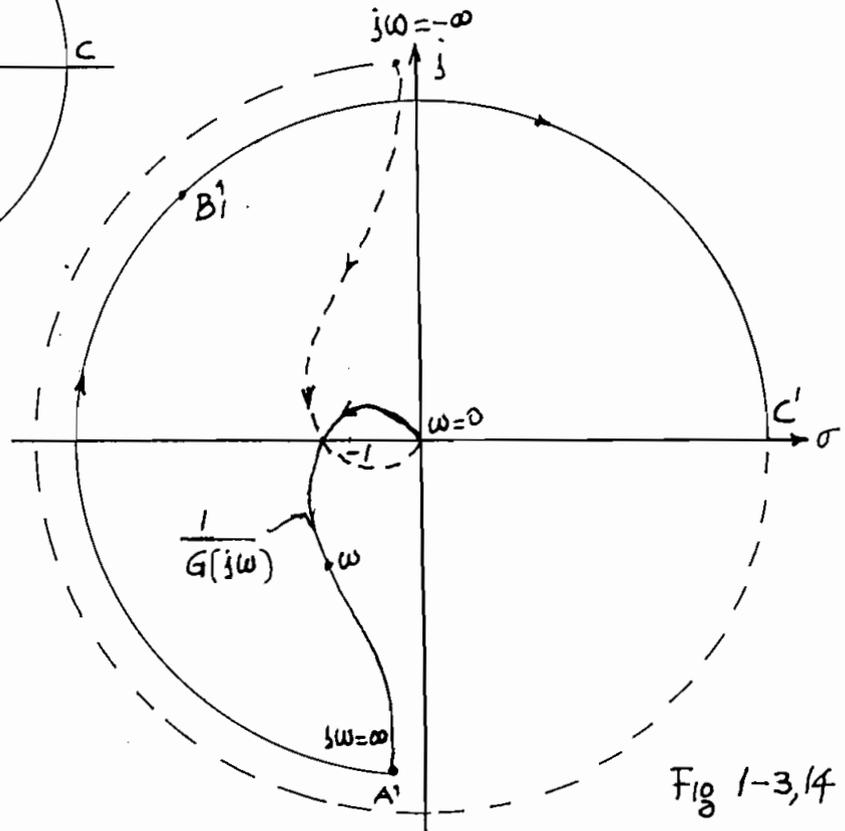


Fig 1-3,14

En el gráfico polar inverso a medida que ω aumenta, también aumenta $1/G(j\omega)$. Por ejemplo para $s = j\infty$ se tiene el punto A' correspondiente al A del contorno cerrado escogido. El punto B' debe ser más o menos la imagen del punto B similarmente para C' y C en donde $j\omega = 0$ pero $R \rightarrow \infty$. La línea de puntos de la figura 1-3.14 corresponde a la gama de frecuencias negativas. El valor de N es de cero con lo que $Z = 0$ o sea el sistema es estable. Esto ya lo sabíamos a partir del diagrama de Nyquist pero es necesario establecer el mismo resultado con el diagrama inverso*

Vamos a considerar el método de mayor uso en la respuesta de frecuencias, este es el método de Bode y Nichols. En el numeral 1-2 estudiamos el diagrama de Bode correspondiente a la función de transferencia con $R_4 = 10K$.

El diagrama de Bode (magnitud) correspondiente a $R_4 = 6K$ es igual al indicado en la figura 1-2.4 con la única diferencia de que la curva $|G(j\omega)|$ se halla desplazada la relación en decibales de $R_4 = 10$ y de $R_4 = 6K$ o sea:

$$\text{desplazamiento} = 20 \lg \frac{10}{6} = 4,44 \text{ db.}$$

la curva de la fase será la misma de la figura 1-2.4.

En la figura 1-3,15 se ha representado el diagrama de Bode con el cambio indicado.

El grado de estabilidad de un sistema se lo mide de acuerdo al margen de fase y de ganancia. Para encontrar el margen de fase se trazó una circunferencia de radio uni-

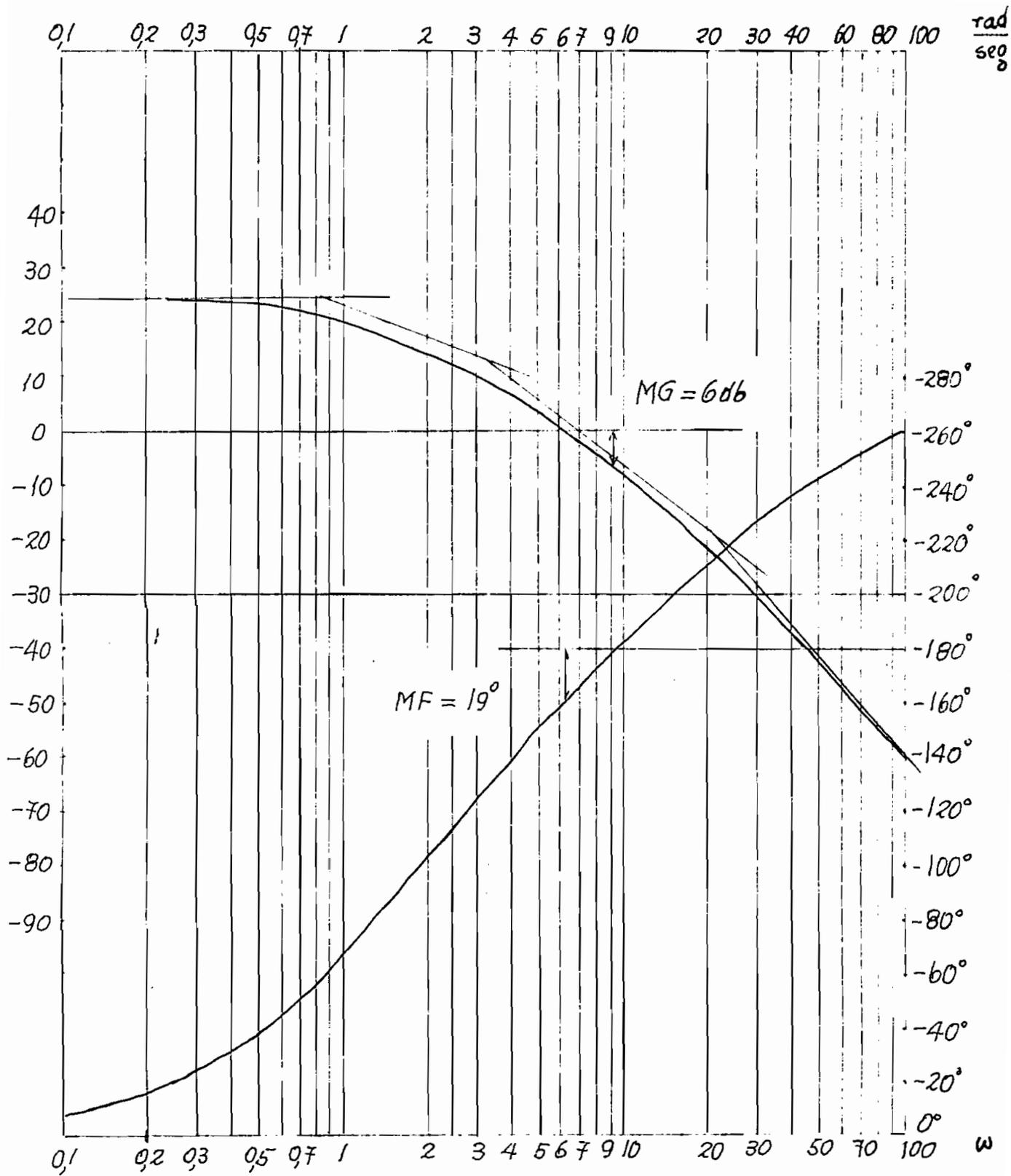


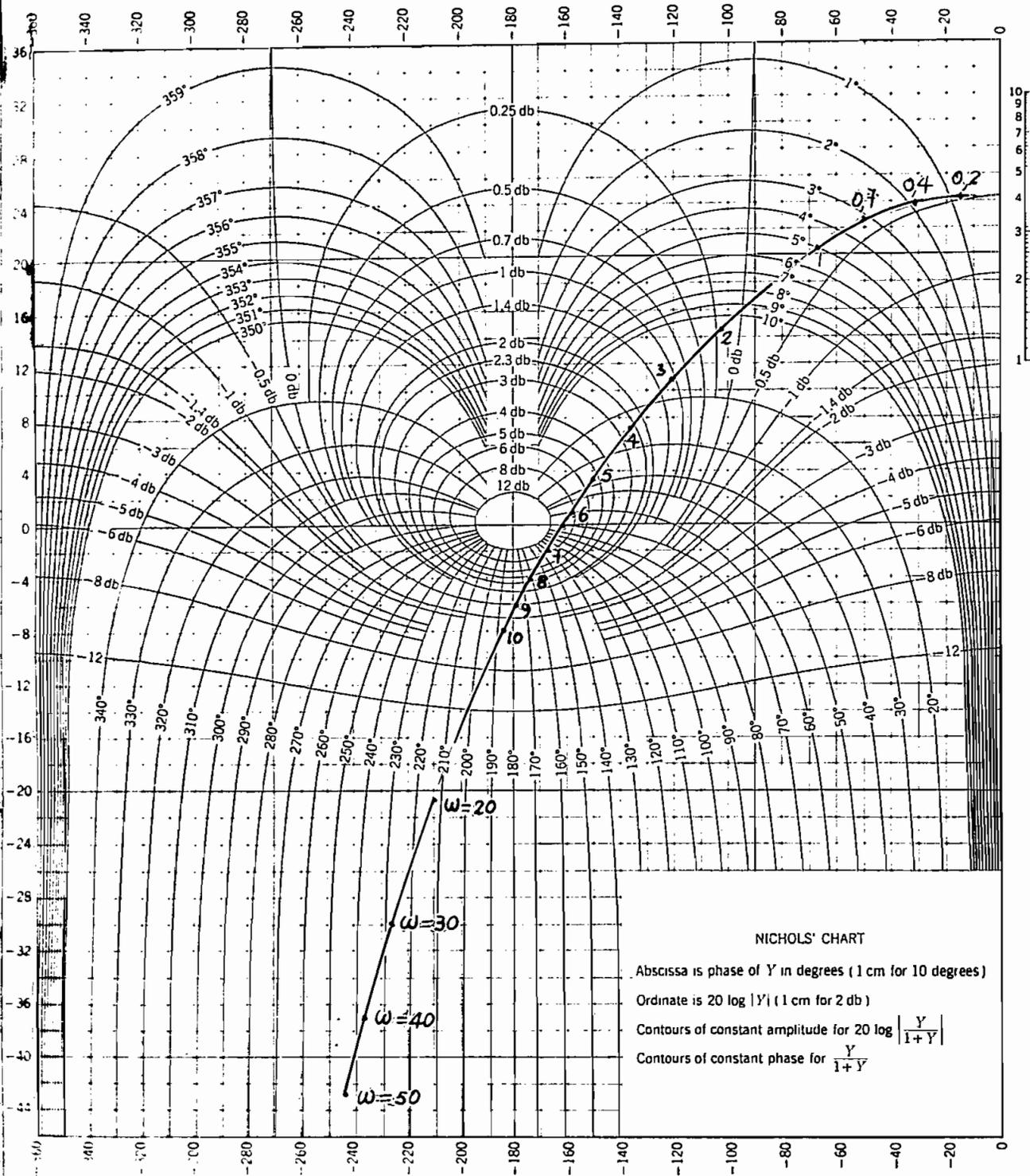
Fig 1-3,15

dad y de centro el origen del diagrama de Nyquist; la suma de 180° con el ángulo de $G(j\omega)$ que tenga cuando corte el círculo unitario nos da el margen de fase. En el diagrama de Bode, el círculo unitario es la línea de 0 decibeles, por lo tanto el margen de fase es el ángulo que se lea para 0 db. de magnitud sumado 180° , en la figura 1-3.15 se tiene

$\gamma = 180 + (-161) = 19^\circ$. Este mismo valor se lo encuentra viendo la diferencia entre la línea de -180° y el ángulo de $G(j\omega)$ correspondiente.

Para encontrar el margen de ganancia se calcula en decibeles la magnitud que a $G(j\omega)$ debe aumentarse para que pase por el punto $-1 + j0$, por lo tanto se usa el eje negativo del diagrama de Nyquist, el cual en el de Bode representa la línea de -180° (o 180°), por lo tanto el número de decibeles que le falta a $|G(j\omega)|$ para llegar a 0 db., cuando el defasaje es de -180° nos da el margen de ganancia. En la figura 1-3.15 se calculó que el margen de ganancia es de 6 db.

Una vez establecido el diagrama de Bode del sistema en lazo abierto debemos encontrar la respuesta en lazo cerrado, para lo cual se emplea la tabla de Nichols. En esta tabla se encuentran dibujados los lugares de M constantes, o sea de la magnitud de la respuesta en lazo cerrado para un voltio sinusoidal de excitación, y de ϕ constantes. En el eje horizontal se tiene los valores de la magnitud de $G(j\omega)$ expresado en decibeles y en el vertical los valores



NICHOLS' CHART

Abscissa is phase of Y in degrees (1 cm for 10 degrees)

Ordinate is $20 \log |Y|$ (1 cm for 2 db)

Contours of constant amplitude for $20 \log \left| \frac{Y}{1+Y} \right|$

Contours of constant phase for $\frac{Y}{1+Y}$

Fig. 1-13c. The Nichols chart. *Twofold reduction of Chart 3 at the back of the book.* (1 cm for 20 db, 20 deg and 1 db)

Fig 1-2/6

de la fase de $G(j\omega)$ en grados; estos valores se los obtiene del correspondiente diagrama de Bode.

La fig 1-3.16 es una foto de la tabla de Nichols tal como la que aparece en los textos sobre Control Automático. Esta foto fue tomada del texto Feedback Control Systems por Gille, Pélegrin, Decaulne. Sobre la tabla de Nichols se dibujó los valores de magnitud y fase de $G(j\omega)$ obtenidas de la fig 1-3.15.

De los datos de M leídos en la fig 1-3.16 se puede construir la curva de respuesta del sistema en lazo cerrado contra velocidad angular (o frecuencia), fig 1-3.17. Este gráfico representa una aproximación más exacta de la respuesta del sistema puesto que la tabla de Nichols es más elaborada y con mayor número de curvas que la que se indica en las figs. 1-3.9 y 1-3.10; por lo tanto se puede observar una pequeña diferencia entre los datos calculados y experimentales.

Por el lugar de las raíces del sistema hemos visto que para $R_4 = 6K$ posee dos raíces complejas conjugadas y una raíz real negativa (relativamente grande), por lo tanto se lo puede considerar como un sistema cuadrático de segundo orden, y la respuesta de este sistema a la frecuencia nos da curvas del tipo 1-3.17, o sea con un pico de resonancia dependiendo del coeficiente de amortiguamiento. De esta manera, podemos decir que si estudiamos la forma de la curva

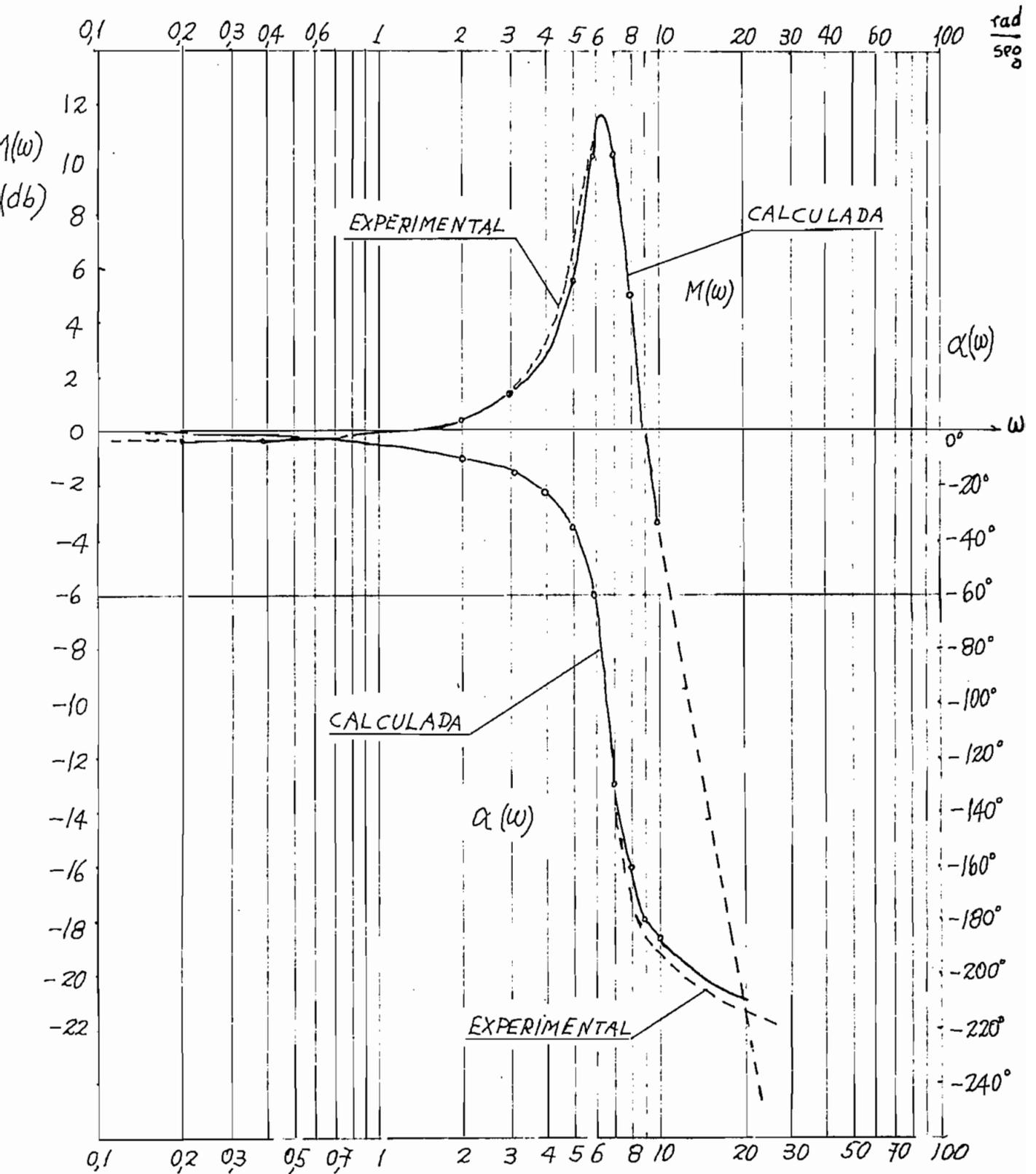


Fig 1-3, 17

1-3.17 llegamos a la conclusión que sus polos son complejos conjugados lo que en realidad concuerda con lo establecido por el método de las raíces.

1-3.d) CONCLUSIONES

La respuesta de un sistema físico se lo puede estudiar por distintos métodos pero por cualquiera se llega al mismo resultado aunque se lo exprese de distintas maneras.

He preferido empezar el estudio de la respuesta del sistema por el método del lugar de las raíces que constituye el procedimiento más efectivo ya que nos revela de una manera directa las características de respuesta del sistema. La visualización de la curva en todo rango de la ganancia del sistema nos permite ver inmediatamente cuando el sistema es estable, y más aún, podemos establecer con relativa facilidad la respuesta transitoria del sistema para un valor particular de la ganancia.

Si la excitación no es una función paso sino otra cualquiera conocida entonces el método de las raíces nos permite calcular la respuesta del sistema y las características más salientes, por ejemplo con una onda sinusoidal de entrada se puede hallar la expresión en función del tiempo no solo del estado estable sino también del transitorio, por lo tanto, este método representa un método general de enfoque del problema.

Si se conoce la curva del lugar de las raíces entonces podemos establecer más o menos que tipo de compensa-

ción se debe colocar para que la forma de la curva varíe y que pase por determinada región del plano complejo, este solo hecho representa una gran ventaja sobre los demás métodos.

El diagrama de Nyquist es en realidad el diagrama polar de la función de transferencia cuando $s = j\omega$, por lo tanto solo es válido para una excitación sinusoidal. La construcción en sí del diagrama es engorroso puesto que envuelve varios cálculos para cada valor de frecuencia. La curva que se dibuja es válida para un sólo valor de la ganancia, aunque en realidad para otros valores, la curva será muy parecida o simplemente la escala de magnitudes se la considera mayor o menor si la ganancia es respectivamente mayor o menor que la de la curva dada, pero de todas maneras ya no resulta muy fácil establecer el rango de ganancias para que el sistema sea estable como en el caso del método del lugar de las raíces.

Si se tiene el diagrama de Nyquist y que nos indique que para un valor de la ganancia encierra el punto $-1+j0$, sabemos que el sistema es inestable, por lo tanto para volverlo estable, sin variar la ganancia, debemos modificar la curva tal que no encierre al punto $-1+j0$, o sea que este diagrama si nos indica más o menos el tipo de compensación que debemos usar aunque no sea de una manera tan efectiva como sucede con el método anterior.

El diagrama de Nyquist tiene importancia para una excitación sinusoidal, puesto que a partir de la curva de

la función de transferencia en lazo abierto es posible determinar la respuesta a la frecuencia del mismo sistema en lazo cerrado, simplemente con ayuda de las curvas de M y ϕ constantes. El desarrollo teórico del criterio de Nyquist lo creo de gran importancia puesto que nos justifica plenamente el uso de métodos más eficaces (como el Bode) pero basados en los mismos principios fundamentales.

El método de Nyquist tiene la desventaja de que sólo se trata para excitaciones sinusoidales y no para otros tipos de ondas. El estado transitorio del sistema, por este método, es muy difícil establecerlo, utilizándose por lo tanto solo para respuestas sinusoidales en estado estable.

El diagrama polar inverso se basa en los mismos principios que en el de Nyquist, tiene la ventaja de que es mucho más fácil establecer la respuesta en lazo cerrado. La mayor ventaja radica cuando no se usa realimentación unitaria como veremos en el capítulo de compensación.

Por medio del gráfico polar inverso también se puede saber que tipo de compensación es necesario colocar para variar la respuesta del sistema.

El método de Bode y Nichols es el más usado para excitación sinusoidal, puesto que el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto puede aproximarse por medio de las asíntotas. Para establecer la respuesta en lazo cerrado pasamos del diagrama de Bode a la tabla de Nichols.

De los métodos de análisis por frecuencia, el de

Bode y Nichols es el de más ventaja no solo por su facilidad de construcción sino también para establecer la respuesta transitoria del sistema. En efecto, supongamos que se tiene en forma experimental la respuesta del sistema a la frecuencia, entonces podemos ver que pendiente presenta cada tramo y determinar aproximadamente las frecuencias de quiebre, si el sistema presenta picos de resonancia entonces las raíces serán complejas conjugadas, y se las encontrará por comparación con las curvas normalizadas que aparecen en los textos de Control. Conocidas en forma aproximada las raíces podemos reconstruir la expresión matemática de la función de transferencia y de la cual se puede establecer la respuesta transitoria. El método es inverso al que hemos seguido y es mucho más difícil, pero establece la relación entre la respuesta de frecuencia y el estado transitorio.

Para variar la respuesta del sistema es relativamente fácil establecer la red de compensación a usarse puesto que solo se precisa sumar o restar en el diagrama de Bode, cantidades adecuadas que son las magnitudes de las redes de compensación.

2. ESTUDIO DE LA COMPENSACION SERIE EN LA ESTABILIDAD Y EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA

El sistema desarrollado en la sección anterior tiene características de respuesta invariable para cada valor de ganancia. Necesitamos ver como se modifican estas características si es que se aumenta un elemento compensador al sistema.

La primera aplicación que se tiene es la de variar el margen de estabilidad del sistema. Supongamos inestable al sistema con un valor adecuado de la ganancia, entonces, al introducir la red de compensación, y sin variar la ganancia, debemos estabilizar al sistema, o sea, aumentar el rango de ganancia.

2-1. ESTUDIO DE LA RED DE COMPENSACION

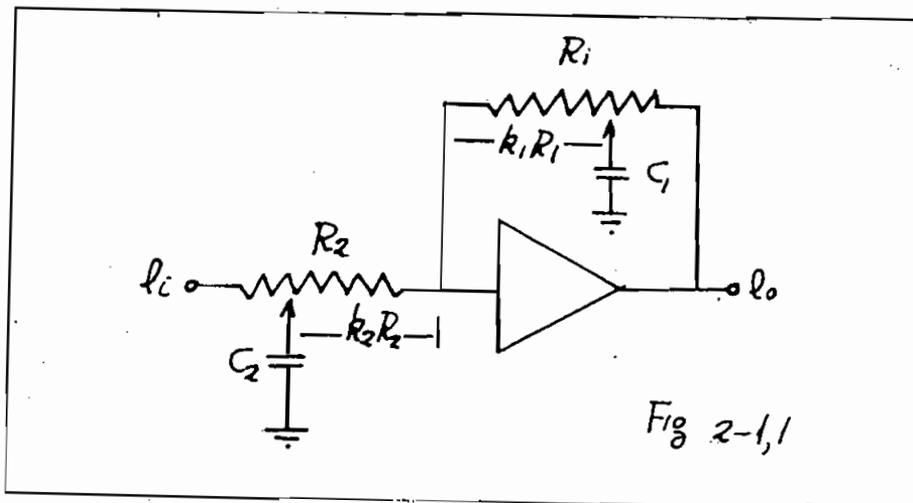
Existe un sinnúmero de redes de compensación que determinan ciertas características a la respuesta del sistema, pero la mayoría de ellas son las llamadas de adelanto de fase y las de retraso de fase o la llamada red de adelanto-retraso.

Las redes de adelanto o la de retraso de fase son las más sencillas y son suficientes, en la mayoría de los casos para obtener las características de respuesta deseadas.

