

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO UTILIZANDO
MATLAB**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN
ELECTRÓNICA Y CONTROL**

ROSALES ACOSTA JORGE ANDRÉS

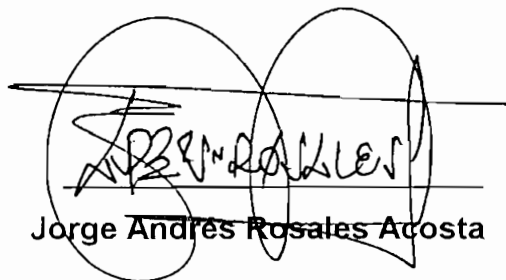
DIRECTOR: PROF. MSc. PATRICIO BURBANO R.

Quito, Enero 2001

DECLARACIÓN

Yo Jorge Andrés Rosales Acosta, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Jorge Andrés Rosales Acosta

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Jorge Andrés Rosales Acosta, bajo mi supervisión.

Prof. MSc. Patricio Burbano
DIRECTOR DE PROYECTO

DEDICATORIA

A mi madre, quien ha estado siempre a mi lado ayudándome en las buenas y en las malas, dándome a cada momento ánimo para seguir adelante, gracias por estar junto a mi.

A mi hermana Jessica, quien siempre alegra mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por guiar mis pasos en todo momento y ser la luz de mi vida, a mi madre quien siempre ha estado a mi lado dándome fuerza y valor, a Ana María por ser compañera y amiga, ya que en los momentos más difíciles nunca me dejó solo.

Al Profesor MSc. Patricio Burbano R. por su tiempo, esfuerzo y apoyo en la dirección de este trabajo.

A todas las personas que de una u otra manera han colaborado en este trabajo.

CONTENIDO

RESUMEN

PRESENTACIÒN

CAPITULO I: ANÁLISIS DE SISTEMAS.- Desarrollo de Rutinas

1.1	MODELOS A VARIABLES DE ESTADO	2
1.1.1	FORMAS CANÓNICAS	6
1.1.1.1	Forma canónica controlable	7
1.1.1.2	Forma canónica observable	8
1.1.1.3	Forma canónica diagonal	9
1.1.1.4	Forma canónica de Jordan	10
1.1.2	TRANSFORMACIÓN DE SEMEJANZA	10
1.1.3	MODELOS DISCRETOS	11
1.2	MATRIZ TRANSICIÓN DE ESTADO	13
1.2.1	MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ TRANSICIÓN DE ESTADO	16
1.2.1.1	Primer método.- Series	16
1.2.1.2	Segundo método.- Por los valores propios	17
1.2.1.3	Tercer método.- Cayley – Hamilton	17
1.2.1.4	Cuarto método.- Por la transformada inversa de Laplace	19
1.3	ANÁLISIS DE SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS EN EL ESPACIO DE ESTADO	19
1.3.1	ANÁLISIS EN EL TIEMPO	20
1.3.2	ANÁLISIS EN FRECUENCIA	22
1.3.3	CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD	24
1.2.1.5	Controlabilidad	26
1.2.1.6	Observabilidad	26
1.4	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD SEGÚN LIAPUNOV PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS	27

CAPITULO II: MÉTODOS BÁSICOS DE CONTROL.- Desarrollo de Rutinas

2.1	ESTRATEGIAS DE DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO	33
2.2	REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS. REGULADOR Y SERVOMECANISMO	35
2.2.1	REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA UN REGULADOR	38
2.2.1.1	Pasos para el diseño de la ubicación de polos	40
2.2.1.2	Fórmula de Ackermann	41
2.2.2	REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA UN SERVOMECANISMO	43
2.2.2.1	Sistema de seguimiento tipo 1, cuando la planta si tiene Integrador	43
2.2.2.2	Sistema de seguimiento tipo 0, cuando la planta no tiene Integrador	46
2.3	OBSERVADORES DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS. OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO	50
2.3.1	OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN COMPLETO	53
2.3.1.1	Problema dual	54
2.3.1.2	Pasos para el diseño del estimador de estado	55
2.3.1.3	Fórmula de Ackermann	57
2.3.2	OBSERVADOR DE ESTADO ACTUALIZADO (SISTEMAS DISCRETOS)	60
2.3.3	OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN REDUCIDO	62
2.4	REALIMENTACIÓN MÁS OBSERVADOR DE ESTADO	66
2.4.1	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL CONTROLADOR (REALIMENTACIÓN MÁS OBSERVADOR)	69

CAPITULO III: TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL.- Desarrollo de Rutinas

3.1	EL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL	74
3.1.1	PROBLEMA DEL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL	75
3.1.2	SOLUCIÓN DEL LQR UTILIZANDO EL PRINCIPIO DE MÍNIMO	76
3.1.3	CÁLCULO DEL CONTROL ÓPTIMO	79
3.1.3.1	Ecuación matricial de Riccati	80

3.2	EL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL DISCRETO	83
3.3	FILTRADO ÓPTIMO	83
3.3.1	PROCESOS ESTOCÁSTICOS	85
3.3.2	EL FILTRO DE KALMAN	88
3.4	FILTRO DISCRETO DE KALMAN	91
3.5	REGULADOR ÓPTIMO LINEAL GAUSSIANO	96

CAPITULO IV: CASOS DE ESTUDIO

4.1	PROBLEMA DE LA BOLA SUSPENDIDA	100
4.1.1	MODELO DEL SISTEMA	100
4.1.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	101
4.2	CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO	103
4.2.1	MODELO DEL SISTEMA	104
4.2.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	105
4.3	CONTROL DE TENSIÓN DE UNA UNIDAD DE CINTA DIGITAL	107
4.3.1	MODELO DEL SISTEMA	107
4.3.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	110
4.4	CONTROL DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE	112
4.4.1	MODELO DEL SISTEMA	113
4.4.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	115
4.5	CONTROL DEL MOVIMIENTO LONGITUDINAL DE UN HELICÓPTERO	115
4.5.1	MODELO DEL SISTEMA	116
4.5.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	116
4.6	PROBLEMA DE LA CAÍDA LIBRE	117
4.6.1	MODELO DEL SISTEMA	118
4.6.2	ESTRATEGIA DE CONTROL	119

CAPITULO V: RESULTADOS

5.1	RESULTADOS DE DISEÑO UTILIZANDO MÉTODOS BÁSICOS	120
5.1.1	PROBLEMA DEL SERVOMECANISMO. PROBLEMA DEL	

PÉNDULO INVERTIDO	120
5.1.1.1. Análisis del sistema	120
5.1.1.2. Diseño del controlador	121
5.1.2 ESTIMADOR DE ESTADO. PROBLEMA DEL HELICÓPTERO	122
5.1.2.1. Análisis del sistema	122
5.1.2.2. Diseño del controlador	124
5.1.3 CONTROLADOR: REALIMENTACIÓN MÁS OBSERVADOR DISCRETO. PROBLEMA DE LA BOLA SUSPENDIDA	126
5.1.3.1. Análisis del sistema	126
5.1.3.2. Diseño del controlador	126
5.1.4 PROBLEMA DE LA CINTA MAGNÉTICA	128
5.1.4.1. Análisis del sistema	128
5.1.4.2. Diseño del controlador	128
5.2 RESULTADOS DE DISEÑO UTILIZANDO TÉCNICAS AVANZADAS	129
5.2.1 REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL. PROBLEMA DEL HELICÓPTERO	129
5.2.4.1. Diseño del regulador	129
5.2.2 REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL DISCRETO. PROBLEMA DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE CON ESTRUCTURA FLEXIBLE	131
5.2.2.1. Diseño del controlador	131
5.2.3 FILTRO DE KALMAN CONTINUO. PROBLEMA DE LA PLANTA CON DOBLE INTEGRADOR. PROBLEMA DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE SIN ESTRUCTURA FLEXIBLE	132
5.2.4.1. Diseño del filtro	132
5.2.4 FILTRO DE KALMAN DISCRETO. PROBLEMA DE LA CAÍDA LIBRE	134
5.2.4.1. Diseño del filtro	135

CAPITULO VI: CONCLUSIONES

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEXOS

A. MANUAL DE COMANDOS

- A.1** Comandos para el análisis del sistema
- A.2** Comandos para los métodos básicos de control
- A.3** Comandos para las técnicas avanzadas de control

B. MANUAL DE USUARIO

- B.1** Características del hardware y software requeridos
- B.2** Utilización del programa
 - B.2.1** Discretización y análisis del sistema
 - B.2.2** Métodos básicos de control
 - B.2.3** Técnicas avanzadas de control
 - B.2.4** Casos de estudio

C. DIAGRAMAS DE FLUJO

- C.1** Pantallas de ingreso al programa
- C.2** Pantallas de discretización y análisis
- C.3** Pantallas de métodos básicos de control
- C.4** Pantallas de técnicas avanzadas de control
- C.5** Pantallas de casos de estudio

RESUMEN

El análisis en el dominio del tiempo, utilizando ecuaciones diferenciales tiene aproximadamente 100 años de antigüedad, pero su implementación en el diseño en el espacio de estado se introdujo al final de la década de 1950, debido a la utilización de los computadores digitales. Actualmente, las técnicas modernas de control en el espacio de estado no están siendo adecuadamente utilizadas a nivel industrial por dos razones:

Por el desconocimiento de sus aplicaciones; y,
Por que las ayudas computacionales no son directas.

El control en el espacio de estado mejora las aplicaciones prácticas del control de sistemas, por cuanto se puede realizar optimización. Esta es la hipótesis que el presente trabajo maneja. Las ventajas del diseño en el espacio de estado son evidentes cuando un diseño involucra más de una entrada o más de una salida, así como también la representación del sistema a variables de estado proporciona una descripción interna (completa) de dicho sistema, dando características que pudieran estar ocultas al utilizar la representación en función de transferencia, que es una representación externa o global.

El objetivo general de este trabajo es el planteamiento de los métodos más importantes de análisis y diseño de sistemas de control lineales, univariados, multivariados, invariantes en tiempo, tanto continuos como discretos, determinísticos y sujetos a procesos estocásticos en el espacio de estado.

Los objetivos específicos en el presente trabajo consisten en realizar rutinas en MATLAB a manera de un "toolbox" o librerías independientes para ser utilizadas en el análisis y diseño de sistemas de control en el espacio de estado, así como también presentar casos de estudio.

El programa computacional MATLAB se ha convertido en una herramienta de gran ayuda para la elaboración de programas de interfaz gráfica con el usuario, ya

sea en el campo de la Ingeniería en Control tanto como en el de la Ingeniería en Telecomunicaciones, ya que su fácil manejo, así como la gran capacidad en la resolución de problemas de alta complejidad lo convierten en una excelente alternativa. En el caso del Control Moderno, el presente trabajo ha conseguido disminuir el tiempo que se emplea en realizar el diseño de los distintos controladores en el espacio de estado, mediante rutinas dedicadas, en vez de utilizar los comandos individualmente.

El resultado final de este trabajo es un programa que puede ser utilizado en algunas cátedras de la Carrera de Ingeniería en Electrónica y Control, como son Sistemas de Control Automático, Sistemas de Control Discreto, Control Moderno, entre otras.

PRESENTACIÓN

Desde los años 60 se han desarrollado una serie de algoritmos sobre el análisis y el diseño en el espacio de estado, igualmente en la década de los 90 se ha venido trabajando con paquetes computacionales como el MATLAB, el mismo que posee instrucciones poderosas, comandos puntuales de control clásico y moderno, así como también la rapidez necesaria para los diversos cálculos que la ingeniería implica, pero no existe una librería apropiada para análisis y diseño en el espacio de estado, para realimentación y observador de estado.

Las técnicas de Control Moderno son una herramienta más general de la teoría de control, se refuerza al Control Clásico con herramientas como la controlabilidad y la observabilidad, la optimización, el filtrado, entre otras.

La aplicación de las técnicas de control se basa en el uso de métodos computacionales como en control moderno el MATLAB, en instrumentación el LABVIEW, en control de procesos los SISTEMAS SCADA, entre otros. Las aplicaciones del control moderno permiten obtener mayores resultados para el control y amplían el rango de su utilización. Las mejoras del control en el espacio de estado son adecuadamente visualizadas mediante el MATLAB.

El planteamiento de las técnicas de control moderno a manera de un estudio exploratorio, así como la utilización del MATLAB como un instrumento para la implementación computacional de dichas técnicas, se convierte en uno de los aspectos más importantes en este trabajo. También se trata de observar el comportamiento dinámico de los casos de estudio para determinar la respuesta de los sistemas mediante control moderno.

El capítulo I trata sobre el *análisis de sistemas*, en el mismo se enfocan temas como las características estructurales (estabilidad, controlabilidad y observabilidad), la respuesta temporal, así como también la respuesta en frecuencia (diagramas de Bode, lugar geométrico de las raíces).

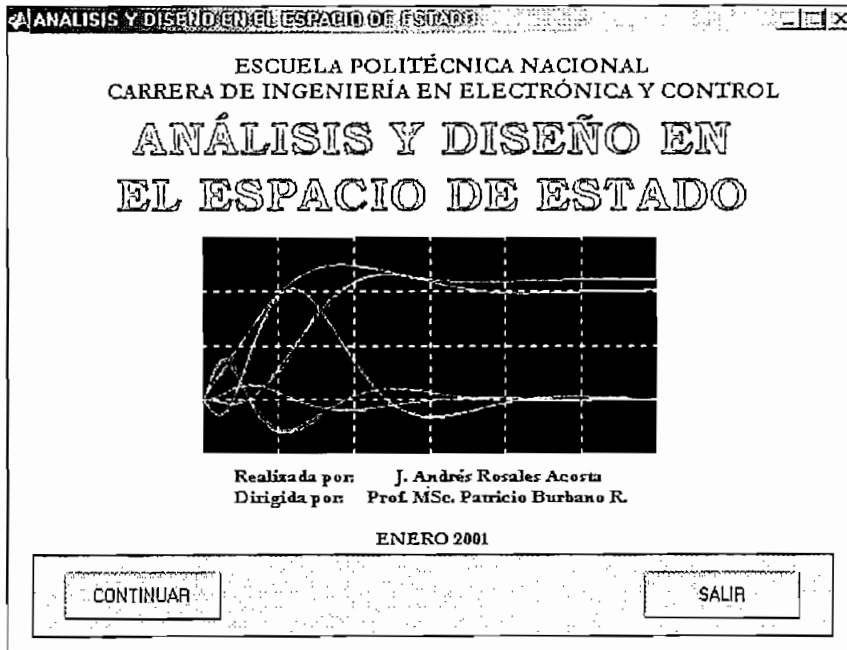
El capítulo II versa en lo referente a los *métodos básicos de control* modernos como son la realimentación de estado, la estimación de estado y por último la combinación de estas dos técnicas para los casos de regulación y de seguimiento.

En el capítulo III se incorpora en el presente trabajo las *técnicas avanzadas de control* en lo referente al regulador cuadrático lineal, al filtro de Kalman y al regulador cuadrático lineal Gaussiano.

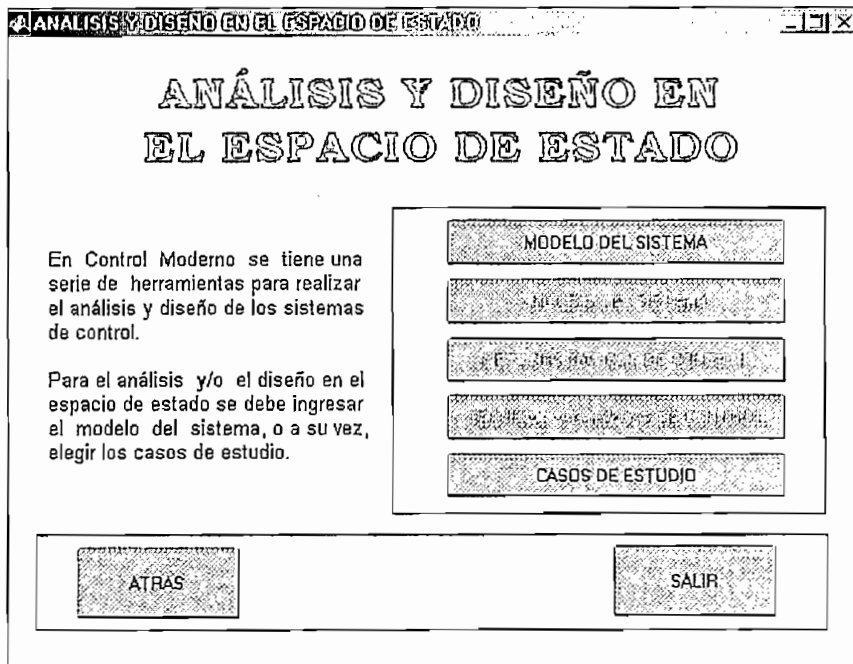
El capítulo IV hace referencia a diversos *casos de estudio* en los que se aplican estas técnicas de control, entre éstos se tiene: el problema de la bola suspendida, el control de la tensión de una cinta digital, el control de orientación de un satélite, el control de un helicóptero, el problema de la caída libre y el control del péndulo invertido.

En el capítulo V se muestran los *resultados* del trabajo y en el capítulo VI se presentan las *conclusiones*. Además se incluye un diagrama de flujo de las pantallas del programa, así como también el manual del usuario en el apéndice.

El Análisis y Diseño en el Espacio de Estado se lo realiza mediante el desarrollo de rutinas implementadas en el programa computacional MATLAB versión 5.3, estas rutinas son un grupo de archivos con extensión ".m", a los cuales se tiene acceso al digitar el comando *ades* (luego de seleccionar el directorio correspondiente a la ubicación del programa en la pantalla del "path browser" del MATLAB, este procedimiento se indica con más detalle en el manual del usuario); el comando *ades* permite ingresar a la pantalla de presentación.

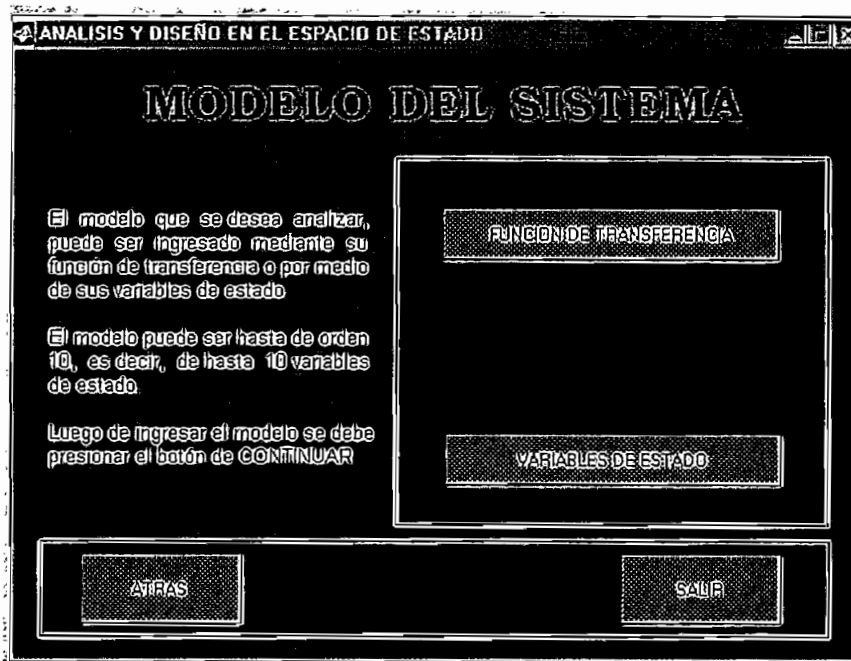


Al presionar el botón de continuar se ingresa al primer menú del programa, en donde se puede elegir entre el ingreso de un modelo de sistema o entre los casos de estudio.



Al elegir la opción del modelo del sistema se entra a una tercera pantalla, en donde el usuario puede escoger ingresar el sistema por medio de su función de

transferencia o por medio de sus variables de estado, pero el programa siempre transforma al sistema dado a su modelo en variables de estado.



Al presionar el botón de función de transferencia o el de variables de estado, se ingresa a una de sus respectivas pantallas.

En estas pantallas se colocan los coeficientes de la función de transferencia o de las matrices del sistema en variables de estado, según corresponda, en los espacios en blanco indicados en cada una de ellas.

Luego de ingresar los datos se presiona el botón de continuar, ingresando así a la pantalla de menú completo del programa. Las opciones de esta pantalla se detallan en los siguientes capítulos.

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia del modelo, es de la forma:

$$G(s) = N(s)/D(s)$$

Tanto el numerador $N(s)$, como el denominador $D(s)$, deben ser ingresados por medio de sus coeficientes.

Coefficientes del Numerador $N(s)$:

[1]

$\{ A_n \ A_{n-1} \ A_{n-2} \ \dots \ A_0 \}$

Coefficientes del Denominador $D(s)$:

[1 0 2]

$\{ B_n \ B_{n-1} \ B_{n-2} \ \dots \ B_0 \}$

ATRÁS

CONTINUAR

SALIR

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

VARIABLES DE ESTADO

Las variables de estado del modelo, deben ser ingresadas como matrices de la forma:

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

La matriz A puede ser hasta de orden 10 (10 estados).

Matriz $A[n \times n]$:

[3 -2 1 0]

Matriz $B[n \times 1]$:

[1 0]

Matriz $C[1 \times n]$:

[0 1]

Matriz $D[1 \times 1]$:

[0]

ATRÁS

CONTINUAR

SALIR

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

Una vez ingresado el modelo del sistema, se puede ingresar a una de las tres opciones del menú para el análisis o el diseño.

Se puede cambiar de modelo de sistema, así como también ingresar a los casos de estudio.

DISCRETIZACION

ANÁLISIS DEL SISTEMA

MÉTODOS BÁSICOS DE CONTROL

TECNICAS AVANZADAS DE CONTROL

CAMBIO DE SISTEMA

ATRÁS

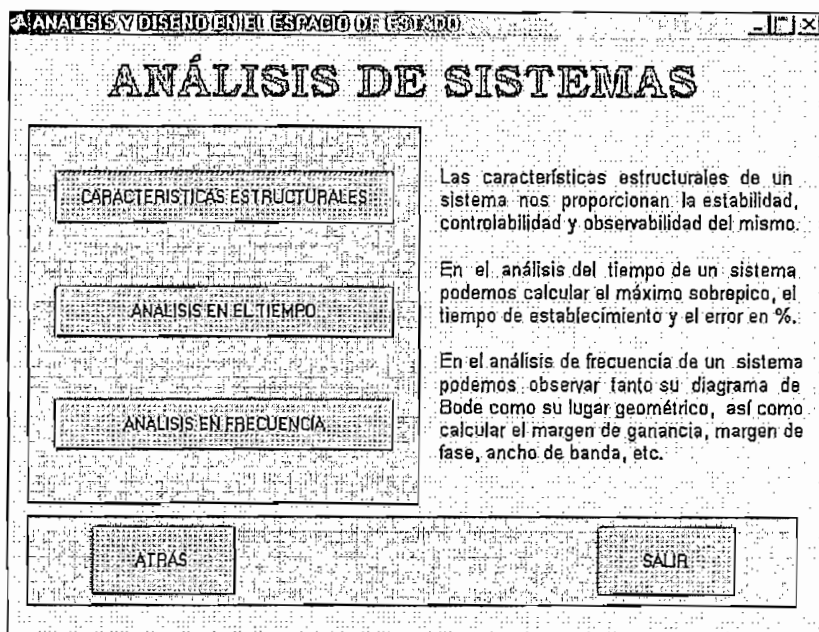
SALIR

CAPITULO 1.

ANÁLISIS DE SISTEMAS.- Desarrollo de Rutinas

El análisis de un sistema es fundamental para cualquier aplicación práctica, existen diversas técnicas de análisis, así como también varios tipos de sistemas sobre los cuales se puede aplicar este método. Es muy importante contar con el software especializado para poder implementar con mayor facilidad las rutinas que resuelvan este tipo de problemas.

"Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí en una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a una computadora que realice gran parte de los tediosos cálculos necesarios en el análisis" [1]. El enfoque en el espacio de estado para el análisis de los sistemas toma en cuenta este punto de vista.



A continuación se hace una breve referencia a algunos conceptos importantes para el análisis de sistemas en el espacio de estado.

1.1 MODELOS A VARIABLES DE ESTADO

La representación del sistema a variables de estado proporciona una descripción interna (completa) de dicho sistema, dando características que pudieran estar ocultas al utilizar la representación en función de transferencia, que es una representación externa o global.

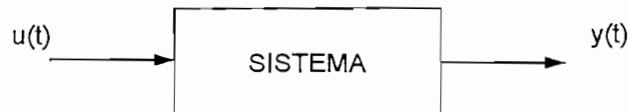


Figura 1.1 Sistema Dinámico

"Una función de transferencia de un sistema se define como la relación entre la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales se hacen igual a cero. La función de transferencia de un sistema representa la relación que describe la dinámica del sistema bajo consideración. La descripción de la función de transferencia no incluye ninguna información concerniente a la estructura interna del sistema y a su comportamiento" [1].

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n}$$

"El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado), tales que el conocimiento de esas variables en $t=t_0$ conjuntamente con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Así, el estado de un sistema dinámico al tiempo t queda determinado unívocamente por el estado al tiempo t_0 y la entrada para $t \geq t_0$, y es independiente del estado y entrada antes de t_0 . Nótese que al tratar de sistemas lineales invariantes en el tiempo, generalmente se escoge un tiempo de referencia t_0 igual a cero.

Las variables de estado de un sistema dinámico son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico. Si se requieren al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de modo que una vez dada la entrada para $t \geq t_0$, y que el estado inicial esté especificado en $t=t_0$, el estado futuro del sistema queda completamente determinado) entonces esas n variables son un conjunto de variables de estado" [1].

Las variables de estado no necesitan ser cantidades mensurables u observables físicamente. Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son mensurables ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Tal libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estado.

En el análisis del espacio de estado se manejan tres tipos de variables comprendidas en el modelo de sistemas dinámicos: las variables de entrada, de salida y las variables de estado. El programa analiza sistemas hasta con un máximo de 10 variables de estado.

"Sea el sistema dinámico de la figura 1.1. En este sistema, la salida $y(t)$ para $t \geq t_1$ depende del valor $y(t_1)$ y la entrada $u(t)$ para $t \geq t_1$. El modelo del sistema dinámico debe incluir elementos que memoricen los valores de entrada para $t \geq t_1$. Como en un sistema de control continuo en el tiempo, los integradores sirven como dispositivos de memoria, se puede considerar a la salida de tales integradores como variables que definen el estado interno del sistema dinámico.

Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. La cantidad de variables de estado que definen completamente la dinámica del sistema, es igual a la cantidad de integradores incluidos en el sistema" [1].

Para un sistema $G(s)$, definido por la siguiente función de transferencia, el conjunto de variables de estado sería:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = b_0U(s)$$

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_2y^{11} + a_1y^1 + a_0y = b_0u$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y^1$$

$$x_3 = y^{11}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{n-1}$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u)$$

$$y(t) = g(x_1, x_2, \dots, x_n; u)$$

Estas ecuaciones se convierten en la ecuación de estado y la ecuación de salida, respectivamente:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}, u)$$

$$y(t) = g(\underline{x}, u)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Donde $\underline{x}(t)$ es el vector de estado.

Si se linealizan las ecuaciones alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas, para un sistema invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

En donde \underline{x} es el vector de estado, u es la entrada, y y es la salida.

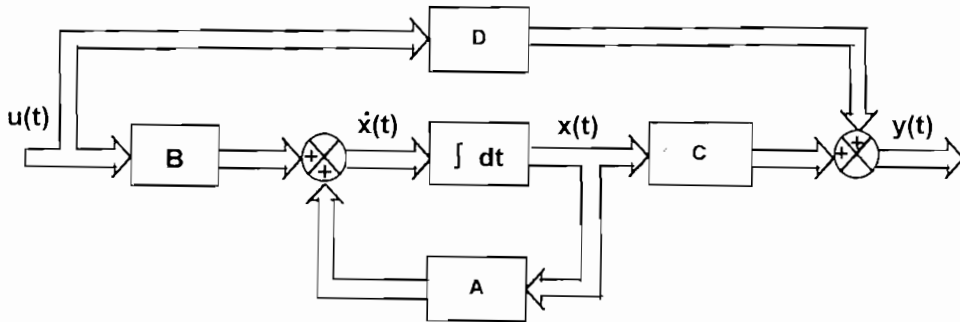


Figura 1.2 Diagrama de bloques en el espacio de estado

Considérese el sistema $G(s)$ descrito anteriormente, este sistema se representa en el espacio de estado mediante las ecuaciones de estado y salida linealizadas. La transformada de Laplace de estas ecuaciones se obtiene mediante:

$$\begin{aligned}sX(s) - \underline{x}(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

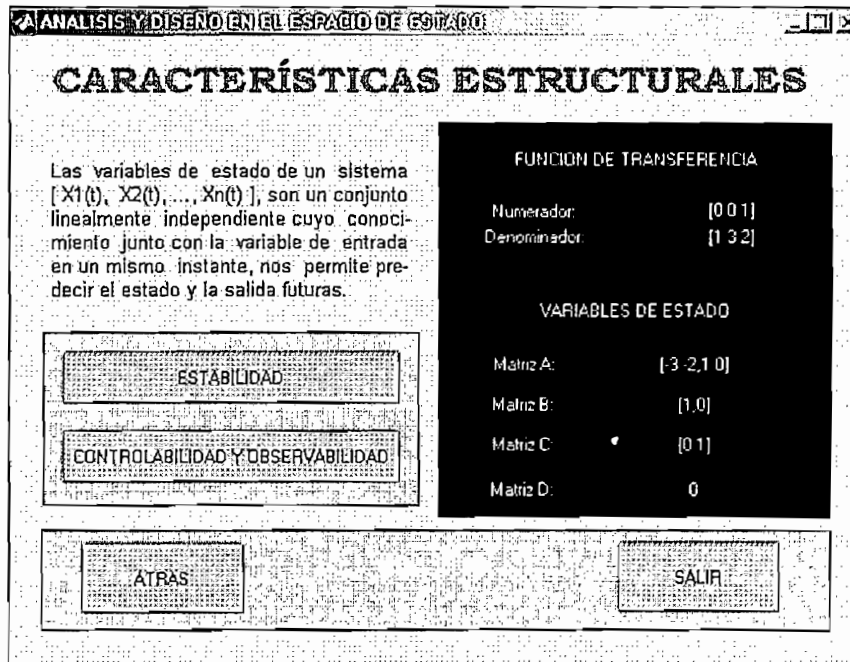
Suponiendo que $\underline{x}(0)$ (condición inicial) es cero, se tiene:

$$\begin{aligned}sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ X(s) &\hat{=} (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B + D \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\end{aligned}$$

MATLAB permite el cambio a modelos en variables de estado de manera muy sencilla mediante la utilización de algunos sus comandos, pero es importante señalar que la representación en el espacio de estado para cualquier sistema no

es única, existen muchas representaciones en el espacio de estado para el mismo sistema, el programa *ades* ofrece una de estas posibles representaciones.

El modelo del sistema ingresado, se presenta tanto en su forma de función de transferencia como en variables de estado en la pantalla de las *Características Estructurales del Sistema*.



1.1.1 FORMAS CANÓNICAS

Se analizan las representaciones en el espacio de estado en las formas canónica controlable, canónica observable y canónica diagonal (o de Jordan), de un sistema definido mediante la siguiente ecuación:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

1.1.1.1 Forma Canónica Controlable

La siguiente representación en el espacio de estado se denomina forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control.

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

MODELO CONTROLABLE

Controlabilidad.- Propiedad estructural del sistema por la cual es posible determinar una señal de control u no restringida que a partir de un instante inicial t_0 , permite transferir el vector de estado desde un valor inicial a un valor final en un t finito.

El sistema es controlable si la matriz M_p es de rango completo.

MATRICES DE TRANSFORMACION

Matriz M_p : [1 -3 0 1]
Matriz T_c : [0 1 1 0]

VARIABLES DE ESTADO

Matriz A_c : [0 1 -2 -3]
Matriz B_c : [0 1]
Matriz C_c : [1 0]
Matriz D_c : 0

ATRÁS

SALIR

El programa *ades* cambia la forma canónica del modelo del sistema (la cual se encuentra en la forma canónica controlable por defecto), al ingresar a la pantalla de las características estructurales del sistema.

1.1.1.2 Forma Canónica Observable

La siguiente representación en el espacio de estado se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & . & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

MODELO OBSERVABLE

Observabilidad.- Propiedad estructural del sistema por la cual se puede determinar o reconstruir el vector de estado partiendo de un tiempo inicial t_0 y mediante observaciones de la salida y la entrada (estimación de estado).

El sistema es observable si la matriz N_p es de rango completo.

MÁTRICES DE TRANSFORMACIÓN

Matriz N_p : [0 1 0]
 Matriz T_o : [1 -3 0 1]

VARIABLES DE ESTADO

Matriz A_o : [0 -2.1 -3]
 Matriz B_o : [1 0]
 Matriz C_o : [0 1]
 Matriz D_o : 0

ATRÁS
SALIR

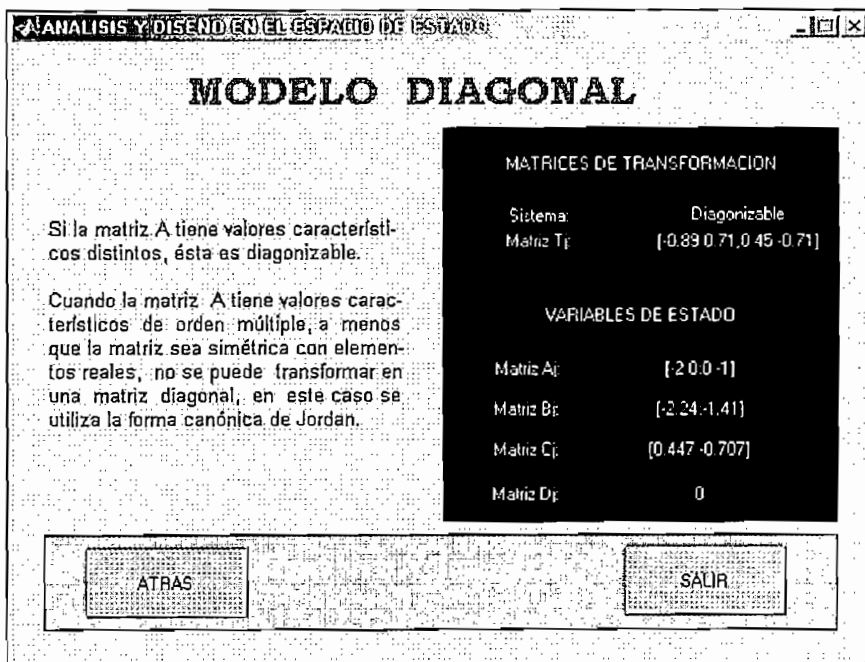
1.1.1.3 Forma Canónica Diagonal

Para un sistema con raíces de la ecuación característica (valores propios) reales y distintos, la forma canónica diagonal se obtiene mediante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

A la forma canónica diagonal se la puede observar en la siguiente pantalla luego de presionar la opción de *Diagonal* en la pantalla para el cambio de formas.



1.1.1.4 Forma Canónica de Jordan

Para un sistema con raíces múltiples, la forma canónica anterior debe modificarse a la forma canónica de Jordan. Por ejemplo, para un sistema con tres raíces múltiples y las otras distintas, se tiene que una representación del mismo se obtiene mediante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p_4 & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdot & -p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

1.1.2 TRANSFORMACIÓN DE SEMEJANZA

Si un sistema está dado en la forma canónica controlable, se puede llegar a la forma canónica diagonal mediante la transformación $\underline{x} = T\underline{z}$, en donde la matriz T está formada por los valores característicos distintos de A . Esta transformación se llama de semejanza porque no cambia los valores característicos (propios) o polos del sistema.

Para el caso de raíces reales diferentes, la forma canónica de Jordan utiliza la transformación de semejanza con T igual a:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdot & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdot & \lambda_n^2 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \cdot \end{bmatrix}$$

Si el sistema no está en la forma controlable, la matriz T está dada por:

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]$$

En donde v_k es el vector propio asociado al valor propio λ_k .

Para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu \\ y &= C\underline{x}(t) + Du \end{aligned}$$

La transformación de semejanza $\underline{x} = T\underline{z}$ da lugar a:

$$\begin{aligned} T\dot{\underline{z}} &= AT\underline{z} + Bu \Rightarrow \dot{\underline{z}} = (T^{-1}AT)\underline{z} + T^{-1}Bu \\ y &= CT\underline{z} + Du \end{aligned}$$

Por lo que el nuevo sistema estará dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= A_z\underline{z} + B_zu \\ y &= C_z\underline{z} + Du \end{aligned}$$

Donde: $A_z = T^{-1}AT$, $B_z = T^{-1}B$ y $C_z = CT$.

1.1.3 MODELOS DISCRETOS

El sistema ingresado por medio de los coeficientes de la función de transferencia o por medio de sus matrices en el modelo a variables de estado, puede ser

discretizado mediante el método 'ZOH', al presionar el botón de *Discretización* en la pantalla del menú completo del programa *ades*.

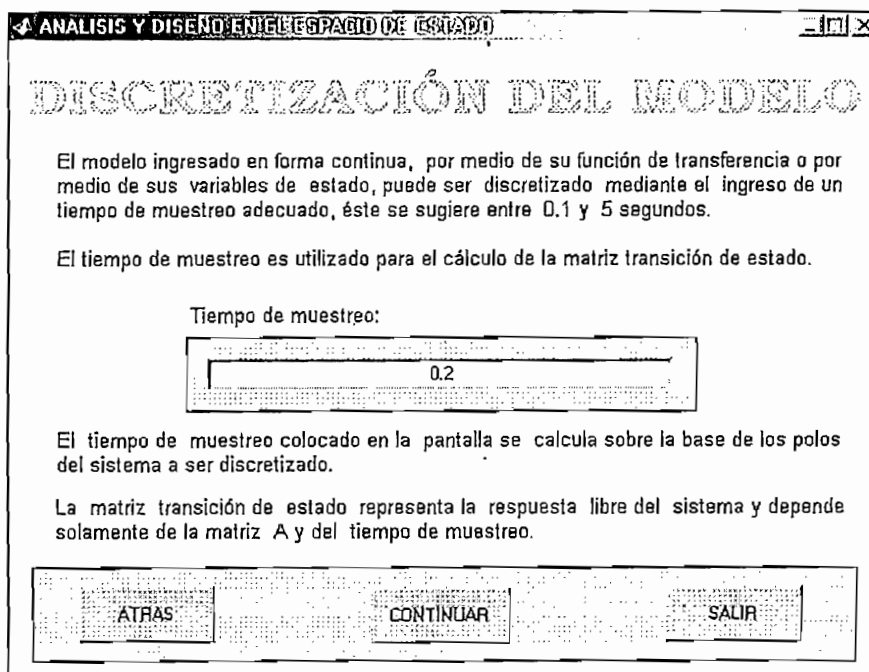
Las ecuaciones de estado y de salida linealizadas para el sistema discreto representado en el espacio de estado está dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}}(k+1) &= A_D \underline{x}(k) + B_D u(k) \\ y(k) &= C_D \underline{x}(k) + D_D u(k)\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}A_D &= e^{AT} = G \\ B_D &= \int_0^T e^{A\eta} B d\eta = H \\ C_D &= C \\ D_D &= D\end{aligned}$$

Al elegir la opción de discretización, se ingresa a la pantalla para la selección del tiempo de muestreo, este tiempo es calculado automáticamente por el programa y presenta un valor por defecto (este cálculo se hace basándose en la ubicación de los polos de la planta en lazo abierto en el plano "s").



Luego de elegir el tiempo de muestreo adecuado, o de aceptar el tiempo sugerido, se presiona el botón de continuar y se ingresa a la pantalla donde se muestra al sistema discretizado en sus dos formas, por medio de su función de transferencia discreta y por medio de sus variables de estado discretas, en esta pantalla se tiene la opción de ingresar al análisis del sistema discreto por medio del botón *Análisis Discreto*.

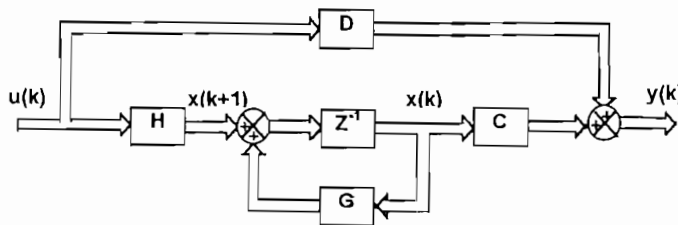


Figura 1.3 Diagrama de bloques en el espacio de estado discreto

Si se selecciona la opción para el análisis discreto, se tiene acceso a una pantalla similar a la de análisis en los sistemas continuos, mediante la cual se puede realizar el análisis de estabilidad, en el tiempo, en frecuencia y, de controlabilidad y observabilidad.

1.2 MATRIZ TRANSICIÓN DE ESTADO

Considérese la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s)$$

en donde $\underline{X}(s) = L \{ \underline{x}(t) \}$, por tanto:

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0)$$

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(0)$$

La transformada inversa de Laplace de $\underline{X}(s)$ produce la solución de $\underline{x}(t)$, así:

$$\underline{x}(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \underline{x}(0)$$

El término $(sI - A)^{-1}$ está dado por [1]:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

Por tanto la transformada inversa de Laplace produce:

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = e^{At}$$

La transformada inversa de Laplace de una matriz, es la matriz formada por las transformadas inversas de Laplace de todos sus elementos.

Por tanto:

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0)$$

$$\underline{x}(t) = \Phi(t) \underline{x}(0)$$

En donde $\Phi(t)$ es una matriz $n \times n$ y es la solución única de:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

$$\Phi(0) = I$$

Por tanto, se obtiene que:

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

La matriz única $\Phi(t)$ se denomina matriz transición de estado. La matriz transición de estado contiene toda la información acerca del movimiento libre del sistema definido mediante la ecuación:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t).$$

Si los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ de la matriz A son distintos, entonces $\Phi(t)$ contendrá las n exponenciales:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

En particular, si la matriz A es diagonal, entonces:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Si hay multiplicidad en los valores característicos, por ejemplo: $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$, entonces $\Phi(t)$ contendrá, además de las exponenciales: $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_2 t}$, términos como: $te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}$

Las propiedades más importantes de la matriz transición de estado $\Phi(t)$, para un sistema lineal e invariante en el tiempo son [1]:

1. $\Phi(0) = e^{A0} = I$
2. $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

Para el caso no homogéneo se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) - A\underline{x}(t) &= Bu(t)\end{aligned}$$

Por tanto, si se multiplica ambos miembros de la última ecuación por e^{-At} y se integra, se tiene:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ \underline{x}(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\end{aligned}$$

La solución de $\underline{x}(t)$ es claramente la suma de un término formado por la transición de estados inicial y un término que surge de la entrada.

1.2.1 MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ TRANSICIÓN DE ESTADO

Al resolver problemas de ingeniería de control, con frecuencia resulta necesario calcular e^{At} , el programa computacional MATLAB permite una forma simple de calcular e^{AT} , donde T es una constante y A es una matriz con todos sus elementos en valores numéricos.

Además, existen varios métodos analíticos para la determinación de e^{At} , entre los cuales se tiene:

1.2.1.1 Primer método.- Por descomposición en series.

La matriz transición de estado puede ser calculada por medio de la siguiente serie, la cual tiene como términos a la matriz A y al tiempo t [1]:

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$e^{At} = L^{-1}\left[\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots\right]$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

1.2.1.2 Segundo método.- Por valores propios, mediante transformación de semejanza.

Si la matriz A se transforma en una forma diagonal, entonces e^{At} se obtiene mediante:

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

En donde T es una matriz de diagonalización para A y J es una matriz en la forma diagonal, la cual se obtiene mediante:

$$J = T^{-1} A T \Rightarrow A = T J T^{-1} \Rightarrow f(A) = T f(J) T^{-1}$$

1.2.1.3 Tercer método.- Mediante el teorema de Cayley - Hamilton

El teorema de Cayley – Hamilton es muy útil para comprobar teoremas o resolver problemas que involucran ecuaciones matriciales.

Considere una matriz A de orden $n \times n$ y su ecuación característica:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

El teorema de Cayley – Hamilton plantea que la matriz A satisface su propia ecuación característica, es decir:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

El tercer método se basa en la interpolación de Silvestre [1] basado en las raíces del polinomio característico $\phi(\lambda)$ de A .

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$$

Para raíces distintas del polinomio característico $\phi(\lambda)$ de A .

Supóngase que el grado de la matriz A es m , usando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que e^{At} se obtiene resolviendo la ecuación determinante siguiente [1]:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & e^{\lambda_2 t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & e^{\lambda_m t} \\ I & A & A^2 & \dots & e^{At} \end{vmatrix} = 0$$

De donde si se despeja e^{At} se tiene que:

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k$$

Los coeficientes $\alpha_k(t)$ ($k=0,1,2,\dots,m-1$), se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} &= e^{\lambda_2 t} \\
\vdots & \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} &= e^{\lambda_m t}
\end{aligned}$$

Es decir, resolver:

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k J^k$$

1.2.1.4 Cuarto método.- Por la transformada inversa de Laplace.

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Para obtener e^{At} se invierte la matriz $(sI - A)$, esto produce una matriz cuyos elementos son funciones racionales de s , a cada uno de los cuales se les aplica la transformada inversa de Laplace.