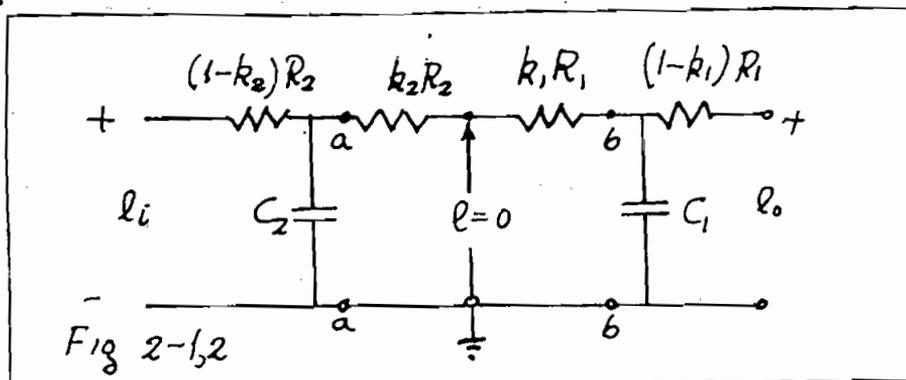
Para estudiar de una manera más o menos amplia la respuesta del sistema o distintas redes de compensación he preferido armar una red en donde se pueda variar la fase de

una manera arbitraria tanto para adelanto como para retraso.

La red está formada por dos potenciómetros, dos condensadores y un amplificador operacional tal como el indicado en la fig 2-1.1.



La función de transferencia del sistema de la fig. 2-1.1, se puede encontrarla facilmente con la suposición de que la tensión e sea aproximadamente cero voltios (tierra virtual), de esta manera se tiene el circuito de la figura 2-1.2.



Aplicando el teorema de Thevenin para los puntos a-a y b-b se tiene:

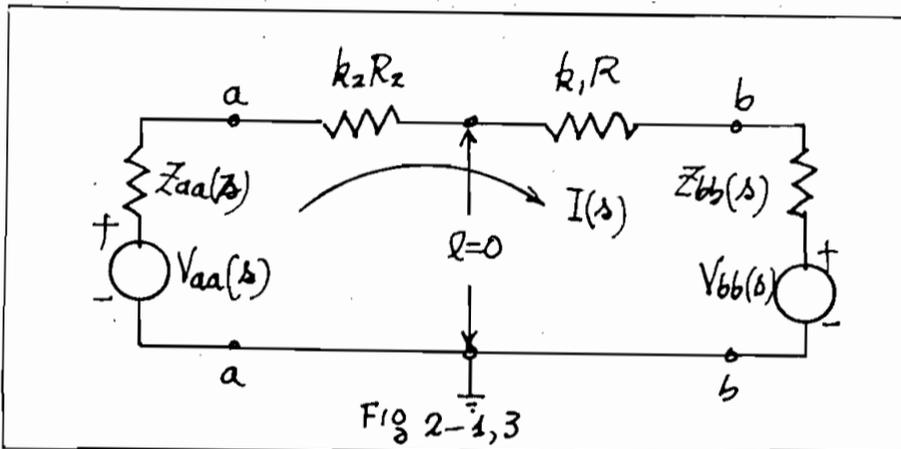
$$V_{aa}(s) = \frac{E_i(s)}{\left[(1 - k_2) R_2 + \frac{1}{sC_2} \right]} \cdot \frac{1}{sC_2} \quad (2-1.1)$$

$$Z_{aa}(s) = \frac{(1 - k_2) R_2 / sC_2}{(1 - k_2) R_2 + \frac{1}{sC_2}} \quad (2-1.2)$$

$$V_{bb}(s) = \frac{E_o(s)}{\left[(1 - k_1) R_1 + \frac{1}{sC_1} \right]} \cdot \frac{1}{sC_1} \quad (2-1.3)$$

$$Z_{bb}(s) = \frac{(1 - k_1) R_1 / sC_1}{(1 - k_1) R_1 + \frac{1}{sC_1}} \quad (2-1.4)$$

y se tiene el circuito 2-1.3 en donde las tensiones y las impedancias vienen dadas por las ecuaciones (2-1.1)-(2-1.4).



Puesto que $l = 0$ (fig 2-1.3), la corriente $I(s)$

puede expresarse en la forma:

$$I(s) = \frac{V_{aa}(s)}{Z_{aa}(s) + k_2 R_2} = \frac{-V_{bb}(s)}{Z_{bb}(s) + k_1 R_1} \quad (2-1.5)$$

hasta $1/T_1 = \infty$, igual variación tiene el "polo". Para obtener una buena variación del polo y cero he escogido los parámetros $R_1 = R_2 = 1M$; $C_1 = C_2 = 1,41 \mu F$, con lo que $s_{min} = 4/1,41 = 2,84$; $s_{max} = \infty$.

2-2.a) ESTUDIO DE LA COMPENSACION SERIE POR EL METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

Consiste en introducir la red de compensación en la transmisión directa del sistema de la fig 1-3.1. Idealmente no importaría el punto en donde se abra la transmisión directa puesto que estamos tratando sistemas lineales, pero como la red de compensación tiene un término diferenciador toda señal de ruido que aparezca a la entrada aparecerá a la salida en una magnitud mayor, por lo tanto

Reemplazando las expresiones (2-1.1) a (2-1.4) en(2-1.5) se tiene:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{1 + (k_1 - k_1^2)R_1C_1s}{1 + (k_2 - k_2^2)R_2C_2s} = - \frac{1 + T_1s}{1 + T_2s} \quad (2-1.6)$$

$$\text{en donde: } T_1 = (k_1 - k_1^2)R_1C_1 \quad ; \quad T_2 = (k_2 - k_2^2)R_2C_2 \quad (2-1.7)$$

El valor máximo de T ocurre para $K = 1/2$; $T_{\max} = RC/4$ y el mínimo para $k = 0$ o $k = 1$, $T_{\min} = 0$, por lo tanto el "cero" de (2-1.6) puede variar desde $1/T_1 = 4/R_1C_1$ hasta $1/T_1 = \infty$, igual variación tiene el "polo". Para obtener una buena variación del polo y cero he escogido los parámetros $R_1 = R_2 = 1M$; $C_1 = C_2 = 1,41 \mu F$, con lo que $s_{\min} = 4/1,41 = 2,84$; $s_{\max} = \infty$.

2-2.a) ESTUDIO DE LA COMPENSACION SERIE POR EL METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

Consiste en introducir la red de compensación en la transmisión directa del sistema de la fig 1-3.1. Idealmente no importaría el punto en donde se abra la transmisión directa puesto que estamos tratando sistemas lineales, pero como la red de compensación tiene un término diferenciador toda señal de ruido que aparezca a la entrada aparecerá a la salida en una magnitud mayor, por lo tanto la posición de mayor ventaja para eliminar el ruido es inmediatamente después del elemento comparador, puesto que el elemento $G_1(s)$ presenta una capacitancia a tierra de $0.7 \mu F$

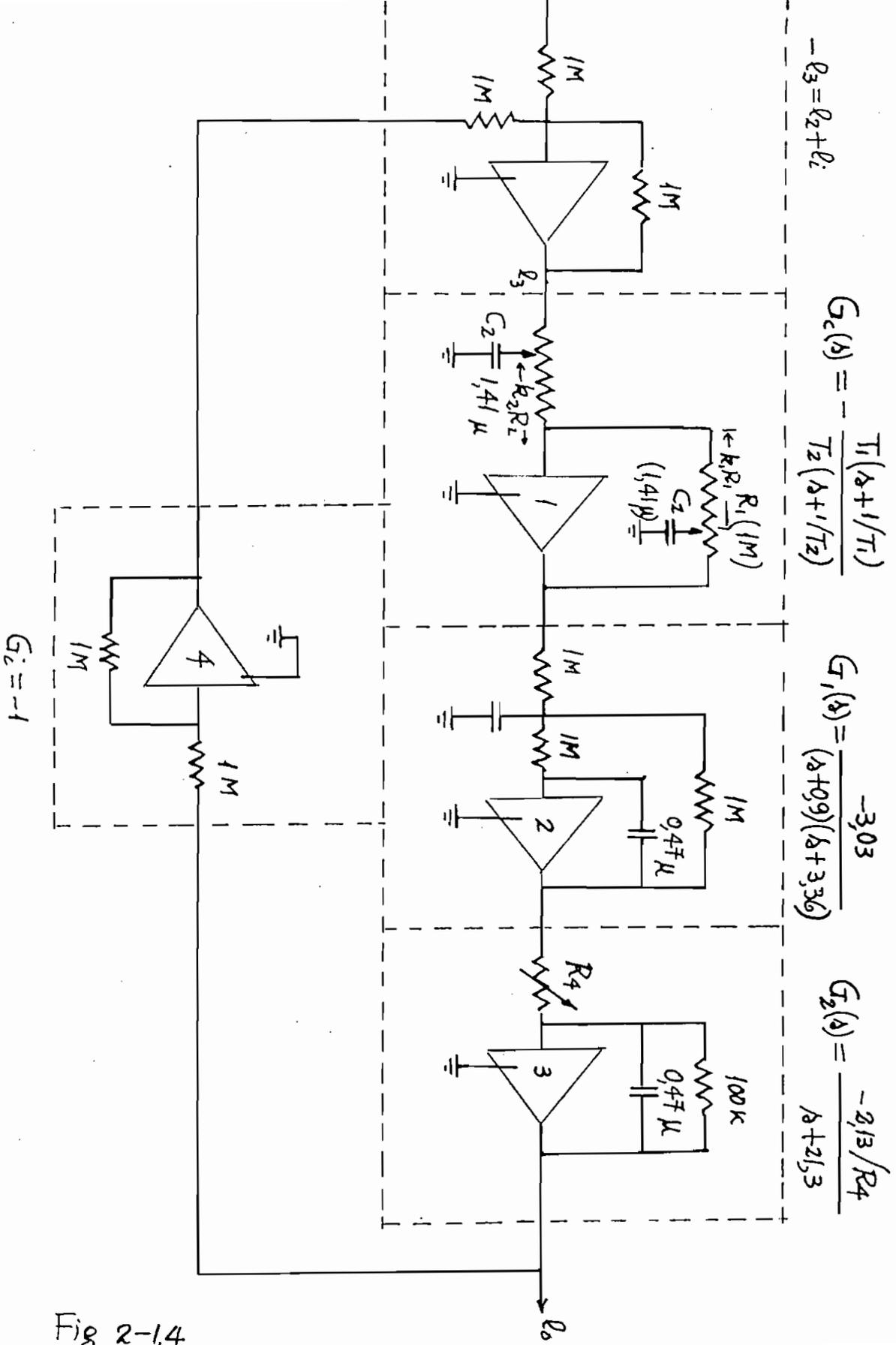


Fig 2-14

que es lo suficientemente grande para filtrar cualquier señal de ruido. El sistema completo se indica en la fig 2-1.4 en donde el amplificador 4 se usa solo como inversor de fase para que la realimentación sea negativa.

El método más conveniente para estudiar el efecto de la red de compensación sobre la respuesta del sistema es por medio del lugar de las raíces.

La ecuación (2-1.6) puede expresarse en la forma:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = G_c(s) = - \frac{T_1(s + 1/T_1)}{T_2(s + 1/T_2)} \quad (2-2.1)$$

en donde $1/T_1$ es el cero y $1/T_2$ el polo de $G_c(s)$. Consideremos el caso de tener una red de adelanto de fase esto es para $T_1 > T_2$, vamos a estudiar la modificación que sufre el diagrama del lugar de las raíces de la fig 1-3.2.

Sea por ejemplo $1/T_2 = 36$ y $1/T_1 = 4,43$ la red en consideración entonces el correspondiente lugar de las raíces está representado en la fig 2-2.1.

La función de transferencia total será:

$$G(s) = \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)} \cdot \frac{s + 4,43}{s + 36} \cdot \frac{36}{4,43}$$

$$= \frac{K(s + 4,43)}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(s + 36)} \quad (2-2.2)$$

de donde $K = 52,2/R_4$

El lugar de las raíces se lo traza por el procedimiento ya conocido. Efectuando los cálculos correspondientes

se encuentra:

- 1) Angulo de asíntotas = 60° ; 180° ; 300°
- 2) Cruce de las asíntotas = - 19,1
- 3) Punto doble = - 2,43
- 4) Puntos imaginarios = $\pm j27,5$

Con estos datos se tiene una idea de la forma general del lugar de las raíces. Para encontrar más puntos, el método más sencillo y eficaz es por medio del Spirule, según el cual se supone un punto en el plano s que pertenece al lugar de las raíces y se comprueba si efectivamente nuestra suposición es verdadera o falsa al encontrar que la suma de ángulos sea de 180° o diferente de 180° respectivamente. En la fig 2-2.1 se indica el lugar de las raíces del sistema compensado y no-compensado.

En el lugar de las raíces observamos que el sistema no-compensado entra en oscilación no-amortiguada a una velocidad angular de 9,68 rad/seg cuando $R_4 = 2,76 K$ ($k = 2340$). En el sistema compensado, para $R_4 = 2,76K$ el sistema es oscilatorio amortiguado siendo $s = - 3,5 \pm j19,5$.

Para una variación de R_4 entre 2,76K y 1,24K el sistema no-compensado es claramente inestable, pero en cambio el compensado todavía sigue estable. Esta es una primera observación importante sobre el efecto de la red de compensación en la estabilidad del sistema. En la fig 2-2.1 se indica con línea de puntos los valores de las raíces correspondientes a iguales valores de R_4 .

$$\left\langle -\frac{1}{T_1} = -4,43 ; -\frac{1}{T_2} = -36 \right\rangle$$

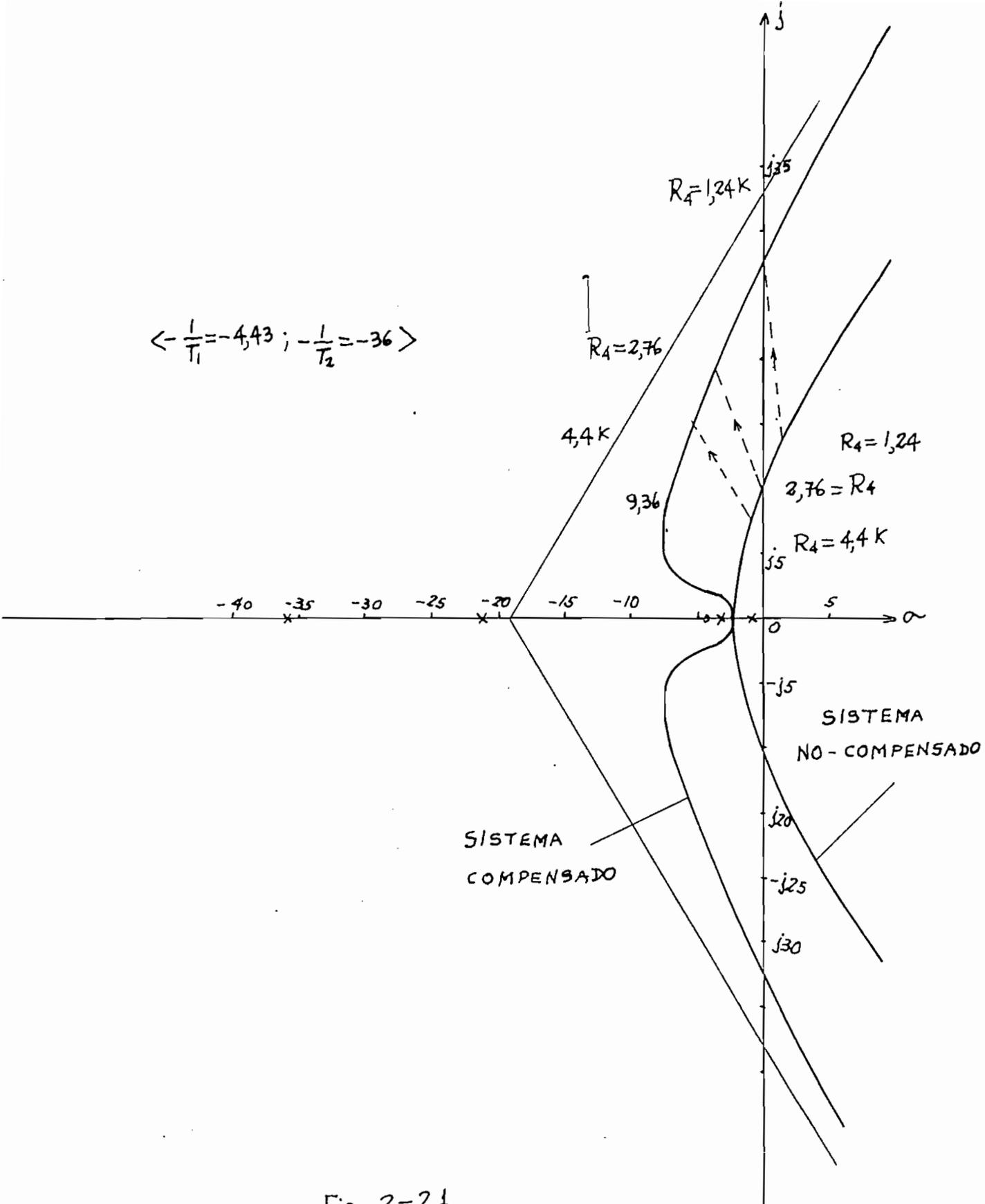


Fig 2-2,1

La foto de la figura 2-2.2 es demostrativa de lo que se acaba de decir. Los primeros dos cuadros (aproximadamente $2 \times 1,50 = 3$ seg) corresponden a la respuesta del sistema no-compensado con un valor $R_4 \approx 2,6K$ que hace al sistema inestable, en esta condición se introdujo violentamente la red de compensación antes indicada y se tiene la respuesta dada desde el cuadro tercero en adelante en donde

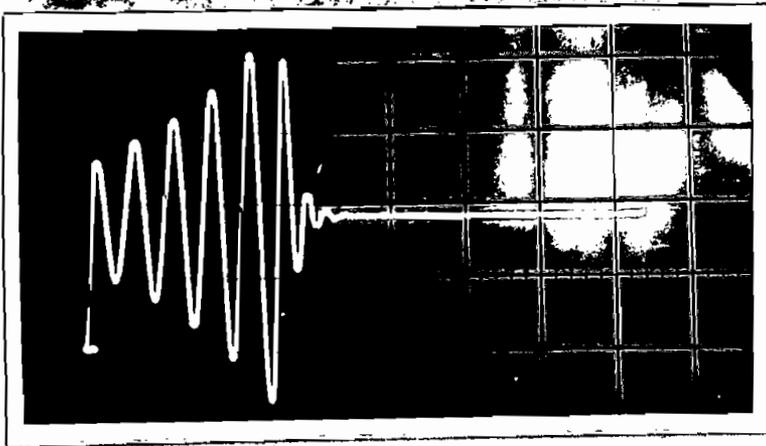


Fig 2-2,2

de se observa que la atenuación conseguida es muy grande, obteniéndose de esta manera una gran estabilidad, para un mismo valor de R_4 .

También se observa que la frecuencia de oscilación del sistema no-compensado es aproximadamente $1/1,5 \times 0,45 = 1,48$ c/s (9,3 rad/seg) pero una vez que se introduce la red de compensación la frecuencia de oscilación se eleva a un valor $1/1,5 \times 0,2 = 3,34$ cps. (21 rad/seg). Este comportamiento era de esperarse puesto que según el lugar de las raíces (fig 2-2.1) se observa que para un mismo valor de la ganancia ($R_4 \approx 2,6K$) la velocidad angular aumenta tal como la indi

cada por la línea de puntos. Una cosa parecida se dirá para el coeficiente de amortiguamiento.

2-2.b) EFECTOS DE LA COMPENSACION SERIE EN LA RESPUESTA TRANSITORIA DEL SISTEMA

En el párrafo anterior analizamos el efecto que tiene una red de adelanto de fase sobre la respuesta del sistema particularmente sobre la estabilidad. Hoy debemos analizar en forma más detenida como varían las características de la respuesta del sistema para distintas redes de compensación.

Consideremos, por ejemplo, la red de compensación con $1/T_2 = 36$ (polo) y $1/T_1 = 2,84$ (cero) que es muy parecida a la analizada anteriormente pero que su "cero" se encuentra a la derecha del "polo" $s = 3,36$ del sistema, El gráfico del lugar de las raíces será muy parecido al dado por la fig 2-2.1 pero en donde no existirá la parte pronunciada hacia la derecha en el corte con el eje real.

La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)} \cdot \frac{s + 2,84}{s + 36} \cdot \frac{36}{2,84}$$

$$G(s) = \frac{s + 2,84}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(s + 36)} \quad (2-2.3)$$

en donde: $K = \frac{36 \times 6,42}{2,84} \cdot \frac{1}{R_4} = \frac{81,6}{R_4}$

Para trazar el lugar de las raíces tenemos:

- 2) Cruce de las asíntotas = - 19,5
- 3) Punto doble = - 8,6
- 4) Puntos imaginarios = $\pm j29,8$

y con ayuda del Spirule nos da la curva (3) marcada en la figura 2-2.3, en donde también se representa las curvas (1) y (2) correspondientes al gráfico 2-2.1 del sistema no-compensado y compensado.

La curva (4) es el lugar de las raíces para una red de compensación con $1/T_2 = 4,43$ y $1/T_1 = 3,79$. La función de transferencia y los puntos importantes para trazar el gráfico son:

$$G(s) = K \frac{s + 3,79}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 4,43)(s + 21,3)} \quad (2-2.4)$$

$$K = \frac{4,43 \times 6,42}{3,79} \cdot \frac{1}{R_4} = \frac{7,52}{R_4}$$

- 1) Angulo de las asíntotas = 60° ; 180° ; 300°
- 2) Cruce de las asíntotas = - 8,74
- 3) Punto doble = - 2,25
- 4) Puntos imaginarios = $\pm j 11,5$

Como se observa la curva (4) es muy parecida a la (1), existe una pequeña diferencia en el valor de la frecuencia de oscilación para un mismo valor de R_4 , por ejemplo para $R_4 = 1,24 K$ la frecuencia de oscilación (inestable) del sistema no-compensado es $\omega = 13,5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ pero del sistema compensado es 15 rad/seg.

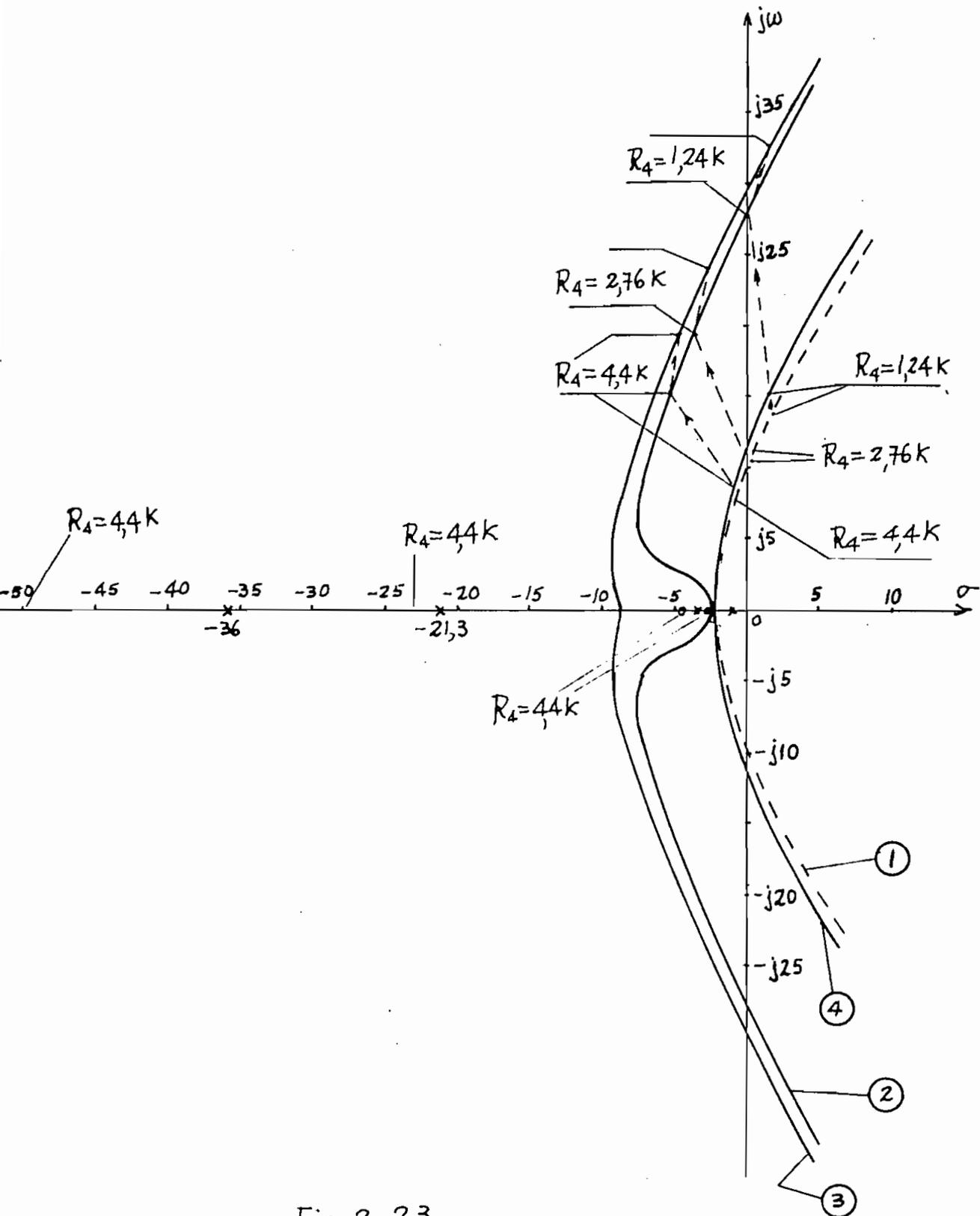


Fig 2-2,3

En la figura 2-2.3 se indica con línea de puntos las posiciones de las raíces para un mismo valor de la resistencia R_4 .

Consideremos los valores de las raíces para $R_4 = 4,4K$, para la curva (2) tenemos:

$$s_{1,2} = -5,3 \pm j 15,25$$

$$s_3 = -46,5$$

$$s_4 = -4,46$$

la respuesta transitoria (a una función paso unitaria) podemos calcularla a partir de la función de transferencia.

$$W(s) = - \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2-2.5)$$

$$\text{siendo } G(s) = \left(\frac{52,2}{R_4} \right) \cdot \frac{(s + 4,43)}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(s + 36)}$$

de donde:

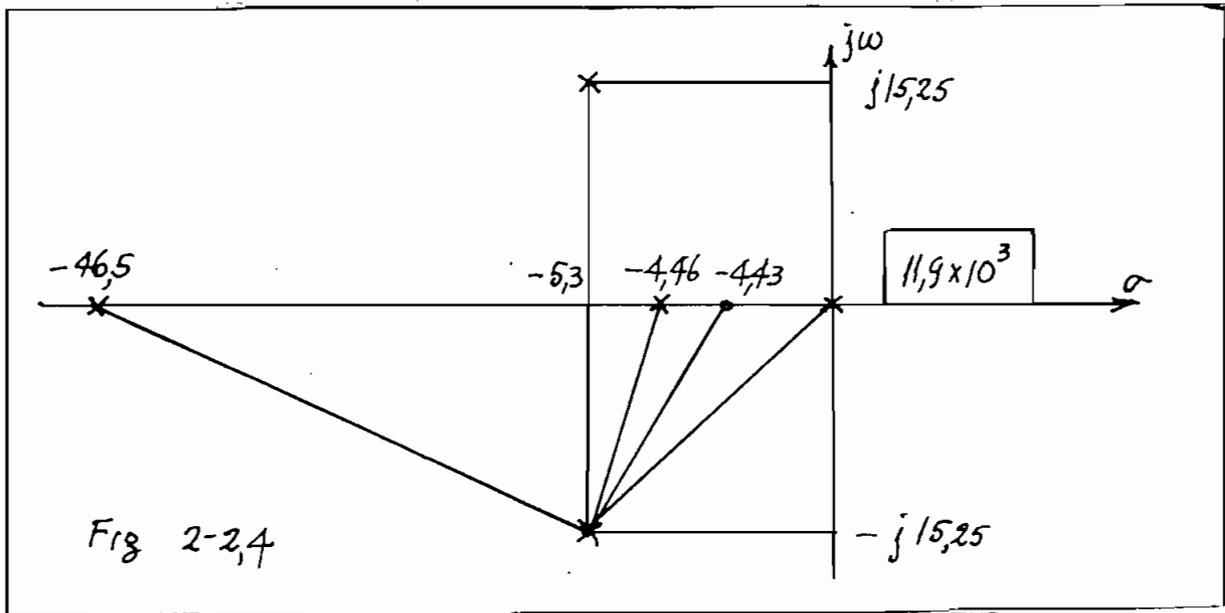
$$W(s) = \frac{\frac{52,2}{R_4} (s + 4,43)}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(s + 36) + \left(\frac{52,2}{R_4} \right) (s + 4,43)} \quad (2-2.6)$$

Para $E_i(s) = 1/s$ y $R_4 = 4,4K$, tenemos que:

$$\begin{aligned} - E_o(s) &= \frac{11,9 \times 10^3 (s + 4,43)}{s(s + 4,46)(s + 46,5)(s + 5,3 + j15,25)(s + 5,3 - j15,25)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 4,46} + \frac{K_3}{s + 46,5} + \frac{K_4}{s + 5,3 + j15,25} + \frac{K_4}{s + 5,3 - j15,25} \end{aligned} \quad (2-2.7)$$

y de la figura 2-2.3 se puede evaluar fácilmente las constantes K_i , por ejemplo para encontrar K_4 se tiene la fig 2-2.4

en donde se indican las posiciones de polos y ceros de $-E_0(s)$



$$K_1 = (11,9 \times 10^3) \frac{4,43}{4,46 \times 46,5 \times 16,2 \times 16,2} = 0,96$$

$$K_2 = (11,9 \times 10^3) \frac{-0,03}{(-4,46)(4204)(15,3)(15,3)} = 0,008$$

$$K_3 = (11,9 \times 10^3) \frac{-42,04}{(-46,5)(-42,04)(44)(44)} = -0,132$$

$$K_4 = (11,9 \times 10^3) \frac{15,3 \angle -94^\circ}{16,2 \angle -109^\circ \times 15,3 \angle -94^\circ \times 44 \angle -20^\circ \times 2 \times 15,25 \angle -90^\circ}$$

$$= 0,545 \angle 219^\circ$$

$$K_4 = 0,545 \angle -219^\circ$$

Por lo tanto:

$$-E_o(s) = \frac{0,96}{s} + \frac{0,008}{s + 4,46} - \frac{0,132}{s + 46,5} + \frac{0,545/219^\circ}{s+5,3+j15,25} + \frac{0,545/-219^\circ}{s+5,3 - j15,25}$$

de donde la función del tiempo es:

$$-e_o(t) = 0,96 + 0,008 e^{-4,46t} - 0,132 e^{-46,5t} + 1,09 e^{-5,3t} \cdot \text{sn}(15,25t - 2,25)$$

(2-2.8)

siendo el defasamiento:

$$90^\circ - 219^\circ = -129^\circ = -2,25 \text{ radianes}$$

Para la curva 3, son $R_4 = 4,4K$ se encuentra que:

$$-E_o(s) = \frac{18,5 \times 10^3 (s+2,84)}{s(s+2,76)(s+49,8)(s+4,5+j19,5)(s+4,5-j19,5)}$$

$$-E_o(s) = \frac{0,96}{s} - \frac{0,03}{s+2,76} - \frac{0,15}{s+49,8} + \frac{0,48/213^\circ}{s+4,5+j19,5} + \frac{0,48/-213^\circ}{s+4,5-j19,5}$$

de donde la función del tiempo es:

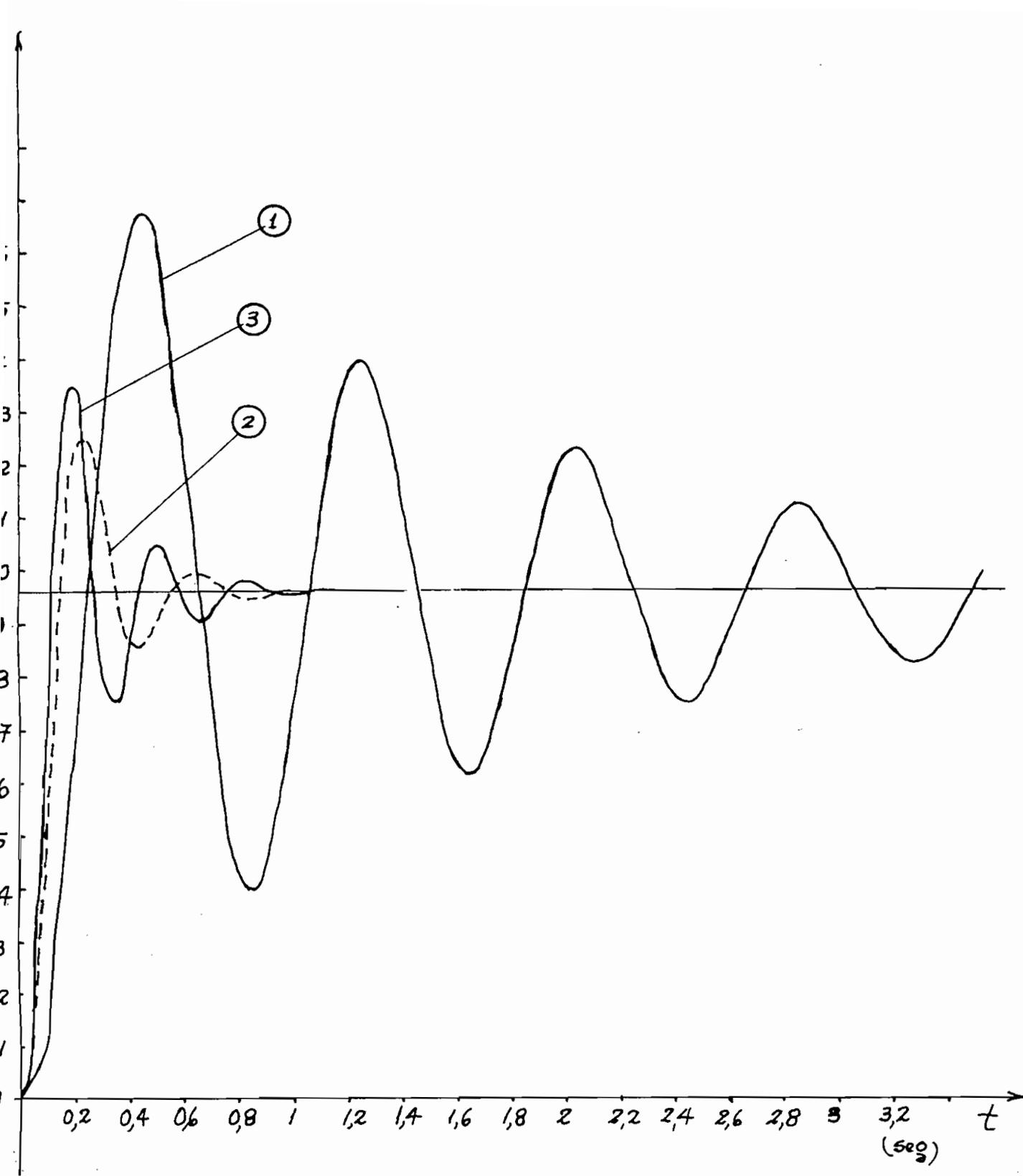


Fig 2-2,5

$$-e_0(t) = 0,96 - 0,03 e^{-2,76t} - 0,15 e^{-49,8t} + 0,96 e^{-4,5t} \cdot \text{sn}(19,5t - 2,15) \quad (2-2.9)$$

y el defasamiento es: $90^\circ - 213^\circ = -123^\circ - 2,15$ radianes.

Para el sistema no compensado con $R_4 = 4,4K$ se encontró en la sección 1 que:

$$-e_0(t) = 0,96 - 0,096 e^{-24,34t} + 0,942 e^{-0,61t} \text{sn}(7,9t - 1,97) \quad (2-2.10)$$

En la fig 2-2.5 se tienen las representaciones gráficas de las ecuaciones (2-2,10); (2-2.8) y (2-2.9) marcadas con las curvas 1,2,3 respectivamente (las cuales están de acuerdo con la numeración del gráfico 2-2.3).

Para caracterizar la respuesta transitoria del sistema se requieren de algunas definiciones tales como tiempo al que se alcanza la máxima respuesta (a veces llamado tiempo de subida); tiempo al que se alcanza el estado estable llamado tiempo de fijación; porcentaje de sobretiro, frecuencia de oscilación, coeficiente de amortiguamiento, etc.

De la fig 2-2.5 observamos que las distintas respuestas del sistema presentan las siguientes características:

	sobretiro	tiempo de sobretiro = t_r	frecuencia f_o	factor de amortiguamiento
Curva 1	75%	0,45seg	1,26 cps	0,1
Curva 2	30,2%	0,23	2,43	0,33
Curva 3	40,6%	0,18	3,10	0,24

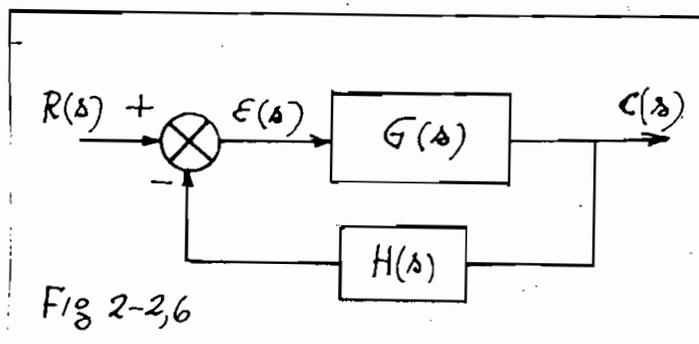
En los controles automáticos de posición se requiere a veces que la salida responda lo más rápidamente al comando de entrada y sin que exista un sobretiro excesivo. Por ejemplo, si deseamos que en la salida $\varphi_o(t)$ se tenga una respuesta que actúe de acuerdo a una señal de paso de entrada lo más rápidamente posible entonces el sistema no-compensado no serviría para este fin puesto que la onda de salida es lenta (frecuencia baja), presenta un sobretiro excesivo y además es muy oscilatorio y tal que si al final deseamos una posición fija es muy difícil cumplirla, entonces surge la necesidad de la compensación. Con la compensación del tipo 2 las características mejoran notablemente puesto que el sistema responde más rápidamente al comando de entrada, tiene un sobretiro menor y deja de oscilar en un tiempo relativamente corto. Se observa de la fig 2-2.5 que el sistema entra en estado estable más o menos un segundo después de haber aplicado el comando. La compensación 3 presenta un sobretiro mayor por lo tanto un coeficiente de amortiguamiento menor y es el que más rápidamente actúa puesto que el tiempo de subida es relativamente pequeño, deja de oscilar notablemente más o menos 1 segundo después del comando.

Otra cosa que es de suma importancia en control automático es el error de posición que se comete (servomecanismos de posición).

En general si se tiene el sistema de la figura

(2-2.6) la función de transferencia desde $R(s)$ hasta $E(s)$ es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$



Si la entrada es una señal de paso unitaria, entonces el valor final que alcanza el error es:

$$E(t)_f = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (2-2.11)$$

$$\text{y por definición: } \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = K_p \quad (2-2.12)$$

en donde a K_p se lo denomina constante de posición.

En nuestro sistema $H(s) = 1$ por lo tanto la constante de posición es:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (2-2.13)$$

Si $R_4 = 4,4K$, entonces la constante K_p del sistema no compensado es:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)} = \frac{1}{10R_4} = 22,8$$

tical representa 0,2 voltios, y del horizontal cada cuadro representa 0,25 segundos, con lo cual se puede tener las siguientes lecturas: frecuencia de oscilación aproximadamente $1/0,25 \times (1/1,65) = 2,43$ ciclos/segundo que corresponde a la calculada; el porcentaje de sobretiro es aproximadamente $100(1,40 - 1,08)/1,08 = 29,6\%$ que es muy próxima a la calculada (30,2%); el

y para el compensado:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(6,42/R_4)(1 + sT_1)}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(1 + sT_2)} = \frac{1}{10R_4} = 22,8$$

siendo de esta manera, independiente del tipo de compensación siempre que el sistema permanezca estable.

El error de estado estacionario es:

$$\varepsilon(t)_f = \frac{1}{1 + \frac{1}{10R_4}} = \frac{1}{1 + 22,8} = 0,04$$

De esta manera, el valor que alcanza la salida cuando ha transcurrido un tiempo muy grande (teóricamente infinito) será:

$$Q_o(t)_f = 1 - \frac{10R_4}{10R_4 + 1} = \frac{1}{10R_4 + 1} = 0,96$$

como se comprueba en la fig. 2-2.5.

En la parte experimental se tomarán fotos de la respuesta del sistema para las dos condiciones de compensación indicadas.

La foto de la figura 2-2.7 es para la compensación $1/T_1 = 4,43$ y $1/T_2 = 36$ con $R_4 = 4,4K$. Cada cuadro del eje vertical representa 0,2 voltios, y del horizontal cada cuadro representa 0,25 segundos, con lo cual se puede tener las siguientes lecturas: frecuencia de oscilación aproximadamente $1/0,25 \times (1/1,65) = 2,43$ ciclos/segundo que corresponde a la calculada; el porcentaje de sobretiro es aproximadamente $100(1,40-1,08)/1,08 = 29,6\%$ que es muy próxima a la calculada (30,2%); el

tiempo de sobretiro es $t_r = 0,25 \times 0,9 = 0,226$ segundos (el calculado es $0,23$ seg); el factor de amortiguamiento se lo puede estimar de la fig 2-2.7 tomando los puntos superiores de la onda como pertenecientes a una exponencial decreciente, de esta manera, el cruce de la recta tangente al punto $t = 0$ de la curva supuesta nos dará una idea de la magnitud de la constante de tiempo del sistema, en efecto este cruce puede ocurrir en $t_c = 0,25 \times 0,8 = 0,200$ segundos $= 1/\omega_n \zeta$ en donde ω_n es la frecuencia natural del sistema, ζ el factor de amortiguamiento; también podemos aproximar la frecuencia no amortiguada a la propia del sistema, o sea $\omega_n \approx 15,25$ radianes/segundo, el factor de amortiguamiento de esta manera es:

$$\zeta = \frac{1}{\omega_n t_c} = \frac{1}{15,25 \times 0,20} = 0,33$$

pero esta medida, puede resultar muy inexacta como se comprenderá y lo creo útil solo para saber más o menos que magnitud tendría el factor .

En la figura 2-2.7 se observa que el valor de estado estable es de $1,08$ voltios lo cual difiere en $0,12$ voltios del valor calculado ($0,9\%$) esto se debe como ya se dijo antes, al corrimiento de tensión de los amplificadores operacionales. Pero en general si se compara la curva 2 de la fig 2-2.5 con la foto de la fig 2-2.7 se observa que son muy parecidas por lo tanto, lo expuesto en la teoría lineal es comprobada con buena exactitud en el laboratorio.

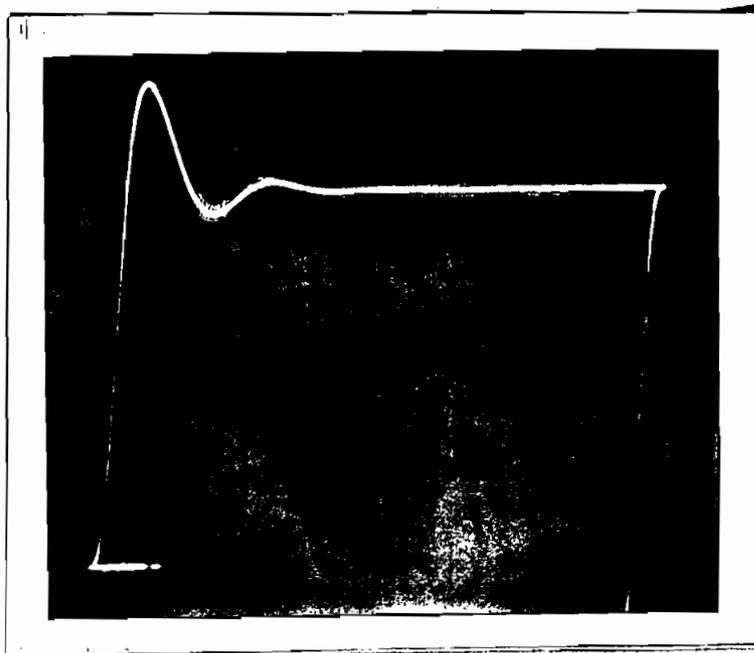


Fig 2-2,7

La foto de la fig 2-2.8 corresponde a la curva marcada con 3 en la fig 2-2.5, o sea las condiciones del sistema son: $1/T_1 = 2,84$; $1/T_2 = 36$ y $R_4 = 4,4K$. Las escalas vertical y horizontal son las mismas que para la fig 2-2.7 (0,2 voltios por cuadro vertical y 0,25 segundos por cuadro horizontal). Las mediciones más importantes que se pueden tomar de esta foto son: frecuencia de oscilacion, aproximadamente $1/0,25 \times 1,3 = 3$ ciclos/segundo que es muy cercano al calculado (3,1c/s); porcentaje de sobretiro: $100 \times (1,47 - 1,05)/1,05 = 40\%$ que está de acuerdo con el calculado (40,6%); tiempo de sobretiro: $t_r = 0,25 \times 0,7 = 0,175$ segundos (el calculado es 0,18 seg); y el factor de amortiguamiento, por igual procedimiento del caso anterior es de 0,22.

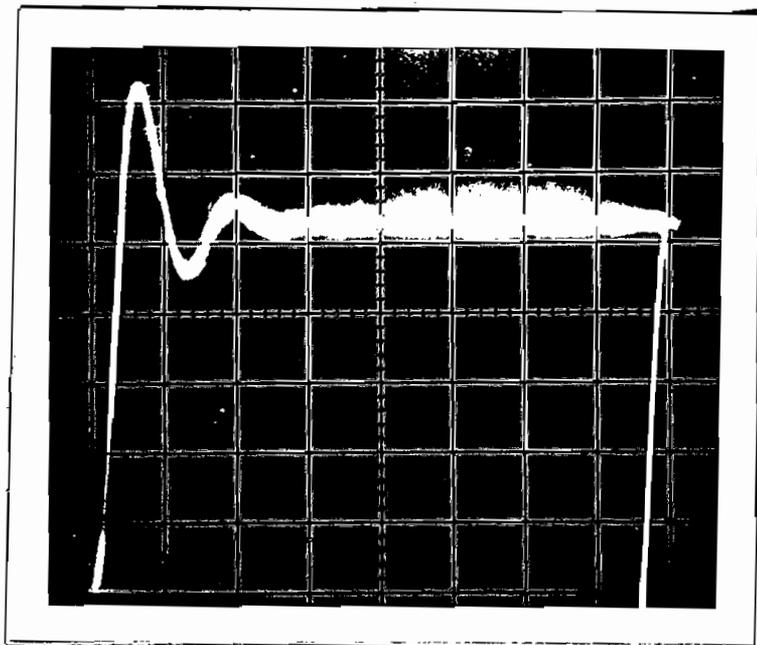


Fig 2-28

La respuesta del sistema para $R_4 = 4,4K$ y sin compensación ya se indicó en el numeral 1 (fig 1-3.6).

En resumen diremos que una red de compensación de adelanto de fase produce las siguientes características en la respuesta del sistema:

- a) Se incrementa el factor de amortiguamiento, por lo tanto disminuye el sobretiro.
- b) Se incrementa la frecuencia de oscilación f_0 , por lo tanto aumenta la frecuencia de resonancia del sistema.
- c) El ancho de banda de sistema aumenta debido al incremento de la frecuencia de resonancia.
- d) El tiempo de subida disminuye.
- e) Aumenta el rango de ganancia del sistema.

Consideremos el caso de tener una red de compensación con retraso de fase con $1/T_1 = 36$ y $1/T_2 = 2,84$, enton-

ces la función de transferencia directa es:

$$G(s) = \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)} \frac{s + 36}{s + 2,84} \frac{2,84}{36}$$

$$= \frac{K(s + 36)}{(s + 0,9)(s + 2,84)(s + 3,36)(s + 21,3)} \quad (2-2.14)$$

$$\text{siendo } K = \frac{6,42 \times 2,84}{36} \frac{1}{R_4} = \frac{0,51}{R_4}$$

Para trazar el lugar de las raíces de la fig. 2-2.9 se tiene:

- 1) Angulo de las asíntotas = 60° ; 180° ; 300°
- 2) Cruce de las asíntotas = $+ 2,54$
- 3) Puntos dobles = $- 14$; $- 17,6$; $- 45$
- 4) Puntos imaginarios = $\pm j3,6$

La curva (1) representa el sistema no-compensado mientras que la (5) es el sistema con la compensación de retraso de fase. Se observa que el lugar de las raíces presenta una curva cerrada en forma de elipse, esto se debe a que se tiene un "cero" a la izquierda de todos los polos. Si este "cero" lo alejamos a un más entonces el punto de cruce de las asíntotas se moverá hacia la derecha, por lo tanto el lugar de las raíces se inclinará a un más de la posición indicada, la curva cerrada se hará cada vez más grande. Si por este proceso nos acercamos con el "cero" a infinito entonces se ve fácilmente que la elipse tenderá hacia el infinito asintóticamente, y el lugar de raíces de la derecha se aproxima al in-

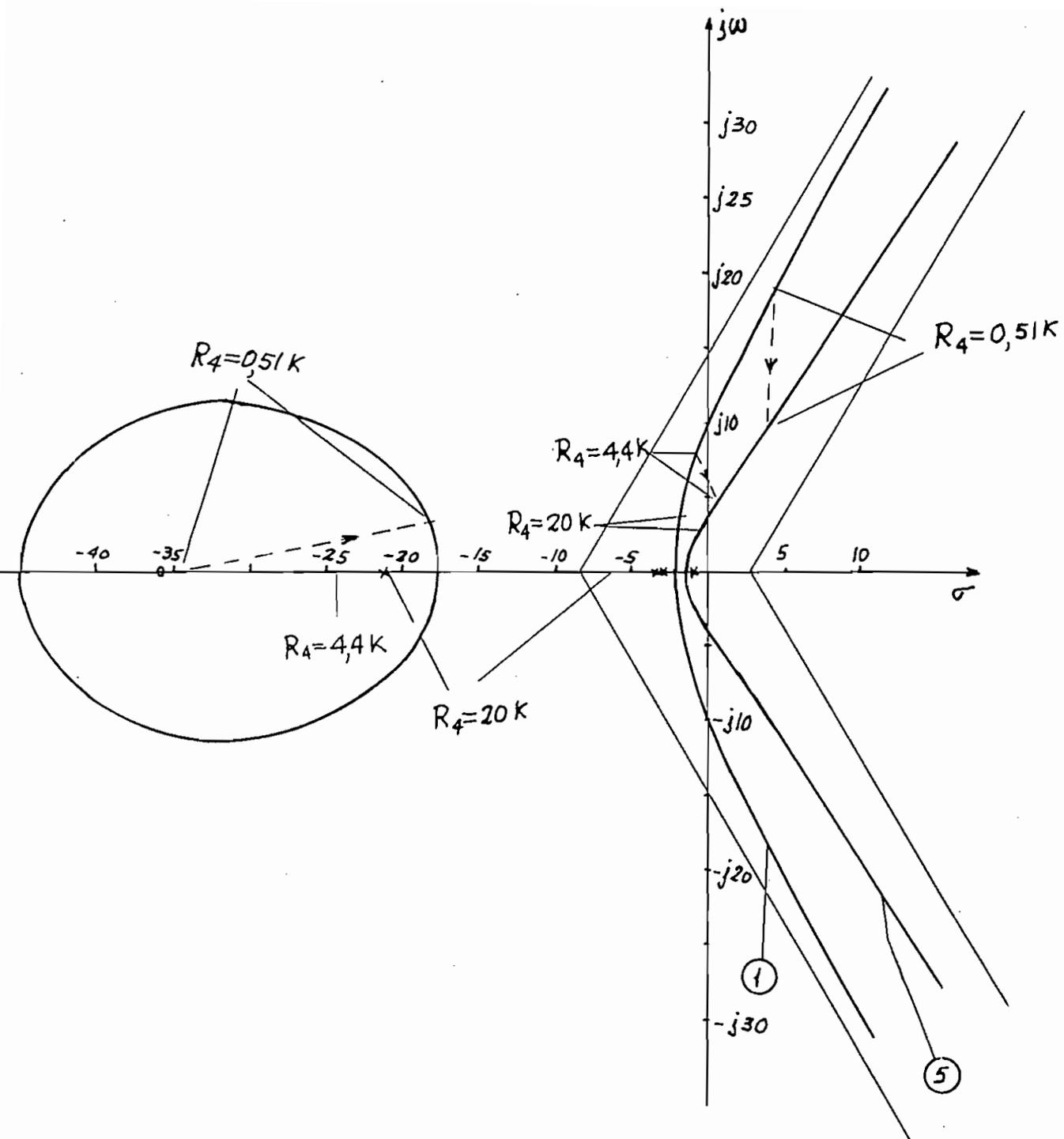


Fig 2-2,9

finito con un ángulo mucho menor, efectivamente las asíntotas deben estar separadas por 45° cada una como se demuestra cuando el sistema tiene cuatro polos.