Uno de los métodos para el cálculo de $(sI - A)^{-1}$ es el algoritmo de Levenier, según el cual:

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= \frac{s^{n-1}F_1 + s^{n-2}F_2 + \dots + F_n}{s^n + \theta_1 s^{n-1} + \dots + \theta_n} \\
F_n &= AF_{n-1} + \theta_{n-1}I \\
\theta_n &= -tr\left(\frac{AF_n}{n}\right)
\end{aligned}$$

1.3 ANÁLISIS DE SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS EN EL ESPACIO DE ESTADO

El análisis de los sistemas en su modelo a variables de estado, puede ser realizado a través de la respuesta temporal del sistema y de sus características estructurales (estabilidad, controlabilidad y observabilidad). También puede

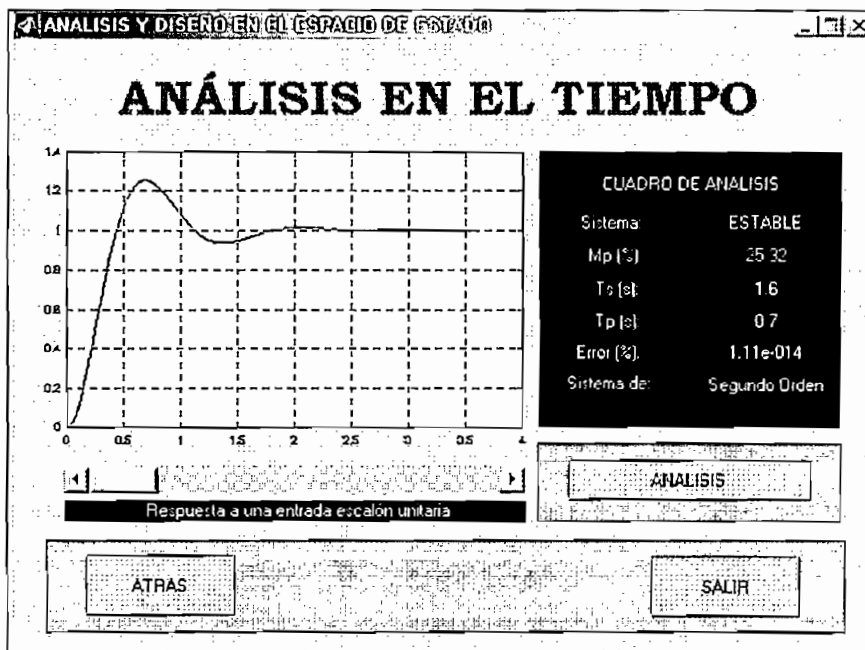
relacionarse con las técnicas clásicas del dominio de la frecuencia como en el caso del diagrama de Bode y el LGR.

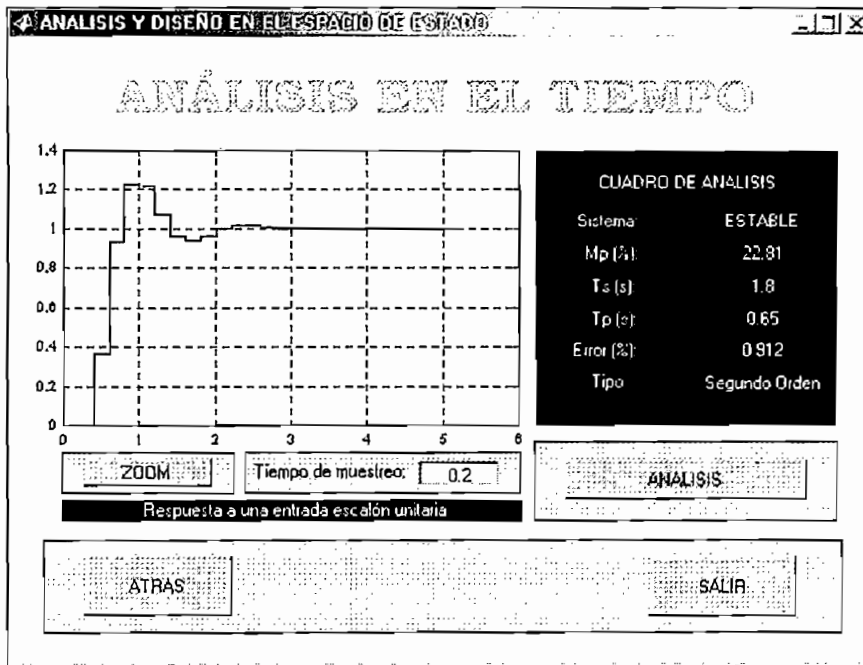
1.3.1 ANÁLISIS EN EL TIEMPO

Al ingresar a la pantalla de *Análisis en el Tiempo* se obtiene el gráfico de la respuesta a una entrada escalón unitario, así como los datos del máximo sobreimpulso porcentual ($M_p\%$), el tiempo de establecimiento (t_s), el tiempo de pico (t_p), el error porcentual ($E_p\%$), el orden del sistema y su estabilidad.

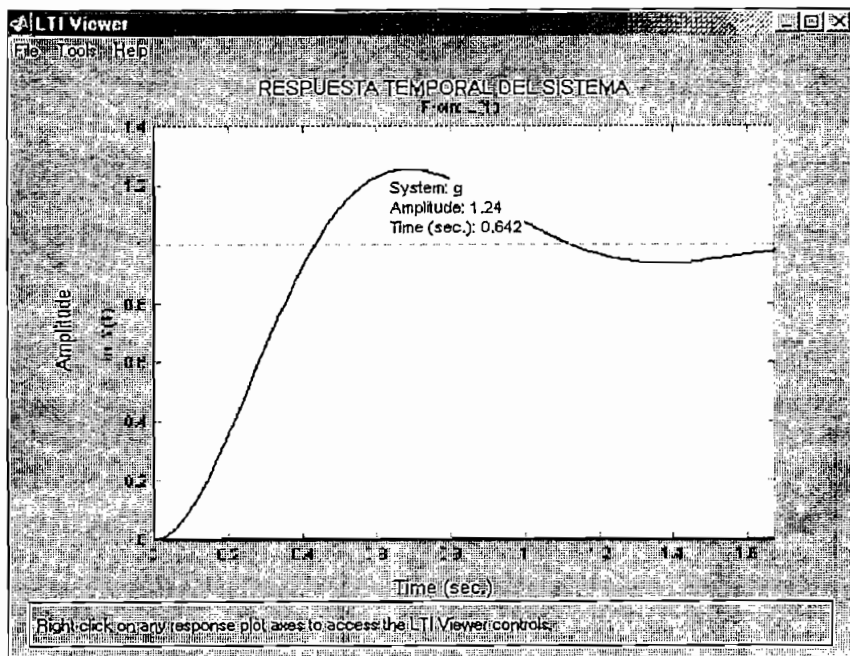
Para los sistemas continuos, se tiene la opción de variar el tiempo de simulación por medio de un "slider" colocado bajo el gráfico de la respuesta a la entrada escalón unitario.

Para el caso de los sistemas discretos se puede realizar un "zoom" en el gráfico de la respuesta a la entrada escalón unitario, así como también se tiene la opción de variar el tiempo de muestreo para observar cómo varía la gráfica.





Tanto para los sistemas continuos como para los discretos, se tiene un botón de *Análisis* por medio del cual se ingresa a la opción del "ltiview" del MATLAB, en la que se obtiene una gráfica más grande de la respuesta a la entrada escalón unitario y además se puede observar el valor de un punto de la curva donde se coloque el puntero del mouse.

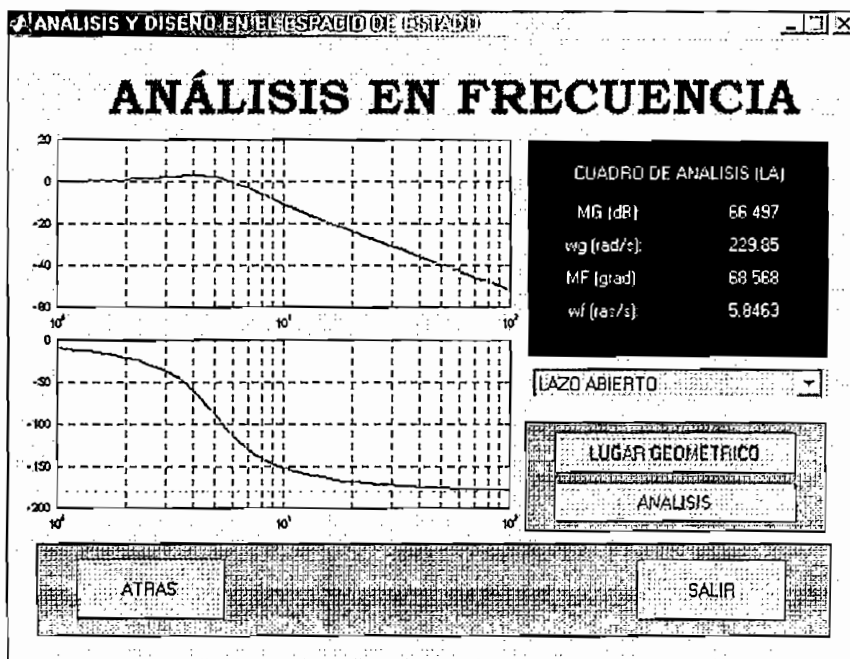


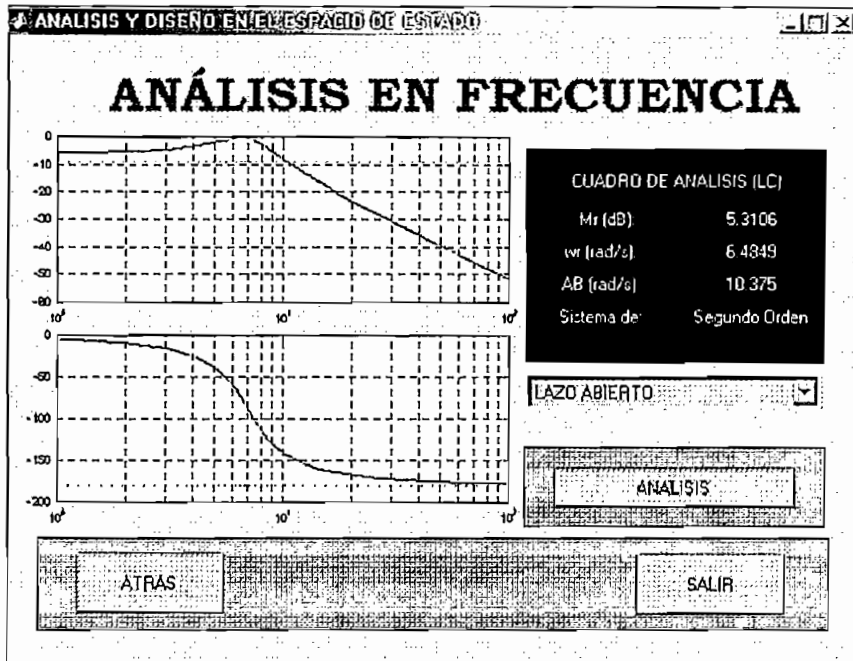
1.3.2 ANÁLISIS EN FRECUENCIA

La pantalla de *Análisis en Frecuencia* permite obtener el diagrama de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado, así como también el lugar geométrico de las raíces, tanto para los sistemas continuos como para los sistemas discretos.

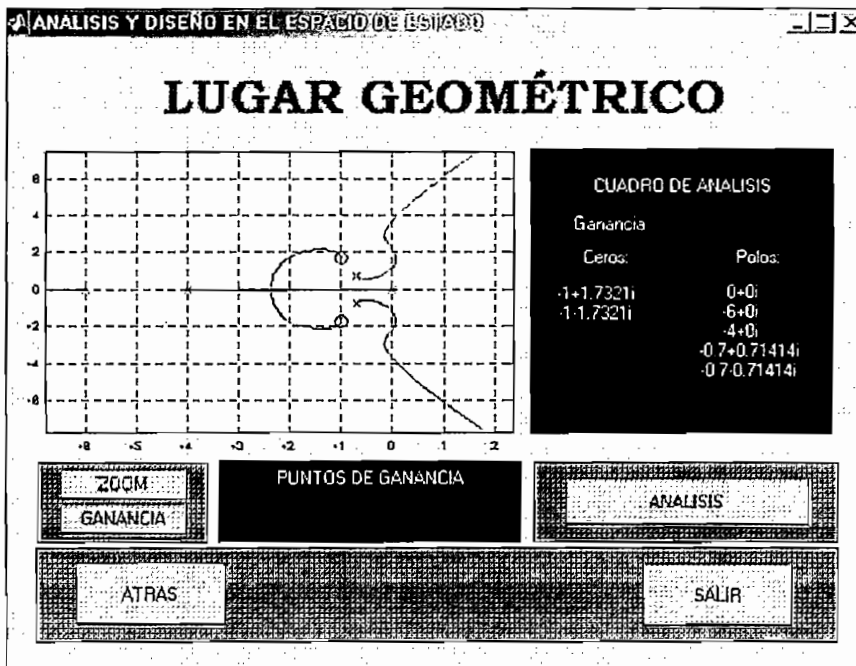
Al presionar el botón de *Análisis en Frecuencia* se ingresa a la pantalla del diagrama de Bode en lazo abierto, en la cual se pueden obtener los datos de margen de fase (MF), margen de ganancia (MG), así como también los valores de las frecuencias de corte para los dos márgenes encontrados (w_f y w_g).

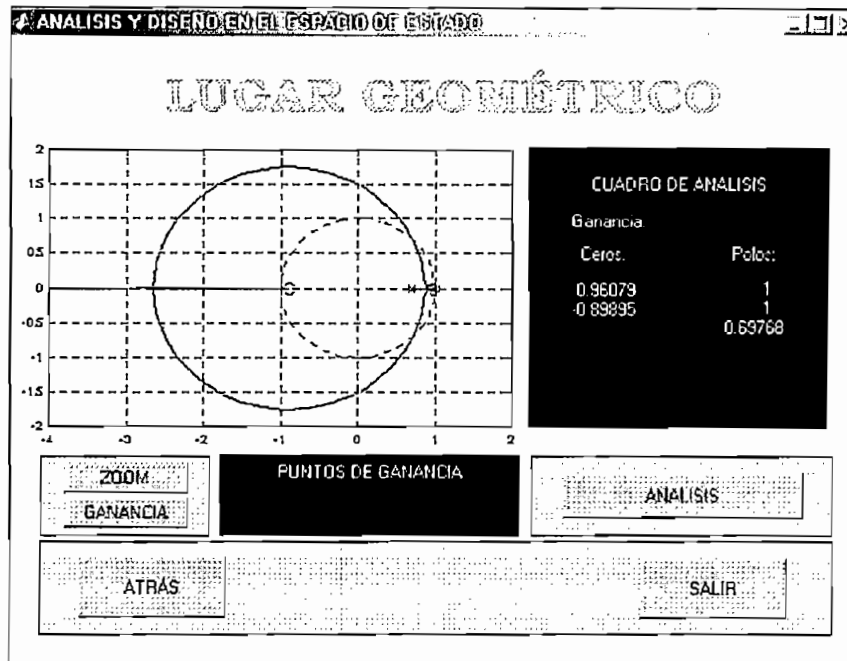
A través de esta pantalla se puede ingresar al análisis en frecuencia por medio del diagrama de Bode en lazo cerrado o al análisis por medio del lugar geométrico de las raíces. En el diagrama de Bode en lazo cerrado se presentan los datos del máximo de resonancia ($M_r\%$), el ancho de banda (AB), la frecuencia del máximo de resonancia (w_r), así como también el orden del sistema en cuestión.





En el análisis por medio del LGR se tiene la opción de realizar un "zoom" de la gráfica, así como también de obtener la ganancia en cualquier punto del lugar geométrico.





1.3.3 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

"Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad, los mismos que juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de control en el espacio de estado. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. Tal vez no exista una solución a este problema si el problema considerado no es controlable. Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable" [1].

El análisis de controlabilidad y observabilidad de un sistema se lo realiza al presionar el botón de *Controlabilidad y Observabilidad* en la pantalla de las características estructurales, al ingresar a esta opción se presenta la siguiente pantalla:

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

La matriz de transformación T_c es el resultado de la multiplicación entre la matriz de controlabilidad de la planta M_p y la inversa de la matriz de controlabilidad M_c .

La matriz de transformación T_o es el resultado de la multiplicación entre la inversa de la matriz de observabilidad de la planta N_p y la matriz de observabilidad N_o .

CONTROLABILIDAD

Matriz M_p	[1 -5.0 1]
Matriz M_c	[5 1.1 0]
Matriz T_c	[0 1.1 0]
Sistema	CONTROLABLE

OBSERVABILIDAD

Matriz N_p	[0 2.2 0]
Matriz N_o	[1 5.0 1]
Matriz T_o	[0.5 -2.5 0 0.5]
Sistema	OBSERVABLE

Realización Mínima

CAMBIO DE MODELOS

ATRAS

SALIR

Al ingresar a esta opción, el programa presenta un aviso en la pantalla indicando si el sistema en cuestión es controlable u observable, además en la pantalla principal de esta opción se muestran los sistemas en las formas canónicas controlable y observable con sus respectivas matrices de transformación (T_c y T_o), así como también las matrices de controlabilidad y de observabilidad de la planta (M_p y N_p), y las matrices de controlabilidad y observabilidad en las formas controlable y observable respectivamente (M_c y N_o). En esta pantalla se tiene la opción de ingresar al menú para el cambio de modelos, el cual ya fue descrito anteriormente.

Si un sistema no es controlable u observable, la pantalla de controlabilidad y observabilidad le da la opción de utilizar el botón de *Realización Mínima*, mediante el cual el programa *ades* realiza la cancelación de polos y ceros del sistema, y recalcula los valores de las matrices antes citadas, volviendo a presentar la pantalla anterior, pero esta vez con el sistema controlable u observable.

1.3.3.1 Controlabilidad

La controlabilidad es una propiedad estructural del sistema por la cual es posible determinar una señal de control u no restringida que a partir de un instante inicial t_0 permite transferir el vector de estado desde un valor inicial a un valor final en un tiempo finito.

Un sistema puede ser pasado a la forma controlable por medio de su matriz de transformación (T_c), la cual se obtiene a partir de:

$$T_c = M_p \cdot M_c^{-1}$$

Donde las matrices M_p y M_c están dadas por:

$$M_p = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & A_c^2 B_c & \cdots & A_c^{n-1} B_c \end{bmatrix}$$

Las matrices A_c y B_c se calculan por medio de las ecuaciones:

$$B_c = T_c^{-1} B$$

$$A_c = T_c^{-1} A T_c$$

“Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $\underline{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito” [1].

1.3.3.2 Observabilidad

La observabilidad es una propiedad estructural del sistema por medio de la cual se puede determinar o reconstruir el vector de estado partiendo de un tiempo inicial t_0 y mediante observaciones de la salida y la entrada (estimación de estado).

Un sistema puede ser pasado a la forma observable por medio de su matriz de transformación (T_o), la cual se obtiene a partir de:

$$T_o = N_p^{-1} \cdot N_o$$

Donde las matrices N_p y N_o están dadas por:

$$N_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$N_o = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ C_o A_o^2 \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{bmatrix}$$

Las matrices A_o y C_o se calculan por medio de las ecuaciones:

$$C_o = CT_o$$

$$A_o = T_o^{-1}AT_o$$

"Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_o si, con el sistema en el estado $\underline{x}(t_o)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito" [1].

1.4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD SEGÚN LIAPUNOV PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

"Liapunov consideró la estabilidad de sistemas generales descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias en forma de variables de estado. Considérese el siguiente conjunto general de ecuaciones de estado:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$$

Si la función $f(\underline{x}) = F\underline{x}$, entonces se tiene el caso lineal. Las ecuaciones han sido descritas de manera que $\underline{x} = 0$ es un punto de equilibrio, lo que equivale a decir que $f(0) = 0$. Se dice que este punto de equilibrio es estable en el sentido de Liapunov si se puede elegir una condición inicial no-cero que dé lugar a una trayectoria que permanezca pequeña. Se dice que el equilibrio es asintóticamente estable si es estable en Liapunov, y además el estado va a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. De manera más formal, el sistema $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ tiene un equilibrio estable en $\underline{x} = 0$ si para cada ε existe una δ tal que si $\|\underline{x}\| < \delta$ entonces $\|\underline{x}\| < \varepsilon$ para todo t ($\|\underline{x}\| = \underline{x}^T \cdot \underline{x}$).

Para sistemas lineales constantes (de parámetros concentrados), se observa de inmediato que $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$ es estable si ninguna de las raíces características de F se encuentra en el plano derecho y si cualesquiera de las raíces sobre el eje imaginario son simples (una raíz múltiple en eje imaginario tendría una respuesta que crece con el tiempo y no podría ser estable). Además, la respuesta de un sistema constante lineal es asintóticamente estable si todos los valores característicos de F se encuentran dentro del semiplano de la izquierda del plano "s" [2].

Considérese la función cuadrática V :

$$V = \underline{x}^T P \underline{x}$$

Donde P es una matriz positiva simétrica. Por ejemplo, si $P = I$, entonces V es la suma de los cuadrados de los componentes de \underline{x} tales que:

$$V = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

En general, si P es positiva, esto significa que se puede encontrar una matriz T , tal que $P = T^T T$. Para dicha P , la función cuadrática satisface las 3 primeras condiciones de la función de Liapunov [2]:

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0 \rightarrow \|x\| \neq 0$
3. V es continua y tiene derivadas continuas con respecto a todos los componentes de \underline{x}
4. $\dot{V}(x) \leq 0$ a lo largo de las trayectorias de la ecuación

Para comprobar que una matriz es simétrica positiva se verifica que los determinantes menores principales n de la matriz sean positivos. Para la cuarta condición de la función de Liapunov, se calcula la derivada de V :

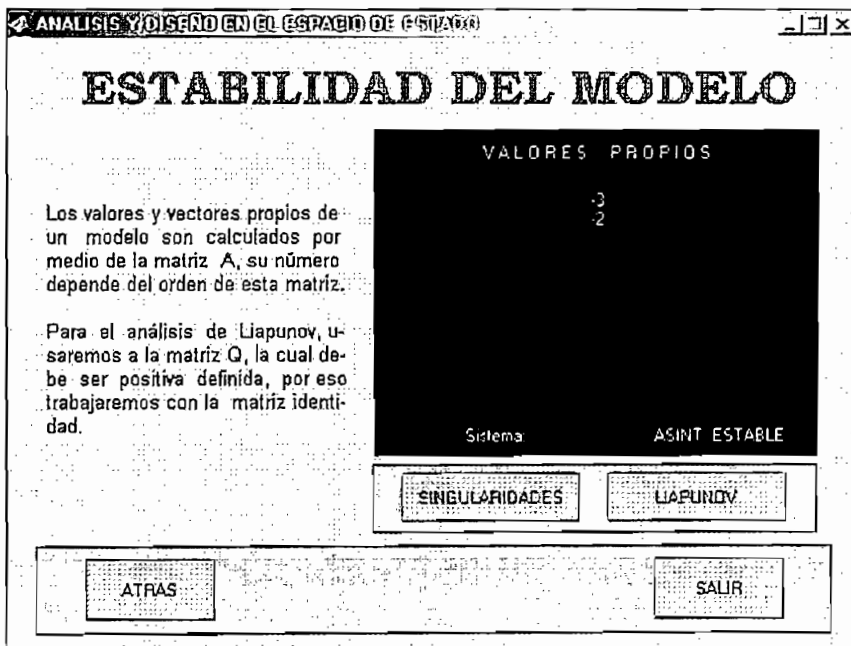
$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{d}{dt}(\underline{x}^T P \underline{x}) = \dot{\underline{x}}^T P \underline{x} + \underline{x}^T P \dot{\underline{x}} \\ \dot{V} &= \underline{x}^T (A^T P + P A) \underline{x} = -\underline{x}^T Q \underline{x} \\ A^T P + P A &= -Q\end{aligned}$$

“Liapunov demostró que para cualquier Q positiva, la solución de P es positiva si, y sólo si, todas las raíces características de A tienen partes reales negativas, es decir, si se da la matriz del sistema A , se puede elegir una Q positiva, como la matriz identidad I , luego resolver la ecuación de Liapunov, (que es justamente un sistema de ecuaciones lineales $n \cdot (n - 1)/2$ incógnitas) y comprobar si P es positiva, observando los determinantes de los menores principales n .

Comprobar la estabilidad considerando la parte lineal se denomina el método indirecto o primer método de Liapunov; emplear la idea de la función de Liapunov directamente sobre las ecuaciones no lineales se denomina método directo o segundo método de Liapunov“ [2].

En el primer método de Liapunov se calculan los estados y las salidas, y también se calculan las trayectorias, en cambio para el segundo método, no se calculan los estados.

El programa *ades* realiza el análisis de estabilidad de Liapunov, al presionar el botón de *Estabilidad* en la pantalla de las características estructurales del sistema, a través de esta tecla se ingresa a la siguiente pantalla:



En esta pantalla se presentan los valores propios del sistema y la estabilidad (asintóticamente estable, estable o inestable); se tiene dos opciones en esta pantalla:

El botón de *Liapunov*, mediante el cual el programa muestra otra pantalla en donde se calculan y se muestran las matrices P y Q , así como también el orden del sistema y nuevamente su tipo de estabilidad.

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

ESTABILIDAD SEGÚN LIAPUNOV

Existen dos métodos para analizar la estabilidad de un sistema por medio de Liapunov.

- 1) Método Directo: Se calculan estados, salidas y trayectorias.
- 2) Método Indirecto: No se calculan estados y usa la función de Liapunov.

$$V(x) = x^T P x$$

Donde: x es el vector de estados.

MATRIZ A
[-5 -6.1 0]

MATRIZ P
[0.7 -0.5 -0.5 0.5]

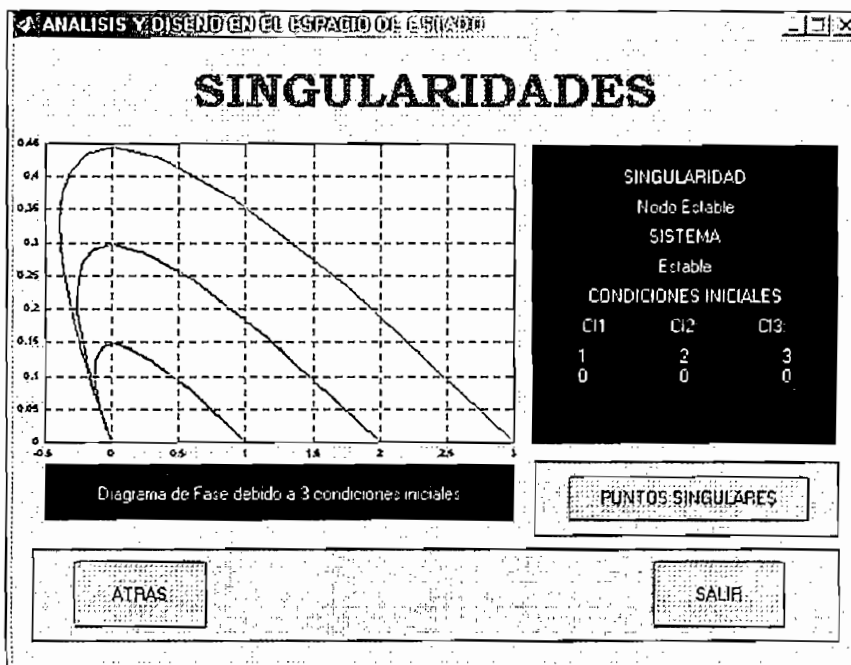
MATRIZ Q
[1 0 0 1]

SISTEMA DE
Segundo Orden

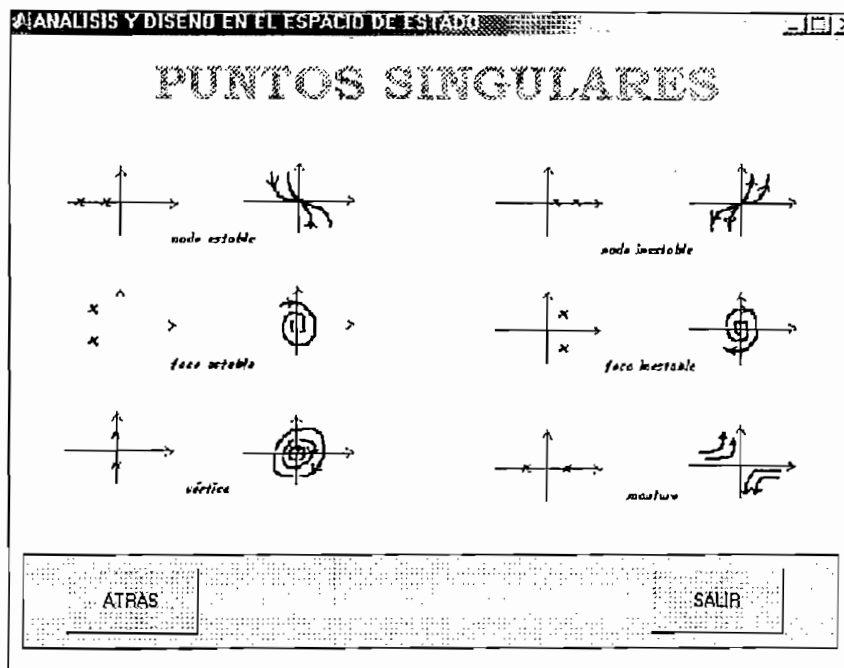
Sistema ASINT. ESTABLE

ATRÁS SALIR

El botón de *Singularidades*, a través del cual se ingresa al análisis en el plano de fase para el sistema en cuestión.



Si se desea observar los 6 diferentes diagramas típicos de fase que pueden tener los sistemas de segundo orden, se debe presionar el botón Puntos Singulares, a través del cual se ingresa a la siguiente pantalla:



En esta pantalla se muestran los seis tipos de puntos singulares para un sistema de segundo orden:

- Foco estable
- Foco inestable
- Nodo estable
- Nodo inestable
- Vértice (centro)
- Montura

CAPITULO 2.

MÉTODOS BÁSICOS DE CONTROL.- Desarrollo de Rutinas

Los métodos básicos de control en el espacio de estado, tanto para los sistemas continuos como para los sistemas discretos son la realimentación de estado, la estimación de estado y la unión de estos dos métodos, es decir, el control con la realimentación más el observador de estado.

La mayor parte de las ecuaciones que se detallan en este capítulo hacen referencia a los sistemas continuos. Ya que el mismo análisis se utiliza para los sistemas discretos, se omiten las deducciones de las ecuaciones en tiempo discreto, excepto en casos en los que no se puede hacer una generalización de los dos análisis.

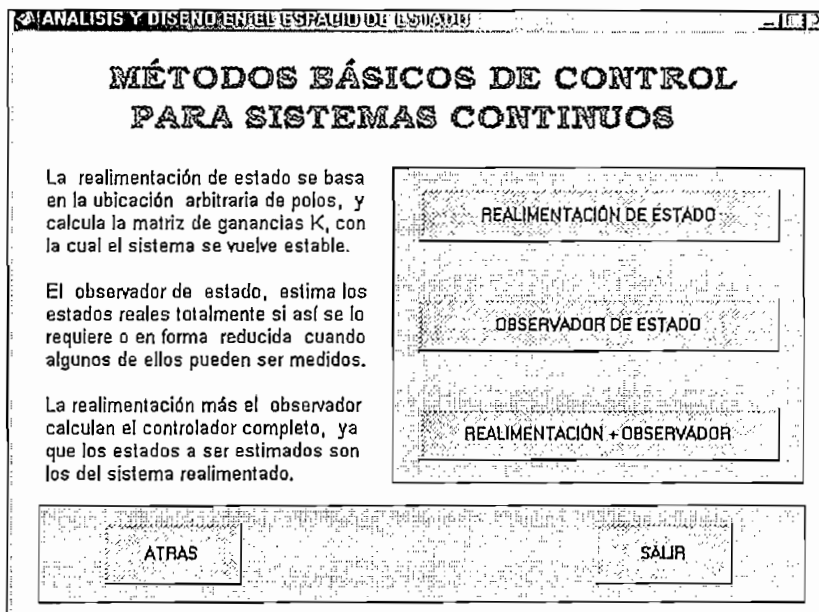
2.1 ESTRATEGIAS DE DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

"El concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de la ubicación de polos y el concepto de observabilidad juega un papel importante para el diseño de los observadores de estado. La realimentación de estado basada en la ubicación de polos, junto con los observadores de estado, es uno de los métodos de diseño fundamentales para los ingenieros de control. Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar polos en lazo cerrado deseados en el plano "s" o en el plano "z" (o las raíces de la ecuación característica) y se podrá diseñar el sistema que proporcione estos polos en lazo cerrado" [2].

El método de diseño a utilizarse es el conocido como técnica de asignación de polos, es decir, en dicha técnica se realimentan todas las variables de estado, de tal forma que todos los polos del sistema en lazo cerrado quedan ubicados en las localizaciones deseadas. En los sistemas reales de control, sin embargo, quizá no

se puedan medir todas las variables de estado, en cuyo caso no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación, entonces es necesario estimar las variables de estado no medibles. Esta estimación puede ser realizada mediante el uso de los observadores de estado.

Se puede seleccionar ingresar al diseño para los *Sistemas Continuos* o los *Sistemas Discretos* en la pantalla de métodos básicos de control, con lo que se ingresará a una de estas pantallas, respectivamente:



A través de estas pantallas se puede ingresar a la realimentación de estado, al observador (estimación) de estado o a su vez a la combinación de estas dos técnicas básicas de control.

“Una de las características atractivas del método de diseño en el espacio de estado, es que el procedimiento consta de dos pasos independientes. Un paso supone que se tienen todos los elementos del vector estado a disposición para propósitos de realimentación. En general, ésta sería una suposición no práctica, ya que un diseñador de control bien entrenado sabría que empleando los otros métodos de diseño, no sería necesario proporcionar tantos sensores. La suposición de que todos los estados están disponibles sencillamente permite

continuar con el primer paso de diseño, esto es la ley de control. El siguiente paso es diseñar un estimador (a veces denominado observador), el cual calcula el vector de estado total cuando se le proporcionan las mediciones del sistema indicadas por la salida ($y = C\underline{x} + Du$). El paso final consistirá en combinar la ley de control con el estimador, donde los cálculos de la ley de control están basados en estados estimados en vez de estados reales.

La ley de control combinada con el estimador proporciona la dinámica de lazo cerrado (determinada por las localizaciones de los polos de lazo cerrado) que es igual a la determinada cuando la ley de control y el estimador se diseñan por separado, debido al principio de separación que establece que la realimentación de estado y el observador pueden realizarse por separado" [2].

2.2 REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS. REGULADOR Y SERVOMECANISMO

La técnica de asignación de polos empieza con la determinación de polos en lazo cerrado deseados a partir de los requerimientos de respuesta transitoria y en estado estable.

Cuando se seleccionan las localizaciones de los polos, siempre es útil tener en mente que el esfuerzo de control requerido está relacionado con lo lejos que hayan sido trasladados los polos de lazo abierto por la realimentación. Además, los ceros de lazo abierto "atraen" a los polos por lo que resulta particularmente difícil apartar un polo de un cero vecino.

"Una filosofía de localización de polos dirigida a reparar solamente los aspectos indeseables de la respuesta de lazo abierto permitirá típicamente actuadores de control más pequeños que el que arbitrariamente elige todos los polos en algún lugar, independientemente de los polos originales en lazo abierto" [1].

Para sistemas de orden superior, los polos en lazo cerrado se pueden escoger como un par deseado de polos dominantes de segundo orden, seleccionando los demás polos para que tengan partes reales que correspondan a formas suficientemente amortiguadas, de manera que el sistema imitará una respuesta de segundo orden con un esfuerzo de control razonable. También es necesario asegurar que los ceros estén lo suficientemente lejos en el semiplano de la izquierda para no tener un efecto apreciable en el comportamiento de segundo orden.

Para sistemas de mayor orden, la variedad de respuestas es demasiado grande, por tanto es útil una selección de respuestas prototipo de orden más alto con características particulares, con las cuales se puede comparar los sistemas de manera útil. Hay varios grupos, de los cuales las respuestas de Bessel e ITEA son los más importantes para tener control.

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA ITEA	
K	LOCALIZACIÓN DE POLOS PARA $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$
1	$s + 1$
2	$s + 0.7071 \pm j0.7071$
3	$(s + 0.7081)(s + 0.521 \pm j1.068)$
4	$(s + 0.424 \pm j1.263)(s + 0.626 \pm j0.4141)$
5	$(s + 0.8955)(s + 0.3764 \pm j1.292)(s + 0.5758 \pm j0.5359)$
6	$(s + 0.3099 \pm j1.2634)(s + 0.5805 \pm j0.7828)(s + 0.7346 \pm j0.2873)$

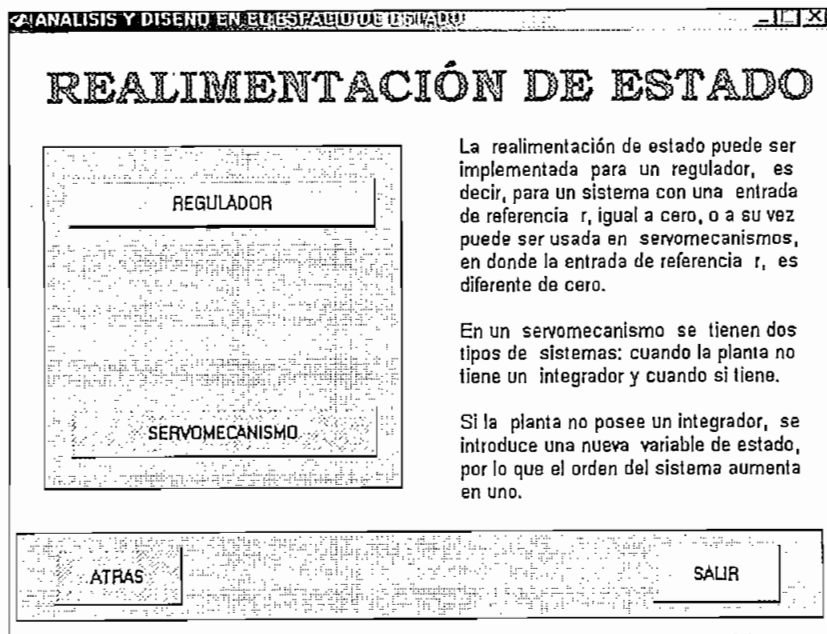
La localización de los polos para otros valores de ω_0 (frecuencia nominal de corte) se pueden obtener sustituyendo s/ω_0 por s en todos los casos.

Las respuestas ITEA tienen un tiempo de crecimiento más rápido cuando se comparan con los prototipos de Bessel.

"Tanto en el problema de regulación como en el de seguimiento (servomecanismo), la formulación de la ubicación de polos del diseño se reduce a

la determinación de la matriz de ganancia de realimentación de estado deseada. El procedimiento para la determinación de dicha matriz de estado es elegir localizaciones adecuadas para todos los polos en lazo cerrado, y a continuación, determinar aquella matriz de ganancia de realimentación de estado que dé como resultado estos polos en lazo cerrado especificados, de forma que los errores causados por perturbaciones o entradas de comando puedan ser reducidos a cero con suficiente velocidad. En el estado final del proceso de diseño la realimentación del estado se lleva a cabo mediante el uso de variables de estado reales, las mismas que probablemente no están disponibles para su medición directa. Si algunas de las variables de estado son medibles, entonces se pueden utilizar estas variables de estado disponibles y utilizar variables de estado estimadas en vez de aquellas verdaderamente no medibles” [2].

Al escoger la opción de *Realimentación de Estado* en el menú de las técnicas básicas de control, se presenta la siguiente pantalla:



2.2.1 REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA UN REGULADOR

Supongamos primero que no existe una señal de entrada ($r = 0$), la ley de control es la realimentación simple de una combinación lineal de todos los estados, esto es:

$$u = -K\underline{x} = -[k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

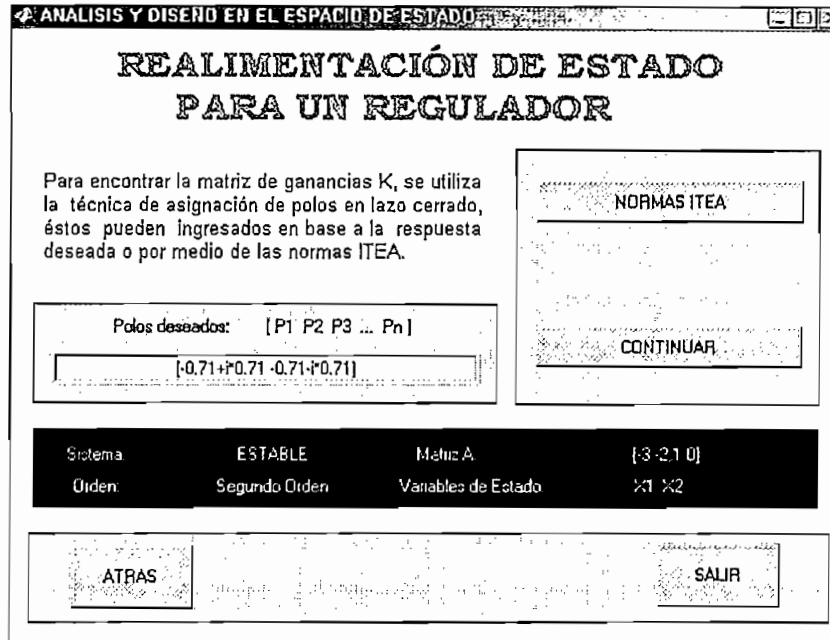
En el enfoque convencional de diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseña un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ξ deseado y una frecuencia natural no amortiguada ω_n . En este enfoque el sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. Aquí se supone que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son insignificantes.

En lugar de especificar sólo los polos dominantes en lazo cerrado, el enfoque actual de ubicación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado. El requerimiento del sistema para que los polos en lazo cerrado se ubiquen en posiciones elegidas en forma arbitraria, es que el sistema sea de estado completamente controlable.

El usuario puede ingresar los polos deseados según las especificaciones de respuesta transitoria que desee tener ($s = -\xi\omega \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$) o a su vez utilizar las respuestas ITEA.

En esta pantalla se muestra el orden del sistema, su estabilidad, la matriz A y las variables de estado que son utilizadas.

Para ingresar una función ITEA se debe presionar el botón *Normas ITEA*, luego, se ingresará a la siguiente pantalla a través del botón *Continuar*.



Considérese el sistema:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t)$$

En donde \underline{x} es el vector de estado, u es la entrada, A matriz de coeficientes constantes $n \times n$ y B matriz de coeficientes constantes $n \times 1$.

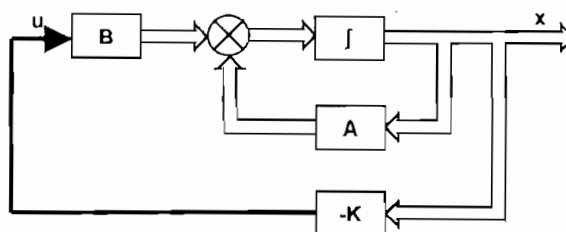


Figura 2.1 Esquema de la realimentación de estado

La señal de control $u = -K\underline{x}$ se determina mediante un estado instantáneo (no hay dinámica en la realimentación). La matriz K de $1 \times n$ se denomina matriz de ganancias de la realimentación de estado. Se supone que u no tiene restricciones.

El sistema de la figura 2.1 muestra el esquema de control a utilizarse. Se trata de un sistema de control en lazo cerrado, porque el estado \underline{x} se realimenta a través de la señal de control u .

Al sustituir la señal de control u en la ecuación del sistema, se tiene que:

$$\dot{\underline{x}}(t) = (A - BK)\underline{x}(t)$$

En donde $\underline{x}(0)$ es el estado inicial provocado por perturbaciones externas.

“La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores característicos de la matriz $A - BK$. Si se elige la matriz K en forma adecuada, la matriz $A - BK$ se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los $\underline{x}(0) \neq 0$ es posible hacer que $\underline{x}(t)$ tienda a cero conforme t tiende a infinito. Los valores característicos de la matriz $A - BK$ se denominan polos reguladores. Si éstos se ubican en el semiplano izquierdo del plano “s”, entonces $\underline{x}(t)$ tiende a cero conforme t tiende a infinito” [2].

2.2.1.1 Pasos de diseño para la ubicación de polos

Los pasos a seguirse para el sistema descrito anteriormente, con la señal de control u definida como $u = -K\underline{x}$, son:

- a) Verificar la condición de controlabilidad para el sistema. Si el sistema es de estado completamente controlable, seguir los siguientes pasos.
- b) A partir del polinomio característico para la matriz A ,

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Determinar los valores de a_1, a_2, \dots, a_n .

- c) Determinar la matriz de transformación T_C que convierte la ecuación de estado del sistema a la forma canónica controlable (Si la ecuación del sistema ya está en esta forma, entonces $T_C = I$). No es necesario escribir la ecuación de estado en la forma canónica controlable. Aquí solo se necesita encontrar la matriz T_C , que se obtiene mediante:

$$T_C = M_P \cdot M_C^{-1}$$

Donde las matrices M_P y M_C están dadas por:

$$M_P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} B_C & A_C B_C & A_C^2 B_C & \cdots & A_C^{n-1} B_C \end{bmatrix}$$

- d) Usando los valores característicos deseados μ_i (polos en lazo cerrado), escribir el polinomio característico que se busca y determinar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

- e) La matriz de ganancias de realimentación de estado K requerida se determina a partir de la ecuación:

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \cdot T_C^{-1}$$

2.2.1.2 Fórmula de Ackermann

Considerar el sistema: $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t)$, el cual se supone que es de estado completamente controlable. También se supone que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

Para encontrar la matriz de realimentación K , para el control mediante la realimentación de estado: $u = -K\underline{x}$, la ecuación de Ackermann es la siguiente:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \cdot \Phi(A)$$

En donde:

$$\Phi(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI$$

Para sistemas de tercer orden o menor, la sustitución directa de la matriz K en el polinomio característico deseado puede ser más simple, pero para sistemas de mayor orden el cálculo de las matrices se vuelve tedioso, por lo que es necesario la utilización de un computador. El programa *ades* realiza todos estos cálculos de una manera rápida y sencilla mediante la aplicación del comando *acker* y del comando *place*.