Como en los diagramas anteriores la dirección de la flecha con línea punteada representa el movimiento de las raíces desde el sistema no-compensado al compensado.

Puesto que para $R_4 = 4,4$ el sistema compensado es claramente inestable es muy difícil tomar datos experimentales aceptables por lo tanto he escogido para este caso una resistencia $R_4 = 20 \text{ K}$.

En el sistema compensado para $R_4 = 20 \text{ K}$ las raíces son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -6,2 \\ s_2 &= -21,20 \\ s_3 &= -0,5 - j2,8 \\ s_4 &= -0,5 + j2,8 \end{aligned}$$

Por lo cual, la transformada de la salida para una función escalón unitaria es:

$$\begin{aligned} -E_0(s) &= \frac{25,5 (s + 36)}{s (s + 6,2)(s + 21,20)(s + 0,5 + j2,8)(s + 0,5 - j2,8)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 6,2} + \frac{K_3}{s + 21,20} + \frac{K_4}{s + 0,5 + j2,8} + \frac{K_4}{s + 0,5 - j2,8} \quad (2-2.15) \\ &= \frac{0,83}{s} - \frac{0,193}{s + 6,2} + \frac{0,003}{s + 21,20} + \frac{0,401 \angle 218^\circ}{s + 0,5 + j2,8} + \frac{0,401 \angle -218^\circ}{s + 0,5 - j2,8} \end{aligned}$$

de donde, la función del tiempo despreciando el tercer término de la derecha es:

$$-g(t) = 0,83 - 0,193e^{-6,2t} + 0,802e^{-0,5t} \operatorname{sn}(2,8t - 2,24\tau) \quad (2-2.16)$$

Para el sistema no-compensado y $R_4 = 20$ la posición de las raíces son:

$$s_1 = -22,06$$

$$s_2 = -1,75 - j3,7$$

$$s_3 = -1,75 + j3,7$$

de donde se puede obtener la función del tiempo para la tensión de salida:

$$-g(t) = 0,83 - 0,034e^{-22,06t} + e^{-1,75t} \operatorname{sn}(3,7t - 2,19\tau) \quad (2-2.17)$$

En la fig 2-2.10 se dibujó las funciones del tiempo dadas por las ecuaciones (2-2.16) (sistema compensado-5) y (2-2.17) (sistema no-compensado -1). Comparando las dos curvas se observa que el porcentaje de sobretiro aumenta desde 100. $(1,24 - 0,83)/0,83 = 49,5\%$ del sistema compensado, además el tiempo de sobretiro es mayor por lo cual la velocidad de respuesta del sistema disminuye considerablemente (desde 0,7 seg hasta 1,35 seg). La tendencia a la oscilación del sistema compensado es mucho mayor que el no-compensado.

Para la comprobación experimental se tomó la foto de la fig 2-2.11 siendo $R_4 = 20K$, $1/T_1 = 36$ y $1/T_2 = 2,84$. La escala vertical es de 0,5 voltios por cuadro y la horizontal $12,5/8,4 = 1,49$ segundos por cuadro (el período del oscilador de barrido horizontal es de $2 \times 12,5$ segundos), con lo cual

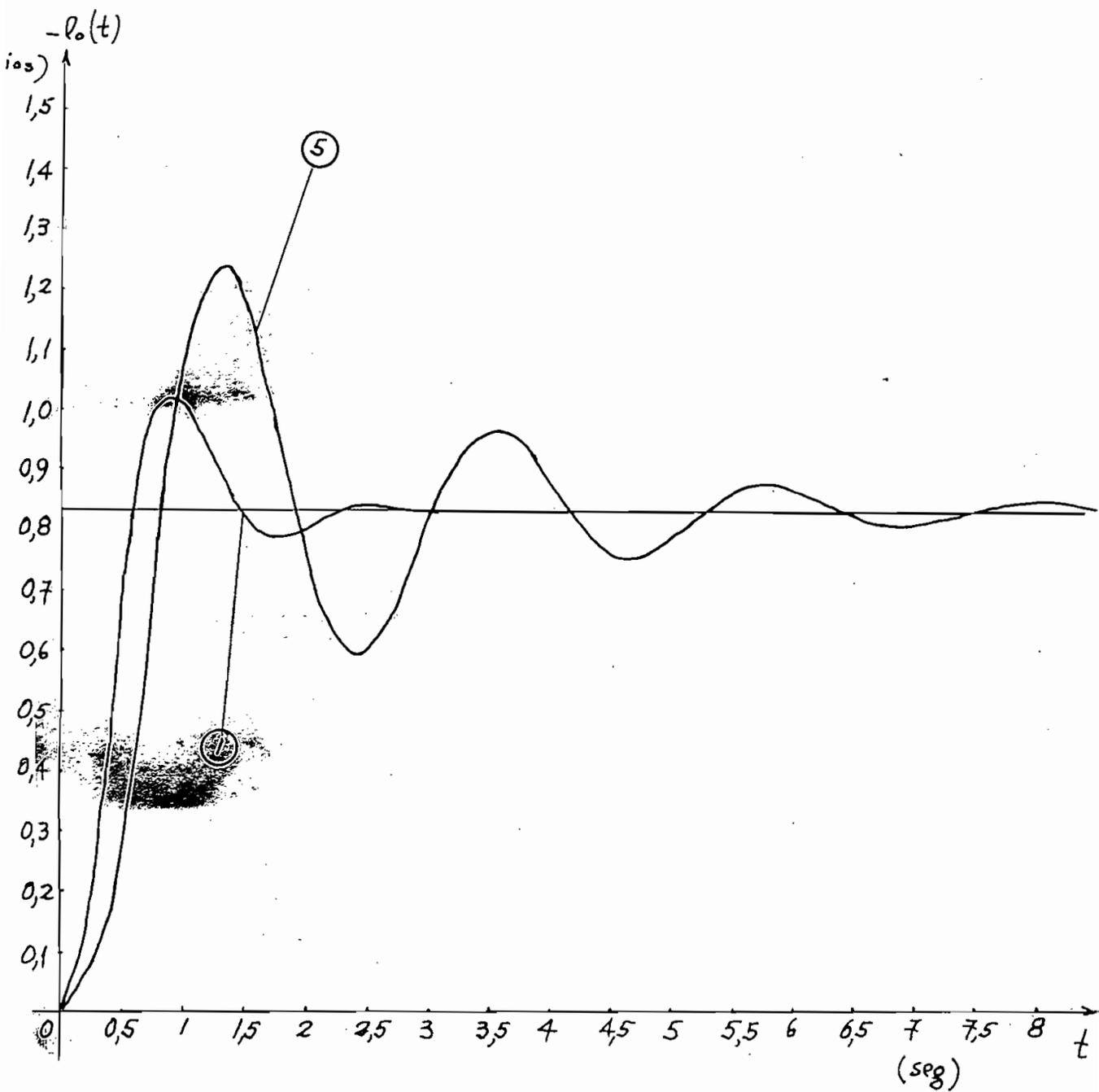


Fig 2-2,10

se puede ver que la frecuencia de oscilación amortiguada es de $1/1,5 \times 1,49 = 0,450$ c/s o sea $3,00$ rad/seg lo cual se aproxima a la dada por la ecuación 2-2.17. El valor de estado estable es de $0,84$ voltios y el porcentaje de sobretiro es de $100 \times 0,8/1,6 = 50\%$ que se alcanza en $1,49 \times 0,9 = 1,35$ segundos con lo cual, estos datos, están plenamente de acuerdo con los valores calculados.

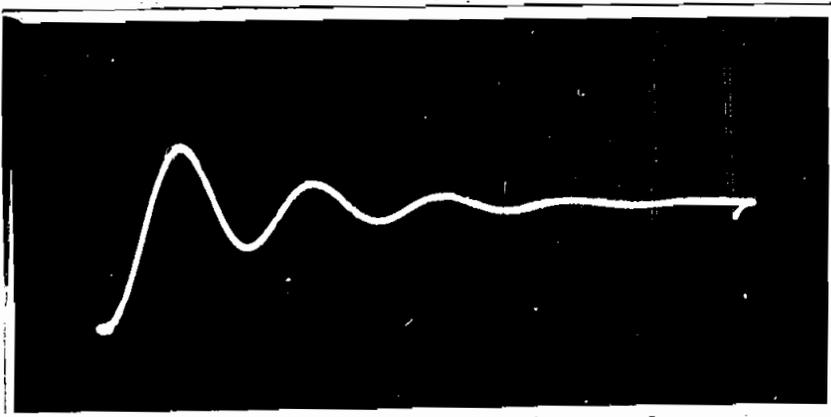


Fig 2-2,11

De la fig 2-2.9 o de las ecuaciones 2-2.16 y 2-2.17 podemos deducir facilmente que el coeficiente de amortiguamiento varía desde $0,4$ del sistema no-compensado a $0,13$ del compensado.

A manera de ilustración se tomó la foto de la fig. 2-2.12 del sistema no-compensado para $R_4 = 20K$, o sea, correspondiente a la curva 1 de la fig 2-2.10. Las escalas son $0,5v$. por cuadro vertical y 1 segundo por cuadro horizontal. Como se

~~estable, por lo tanto, para $R_4 = 20K$, el cambio de estado que.~~

$$\epsilon(t)_f = \frac{10R_4}{1 + 10R_4} = \frac{10 \times 0,02}{1 + 10 \times 0,02} = 0,17$$

el valor estacionario de la tensión de salida es:

$$e_o(t)_f = 1 - 0,17 = 0,83 \text{ v.}$$

el cual también se observa en la figura 2-2.10.

En general, podemos decir que los efectos de una red de compensación retrasadora sobre la respuesta del sistema son:

- a) Disminuye el coeficiente de amortiguamiento, por lo tanto aumenta el sobretiro.

b) La frecuencia de oscilación f_0 disminuye, por lo tanto disminuye la frecuencia de resonancia.

c) Disminuye el ancho de banda del sistema.

d) Se incrementa el tiempo de subida.

e) Disminuye el rango de ganancia del sistema.

2-3. EFECTOS DE LA COMPENSACION SERIE SOBRE LA RESPUESTA A LA FRECUENCIA DEL SISTEMA

En el numeral 1-3.c) hemos visto la respuesta a una excitación sinusoidal por diferentes métodos, hoy veremos como se modifican las curvas encontradas al colocar una red de compensación.

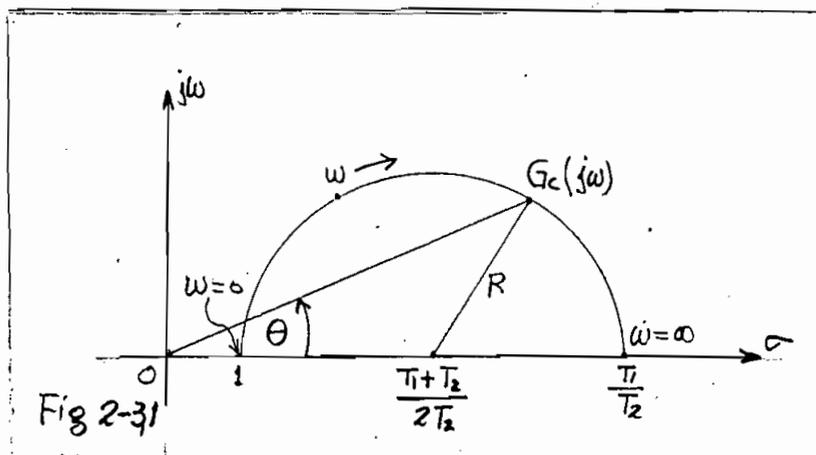
En primer lugar vamos a estudiar la función de transferencia de la red de compensación en el plano complejo.

Hemos dicho en el numeral (2-2.a) que la red de adelanto de fase se cumple cuando $T_1 > T_2$ de la expresión:

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j T_1 \omega}{1 + j T_2 \omega}$$

Se puede demostrar facilmente que el lugar geométrico de $G_c(j\omega)$ al variar ω es un semicírculo de ecuación:

$$\left(x - \frac{T_1 + T_2}{2 T_2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{T_1 - T_2}{2 T_2}\right)^2$$



Consideremos en primer lugar un valor de la ganancia del sistema realimentado tal que sea inestable, ó sea, en el diagrama de Nyquist la curva de $G(j\omega)$ debe encerrar el punto $-1 + j0$. Sea por ejemplo $R_4 = 20K$, siendo la función de transferencia del sistema no-compensado.

$$G(j\omega) = \frac{3410}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)}$$

la cual se lo representa en la fig 2-3.2.

Si es que necesitamos la misma ganancia del sistema ($R_4 = 2,0K$) entonces debemos introducir una red de compensación de adelanto de fase como la dada por $1/T_1 = 2,89$ y $1/T_2 = 36$, la cual se representa en la fig 2-3.2 por medio de un semicírculo.

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$G_1(j\omega) = \frac{3410}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)} \cdot \frac{j\omega + 2,89}{j\omega + 36} \cdot \frac{36}{2,89}$$

de esta manera, para encontrar la nueva $G(j\omega)$ se puede multiplicar en la fig 2-3.2 la magnitud de $G(j\omega)$ y la de $G_c(j\omega)$

y sumar los correspondientes ángulos de fase, entonces nos dará la curva $G_1(j\omega)$.

Como hemos dicho, la curva $G(j\omega)$ nos representa un sistema completamente inestable puesto que encierra el punto $-1 + j0$, pero al introducir la red de compensación el sistema se vuelve estable puesto que la curva $G_1(j\omega)$ no encierra el punto $-1 + j0$. Además observamos que para las mismas frecuencias las magnitudes y ángulos difieren notablemente como por ejemplo para $\omega = 10$, en el sistema no-compensado el ángulo de fase es aproximadamente 180° y una magnitud de 1,28 pero para el sistema compensado se tiene el ángulo de fase de 123° y magnitud 4,6. Si por ejemplo nos interesa un control automático que opere desde 0 a 20 rad/seg (3,2c/s) como ocurre en la mayoría de los sistemas de mando especialmente mecánicos, entonces el sistema no-compensado no nos sirve pero el compensado trabajaría muy adecuadamente para este rango de frecuencias, más aún, el pico de resonancia aparecería cuando $\omega \approx 30$ rad/seg.

De lo anterior podemos decir que una red de compensación de adelanto puede estabilizar a un sistema y además puede variar el rango de frecuencias a valores de magnitud y ángulos de fase adecuados.

Para la comprobación experimental de lo que se acaba de decir solo es posible tomar datos del sistema compensado puesto que el no-compensado en sí es inestable. Similarmen~~te~~ como en casos anteriores debemos grafizar la res

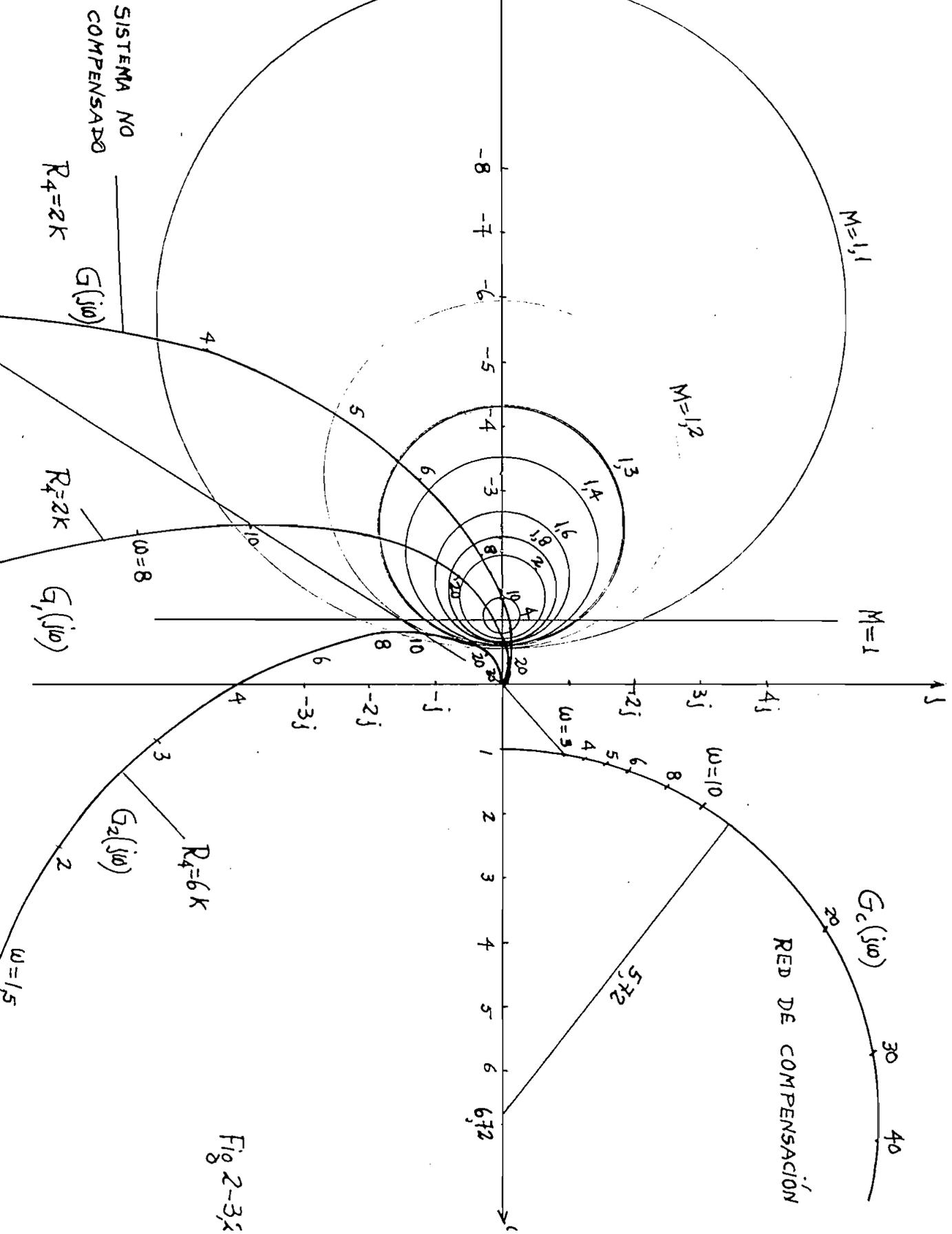


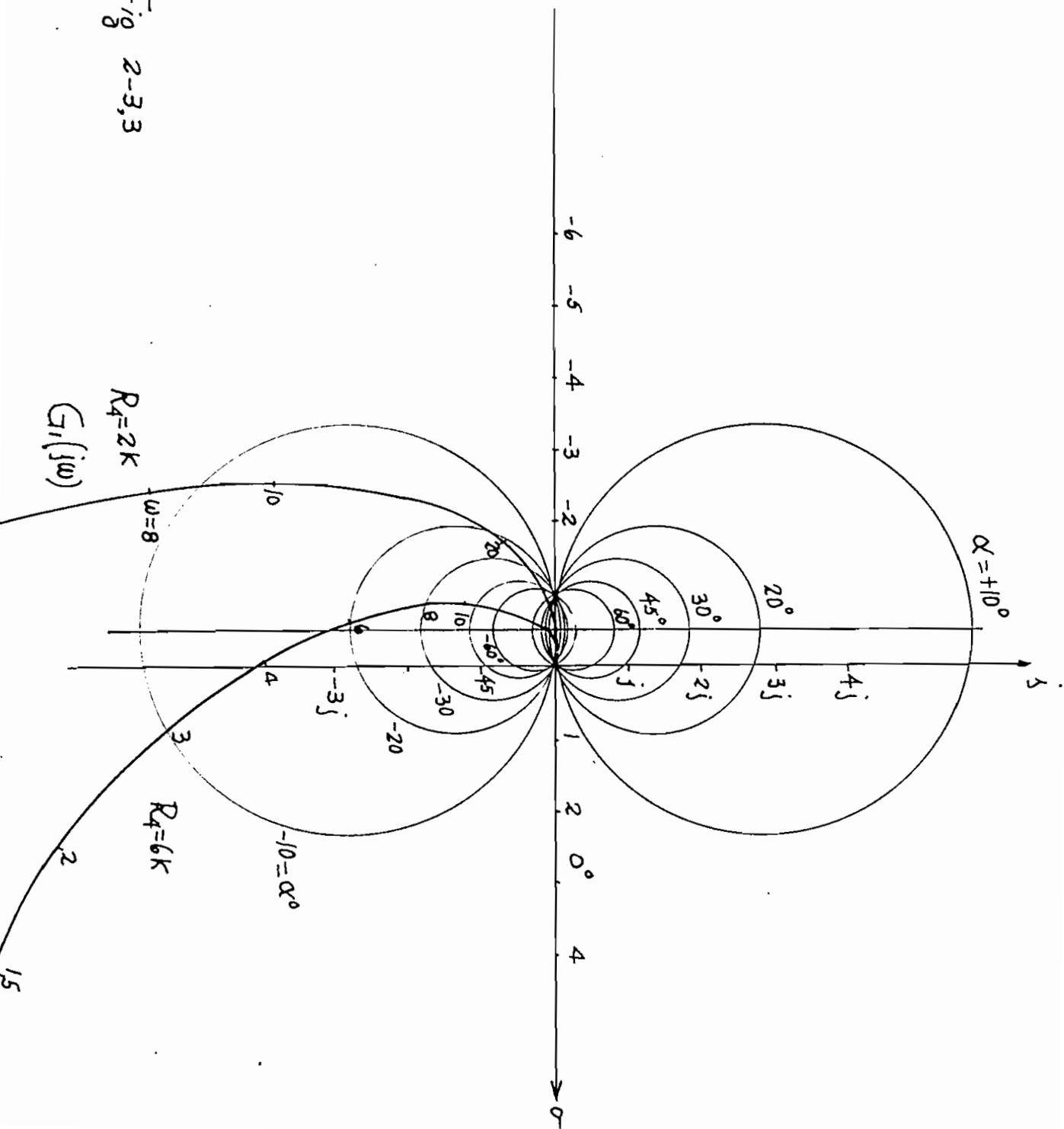
Fig 2-3x

puesta del sistema en lazo cerrado a partir de las curvas de M y α constantes. De la fig 2-3.2 podemos obtener la figura 2-3.4 en donde se dibuja la magnitud y ángulo de fase contra la velocidad angular.

Los datos experimentales tomados en lazo cerrado con la red de compensación del tipo $1/T_1 = 2,89$ y $1/T_2 = 36$ y $R_4 = 2K$ para una excitación sinusoidal unitaria, en estado estable son:

ω	$M(\omega)$	$\alpha(\omega)$
$0,256 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$	1,04	- 1,2°
0,628	1,06	- 1,3°
1,256	1,06	- 2,3°
2,56	1,06	- 3,5°
3,78	1,08	- 3,5°
6,28	1,12	- 8,1°
12,56	1,32	-16,2°
25,6	4,6	-46,2°
26,4	10	-90 °
28	8,6	-154 °
30,4	3,2	-180 °
37,8	1,2	-210 °
62,8	0,2	-240 °

De acuerdo con los datos experimentales el pico de resonancia ocurre cuando $\omega = 26,4$ rad/seg lo cual, en for



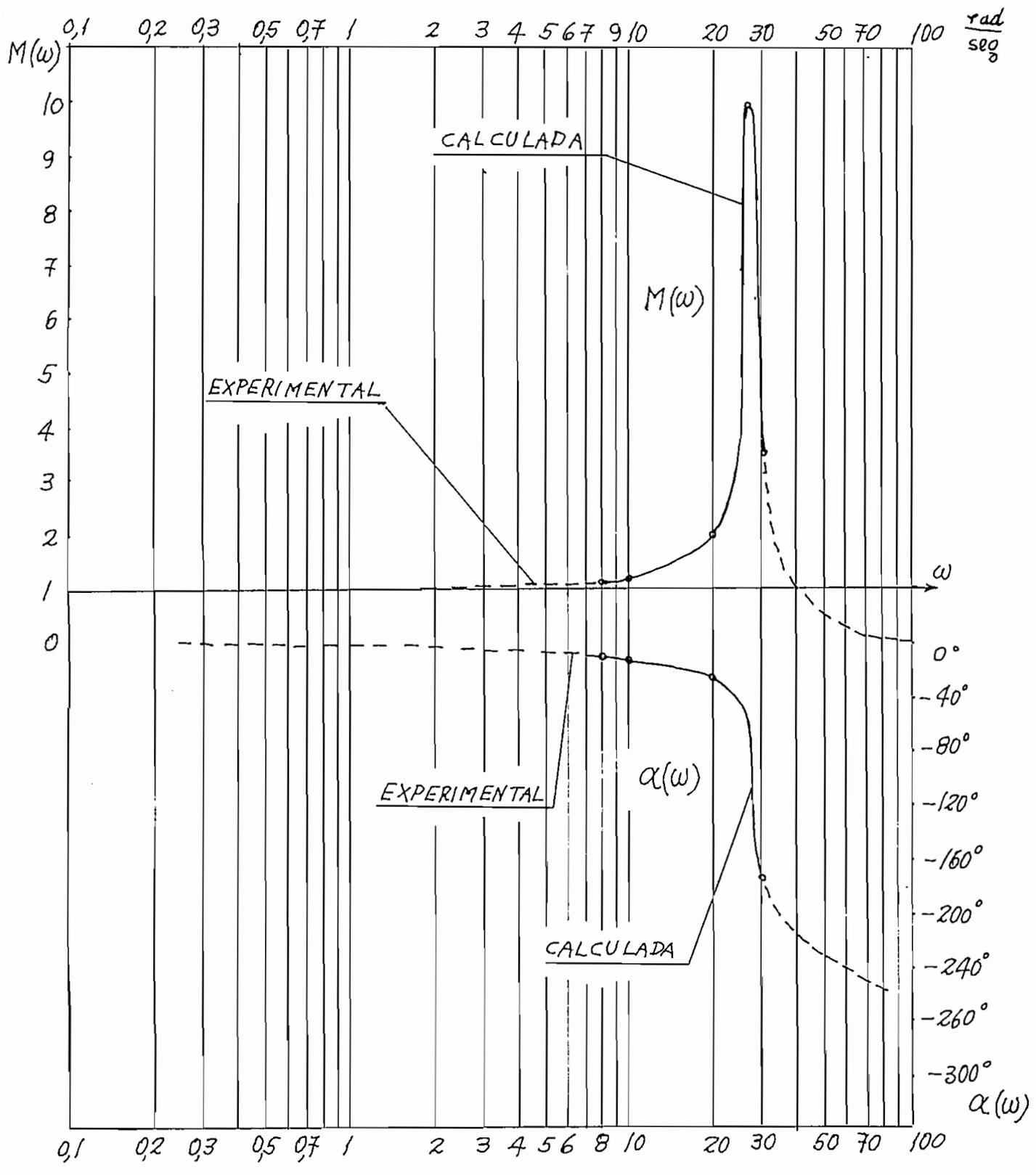


Fig 2-3,4

ma aproximada, también se puede predecir de la fig 2-3.2. La magnitud máxima medida es de 10 voltios lo cual está de acuerdo con los datos teóricos.

En la fig 2-3.4 los puntos indicados con pequeños círculos corresponden a los valores tomados del gráfico 2-3.2, los cuales coinciden con la curva experimental. El pico de resonancia que presenta este sistema es relativamente grande pero ocurre a frecuencias un tanto altas (si es un control automático mecánico).

A veces también es conveniente representar el ángulo de fase de un sistema, para lo cual se ha trazado la fig 2-3.3 en donde se indican los valores de α constantes a la cual se superimpone el gráfico $G_1(j\omega)$. De este gráfico se pasa a la fig 2-3.4 que nos representa la fase correspondiente. Puesto que es muy difícil leer la fase en la figura 2-3.3 para valores de la velocidad angular mayores de 20 rad/seg se tomaran pocos puntos, pero que en realidad concuerden con los experimentales. Cuando se traza el diagrama de Bode y de Nichols la exactitud es mayor.

En la sección que estudiamos la respuesta del sistema en lazo cerrado sin compensación llegamos a la conclusión de que para $R_4 = 6K$ el sistema presentaba un pico de resonancia relativamente grande, ($M = 3,8$), vamos a reducirlo de tal manera que el valor máximo llgue por ejemplo a 1,4, esto se puede conseguir variando la ganancia del sistema o introduciendo una red de compensación. Si la ganan-

cia no debe variar ($R_4 = 6K$) entonces la unica posibilidad es emplear la red compensadora.

Consideremos el caso $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 36$, entonces la función de transferencia directa será:

$$G_2(j\omega) = \frac{1070}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)} \cdot \frac{j\omega + 2,84}{j\omega + 36} \cdot \frac{36}{2,84}$$

y por un procedimiento similar al anterior se puede grafizar $G_2(j\omega)$ en la figura 2-3.2 y 2-3.3, de las cuales se pasa a la figura 2-3.5 en donde se grafiza la magnitud y la fase.

Los datos experimentales obtenidos para este caso son:

ω	$M(\omega)$	$\alpha(\omega)$
1,2 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$	0,95	3,4
1,5	0,95	4,5
2	0,97	7,9
3	0,98	10,2
4	1,01	12,4
6	1,07	21,4
8	1,15	30,4
10	1,21	41,6
16,3	1,4	90
20	1,2	119
30	0,45	180

El sistema no-compensado presenta un pico de resonancia que puede ser desventajoso en la mayoría de los casos,

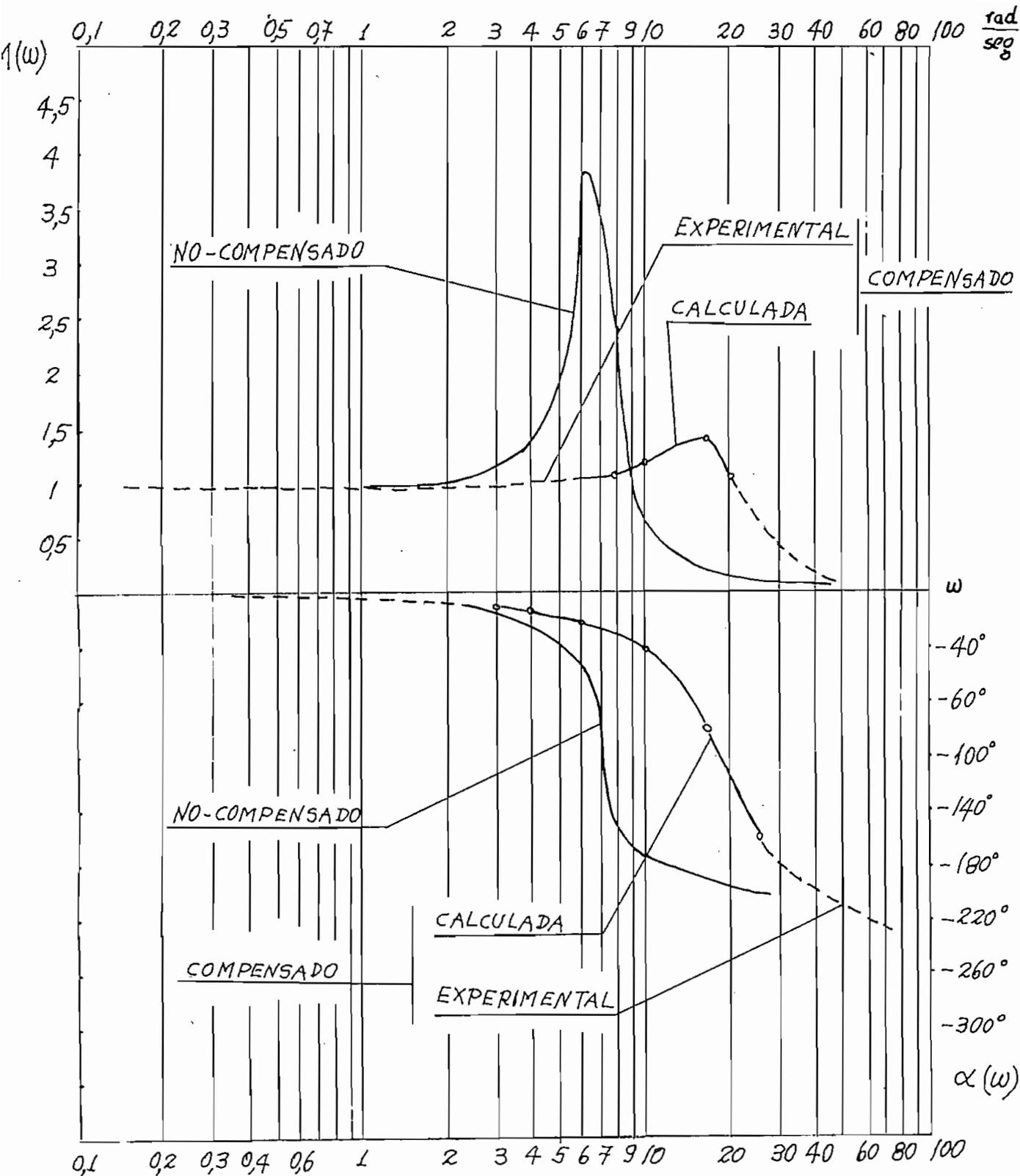


Fig 2-3,5

pero el sistema compensado tiene como valor máximo de la respuesta (a 1 voltio sinusoidal) de 1,4 voltios que es aceptable en controles automáticos. Observamos además un desplazamiento en la frecuencia del valor de resonancia desde 6 rad/seg hasta 16 rad/seg. Similarmente el ángulo de fase debe cambiar tal como se indica en la fig 2-3,5.

Vamos a estudiar las respuestas del sistema por medio de los diagramas de Bode y de Nichols. Como ya se manifestó antes, este método es el más conveniente de analizar puesto que en el diagrama de Bode las magnitudes se pueden sumar.

Consideremos el caso en el que el sistema no-compensado es inestable y sea como en el ejemplo anterior $R_4 = 2K$, entonces hemos visto que al introducir la red de compensación $1/T_1 = 2,89$ y $1/T_2 = 36$ la respuesta del sistema se estabiliza.

En la fig 2-3.6 se dibuja las aproximaciones asintóticas de: sistema no-compensado $G(j\omega)$ y la red de compensación $G_c(j\omega)$, la suma nos dará la aproximación asintótica de la función de transferencia total $G_1(j\omega)$ a la cual se le puede hacer las correcciones debidas. El ángulo de fase se dibuja con los mismo datos que para la curva 2-3.2.

Puesto que el sistema no-compensado ($R_4 = 2K$) inherentemente es inestable, no se puede hablar de margen de fase o de ganancia puesto que estos términos más bien sirven para "medir" la estabilidad de un sistema. En cambio, en el

sistema compensado si es posible medir estas cantidades, así en la fig 2-3.6 se tiene que el margen de fase es de 6° y el de ganancia es de 1 db, lógicamente estos valores son muy pequeños y podemos decir que el sistema tiene muy poca estabilidad tal que si disminuimos R_4 en una cantidad pequeña el sistema se hará inestable, y efectivamente hemos visto que presenta un pico de resonancia sumamente grande.

Del diagrama de Bode se pasa tanto la magnitud como el ángulo de fase a la carta de Nichols de la cual, a su vez nos es posible leer la respuesta del sistema en lazo cerrado.

En la figura 2-3.7 se representa la tabla de Nichols en donde se dibuja la función de transferencia en lazo abierto y se puede leer los valores de M en decibeles y de α del sistema en lazo cerrado las cuales se expresan en la fig 2-3.8. Este gráfico es de mayor exactitud que los anteriores por lo tanto podemos apreciar el error que se comete entre la curva ideal y la experimental. En primer lugar se observa que para frecuencias menores de 10 radianes por segundo el error que se comete entre la expresión teórica y la experimental es más o menos 0,4 db, o sea, el error en voltaje es aproximadamente 0,08 voltios que es una cantidad sumamente pequeña debida posiblemente a corrimientos de tensión en los amplificadores operacionales. Desde 20 radianes por segundo en adelante los datos experimentales y los teóricos concuerdan con mayor exactitud. Las lecturas experimentales

para frecuencias más altas (40 en adelante) resultan muy difíciles de leerlas con precisión en el osciloscopio debido a la rapidez de movimiento de la imagen y a su pequeña amplitud especialmente para las lecturas del ángulo de fase. Pero de todas maneras los resultados previstos por consideraciones teóricas son comprobados experimentalmente con una gran exactitud.

En el ejemplo anterior hemos visto el efecto que tiene una red de compensación adelantadora sobre la estabilidad del sistema, consideremos como se modifica la respuesta del sistema por el método de Bode y de Nichols, lógicamente se llegará al mismo resultado obtenido por medio de los diagramas de Nyquist pero por métodos distintos aunque, en realidad, la teoría fundamental es la misma. Sea $R_4 = 6K$ y $1/T_1 = 2,84$; $1/T_2 = 36$ con lo cual el correspondiente diagrama se indica en la fig 2-3.9, del cual se pasa a la tabla de Nichols (fig 2-3.7) y de aquí a la fig 2-3.10, en la cual también se dibujó la respuesta del sistema no-compensado.

El valor necesario que alcanza la magnitud $M(\omega)$ del sistema no-compensado es de 11,5 db cuando la velocidad angular llega a 6,3 rad/seg, mientras que cuando se usa la red de compensación la magnitud de la salida se reduce a 2,9 db para una velocidad angular de 16,5 rad/seg. Como ya se manifestó antes, esta variación de la respuesta constituye una ventaja de funcionamiento del sistema para el mismo valor de la ganancia.

Hasta aquí hemos analizado la variación de la respues

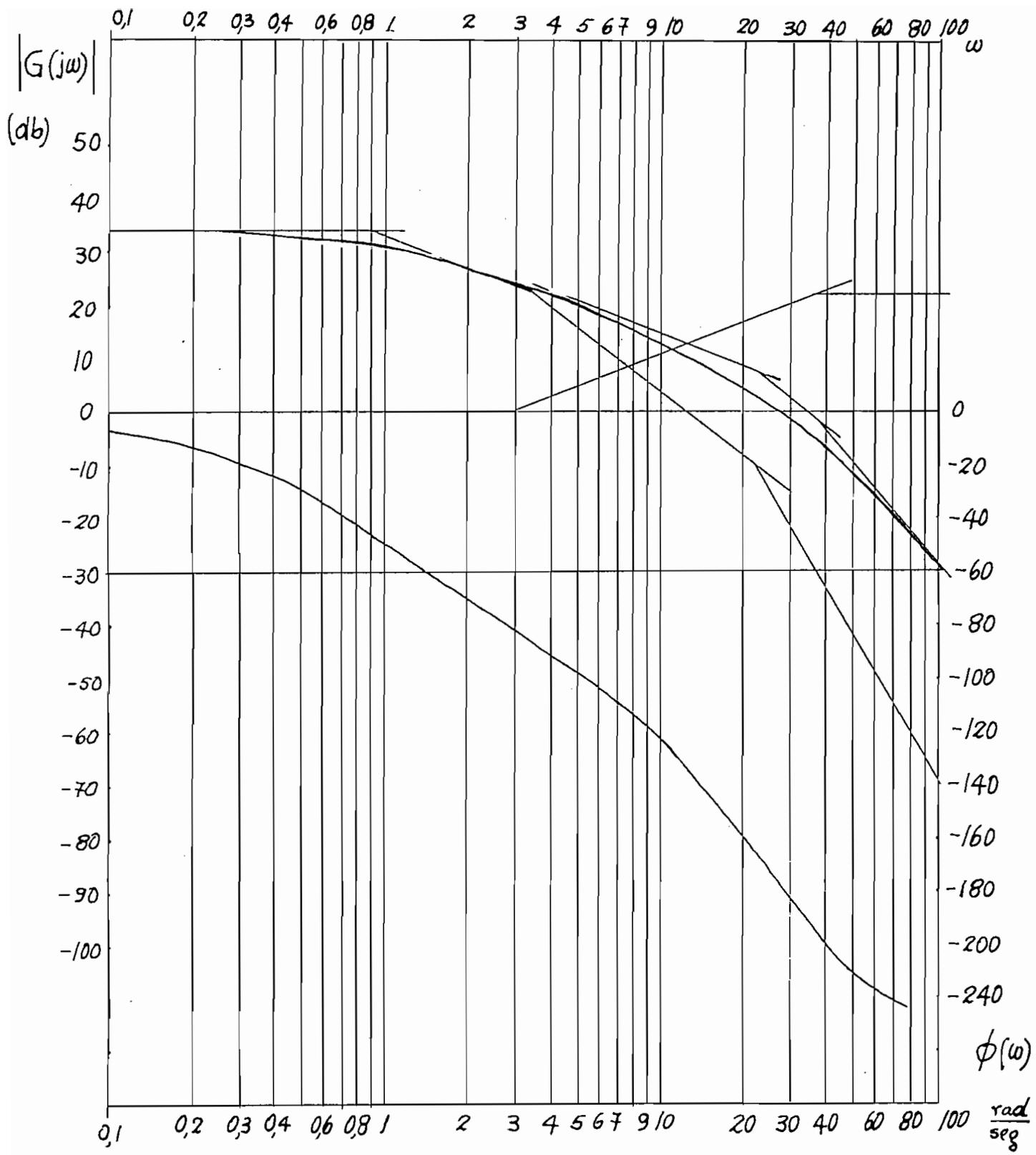


Fig 2-3,6

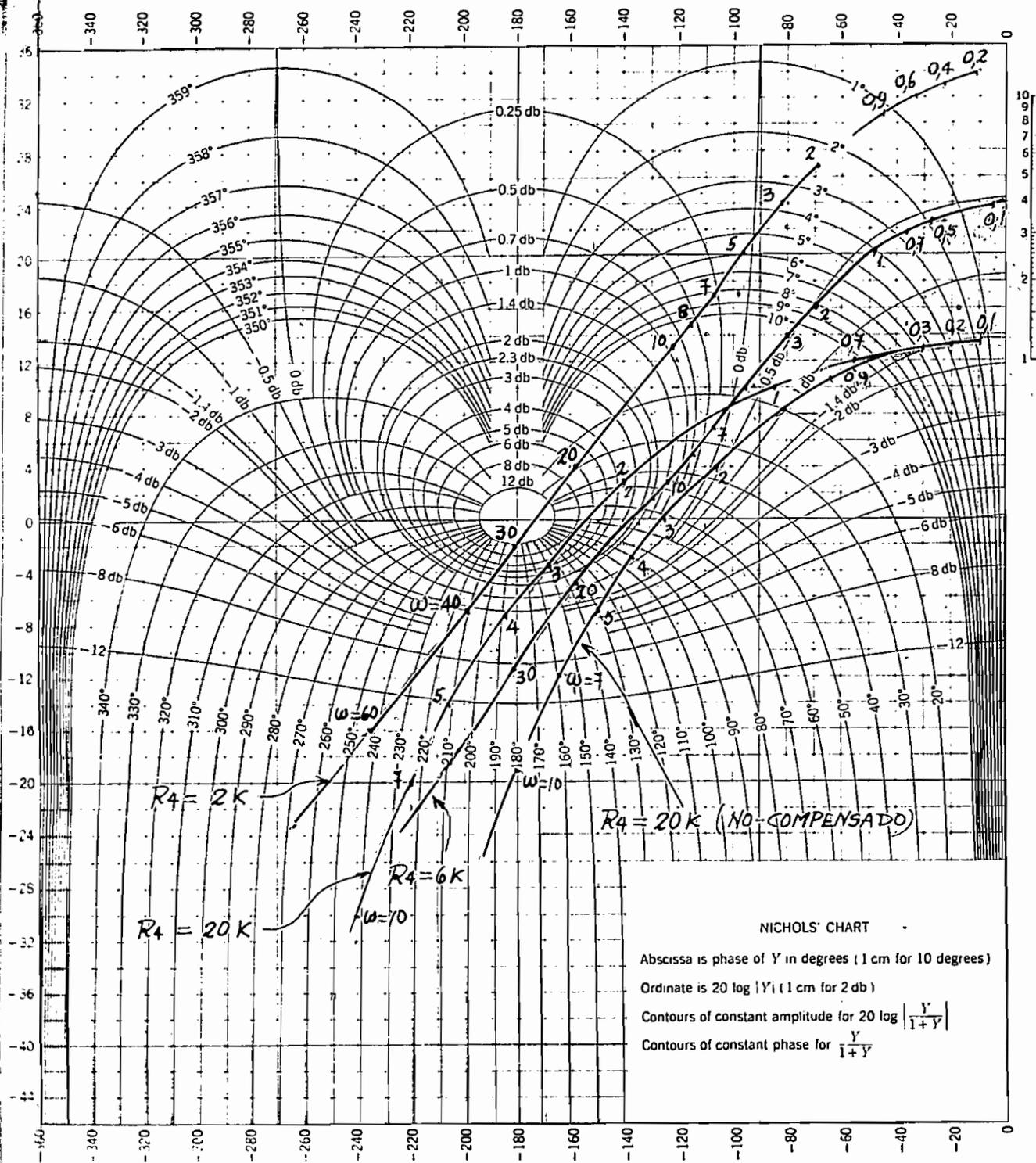


FIG. 15-13c. The Nichols chart. (Twofold reduction of Chart 3 at the back of the book; 1 cm for 20 degrees and 1 db.)

ta del sistema cuando se tiene una red de adelanto, consideremos ahora una red de retraso. Por el método del lugar de las raíces se deduce que el sistema "pierde" estabilidad cuando la red de compensación es de retraso, vamos a ver cómo se interpreta este fenómeno por medio del análisis de frecuencias.

En la fig 2-3.1 se indicó el lugar geométrico de $G_c(j\omega)$ (al variar ω) como una semicircunferencia que solo contiene valores positivos en la dirección j (y también en el eje real) cuando G_c es adelantadora de fase, lógicamente, si G_c es retrasadora el semicírculo será el complemento del dibujado con iguales valores del radio y centro.

Consideremos la red $1/T_1 = 36$ y $1/T_2 = 2,84$ con una ganancia dada por $R_4 = 20K$. La respuesta del sistema podemos obtenerla por los métodos de Nyquist y de Bode, puesto que ya conocemos la teoría fundamental solo nos interesa analizar por el método de Bode que nos conducirá a la respuesta de una manera fácil y exacta.

La función de transferencia directa para estas condiciones es:

$$G(j\omega) = \frac{25,5 (j\omega + 36)}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 2,84)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)}$$

de la cual se puede encontrar el diagrama de Bode (fig 2-3.11) y por medio de la tabla de Nichols (fig 2-3.7) se pasa a la fig 2-3.12.