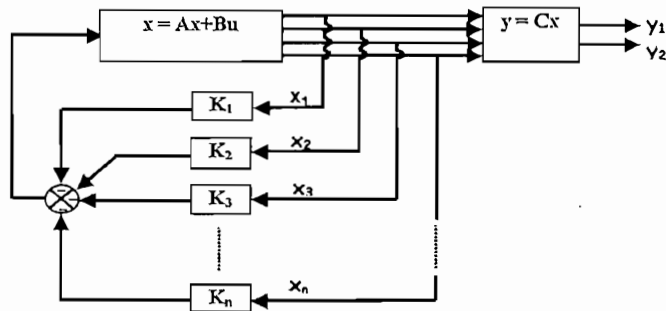
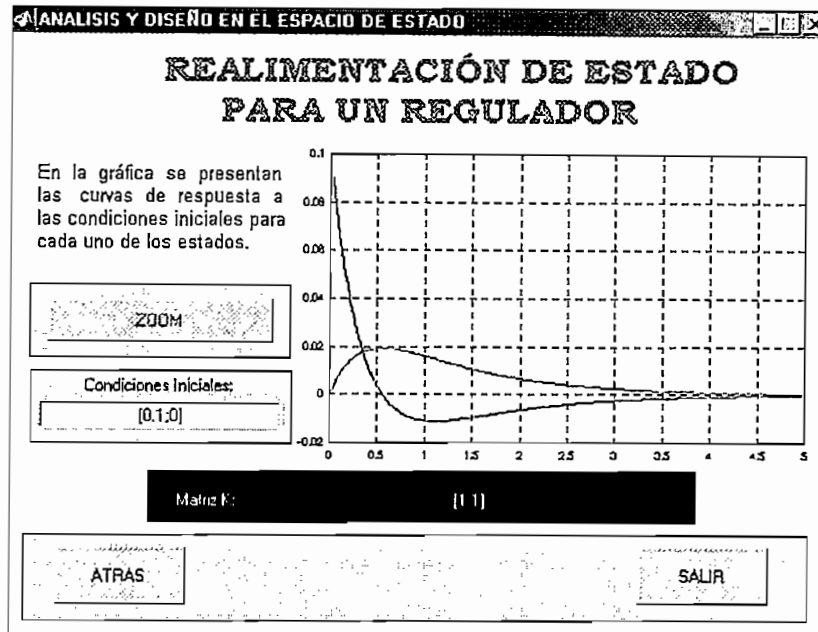


Figura 2.2 Esquema de las ganancias de realimentación de estado

Luego de presionar el botón de continuar en la pantalla de ingreso de los polos en lazo cerrado, se presenta la pantalla de respuesta a condiciones iniciales de las variables de estado del sistema y además se presenta la matriz de realimentación K .



2.2.2 REALIMENTACIÓN DE ESTADO PARA UN SERVOMECANISMO

Para un servomecanismo, la entrada de referencia r es diferente de cero. Por lo que el análisis para la realimentación de estado no difiere mucho del anterior. Se analiza los sistemas tipo 1 y 0 (con y sin integrador en la trayectoria directa).

Al escoger la opción *Servomecanismo* en la pantalla del menú de técnicas básicas se accede a la pantalla de ingreso de polos para un sistema de seguimiento:

Es muy importante saber si el sistema tiene o no un integrador, ya que de esto dependerá el número de polos deseados a introducirse en la pantalla (un sistema se incrementa en uno cuando se le adiciona un integrador).

2.2.2.1 Sistema de seguimiento tipo 1, cuando la planta tiene un integrador

Para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y &= C\underline{x}\end{aligned}$$

La figura 2.3 muestra al sistema a ser analizado. Mediante una elección adecuada de un conjunto de variables de estado, es posible seleccionar la salida e igual a una de las variables de estado.

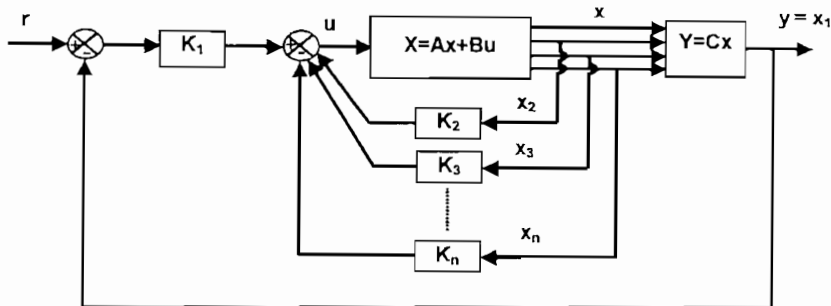
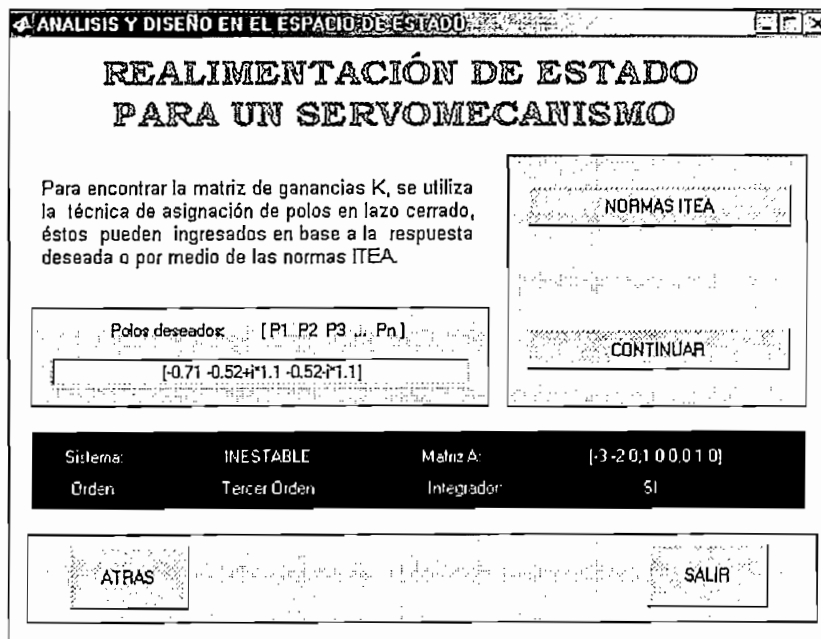


Figura 2.3 Esquema del servomecanismo cuando la planta tiene integrador

Se supone que $y = x_1$ y la entrada de referencia r un escalón unitario ($r(\infty) = r$)



La realimentación de estado utilizada es la siguiente:

$$u = -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) = -K\underline{x} + k_1r$$

En donde: $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n]$

Suponga que la entrada de referencia se aplica a $t = 0$. Así para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu = (A - BK)\underline{x} + Bk_1r$$

Se diseña el servomecanismo tipo 1 de modo que los polos en lazo cerrado se ubiquen en las posiciones deseadas. El sistema diseñado será un sistema asintóticamente estable y $y(\infty)$ tenderá a un valor constante r ; $u(\infty)$ tenderán a cero.

En estado estable se tiene que:

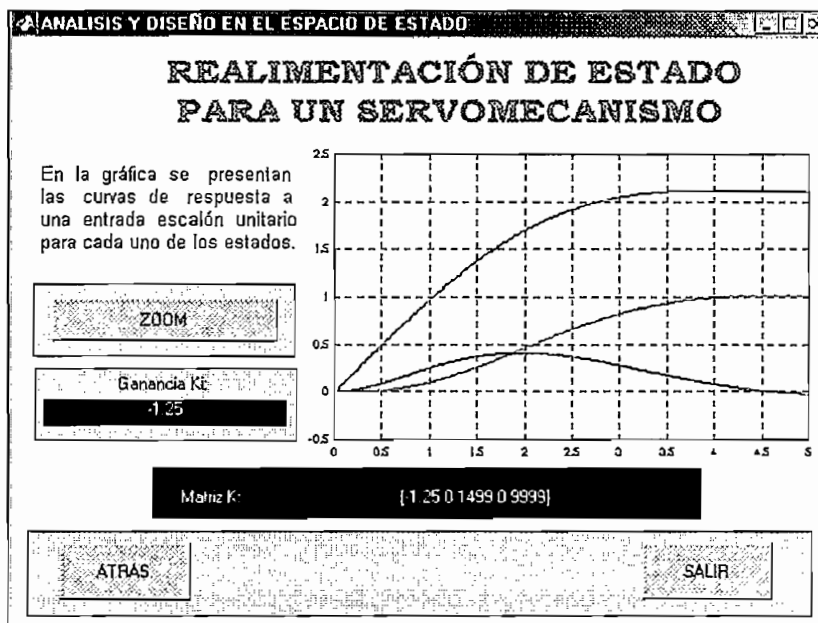
$$\dot{\underline{x}}(\infty) = (A - BK)\underline{x}(\infty) + Bk_1r(\infty)$$

Por lo que si se resta las dos últimas ecuaciones, se tiene la ecuación describe la dinámica del error.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\underline{x}}(\infty) &= (A - BK)[\underline{x}(t) - \underline{x}(\infty)] \\ \dot{\underline{e}}(t) &= (A - BK)\underline{e} \end{aligned}$$

El diseño del sistema de seguimiento tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que $\underline{e}(t)$ tienda a cero, dada cualquier condición inicial $\underline{e}(0)$. Si el sistema en cuestión es de estado completamente controlable, entonces, especificando los valores característicos

deseados para la matriz $A-BK$, la matriz K se determina mediante la técnica de ubicación de polos descrita anteriormente.



En esta pantalla se presentan las gráficas de los estados en el tiempo y además se muestran la matriz de ganancias K y la ganancia del integrador k_i .

2.2.2.2 Sistema de seguimiento tipo 0, cuando la planta no tiene un integrador

Si la planta no tiene integrador (planta tipo 0), el principio básico del diseño de un sistema de seguimiento tipo 0 es insertar un integrador en la trayectoria directa entre el comparador de error y la planta, como en la figura 2.4.

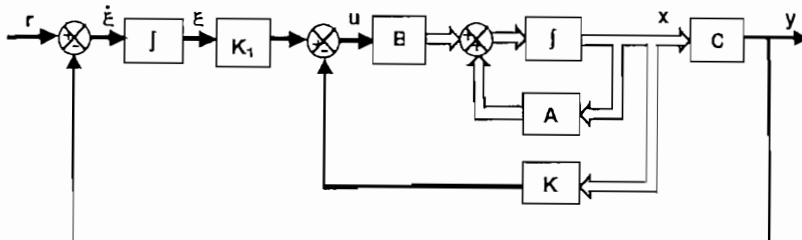
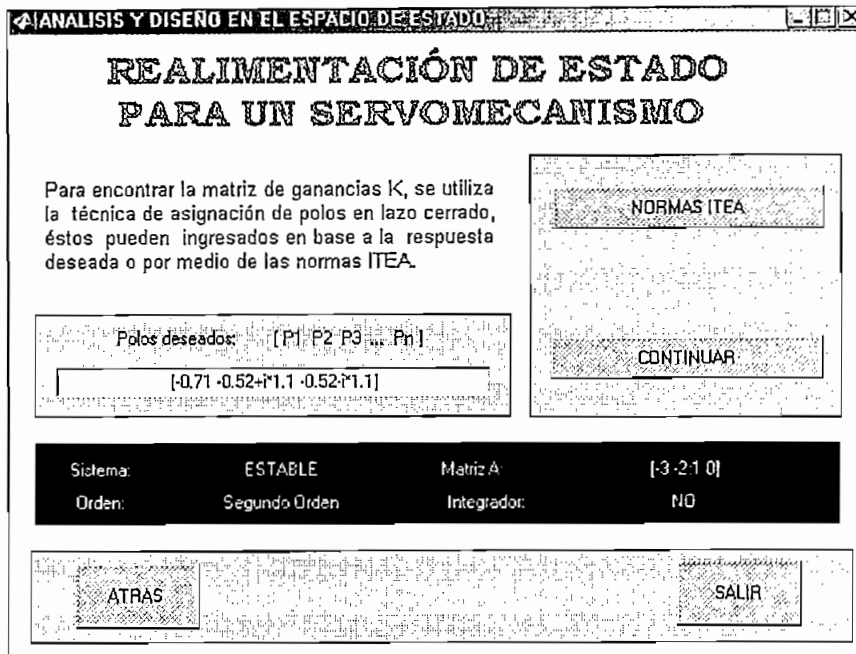


Figura 2.4 Esquema del servomecanismo cuando la planta no tiene integrador



A partir del diagrama se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y &= C\underline{x} \\ u &= -K\underline{x} + k_1\xi \\ \dot{\xi} &= r - y = r - C\underline{x}\end{aligned}$$

En donde \underline{x} es el vector de estado de la planta, u es la señal de control, y es la salida, ξ es la salida del integrador (variable de estado aumentada), r es la entrada de referencia.

Supóngase que la planta es de estado completamente controlable. La función de transferencia de la planta se obtiene mediante:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele por un cero de la planta en el origen, se supone que $G_p(s)$ no tiene un cero en el origen.

Suponga que la entrada de referencia se aplica en $t = 0$. en este caso para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Se diseña un sistema asintóticamente estable, tal que $\underline{x}(\infty)$, $\underline{\xi}(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan a valores constantes, respectivamente. Así en un estado estable $\dot{\underline{\xi}}(t) = 0$ y se obtiene $y(\infty) = r$.

En estado estable se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(\infty) \\ \dot{\underline{\xi}}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(\infty) \\ \underline{\xi}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Por tanto si se resta las dos últimas ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\underline{x}}(\infty) \\ \dot{\underline{\xi}}(t) - \dot{\underline{\xi}}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(t) - \underline{x}(\infty) \\ \underline{\xi}(t) - \underline{\xi}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u(t) - u(\infty)]$$

Definiendo las siguientes variables:

$$\underline{x}(t) - \underline{x}(\infty) = \underline{x}_e(t)$$

$$\underline{\xi}(t) - \underline{\xi}(\infty) = \underline{\xi}_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

Por tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_e(t) \\ \dot{\underline{\xi}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_e(t) \\ \underline{\xi}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

En donde:

$$u_e(t) = -K\underline{x}_e(t) + k_1\underline{\xi}_e(t)$$

Definiendo al vector de error $\underline{e}(t)$ de $(n + 1)$ - ésimo orden como:

$$\underline{e}(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

Se tiene que:

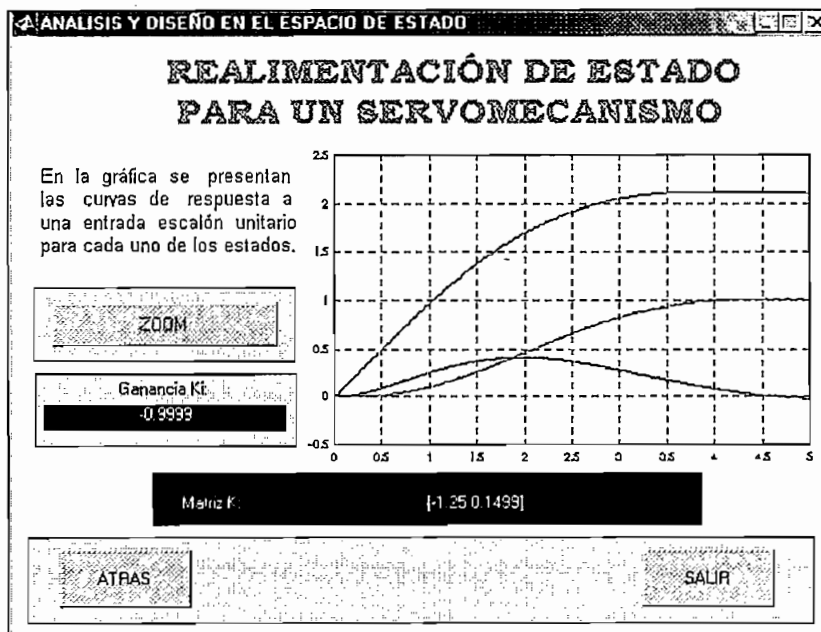
$$\dot{\underline{e}}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \underline{e}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) = \hat{A} \underline{e}(t) + \hat{B} u_e(t)$$

$$u_e(t) = -\hat{K} \underline{e}(t)$$

En donde:

$$\hat{K} = [K \quad -k_1]$$

Es decir, que el diseñar un sistema de seguimiento de tipo 0, cuando no se tiene un integrador en la planta, se convierte en el diseño de un regulador estable de $(n + 1)$ - ésimo orden, que lleve a cero el nuevo vector de error $\underline{e}(t)$, dada cualquier condición inicial $\underline{e}(0)$.



Si el sistema en cuestión es de estado completamente controlable, entonces, especificando la ecuación característica deseada para el sistema, se determina la matriz \hat{K} deseada mediante la técnica de ubicación de polos.

Los valores en estado estable de $\underline{x}(t)$, $\xi(t)$ y $u(t)$ son:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(\infty) &= 0 = A\underline{x}(\infty) + B u(\infty) \\ \xi(\infty) &= 0 = r - C\underline{x}(\infty) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Así mismo se tiene que:

$$u(\infty) = -K\underline{x}(\infty) + k_1 \xi(\infty) \Rightarrow \xi(\infty) = \frac{1}{k_1} [u(\infty) + K\underline{x}(\infty)]$$

2.3 OBSERVADORES DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS. OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

Para los diseños anteriores, tanto en el regulador como en el servomecanismo, se asumió que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo, en la práctica, no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación.

"Es muy importante no diferenciar una variable de estado para generar otra, la diferenciación de una señal siempre decrementa la relación señal a ruido, por lo que este último por lo general fluctúa más rápidamente que la señal de comando. En ocasiones, la relación señal a ruido se decrementa varias veces mediante un proceso único de diferenciación. Existen métodos para estimar las variables de estado que no se miden sin un proceso de diferenciación, la estimación de semejantes variables de estado por lo general se denomina observación. Un

dispositivo que estima u observa las variables de estado se llama observador de estado, o simplemente observador" [2].

Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición directa, se denomina *observador de estado de orden completo*. Hay ocasiones en las que un observador tal no es necesario, en el que solo se requiere la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que se miden directamente. Así se tiene que dado que las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino solo las $n - 1$ variables de estado, ya que n es la dimensión del vector de estado restada en 1 por la dimensión del vector de salida.

Un observador que estima menos de n variables de estado se denomina *observador de estado de orden reducido*. Si este observador tiene el orden mínimo posible, se denomina *observador de estado de orden mínimo*.

"Un observador de estado estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control. Los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad" [2].

En muchos casos prácticos el vector de estado observado $\tilde{\underline{x}}$ se usa en la realimentación de estado para generar el vector de control deseado.

Considérese el sistema definido por:

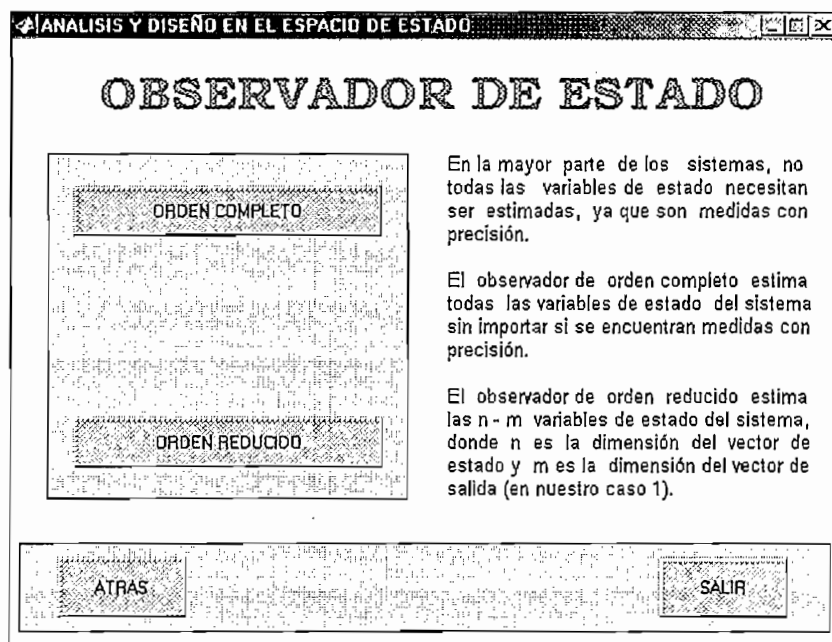
$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

El vector de estado \underline{x} se aproximará mediante el estado $\tilde{\underline{x}}$ del modelo dinámico:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = A\tilde{\underline{x}}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\tilde{\underline{x}}(t)]$$

Este modelo dinámico representará al observador de estado. El observador de estado tiene a y y a u como entradas y $\tilde{\underline{x}}$ como salida. El último término del segundo miembro de esta ecuación es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida y medida, y la salida $C\tilde{\underline{x}}$ estimada. La matriz L funciona como una matriz de ponderación. El término de ponderación vigila el estado $\tilde{\underline{x}}$. Ante la presencia de una discrepancia entre las matrices A y B usadas en este modelo y las del sistema real, la adición del término de corrección ayuda a reducir los efectos producidos por la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real.

El ingreso a la pantalla de menú para los observadores de estado se realiza mediante la pulsación del botón *Observación de Estado* en la pantalla de las técnicas básicas de control tanto para los sistemas continuos como para los discretos.



A través de esta pantalla se tiene la opción de escoger entre el observador de orden completo o el observador de orden reducido.

Para los sistemas discretos se tiene la opción de elegir, además del observador de orden completo y el de orden reducido, el observador de estado actualizado

2.3.1 OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN COMPLETO

El orden del observador de estado que se analiza es igual al del sistema. Para un sistema que se define mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

El modelo del observador se define como:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = A\tilde{\underline{x}} + Bu + L[y - C\tilde{\underline{x}}]$$

Para obtener la ecuación de error del observador, se resta las dos ecuaciones anteriores, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} - \dot{\tilde{\underline{x}}} &= A\underline{x} - A\tilde{\underline{x}} - L(C\underline{x} - C\tilde{\underline{x}}) \\ \dot{\underline{x}} - \dot{\tilde{\underline{x}}} &= (A - LC) \cdot (\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) \\ \dot{\underline{e}} &= (A - LC)\underline{e}\end{aligned}$$

A partir de la última ecuación se tiene que el comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz $A - LC$. Si la matriz $A - LC$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $\underline{e}(0)$. Es decir que $\tilde{\underline{x}}(t)$ convergerá a $\underline{x}(t)$ sin considerar los valores de $\underline{x}(0)$ y $\tilde{\underline{x}}(0)$. Si se eligen los valores característicos de la matriz $A - LC$ de tal forma que el comportamiento dinámico del vector error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, cualquier vector de error tenderá a cero, con una velocidad adecuada.

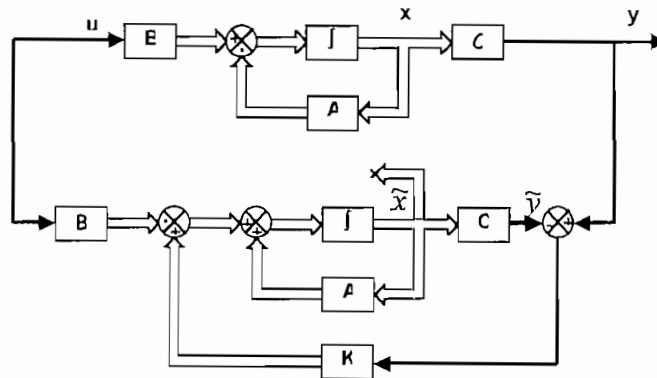


Figura 2.4 Esquema del observador de estado de orden completo

Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz L tal que $A - LC$ tenga valores característicos arbitrariamente deseados.

2.3.1.1 Problema dual

El problema de diseñar un observador de orden completo se convierte en determinar la matriz de ganancias del observador L , tal que la dinámica del error sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente, por lo tanto el diseño se reduce al cálculo de la matriz L apropiada, tal que $A - LC$ tenga los valores característicos deseados, es decir el problema se convierte en el mismo que en el caso de la ubicación de polos para la realimentación de estado.

Considérese el sistema definido mediante:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

Al diseñar el observador de estado de orden completo, se resuelve el problema dual, dando solución al problema de ubicación de polos para el sistema dual considerando las transpuestas de las matrices A y C :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{z}}(t) &= A^T \underline{z}(t) + C^T v(t) \\ n(t) &= B^T \underline{z}(t)\end{aligned}$$

Donde la señal de control es:

$$v = -K \underline{z}$$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación de estado K se determina de tal modo que la matriz $A^T - C^T K$ produzca el conjunto de valores característicos deseados.

Si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los valores característicos de la matriz del observador de estado, tomando los mismos μ_i que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, se obtiene :

$$|sI - (A^T - C^T K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de $A^T - C^T K$ y los de $A - LC$ son iguales, se tiene que:

$$|sI - (A^T - C^T K)| = |sI - (A - LC)|$$

Comparando los dos polinomios característicos se tiene que:

$$L = K^T$$

2.3.1.2 Pasos de diseño para el estimador de estado

Los pasos a seguirse para el sistema descrito anteriormente, son similares a los pasos para la ubicación de polos.

- a) Verificar la condición de observabilidad para el sistema. Si el sistema es de estado completamente observable, siga los siguientes pasos.
- b) A partir del polinomio característico para la matriz A ,

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Determinar los valores de a_1, a_2, \dots, a_n .

- c) Determinar la matriz de transformación T_O que convierte la ecuación de estado del sistema a la forma canónica observable (Si la ecuación del sistema ya está en esta forma, entonces $T_O = I$). No es necesario escribir la ecuación de estado en la forma canónica observable. Aquí solo se necesita encontrar la matriz T_O , que se obtiene mediante:

$$T_O = N_P^{-1} \cdot N_O$$

Donde las matrices N_P y N_O están dadas por:

$$N_P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$N_O = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ C_o A_o^2 \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{bmatrix}$$

- d) Usando los valores característicos deseados μ_i (polos del observador), escribir el polinomio característico que se busca y determinar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

e) La matriz de ganancias de realimentación de estado L requerida se determina a partir de la ecuación:

$$L = T_O \cdot \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \alpha_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Los valores característicos deseados de la ecuación característica deben elegirse de modo que el observador de estado responda al menos de cinco a diez veces más rápido que el sistema en lazo cerrado.

En la ecuación de estado de orden completo se ha supuesto que las matrices A y B del observador son exactamente iguales a las de la planta real, pero en la práctica esto no podría ser cierto, es decir que el error no podría tender a cero. Al igual que en el caso de la ubicación de polos, si el sistema es de tercer orden o menor, puede ser más sencilla la sustitución directa de la matriz L dentro del polinomio característico deseado. Otra manera de determinar la matriz de ganancias del observador L es usando la fórmula de Ackermann.

2.3.3.1 Fórmula de Ackermann

Considerar el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned}$$

El cual se supone que es de estado completamente observable. También se supone que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

Para encontrar la matriz de realimentación L , para la estimación de los estados, la ecuación de Ackermann es la siguiente:

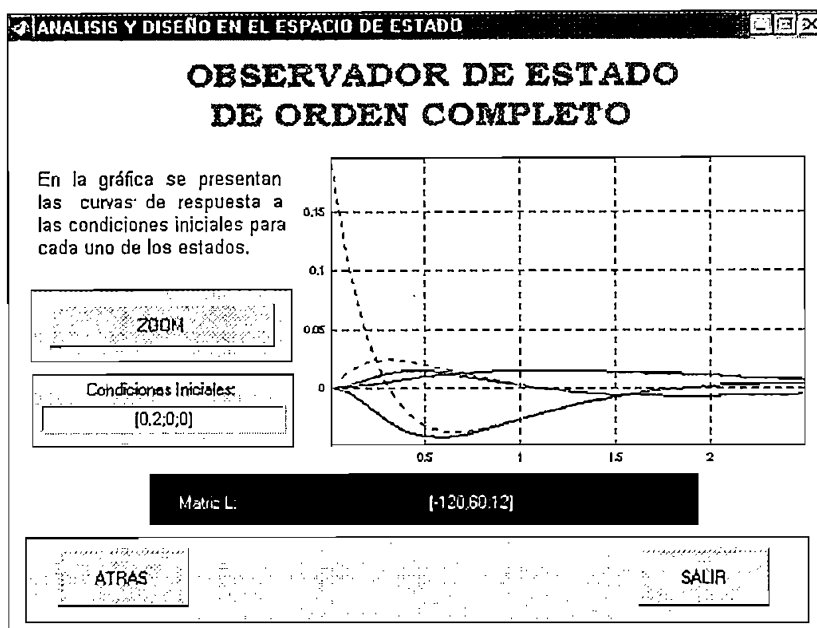
$$L = \Phi(A) \cdot \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde:

$$\Phi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I$$

Igual que en el problema de la ubicación de polos, para sistemas de tercer orden o menor, la sustitución directa de la matriz L en el polinomio característico deseado puede ser más simple, pero para sistemas de mayor orden el cálculo de las matrices se vuelve tedioso, por lo que es necesario la utilización de un computador. El programa *ades* realiza todos estos cálculos de una manera rápida y sencilla mediante la aplicación del comando *acker* y del comando *place* al igual que para la determinación de la matriz K .

La razón por la cual se eligen polos más rápidos que en el regulador, es por la seguridad de un decaimiento más rápido de los errores de estimación, comparados con la dinámica deseada, lo que provoca que los polos del regulador dominen la respuesta total. Si el ruido de un sensor es lo suficientemente grande como para constituir una preocupación, se puede decidir la elección de los polos del estimador para que sean dos veces más lentos que los polos del regulador, lo que conduciría a un sistema con un ancho de banda menor y una mejor filtración de ruido. Sin embargo, la respuesta del sistema total en este caso podría estar muy influida por la localización de los polos del estimador. Si los polos del



De igual manera, para los sistemas discretos se tiene la opción de graficar los estados y variar las condiciones iniciales del sistema.

2.3.2 OBSERVADOR DE ESTADO DE ACTUALIZADO (SISTEMAS DISCRETOS)

En el observador de orden completo discreto, se tiene el estado observado $\tilde{x}(k)$ a partir de las mediciones del vector de salida $y(k-1)$ y del vector de control hasta $u(k-1)$. Por lo tanto el vector de control $u(k) = -K\tilde{x}(k)$ no utiliza la información de la salida actual $y(k)$. Una formulación diferente del observador de estado consiste en utilizar $y(k)$ para la estimación de $\tilde{x}(k)$. Esto se puede llevar a cabo separando el proceso de observación en dos pasos, en el primer paso, se determina $z(k+1)$, que es una aproximación $x(k+1)$ basada en $\tilde{x}(k)$ y $u(k)$. En el segundo paso, se utiliza $y(k+1)$ para mejorar $z(k+1)$. La $z(k+1)$ mejorada es $\tilde{x}(k+1)$. El observador de estado basado en esta formulación se conoce como observador actualizado.

Para hacer posible que los valores característicos de $A - KCA$ se ubiquen en forma arbitraria, el rango de la matriz N_P^T debe ser n , entonces los valores característicos de $A - KCA$ pueden ubicarse en forma arbitraria mediante una selección adecuada de L , y ésta puede determinarse de manera similar como se hizo en el observador de estado de orden completo, es decir, en la fórmula de Ackermann:

$$L = \Phi(A) \cdot \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN REDUCIDO

Los observadores analizados hasta el momento, se diseñan para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas variables de estado se miden con precisión y no necesitan estimarse.

Suponga que el vector de estado $\underline{x}(t)$ es un vector de dimensión n y que el vector de salida y es un vector de salida m medible. Dado que las m variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, no necesitan estimarse n variables de estado, sino solo $(n - m)$ variables de estado. Así, el observador de orden reducido se vuelve un observador de $(n - m)$ -ésimo orden. Tal observador es el observador de orden mínimo.

Sin embargo, es importante considerar que si la medición de las variables de salida implica ruido significativo y es relativamente imprecisa, el uso del observador de orden completo puede provocar un mejor desempeño del sistema.

En éste trabajo se analiza el caso en que la salida es un escalar ($m = 1$).

Considere el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

En donde el vector de estado \underline{x} se divide en dos partes x_a (un escalar), \underline{x}_b [un vector de dimensión $(n - 1)$]. Aquí la variable de estado x_a es igual a la salida y , por lo tanto se mide directamente, \underline{x}_b es la parte que no se puede medir del vector de estado, de este modo se tiene:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\underline{x}}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \underline{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \underline{x}_b \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En donde A_{aa} es un escalar, A_{ab} matriz de $1 \times (n - 1)$, A_{ba} matriz de $(n - 1) \times 1$, A_{bb} matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$, B_a es un escalar y B_b matriz de $(n - 1) \times 1$.

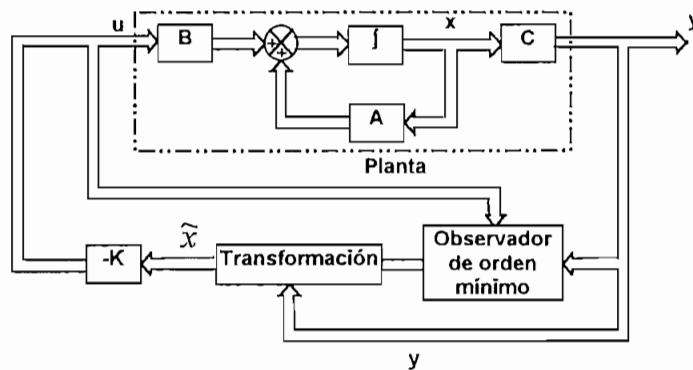


Figura 2.6 Esquema del observador de orden reducido

Por tanto:

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= A_{aa}x_a + A_{ab}\underline{x}_b + B_a u \\ \dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u &= A_{ab}\underline{x}_b\end{aligned}$$

Los términos del primer miembro de la última ecuación se pueden medir. Esta ecuación funciona como la ecuación de salida. Al diseñar el observador de orden mínimo, se considera que el primer miembro de esta ecuación contiene

cantidades conocidas. Por tanto esta ecuación relaciona variables medibles y no medibles del estado.

La parte no medida del estado se vuelve:

$$\dot{\underline{x}}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}\underline{x}_b + B_b u$$

Considerando que los términos $A_{ba}x_a$ y $B_b u$ son cantidades conocidas, ésta última ecuación describe la dinámica de la parte no medida del estado.

La deducción de la ecuación del error para el observador de orden mínimo es similar a la que hizo para el de orden completo, por tanto solo se presenta su resultado:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_b - \dot{\tilde{\underline{x}}}_b &= (A_{bb} - LA_{ab})(\underline{x}_b - \tilde{\underline{x}}_b) \\ \dot{\underline{e}} &= (A_{bb} - LA_{ab})\underline{e} \end{aligned}$$

Esta es la ecuación del error para el observador de orden mínimo, observe que \underline{e} es un vector de orden $(n - 1)$.

La fórmula de Ackermann para el observador de orden reducido es:

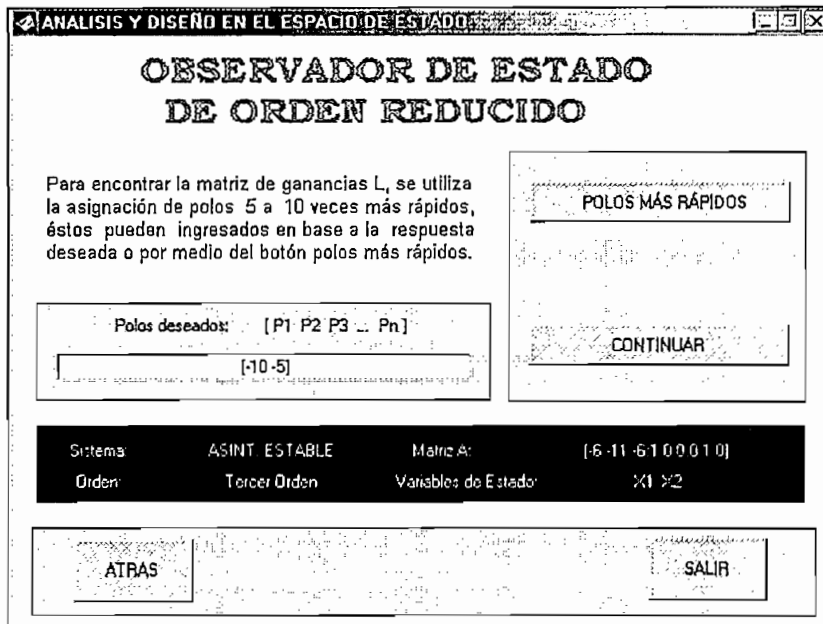
$$L = \Phi(A_{bb}) \cdot \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \\ A_{ab}A_{bb}^2 \\ \vdots \\ A_{ab}A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde:

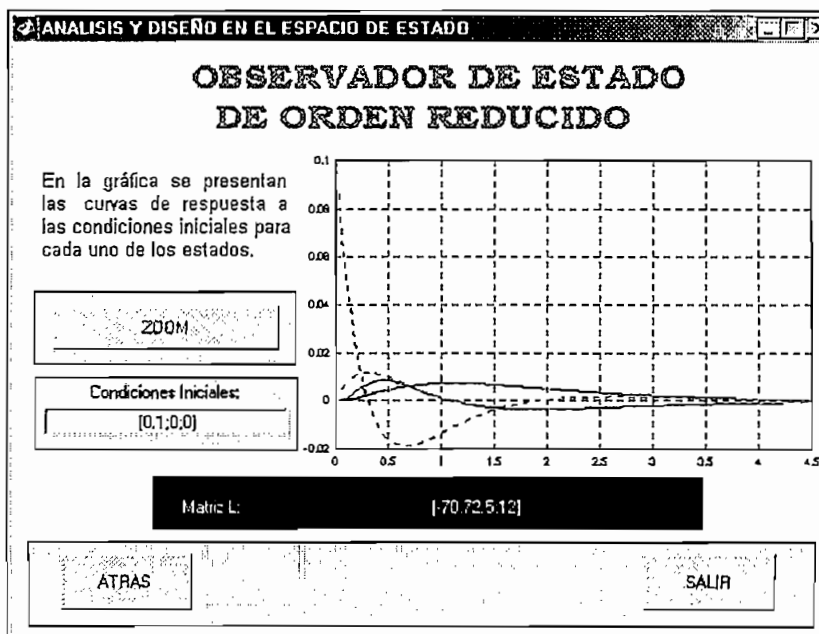
$$\Phi(A_{bb}) = A_{bb}^{n-1} + a_1 A_{bb}^{n-2} + \dots + a_{n-2} A_{bb} + a_{n-1} I$$

Al igual que en el observador de orden completo, para el ingreso de los polos del observador de orden reducido, el usuario, debe colocar los polos deseados en el espacio en blanco de la pantalla o a su vez escoger la opción *Polos más Rápidos*

por medio de la cual el programa *ades* coloca en pantalla una sugerencia de valores para los polos (diez veces más rápidos que los polos del sistema original).



Después de presionar el botón de continuar en esta pantalla, se presenta la pantalla de respuesta a condiciones iniciales de las variables de estado del sistema, tanto las reales, como las estimadas (en línea entrecortada) y además se presenta la matriz de realimentación L .



2.4 REALIMENTACIÓN MÁS OBSERVADOR DE ESTADO

Si se emplea la realimentación de estado utilizando los estados estimados, se completa el diseño de control. La combinación de los dos métodos anteriores (realimentación y estimación de estado) dan como resultado el controlador – observador.

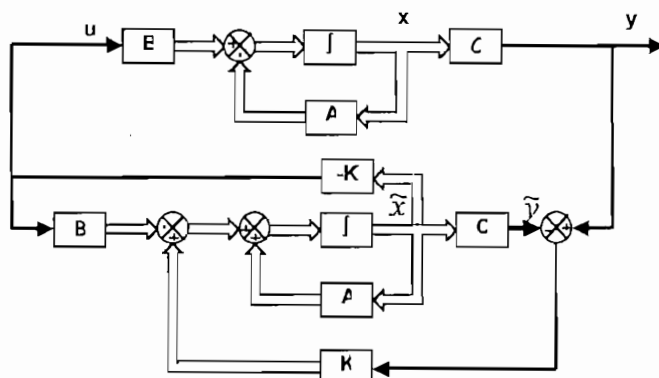


Figura 2.7 Esquema del controlador más el observador de estado

En el proceso de diseño mediante la ubicación de polos, se asumió que el estado real $\underline{x}(t)$ estaba disponible para su realimentación. Sin embargo, en la práctica tal vez no pueda medirse el estado real $\underline{x}(t)$, por lo que se necesita diseñar un observador y por consiguiente usar el estado observado $\tilde{\underline{x}}(t)$ para la realimentación. Por tanto, el proceso de diseño tiene ahora dos etapas, la primera que consiste en la determinación de la matriz de realimentación K para producir la ecuación característica deseada y la segunda que consiste en la determinación de la matriz de ganancias del observador L para obtener la ecuación característica deseada del observador.

Para visualizar los efectos del uso del estado observado $\tilde{\underline{x}}(t)$ en lugar del estado real $\underline{x}(t)$ en la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado, considérese un sistema de estado completamente controlable y observable, definido mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

Para el control mediante la realimentación basada en el estado observado $\tilde{\underline{x}}(t)$:

$$u = -K\tilde{\underline{x}}$$

Con este control, la ecuación de estado se vuelve:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} - BK\tilde{\underline{x}} = (A - BK)\underline{x} + BK(\underline{x} - \tilde{\underline{x}})$$

La diferencia entre el estado real $\underline{x}(t)$ y el estado observado $\tilde{\underline{x}}(t)$ se definió como el error $\underline{e}(t)$:

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)$$

Por tanto:

$$\dot{\underline{x}} = (A - BK)\underline{x} + BK\underline{e}$$

La ecuación del error observado que se obtuvo en el numeral 2.3.1 es:

$$\dot{\underline{e}} = (A - LC)\underline{e}$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación describe la dinámica del sistema de control mediante la realimentación del estado observado. La ecuación característica para el sistema es:

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{vmatrix} = 0$$

$$|sI - A + BK| \cdot |sI - A + LC| = 0$$

Los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado consisten en los polos producidos sólo por el diseño mediante la ubicación de los polos y los polos producidos sólo por el diseño del observador. Esto significa que el diseño mediante la ubicación de los polos y diseño del observador son independientes uno del otro. Se diseñan por separado y se combinan para formar el sistema de control mediante la realimentación del estado observado. Observe que, si el orden de la planta es n , entonces el observador es también de n -ésimo orden (si se usa el observador de estado de orden completo) y la ecuación característica resultante para todo el sistema en lazo cerrado se vuelve de orden $2n$.

Los polos en lazo cerrado deseados que genera la realimentación del estado (la ubicación de polos) se eligen de tal forma que el sistema satisfaga los requerimientos de desempeño. Por lo general los polos del observador se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema. Como ya se dijo, una regla práctica es elegir una respuesta del observador al menos 5 o 10 veces más rápida que la respuesta del sistema.

Dado que el observador, en general no es un dispositivo físico, sino un programa de computadora, es posible incrementar la velocidad de respuesta para que el estado observado converja rápidamente hacia el estado actual. Por lo general, la velocidad de respuesta máxima del observador se limita sólo mediante el problema de la sensibilidad y el ruido implícitos en el sistema de control. Observe que, dado que los polos del observador se ubican a la izquierda de los polos en

lazo cerrado deseados en el proceso de ubicación de polos, éstos últimos dominarán en la respuesta.

2.4.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL CONTROLADOR – OBSERVADOR

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

Suponiendo que el sistema es completamente observable, pero que \underline{x} no está disponible para una medición directa. Suponga que se emplea el control mediante la realimentación del estado observado:

$$u = -K\tilde{\underline{x}}$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación, se tiene:

$$U(s) = -K\tilde{\underline{X}}(s)$$

En el sistema de control mediante la realimentación de estado observado, la ecuación del observador es:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = (A - LC)\tilde{\underline{x}} + Bu + Ly$$

Y su transformada de Laplace:

$$s\tilde{\underline{X}}(s) = (A - LC)\tilde{\underline{X}}(s) + BU(s) + LY(s)$$

Supóngase que en esta ecuación el estado observado inicial es cero, $\tilde{\underline{x}}(0) = 0$. Por tanto al manejar los dos ecuaciones en el dominio de "s", se tiene:

$$\tilde{\underline{X}}(s) = (sI - A + LC + BK)^{-1}LY(s)$$

Por tanto,

$$U(s) = -K(sI - A + LC + BK)^{-1}LY(s)$$

Recuerde que para el análisis tanto y como u son escalares. En la figura 2.8 se muestra la representación del sistema en diagrama de bloques. La función de transferencia del controlador es:

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + LC + BK)^{-1}L$$

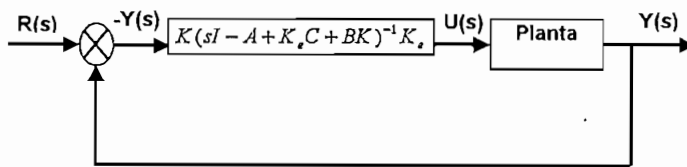


Figura 2.8 Esquema del controlador en cascada con la planta

Para el sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo, se aplica el mismo análisis anterior. La ecuación característica del sistema se obtiene como:

$$|sI - A + BK| \cdot |sI - A_{bb} + LA_{ab}| = 0$$

Los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo comprenden los polos en lazo cerrado producidos por la ubicación de los polos (valores característicos de la matriz $A - BK$) y los polos en lazo cerrado producidos por el observador de orden mínimo (valores característicos de la matriz $A_{bb} - LA_{ab}$). Por tanto el diseño



En esta pantalla se puede observar la respuesta del sistema compensado (en línea roja) y la respuesta del sistema original (en línea azul).

CAPITULO 3.

TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL.- Desarrollo de Rutinas

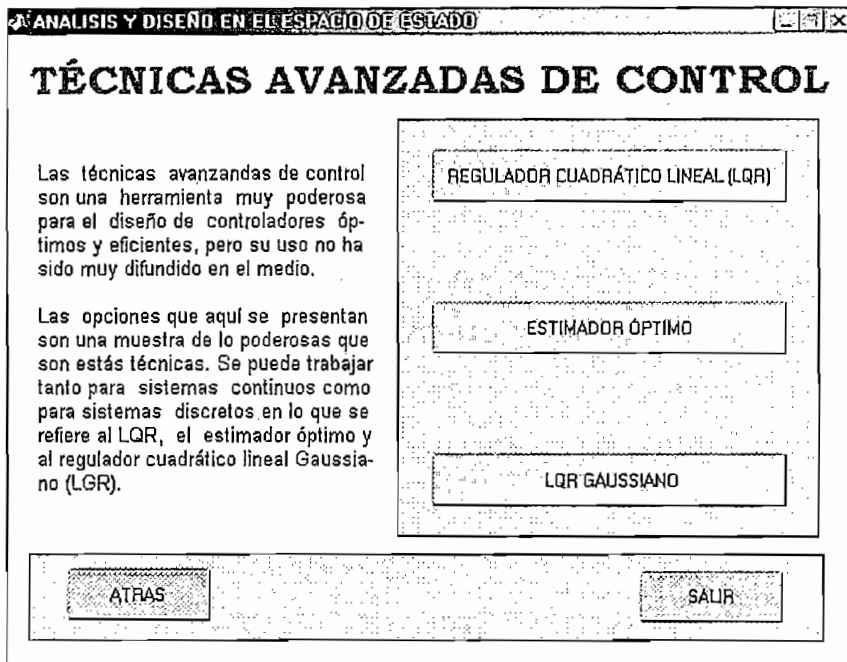
La ventaja y potencialidad de la aplicación del control a variables de estado se visualiza cuando estas técnicas se extienden a sistemas multivariables, a controles óptimos, a sistemas estocásticos y no lineales, tanto continuos como discretos.

Este capítulo trata sobre el diseño de reguladores y observadores lineales óptimos y que pueden considerar un proceso estocástico (aquellos que tienen perturbaciones aleatorias o incertidumbres en las mediciones).

Concretamente se estudia:

- El regulador cuadrático lineal (LQR)
- El filtro de Kalman
- El regulador cuadrático Gaussiano

Para ingresar a la pantalla de las técnicas avanzadas de control, se presiona el botón de *Técnicas Avanzadas* en la pantalla del menú completo del programa *ades*, la pantalla de las técnicas avanzadas es la siguiente:



A través de ésta pantalla, se tiene acceso a las siguientes opciones:

- Regulador cuadrático lineal continuo
- Regulador cuadrático lineal discreto
- Filtro de Kalman continuo
- Filtro discreto de Kalman
- Regulador cuadrático lineal Gaussiano

3.1 EL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL [3] [14] [17]

El problema del regulador cuadrático lineal se desarrolla a partir de los años 60 y consiste en minimizar un funcional con respecto a las entradas de control sujetas a las restricciones lineales en el sistema.

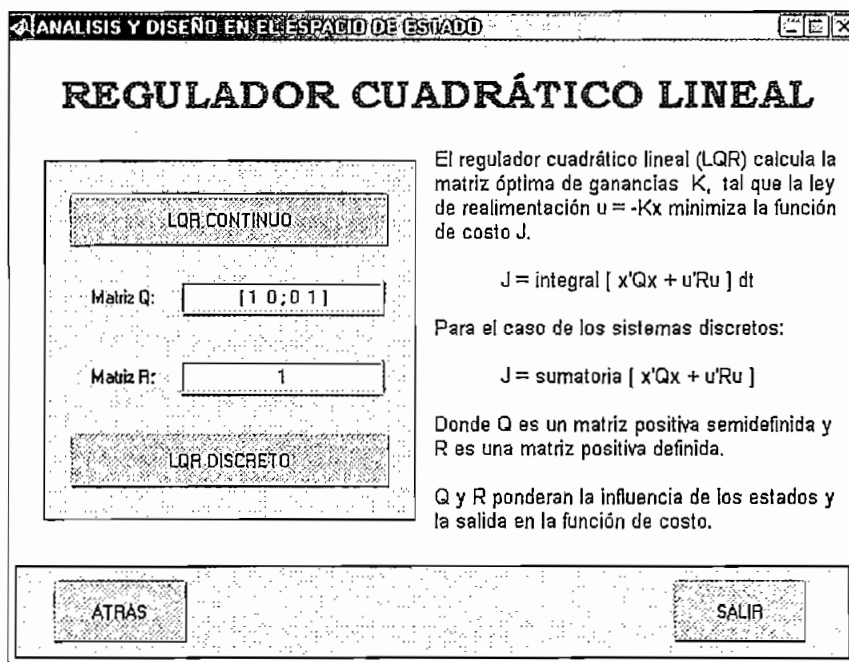
La ventaja de la formulación de problemas de LQR (regulador cuadrático lineal) es que da lugar a leyes de control que son fáciles de implementar.

El trabajo se restringe a problemas de regulación. Se asume que el sistema está en equilibrio y se desea mantener en equilibrio aún en presencia de

perturbaciones. El objetivo es minimizar el efecto de dichas perturbaciones sobre el sistema.

Se pone énfasis en el estado estacionario, en donde la optimización considera el horizonte extendido al infinito. En este caso la ley de control es una función invariante en el tiempo de los estados o de las salidas del sistema.

Las aplicaciones del control lineal cuadrático van progresivamente incrementando a medida que los ingenieros son entrenados adecuadamente en estas técnicas.



3.1.1 PROBLEMA DEL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL

Considérese el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B u(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}$$

La función de costo o función objetivo de la forma:

$$J = \int_0^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + u^T R u) dt$$

Donde Q es una matriz simétrica positiva semidefinida ($Q \geq 0$), esto es que su forma cuadrática asociada $\mathcal{J} = \underline{x}^T Q \underline{x} \geq 0$, es decir no negativa. R es una matriz simétrica positiva definida ($R > 0$). Las matrices Q y R ponderan respectivamente el peso o influencia de los estados y el control sobre la función de costo. La función de costo es cuadrática y acumulativa.

El problema consiste en minimizar J con respecto a la entrada de control $u(t)$.

Una interpretación simple de la función de costo se puede apreciar a través de la función escalar:

$$J = \int_0^T (qx^2 + ru^2) dt$$

Donde J representa una suma ponderada de energía de estado y de control. Si r es muy grande con respecto a q , la energía de control es fuertemente penalizada (motores pequeños, actuadores o ganancias del amplificador a ser implementadas con la ley de control: $0 \leq u_C \leq u_{max}$). Si q es mucho mayor a r el estado es severamente penalizado dando como resultado un sistema muy amortiguado que rechaza grandes oscilaciones o sobrepicos en los estados del sistema. El control es lineal pues se establece $u = -K\underline{x}$, donde K es una constante para el caso estacionario (K puede ser variable en el tiempo).

3.1.2 SOLUCIÓN DEL LQR UTILIZANDO EL PRINCIPIO DEL MÍNIMO

Los problemas de control óptimo (optimización) pueden resolverse utilizando varias técnicas como las ecuaciones de Euler – Lagrange, la teoría de Hamilton – Jacobi – Bellman (programación dinámica), el principio del mínimo de Pontriagin.

En este trabajo se utiliza el principio del mínimo de Pontriagin que maneja la teoría convencional de optimización.

Para llegar al principio del mínimo considérese el siguiente sistema dinámico continuo:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= f[\underline{x}(t), u(t), t] \\ t_0 &\leq t \leq t_1\end{aligned}$$

Donde $\underline{x}(t)$ es el vector de estado y $u(t)$ es la señal de control, así como también los datos t_0 , t_1 y $\underline{x}(t_0)$ son conocidos.

Para el control se escoge la función $u(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ para minimizar la función de costo:

$$J = \Phi[\underline{x}(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L[\underline{x}(t), u(t), t] dt$$

Se define la función Hamiltoniana:

$$H[\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t] = L(\underline{x}, u, t) + \underline{\lambda}^T f(\underline{x}, u, t)$$

La función de costo aumentada es:

$$\bar{J} = J + \int_{t_0}^{t_1} \underline{\lambda}^T(t) \left\{ f[\underline{x}(t), u(t), t] - \dot{\underline{x}}(t) \right\} dt$$

Recuérdese la utilización de los multiplicadores de Lagrange: Sea el máximo de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0$ (restricción de igualdad), se forma la función:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange que permite manejar una función sin restricciones con las condiciones necesarias para el mínimo.

- $F_x = f_x + \lambda g_x = 0$
- $F_y = f_y + \lambda g_y = 0$
- $F_\lambda = g = 0$

Introduciendo $H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t)$, se tiene que:

$$\bar{J} = \Phi[\underline{x}(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} [H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t) - \underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}}] dt$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{\lambda}^T \underline{x}) = \underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{\lambda}}^T \underline{x} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} -\underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{\underline{\lambda}}^T \underline{x} - \frac{d}{dt} \underline{\lambda}^T \underline{x} \right] dt$$

Entonces:

$$\bar{J} = \Phi[\underline{x}(t_1), t_1] - \underline{\lambda}^T(t_1)\underline{x}(t_1) + \underline{\lambda}^T(t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t) + \dot{\underline{\lambda}}^T \underline{x} \right\} dt$$

Este es un problema de cálculo variacional. Se escoge $u(t)$ para la optimización, entonces:

$$u(t) + \delta u(t) \Rightarrow \bar{J} + \delta \bar{J}$$

El término $\delta \bar{J}$ es cero para t_0 .

La perturbación $\delta u(t)$ da lugar a una perturbación de estado $\delta \underline{x}(t)$. Entonces:

$$\delta \bar{J} = [(\Phi_x - \underline{\lambda}^T) \delta \underline{x}]_{t=t_1} + [\underline{\lambda}^T \delta \underline{x}]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (H_x + \dot{\underline{\lambda}}^T) \delta \underline{x} + H_u \delta u \right\} dt = 0$$

$$\delta H = H_x \delta \underline{x} + H_u \delta u$$

Además $\underline{x}(t_0)$ especifica $\delta \underline{x}|_{t=t_0} = 0$. También $\delta \underline{x}|_{t=t_1} = 0$, para un problema de valor de borde o frontera de dos puntos a lo largo de la trayectoria (TPBVP: two point boundary value problem). Si $H_u = 0$, para todo $\delta u(t)$ claramente se cumple para la expresión que queda al final:

$$\delta \bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} H_u \delta u dt = 0$$

Si el vector señal de control es restringido, esto es irrelevante.

Si $H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t)$ no depende explícitamente de t , luego H es una constante a lo largo de la trayectoria. También:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= H_x \dot{\underline{x}} + H_u \dot{u} + \dot{\underline{\lambda}}^T H^T_{\lambda} + H_t \\ \frac{dH}{dt} &= H_x f + 0 + \dot{\underline{\lambda}}^T f + H_t = 0 \\ H_{\lambda} &= f^T \\ \dot{\underline{\lambda}}^T &= -H_x\end{aligned}$$

Porque $H = L + \underline{\lambda}^T f$, $H_t = 0$ porque t no es explícito.

Entonces se puede reemplazar por la condición del *mínimo de Pontriaguín* (principio del mínimo).

El óptimo $u^*(t)$ satisface:

$$H(\underline{x}, u^*, \underline{\lambda}, t) \leq H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t)$$

Para todo t y para todo u que satisfaga las restricciones.

Se tiene entonces un problema de valor de borde de dos puntos (TPBVP: two point boundary value problem), sujeto a (utilizando argumentos variacionales):

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, u, t) \\ H_u(\underline{x}, u, \underline{\lambda}, t) &= 0 \\ \dot{\underline{\lambda}}^T &= -H_x\end{aligned}$$

Donde $x(t_0)$ es dato y $\underline{\lambda}^T(t_1) = \Phi_{\underline{x}}(t_1)$ es la condición de transversalidad.

3.1.3 CÁLCULO DEL CONTROL ÓPTIMO

Si se trata de minimizar:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + u^T R u) dt$$

Sujeta a: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ con $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, para $Q \geq 0$ (no negativa) y $R > 0$ (positiva definida), entonces:

$$\underline{u}(t) = -R^{-1}B^T P(t)\underline{x}(t)$$

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Esta es la ecuación matricial diferencial de Riccati, donde si $T \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{P}(T) = 0$ en estado estacionario.

3.1.3.1 Demostración de la ecuación matricial diferencial de Riccati

Se calcula el Hamiltoniano:

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = \frac{1}{2} [\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}] + \underline{\lambda}^T (A\underline{x} + B\underline{u})$$

El principio del mínimo expresa que el control óptimo y las trayectorias óptimas deben satisfacer:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\lambda}}$$

$$-\dot{\underline{\lambda}}^T = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$$

Utilizando las reglas de derivación de matrices y vectores se tiene:

$$H_{\underline{u}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = R\underline{u} + B^T \underline{\lambda} = 0$$

$$\underline{u}(t) = -R^{-1}B^T \underline{\lambda}(t)$$

$$-\dot{\underline{\lambda}}^T = H_{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = Q\underline{x} + A^T \underline{\lambda}$$

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} - BR^{-1}B^T \underline{\lambda}(t)$$

Donde \underline{u}^* es el control óptimo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \mapsto \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ -\dot{\underline{\lambda}} &= Q\underline{x} + A^T \underline{\lambda} \mapsto \underline{\lambda}(t_1) = 0 \\ \underline{u}^* &= R^{-1}B^T \underline{\lambda}\end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales lineales anteriores forman un TPBVP (two point boundary value problem), el cual debido a las condiciones de borde es difícil de resolver. Nótese que R tiene que ser positiva definida para que exista su inversa. Por tanto, se tiene la ecuación matricial que define a la matriz Hamiltoniana:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema planteado se hace la sustitución $\underline{\lambda}(t) = P(t)\underline{x}(t)$ (realimentación de estado lineal), entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\lambda}}^T &= -H\underline{x} = -\underline{x}^T Q - \underline{\lambda}^T A \\ \dot{\underline{\lambda}} &= \frac{d\underline{\lambda}}{dt} = P\dot{\underline{x}} + \dot{P}\underline{x} = P[A\underline{x} - BR^{-1}B^T P\underline{x}] + \dot{P}\underline{x} \\ \dot{\underline{\lambda}} &= -Q\underline{x} - A^T P\underline{x} \\ PA - PBR^{-1}B^T P + \dot{P} &= -Q - A^T P \\ \dot{P} + PA + A^T P &= PBR^{-1}B^T P - Q\end{aligned}$$

Y por tanto de aquí se obtiene la ecuación de Riccati ($P(T) = 0$), que es una ecuación diferencial no lineal de primer orden, la misma que debe ser resuelta hacia atrás en el tiempo.

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q$$

Entonces la formulación anterior del problema de control óptimo se conoce como el problema para el tiempo o el horizonte finito. Este problema da como resultado un control realimentado variable en el tiempo de la forma:

$$u(t) = -K(t)\underline{x}(t)$$

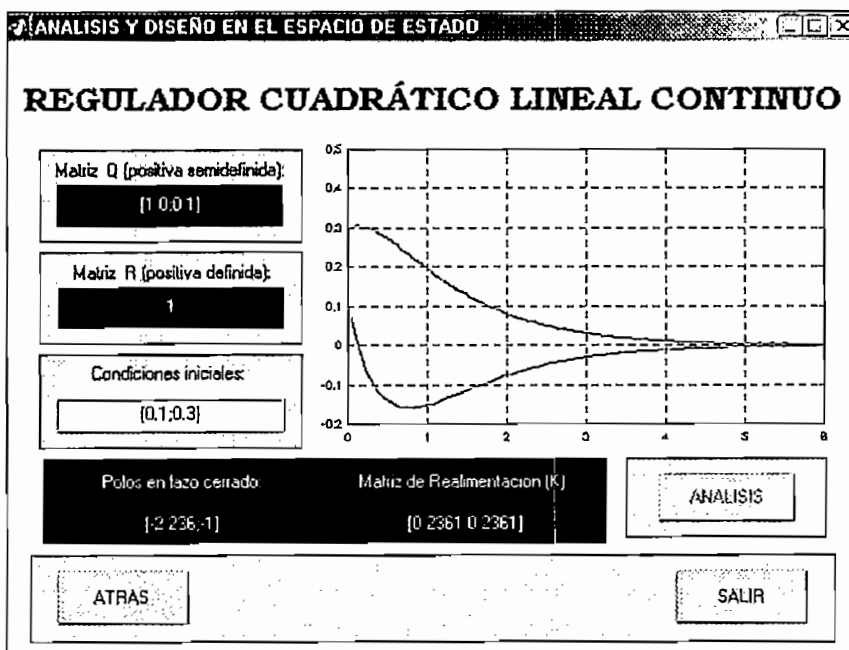
Donde: $K(t) = R^{-1}B^T P(t)$

Para un tiempo infinito el problema del LQR ($T \rightarrow \infty$ y $\dot{P} \rightarrow 0$), se tiene la ecuación algebraica de Riccati (ARE) que resulta en un sistema de lazo cerrado asintóticamente estable que puede demostrarse a partir del criterio de Liapunov.

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$u = -K\underline{x}$$

$$K = R^{-1}B^T P$$



Para mantener las condiciones anteriores se requiere que el par (A, B) sea estabilizable [3] ; $R > 0$, $Q = C'_q C_q$, C_q es tal que (C_q, A) es detectable [3]. Estas condiciones son necesarias y suficientes para una solución única óptima de un sistema asintóticamente estabilizable.

3.2 EL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL DISCRETO

Basándose en el análisis anterior para el LQR continuo y partiendo de la ecuación de estado:

$$\underline{x}(k+1) = G\underline{x}(k) + Hu(k)$$

Tomando en cuenta la función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N) S \underline{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\underline{x}^T(k) Q \underline{x}(k) + u^T(k) R u(k) \right]$$

Donde las matrices S y Q son matrices hermiticas definidas positivas o semidefinidas positivas y R es una matriz hermitica positiva. El primer término del lado derecho de esta última ecuación toma en cuenta la importancia del estado final. El primer término dentro de los corchetes de la sumatoria toma en cuenta la importancia relativa del error durante el proceso de control, y el segundo término toma en cuenta el gasto de la energía de la señal de control. Se supone que el vector de control $u(k)$ no está restringido.

Bajo las mismas consideraciones anteriores, se tienen la ley de control óptimo y la ecuación de Riccati para los sistemas discretos:

$$u(k) = -K\underline{x}(k)$$

$$P(k+1) = G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G + Q$$

$$K = [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G$$

3.3 FILTRADO ÓPTIMO [6] [7] [8] [15] [16]

El filtro de Kalman es un observador óptimo estocástico de estado porque incluye procesos estocásticos en la estimación.

En control existe la teoría de la estimación óptima que trata sobre los siguientes problemas:

- Suavización (interpolación)
- Filtrado
- Predicción

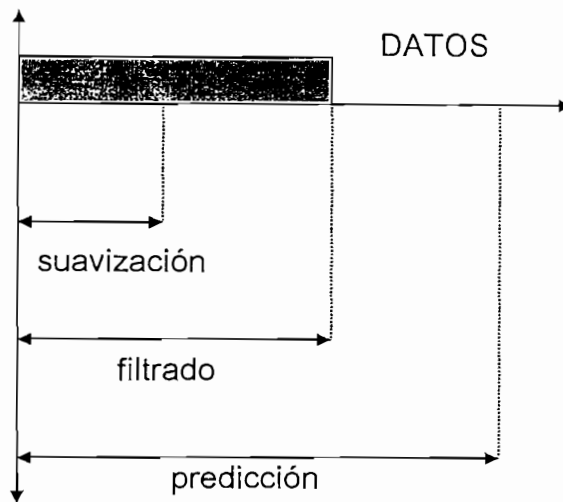


Figura 3.1 Estimación óptima

Aquí se trata el problema de filtrado óptimo que consiste en estimar la señal al instante t_k con los datos a ese instante.

El filtro de Kalman tiene una extensa aplicación en comunicaciones, control, procesamiento de señales, etcétera. El propósito de este numeral es realizar una breve descripción del filtro como parte integral del esquema de compensación.

Para implementar un LQR se quiere que los estados estén disponibles para la realimentación, en realidad se tiene que las mediciones están afectadas por ruido. Entonces el problema de estimación óptima es obtener el mejor estimado de los estados a partir de mediciones afectadas por ruido.

Para desarrollar el filtro se hacen algunas suposiciones:

El filtro es lineal, en la misma estructura que el observador determinístico de Luemberger [3].

En cuanto al ruido se considera que está presente en las perturbaciones y en las mediciones, y se asume que se tiene como conocimiento estadístico del proceso de ruido; que éste es blanco, Gaussiano de media cero y estacionario con covarianzas especificadas.

3.3.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Un proceso estocástico (aleatorio) es una familia o "ensemble" de variables aleatorias denotado como $\underline{x}(t, \omega)$. Para un tiempo determinado $t = T$, $\underline{x}(T, \omega)$ es una variable aleatoria llamada función de muestreo. Para un valor fijo de $\omega = \omega_0$, $\underline{x}(t, \omega_0)$ es una función del tiempo llamada realización. Por simplicidad de notación se omite la dependencia de $\underline{x}(t, \omega)$ de ω .

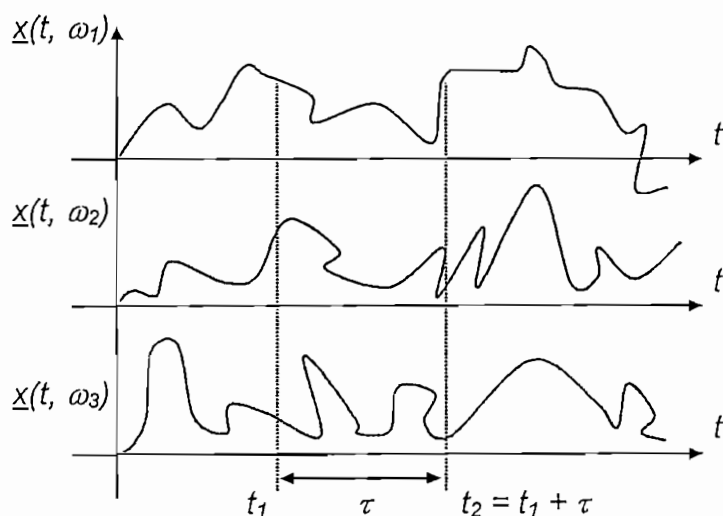


Figura 3.2 Procesos estocásticos

$p[x(t)]$ es la función densidad de probabilidad del proceso. Un proceso está completamente caracterizado por su función densidad. Hay varias mediciones estadísticas para describir o caracterizar un proceso. El momento de orden n está definido por:

$$E[\underline{x}^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}^n(t) p\{\underline{x}(t, \zeta)\} d\zeta$$

El primer momento, $n = 1$, conocido como media es el valor esperado o promedio del ensemble. El segundo momento, $n = 2$, es el valor medio cuadrático.

El momento central de orden n está definido por:

$$E[\underline{x}(t) - \underline{m}(t)]^n$$

Donde $\underline{m}(t)$ es la media. El segundo momento central es la covarianza y su raíz cuadrada es la desviación estándar.

El primer momento o media describe como el proceso se comporta en promedio y los otros momentos son una medida de su variabilidad. En la mayoría de los casos, lo que se conoce acerca del proceso son las estadísticas de primero y segundo orden.

También se definen promedios en tiempo como:

$$\langle \underline{x}^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underline{x}^n(t) dt$$

Para algunos procesos los promedios en tiempo son iguales a los promedios del "ensemble". Estos procesos son llamados ergódicos. Debido a que en la práctica se tiene acceso a una sola realización del proceso, es el promedio en el tiempo el que en la realidad se calcula. Por lo tanto, se asume la suposición de ergodicidad, esto implica que una muestra del proceso representa a toda la familia. Cuando se requiere se puede reemplazar promedios de la familia por promedios en el tiempo. La función de correlación describe como diferentes puntos se relacionan unos con otros, cuan similar es $\underline{x}(t_1)$ con $\underline{x}(t_2)$ y está definida por:

$$R_x(t_1, t_2) = E[\underline{x}(t_1), \underline{x}(t_2)]$$

La función de correlación es a grosso modo una medida de la aleatoriedad, en otras palabras, si la función de correlación es pequeña, significa que el proceso es "muy aleatorio". La relación temporal entre dos procesos se mide por la función de correlación cruzada:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[\underline{x}(t_1), y(t_2)]$$

La función de covarianza es similar a la función de correlación excepto que se sustrae la media:

$$\text{cov}(\underline{x}) = Cx(t_1, t_2) = E[(\underline{x}(t_1) - \underline{m}_1) \cdot (\underline{x}(t_2) - \underline{m}_2)]$$

Donde m_i es la media de $\underline{x}(t_i)$.

Un proceso es estacionario si, para todo t y τ .

$$p[\underline{x}(t + \tau)] = p[\underline{x}(t)]$$

Esto implica que la función densidad y todas las estadísticas son función de la diferencia en tiempo τ y no dependen de cualquier instante de tiempo. Esta es una suposición muy fuerte y no la requerida por procesos de segundo orden.

Una suposición más sencilla (débil) es la de estacionario en un amplio sentido, si cumple con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} E[\underline{x}(t)] &= m \mapsto m = \text{constante} \\ Rx(t_2, t_1) &= E[x(t_2) \cdot x(t_1)] = Rx(t_2 - t_1) = Rx(\tau) \mapsto \tau = t_2 - t_1 \end{aligned}$$

En procesos industriales se considera modelos estocásticos de segundo orden, ergódicos y estacionarios en un amplio sentido, como una buena aproximación. Si el proceso tiene media cero, $\text{cov}(\underline{x}) = Rx(\tau)$; para $\tau = 0$.

$$Rx(0) = E[x^2(t)] = \text{valor medio cuadrático}$$

$$Cx(0) = E[(x - m)^2] = \sigma^2 = \text{varianza de } x$$

La función de covarianza en un instante da la medida de la incertidumbre, la variabilidad del error presente del valor esperado.

Se considera también por el teorema límite central que el ruido que se maneja es Gaussiano o normal (cuando se tiene varias variables aleatorias, su distribución tiende a su normal) que puede ser caracterizado por su media y su covarianza, valores estadísticos que no son conocidos pero que pueden ser estimados, manipulados convenientemente.

Otro parámetro de los procesos estocásticos es la densidad espectral de potencia, definida por:

$$S_{\underline{x}}(\omega) = F[Rx(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} Rx(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

En control se maneja y considera ruido blanco que implica una función de densidad espectral constante, esto es, tiene componentes de todas las frecuencias, lo que involucra una secuencia de valores no correlacionados.

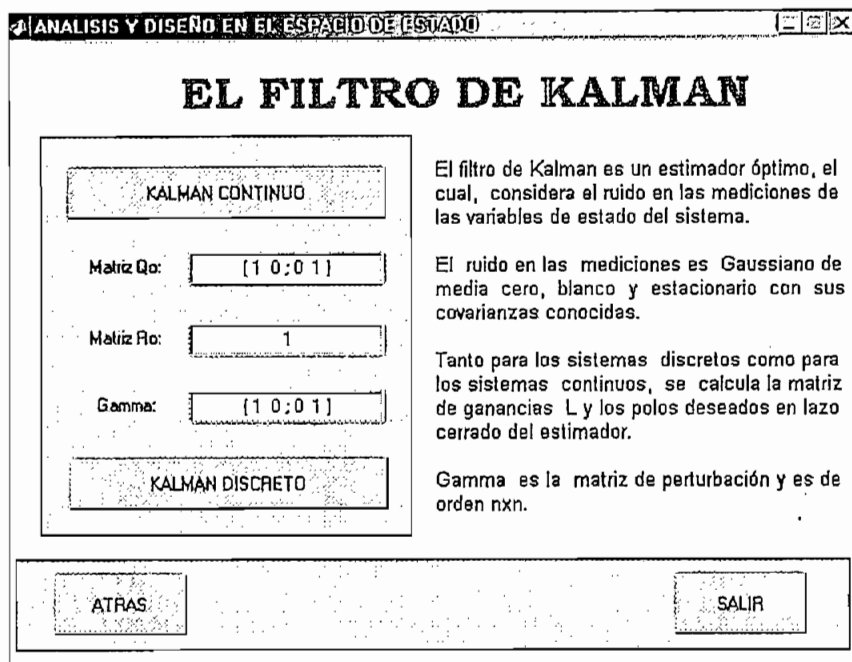
El ruido presente en las mediciones y perturbaciones puede considerarse blanco, Gaussiano para la mayoría de casos prácticos en control.

3.3.2 EL FILTRO DE KALMAN

Sea el sistema representado por:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + Bu + \Gamma\omega \\ y &= C\underline{x} + v\end{aligned}$$

Donde ω representa la perturbación de ruido en el sistema y v la incertidumbre en las mediciones.



Se considera que se tiene algún conocimiento de las estadísticas del ruido. Se asume que ambos son blancos, Gaussianos de media cero, estacionarios con covarianzas conocidas, dadas por:

$$E[\omega(t)] = 0 \quad E[v(t)] = 0$$

$$E[\omega(t) \cdot \omega^T(t+\tau)] = Q\delta(t-\tau)$$

$$E[v(t) \cdot v^T(t+\tau)] = R\delta(t-\tau)$$

$$E[\omega(t) \cdot v^T(t+\tau)] = 0$$

Para todo t y τ .

El problema es obtener un estimado $\hat{x}(t)$ basado en mediciones afectadas por ruido tal que minimice la varianza del error como se muestra en la figura 3.3. Sea

$\tilde{x}(t)$ el error y $\hat{x}(t)$ el estimado. La función de costo a ser minimizada está dada por:

$$J_0 = E \left[\tilde{x}^T(t), \tilde{x}(t) \right] = \text{varianza del error}$$

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$$

Los siguientes supuestos se requieren para obtener una solución asintóticamente estable para el filtro de mínima varianza.

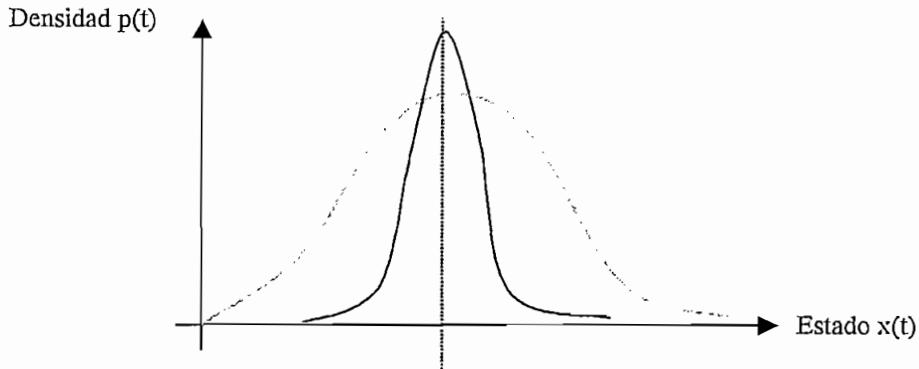


Figura 3.3 Estimado de mínima varianza del error

El par (C, A) es detectable [3], R_0 es positiva definida. Existe H_0 tal que $Q_0 = H_0 H_0^T$ y (A, H_0) es estabilizable [3]. Bajo estas condiciones el estimador óptimo estocástico (filtro de Kalman - Bucy) está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= A \hat{\underline{x}} + Bu + L(y - C \hat{\underline{x}}) \\ L &= \Xi C^T R^{-1} \\ A \Xi + \Xi A^T + \Gamma Q_0 \Gamma^T - \Xi C^T R_0^{-1} C \Xi &= 0 \end{aligned}$$

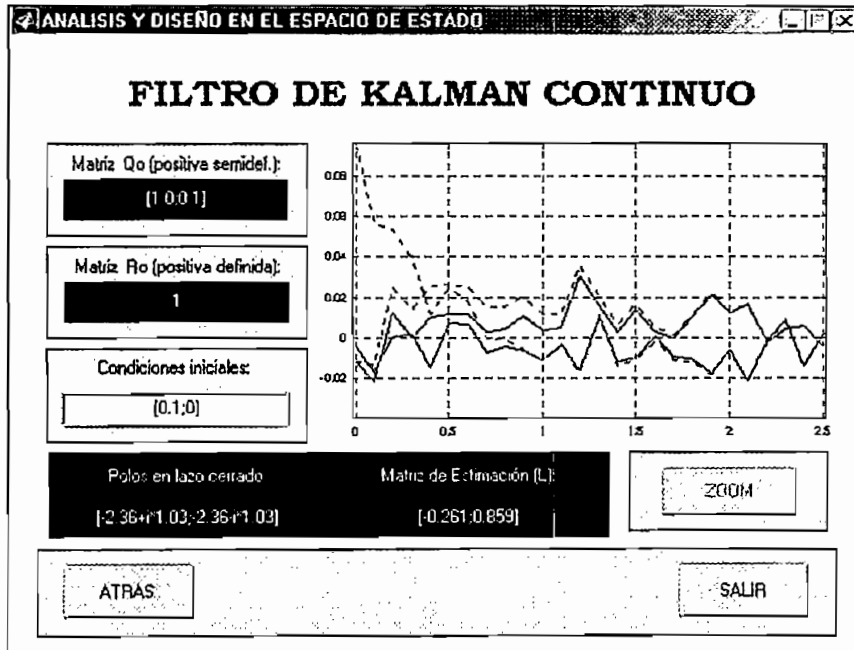
Donde Ξ es la solución a la ecuación algebraica de Riccati del filtro que es la estimación de la covarianza del error.

$$\text{tr} \Xi = \text{tr} E \left[\tilde{\underline{x}}(t) \cdot \tilde{\underline{x}}^T(t) \right] = E \left[\tilde{\underline{x}}^T(t) \cdot \tilde{\underline{x}}(t) \right]$$

Por lo tanto la traza de Ξ indica cuán bueno es el desempeño o comportamiento del filtro.

La solución anterior se ha obtenido aplicando dualidad entre el control y la estimación. Se llega a la solución haciendo el siguiente reemplazo en el problema del LQR:

$$A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T, Q \rightarrow Q_0, R \rightarrow R_0, K \rightarrow L^T, P \rightarrow E$$



3.4 EL FILTRO DISCRETO DE KALMAN

Para el desarrollo analítico de las ecuaciones que describen el filtro de Kalman, se parte del modelo general de un sistema discreto en el espacio de estado, el cual está dado por:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + Bu(k) + \underline{\omega}(k) \\ y(k) &= C\underline{x}(k) + v(k) \end{aligned}$$

Asumiendo que las variables aleatorias $\underline{\omega}(k)$ y $v(k)$ no están correlacionadas y cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} E[\underline{\omega}(k)] &= 0 = E[v(k)] \\ E[\underline{\omega}(k) \cdot v^T(j)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\underline{\omega}(k) \cdot \underline{\omega}^T(j)] &= Q \delta_{kj} & Q = Q^T \geq 0 \\ E[\underline{v}(k) \cdot \underline{v}^T(j)] &= R \delta_{kj} & R = R^T \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $E[\underline{x}]$ representa el valor medio de \underline{x} . Además se conoce el estado inicial:

$$\begin{aligned} E[\underline{x}(0)] &= \hat{\underline{x}}(0) \\ \text{cov}[\tilde{\underline{x}}(0), \tilde{\underline{x}}^T(0)] &= P_0 \end{aligned}$$

Bajo las mencionadas consideraciones, se tiene interés en el mejor estimado del estado $\underline{x}(k)$ basado en datos de entrada y salida.

Sea $\hat{\underline{x}}[k+1 | k]$ es el mejor estimado lineal de $\underline{x}(k)$ basado en datos hasta el instante k , entonces:

$$\hat{\underline{x}}(k+1 | k) = A \hat{\underline{x}}(k | k) + B \underline{u}(k)$$

Se define el error como:

$$\tilde{\underline{x}}(k+1 | k) = \underline{x}(k | k) - \hat{\underline{x}}(k+1 | k), \text{ luego,}$$

$$\tilde{\underline{x}}(k+1 | k) = A \tilde{\underline{x}}(k | k) - \underline{\omega}(k)$$

Se forma entonces la varianza:

$$\begin{aligned} P(k+1 | k) &= E \left[\hat{\underline{x}}(k+1 | k) \hat{\underline{x}}^T(k+1 | k) \right] \\ P(k+1 | k) &= E \left[A \hat{\underline{x}}(k | k) - \underline{\omega}(k) \right] \left[\hat{\underline{x}}^T(k | k) A^T - \underline{\omega}^T(k) \right] \\ P(k+1 | k) &= A E \left[\hat{\underline{x}}(k | k) \hat{\underline{x}}^T(k | k) A^T \right] + E \left[\underline{\omega}(k) \underline{\omega}^T(k) \right] \\ P(k+1 | k) &= A P(k | k) A^T + Q \end{aligned}$$

Ahora se desea que el error $\hat{\underline{x}}(k | k)$ sea tan pequeño como sea posible en el sentido de minimizar:

$$tr[P(k | k)] = \sum_{i=1}^n \text{var}[\hat{x}_i(k | k)]$$

Analicemos ahora el llamado filtro de Kalman que proporciona el próximo estimado filtrado basado en la predicción $\hat{\underline{x}}(k+1 | k)$ e incorporando una nueva medición de la salida y . Asumimos una forma lineal:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k | k) &= A(k)\hat{\underline{x}}(k | k-1) + K(k)[C\hat{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)] \\ \underline{y}(k) &= C\hat{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)\end{aligned}$$

Para el caso Gaussiano se tiene que:

$$\hat{\underline{x}}(k | j) = E\left[\hat{\underline{x}}(k) | j\right]$$

$$E\left[\hat{\underline{x}}(k | j)\right] = E[\underline{x}(k)]$$

$$E[\underline{x}(k)] = A(k)E[\underline{x}(k)] + K(k)CE[\underline{x}(k)]$$

$$[I - A(k) - K(k)C]E[\underline{x}(k)] = 0$$

Para estimadores de estado no sesgados: $A(k) = I - K(k)C$.

Se escoge la ganancia $K(k)$ para minimizar la traza $P(k | k)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k|k) &= [I - K(k)C]\hat{\underline{x}}(k|k-1) + K(k)C\underline{x}(k) + K(k)\underline{v}(k) \\ \hat{\underline{x}}(k|k) &= \hat{\underline{x}}(k|k-1) - K(k)C\left[\hat{\underline{x}}(k|k-1) - \underline{x}(k)\right] + K(k)\underline{v}(k) \\ \hat{\underline{x}}(k|k) &= \hat{\underline{x}}(k|k-1) + K(k)\left[\underline{y}(k) - C\hat{\underline{x}}(k|k-1)\right] \\ \hat{\underline{y}}(k|k-1) &= C\hat{\underline{x}}(k|k-1)\end{aligned}$$

Luego:

$$\tilde{\underline{x}}(k|k) = [I - K(k)C]\tilde{\underline{x}}(k|k-1) + K(k)\underline{v}(k)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}P(k|k) &= E\left[\tilde{\underline{x}}(k|k)\tilde{\underline{x}}^T(k|k)\right] \\ P(k|k) &= [I - K(k)C]P(k|k-1)[I - C^T K^T(k)] + K(k)R K^T\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial K(k)}[\text{tr}[P(k|k)]] &= 0 \\ -2[I - K(k)C]P(k|k-1)C^T + 2K(k)R &= 0 \\ K(k) &= P(k|k-1)C^T[CP(k|k-1)C^T + R]^{-1}\end{aligned}$$

Además, utilizando el lema de inversión de matrices:

$$\begin{aligned}P(k|k) &= [I - K(k)C]P(k|k-1) \\ P(k|k)^{-1} &= P(k|k-1)^{-1} + C^T R^{-1}C\end{aligned}$$

Debe tomarse en cuenta las condiciones iniciales al instante $k = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(0|-1) &= \tilde{\underline{x}}(0) \\ P(0|-1) &= P_0\end{aligned}$$

La estructura del filtro discreto de Kalman se muestra en el esquema de la figura 3.4.

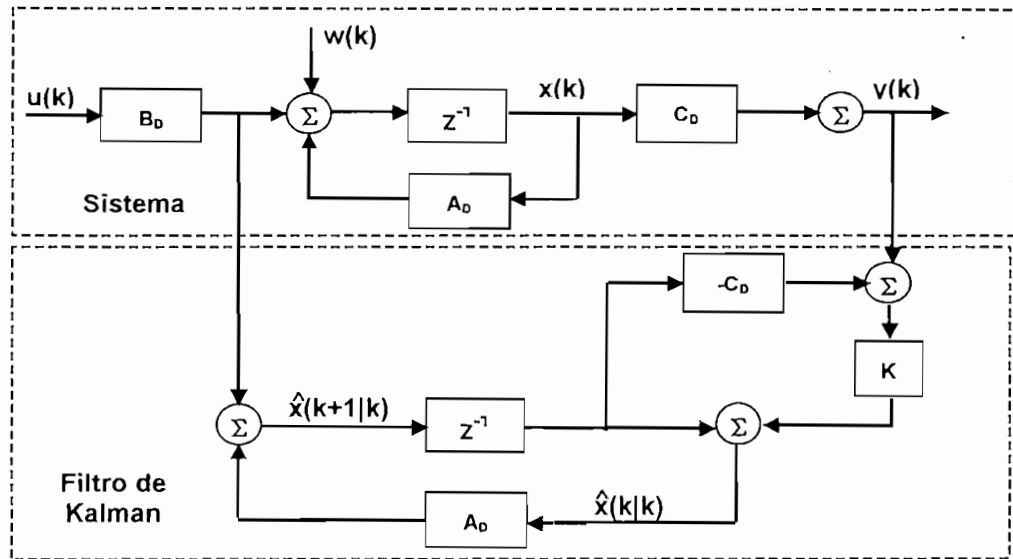


Figura 3.4 Filtro de Kalman discreto

Por tanto la estructura del filtro de Kalman discreto es la siguiente:

Sistema:

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{w}(k) \\ y(k) &= C\underline{x}(k) + \underline{v}(k)\end{aligned}$$

Filtro:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k|k) &= \hat{\underline{x}}(k|k-1) + K(k) \left[y(k) - C\hat{\underline{x}}(k|k-1) \right] \\ \hat{\underline{x}}(k+1|k) &= A\hat{\underline{x}}(k|k) + B\underline{u}(k)\end{aligned}$$

Ganancia:

$$\begin{aligned}K(k) &= P(k|k-1)C^T [CP(k|k-1)C^T + R]^{-1} \\ P(k+1|k) &= AP(k|k)A^T + Q \\ P(k|k) &= [I - K(k)C]P(k|k-1)\end{aligned}$$

3.5 REGULADOR ÓPTIMO LINEAL GAUSSIANO [3]

El control óptimo de un sistema lineal con respecto a la función objetivo o función de costo cuadrática bajo mediciones incompletas alteradas por el ruido blanco Gaussiano es generalmente llamado el problema del regulador óptimo lineal Gaussiano (LQG). El control óptimo es una función lineal de los estados estimados obtenidos del filtro de Kalman – Bucy. El LQR es un problema de realimentación de estado, mientras el LQG es un problema de realimentación de salida, el cual es más realista.

Considérese el sistema lineal con ruido blanco Gaussiano, con las mediciones alteradas por el ruido y la función costo cuadrática.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} + \Gamma \omega \\ y &= C\underline{x} + v \\ J &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-T}^T (x^T Q x + u^T R u) dt \right\}\end{aligned}$$

El problema es encontrar el control óptimo que minimice el costo promedio. Note que debido a que los estados y el control son randómicos la función de costo será randómica para que la minimicemos en el promedio. Usando la misma notación y bajo las mismas suposiciones combinadas del LQR y de la estimación óptima, la solución está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}u &= -K \tilde{x}(t) \\ K &= R^{-1} B^T P \\ A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q &= 0 \\ \dot{\tilde{x}} &= A \tilde{x} + Bu + L(y - C \tilde{x}) \\ L &= EC^T R^{-1} \\ A\Xi + \Xi A^T - \Xi C^T R_o^{-1} C \Xi + \Gamma Q_o \Gamma^T &= 0\end{aligned}$$

Note que las mismas ecuaciones de Riccati para el LQR y el filtro de Kalman – Bucy se utilizan aquí. La solución satisface el principio de separación, donde el problema de diseño se resuelve en dos fases separadas. Se puede utilizar también el mismo procedimiento dado para el compensador descrito en el diseño de la realimentación más la observación, el cual es la versión determinística del problema descrito aquí.

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

EL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL GAUSSIANO

LOG CONTINUO

Matriz Q (psd):

Matriz R (pd):

Matriz Qo (psd):

Matriz Ro (pd):

Gamma:

LQG DISCRETO

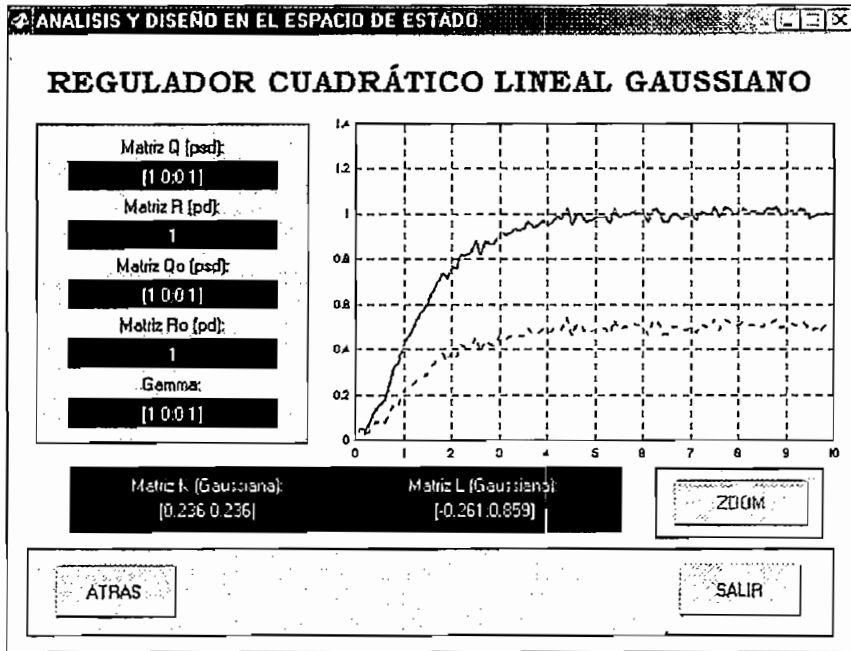
El regulador cuadrático lineal Gaussiano (LQG), integra al LQR y al filtro del Kalman para formar un controlador completo, el cual utiliza la señal de control óptima para la planta y además toma en cuenta las perturbaciones existentes en las mediciones, lo cual es más realista.

Las matrices Q y Qo ponderan la influencia de los estados, mientras que las matrices R y Ro ponderan el peso de la salida sobre la función de costo J.

Gamma es la matriz de perturbación y es de orden nxn.

Los valores propios en lazo cerrado del sistema son la unión de los valores propios del controlador y el estimador.

$$\text{Valores propios en lazo cerrado} = \lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)$$



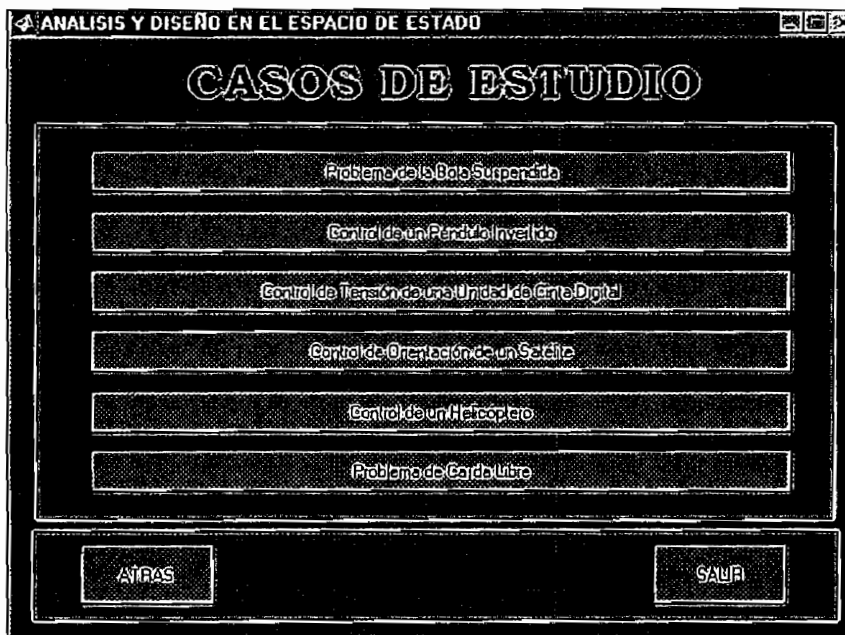
CAPITULO 4.