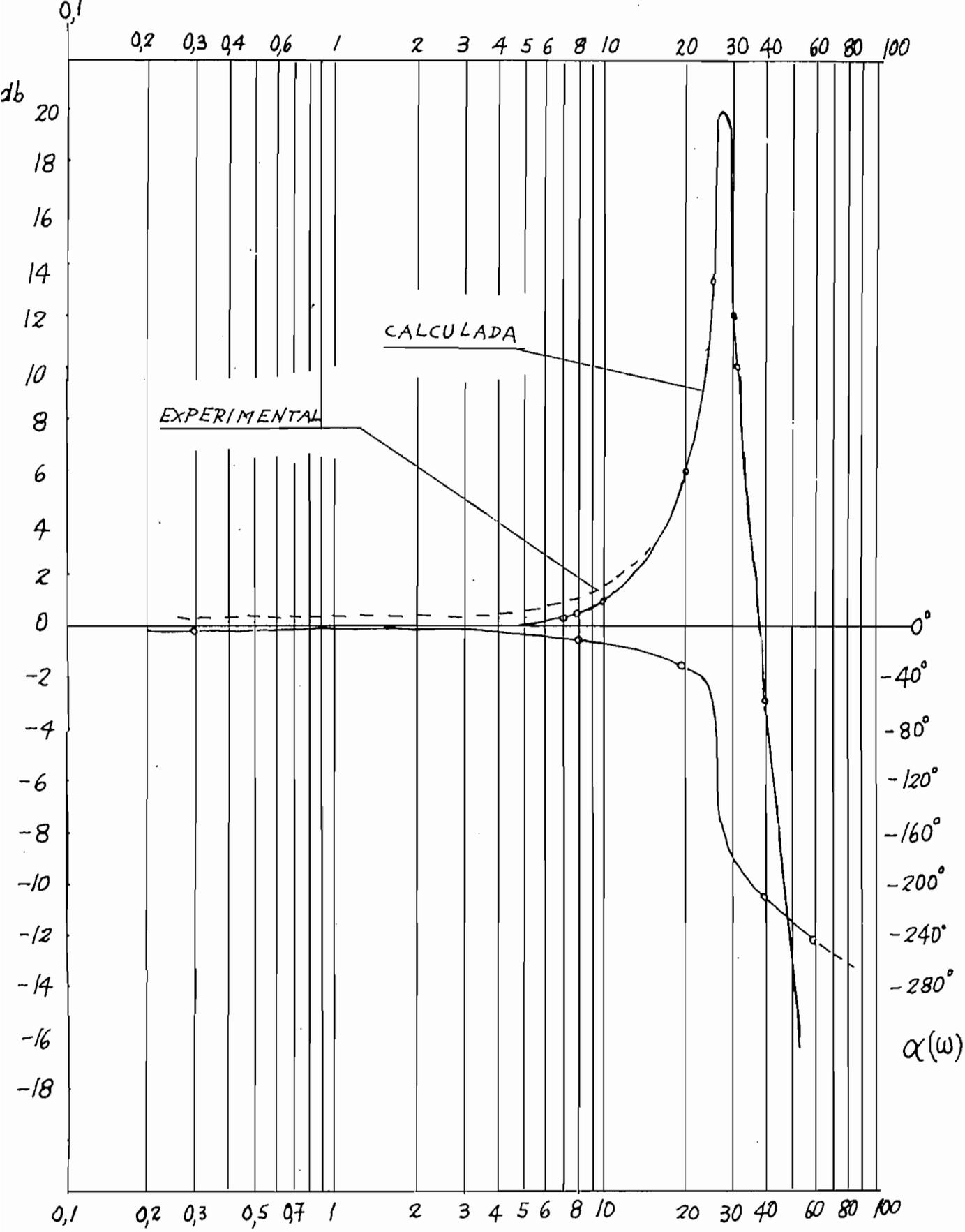


Fig. 2.50

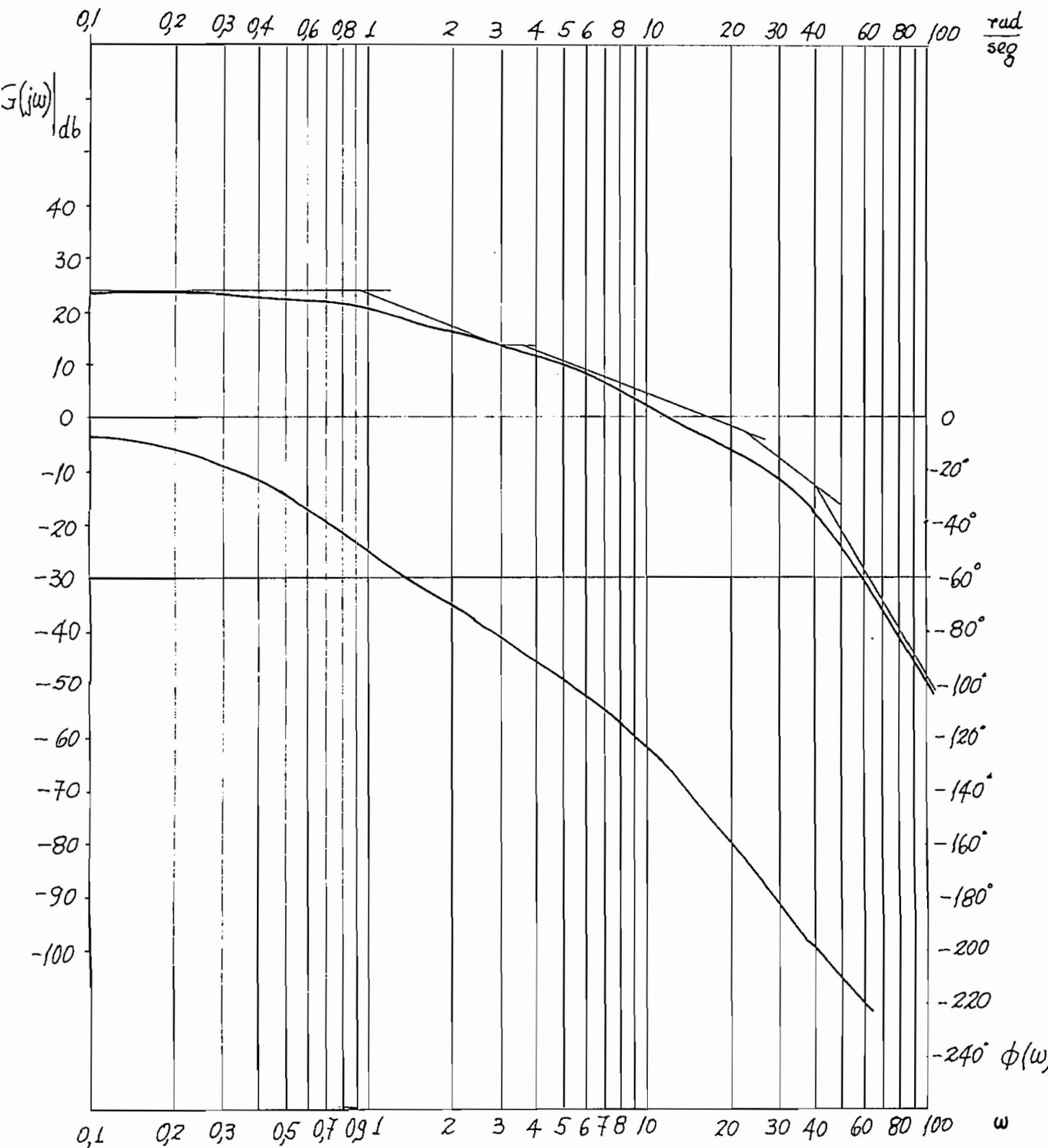


Fig 2-3,9

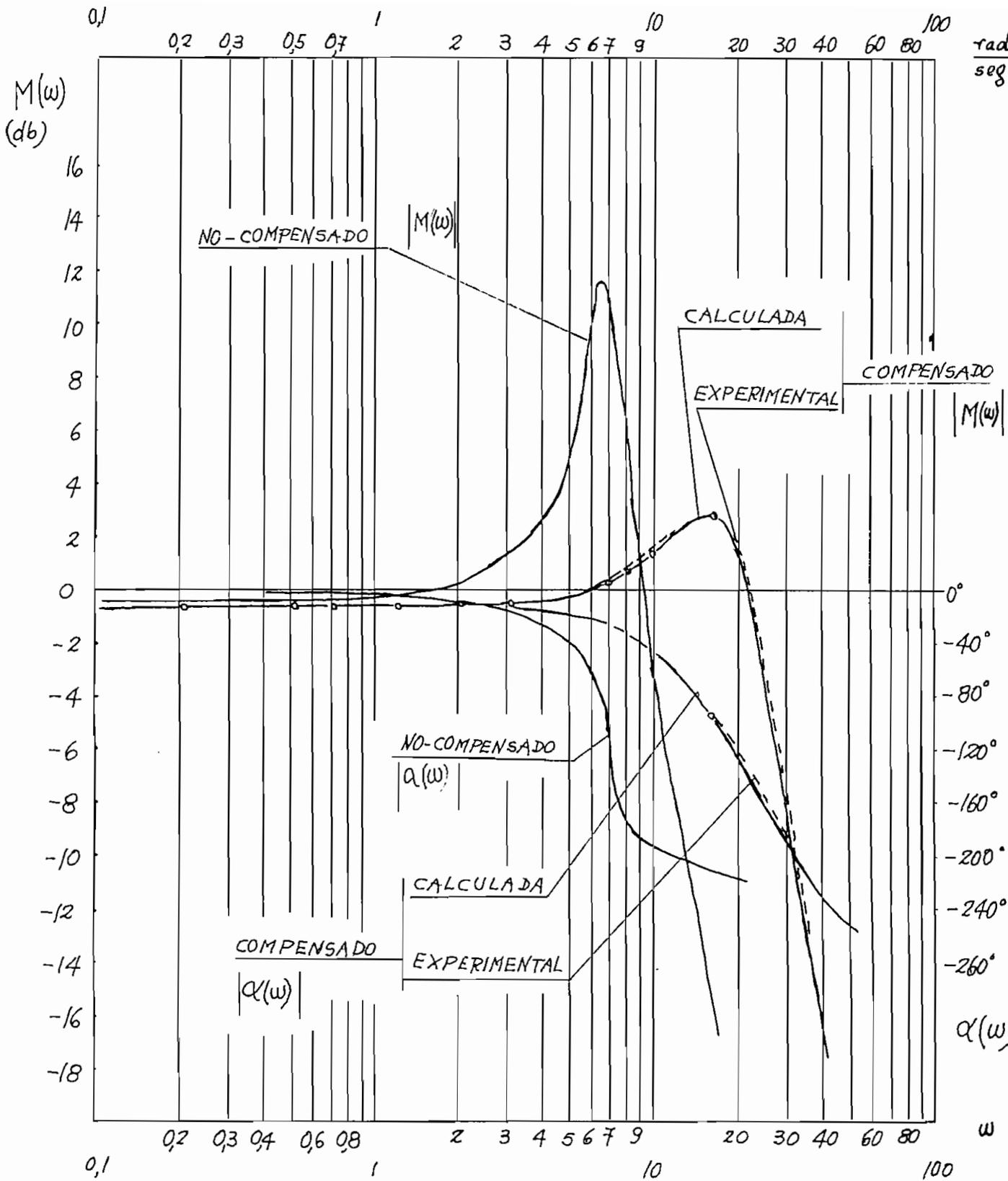


Fig 2-3,10

Para la comprobación experimental en el laboratorio se tomaron los siguientes datos (después de reducir unidades) para una señal sinusoidal unitaria de entrada:

ω	$M(\omega)$	$\alpha(\omega)$
0,628 $\frac{r}{s}$	0,96	12,4°
1,256	1,14	27
1,890	1,55	49
2,2	2	70
2,4	2,25	90
2,52	2,3	100
2,64	2,2	117
2,76	2	130
3,02	1,5	160
3,34	1	180
5,02	0,244	214
6,28	0,12	315

y se los representó conjuntamente con el sistema no-compensado en la fig 2-3.12. Se observa que la red compensadora de retraso tiene efecto inverso al que produce la de adelanto puesto que aumenta el pico de resonancia y disminuye la frecuencia o sea que el ancho de banda del sistema se reduce. Este efecto puede resultar perjudicial por lo que la red adelantadora se usa de preferencia para cumplir con los requerimientos de magnitud y frecuencia. Más aún, inherentemente es

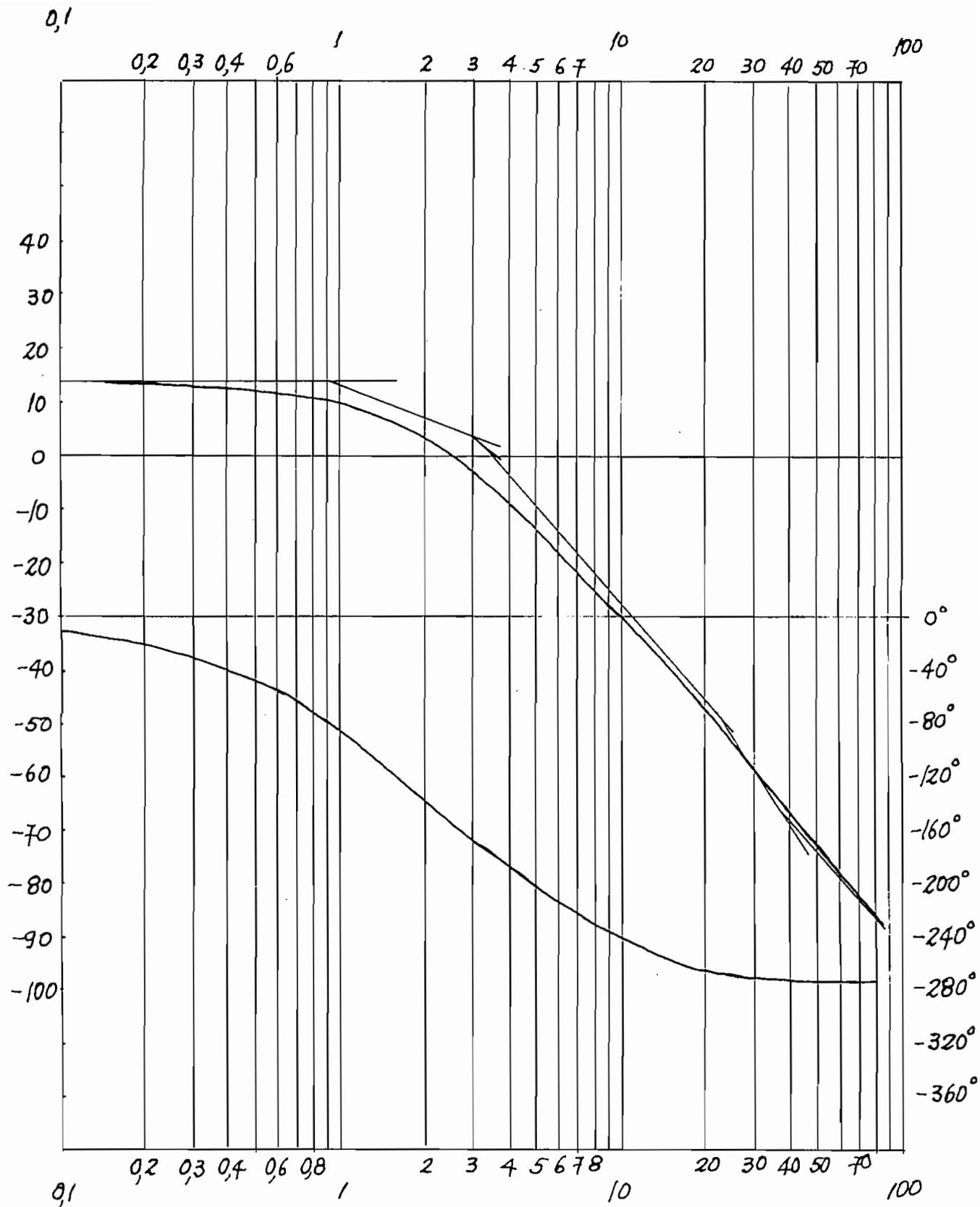


Fig. 2-3 11

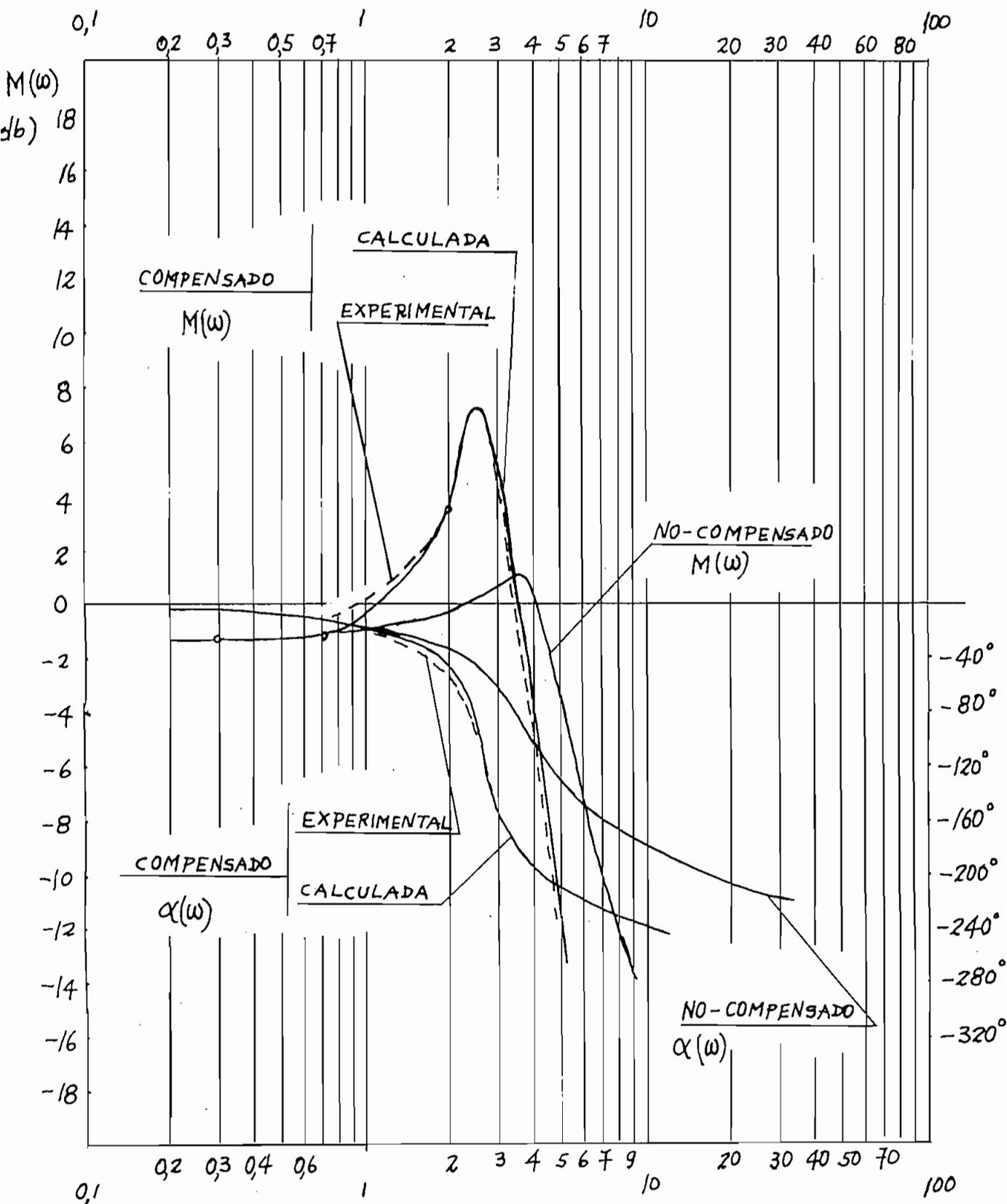


Fig 2-3,12

te sistema presenta menos estabilidad puesto que se reducen considerablemente los márgenes de fase y de ganancia, desde 53° del no-compensado hasta 27° del compensado, y desde 19 db. hasta 6 db. respectivamente.

2-4. CONCLUSIONES

Para estudiar la variación de la respuesta del sistema cuando se usa compensación el procedimiento más efectivo es por medio del lugar de las raíces puesto que es el método de mayor generalidad. Se puede observar como varían los lugares de las raíces cuando se aplica una compensación al sistema (procedimiento analítico) y si se desea que el estado transitorio del sistema presente determinadas características, entonces se deben elegir los polos y los ceros de la red compensadora tal que la curva del lugar de las raíces pase por una determinada región del plano s . Si se conoce perfectamente los procedimientos analíticos entonces se puede encontrar los polos y los ceros deseados, luego del cual se debe encontrar la red física que cumpla con las condiciones impuestas. Este último proceso requiere del conocimiento de algunas técnicas tratadas en los libros de síntesis de redes.

El método de Nyquist, como ya se dijo antes, lo considero como fundamental por su parte teórica aunque en realidad ofrece pocas ventajas por la cantidad de computaciones, por lo tanto solo puede ser útil en procedimientos analíticos mas no para diseño. El método de Bode y de Nichols reemplaza

con mucha eficacia al de Nyquist en lo que respecta a consideraciones de diseño puesto que los resultados obtenidos se deducen facilment, esto hace posible estudiar rapidamente la variación que sufre la respuesta del sistema cuando se hace variar las posiciones de los polos y de los ceros de la red de compensación. Así por ejemplo si se desea que el sistema cumpla la condición de que el pico de resonancia sea menor de 2,3 db se debe introducir una red tal que en la tabla de Nichols pase la curva de $G(j\omega)$ por fuera de la elipse correspondiente a 2,3 db; también se puede conseguir el mismo objetivo si tenemos libertad de variar la ganancia, lo que significa un desplazamiento de la curva de $G(j\omega)$ en la dirección del eje de magnitudes hasta un valor tal que a lo más sea tangente a la elipse de 2,3 db.

El procedimiento que se sigue en el diagrama de Nyquist para un fin similar al anterior es de mayor dificultad puesto que requiere una serie de pruebas y tanteos de la posición correcta de la circunferencia de M constante, logicamente existen reglas que ayudan a encontrar el círculo correspondiente a la magnitud M máxima permisible y que sea tangente a $G(j\omega)$ (método de Brown y Campbell).

En todos los gráficos desarrollados he colocado tanto la magnitud como la fase contra la velocidad angular y a primera impresión parecería que las dos cantidades son independientes una de otra, pero no es correcta esta suposición. *Puesto que es relativamente fácil calcular la magnitud y la*

fase de un sistema si se conoce la función de transferencia, analíticamente no hay dificultad de usar los dos diagramas; pero sí se trata de obtener la expresión matemática de un sistema solo por medio de datos experimentales pueden aparecer dificultades. En lo concerniente a la medida de la magnitud de la salida los procedimientos del laboratorio son sencillos y muy eficaces, pero para medir defasamientos se requiere trabajar a frecuencias relativamente bajas para obtener resultados aceptables, para frecuencias mayores es muy difícil adquirir datos confiables, felizmente, para estos casos H.W. Bode encontró la relación que existe entre la fase y la magnitud, por lo tanto solo sería necesario encontrar o la una o la otra (preferiblemente la magnitud) para que las dos cantidades queden completamente definidas. Esto se aplica con la condición de que el sistema sea de "fase mínima", o sea para aquellos sistemas en donde la fase es la mínima posible para el número de elementos almacenadores de energía. Bode desarrolló al respecto una serie de teoremas que analizan detalladamente la relación entre fase y magnitud para redes eléctricas, pero por dualidad se puede aplicar a otros sistemas con las restricciones necesarias.

3. ESTUDIO DE LA COMPENSACION PARALELA EN LA ESTABILIDAD Y EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA

En el numeral anterior estudiamos el efecto de la compensación en serie, hoy nos corresponde analizar el sistema cuando la red de compensación es la red de realimentación. El circuito usado para este caso se ilustra en la fig 3-1.1.

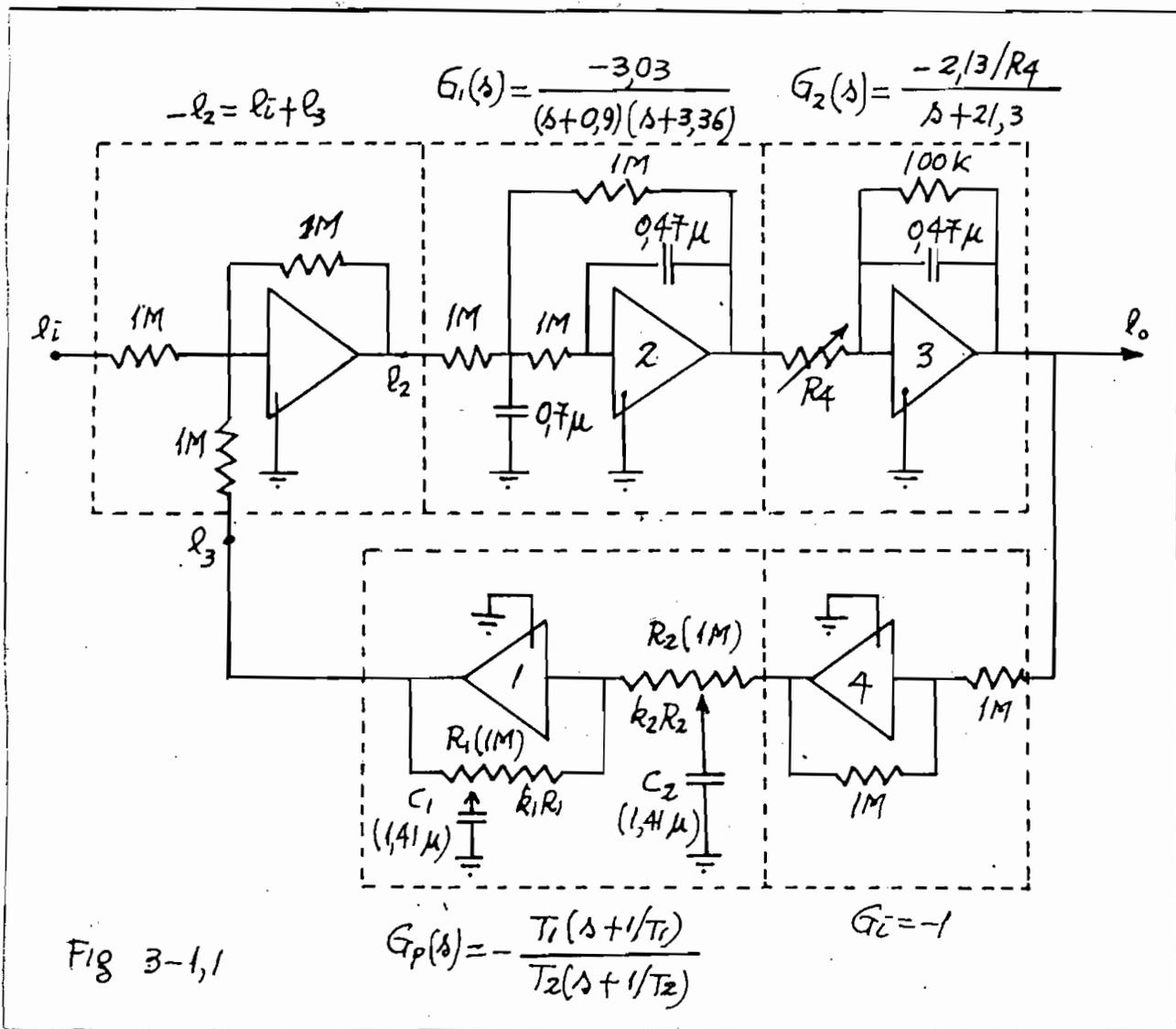


Fig 3-1,1

La función de transferencia se lo puede calcular fácilmente, en efecto, el sistema se lo puede representar por el llamado diagrama de bloques (fig 3-1.2) de donde se evalúa $E_o(s)/E_i(s)$.