CASOS DE ESTUDIO

Como aplicación de las técnicas básicas y avanzadas en el espacio de estado se plantean diferentes estrategias de control aplicadas a la solución de problemas específicos para ilustrar la utilización y la bondad de los métodos de control en el espacio de estado.

A través de estos casos de estudio se puede visualizar la potencialidad y las mejoras del diseño en el espacio de estado para aquellos casos en los cuales el control clásico tiene dificultades en su implementación y puede no dar resultados satisfactorios en sistemas de control en los que existe la necesidad de realizar optimización, donde existe ruido o incertidumbre en las mediciones y en sistemas multivariantes.

Para ingresar a esta opción se debe ingresar a la siguiente pantalla



4.1 PROBLEMA DE LA BOLA SUSPENDIDA [5]

Este es un problema clásico de control que desde el punto de vista pedagógico permite ilustrar la aplicación de técnicas de control para un sistema inherentemente inestable. El esquema de este problema se muestra a continuación en la figura 4.1:

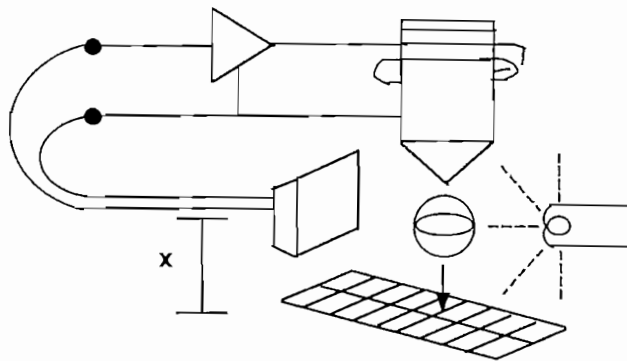


Figura 4.1 Esquema de la bola suspendida

El objetivo es mantener a una esfera metálica en la posición de equilibrio venciendo la fuerza de gravedad mediante la utilización de un electroimán, la posición se realimenta a través de una celda fotoeléctrica.

4.1.1 MODELO DEL SISTEMA

La ecuación que describe la dinámica del sistema es:

$$m\ddot{x} = -mg + f(x, i)$$

Donde:

m = masa de la bola = 0.02 kg

g = gravedad

i = corriente del electroimán

x = desplazamiento de la bola

En el equilibrio, la fuerza magnética compensa el peso de la masa. Si I_0 es la corriente en estado estacionario se tiene que:

$$I = I_0 + i$$

Si se expande f alrededor de $x = 0$, $I = I_0$, despreciando términos de orden superior se tiene:

$$m \ddot{x} = K_1 x + K_2 i$$

Se utilizan los valores:

$$K_1 = 20 \frac{N}{m} \quad K_2 = 0.4 \frac{N}{A}$$

El modelo matemático está dado por:

$$\ddot{x} = 1000x + 20u$$

Tomando como variables de estado:

$x_1 = x = \text{posición}$

$x_2 = \dot{x}_1 = \text{velocidad}$

Se tiene el modelo a variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.1.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Se desea realizar un control digital para mantener la levitación magnética satisfaciendo las especificaciones:

$$tr \leq 0.1s,$$

$$ts \leq 0.4s,$$

$$mp \leq 20\%$$

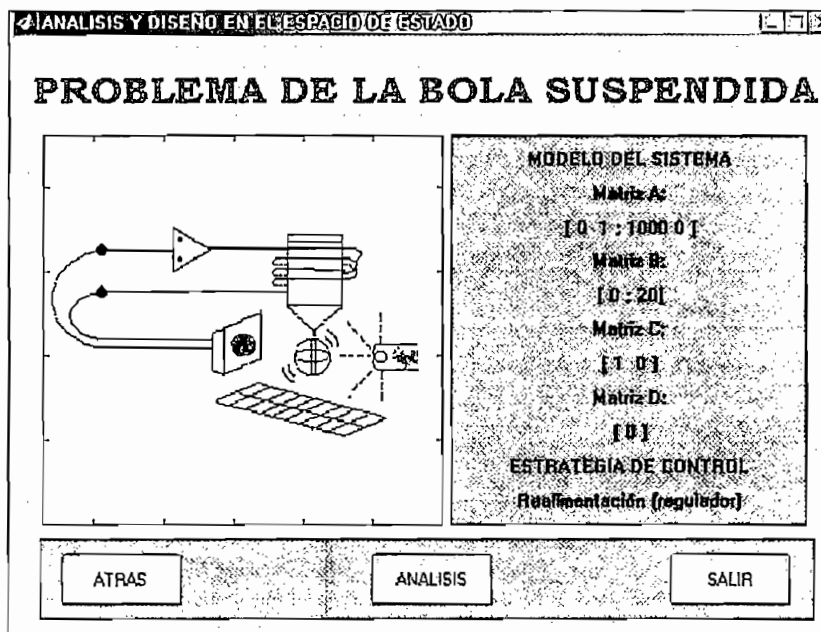
$$T = 0.01s$$

Los polos deseados son:

$$p_1 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -19.2 + j35.091$$

$$p_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -19.2 - j35.091$$

Se desea utilizar realimentación de estado para el caso de un regulador, porque la bola debe volver a la posición de equilibrio luego de la presencia de alguna perturbación. Este es un sistema cuyos polos están en el semiplano derecho y por tanto es inestable, la realimentación de estado permite bastante flexibilidad para ubicar los polos en el semiplano izquierdo, para satisfacer la rapidez de la respuesta, con la ventaja de que su implementación es a través de amplificadores de ganancia constante. Puesto que la medición de la posición puede estar sujeta a ruido, y no se dispone de la medición de la velocidad conviene utilizar un observador de estado.



Aquí se puede apreciar que existe una mayor libertad en el diseño puesto que en control clásico se realimenta la salida (posición), en tanto que aquí se realimenta posición y velocidad. La velocidad puede obtenerse a partir de circuitos derivadores (pero su medición es ruidosa). En este caso el observador de orden completo permite filtrar el ruido y obtener una mejor respuesta.

Este es un sistema tipo cero, puesto que no tiene integrador; aquí se puede intentar un control por seguimiento (servomecanismo), utilizando realimentación de estado.

4.2 CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO [11]

El problema del péndulo invertido consiste de un péndulo acoplado a un carro el cual es impulsado por una fuerza de control. El péndulo puede girar libremente alrededor de su pivote describiendo una trayectoria circular mientras que el carro tendrá un desplazamiento lineal, según lo muestra la figura 4.2.

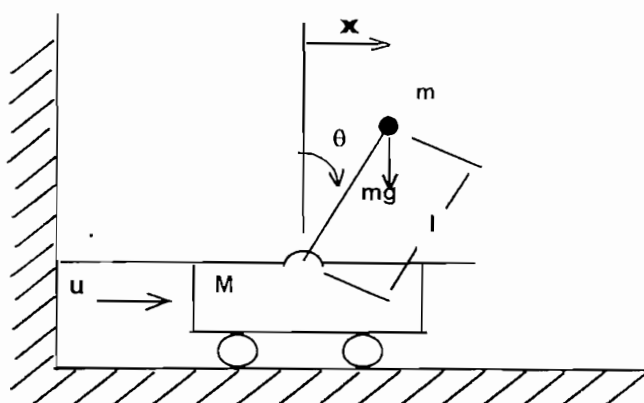


Figura 4.2 Esquema del péndulo invertido

Donde:

f = fuerza que actúa sobre el carro (control)

g = gravedad

l = longitud del péndulo = 0.45 m

M = masa del carro = 0.46 kg

m = masa del péndulo = 0.106 kg

θ = ángulo del péndulo (posición angular)

ω = derivada de θ (velocidad angular del péndulo)

x = posición del carro

v = derivada de x (velocidad del carro)

4.2.1 MODELO DEL SISTEMA

Para obtener el modelo matemático se aplica el modelo variacional. El lagrangiano es:

$$L = K - P$$

Donde:

K = energía cinética del sistema

P = energía potencial del sistema

La energía cinética total para el sistema péndulo carro es:

$$K = K_{TC} + K_{TP} + K_{RP}$$

Donde:

$$K_{TC} = \text{energía cinética traslacional del carro} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$K_{TP} = \text{energía cinética traslacional del péndulo} = \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x} + \frac{1}{2} l \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{1}{2} l \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \right]$$

$$K_{RP} = \text{energía cinética rotacional del péndulo} = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2; \quad J_p = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\text{La energía potencial está dada por: } P = mgh = \frac{1}{2} mgl \cos \theta$$

Utilizando el lagrangiano para cada coordenada variacional: x , θ del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Se tiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g \tan \theta - \frac{1}{2} ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - f}{\frac{2}{3}(M+m)l \sec \theta - \frac{1}{2} ml \cos \theta}$$

$$\ddot{x} = \frac{-\frac{2}{3} mg \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + f}{M+m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta}$$

Tomando como vector de estado \underline{x} y linealizando alrededor del punto de equilibrio \underline{x}_e , se tiene:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 38.0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6014 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.8517 \\ 0 \\ 2.0555 \end{bmatrix}$$

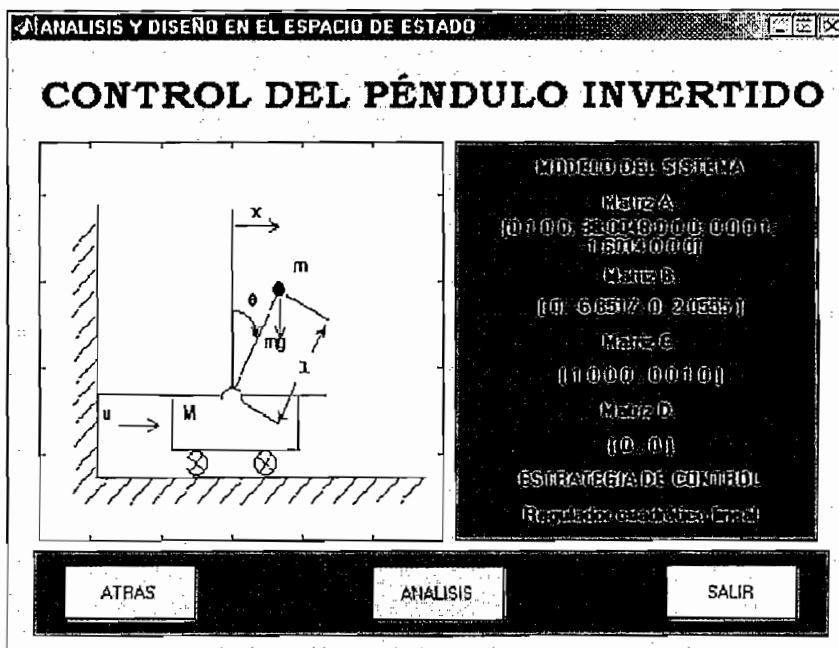
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Se requiere diseñar un regulador cuadrático lineal tomando como condición inicial una ligera perturbación en el ángulo del péndulo y hacer un análisis de estabilidad según Liapunov.

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como las mediciones pueden contener ruido, lo procedente sería utilizar un observador de orden completo, pero en este caso se diseña un observador de orden reducido para aprovechar la medición de la posición lineal y del desplazamiento angular.



Aquí a más de las bondades indicadas en el caso de estudio anterior, se trata de ilustrar la ventaja de manejar realimentación con ganancias constantes, pero minimizando el decaimiento de la respuesta (transitorio) y minimizando energía (esfuerzo de control) a través de la variación de las matrices de ponderación del criterio o índice del funcionamiento o función de costo.

En este caso de estudio se extiende las técnicas de control a métodos óptimos. Hay que considerar adicionalmente que el sistema maneja ahora dos salidas.

4.3 CONTROL DE TENSIÓN DE UNA UNIDAD DE CINTA DIGITAL [9]

En este caso de estudio se modela el control de tensión del mecanismo de una unidad de cinta digital. El sistema en lazo abierto es inestable, exhibe una respuesta no satisfactoria como puede apreciarse en el LGR, desde el punto de vista de las técnicas clásicas es necesario realizar una realimentación tacométrica previa a la incorporación de un control PID o por redes, lo que hace difícil su implementación. Cuando se manejan variables de estado se elimina esta dificultad pudiéndose con bastante flexibilidad manejar su implementación a través de amplificadores con ganancias constantes.

4.3.1 MODELO DEL SISTEMA

El sistema a modelar es el que se ilustra en la figura 4.3, el cual está compuesto por un cabestrante para tirar la cinta y poder pasarla por la cabeza de lectura/escritura y con carretes de alimentación movidos por motores de corriente continua.

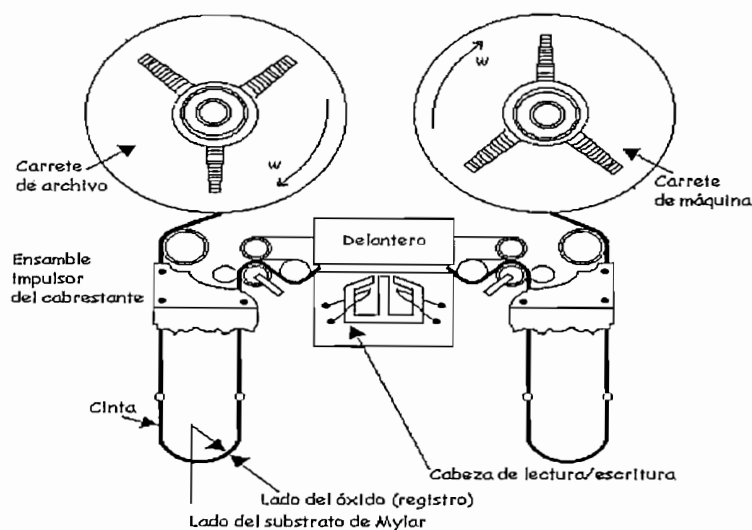


Figura 4.3 Esquema del mecanismo de una unidad de cinta digital

La planta a modelar incluye el actuador y el sensor como parte del sistema, es así que se considera como actuador un motor de corriente continua elegido

adecuadamente y como sensor un tacómetro de DC. Estos elementos (actuador, sensor y el sistema), conforman toda la planta a modelar. Para propósitos de modelación se utilizará el esquema de la figura 4.4

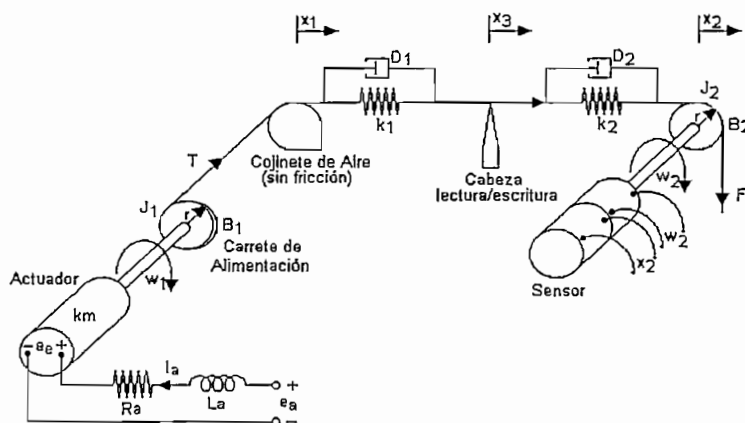


Figura 4.4 Estructura y componentes del sistema.

Donde:

x_1 : Posición de la cinta en el cojinete de aire en m

x_2 : Posición de la cinta en el segundo carrete(tacómetro) en m

x_3 : Posición de la cinta en la cabeza de lectura escritura en m

w_1 : Velocidad angular del carrete de alimentación en rad/seg

w_2 : Velocidad angular del segundo carrete(tacómetro) en rad/seg

T: Tensión de la cinta en la cabeza de lectura / escritura en N, $T = F$

e_a : Voltaje aplicado a la armadura del actuador en V

e_e : Fuerza contra-electromotriz del actuador en V

R_a : Resistencia de armadura del actuador, $R_a = 1$ ohm

L_a : Inductancia de armadura del actuador, $L_a = 1$ mH

k_m : Constante de par motor, $k_m = 0.03$ V.s

r : Radio de los dos carretes, $r = 0.02$ m

J_1 : Inercia del carrete más actuador, $J_1 = 0.00004$ Kg.m.m

J_2 : Inercia de transmisión, $J_2 = 0.00001$ Kg.m.m

B_1 : Fricción viscosa del carrete de alimentación, $B_1 = 0.01$ N.m.s

B_2 : Fricción viscosa en el segundo carrete, $B_2 = 0.01$ N.m.s

k : Const. del resorte en el movimiento de tiro de la cinta, $k_1 = k_2 = 0.0004$ N/m

D : Amortiguación en el movimiento de la cinta, $D_1 = D_2 = 20$ N/m/s

La ecuación que gobierna a este sistema es:

$$J_2 \frac{dw_2}{dt} + B_2 w_2 = rT$$

Entonces las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r w_1 \\ J_2 \frac{dw_2}{dt} + B_2 w_2 &= rT \\ \dot{x}_2 &= r w_2 \\ J_1 \frac{dw_1}{dt} + B_1 w_1 - rT &= k_m i_a \\ e_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_e \\ T &= \frac{k}{2}(x_2 - x_1) + \frac{Dr}{2}(w_2 - w_1) \\ x_3 &= \frac{x_2 + x_1}{2} \end{aligned}$$

Con todas las ecuaciones anteriores, y reemplazando sus valores numéricos se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 0.02 w_1 \\ 4 \times 10^{-5} \frac{dw_1}{dt} &= -400 x_1 - 0.014 w_1 + 400 x_2 + 0.004 w_2 + 0.03 i_a \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0.02 w_2 \\ 10^{-5} \frac{dw_2}{dt} &= 400 x_1 + 0.004 w_1 - 400 x_2 + 0.014 w_2 \\ 10^{-3} \frac{di_a}{dt} &= 0.03 w_1 - i_a + e_a \\ T &= -2 \times 10^{-4} x_1 - 0.2 w_1 + 2 \times 10^{-4} x_2 + 0.2 w_2 \\ x_3 &= 0.5 x_1 + 0.5 x_2 \end{aligned}$$

El modelo a variables de estado, utiliza las ecuaciones anteriores escaladas en tiempo y amplitud, de acuerdo a lo siguiente: el tiempo se medirá en milisegundos, entonces $\tau = 1000t$ y la posición en unidades de 0.00001m , por lo que se define como $x_1 = 100000 x_1$, lo mismo para x_2 . Se mantienen las mismas variables pues lo que se busca es mejorar la respuesta con respecto al sistema sin compensación y abordar aspectos de observabilidad, realización mínima y múltiples entradas.

Entonces se llega al siguiente modelo a variables de estado, considerando el sistema de la figura 4.4

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.35 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ x_2 \\ w_2 \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_a$$

Existen dos salidas de interés, que son la tensión de la cinta T y la posición x_3 :

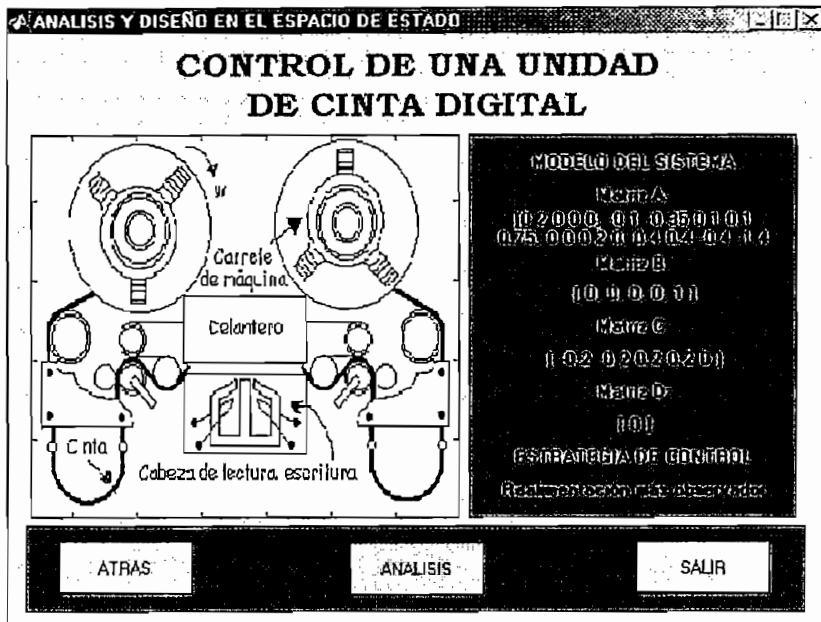
$$\text{Tensión: } T = [-0.2 \quad -0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0] \underline{x}$$

$$\text{Posición: } x_3 = [0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0] \underline{x}$$

4.3.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Aquí se obtiene el modelo para el control de posición controlable pero no observable, por consiguiente se debe hacer realización mínima. Igualmente se debería manejar un observador para poder estimar las variables que no son medibles pudiéndose manejar también un diseño óptimo.

Se desea un tiempo de estabilización de aproximadamente 12ms y un sobreimpulso mínimo (menor al 10%).



Aquí se plantea también la posibilidad de implementar un control multivariable cuando se maneja un actuador para cada uno de los carretes en el sistema de la figura 4.4.

El modelo a variables de estado con dos entradas se obtiene de una manera similar y está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ x_2 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.75 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{bmatrix}$$

De forma similar al sistema de la figura 4.4, existen dos salidas de interés que son la tensión y la posición de la cinta, que a variables de estado están dadas por:

$$\text{Tensión: } T = [-0.4 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4]x$$

$$\text{Posición: } x_3 = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]x$$

Como se puede apreciar, aquí hay que manejar dos entradas (corrientes de los actuadores) y dos salidas (la tensión y la posición).

4.4 CONTROL DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE [10]

Este caso de estudio tiene algunas ventajas para su discusión, primero se puede modelar la orientación de un satélite respecto a un eje como un doble integrador de acuerdo con la figura 4.5,

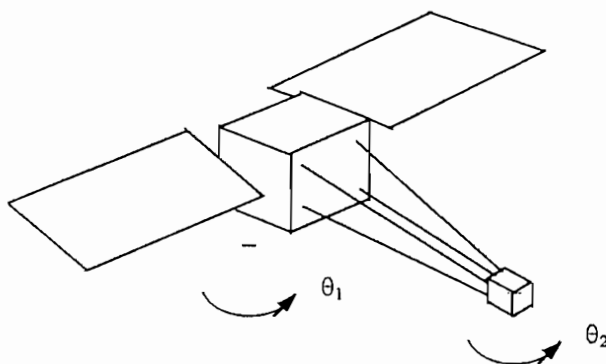


Figura 4.5 Esquema para el control de un satélite con estructura flexible

Primero se plantea el modelo simple sin la estructura flexible, que se analiza a continuación, entonces se tiene que considerar un solo desplazamiento angular θ y su correspondiente aceleración angular α .

$$I\alpha = \tau_c + \tau_D$$

Donde:

I = momento de inercia

α = aceleración angular

τ_c = torque de control

τ_D = torque debido a las perturbaciones

Entonces:

$$I\ddot{\theta} = \tau_c$$

Despreciando la perturbación se tiene que la función de transferencia corresponde a un doble integrador, el cual es un problema inestable típico de control.

Este problema se analiza extendiendo el sistema a un problema estocástico que es discutido a través del filtro de Kalman. Un modelo más exacto utiliza una estructura flexible como la figura 4.6, que modela el acoplamiento entre el actuador y el sensor con la planta.

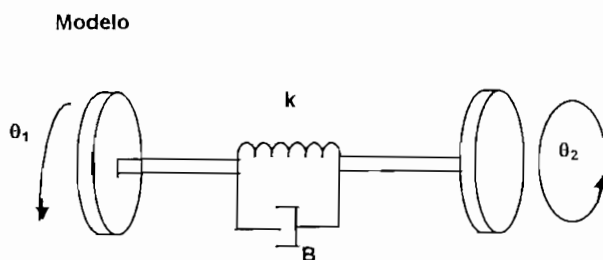


Figura 4.6 Esquema de una estructura flexible para el control de un satélite

4.4.1 MODELO DEL SISTEMA

Para el modelo del sistema se utiliza la estructura flexible de la figura 4.6.

Donde:

I_1, I_2 = momentos de inercia

K = coeficiente de torsión

B = coeficiente de amortiguación viscosa

τ_c = torque de control

El sistema está definido por las ecuaciones diferenciales:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) = \tau_c$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Tomando como vector de estado:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Se tiene el modelo a variables de estado a través de la matrices A, B, C y D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{I_2} & -\frac{1}{I_2} & \frac{K}{I_2} & \frac{B}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_1} & \frac{B}{I_1} & -\frac{K}{I_1} & -\frac{B}{I_1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_1} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

De acuerdo con las condiciones del sistema se tiene las limitaciones:

$$0.09 \leq K \leq 0.4$$

$$0.04\sqrt{\frac{K}{10}} \leq B \leq 0.2\sqrt{\frac{K}{10}}$$

Lo cual da como consecuencia que ω_n puede variar entre 1 y 2 rad/s y ξ varía entre 0.02 y 0.1. Se selecciona $\omega_n = 1$, $\xi = 0.02$. Considerando unidades S.I.:

$$I_1 = 1$$

$$I_2 = 0.1$$

$$K = 0.0909$$

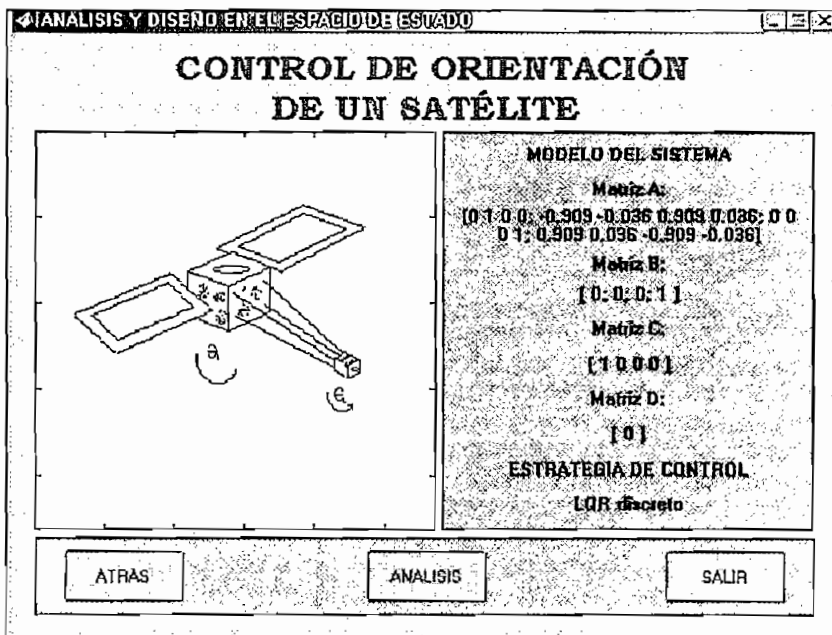
$$B = 0.0036$$

Se tiene entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.909 & -0.036 & 0.909 & 0.036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0909 & 0.0036 & -0.0909 & -0.0036 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.4.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Cuando se realiza el control mediante función de transferencia se requiere implementar un filtro resonante o filtro Notch para compensar el fuerte máximo de resonancia que exhibe el sistema previo al diseño de una red o un control PID, en este caso se maneja muy fácilmente la regulación a través de la realimentación de estado. Aquí se trata de realizar un control computarizado por consiguiente se maneja un control discreto por medio del LQR discreto.



4.5 CONTROL DE UN HELICÓPTERO [2]

En este caso de estudio se busca realizar el control del movimiento longitudinal de un helicóptero que se está aproximando a una posición en la que se mantiene estático, según se muestra en la figura 4.7

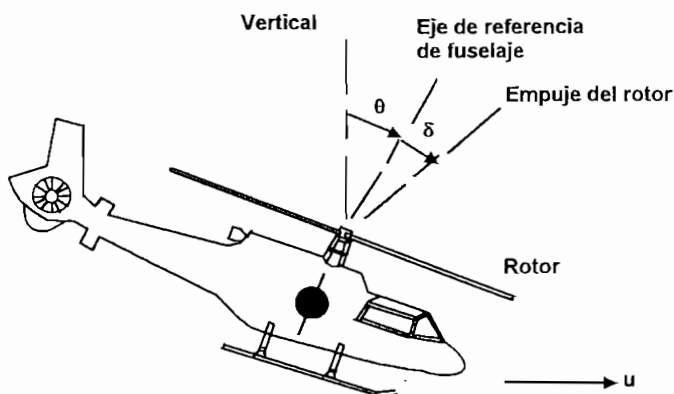


Figura 4.7 Esquema del movimiento longitudinal de un helicóptero

4.5.1 MODELO DEL SISTEMA

El sistema se puede modelar como un sistema de tercer orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} \delta$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Donde:

q = velocidad de inclinación

θ = ángulo de inclinación del fuselaje

u = velocidad horizontal

δ = ángulo de inclinación del rotor

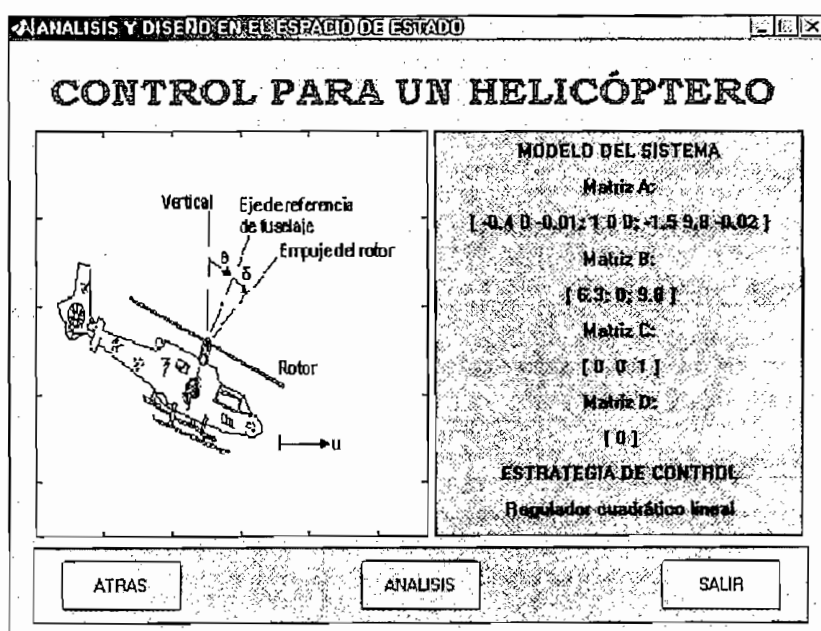
4.5.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Se desea diseñar un estimador de orden completo con sus polos deseados en:

$$p = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 + j1 \\ -0.5 - j1 \end{bmatrix}$$

Se desea diseñar un observador de orden reducido con su polo en -1 . El sensor mide la velocidad $y = u$.

Se desea investigar adicionalmente los efectos de la ponderación de las matrices del diseño del regular cuadrático lineal Gaussiano.



Aquí se generaliza el problema de control que no puede ser resuelto con control clásico, a un problema que incluye perturbaciones de carácter aleatorio.

4.6 PROBLEMA DE LA CAÍDA LIBRE [8]

Este es un interesante problema para demostrar el efecto de la incertidumbre en la medición y la ventaja de utilizar estimación óptima estocástica; esto es, el filtro de Kalman.

Se considera la caída libre de un cuerpo, como lo muestra la figura 4.8

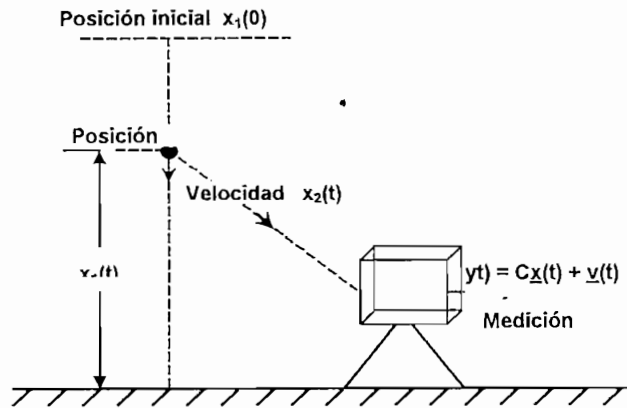


Figura 4.8 Esquema de las mediciones de la caída libre

Obviamente existe incertidumbre en la medición de la posición y consecuentemente de la velocidad.

4.6.1 MODELO DEL SISTEMA

La caída libre puede describirse mediante la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} = -mg$$

Considerando (valores normalizados):

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$g = 1 \text{ m/s}^2$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Se tiene un doble integrador. Se llega al modelo a variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} g$$

Utilizando un periodo de muestreo $T = 1 \text{ s}$.

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \underline{x}(k) + v(k)$$

4.6.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

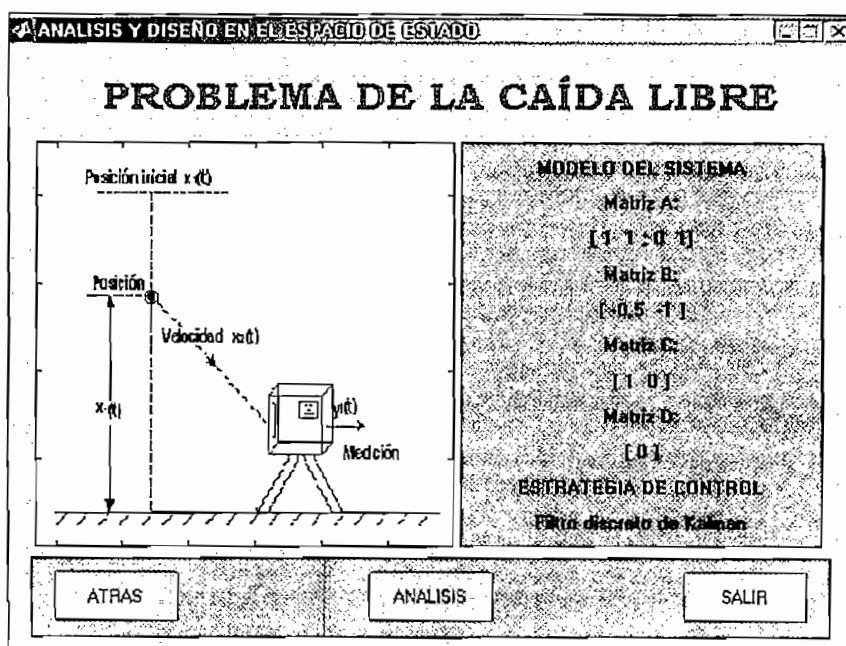
En este caso se manejan mediciones discretas por consiguiente se utiliza el filtro discreto de Kalman para estimar posición y velocidad sujetas a un ambiente de incertidumbre en las mediciones, partiendo de una condición inicial del estado (altura y velocidad):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con una varianza de una perturbación aleatoria o ruido dada por:

$$R(k) = \sigma_v^2 = 1$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



CAPITULO 5.

RESULTADOS

Se han realizado varias pruebas del correcto funcionamiento de las distintas rutinas del programa ades y se han realizado diversos problemas de análisis y diseño para verificar el funcionamiento de las diferentes opciones de las pantallas, consiguiendo resultados satisfactorios.

A continuación se presentan los resultados de las técnicas básicas y avanzadas de diseño en el espacio de estado, aplicadas a casos de estudio que han sido considerados como interesantes por su modelo, por el problema de análisis y por las estrategias de diseño a utilizarse. En todos estos casos está implícito el análisis del sistema.

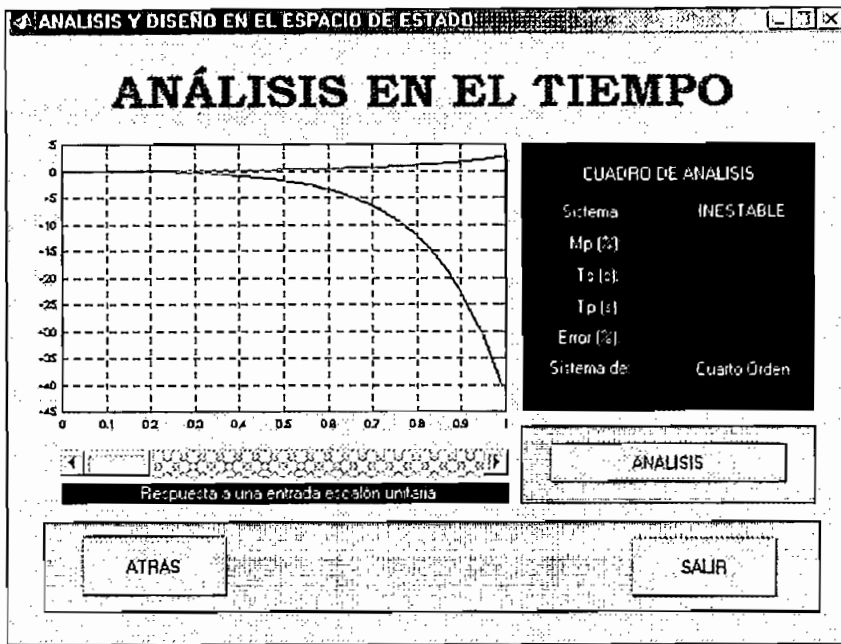
5.1 RESULTADOS DE DISEÑO UTILIZANDO MÉTODOS BÁSICOS

Los métodos básicos de diseño en el espacio de estado analizados en este trabajo han dado los siguientes resultados:

5.1.1 PROBLEMA DEL SERVOMECANISMO. PROBLEMA DEL PÉNDULO INVERTIDO

5.1.1.1 Análisis del sistema

Utilizando el programa ades se hace un análisis de controlabilidad y de su respuesta temporal, confirmando que es un problema típicamente inestable pero que es controlable.



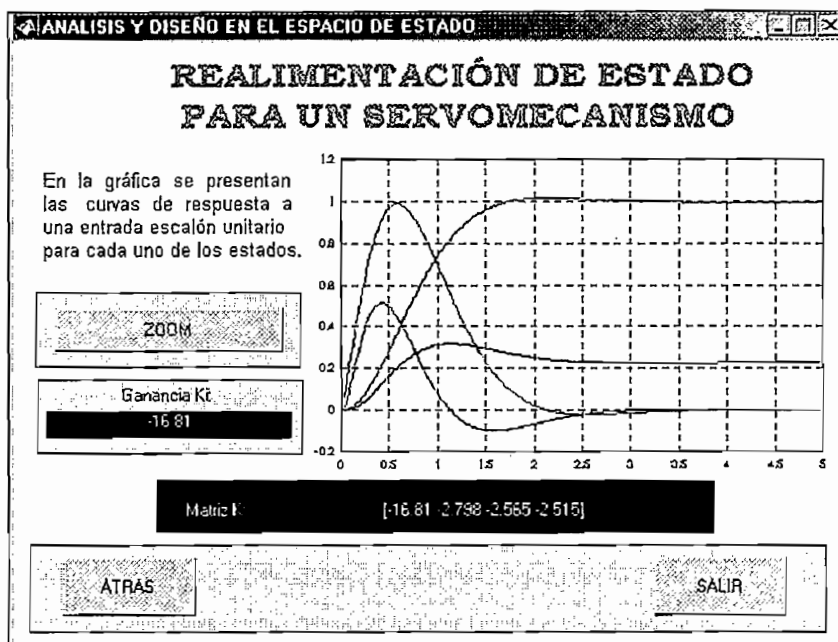
5.1.1.2 Diseño del controlador

Se ha implementado el problema de seguimiento, para lo cual se utiliza la opción del servomecanismo en el menú de la pantalla para la realimentación de estado, el resultado de la respuesta temporal del sistema realimentado, considerando una ubicación de polos deseados en $pd = [-2 + j 1.73 \quad -2 - j 1.73 \quad -5 \quad -5 \quad -5]$ se muestra en la siguiente pantalla, en donde podemos observar el diagrama de los estados.

El resultado del diseño nos entrega una matriz K:

$$K = [-16.81 \quad -2.798 \quad -2.565 \quad -2.515]$$

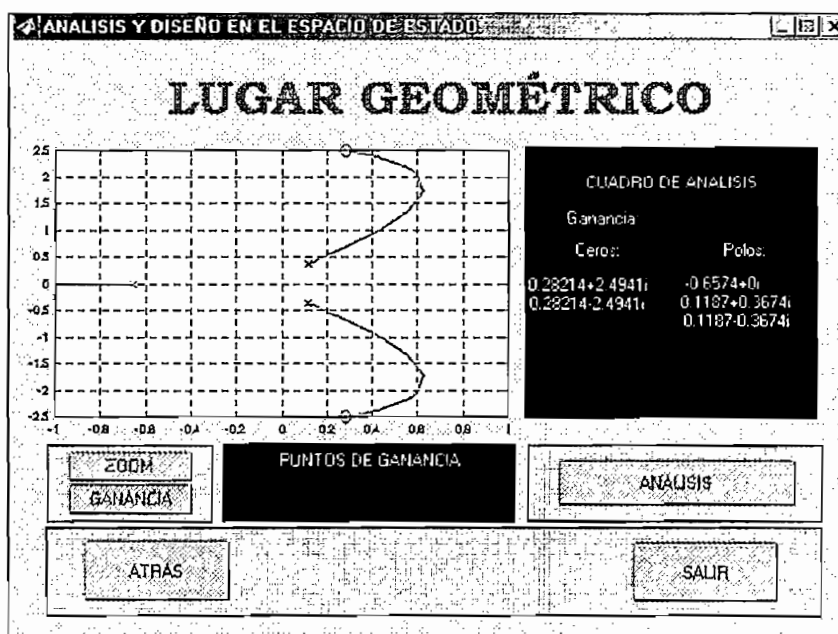
El valor de la ganancia de entrada, en este caso es de $K_i = -16.81$.

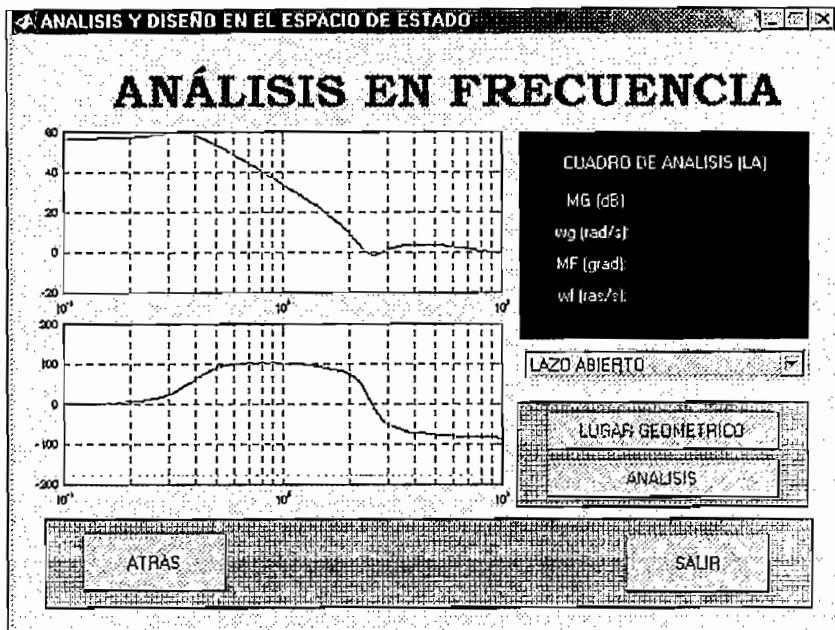


5.1.2 ESTIMADOR DE ESTADO. PROBLEMA DEL HELICÓPTERO

5.1.2.1 Análisis del sistema

El problema del helicóptero es típicamente inestable como se desprende del análisis de su respuesta temporal, de su LGR, y de su respuesta frecuencia.





El diseño a variables de estado da una mayor flexibilidad porque se pueden considerar las variables de:

- q = velocidad de inclinación
- θ = ángulo de inclinación del fuselaje
- u = velocidad horizontal

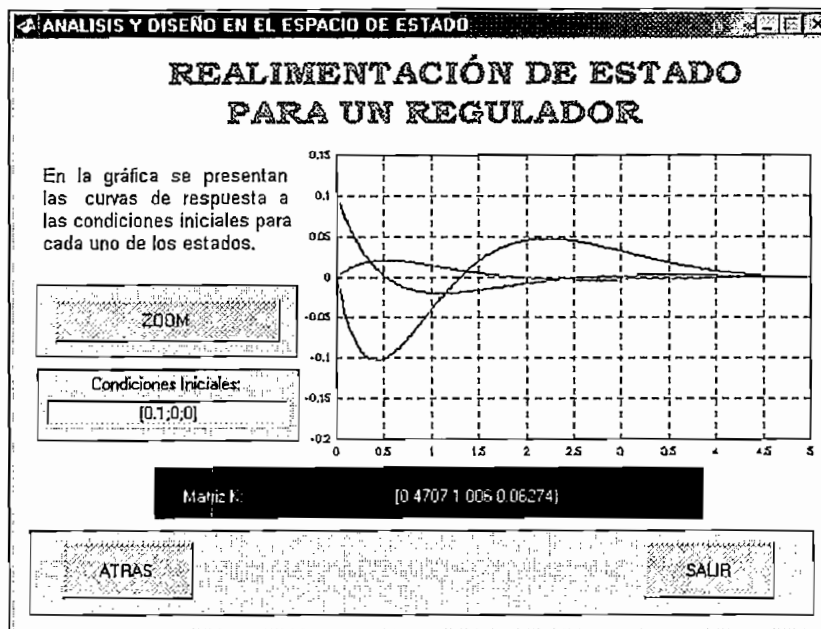
En contraste con el control clásico que maneja solamente la salida. Pero para realimentación de estado es necesario conocer dicho estado, por consiguiente es conveniente manejar un observador de estado.