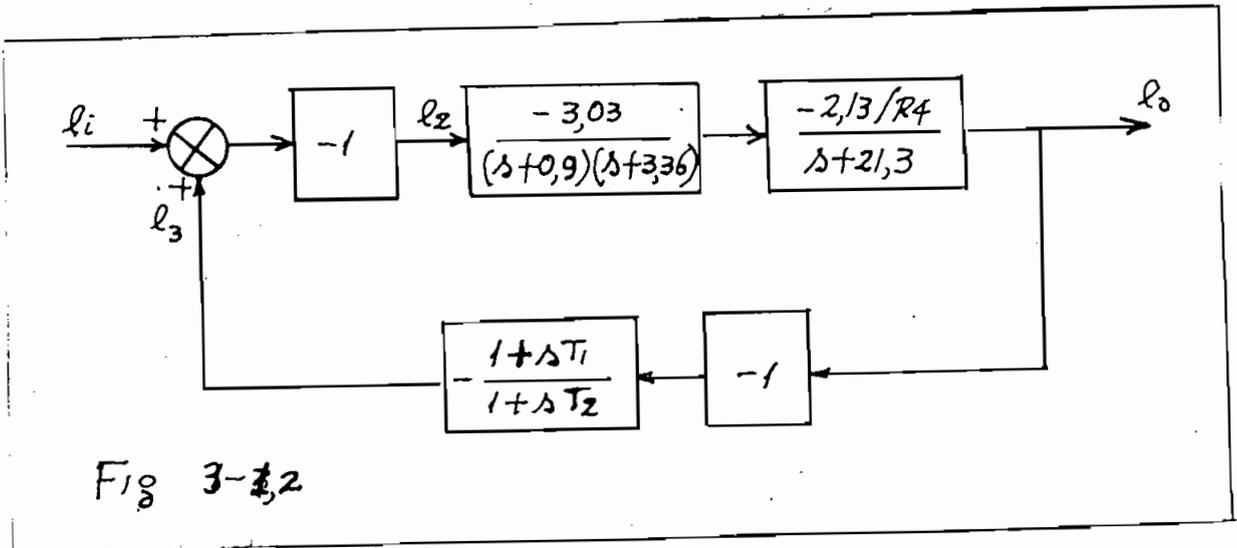


Fig 3-1,2

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(-1) \left[\frac{-3,03}{(s+0,9)(s+3,36)} \right] \left[\frac{-2,13/R4}{s+2,1,3} \right]}{1 - (-1) \left[\frac{-3,03}{(s+0,9)(s+3,36)} \right] \left[\frac{-2,13/R4}{s+2,1,3} \right] (-1) \left[-\frac{T_1(s+1/T_1)}{T_2(s+1/T_2)} \right]}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-6,42/R4}{(s+0,9)(s+3,36)(s+2,1,3)} \quad (3-1,1)$$

$$1 + \frac{6,42/R4}{(s+0,9)(s+3,36)(s+2,1,3)} \frac{T_1(s+1/T_1)}{T_2(s+1/T_2)}$$

con lo que se ve que el sistema tiene realimentación negativa.

cas de T_1 y T_2 .

Una red de adelanto de fase lo da la combinación $1/T_1 = 4,43$ y $1/T_2 = 36$, con lo cual la ecuación 3-1.2 es:

$$0 = 1 + \frac{K(s+4,43)}{(s+0,9)(s+3,36)(s+21,3)(s+36)} \quad (3-1.3)$$

en donde:

$$K = \frac{6,42 \times 36}{4,43} \frac{1}{R4} = \frac{52,2}{R4}$$

Como en el caso de la compensación en serie, primero estudiaremos la variación de la respuesta por medio del lugar de las raíces y luego por los métodos de análisis de frecuencia.

La red de compensación usada es la misma que para el caso anterior.

3-1) ESTUDIO DE LA COMPENSACION PARALELA POR EL METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

Como hemos dicho en el numeral 2-2.a), la red de compensación presenta un término diferenciador, por lo tanto amplifica todo ruido que aparezca en el circuito, pero, por su posición indicada en la fig 3-1.1 el ruido externo es filtrado por la capacidad a tierra de la red $G_1(s)$.

La ecuación característica que debemos analizar es:

$$0 = 1 + \frac{6,42/R_4}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)} \cdot \frac{T_1 (s + 1/T_1)}{T_2 (s + 1/T_2)} \quad (3-1.2)$$

debemos considerar en esta ecuación las combinaciones típicas de T_1 y T_2 .

Una red de adelanto de fase lo da la combinación $1/T_1 = 4,43$ y $1/T_2 = 36$, con lo cual la ecuación 3-1.2 es:

$$0 = 1 + \frac{K (s + 4,43)}{(s + 0,9)(s + 3,36)(s + 21,3)(s + 36)} \quad (3-1.3)$$

en donde:
$$K = \frac{6,42 \times 36}{4,43} \cdot \frac{1}{R_4} = \frac{52,2}{R_4}$$

y el correspondiente lugar de las raíces será el mismo que se indica en la fig 2-2.1 de la compensación en serie y por lo tanto las consideraciones de estabilidad que se hicieron en la sección 2-2.a) serán idénticas para este caso.

De lo anterior se tendría el impulso de decir que no importa en donde se coloque la compensación, pero no sucede así puesto que las características de la respuesta del sistema si varían notablemente.

Sea por ejemplo la red de compensación $1/T_1 = 4,43$ y $1/T_2 = 36$, entonces la función de transferencia de la entrada a la salida es:

$$W(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(-6,42/R_4)(s+36)}{(s+0,9)(s+3,36)(s+21,3)(s+36) + \frac{52,2}{R_4}(s+4,43)} \quad (3-1.4)$$

Para el caso de la compensación serie hemostomado $R_4 = 4,4K$ y la posición de las raíces (ecuación 2-2.7) son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -4,46 \\ s_2 &= -46,5 \\ s_3 &= -5,3 - j15,25 \\ s_4 &= -5,3 + j15,25 \end{aligned}$$

Al aplicar una función escalón unitaria a la entrada, entonces la transformada de la salida es:

$$-E_o(s) = \frac{1462(s+36)}{s(s+4,46)(s+46,5)(s+5,3+j15,25)(s+5,3-j15,25)}$$

de donde, por el procedimiento conocido se tiene:

$$-E_o(s) = \frac{0,96}{s} - \frac{1,05}{s + 4,46} - \frac{0,004}{s + 46,5} + \frac{0,150 \angle 286^\circ}{s + 5,3 + j15,25} + \frac{0,150 \angle -286^\circ}{s + 5,5 - j15,25}$$

y la función del tiempo despreciando el tercer término es:

$$-l_o(t) = 0,96 - 1,05 e^{-4,46t} + 0,3 e^{-5,3t} \cdot \text{sn}(15,25t - 3,41) \quad (3-1.5)$$

en donde el defasamiento es $90 - 286 = -196^\circ = -3,41 \text{ rad.}$

En la ecuación 3-1.5 observamos que el coeficiente del segundo término de la derecha es relativamente grande por lo tanto la respuesta del sistema seguirá a la curva experimental más que a su propia oscilación tal como se muestra en la curva (6) de la figura 3-1.3, en donde también se indica la respuesta del sistema no-compensado (1) y la del sistema compensado serie (2) para $R_4 = 4,4K.$ y la misma red compensadora.

Se observa claramente la diferencia de la respuesta cuando la red de compensación se coloca o en serie o en paralelo, esto se debe, lógicamente, a la posición del "cero" de la función de transferencia en lazo cerrado, puesto que en el caso serie el "cero" de $W(s)$ lo forma el cero de la red compensadora mientras en el caso paralelo el "cero" de $W(s)$ es el "polo" de la red.

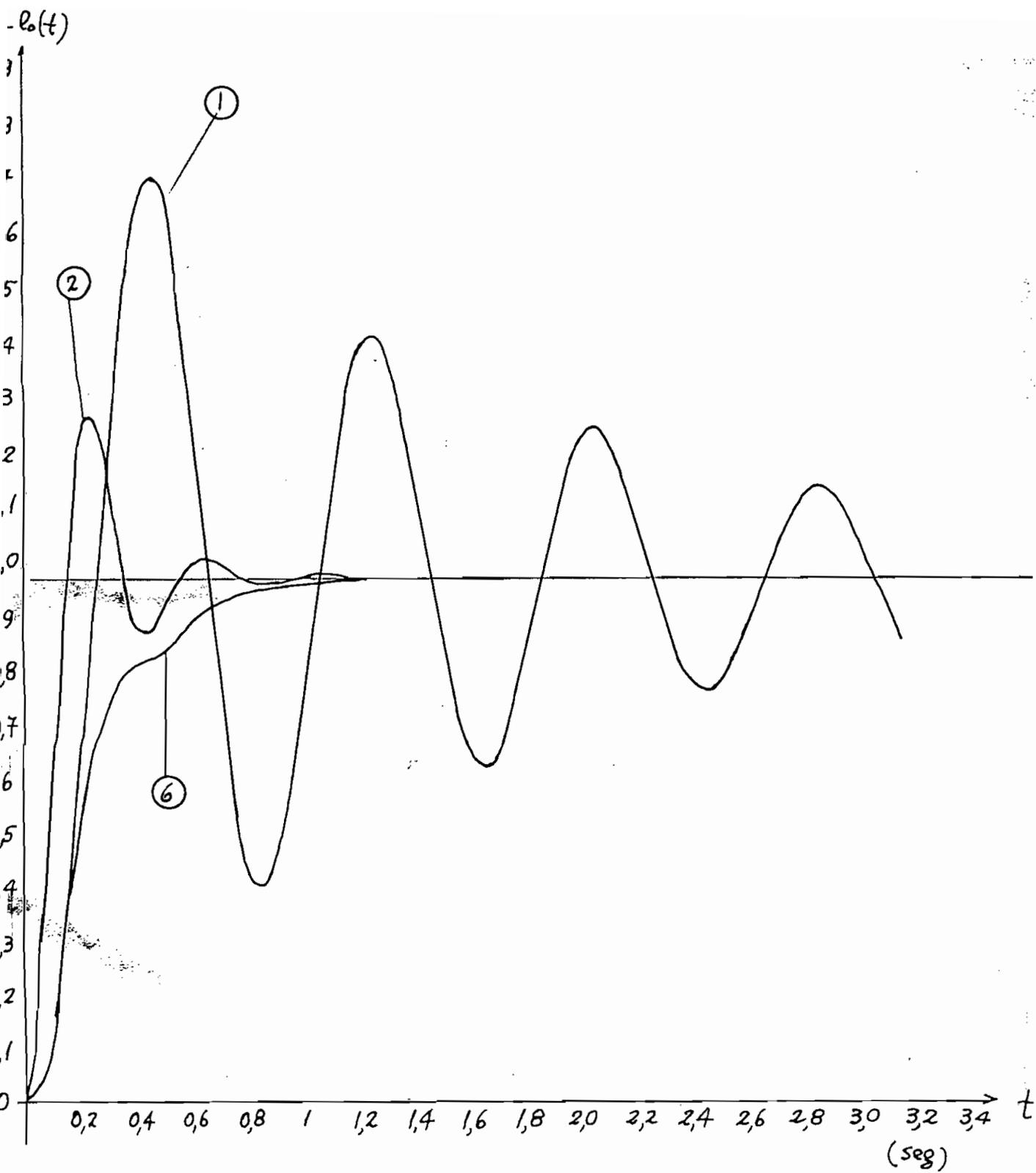


Fig 3-1,3

Consideremos la red $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 36$, entonces el correspondiente lugar de las raíces se halla representado en la figura 2-2.3 curva (3) de donde las raíces para $R_4 = 4,4K$ (ec. 2-2.9) son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -2,76 \\ s_2 &= -49,8 \\ s_3 &= -4,50 - j19,5 \\ s_4 &= -4,50 + j19,5 \end{aligned}$$

de donde la función del tiempo es:

$$\begin{aligned} -\ell_0(t) &= 0,96 - 0,97 e^{-2,76t} - 0,004 e^{-49,8t} + 0,144 e^{-4,5t} \\ &\quad \cdot \text{sn}(19,5t - 3,34) \end{aligned} \tag{3-1.6}$$

La curva (7) de la figura 3-1.4 representa la ecuación 3-1.6, la (3) corresponde a la compensación serie con la misma red y la (6) es la expresada en la fig. 3-1.3.

En los dos ejemplos anteriores hemos visto que la tendencia oscilatoria del sistema es muy pequeña, esto se debe a que el "cero" del sistema es muy lejano con respecto a la posición de los polos complejos. Si acercamos el "cero" al eje imaginario, lógicamente aumentará la tendencia oscilatoria. Para comprobar este hecho consideremos el caso de tener la red de compensación $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 16$, el correspondiente lugar de las raíces representa la curva 8 de la figura 3-1.5 en donde la 1 es el sistema no-compensado.

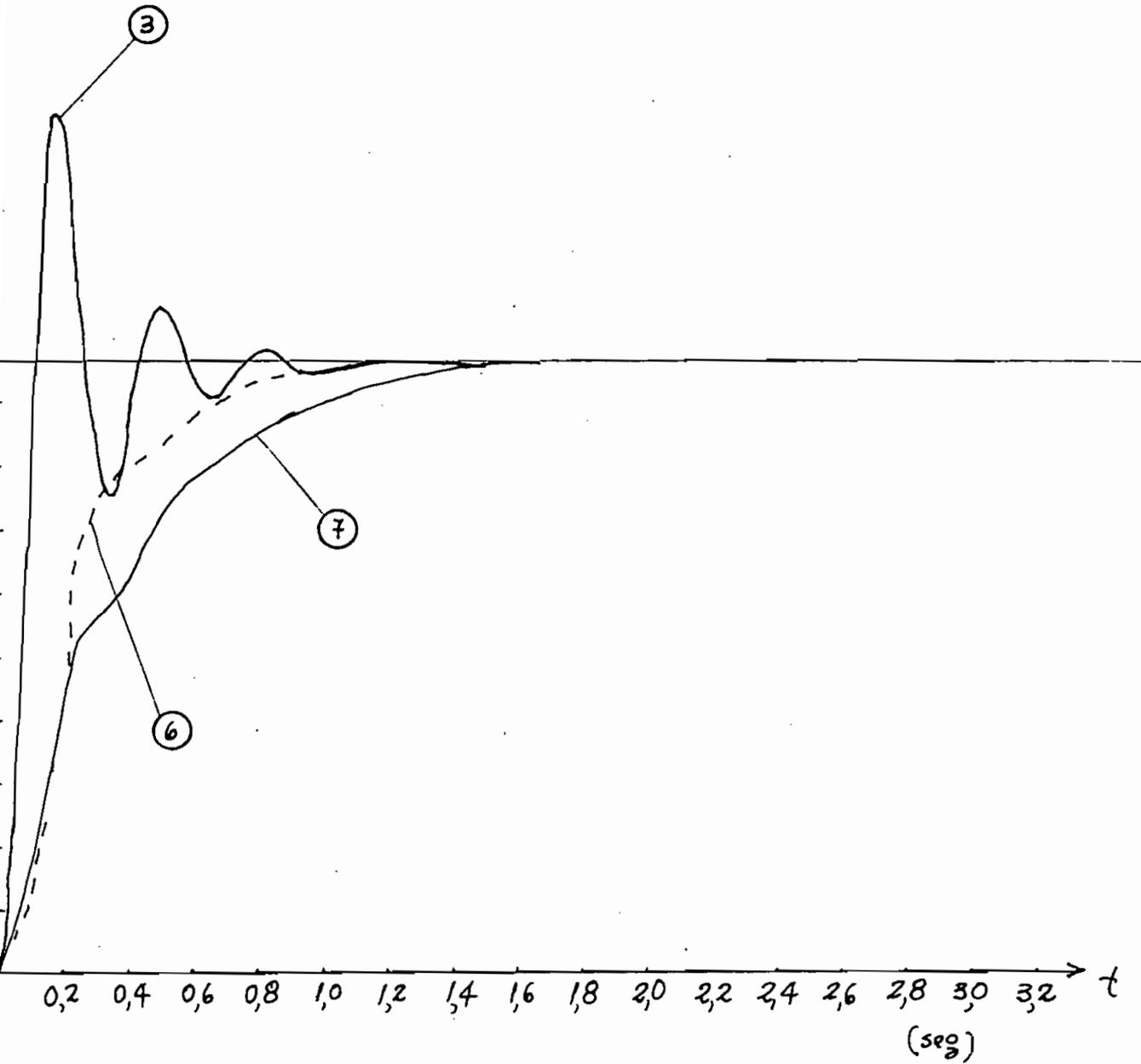


Fig 3-1,4

Por un proceso similar a los anteriores se encuentra que la respuesta en función del tiempo para $R_4 = 4,4K$ es:

$$-e_0(t) = 0,96 - 0,855 e^{-2,76t} - 0,019 e^{-34,8t} + 0,208 e^{-2t} \cdot \text{sn}(16t - 2,85)$$

en donde el defasamiento es $-2,85$ radianes = -163°

La representación gráfica de esta ecuación es la curva 8 de la fig 3-1.6, la cual es más oscilatoria que la 7.

Para la comprobación experimental de lo dicho anteriormente se tomaran las tres fotos que se indica a continuación. La foto de la fig 3-1.7 corresponde a la red de compensación $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 36$ con $R_4 = 4,4$ por lo tanto corresponde a la curva 6 de la fig 3-1.3, las escalas son: 0,2 voltios por cuadro vertical y 0,25 segundos por cuadro horizontal.

La fig 3-1.8 corresponde a la curva 7 de la fig 3-1.4 siendo las escalas idénticas al caso de la foto 3-1.7 (0,2 v/cuadro y 0,25 seg/cuadro).

La foto 3-1.9 corresponde a la curva 8 de la fig. 3-1.6; las cuales son: 0,2 voltios por cuadro vertical y 0,5 segundos por cuadro horizontal.

En las tres fotos que se encuentran en la pagina siguiente se observa que el valor final llega a 1,1 voltio, el error que se comete (0,14 voltios) con respecto al calcu

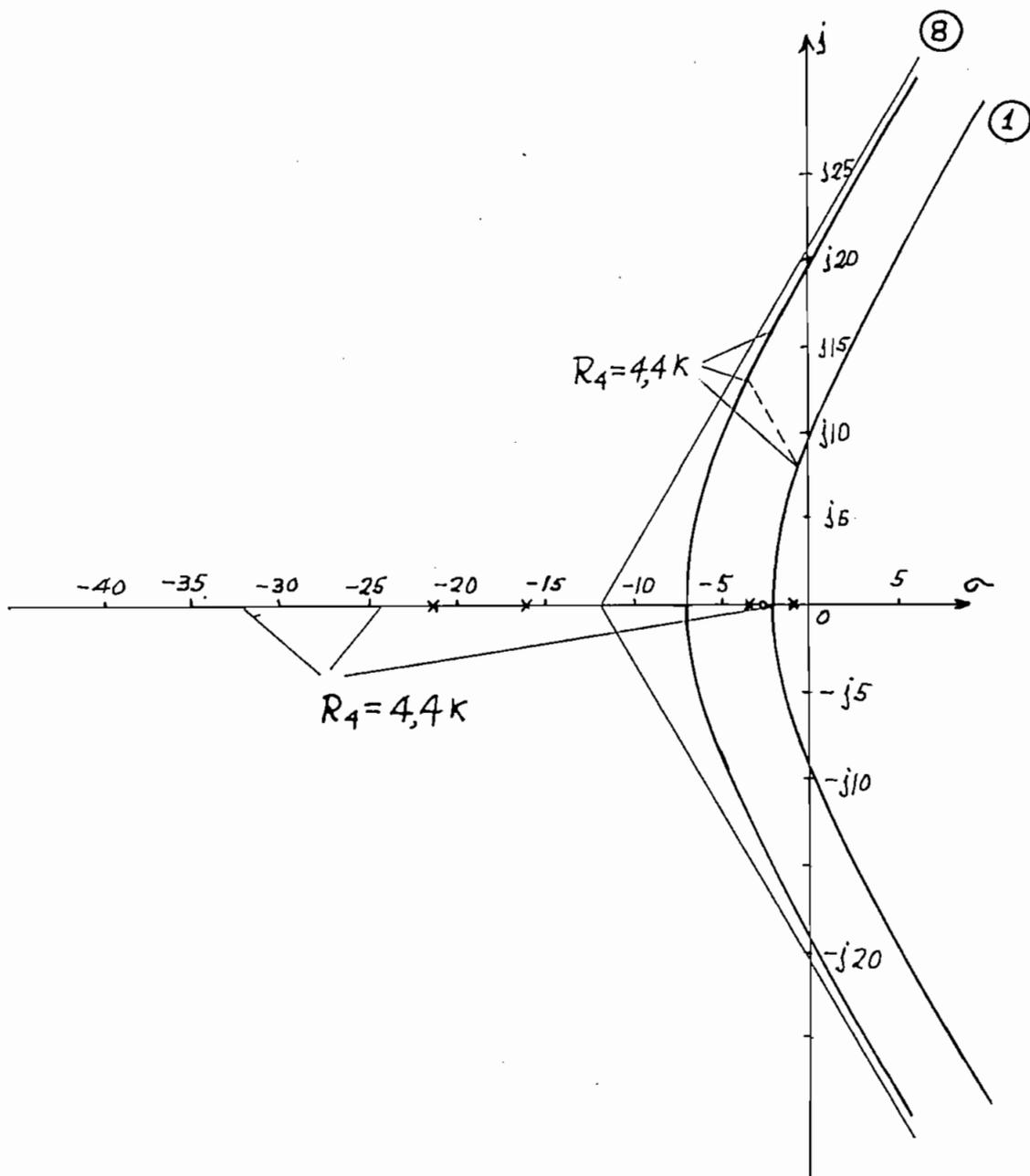


Fig 3-1,5

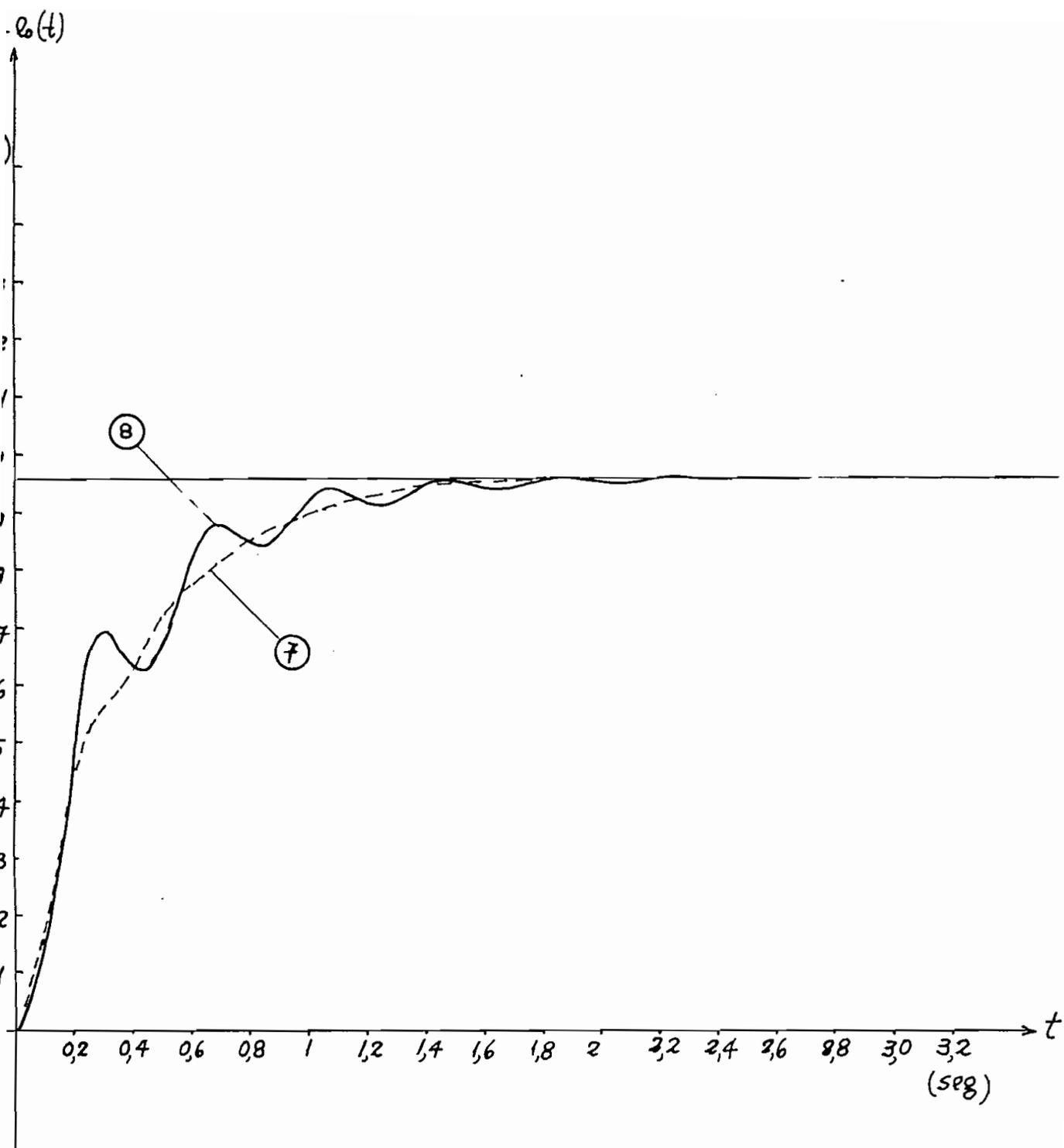


Fig 3-1,6

lado se debe al corrimiento de tensión ya dicho antes. Por lo demás se observa que las formas de onda concuerdan muy aceptablemente con las calculadas.