El sistema es controlable y observable, por lo tanto, primeramente se puede estabilizar al sistema con realimentación de estado y luego manejar un observador de estado. Para estabilizar al sistema se ubican los polos en:

$$p_1 = -1 + j$$

$$p_2 = -1 - j$$

$$p_3 = -2$$



Con lo cual se tiene una ganancia de realimentación $K = [0.4706 \quad 1 \quad 0.0627]$ y una matriz en lazo cerrado de la forma $A_c = A - B^*K$, igual a:

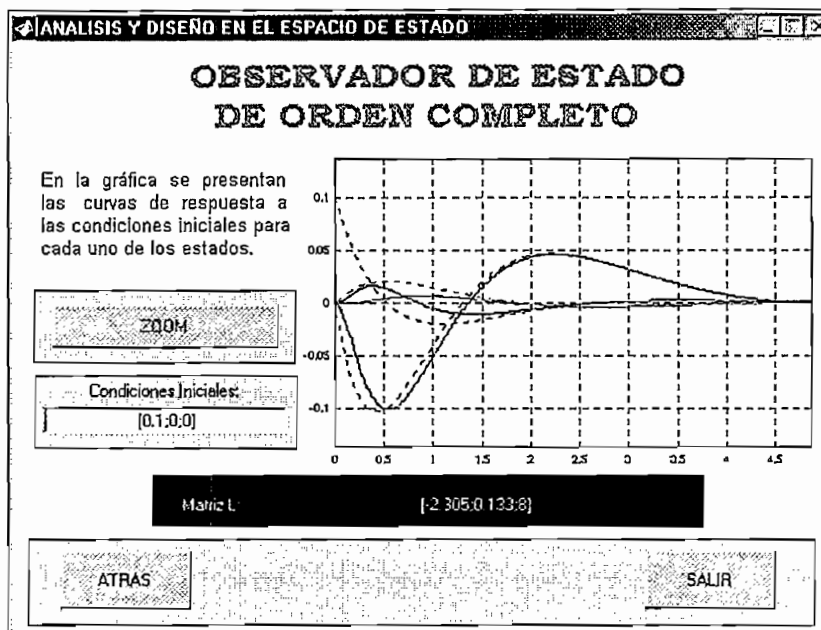
$$A_c = \begin{bmatrix} -3.3648 & -6.3 & -0.50401 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6.0119 & 0 & -0.63446 \end{bmatrix}$$

5.1.2.2 Diseño del observador

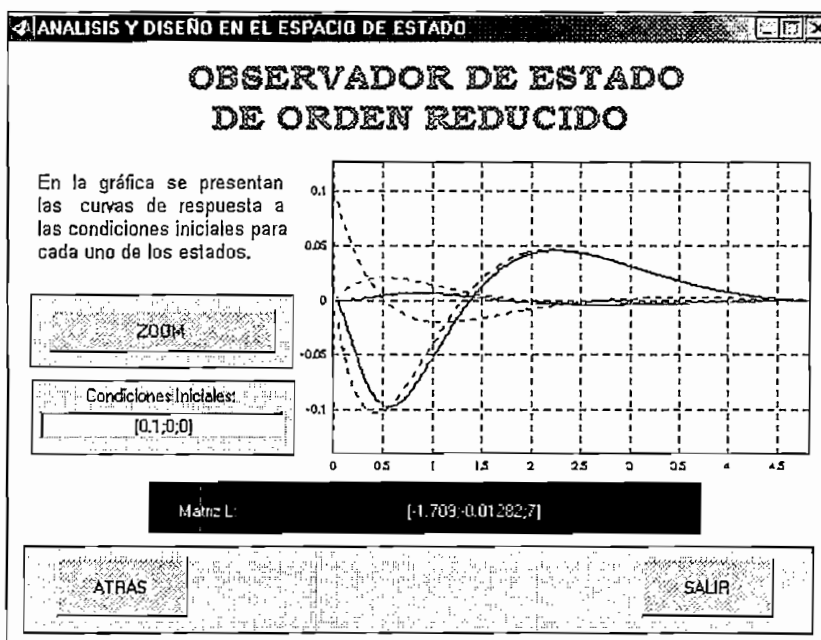
Se selecciona observador de estado de orden completo, se utilizan los polos del observador en $pd = [-3 \quad -4 \quad -5]$, los resultados se pueden apreciar en la siguiente pantalla, donde se puede ver que el estado estimado tiende al estado verdadero.

La matriz L para este caso es:

$$L = \begin{bmatrix} -2.305 \\ 0.133 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Ahora se selecciona un observador de orden reducido con polos en $pd = [-3 \ -4]$, igualmente se observa que el estado estimado tiende al verdadero como lo muestra la siguiente pantalla:



5.1.3 CONTROLADOR: REALIMENTACIÓN MÁS OBSERVADOR DISCRETO. PROBLEMA DE LA BOLA SUSPENDIDA

5.1.3.1 Análisis del sistema

Se utiliza la opción de discretización para realizar el análisis del comportamiento dinámico de este problema. Se utiliza un tiempo de muestreo de 0.01 segundos. Del análisis se desprende que el sistema es típicamente inestable, pero es controlable y observable.



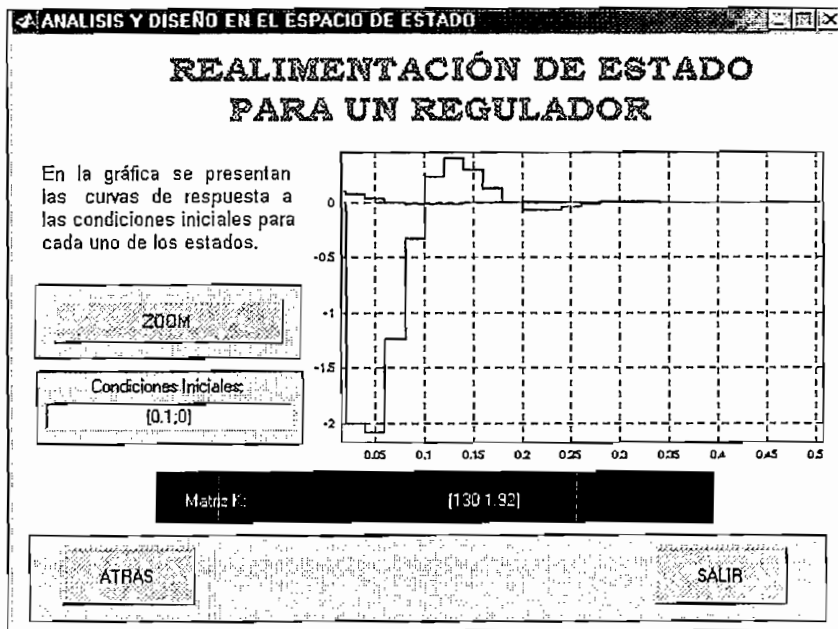
5.1.3.2 Diseño del controlador

Aquí se ensaya una estrategia de control que combina realimentación de estado más observador de estado; esto es, se realimenta las variables de estado observadas. De acuerdo con las especificaciones se tiene los polos en el plano "s", en:

$$p_1 = -19.2 + j 35.091 \Rightarrow z_1 = 0.7745 + j 0.28487$$

$$p_2 = -19.2 - j 35.091 \Rightarrow z_2 = 0.7745 - j 0.28487$$

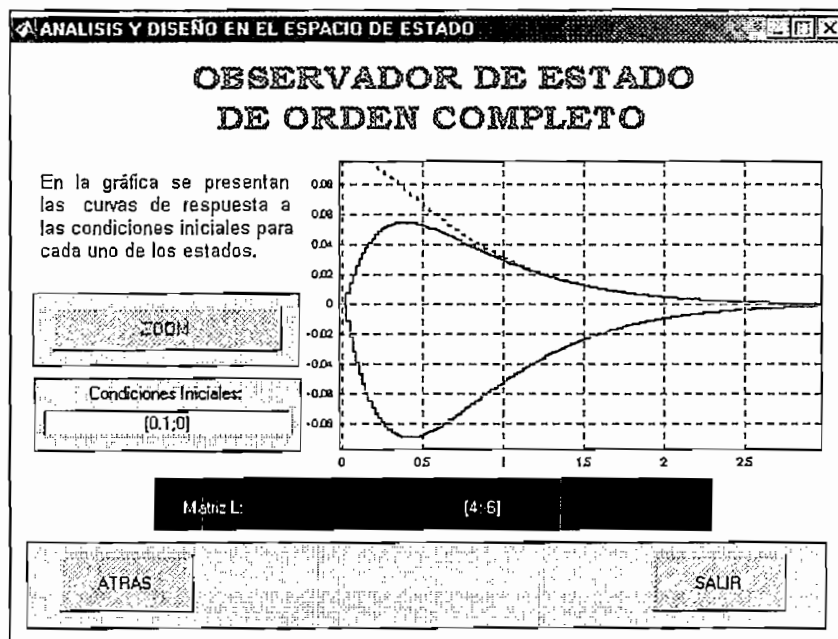
Con lo cual se tiene los resultados de regulación en la siguiente pantalla:



Ahora se procede a diseñar el observador de estado con polos en:

$$po1 = 0.3 \text{ y } po2 = 0.4$$

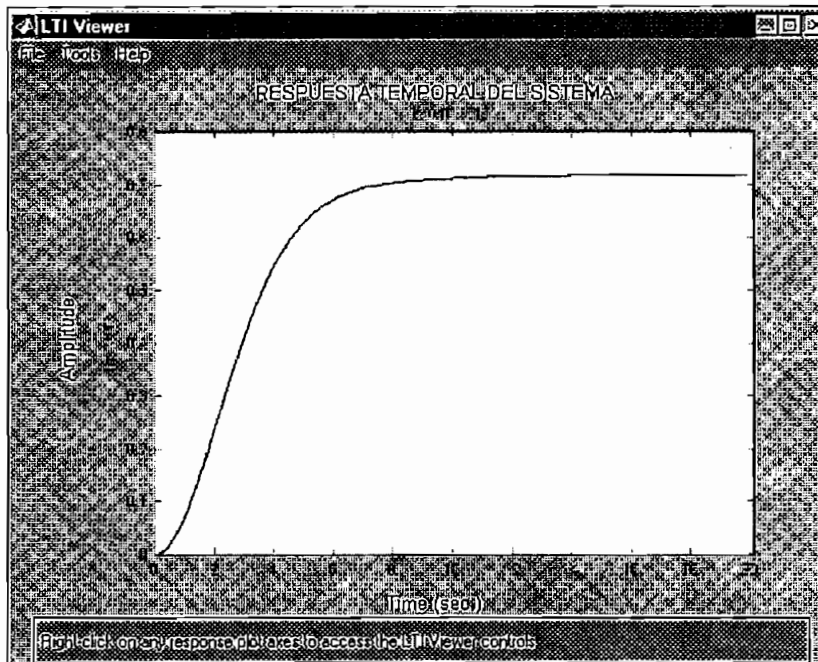
Con lo que se obtienen los resultados en la siguiente pantalla:



5.1.4 PROBLEMA DE LA CINTA MAGNÉTICA

5.1.4.1 Análisis del sistema

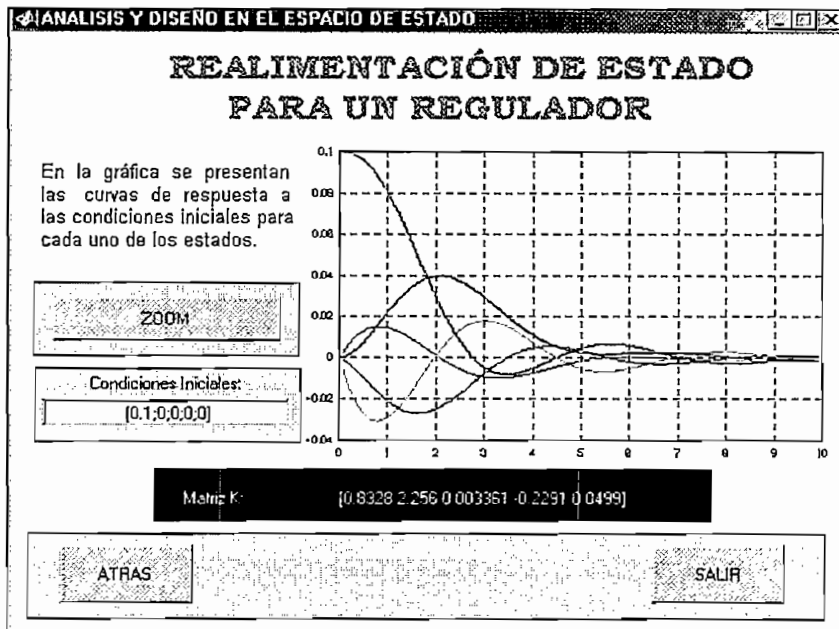
El sistema es controlable y observable para el control de tensión, siendo necesario mejorar la respuesta, como podemos ver en la siguiente pantalla:



Para la salida de posición, el sistema es controlable pero no observable, por lo cual, en este caso se debe realizar una realización mínima. Una vez hecha la realización mínima, procedemos a diseñar el regulador.

5.1.4.2 Diseño del regulador

En este caso de estudio la flexibilidad de la realimentación de estado evita utilizar la realimentación tacométrica previa al diseño de una red o un PID, razón por la cual se utiliza la realimentación de estado con polos deseados mediante la tabla ITEA, obteniéndose el resultado en la siguiente pantalla:



5.2 RESULTADOS DE DISEÑO UTILIZANDO TÉCNICAS AVANZADAS

Los resultados arrojados por las técnicas avanzadas de control son los siguientes:

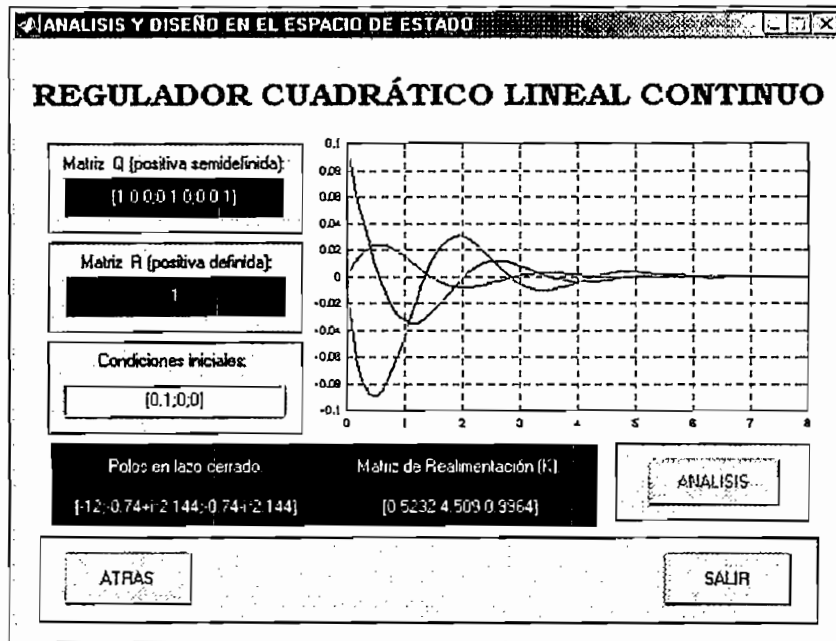
5.2.1 REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL. PROBLEMA DEL HELICÓPTERO

5.2.1.1 Diseño del regulador

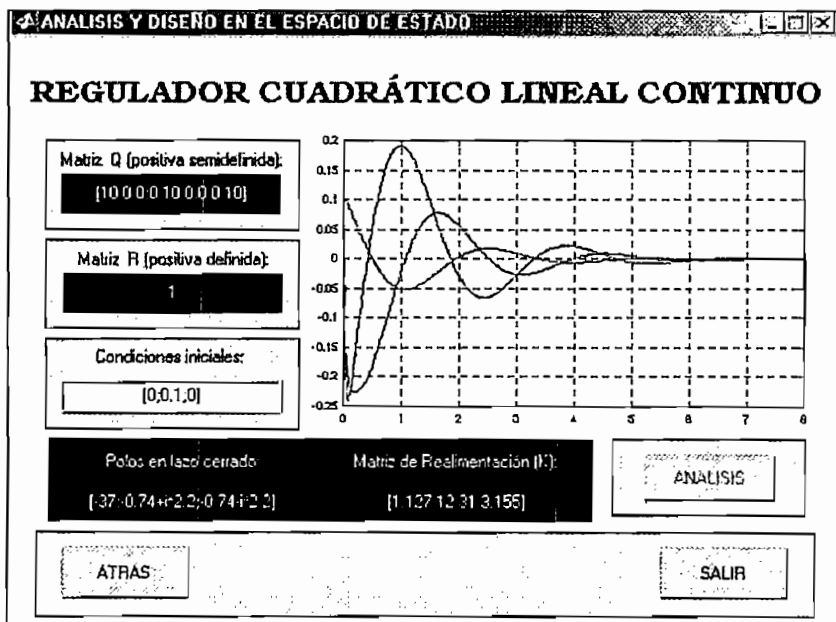
Para este caso de estudio se utiliza la opción del regulador cuadrático lineal para tres casos:

- a) Matriz $Q = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$ y $R = 1$
- b) Matriz $Q = [10 \ 0 \ 0; 0 \ 10 \ 0; 0 \ 0 \ 10]$ y $R = 1$
- c) Matriz $Q = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$ y $R = 10$

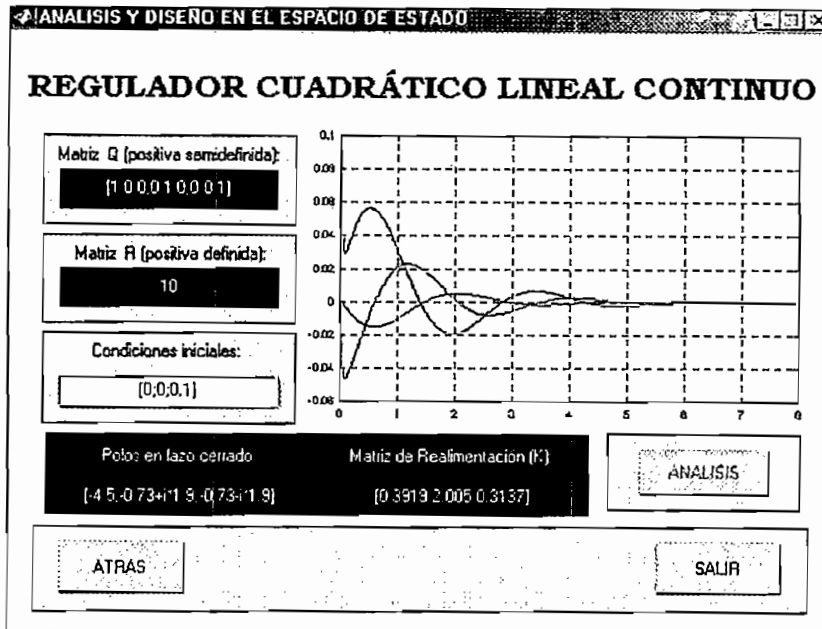
Los resultados de este diseño se muestran en las siguientes pantallas:



$$K = [0.5232 \quad 4.509 \quad 0.9364]$$



$$K = [1.127 \quad 12.31 \quad 3.155]$$



$$K = [0.3919 \quad 2.005 \quad 0.3137]$$

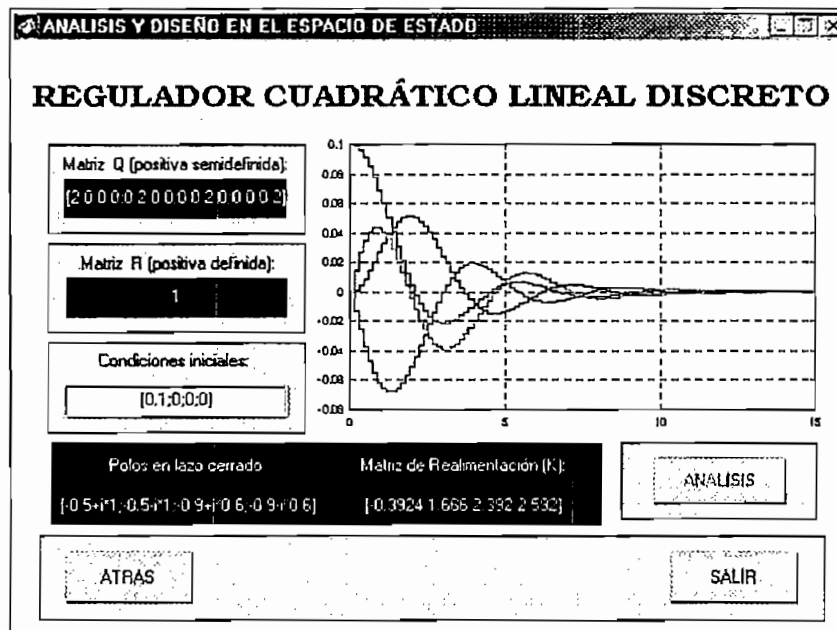
Como se desprende de los resultados se puede determinar que cuando se penaliza fuertemente el estado, con una matriz Q alta, se tiene un fuerte decaimiento de la señal a costa de un vector de realimentación alto.

Para el caso de una matriz R alta, o sea una fuerte penalización del control, se tiene una matriz de realimentación de estado menor, en este caso para menor energía.

5.2.2 REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL DISCRETO. PROBLEMA DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE, CON ESTRUCTURA FLEXIBLE

5.2.2.1 Diseño del controlador

En este caso, el diseño clásico implica la utilización de un filtro resonante o Notch, la ventaja de la realimentación de estado es que evitamos este filtro utilizando la flexibilidad de la realimentación de estado e inclusive realizando un regulador óptimo, la pantalla del resultado se muestra a continuación:



$$K = [-0.3924 \quad 1.666 \quad 2.392 \quad 2.592]$$

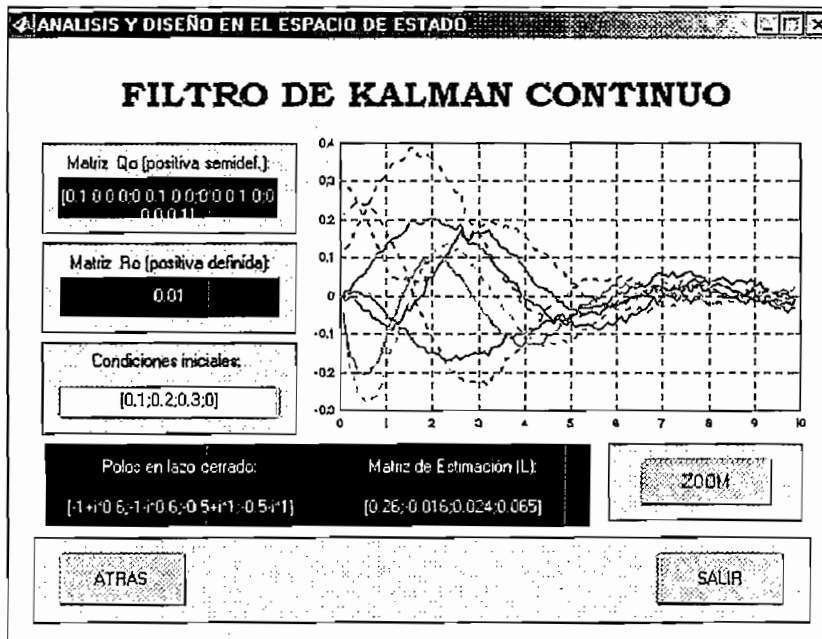
5.2.3 FILTRO DE KALMAN CONTINUO. PROBLEMA DE LA PLANTA CON DOBLE INTEGRADOR. PROBLEMA DE ORIENTACIÓN DE UN SATÉLITE, SIN ESTRUCTURA FLEXIBLE

5.2.3.1 Diseño del filtro

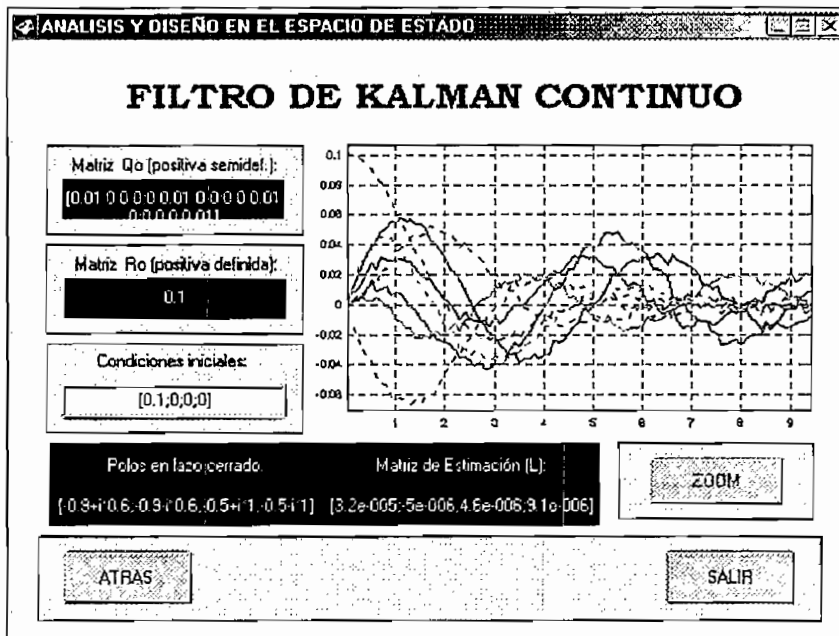
En este caso de estudio, primero se estabiliza la planta con una realimentación de estado óptima con matrices de ponderación unitarias ($Q_0 = I$ y $R_0 = 1$), obteniéndose el sistema:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.7 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Se maneja matrices de covarianza asumidas $Q_0 = 0.1 * I$, $R_0 = 0.01$ y la matriz gamma igual a la identidad (I), luego se realiza el cálculo intercambiando la intensidad de las matrices de covarianza, esto es $Q_0 = 0.01 * I$ y $R_0 = 0.1$, los resultados se presentan a continuación.



$$L = \begin{bmatrix} 0.259 \\ -0.0164 \\ 0.0235 \\ 0.0653 \end{bmatrix}$$



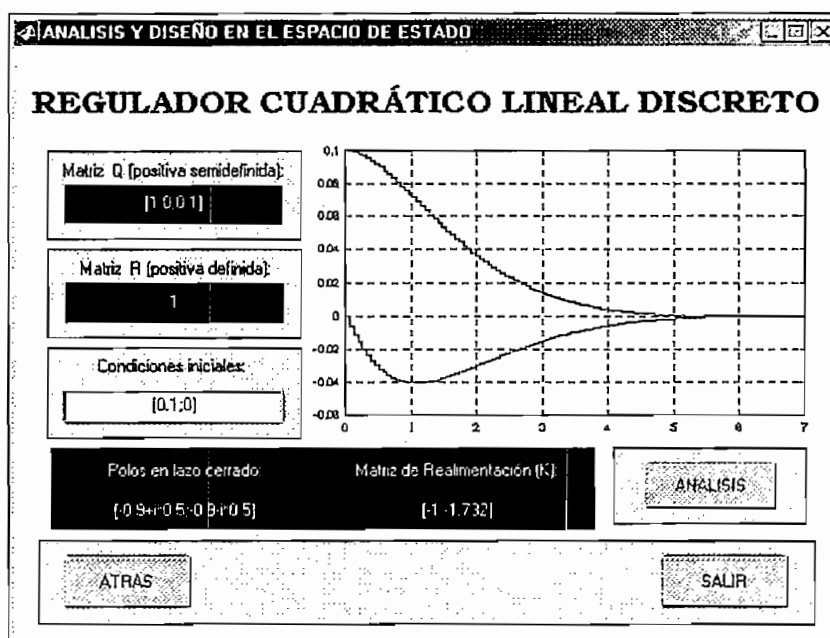
$$L = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.05 \\ 4.6 \\ 0.91 \end{bmatrix}$$

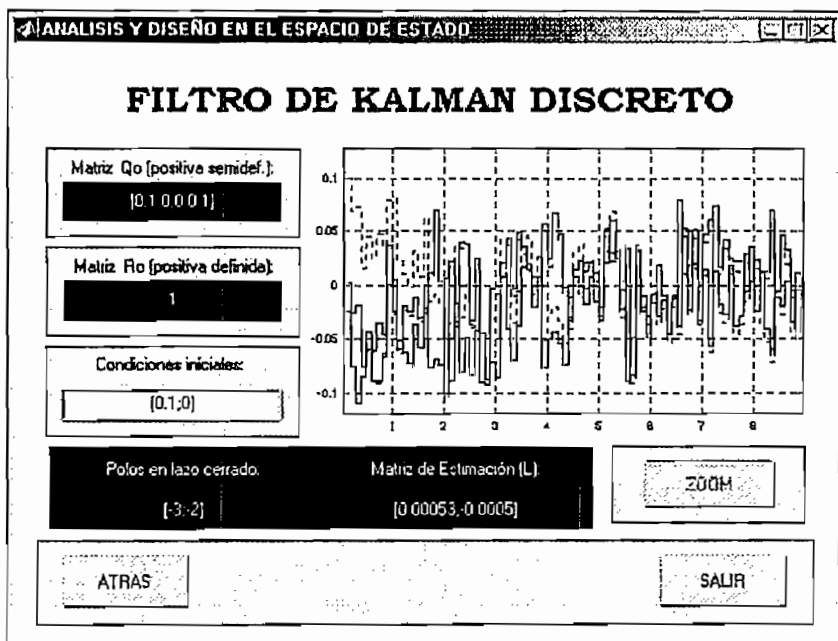
Como se puede apreciar, los estados estimados con el filtro de Kalman siguen la secuencia de ruido de una manera muy aproximada, lo cual sería incapaz de hacer un estimador determinístico. Si las mediciones son muy ruidosas, (R_0 grande), entonces la matriz L es pequeña, si existe gran intensidad de ruido en la planta (Q_0 grande), entonces L es grande y el filtro es muy rápido.

5.2.4 FILTRO DE KALMAN DISCRETO. PROBLEMA DE LA CAÍDA LIBRE

5.2.4.1 Diseño del filtro

En este caso se realiza la realimentación del sistema discretizado ($Q = 1$ y $R = 1$) con un periodo de muestreo $T = 0.1$ segundos y se maneja una matriz de covarianza $R_0 = 1$ y $Q_0 = 0.1 * I$, el resultado de este diseño se presenta en la siguiente pantalla:





CAPITULO 6.

CONCLUSIONES

- En el espacio de estado, se aprecia la flexibilidad de diseño realimentando todos los estados, al contrario del control clásico en el cual se realimenta solo la salida, de esta manera se tiene mayor grado de libertad para satisfacer especificaciones de funcionamiento.
- En control moderno hay la posibilidad de implementar estimadores (observadores) de estado a partir del conocimiento de la entrada y la salida. De esta manera se evita la medición y el acondicionamiento de señal de variables internas. Como por ejemplo velocidades a partir de posiciones.
- Estimación es el proceso de la extracción de información de datos que pueden contener errores. La información deseada, a partir de las mediciones, toma en cuenta errores en las mismas, el efecto de perturbaciones, acciones de control sobre el sistema y un conocimiento a priori de la medición. En base a este concepto puede apreciarse la importancia de la estimación de estado en sistemas industriales, los cuales están sujetos a ruido (perturbación) en la planta y a errores (incertidumbre) en las mediciones, situación que se da en casos reales (prácticos).
- Se puede manejar con igual grado de libertad los problemas del control: regulador y servomecanismo.
- Se puede hacer regulación óptima minimizando una función de costo, la cual tiene que ver con la ponderación de las matrices Q para penalizar los estados, (menor decaimiento o amortiguamiento) y R para penalizar el control (menor energía), lo que no hace el control clásico.

- La señal de control u puede ser dimensionada, ponderando la función de costo.
- Puede realizarse estimación óptima estocástica, manejando ambientes ruidosos en la planta o sistema e incertidumbre en las mediciones, lo cual se apega más a la realidad. Un estimador óptimo es un algoritmo computacional que procesa mediciones para producir un estimador de estado (con mínimo error) de un sistema, utilizando el conocimiento de la dinámica de las mediciones y del sistema, una estadística asumida de los errores de las mediciones y ruidos del sistema e información de la condición inicial.
- El modelo de un sistema es aproximado y en consecuencia se cometen errores que deben ser considerados en el análisis y el diseño. La regulación se puede hacer considerando al ambiente ruidoso utilizando un regulador lineal Gaussiano.
- En la práctica la mayoría de sistemas actúan bajo la influencia de ruido y perturbaciones aleatorias. Tanto el ruido, las perturbaciones y los errores de modelamiento se caracterizan como procesos estocásticos.
- No hay dinámica en la realimentación óptima. La realimentación óptima simplemente proyecta el espacio de estado a las variables de control. La principal limitación del control determinístico es que no proporciona una apropiada distinción de los sistemas de lazo abierto y cerrado.
- Cuando se añade el filtro de Kalman, la dinámica depende del sistema y de las perturbaciones, pero es independiente del criterio de control.
- Se puede manejar sistemas multivariados, solamente considerando un vector de entrada y un vector de salida, utilizando la misma estructura en el análisis y el diseño.

- El paquete computacional MATLAB, es una de las herramientas más importantes para la ingeniería, este programa posee un sin número de rutinas sumamente útiles, a través de las cuales la teoría moderna de control se facilita enormemente en varios de sus aspectos (cálculos, análisis, diseño, simulaciones, comparaciones), pero sus aplicaciones no están siendo utilizadas en toda su potencialidad por desconocimiento de las técnicas de análisis y diseño.
- El desarrollo de rutinas a través de archivos "*.m" en programa computacional MATLAB facilita y optimiza el análisis y diseño de sistemas de control.
- La implementación práctica de este tipo de controles se realiza fácilmente mediante una adecuada interfase con adquisición y salida de datos mediante ganancias constantes.
- Estas técnicas de ingeniería de control moderno actualmente se utilizan en plantas de alta complejidad; es esta la razón por la cual vale la pena realizar trabajos en esta área, ya que cada vez más los sistemas de transportes, procesos, manufactura, manejo de energía, son más complejos y por ende requieren de nuevas alternativas de control, como el caso de control mediante variables de estado y control inteligente.
- Se han planteado los métodos más importantes de análisis y diseño de sistemas de control, tanto continuos como discretos, en el espacio de estado, por lo que se han cumplido los objetivos generales y específicos del proyecto de titulación.
- En vista de que se ha visualizado, a través de casos de estudio, que el control en el espacio de estado mejora las aplicaciones prácticas del control de sistemas y que las mejoras del control en el espacio de estado son adecuadamente implementadas en MATLAB, se concluye que se cumplió con la hipótesis planteada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Katsuhiko O., **"Ingeniería de Control Moderna"**, Editorial Prentice Hall, Tercera Edición, 1998.
- [2] Franklin G. F., Powell J. D., Emami - Naeini A., **"Control de Sistemas Dinámicos con Realimentación"**, Editorial Addison – Wesley, 1991.
- [3] Shahian B., Hassul M., **"Control System Design Using MATLAB"**, Editorial Prentice Hall, 1993.
- [4] Katsuhiko O., **"Sistemas de Control en Tiempo Discreto"**, Editorial Prentice Hall, Segunda Edición, 1996.
- [5] Franklin G. F., Powell J. D., **"Digital Control of Dinamic Systems"**, Editorial Adisson – Wesley, 1982.
- [6] Gelb A., **"Applied Optimal Estimation"**, Editorial M.I.T. Press, 1974.
- [7] Bozic S. M., **"Digital and Kalman Filtering"**, Editorial Edward Arnold, 1981.
- [8] Burbano C. P., **"El Filtro Discreto de Kalman"**, EPN, Jornadas de Ingeniería en Electrónica y Control, 1990.
- [9] Castillo J., **"Modelación y Simulación del Control del Mecanismo de una Cinta Digital"**, Tesis de Grado, EPN, 2000.
- [10] Armijos P., **"Modelación, Simulación y Control de Orientación de un Satélite"**, Tesis de Grado, EPN, 2000.

- [11] Zapata G., Guevara G., "**Diseño y Construcción de un Péndulo Invertido Estabilizante en la Posición Vertical Superior**", Tesis de Grado, EPN, 1999.
- [12] Burbano C. P., "**Notas de Control Moderno**", EPN, 2000
- [13] MATLAB, User Guide, "**Control System Toolbox**".
- [14] Kirk D. E., "**Optimal Control Theory**", Editorial Prentice Hall, 1970
- [15] Bendat J. S., Piersol A. G., "**Random Data**", Editorial Wiley & Sons, 1971
- [16] Astrom K. J., "Introduction to Stochastic Control Theory", Editorial Academic Press, 1970
- [17] Zarrop M. B., "**Lectures on Static and Dinamic Systems Optimisation**", U.M.I.S.T., 1974

ANEXO A

MANUAL DE COMANDOS

A continuación se presenta una breve descripción de los comandos de MATLAB utilizados en cada uno de los capítulos del Análisis y Diseño en el Espacio de Estado.

A.1 COMANDOS PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS

Bode.- Calcula la respuesta de frecuencia del sistema LTI en magnitud y fase, es utilizado para encontrar el margen de fase, el margen de ganancia, el ancho de banda, las frecuencias de corte y la estabilidad del sistema. Tiene la siguiente sintaxis y las siguientes opciones:

- *bode(sys)*, dibuja el diagrama de Bode para el sistema arbitrario *sys*, este modelo puede ser continuo o discreto.
- *bode(sys,w)*, especifica el rango de frecuencia o los puntos de frecuencia para ser usados en el diagrama de Bode.
- *[mag,phase,w]=bode(sys)*, devuelve la magnitud y la fase (en grados) de la respuesta de frecuencia del sistema, la magnitud puede ser convertida a decibelios mediante la operación: $mag_{db} = 20 * \log_{10}(mag)$.

C2d.- Transforma un sistema continuo a equivalente discreto. Su función inversa es *d2c*. Tiene la siguiente sintaxis:

- *sysd=c2d(sys,ts,'method')*, transforma el sistema continuo a su equivalente discreto con el tiempo de muestreo *ts* y por medio del método especificado (*zoh*, *foh*, *tustin*).

Ctrb.- Calcula la matriz de controlabilidad del sistema Mc. Tiene la siguiente sintaxis:

- $Mc = ctrb(a,b)$, retorna la matriz de controlabilidad Mc, donde a y b son las matrices de la planta.

Dlyap.- Resuelve las ecuaciones de Liapunov para el tiempo discreto. Tiene la siguiente sintaxis:

- $P = dlyap(A,Q)$, donde P es la solución a la ecuación de Liapunov ($APA^T - P = -Q$), A y Q son matrices n x n. La solución P es simétrica y positiva definida cuando Q es positiva definida y A tiene todos sus valores propios dentro del círculo de radio unitario.

Eig.- Obtiene los valores y vectores propios. Tiene la siguiente sintaxis:

- $[v,d] = eig(A)$, donde v es un vector que contiene los valores propios y d es un vector que contiene los vectores propios de la matriz A, la cual debe ser de orden n x n.

Feedback.- Realiza la conexión de dos modelos LTI en realimentación. Tiene las siguientes opciones y sintaxis:

- $sys = feedback(sys1,sys2)$, interconecta los sistemas sys1 y sys2 por medio de una realimentación negativa y retorna el modelo sys resultante. Los modelos LTI sys1 y sys2 deben ser ambos continuos o ambos discretos con un tiempo de muestreo idéntico.
- $sys = feedback(sys1,sys2,+1)$, realiza la misma función anterior, pero con la realimentación del modelo positiva.

Liap.- Resuelve las ecuaciones de Liapunov en el tiempo continuo. Tiene la siguiente sintaxis:

- $P = \text{lyap}(A, Q)$, donde P es la solución a la ecuación de Liapunov ($APA^T - P = -Q$), A y Q son matrices n x n. La solución P es simétrica y positiva definida cuando Q es positiva definida y A tiene todos sus valores propios dentro del círculo de radio unitario.

Minreal.- Simplifica un sistema para una mínima realización del mismo. Tiene la siguiente sintaxis:

- $\text{sysr} = \text{minreal}(\text{sys})$, donde el sistema sys puede estar definido por su función de transferencia o por sus variables de estado.

Obsv.- Calcula la matriz de observabilidad del sistema No. Tiene la siguiente sintaxis:

- $\text{No} = \text{obsv}(a, c)$, retorna la matriz de controlabilidad No, donde a y c son las matrices de la planta.

Rlocus.- Obtiene el lugar geométrico de las raíces (LGR) para un sistema LTI univariable. El LGR da la trayectoria de los polos en lazo cerrado como una función de la ganancia (se asume realimentación negativa). Tiene la siguiente sintaxis y opciones:

- $\text{rlocus}(\text{sys})$, calcula y dibuja el LGR para un sistema en lazo abierto.
- $\text{rlocus}(\text{sys}, k)$, calcula y dibuja el LGR para un sistema en lazo abierto con una ganancia especificada.

Rlocfind.- Localiza un punto en LGR y entrega el valor de la ganancia en ese punto, trabaja con sistema continuos y discretos. Tiene la siguiente sintaxis:

- $[k, \text{poles}] = \text{rlocfind}(\text{sys})$, transforma al puntero del mouse en una cruz para ser colocada en el LGR y así seleccionar un punto donde se desea calcular la ganancia. Entrega los valores de la ganancia k para los polos escogidos y su ubicación en el LGR.

Tf2ss.- Convierte un sistema representado por su modelo en función de transferencia, a su modelo en variables de estado. Es el inverso de la función `ss2tf`. Tiene la siguiente sintaxis:

- $[a,b,c,d]=tf2ss[num,den]$, calcula las matrices a , b , c , y d del modelo a variables de estado del sistema.

A.2 COMANDOS PARA LOS MÉTODOS BÁSICOS DE CONTROL

Acker.- Encuentra la matriz de ganancias del método de asignación de polos, necesaria para el diseño de la realimentación de estado. Esta matriz es determinada mediante la fórmula de Ackerman. Tiene la siguiente sintaxis:

- $K=acker(a,b,p)$, calcula la matriz K , para la realimentación de estado, donde a y b son las matrices del sistema y p son los polos deseados.
- $L=acker(a',c',p)$, calcula la matriz L , para la estimación de estado, donde a' y c' son las matrices transpuestas del sistema y p son los polos deseados más rápidos del observador.

Estim.- Calcula la ganancia del estimador diseñado. Tiene la siguiente sintaxis:

- $est=estim(sys,L)$, devuelve la ganancia del sistema observado, en donde L es la matriz de ganancias del observador de estado.

Initial.- Calcula la respuesta a una condición inicial de los modelos en variables de estado. Calcula la respuesta de un sistema no forzado y definido mediante variables de estado que responden a una condición inicial. Si se desea generar un vector tiempo para la simulación, se utiliza la operación: $t = 0:dt:tf$, donde dt son los pasos para generar el vector y tf es el tiempo final de simulación (Para los sistemas discretos dt debe corresponder al periodo de muestreo y en los sistemas continuos debe ser lo suficientemente pequeño para poder visualizar el transitorio). Tiene las siguientes opciones y sintaxis:

- $initial(sys,x_0)$, dibuja la respuesta del sistema para una condición inicial x_0 , la duración de la simulación es asignada automáticamente. Es aplicable a modelos continuos o discretos.
- $[y,t,x]=initial(sys,x_0)$, calcula la respuesta de salida, el tiempo de simulación y las trayectorias de estado x .

Reg.- Calcula la matriz $A - BK - LC$ del regulador (realimentación más observador de estado) del sistema, asumiendo que es controlable y observable. El regulador debe ser conectado a la planta utilizando realimentación positiva. Tiene la siguiente sintaxis:

- $Rsys=reg(sys,K,L)$, calcula la matriz del controlador diseñado mediante las matrices de realimentación (K) y de observación (L) de estado.

A.3 COMANDOS PARA LAS TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL

Lqr.- Diseña el LQR (regulador lineal cuadrático) del sistema. Tiene la siguiente sintaxis:

- $[K,S,E]=lqr(a,b,q,r)$, calcula la matriz óptima de realimentación K para minimizar la función de costo $J = \int [x'Qx + u'Ru]$, sujeta a la ley de control $u = -Kx$ donde q es una matriz positiva semidefinida y r es una matriz positiva definida. También calcula la matriz S que es la solución a la ecuación de Riccati y E que son los polos de la matriz $A - BK$.

DIqr.- Diseña el LQR (regulador lineal cuadrático) para un sistema discreto. Tiene la siguiente sintaxis:

- $[K,S,E]=lqr(a,b,q,r)$, calcula la matriz K óptima de realimentación para minimizar la función de costo $J = \sum [x'Qx + u'Ru]$, sujeta a la ley de control $u = -Kx$ donde q es una matriz positiva semidefinida y r es una matriz

positiva definida. También calcula la matriz S que es la solución a la ecuación de Riccati y E que son los polos de la matriz $A - BK$.

Kalman.- Diseña el estimador de Kalman para un sistema continuo o discreto de una planta en su modelo a variables de estado.

- $[F,L,P]=kalman(sys,qn,rn)$, calcula la matriz L óptima del observador de estado para el sistema dado con presencia de ruido. La matriz L es la matriz del estimador óptimo, la matriz P es la solución a la ecuación de Riccati y F es el modelo del estimador.

Lqgreg.- Produce un regulador lineal cuadrático Gaussiano conectando el estimador de Kalman F y la matriz de ganancias de realimentación de estado diseñada por el LQR (regulador cuadrático lineal). Este regulador debe conectarse a la planta utilizando realimentación positiva. Tiene la siguiente sintaxis:

- $Rlqg=lqgreg(F,K)$, retorna el regulador cuadrático lineal del sistema analizado mediante el filtro de Kalman y la realimentación de estado del LQR.

ANEXO B

MANUAL DE USUARIO

A continuación se da una breve descripción del funcionamiento del programa *ades* realizado en el paquete computacional MATLAB 5.3, dicho programa está implementado sobre la base de rutinas a manera de un "toolbox" para realizar el Análisis y Diseño en el Espacio de Estado, tanto para sistemas, lineales y univariados tanto continuos y como discretos.