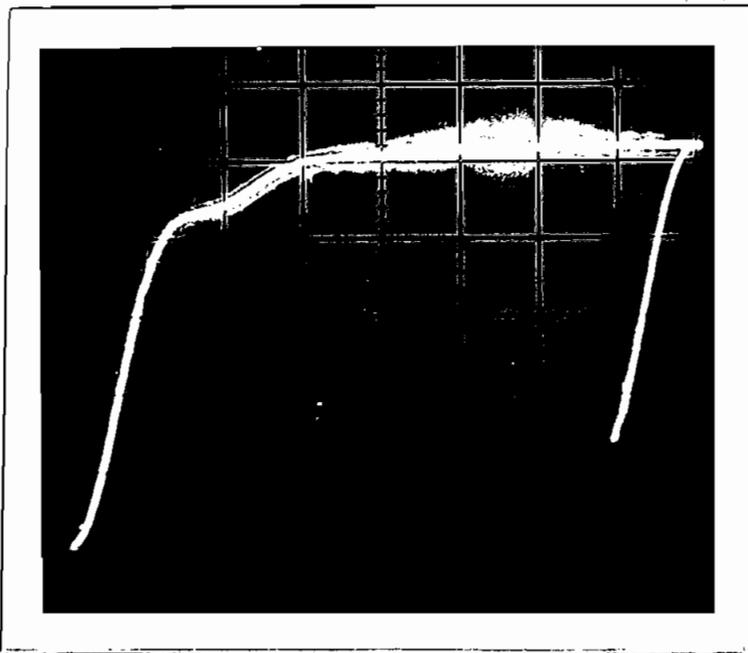
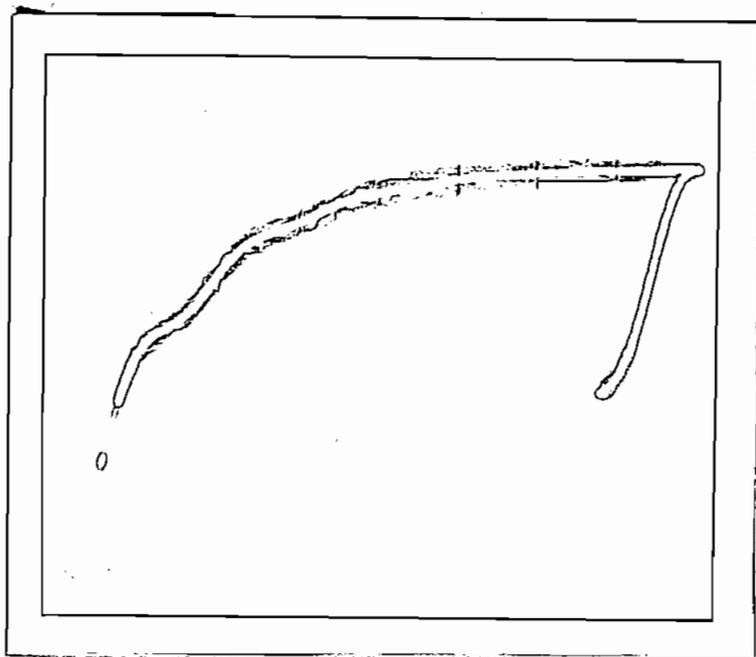


Fig 3-1,7

Fig 3-1,8



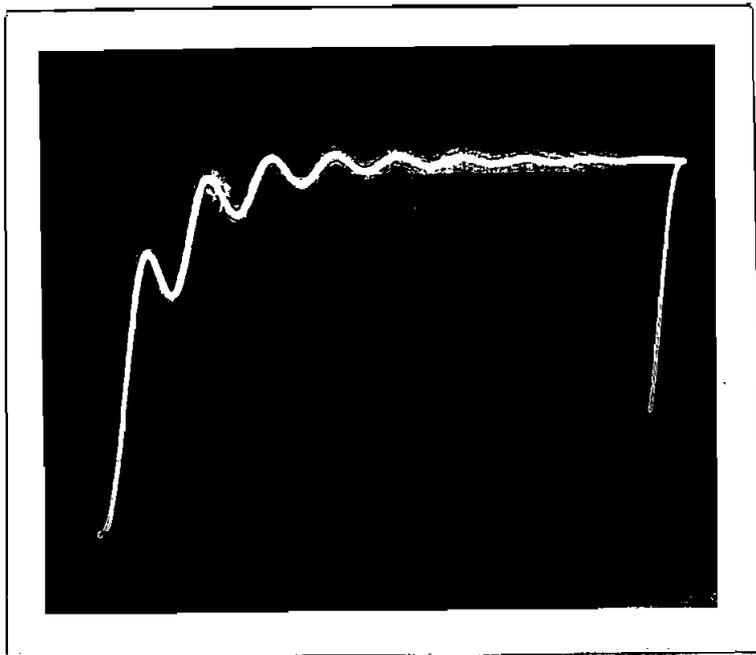


Fig 3-19

Puesto que hemos visto que los resultados teóricos y experimentales concuerdan como debía de esperarse he considerado útil ilustrar brevemente cuando se tiene el caso de una red de compensación retrasadora de fase como la dada por $1/T_1 = 36$ y $1/T_2 = 2,84$ con $R_4 = 20K$.

El "cero" de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es el "polo" de la red de compensación ($1/T_2 = 2,84$) por lo tanto el sistema debe seguir más a su propia oscilación que al crecimiento exponencial.

Este comportamiento se observa en la fig 3-1.10

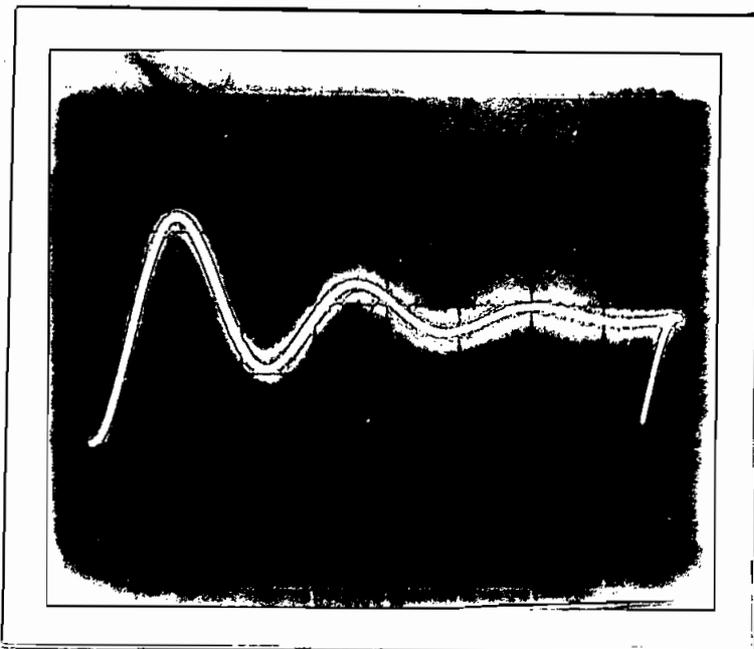


Fig 3-1,10

3-2. ESTUDIO DE LA COMPENSACION EN PARALELO POR EL METODO DE ANALISIS DE FRECUENCIA

Cuando se estudió la respuesta del sistema en lazo cerrado y sin compensación se mencionó que el método del gráfico polar inverso es muy conveniente para analizar el sistema de realimentación no unitaria, por lo tanto utilizaremos este procedimiento para estudiar el sistema compensado.

Por el método del lugar de las raíces hemos visto que las consideraciones de estabilidad son parecidas en la compensación serie y paralelo, por lo tanto vamos a analizar unicamente la variación de la respuesta del sistema.

La función de transferencia inversa se lo puede

expresar:

$$\frac{R(j\omega)}{C(j\omega)} = \frac{1}{G(j\omega)} + H(j\omega)$$

en donde $G(j\omega)$ es la transferencia directa y $H(j\omega)$ es la red de realimentación (en este caso no-unitaria). En el plano complejo, para encontrar R/C debemos grafizar $1/G$ y H luego sumar-las fasorialmente. Las curvas de M constante (magnitud de C/R) son circunferencias concéntricas al punto $0 + j0$ (origen) y las de $-\alpha$ constante (fase de C/R) son líneas rectas que parten del origen. Todo lo anterior se justifica en la Parte I numeral 4.

Consideremos la red de compensación $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 36$, con lo cual las funciones de transferencia son:

$$G(j\omega) = \frac{6,42/R_4}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2,84}{j\omega + 36} \cdot \frac{36}{2,84}$$

En la fig 3-2.1 se dibujó las funciones $1/G$ y H , la suma de las dos para un valor particular de ω nos da la función R/C , además se indica las circunferencias de M constante y las rectas de $-\alpha$ constante. De este gráfico se pasa fácilmente al de la fig 3-2.2 en donde también se indica la magnitud y la fase del sistema no-compensado.

Se observa (fig 3-2.2) que la curva de magnitud del sistema compensado no presenta picos de resonancia más

bien es una curva monotónica decreciente al contrario de lo que ocurre en todos los ejemplos que hasta hoy hemos considerado. Por el método del lugar de las raíces se observó que el sistema posee dos polos complejos conjugados, por lo tanto sería de esperar que el sistema presente algún valor resonante, pero no sucede así debido a la influencia del "cero" que es muy grande siendo dominantes los polos puramente reales, en efecto, la respuesta transitoria sigue más fielmente al crecimiento exponencial (debido a polos reales) que a la oscilación amortiguada (debida a polos complejos conjugados), lo cual se refleja en la respuesta a la frecuencia como una curva monotónica decreciente. Puesto que la magnitud tiene pequeña variación la fase crecerá con menos rapidez que en los casos anteriores como se observa en la fig 3-2.2.

Para la comprobación experimental de todo lo anterior se utilizó la red $1/T_1 = 2,84$; $1/T_2 = 36$ con $R_4 = 6K$ de donde se midieron los siguientes datos (una vez reducidas las escalas).

$\omega \left[\frac{r}{s} \right]$	$M(\omega)$	$-\alpha(\omega)$
0,628	1	15,8°
1,256	0,9	29,3
1,88	0,8	40,5
2,51	0,72	51,8
3,14	0,64	58,4

$\omega \left[\frac{r}{s} \right]$	$M(\omega)$	$-\alpha(\omega)$
3,76	0,56	66,2
7,48	0,37	90
12,56	0,28	121,5
18,8	0,17	180

Los datos de magnitud concuerdan casi sin error con los teóricos, por lo tanto en la fig 3-2.2, practicamente las curvas teórica y experimental se superponen; los datos de fase difieren un tanto, posiblemente debido a pequeños errores en la lectura en los aparatos de medición, pues, como ya se manifestó antes, es realmente difícil obtener datos exactos de la fase.

De lo anterior se demuestra que el análisis por el método del plano polar inverso es lo suficientemente exacto en la mayoría de los casos.

Cuando se trató de la compensación serie se utilizó el método de Bode y Nichols como herramienta fundamental del análisis de frecuencia, consideremos ahora como se puede usar el diagrama de Bode y la tabla de Nichols para el caso de la compensación en paralelo.

Hemos visto que si $G(j\omega)$ es la función de transferencia directa, $H(j\omega)$ la transferencia inversa, entonces:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

Las curvas de Nichols nos dan la magnitud de C/R .

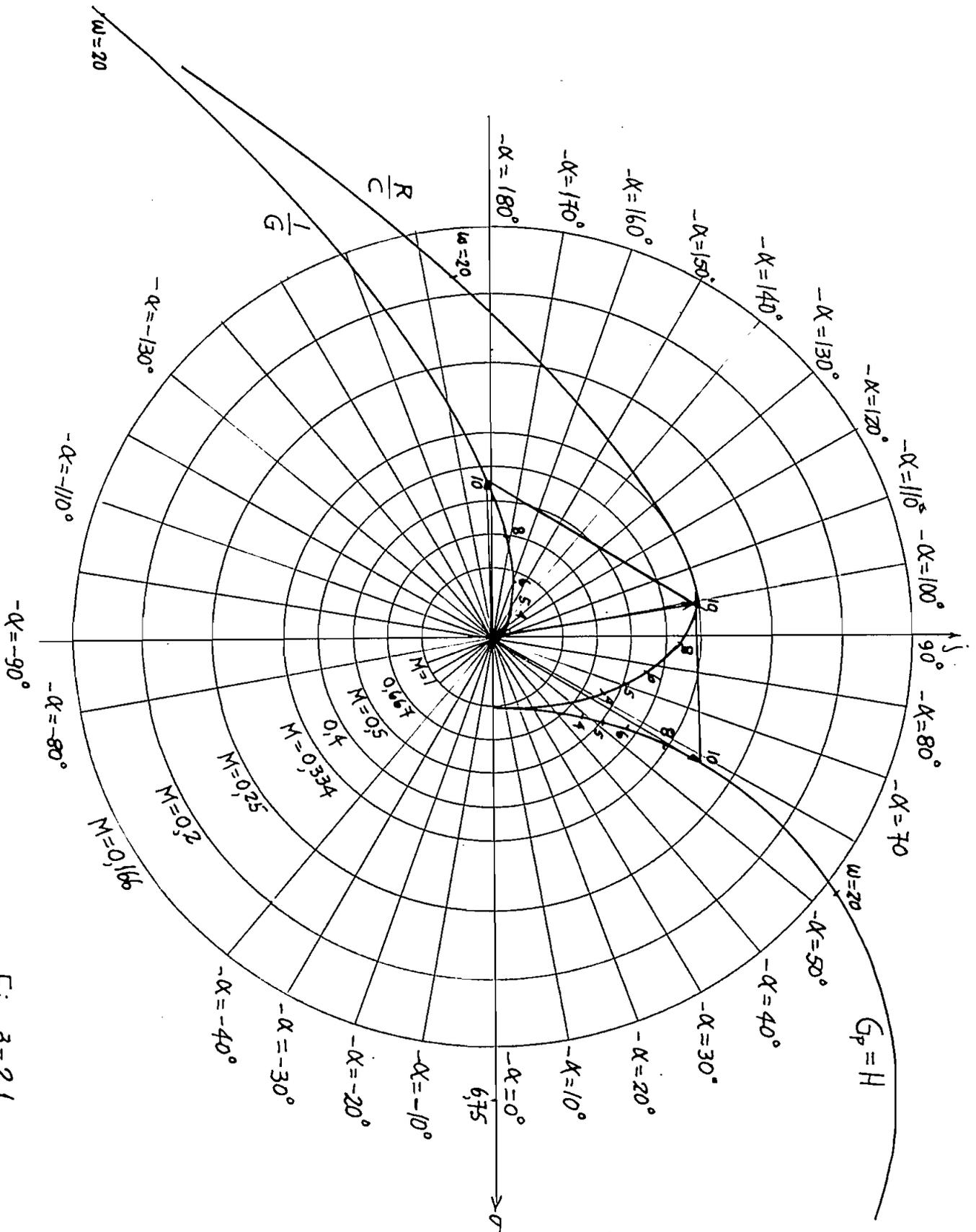


Fig 3-21

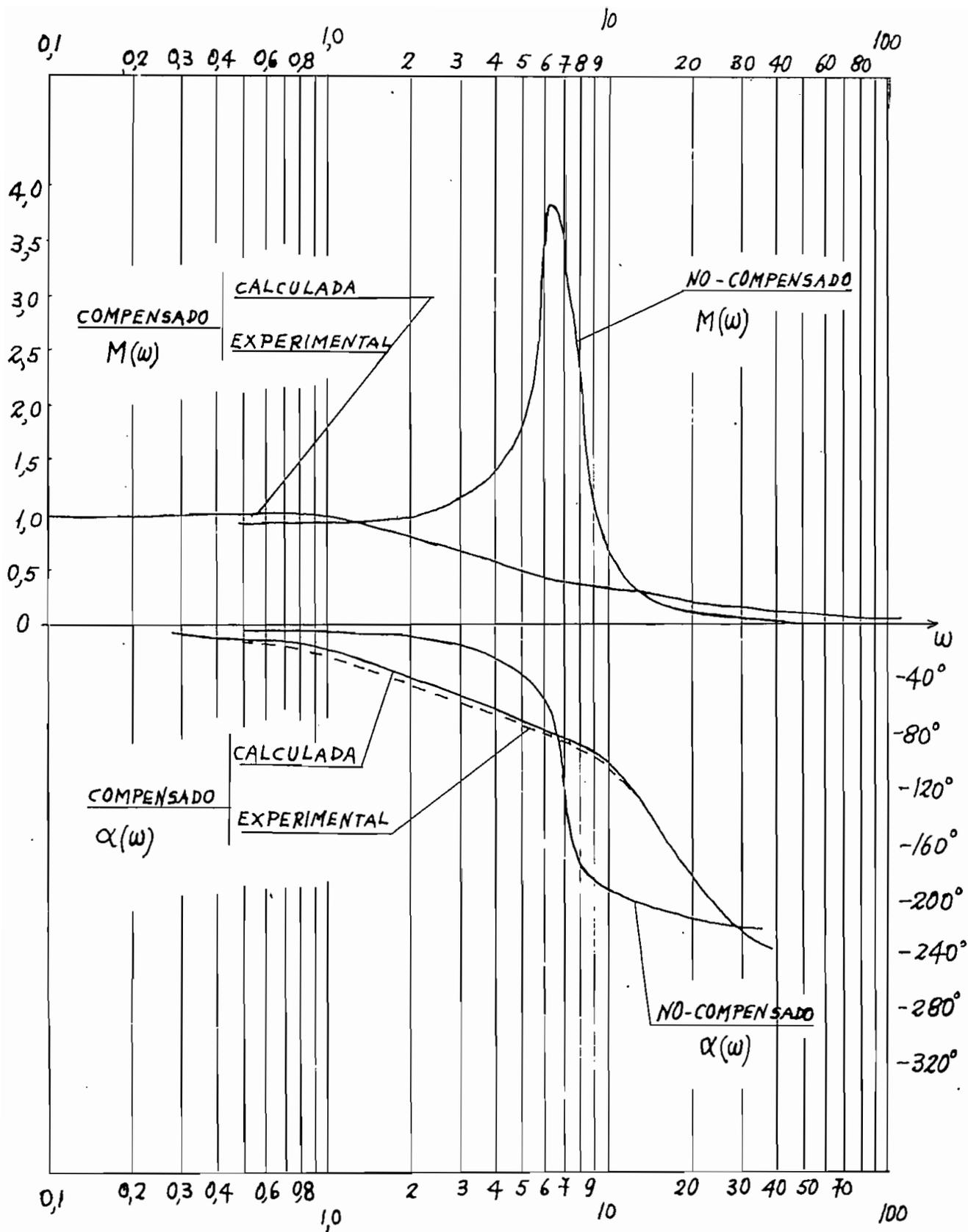


Fig 3-2,2

siempre que el numerador sea GH, por lo tanto, la función de transferencia total puede expresarse en la forma:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \cdot \frac{1}{H(j\omega)}$$

por lo que el primer factor de la derecha puede usarse con el diagrama de Nichols siempre que se grafice GH. Luego del cual la magnitud de C/R expresada en decibeles será simplemente la suma de las magnitudes de GH/(1 + GH) y de 1/H expresados en decibeles, esta operación se la debe hacer para cada valor de la frecuencia siendo útil el diagrama de Bode.

Para ilustrar el procedimiento anterior considere mos la red de compensación $1/T_1 = 2,84$ y $1/T_2 = 36$ con $R_4 = 6K$ de tal manera que el producto GH será:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{6,42/R_4}{(j\omega + 0,9)(j\omega + 3,36)(j\omega + 21,3)} \cdot \frac{j\omega + 2,84}{j\omega + 36} \cdot \frac{36}{2,84}$$

el cual debemos grafizar en la tabla de Nichols (fig 2-3.7) para el valor $R_4 = 6K$, el cual ya se encuentra dibujado pues to que para la compensación serie encontramos la misma fun - ción. Como ya se dijo antes, la magnitud de la salida será:

$$M_1 = M - 20 \lg |H|$$

en donde M representa la magnitud de GH/(1 + GH).

En la figura 3-2.5 se indica el valor M tomado de

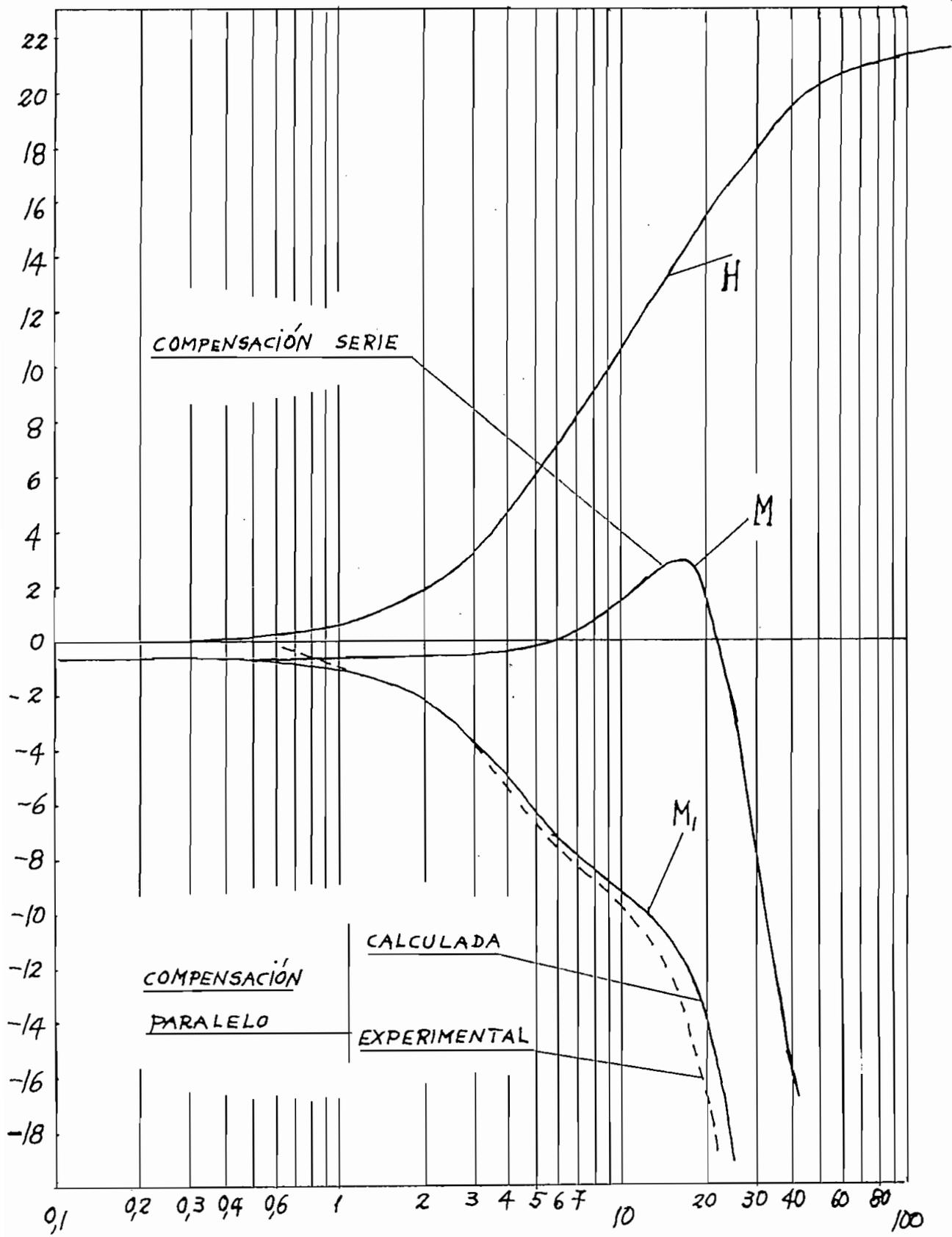


Fig 3-2.3

la figura 2-3.10, el valor $20 \lg |H|$ así como también la curva M_1 resultante.

Los datos experimentales permiten trazar la curva en línea de puntos de la figura 3-2.3 los cuales difieren del teórico muy poco.

En la fig 3-2.2 se dijo que las curvas teórica y experimental se confundían en una sola, esto se debe en primer lugar a la escala del dibujo y en segundo lugar a que los valores menores de 1 representan cantidades muy pequeñas difíciles de grafizar con exactitud, mientras que para escalas logarítmicas, estas cantidades representan magnitudes relativamente grandes. Se notará en la figura 3-2.3 que el error entre las curvas calculada y experimental ocurre cuando la tensión de salida es de pequeñas décimas de voltio lo cual es realmente difícil de leer sin tomar en cuenta la sensibilidad de los instrumentos de medida. De todas maneras los resultados teórico y experimental concuerdan.

3.3. CONCLUSIONES

El análisis de la respuesta del sistema compensado por medio de una red en paralelo es idéntica al caso serie, pero hemos visto una notable diferencia de las formas de onda transitorias en los dos casos y su causa ya se explicó antes.

El análisis por el método de la frecuencia ya no resulta el mismo que para la compensación serie. Como hemos

visto, es de gran ventaja usar el diagrama polar inverso puesto que para obtener la respuesta en lazo cerrado es suficiente sumar los fasores de la inversa de la función de transferencia con la función compensadora y observar para cada punto la magnitud y la fase. Por el método de Nyquist resulta sumamente difícil encontrar la respuesta. Si se utiliza el diagrama de Bode y la tabla de Nichols hemos visto que el procedimiento, si bien es bastante exacto resulta mas complicado que para la compensación serie puesto que necesitamos la respuesta a la frecuencia del sistema considerado con realimentación unitaria a la cual se le resta la respuesta de la red compensadora.

En este numeral he creído necesario no considerar un mayor número de ejemplos puesto que el procedimiento en todos los casos es exactamente el mismo y se ha probado a través de todo el trabajo la exactitud que existe entre la teoría lineal y su comprobación experimental.

B I B L I O G R A F I A

ANGELO, E. J. Jr.: "Electronic Circuits", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1964.

BODE, H. W.: "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1945.

CHESTNUT, H., and MAYER, R. W.: "Servomechanisms and Regulating System Design", Volume 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.

CLARK, R. N.: "Introduction to Automatic Control Systems", John Wiley and Sons, Inc., 1962.

GILLE, J-C., PELEGRIN, M.J., DECAULNE, P.: "Feedback Control Systems", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959.

GUILLEMIN, E. A.: "Introducción a la Teoría de Circuitos" (Traducción del Inglés), Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1959.

HOROWITZ, I. M.: "Synthesis of Feedback Systems", Academic Press Inc., New York, 1963.

SAVAND, C. J. Jr.: "Control System Design", Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

SHINNERS, S. M.: "Control System Design", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

TRUXAL, J. G.: "Automatic Feedback Control System Synthesis", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

WYLIE, C. R. Jr.: "Advanced Engineering Mathematics", Second Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.