B.1 CARACTERÍSTICAS DEL HARDWARE Y SOFTWARE REQUERIDOS

El programa *ades* funciona en el paquete computacional MATLAB 5.3, el cual necesita las siguientes características de hardware y software para su correcto funcionamiento:

- Procesador 586 o PENTIUM, PENTIUM II, PENTIUM III, ATHLON
- WINDOWS 95, 98, Millenium o NT
- Memoria RAM de 28M o mayor
- Espacio en el disco duro de 500MB
- Monitor VGA o SVGA
- Floppy 3 1/2

B.2 UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA

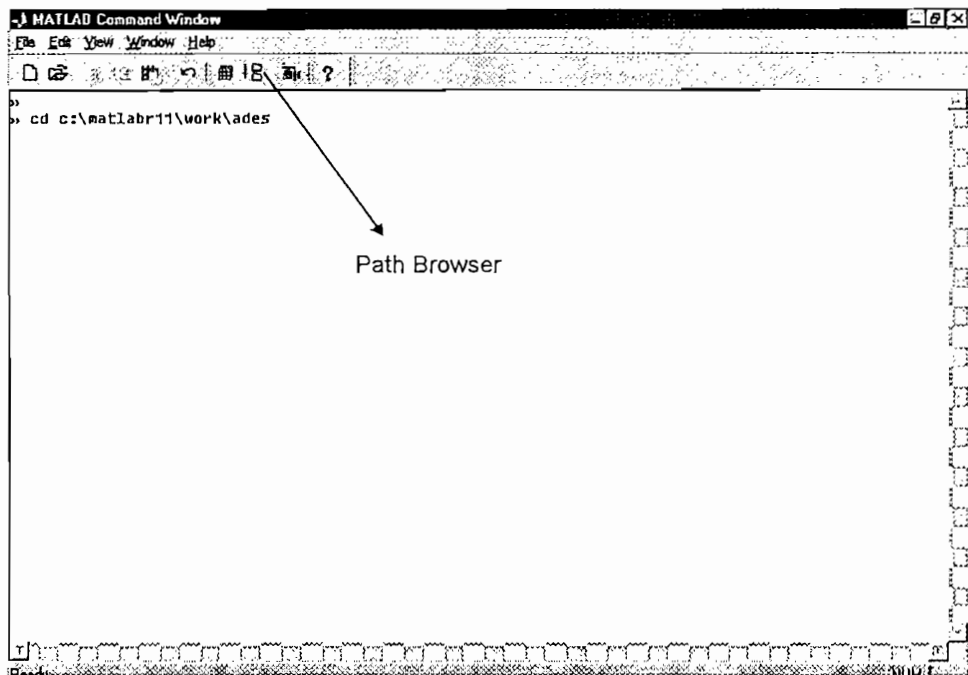
El programa *ades* (análisis y diseño en el espacio de estado) se encuentra a disposición en 2 disquettes y para su utilización debe ser descargado completamente en una carpeta "ADES" (creada por el usuario) en el directorio *work* de MATLAB.

El programa no corre desde los disquettes debido a que genera una serie de directorios y archivos temporales que necesitan ser creados en el directorio del programa MATLAB instalado en el disco duro.

Para ingresar al programa se debe indicar la ubicación de los archivos “.m” del programa *ades* por medio del prompt en la pantalla del MATLAB, como se indica en la siguiente figura.

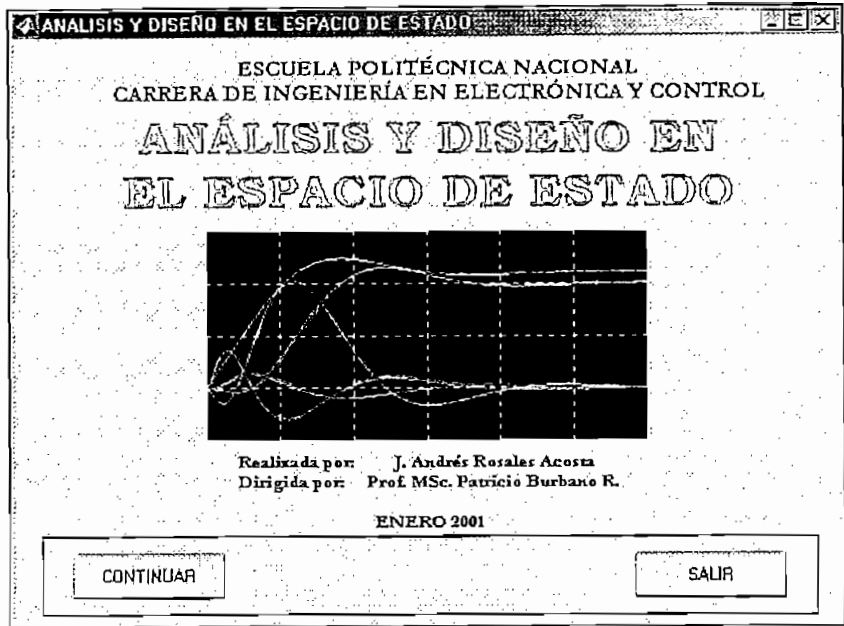
```
cd c:\matlabr11\work\ades
```

También se puede indicar la ubicación de los archivos por medio del mouse haciendo click en el símbolo del path browser de la siguiente manera:

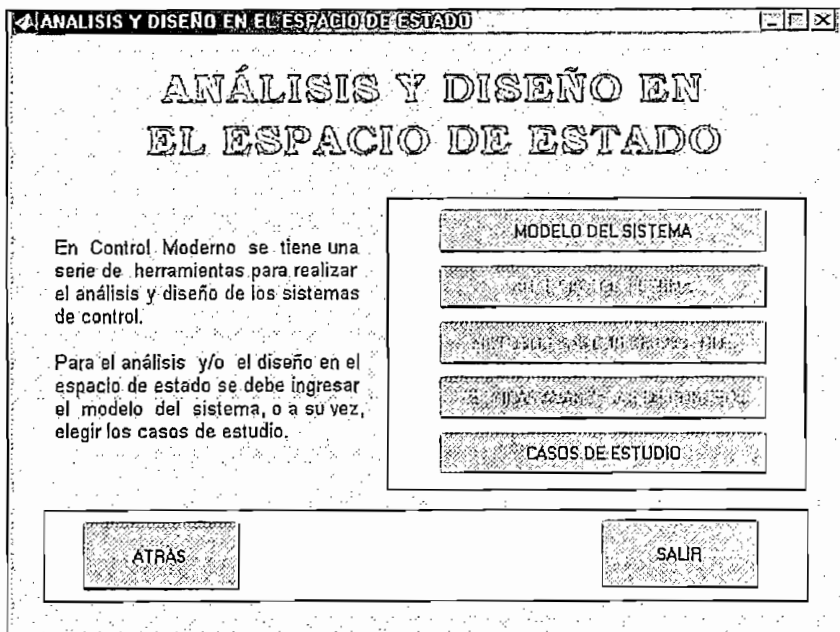


Luego de realizar estos pasos se debe digitar el comando *ades* en la pantalla del MATLAB.

El programa empieza con la pantalla de presentación, a través de la cual se ingresa al primer menú del programa mediante el botón de *continuar* o si el usuario decide no utilizar el programa cerrar la pantalla con el comando *salir*.



La pantalla del primer menú del programa permite al usuario elegir entre la opción de ingresar un modelo cualquiera al programa o a su vez de escoger a uno de los casos de estudio.



Al elegir la opción del modelo del sistema, se presenta la siguiente pantalla:

de ingresar los datos en cualquiera de sus dos formas, se debe presionar el botón de continuar.

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

VARIABLES DE ESTADO

Las variables de estado del modelo, deben ser ingresadas como matrices de la forma:

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

La matriz A puede ser hasta de orden 10 (10 estados).

Matriz A[nxn]:
[0 0 1 0]

Matriz B[nx1]:
[1 0]

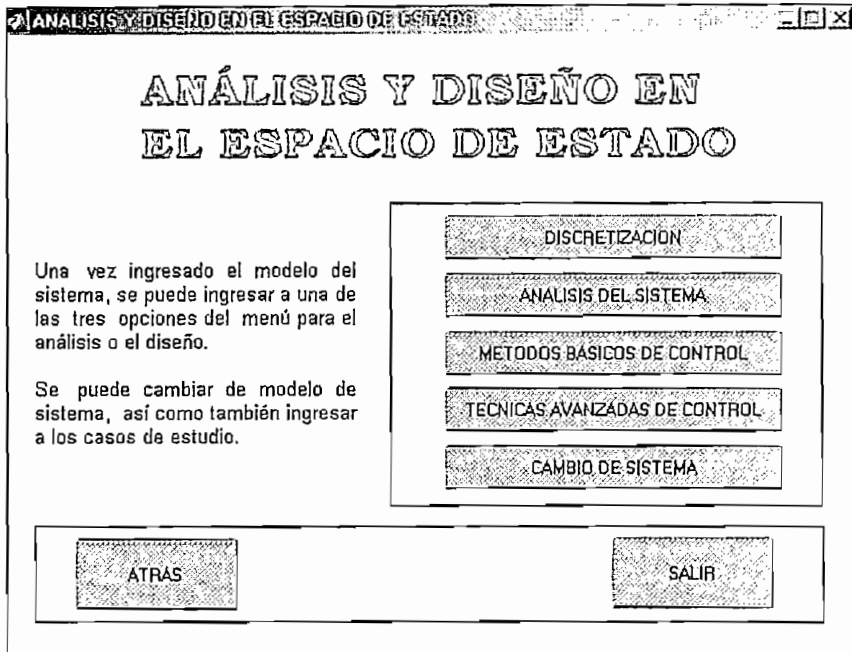
Matriz C[1xn]:
[0 1]

Matriz D[1x1]:
[0]

ATRÁS CONTINUAR SALIR

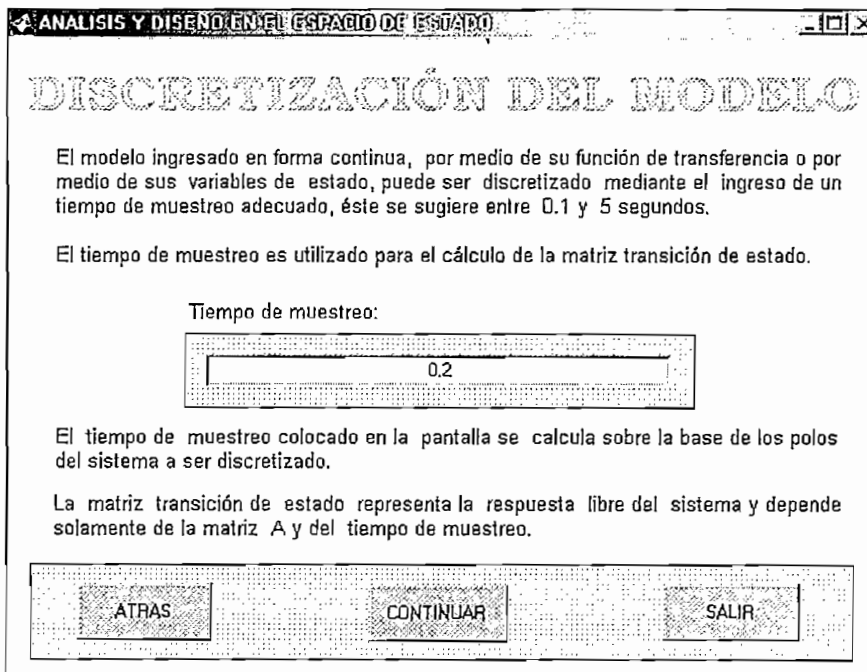
La siguiente pantalla es la del menú completo del programa, y en esta se tienen las siguientes opciones:

- Discretización del sistema (análisis discreto del sistema)
- Análisis continuo del sistema
- Métodos básicos de control en el espacio de estado
- Técnicas avanzadas de control en el espacio de estado
- Cambio de sistema



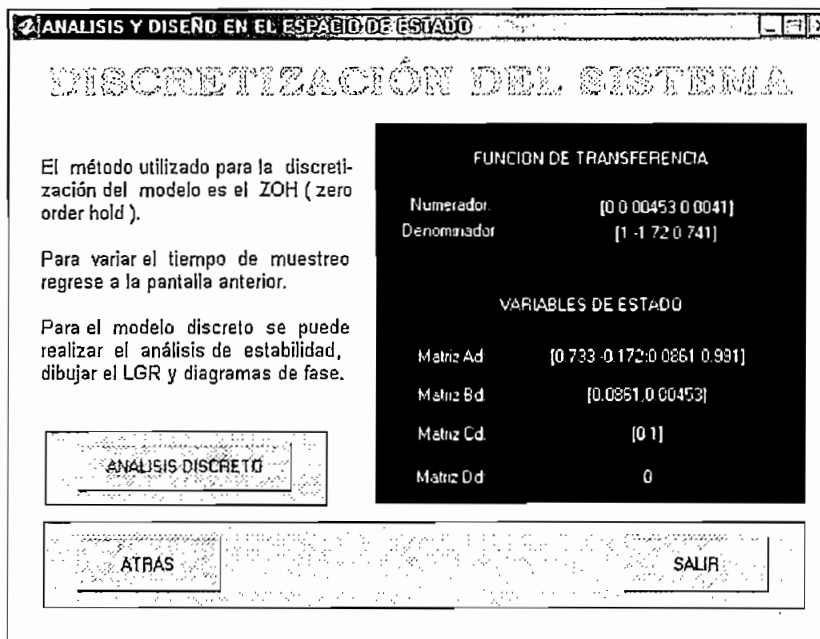
B.2.1 Discretización y análisis del sistema

Al escoger la opción de discretización, se presenta la siguiente pantalla:



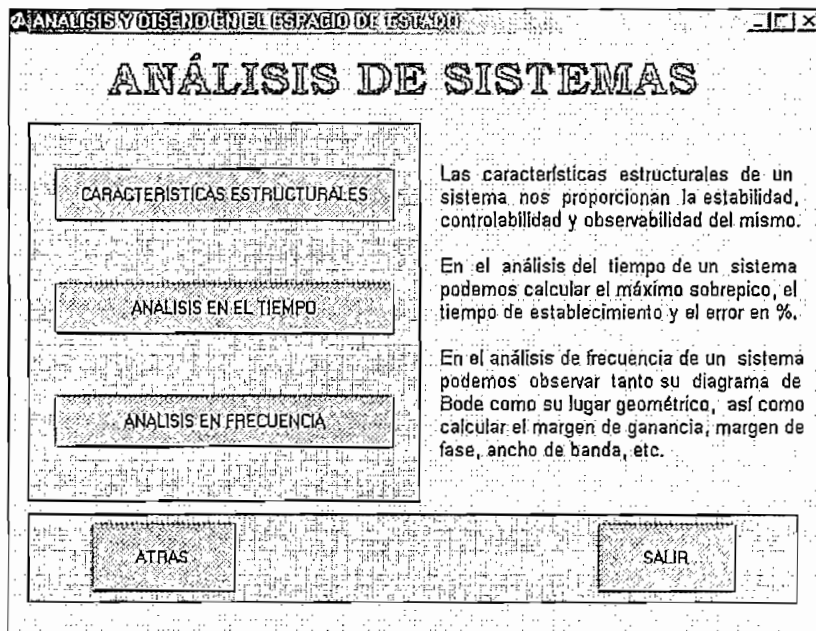
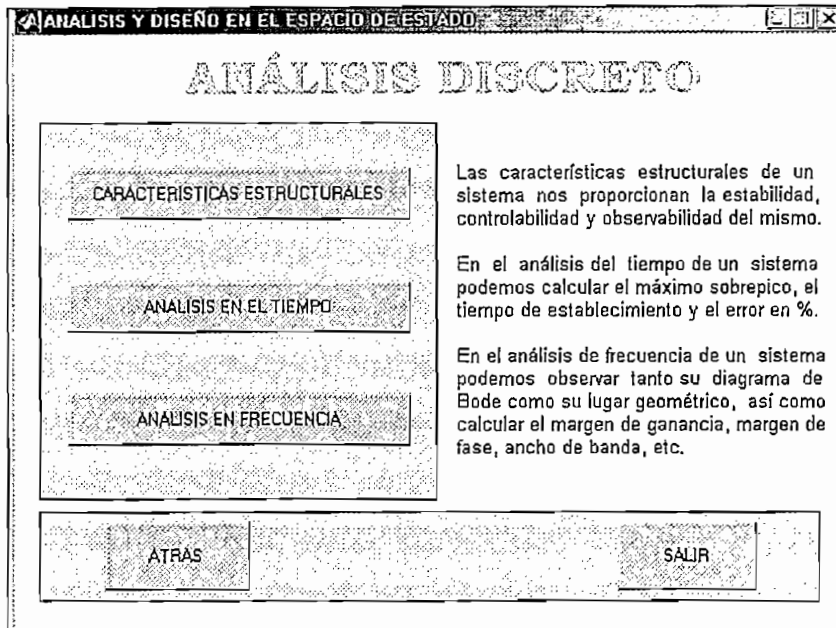
Para la discretización del sistema el usuario puede ingresar el tiempo de muestreo o a su vez escoger el sugerido por el programa, después se debe presionar el botón de continuar.

A continuación se abre la pantalla en donde se muestra al sistema discretizado en sus dos representaciones, función de transferencia y variables de estado. En esta pantalla se encuentra la opción de ingresar al análisis discreto.

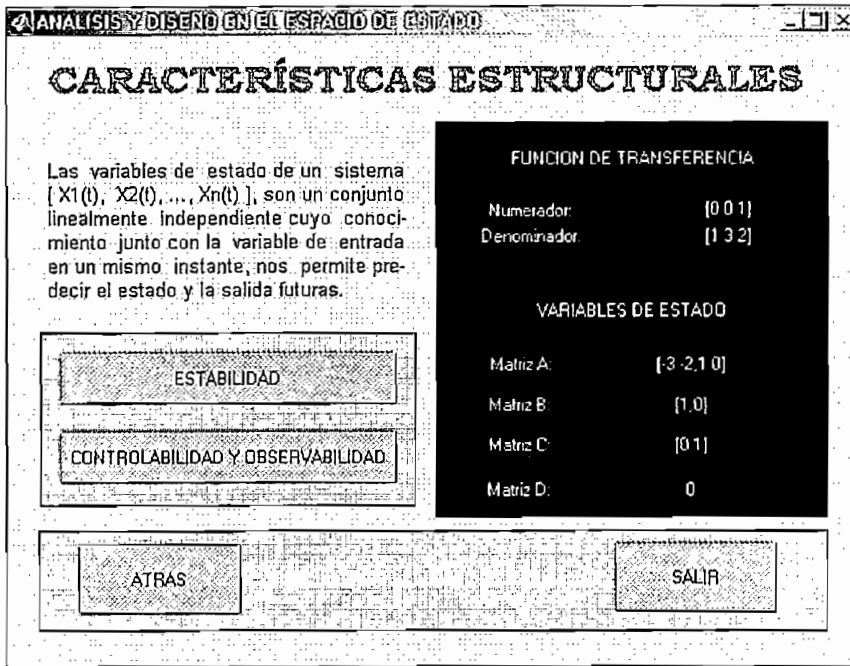


La pantalla de análisis discreto tiene las mismas opciones y estructura que la pantalla de análisis continuo, éstas son:

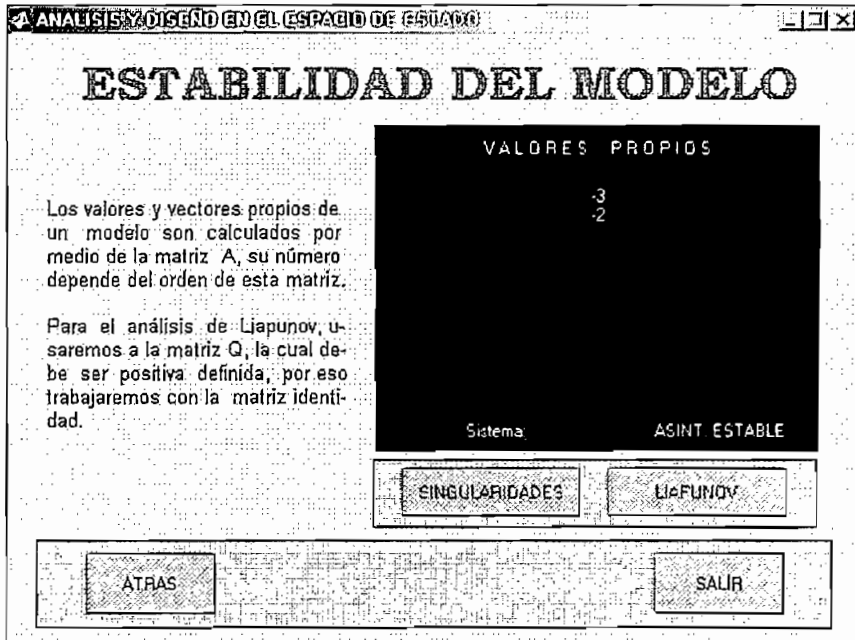
- Características estructurales
- Análisis en el tiempo
- Análisis en frecuencia



Las opciones que se presentan en la pantalla de las características estructurales del sistema son la estabilidad y, la controlabilidad y observabilidad de la planta que se está tratando.



Para la opción de estabilidad del sistema, se tiene la siguiente pantalla, en la cual el usuario puede elegir entre encontrar las singularidades del sistema o analizar la estabilidad de Liapunov.



La presentación del análisis de Liapunov es la siguiente:

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

ESTABILIDAD SEGÚN LIAPUNOV

Existen dos métodos para analizar la estabilidad de un sistema por medio de Liapunov:

- 1) Método Directo: Se calculan estados, salidas y trayectorias.
- 2) Método Indirecto: No se calculan estados y usa la función de Liapunov.

$$V(x) = x^T P x$$

Donde: x es el vector de estados.

MATRIZ A
[-5 -6 1 0]

MATRIZ P
[0.7 -0.5 -0.5 0.5]

MATRIZ Q
[1 0 0 1]

SISTEMA DE:
Segundo Orden

Sistema: ASINT ESTABLE

ATRÁS
SALIR

La presentación de las singularidades del sistema es la siguiente:

ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADO

SINGULARIDADES

SINGULARIDAD
Nodo Estable

SISTEMA
Estable

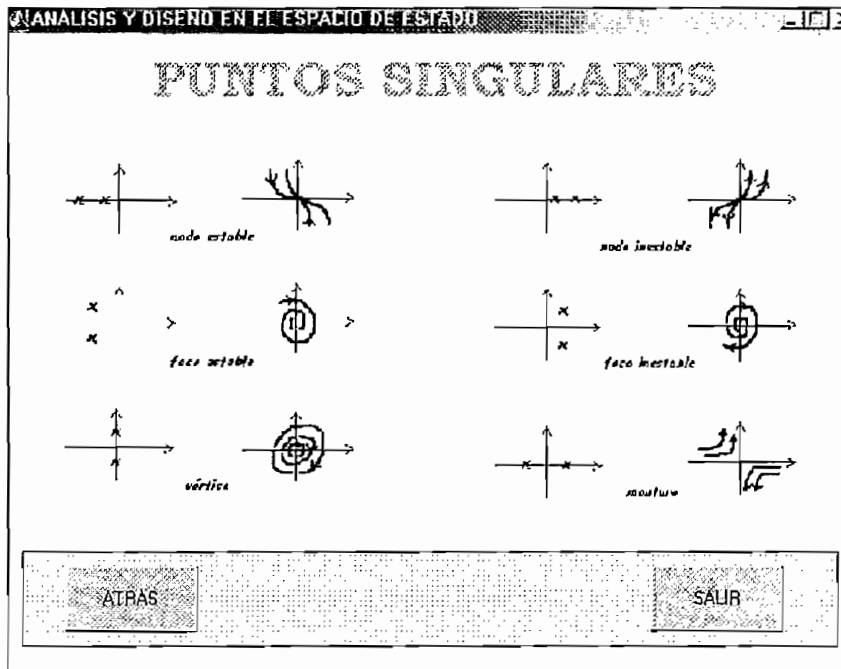
CONDICIONES INICIALES

CI1	CI2	CI3
1	2	3
0	0	0

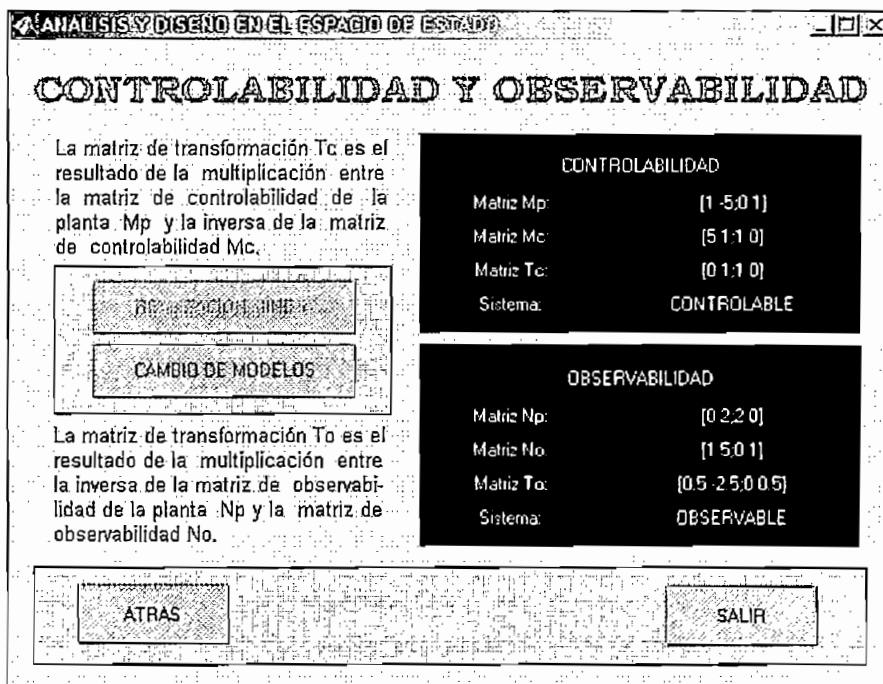
Diagrama de Fase debido a 3 condiciones iniciales

ATRÁS
PUNTOS SINGULARES
SALIR

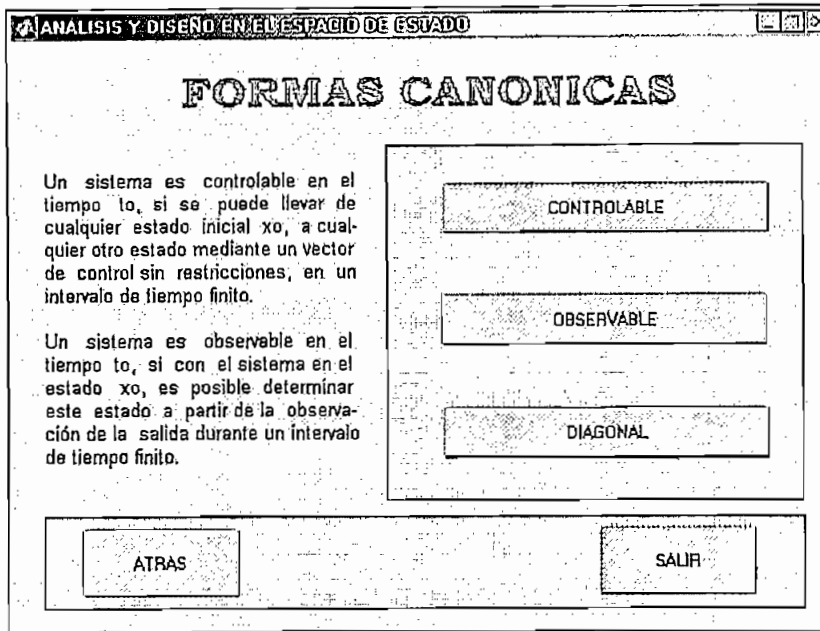
El botón de puntos singulares muestra la siguiente pantalla:



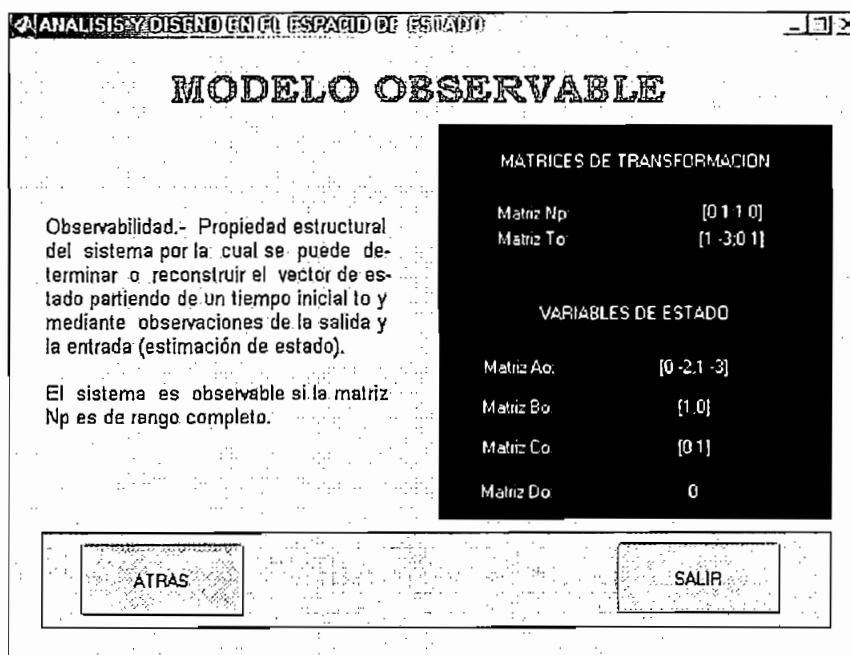
Para la opción de controlabilidad y observabilidad, la pantalla que se presenta es:



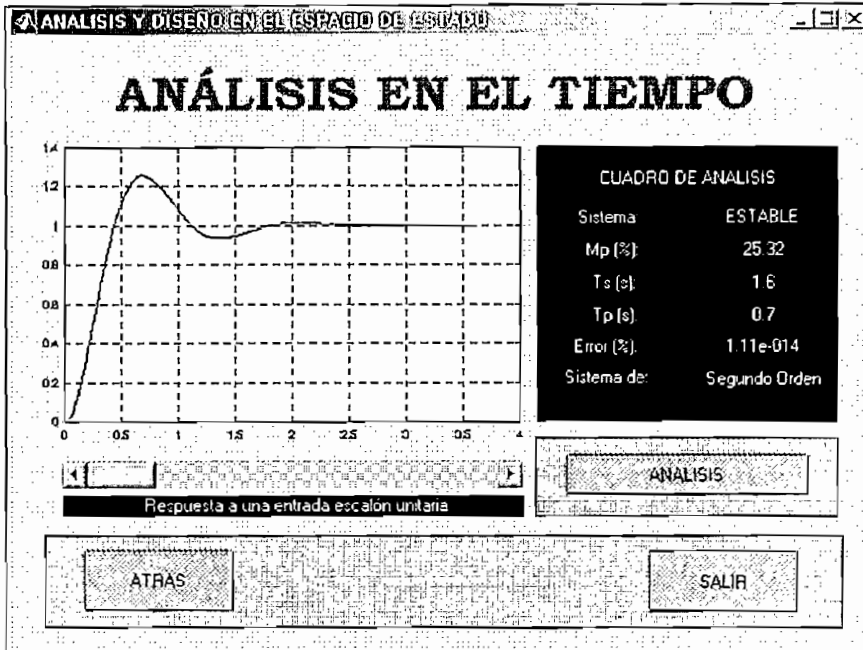
En esta pantalla el usuario puede transformar el sistema ingresado a cualquiera de sus tres formas canónicas: controlable, observable o diagonal.



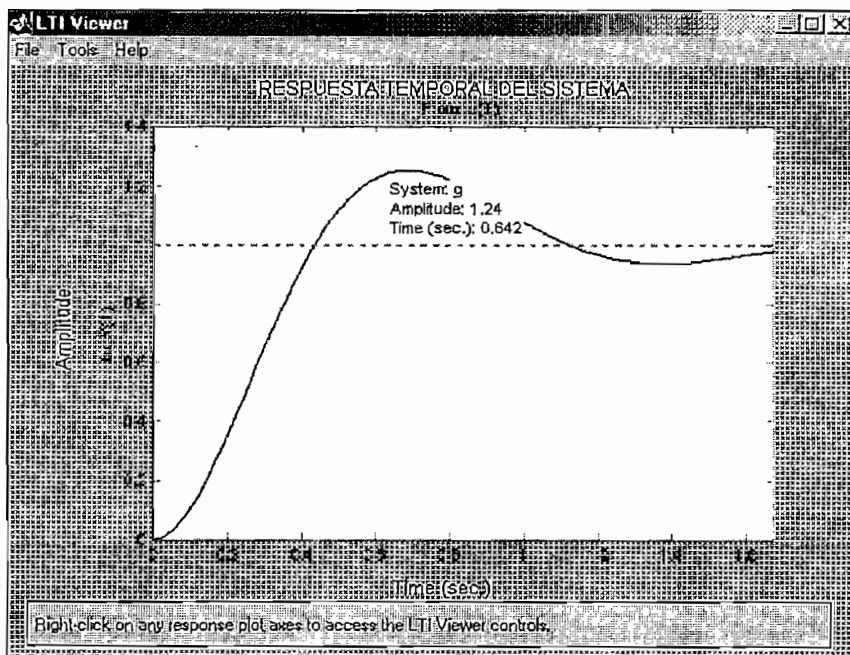
En cada una de estas pantallas, se presentan las matrices de transformación, así como las nuevas matrices de las variables de estado del sistema, por ejemplo, para la observabilidad de un sistema, la pantalla es la siguiente:



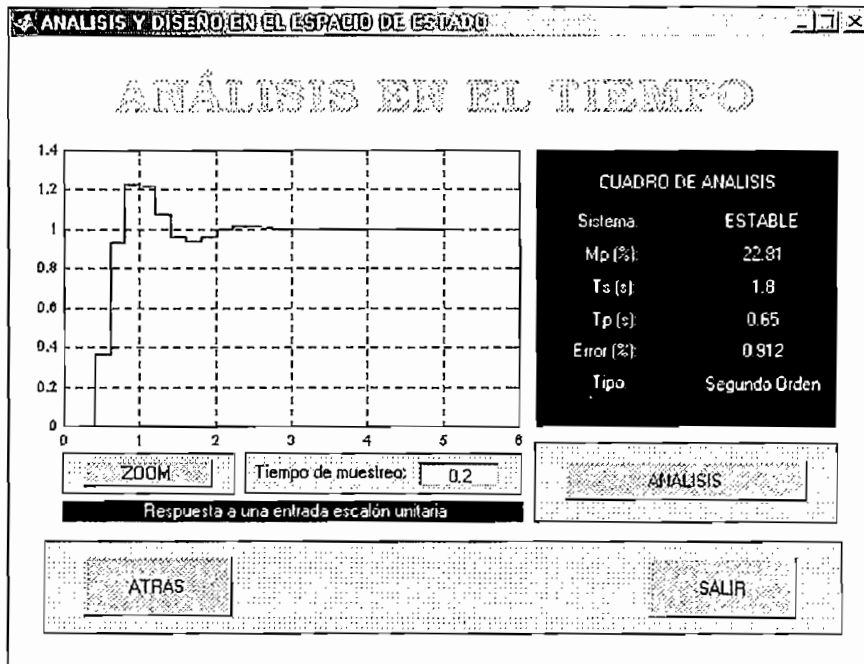
Si se presiona el botón de análisis en el tiempo, (en la pantalla del menú completo del programa) se presenta la siguiente pantalla:



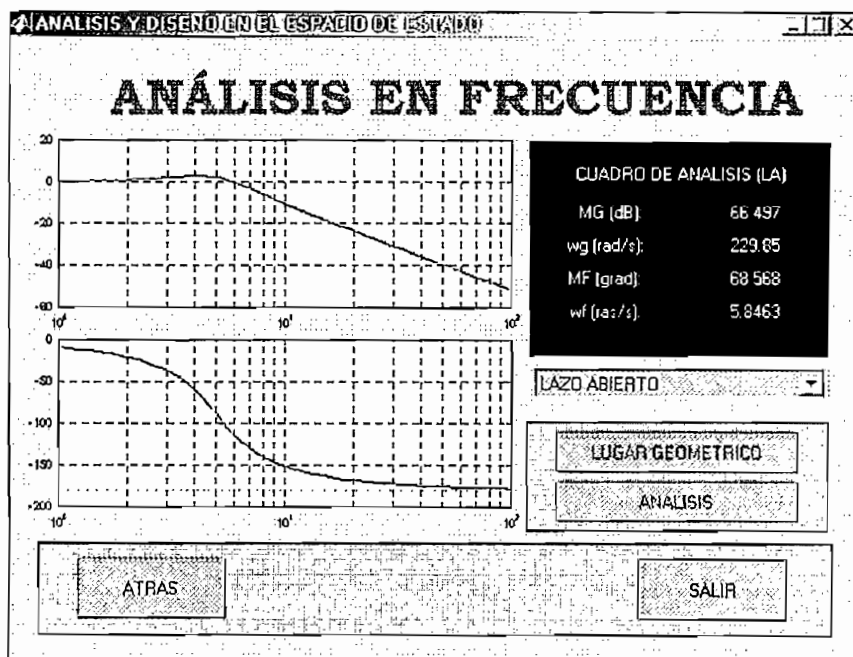
En esta pantalla, se tiene la posibilidad de variar el tiempo de simulación de la respuesta a una entrada paso. También se tiene la opción de ubicar el valor de cualquier punto en la gráfica de la respuesta paso al presionar el botón de análisis, esta opción utiliza el comando "Itiview" del MATLAB. Esta opción se encuentra presente en todas las pantallas del análisis.



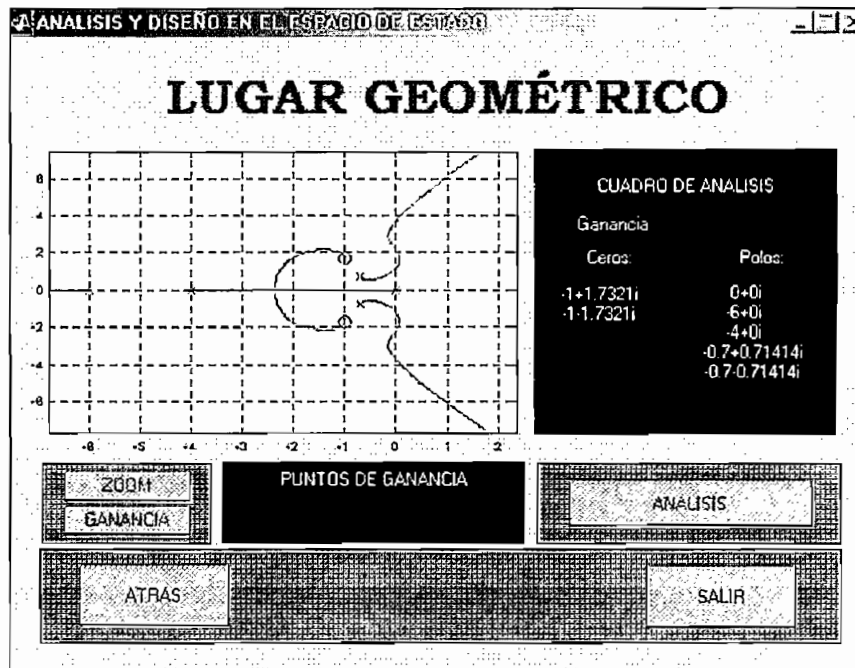
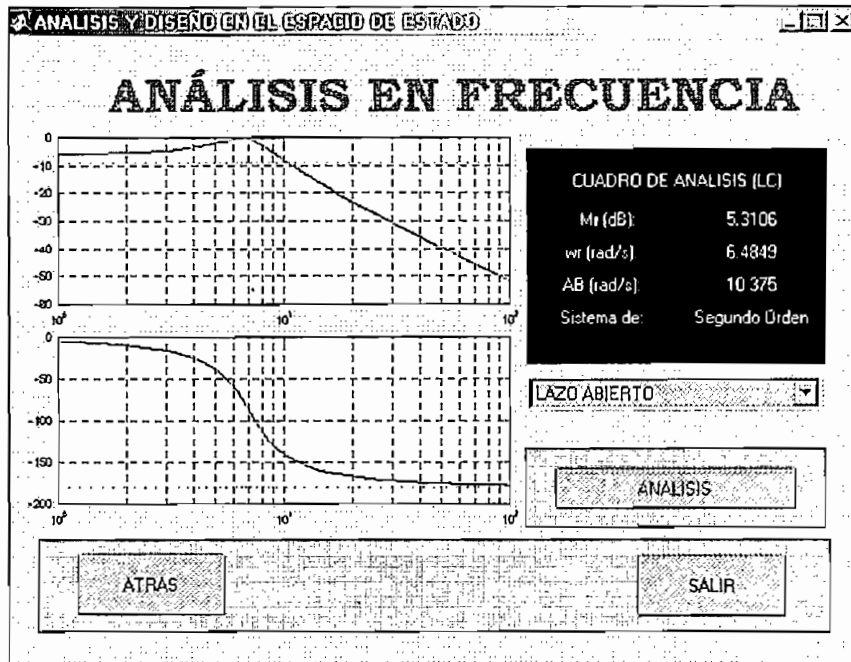
En lo que se refiere al análisis del tiempo para los sistemas discretos, la pantalla tiene la opción de realizar un "zoom" de la simulación.



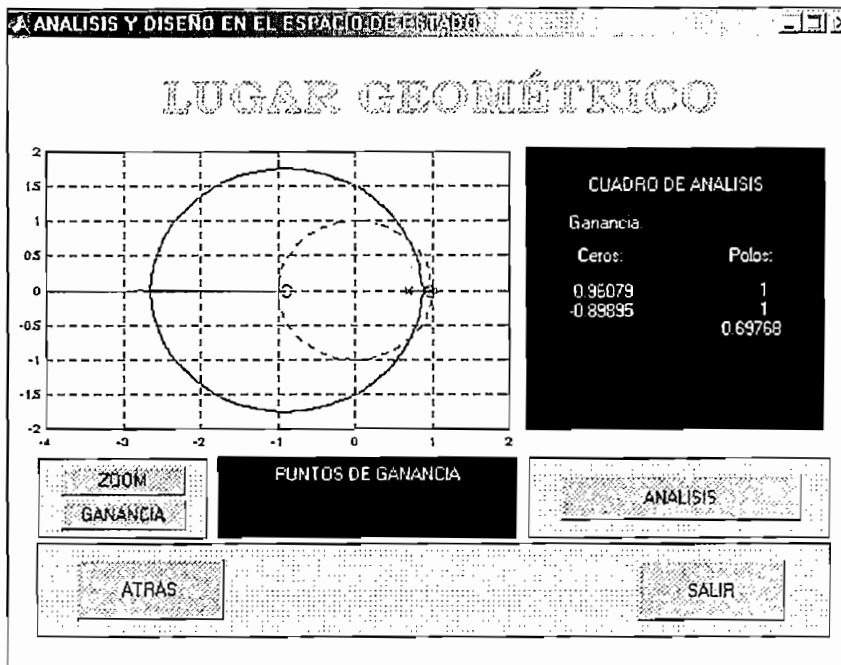
En la opción de análisis en frecuencia, se presenta el diagrama de Bode (magnitud y fase) en lazo abierto.



En esta pantalla se puede escoger entre la pantalla del lugar geométrico de las raíces (LGR) o el diagrama de Bode en lazo cerrado.

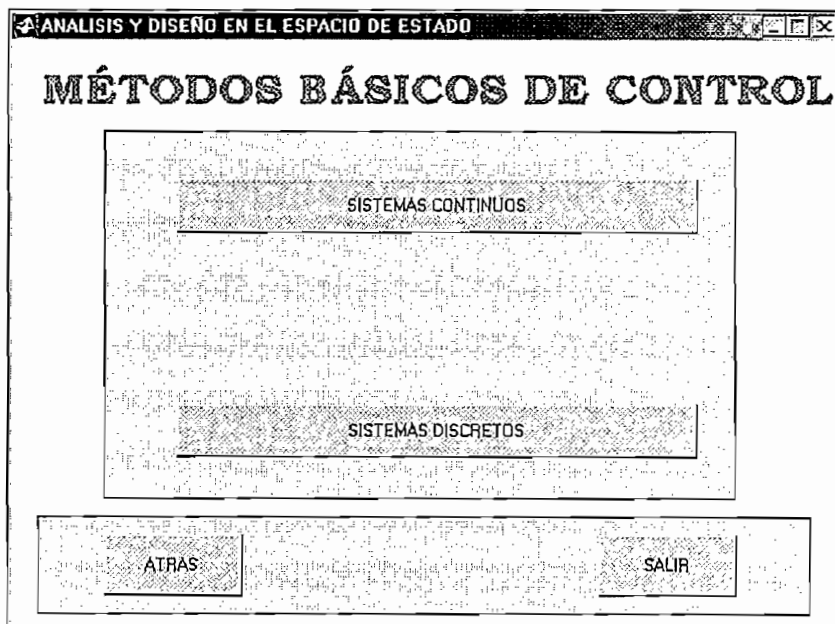


Para encontrar la ganancia en cualquier punto del LGR mediante el puntero del mouse luego de presionar el botón de ganancia.



B.2.2 Métodos básicos de control

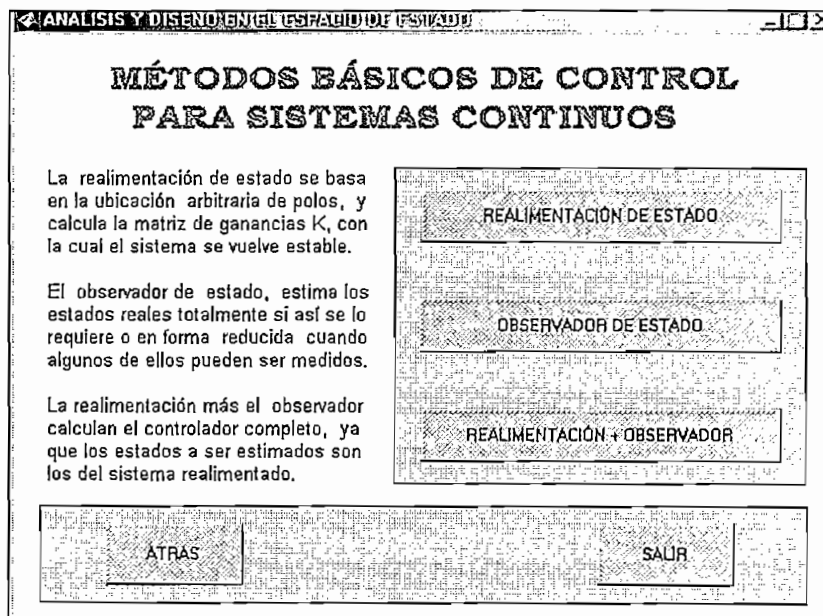
Al escoger la opción de métodos básicos de control, se presenta la pantalla para escoger entre el diseño continuo o el diseño discreto:



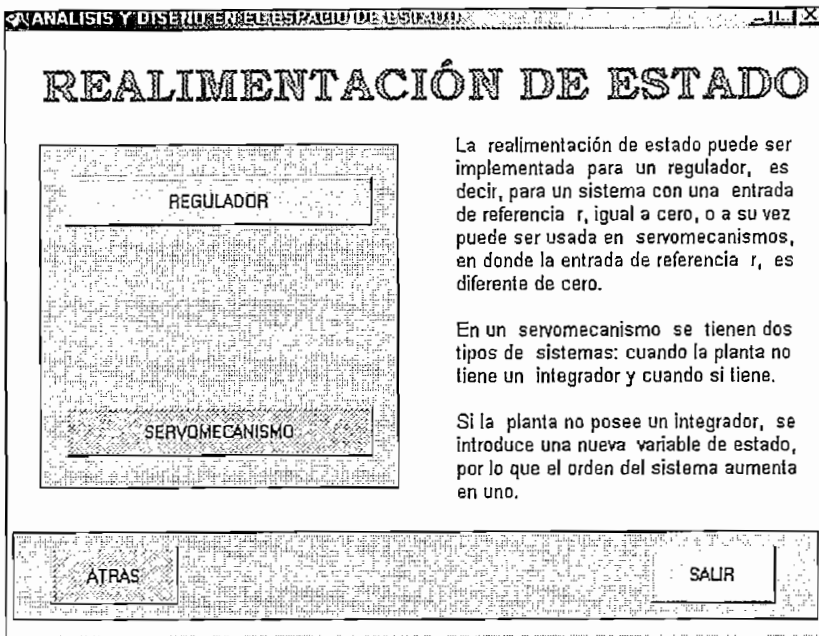
Tanto para los sistemas continuos y discretos, las pantallas tienen las mismas opciones, excepto que al ingresar al diseño discreto, se debe especificar el tiempo de muestreo deseado.

Luego de ingresar el tiempo de muestreo, se tiene acceso al menú de los métodos básicos:

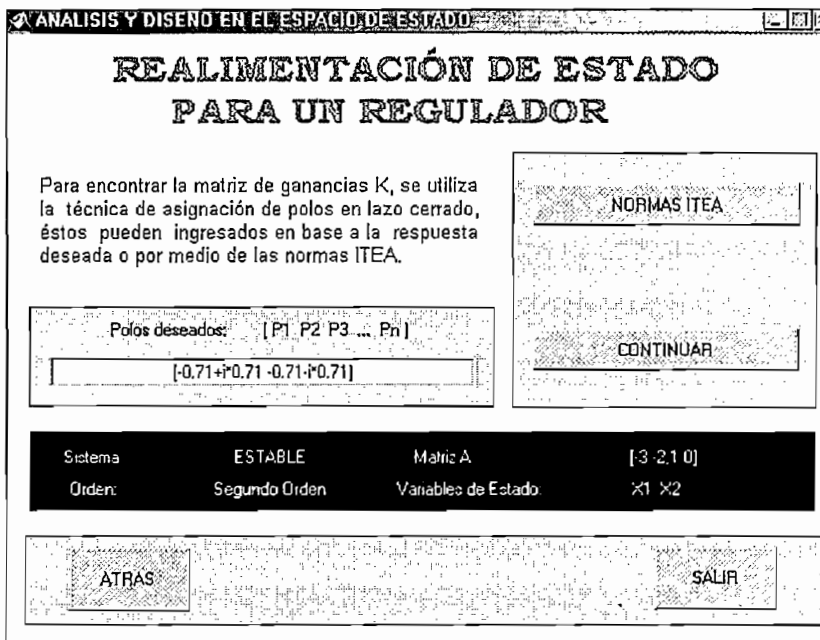
- Realimentación de estado
- Observador de estado
- Realimentación más observador

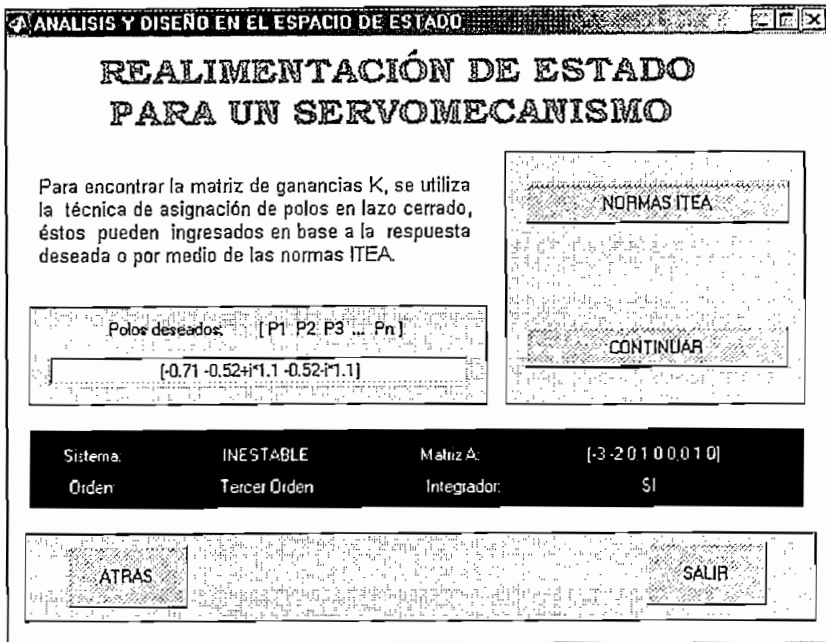


Si se escoge la realimentación de estado continua, se presentará la siguiente pantalla, en donde debemos escoger entre la realimentación de estado para un regulador o la realimentación de estado para un servomecanismo:

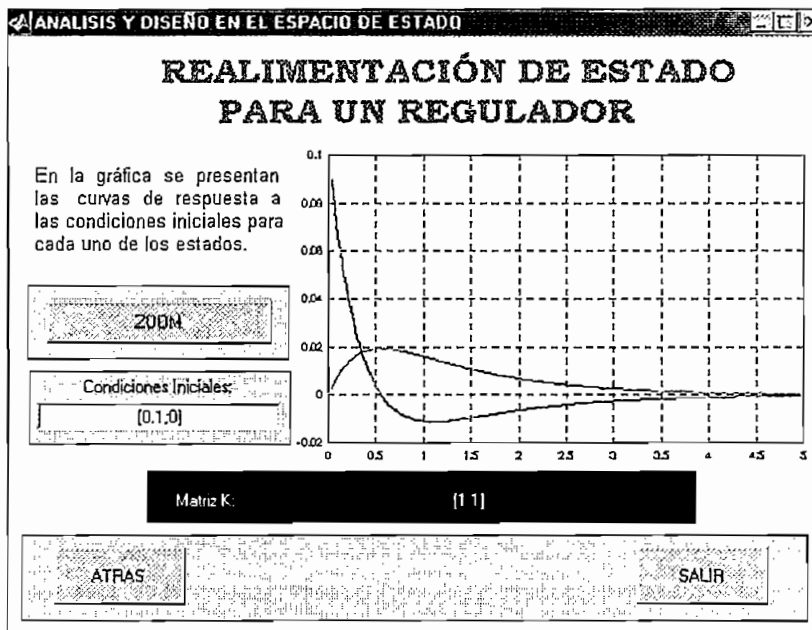


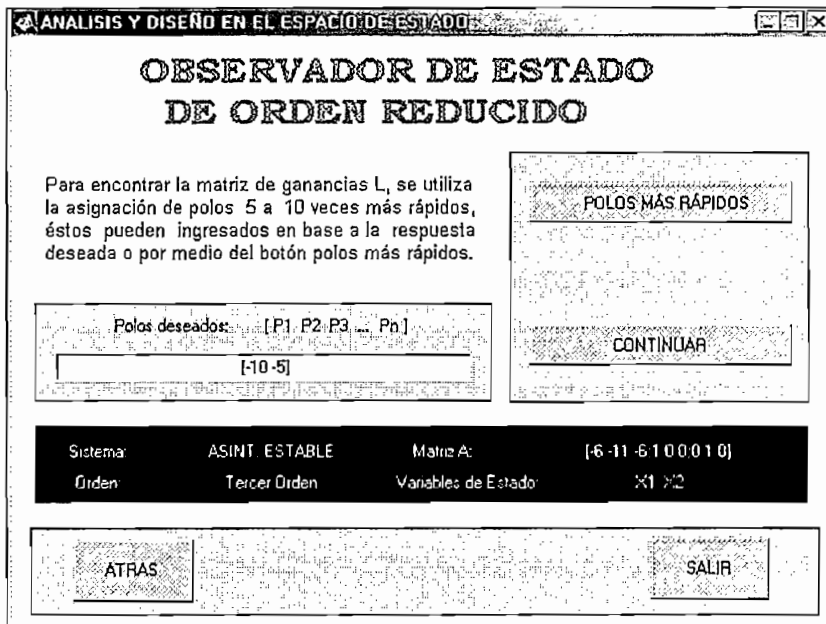
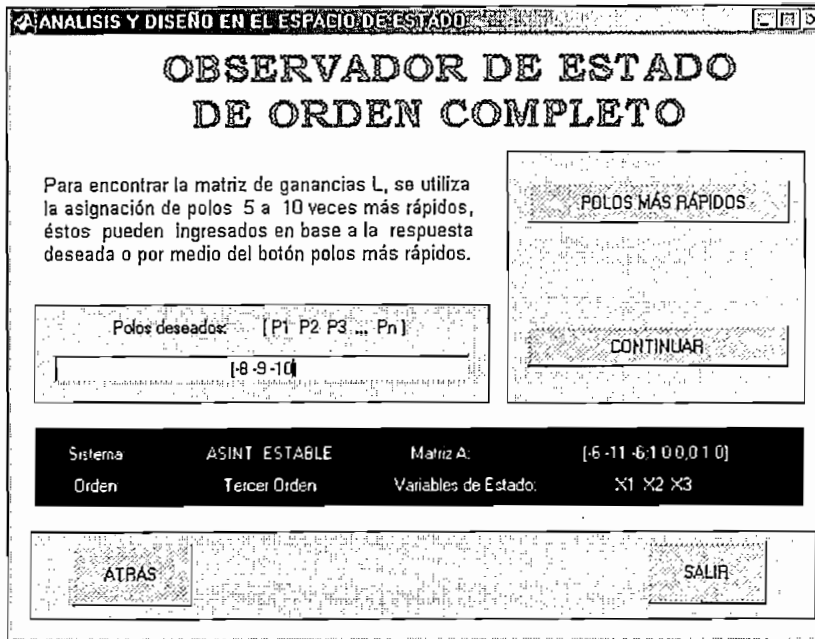
Luego de escoger una de las dos opciones, se ingresa a una pantalla en donde debemos colocar los polos deseados en lazo cerrado. Si se presiona el botón de normas ITEA, los valores de los polos para la realimentación serán los especificados por la ITEA.



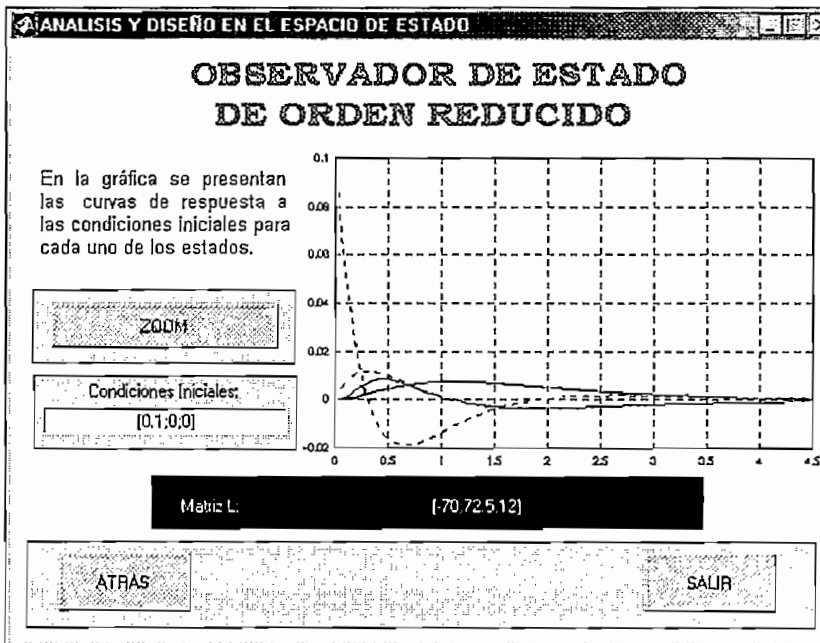
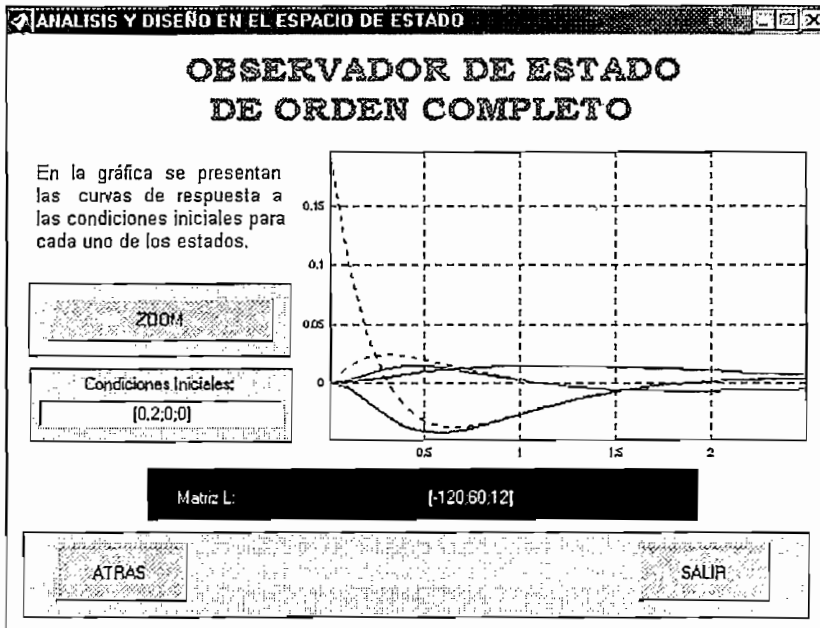


Luego de escoger los polos deseados para el sistema, se presiona el botón de continuar y se accede a la pantalla de simulación del sistema, donde se puede variar las condiciones iniciales para las variables de estado o realizar un “zoom” del gráfico.





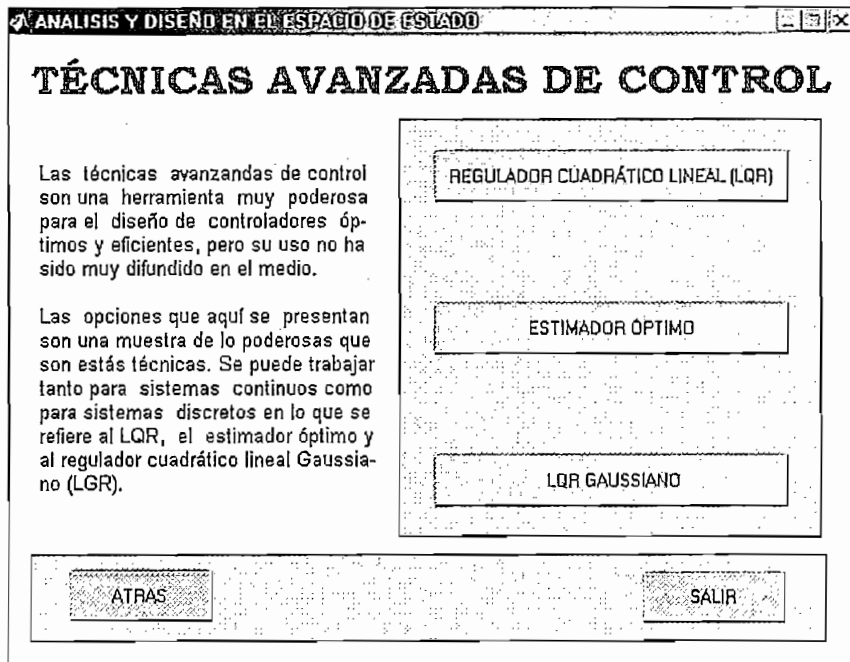
Después de colocar los valores de los polos, se presiona el botón de continuar, y se accede a la pantalla donde se grafica los estados estimados y los reales, a este gráfico se le puede realizar un "zoom" o variar sus condiciones iniciales.



Mediante el botón de realimentación más observador del menú de los métodos básicos, el usuario debe ingresar tanto los polos deseados en lazo cerrado como los polos deseados del observador y luego presionar el botón de continuar.

B.2.3 Técnicas avanzadas de control

Para ingresar al menú de las técnicas avanzadas seleccionamos el botón de técnicas avanzadas, luego de lo cual se presenta la siguiente pantalla:

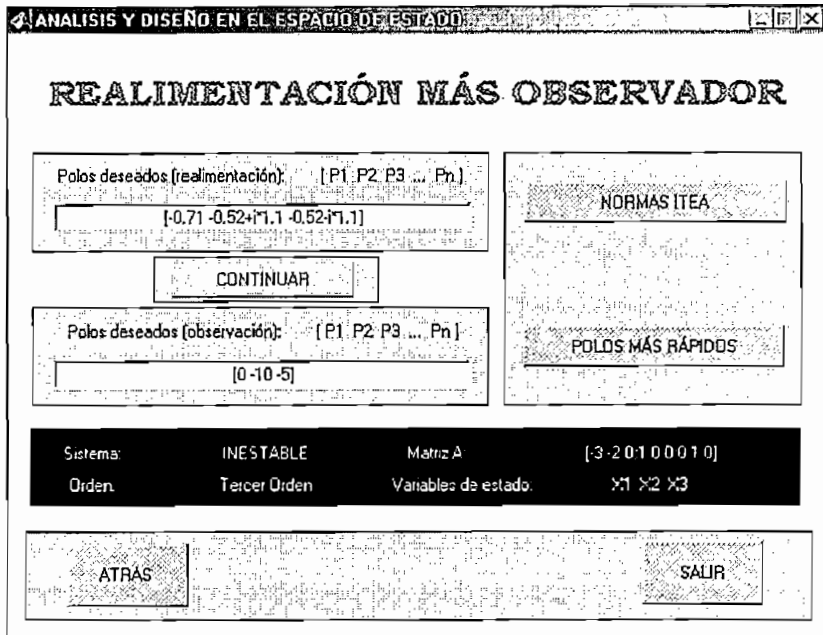


En el menú de esta pantalla tenemos acceso a las siguientes opciones:

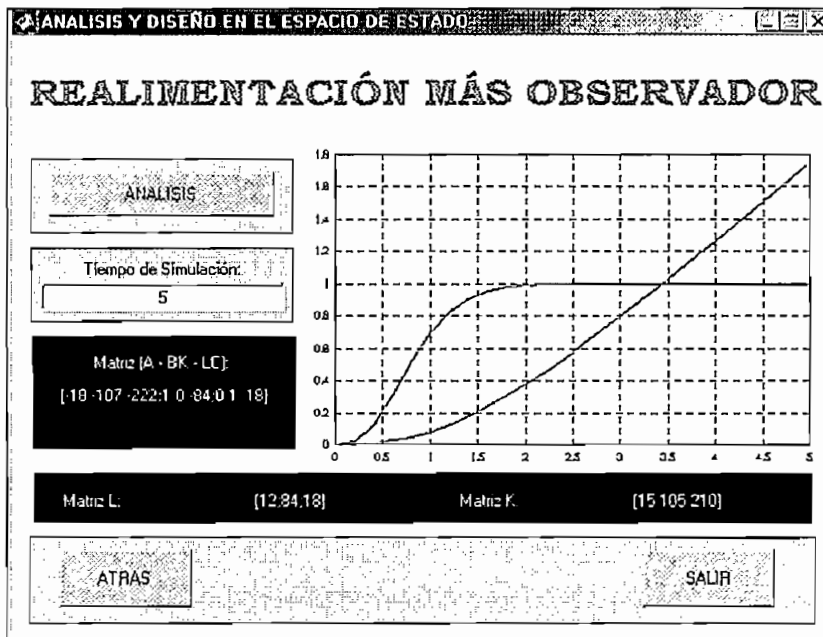
- Regulador cuadrático lineal (LQR)
- Filtro de Kalman
- Regulador cuadrático lineal Gaussiano (LQG)

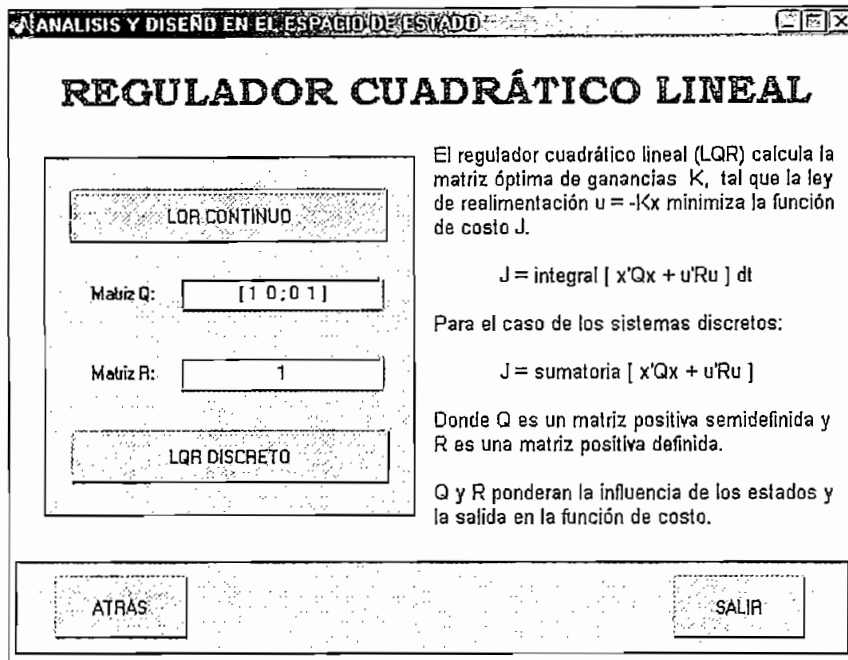
Para las alternativas que se presentan en esta pantalla se puede elegir entre los sistemas continuos o los sistemas discretos, sus opciones son las mismas, tomando en cuenta que al escoger al diseño discreto, se debe ingresar primero el tiempo de muestreo en la respectiva pantalla.

Seleccionando la opción del LQR, se presenta la siguiente pantalla:

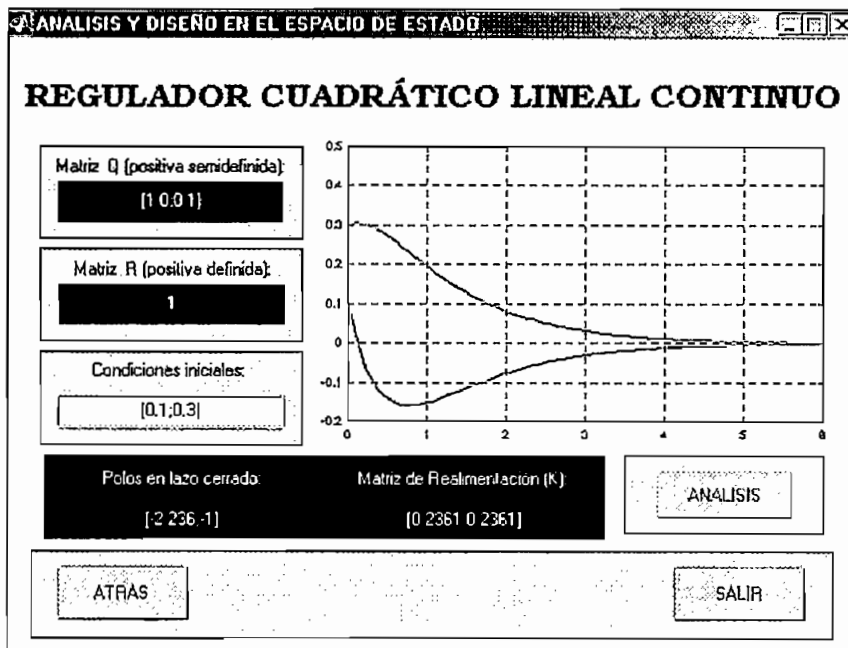


La pantalla que se muestra luego, presenta la respuesta a una entrada escalón unitario del sistema controlado y del sistema original sin compensar. En esta pantalla se puede variar el tiempo de simulación.





Luego de seleccionar a los sistemas continuos o discretos, después de ingresar las matrices Q y R, se presenta esta pantalla:

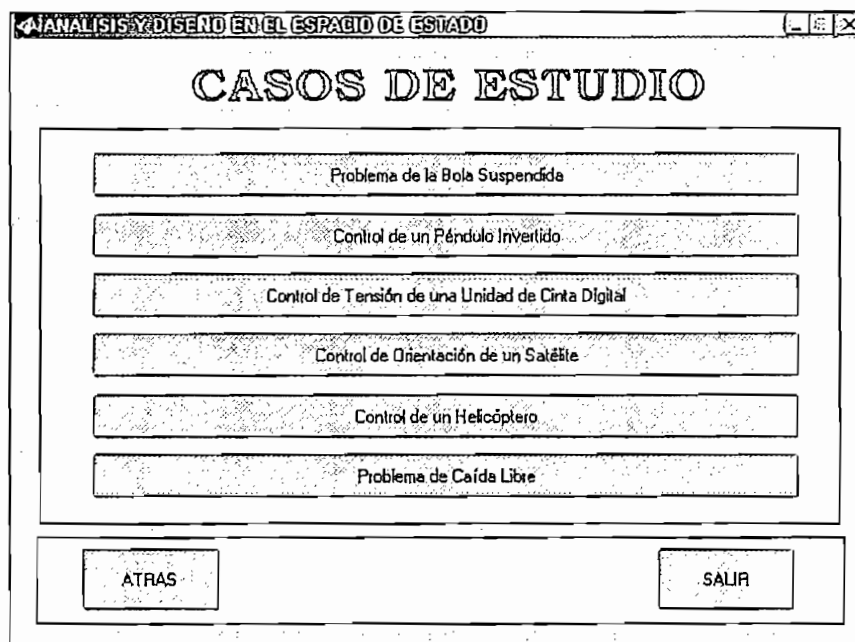


Seleccionando la opción del filtro de Kalman, se muestra una pantalla de ingreso de datos:

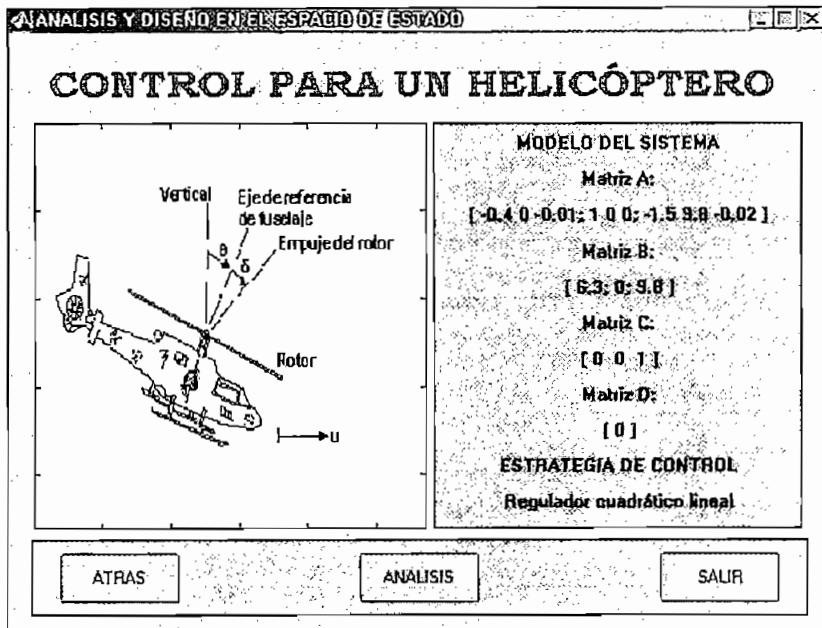
B.2.4 Casos de estudio

En el menú completo del programa se tiene la opción de seleccionar los modelos de los casos de estudio:

- Problema de la bola suspendida
- Control del péndulo invertido
- Control de tensión de una unidad de cinta digital
- Control de orientación de un satélite
- Control del movimiento longitudinal de un helicóptero
- Problema de la caída libre



Las pantallas para cada uno de los casos de estudio presentan el modelo del sistema y la estrategia de control sugerida, por ejemplo para el control del helicóptero, la pantalla es la siguiente:

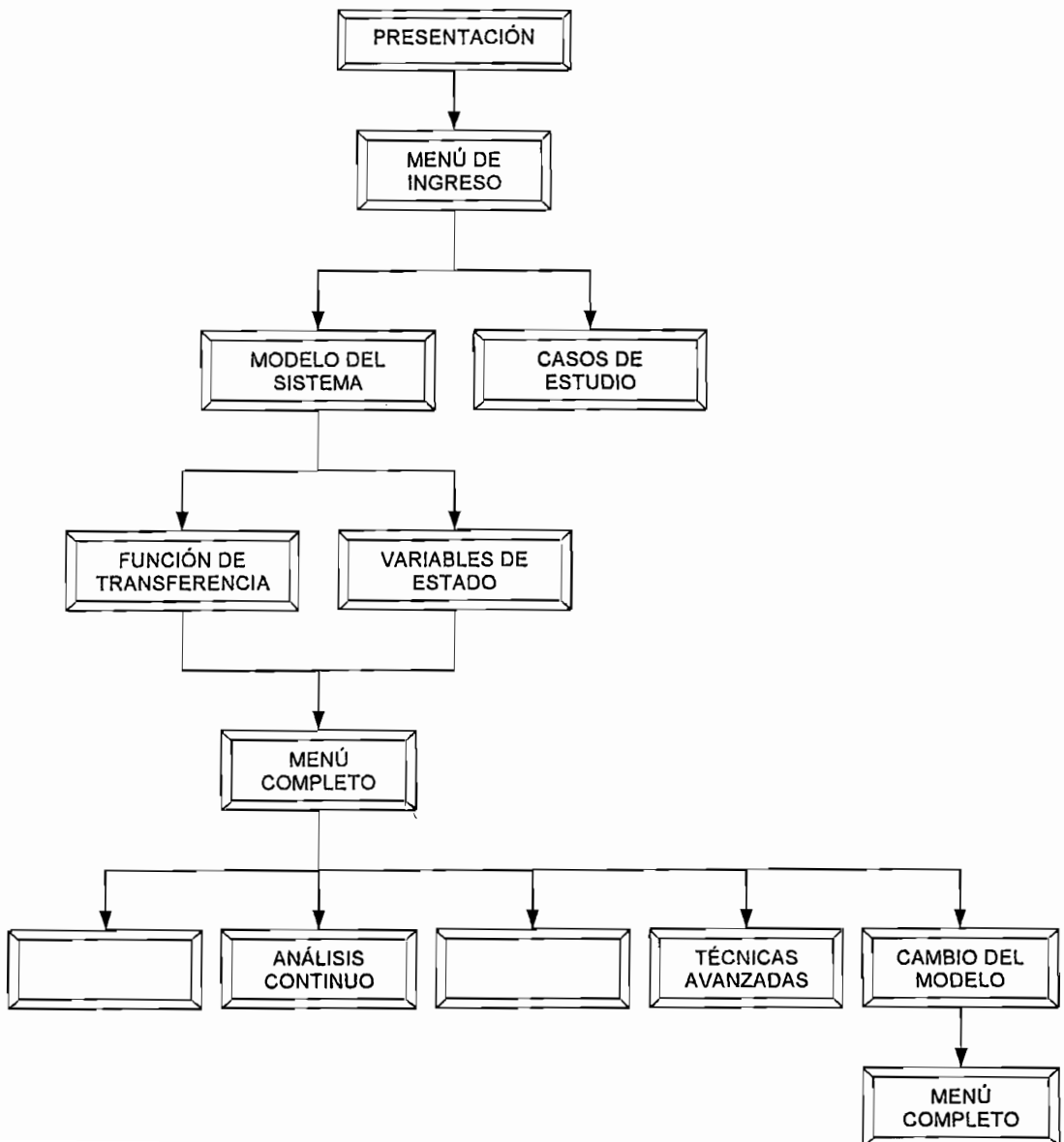


Mediante el botón de análisis se tiene acceso al menú completo del programa *ades*, en donde se puede realizar el análisis completo del caso de estudio, así como el diseño en el espacio de estado.

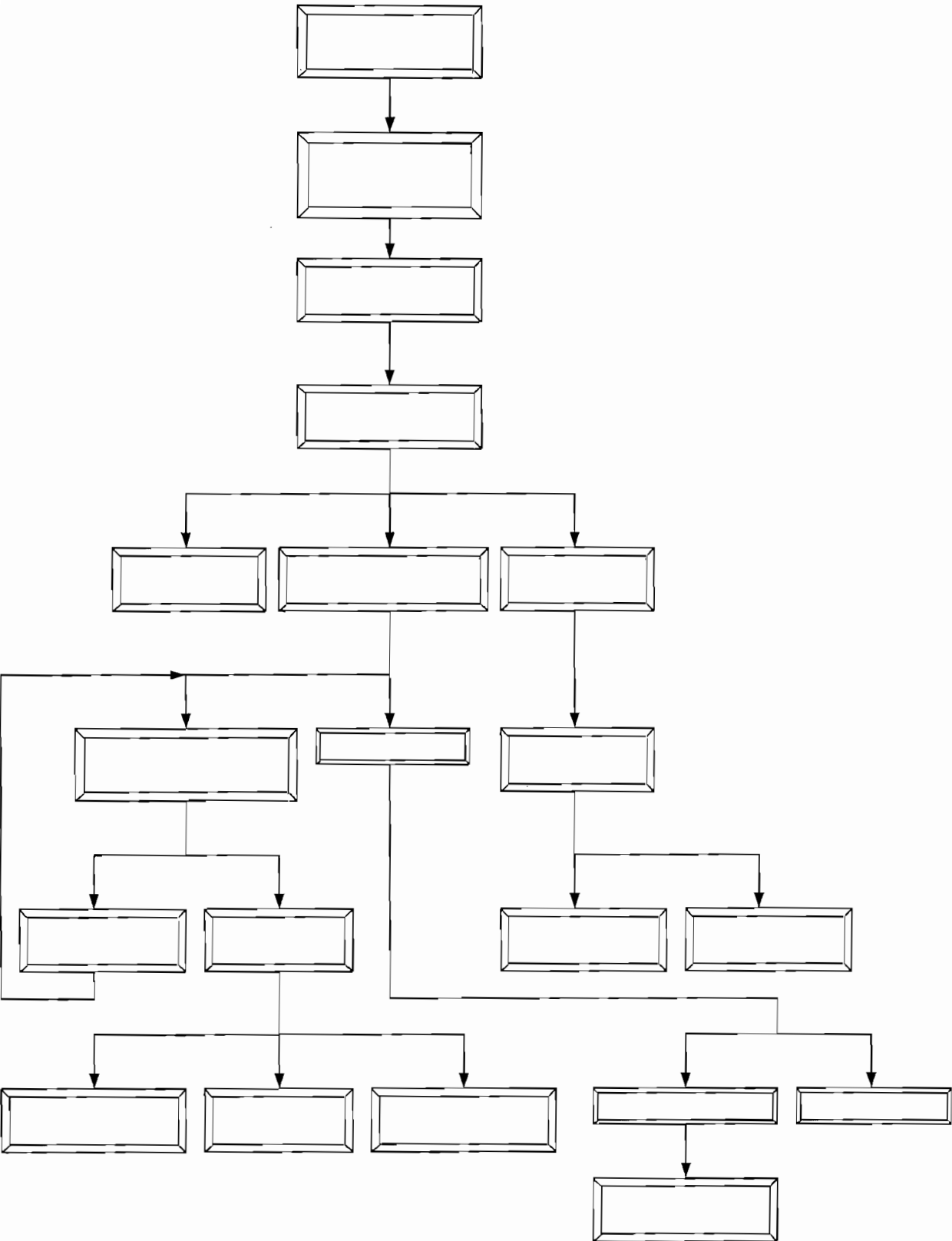
ANEXO C

DIAGRAMA DE FLUJO DE LAS PANTALLAS DEL PROGRAMA

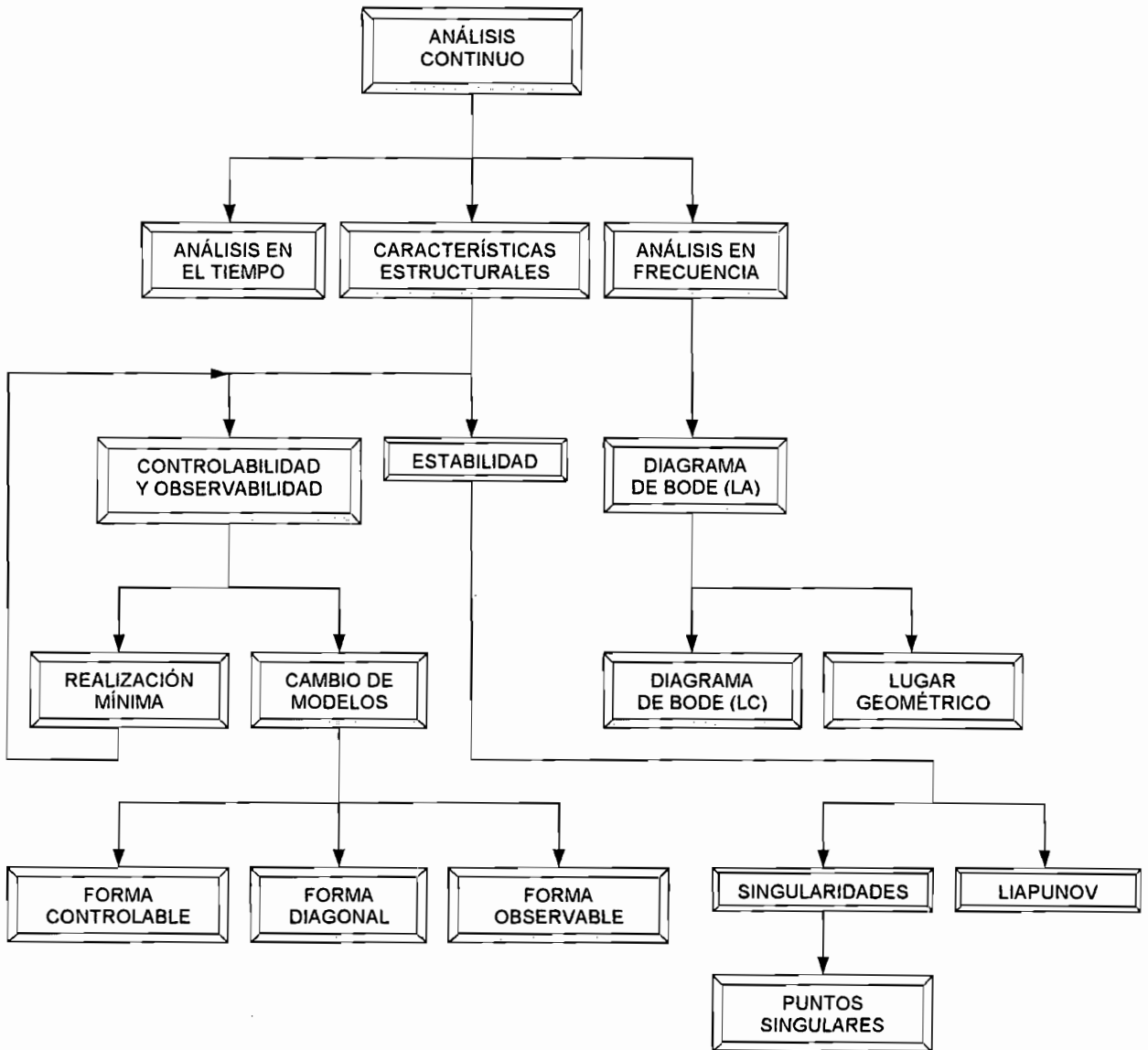
C.1 PANTALLAS DE INGRESO AL PROGRAMA



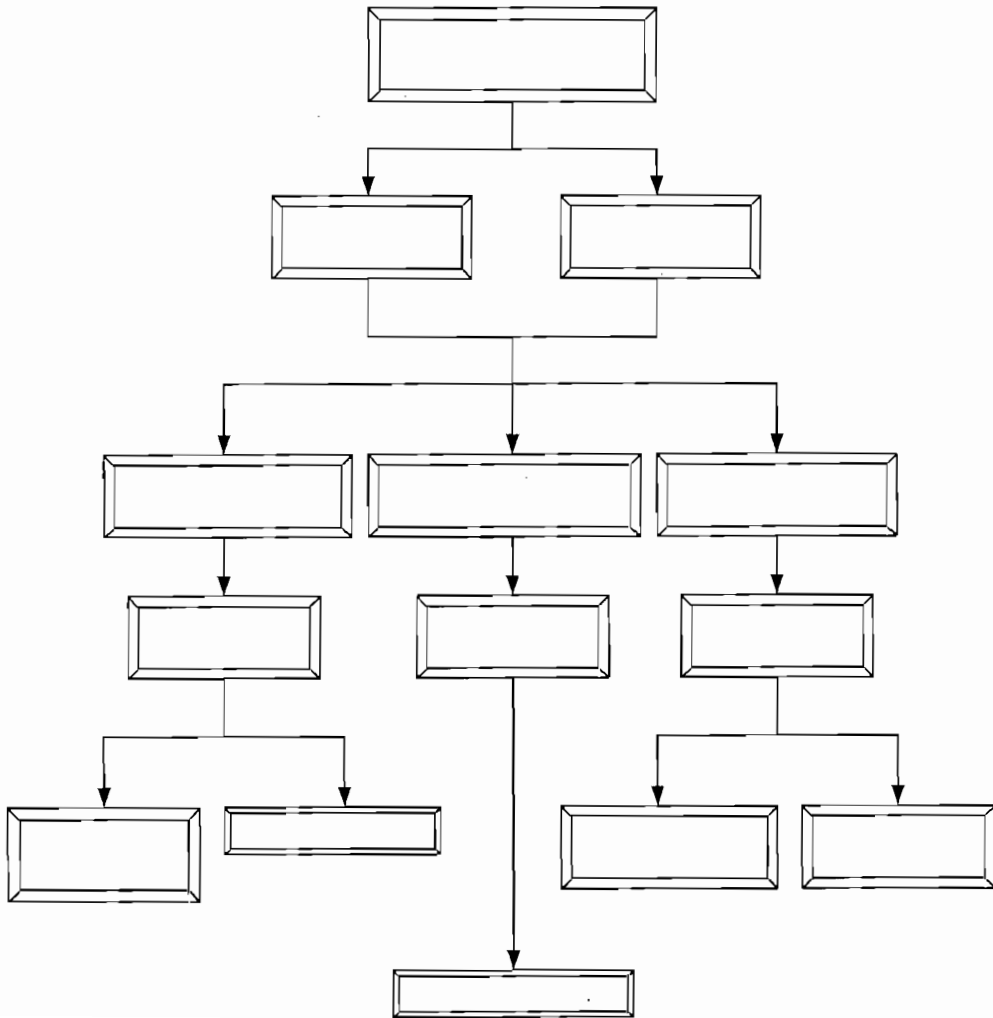
C.2 PANTALLAS DE DISCRETIZACIÓN Y ANÁLISIS DISCRETO



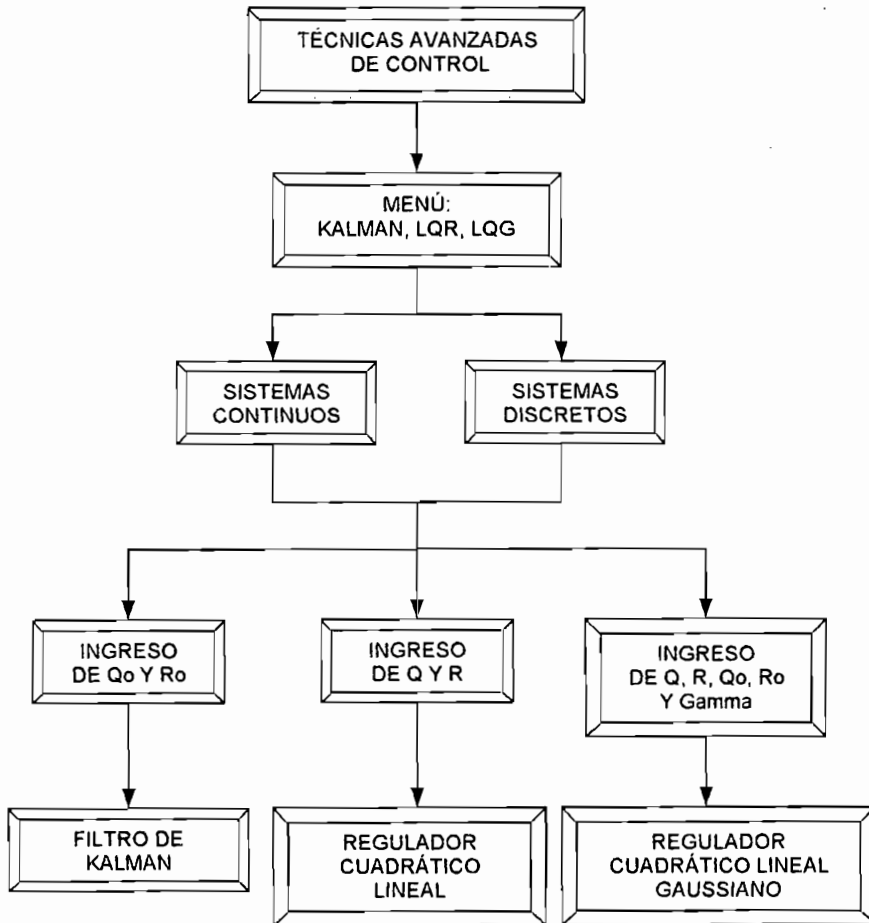
C.3 PANTALLAS DE ANÁLISIS CONTINUO



C.4 PANTALLAS DE MÉTODOS BÁSICOS DE CONTROL



C.5 PANTALLAS DE TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL



C.6 PANTALLAS DE CASOS DE ESTUDIO

